



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

COMPLEJIDAD COMUNICACIONAL Y UNIVERSALIDAD INTRÍNSECA EN
AUTÓMATAS CELULARES UNIDIMENSIONALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

RAIMUNDO JOSÉ BRICEÑO DOMÍNGUEZ

PROFESOR GUÍA:
IVÁN RAPAPORT ZIMERMANN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: RAIMUNDO BRICEÑO D.
FECHA: 02/08/2011
PROF. GUÍA: IVÁN RAPAPORT Z.

COMPLEJIDAD COMUNICACIONAL Y UNIVERSALIDAD INTRÍNSECA EN AUTÓMATAS CELULARES UNIDIMENSIONALES

Encontrar buenas cotas inferiores y condiciones necesarias para nociones de complejidad y universalidad es uno de los mayores desafíos en el área de la informática teórica. En este sentido, la teoría de la complejidad comunicacional ha resultado ser una herramienta útil para abordar tal problemática en diversos modelos de computación, tales como circuitos booleanos, máquinas de Turing y modelos no convencionales. En este trabajo se incorporan tales técnicas al estudio del conjunto de autómatas celulares unidimensionales.

Dada una relación de simulación \preceq y autómatas celulares (ACs) Φ y Ψ , se denota $\Phi \preceq \Psi$ si es el caso que Φ puede ser simulado por Ψ . Un AC Ψ capaz de simular a todo otro AC Φ es denominado como intrínsecamente \preceq -universal. Aquí son considerados tres tipos de simulaciones presentes en la literatura: sobreyectiva, inyectiva y mixta, siendo las dos últimas capaces de soportar universalidad intrínseca. Por otro lado, para la primera de éstas, la existencia de un elemento universal aún sigue siendo un problema abierto.

Seguidamente, son definidos cinco problemas comunicacionales inducidos por ACs: PRED, CYCL, SINV, TINV y CINV, de tal manera que $P_\Phi(x, y)$ indica la parametrización de un problema genérico P por un AC Φ , donde A_Φ es el conjunto de estados de éste y $x, y \in A_\Phi^+$ son inputs. Tales problemas cumplen con ser compatibles comunicacionalmente, esto es, si Ψ simula a Φ , se tiene que la complejidad comunicacional asociada a Φ es de menor o igual orden a la de Ψ . De este modo, si la complejidad comunicacional de P_Φ es de orden estrictamente menor a la de P_Ψ , se puede deducir que Φ no es intrínsecamente universal.

Luego, como punto fuerte, se introduce una nueva problemática comunicacional que logra aunar las técnicas y condiciones necesarias previamente estudiadas. Informalmente, cuando Alice y Bob (los participantes en el modelo usual de complejidad comunicacional) reciben respectivamente inputs x e y , tienen la posibilidad de escoger qué problema P resolver. Se entregan resultados mostrando que tal libertad hace de este nuevo problema, denominado OVRL, un potente filtro a la hora de desechar ACs como intrínsecamente universales. Más precisamente, se construye un AC con complejidad máxima en los cinco problemas anteriores y complejidad constante en OVRL.

Finalmente, se utilizan las herramientas desarrolladas para descartar en familias completas de autómatas celulares la cualidad de universalidad intrínseca. Además, se estudia la estructura de los preórdenes dados por las relaciones de simulación, caracterizando algunos conjuntos cerrados bajo simulación, tales como los ACs sobreyectivos, cerrados y reversibles, entre otros.

AGRADECIMIENTOS

Quiero honrar en estas líneas a todos aquellos que a lo largo de mi carrera han sido maestros, compañeros o, más aún, amigos.

En primer lugar, agradezco encarecidamente a aquellos que me acompañaron y guiaron en esta etapa final de mis estudios, en especial a los profesores Iván Rapaport y Alejandro Maass. Gracias por alentar y permitir mi tránsito por esas dos veredas científicas que me apasionan y que de alguna manera ustedes representan. Todos los consejos y oportunidades que me han otorgado en este tiempo han sido invaluable para mí.

Quiero también agradecer a Guillaume Theyssier, cuya disposición a discutir, recibir críticas y responder dudas fue un ejemplo de temple y ética científica del cual me enorgullecí presenciar. Agradezco también a su discípulo, Pierre-Etienne Meunier, por abrirse a compartir ideas, observaciones y resultados.

Muchas gracias al profesor Martín Matamala por las cuidadosas observaciones que hizo de mi trabajo y al profesor Mike Boyle por su desinteresada e importante ayuda en el estudio de autómatas celulares cerrados. No puedo dejar de lado al grupo de dinámica simbólica, que ha sido determinante en este último paso y en la definición de mi vocación, en especial al profesor Michael Schraudner, y a mis compañeros y amigos, Ítalo Cipriano y Sebastián Donoso. Agradezco también al resto de mis compañeros de carrera, principalmente a Adolfo Henríquez, Gonzalo Mena, Miguel Romero y Felipe Serrano.

Aprovecho además de honrar aquí a ese grupo de personas tan disímiles, extravagantes y geniales como son mis amigos de «El Bronx», aquella ridícula porción geográfica de Beauchef que acabó por determinarnos como grupo. Todos estos años no hubieran sido ni la mitad de lo que fueron sin ustedes. Montse, Migue, Irene, Anores, Cata, y todos los que pasaron por ahí: ojalá el tiempo y las diferencias no diluyan nuestra amistad y sigamos brillando como lo hemos hecho a pesar de las distancias y cambios en nuestras vidas.

Gracias a la familia Born Briones, por su acogida y solícita ayuda en momentos de dificultad. Por supuesto, gracias a ti, Javiera, por ser mi amada amiga y compañera. Gracias por estar a mi lado día a día. Bien sabemos tú y yo todos los créditos que te mereces: esta memoria prácticamente no existiría sin tu apoyo.

Por último, agradezco a los de siempre, a mi familia: a mi mamá, a mis hermanos Sebastián y Constanza, a mi cuñada Victoria y, finalmente, a mi papá, al que el tiempo no dio oportunidad de presenciar este momento. A ellos dedico este trabajo.

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de cuadros	IX
1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivos	4
1.4. Estructura de la memoria	5
2. Autómatas celulares unidimensionales	6
2.1. Definiciones básicas	6
2.1.1. Vecindades	9
2.1.2. Diagramas espacio-tiempo	10
2.1.3. Tipos de estados y configuraciones	11
2.1.4. Algunas operaciones sobre autómatas	12
2.2. Espacios de shift y consideraciones dinámicas	13
2.2.1. Definiciones	13
2.2.2. Subshifts como espacios métricos	16
2.2.3. ACs como sistemas dinámicos	17
2.3. Familias de autómatas celulares y propiedades	19
2.3.1. Atributos locales	19
2.3.2. Atributos globales	20
2.3.3. Atributos asintóticos	21

3. Simulaciones y universalidad intrínseca	22
3.1. Simulación en tiempo real (grouping)	22
3.2. Otras simulaciones (bulking)	26
3.3. Estructura de los preórdenes y propiedades	31
3.3.1. Máximos y mínimos	31
3.3.2. Ideales	32
3.4. Resultados de indecidibilidad	36
4. Problemas computacionales inducidos por ACs	42
4.1. Predicción	42
4.2. Largo de ciclo	44
4.3. Invasión espacial	44
4.4. Invasión temporal	45
4.5. Invasión controlada	47
5. Problemas comunicacionales inducidos por ACs	49
5.1. Complejidad comunicacional	49
5.1.1. Modelo básico	50
5.1.2. Otros modelos	53
5.1.3. Problemas de alta complejidad	54
5.1.4. Inducción de problemas comunicacionales	57
5.2. Problemas compatibles con \preceq_i	61
5.2.1. Predicción	61
5.2.2. Largo de ciclo	65
5.2.3. Invasión espacial	67
5.2.4. Invasión temporal	68
5.2.5. Invasión controlada	68
5.3. Problemas compatibles con \preceq_s y \preceq_m	69
5.3.1. Predicción	69
5.3.2. Contraejemplos	70
6. Independencia y superposición	76
6.1. Independencia	76
6.2. Superposición	82
6.2.1. Definición del modelo	82
6.2.2. Superposición en ACs	87
6.3. Condiciones necesarias para la universalidad	93

7. Consideraciones finales	98
7.1. Conclusiones	98
7.2. Trabajo futuro	99
Bibliografía	101
Anexo A	A-I
Anexo B	B-I
Anexo C	C-I

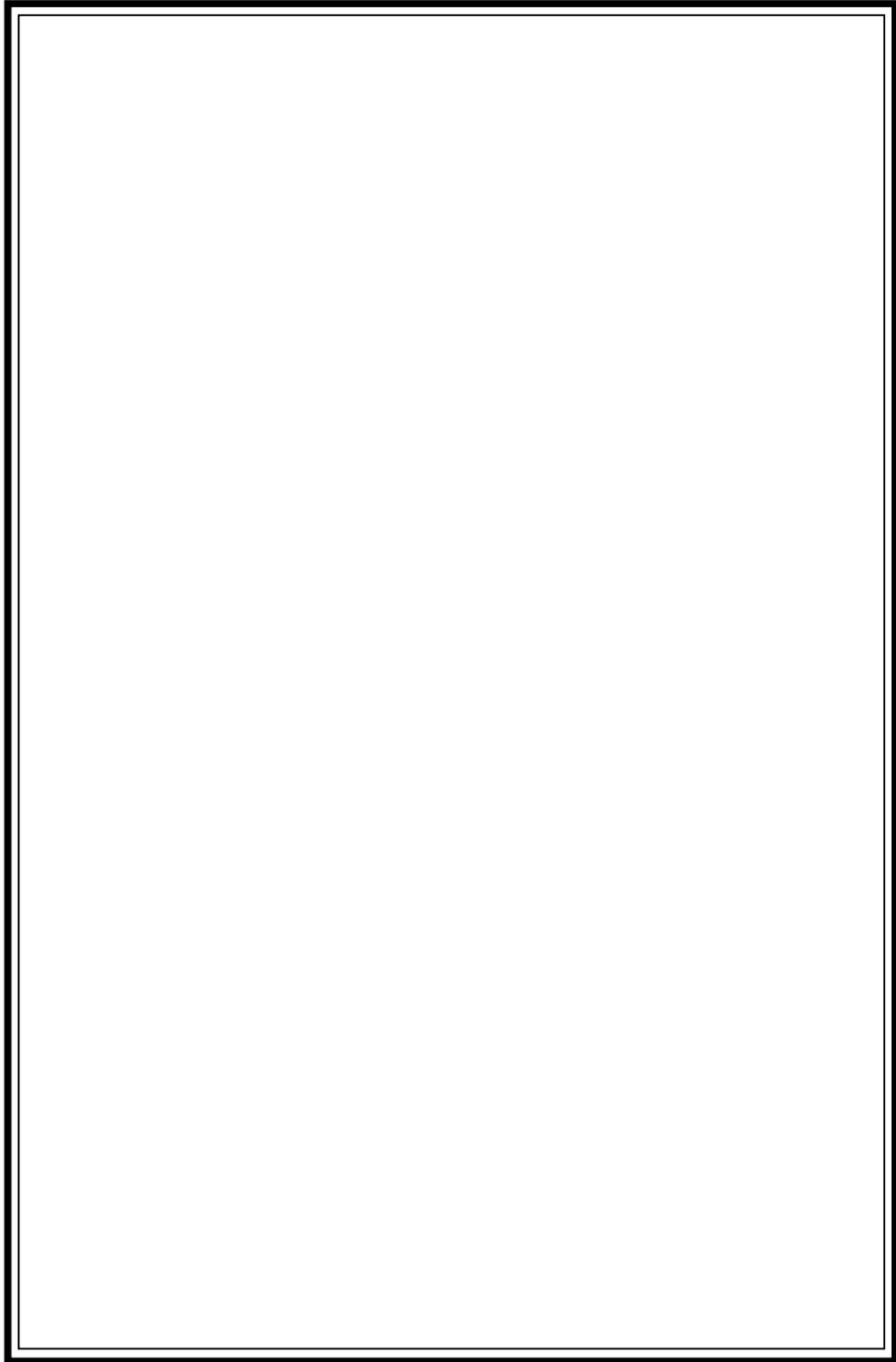
Índice de figuras

2.1.1. Diagrama espacio-tiempo usual.	10
2.1.2. Tipos de órbitas.	11
2.1.3. Acción del shift sobre una configuración.	12
2.2.1. Equicontinuidad.	18
3.1.1.4-potencia de un AC de radio 1.	23
3.2.1. Bulking paso a paso.	27
3.2.2. Ejemplo de simulación inyectiva.	28
3.2.3. Ejemplo de simulación sobreyectiva.	29
3.4.1. Comportamiento de un AC intrínsecamente universal canónico.	38
3.4.2. Patrón temporal y espacialmente periódico de Ξ	40
3.4.3. Diagrama espacio-tiempo periódico de Ξ	41
3.4.4. Triángulo de Pascal módulo 2 a partir de la configuración ${}^{\infty}010^{\infty}$	41
4.1.1. Problema de predicción.	43
4.1.2. Problema de predicción parametrizado.	43
4.2.1. Problema de largo de ciclo.	44
4.3.1. Problema de invasión espacial.	44
4.4.1. Problema de invasión temporal.	46
4.4.2. Ejemplo de configuración válida.	46
4.5.1. Problema de invasión controlada.	47
5.1.1. Ejemplo de árbol de protocolo.	51
5.1.2. Matriz M_{EQ} para $n = 5$	55
5.1.3. Matriz M_{DISJ} para $n = 5$	56
5.1.4. Matriz M_{IP} para $n = 5$	56
5.1.5. AC JustGliders.	58
5.1.6. JustGliders, caso $u \in L$	58

5.2.1. Paso 1.	61
5.2.2. Paso 2.	62
5.2.3. Acople de protocolos.	63
5.2.4. Iteración.	63
5.2.5. Efecto del shift en el problema PRED.	64
5.2.6. $CC(PRED_{\Phi}) \prec CC(PRED_{\sigma \circ \Phi})$	64
5.2.7. $CC(PRED_{\sigma \circ \Phi}) \prec CC(PRED_{\Phi})$	64
5.3.1. Evolución del AC Φ_2 en un patrón periódico.	72
5.3.2. Ejemplo de configuración.	73
6.1.1. Evolución del AC en el tiempo. Los cuadrados grises representan las evaluaciones en curso.	78
6.1.2. Último caso contemplado en la demostración.	79
6.1.3. Dinámica del AC Φ_1	80
6.1.4. Caso $\pi_2(p_u) \neq \pi_2(p_u(x))$, $\pi_3(p_u) = \pi_3(p_u(x))$	81
6.2.1. La recurrencia del tiling T	84
6.2.2. Esquema de demostración.	85
6.2.3. Ejemplo de test.	90
6.2.4. Caso de invasión espacial y ciclo con largo $\Omega(n)$	92
6.3.1. A la izquierda, la matriz de comunicación del AC elemental número 90, lineal, para $n = 7$. A la derecha, la matriz de comunicación del AC elemental número 110, para el mismo n	95
A-1. Caracterización ACs cerrados	A-I
B-1. Evolución de la regla 11. Los 1s son blancos y los 0s, negros. El patrón 00100 se ve marcado en verde.	B-III
B-2. Descoordinación en la diagonal izquierda.	B-IV
C-1. AC que simula un test de igualdad con 5 estados.	C-I
C-2. AC que simula un test de igualdad con 4 estados.	C-I
C-3. AC que simula un test de igualdad con 3 estados.	C-II

Índice de cuadros

3.2.1.Regla ECA184.	29
3.3.1.Ejemplo de AC sobreyectivo pero no cerrado.	35
3.3.2.Ideales.	35
3.4.1.Problema de decisión CA-1D-NIL-PER.	36
3.4.2.Problema de decisión CA-1D-UNIV.	37
5.1.1.Ejemplo de representación matricial M_f para una función f	52
6.2.1.Resultados del test local.	90
6.2.2.Comportamiento de cada resultado.	91
6.2.3.Configuración inicial con instancias de alta complejidad.	91
6.2.4.Submatriz de comunicación.	91
6.2.5.Cuadrado inducido por dos elementos de la diagonal de la submatriz.	92
6.2.6.Redefinición de reglas.	92
B.1. Regla número 11.	B-I



Mapa del Océano.

The Hunting of the Snark (An Agony in Eight Fits), Lewis Carroll.

Capítulo 1

Introducción

*Navigation was always a difficult art,
Though with only one ship and one bell:
And he feared he must really decline, for his part,
Undertaking another as well.*

Fit the First - THE LANDING

1.1. Contexto

El fenómeno de la universalidad es una noción que ha estado siempre presente en la teoría de la computación. La capacidad de ciertos constructos para emular a otros de una misma clase y la existencia de algunos capaces de emular clases completas es algo atractivo desde un punto de vista teórico y que en algunos casos ha tenido repercusiones notables (como la construcción de lenguajes no recursivos concretos como el *Entscheidungsproblem* gracias a la Máquina Universal de Turing, la noción de reducción y completitud en complejidad computacional, etc.).

A principio de la década de los cincuenta, junto con los inicios del estudio y descubrimiento de los autómatas celulares, von Neumann, Moore y otros ya tuvieron presente la capacidad auto-replicativa de éstos (ver, por ejemplo, *The Theory of Self-Reproducing Automata* [40]). La auto-replicación, a pesar de no ser plenamente una noción de simulación sino que una manera de multiplicar patrones con ciertas propiedades, conllevó muchas construcciones que requirieron de la emulación de una máquina de Turing en autómatas celulares (principalmente bidimensionales).

Luego, en las décadas de los sesenta y setenta, la atención estuvo centrada en intentar emular componentes de circuitos booleanos en autómatas celulares, generalmente de dos y tres dimensiones. Inspirándose en los computadores reales, la investigación se empeñó en representar cableados, puertas lógicas, relojes, etc., como patrones en un autómata celular con alguna regla local. Lo notable de estas construcciones es que, si resultan ser lo bastante generales, es posible conectarlas y lograr «universalidad» en diversos sentidos. Por ejemplo, si estas componentes son dispuestas en un arreglo lineal de manera cuidadosa, puede simularse fácilmente una máquina de Turing, alcanzándose la Turing-universalidad. Por otro lado, si se disponen uniformemente

en toda la grilla componentes capaces de simular estados y transiciones de algún autómatas celular particular, se alcanza otro tipo de universalidad (y que es la que en gran parte aquí interesa), cuya definición informal se refiere a la capacidad de un autómatas celular para simular el comportamiento de cualquier otro, mediante identificación de patrones con estados y algún cambio de escala, inyectándose en cierta manera los diagramas espacio-tiempo de uno en los del otro. A partir de esto, se generó una carrera por alcanzar estas propiedades con autómatas celulares cada vez más simples en cuanto a cantidad de estados y tamaño de vecindad. Resultados notables en este sentido fueron obtenidos por E. R. Banks (ver *Universality in Cellular Automata* [3]).

Entre los ochenta y los noventa, los investigadores comenzaron a interesarse más intensamente en los autómatas celulares unidimensionales, esto motivado principalmente por el estudio de algoritmos paralelos y reconocimiento de lenguajes formales. En una dimensión, los circuitos booleanos dejan ya de ser una herramienta natural pero, al interpretarse las configuraciones como cintas bi-infinitas, la simulación de máquinas de Turing es directa y da espacio a la noción de Turing-universalidad (ver éstas y otras observaciones en [34]).

En 1971, Smith demostró que una regla con 18 estados y radio 1 podía ser Turing-universal en dimensión 1 [36]. Más tarde, en 1990, Lindgren y Nordahl construyeron un autómatas celular universal de 7 estados y radio 1 [27]. Finalmente, publicado de manera algo tardía en 2004, sorprendentemente Matthew Cook pudo demostrar que la regla elemental número 110 —notación debida a Stephen Wolfram— era capaz de simular una máquina de Turing con sólo 2 estados y radio 1 (ver *Universality in Elementary Cellular Automata* [8]), concluyendo de algún modo la carrera.

En dimensión 1, considerando simulaciones en donde las celdas del autómatas celular simulado son identificadas con bloques de celdas del autómatas celular que simula, se fue forjando poco a poco la idea de universalidad intrínseca. Esta noción (que, como se comentó, de alguna manera coincide en dimensión 2 o mayor con la simulación de circuitos booleanos), fue por primera vez esbozada por Banks, para luego ser retomada por Albert y Čulík II a fines de los ochenta [1]. Ya más adelante, en *The Game of Life: Universality Revisited* [12] (1999), Durand y Róka intentan de algún modo distinguir entre los distintos tipos de universalidad que históricamente se habían tratado y de cierta manera confundido. Así, se establece la diferencia entre tres tipos de universalidad:

- *simulación de circuitos booleanos*, esto es, la capacidad de un autómatas celular de simular cualquier circuito booleano;
- *Turing-universalidad*, a saber, la capacidad de un autómatas celular de simular algún dispositivo Turing-universal; y, por último,
- *universalidad intrínseca*, es decir, la capacidad de un autómatas celular de simular cualquier otro autómatas celular.

Teniendo esto, es importante hacer dos observaciones en cuanto a la distinción entre nociones de universalidad:

1. La Turing-universalidad y la simulación de circuitos booleanos en autómatas celulares no posee una definición del todo rigurosa o única. Dada la naturaleza de los autómatas

celulares, no es posible detener la dinámica o algo por el estilo para representar la noción de aceptación, rechazo, input u output. En ese sentido, la Turing-universalidad y la simulación de circuitos son nociones muy *ad-hoc* en el contexto de autómatas celulares. Algunas veces son representadas máquinas de Turing, otras veces *counter-machines*; algunas veces la aceptación se representa mediante la aparición de un estado, otras veces de un patrón, otras veces con cierto cambio en la dinámica, etc. Por otro lado, la simulación entre autómatas celulares no adolece de estas arbitrariedades o, por lo menos, es susceptible de encuadrarse en un marco teórico bien definido y adecuado.

2. La Turing-universalidad y la simulación de circuitos es una noción extrínseca al modelo de autómatas celulares, en el sentido de que se preocupa de la capacidad de un autómata celular de imitar un objeto de naturaleza distinta. Por otro lado, la simulación entre autómatas celulares es una noción intrínseca al modelo, y por lo cual toma tal nombre.

Por último, es bueno notar a esta altura que, a pesar de que la universalidad intrínseca implica la Turing-universalidad —dada cualquier definición razonable de ésta—, se puede mostrar que el converso es falso [31], lo que brinda otra gran diferencia cualitativa entre ambas nociones a considerar.

Para un recorrido con más antecedentes, se recomienda leer *Universalities in Cellular Automata: A (Short) Survey* [31] (2002), de Nicolas Ollinger.

1.2. Motivación

Como se mencionó anteriormente, una ventaja de la definición de universalidad intrínseca es que acepta caracterizaciones bien definidas, sin grandes arbitrariedades. Dada una de estas caracterizaciones (pues a pesar de lo anterior, no existe una única), se verá que en muchos casos está implícita una relación de simulación que induce un preorden en el conjunto de autómatas celulares (unidimensionales, de ahora en adelante) o viceversa, esto es, relaciones (preórdenes) de simulación que poseen máximo(s), y que constituyen justamente lo que se busca definir como autómata intrínsecamente universal. Las relaciones de simulación predominantes en la literatura —que no sobrepasan las tres o cuatro— se estudian en el Capítulo 3 y una exposición bien completa de éstas se puede encontrar en *Bulking I: An Abstract Theory of Bulking* [9] (2008) y *Bulking II: Classifications of Cellular Automata* [10] (2010).

Al igual que con la Turing-universalidad, en la universalidad intrínseca se ha desarrollado una carrera en la búsqueda de autómatas cada vez más simples con tal condición. A la fecha, el ejemplo más reducido que se tiene es debido a Ollinger y Richard, quienes en 2011 lograron construir un autómata celular intrínsecamente universal con 4 estados y radio 1 (ver *Four States Are Enough!* [34]). Luego, el espectro de autómatas celulares en los que resta buscar autómatas celulares universales aún más simples se reduce a los de 3 y 2 estados.

El tener buenas caracterizaciones permite explorar la pregunta de si cierto autómata celular es (intrínsecamente) universal o no, donde la segunda opción, esto es, el no ser universal, se aparece como una cualidad aún más difusa en el caso de la Turing-universalidad y difícil de abordar a falta de definiciones unívocas. Gracias a este esquema, una buena manera de probar

no-universalidad consiste en buscar condiciones necesarias y cotas inferiores para la universalidad intrínseca. Sin embargo, tal tarea se ha demostrado difícil de realizar o poco efectiva, y esto se explica en gran parte porque la noción de universalidad intrínseca más utilizada se demostró como una propiedad indecidible (ver *The Intrinsic Universality Problem of One-Dimensional Cellular Automata* [32]). Por ejemplo, una condición necesaria para la universalidad en un autómata celular es que su problema de Predicción (ver Capítulo 4) pertenezca a la clase P-COMPLETE. Una condición suficiente para que el problema de Predicción cumpla esto es que el autómata celular sea capaz de simular una máquina de Turing universal con un retardo a lo más polinomial. En el caso de la regla 110 (candidato favorito para ser el autómata celular intrínsecamente universal más simple en cuanto a regla local), la demostración de Cook para la Turing-universalidad de ésta se basa en la simulación de un dispositivo Turing-universal con retardo exponencial. Sin embargo, en 2006, Neary y Woods demostraron que esta simulación se puede hacer con retardo polinomial (ver *P-completeness of Cellular Automaton Rule 110* [30]), dejando abierta la pregunta sobre la universalidad intrínseca de la regla 110 y, de paso, agotando la mejor herramienta para probar no-universalidad.

Así, como se expresa en [33] y [34], es necesario desarrollar más y mejores herramientas para probar no-universalidad. Es en este contexto donde se inserta la investigación aquí desarrollada. Inspirándose principalmente en el trabajo de Goles, Meunier, Rapaport y Theyssier, *Communication Complexity and Intrinsic Universality in Cellular Automata* [14] (2009), el trabajo presente se propone ser una continuación de éste. En tal artículo, se desarrolla una teoría basada en la complejidad comunicacional, área de la informática teórica diseñada principalmente para el estudio de problemas de cálculo distribuido, que se incorpora de manera natural en el estudio de autómatas celulares, prescribiendo condiciones necesarias para la universalidad intrínseca y, en definitiva, proveyendo toda una nueva manera de clasificar y entenderlos.

1.3. Objetivos

Dados los antecedentes anteriores, a continuación se listan los principales objetivos de esta investigación:

1. incorporar la complejidad comunicacional y algunos de sus modelos en el estudio de autómatas celulares;
2. estudiar la complejidad comunicacional como invariante en los principales preórdenes tratados;
3. enriquecer la estructura prescrita por estos preórdenes (para entender mejor el sentido de este punto, remitirse a la Sección 3.3);
4. proporcionar más y mejores herramientas para probar no universalidad;
5. establecer conexiones de inclusión entre estas herramientas;
6. desechar autómatas celulares elementales como intrínsecamente universales.

1.4. Estructura de la memoria

El trabajo aquí expuesto se dispone en cinco capítulos principales, además del presente y otro final con algunas conclusiones.

En el Capítulo 2 se brindan las definiciones básicas sobre autómatas celulares unidimensionales, la mayoría utilizadas en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 se definen las nociones de simulación entre autómatas celulares consideradas en la investigación, se muestran algunas propiedades de los preórdenes inducidos y se demuestran resultados de indecidibilidad (en donde de paso se ilustra la construcción de un autómata celular intrínsecamente universal concreto).

En el Capítulo 4 se muestran algunos problemas computacionales inducidos por autómatas celulares, como el ya mencionado problema de Predicción, entre otros.

En el Capítulo 5 se introduce la noción de complejidad comunicacional y se describe cómo se inserta en el contexto de autómatas celulares, además de proveer algunas condiciones necesarias para la universalidad intrínseca.

En el Capítulo 6 se define un nuevo modelo de complejidad comunicacional que logra unificar las ideas anteriores y provee la herramienta comunicacional para probar no universalidad más fuerte conocida hasta la fecha.

En los Anexos se muestran algunos protocolos comunicacionales en autómatas celulares elementales, en concordancia con el último objetivo descrito, además de ciertas aplicaciones de dinámica simbólica relevantes para el Capítulo 4, pero algo divergentes en cuanto a técnica y contenido con respecto al resto del trabajo.

Capítulo 2

Autómatas celulares unidimensionales

*“What’s the good of Mercator’s North Poles and Equators,
Tropics, Zones, and Meridian Lines?”
So the Bellman would cry: and the crew would reply
“They are merely conventional signs!”.*

Fit the Second - THE BELLMAN’S SPEECH

Se entregan a continuación las definiciones y resultados básicos concernientes al estudio de autómatas celulares unidimensionales, necesarios para dar un marco conceptual adecuado al trabajo aquí expuesto. En una primera instancia, se enuncian las definiciones usuales sobre autómatas celulares que se pueden encontrar en la literatura. Luego, se trasladan tales definiciones al contexto de dinámica simbólica, para así observar el objeto de autómata celular unidimensional como un caso específico de endomorfismo sobre un espacio de shift, dotando al espacio de estudio de una topología y métrica adecuadas. Teniendo esto, se introducen algunas nociones de dinámica topológica y se intenta ilustrar cómo éstas se incorporan en el estudio de los autómatas celulares. Finalmente, se muestran propiedades y clasificaciones que surgen a partir de las ideas anteriores.

2.1. Definiciones básicas

Definición 2.1.1 (Autómata celular unidimensional). Se define un autómata celular unidimensional (AC) como una tupla:

$$\Phi = (V, A, \phi), \quad (2.1.1)$$

donde:

- $V \subseteq \mathbb{Z}$, con $0 < |V| < +\infty$, es el conjunto **vecindad**;
- A es un conjunto finito de **símbolos** (o **estados**), que denominamos **alfabeto**;
- $\phi : A^{|V|} \rightarrow A$ es la **regla local**.

Cuando se busque hacer referencia a la vecindad o al alfabeto de un AC Φ y evitar confusión, éstas se denotarán V_Φ y A_Φ , respectivamente. La regla local siempre será la letra griega que denota al AC en minúscula. En el caso de que el AC esté indexado por $i \in \mathbb{N}$, se entenderá que tal índice se extiende a las componentes de la tupla, esto es, $\Phi_i = (V_i, A_i, \phi_i)$.

Dada la definición anterior, la intuición subyacente será que un AC es cierto artefacto compuesto por elementos indexados por \mathbb{Z} , tales que cada cual se encuentra en un estado dentro de una cantidad finita de opciones (el alfabeto) y que se actualiza a pasos discretos en base a información o influencias obtenidas a través de dependencias locales y finitas. Para este estudio, sólo serán considerados ACs en donde la evolución es sincrónica, esto es, la actualización de todos los nodos es a un mismo tiempo. Así, se considerarán el estado y la evolución de un AC en su conjunto como los estados en los cuales están todos los nodos conformantes en cierto instante y cómo van cambiando éstos en el tiempo, respectivamente.

Como $(\mathbb{Z}, +)$ resulta ser un grupo, dado un conjunto $V \subseteq \mathbb{Z}$ y un elemento $i \in \mathbb{Z}$, es útil definir la **traslación de V por i** como:

$$V + i := \{j + i : j \in V\}. \quad (2.1.2)$$

Así, se dirá que j es **vecino** de i , si $j \in V + i$.

Definición 2.1.2 (Configuraciones y función global). Dado un AC $\Phi = (V, A, \phi)$, se entenderá por **configuración** cualquier colección de estados $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, con $x_i \in A$. Además, se considerará —abusando de notación intencionadamente— la **función global** $\Phi : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ definida como:

$$(\Phi(x))_i = \phi((a_j)_{j \in V+i}), \quad (2.1.3)$$

sobre todo $i \in \mathbb{Z}$, donde $A^{\mathbb{Z}}$ denota el conjunto de todas las configuraciones con símbolos en A .

Se desprende que una configuración se puede entender como un arreglo bi-infinito de símbolos. Luego, dado un alfabeto A , se tienen las siguientes definiciones.

Definición 2.1.3 (Palabras [24]). Sea A un alfabeto. Se define una **palabra** como cualquier secuencia finita $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$, tal que $u_i \in A$. El **largo** de u se denota $|u| = n$. El **símbolo vacío** de largo 0, se denota λ . El conjunto de palabras de largo n es denotado por A^n , tal que $A^0 = \{\lambda\}$ y $A^1 = A$. Además, se define el conjunto de las palabras no nulas y el conjunto de todas las palabras, respectivamente, como:

$$A^+ = \bigcup_{n>0} A^n, \quad A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n. \quad (2.1.4)$$

Si u es una palabra e $I = [i, j] = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ es un intervalo de enteros en el cual u está definida, se denota $u_I = u_i \cdots u_j$. De manera análoga, se utiliza tal notación para los intervalos abiertos $(i, j) = \{i+1, \dots, j-1\}$ y los intervalos semi-abiertos $[i, j)$ y $(i, j]$, y la definición se extiende de manera natural al caso de configuraciones, que son interpretadas como palabras infinitas.

Además, se dice que una palabra v es **subpalabra** de otra palabra u , y se denota $v \sqsubset u$, si $v = u_I$, para algún intervalo $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Finalmente, dada una palabra u y una configuración x , se dirá que u **ocurre en** x si existe un intervalo I tal que $x_I = u$.

Muchas veces se tendrán identificaciones entre distintos alfabetos. Ésto provee una directa identificación entre configuraciones.

Definición 2.1.4 (Extensión uniforme). Dados dos alfabetos A_1 y A_2 y una función $\pi : A_1 \rightarrow A_2$, se define la **extensión uniforme** de π como:

$$\bar{\pi} : \begin{array}{ccc} A_1^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & A_2^{\mathbb{Z}} \\ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & (\pi(a_i))_{i \in \mathbb{Z}} \end{array}, \quad (2.1.5)$$

esto es, la función π se aplica posición por posición a cada símbolo a lo largo de todo \mathbb{Z} .

Es fácil ver que es posible que dos ACs definidos de manera distinta posean la misma dinámica sobre un alfabeto dado, es decir, que una función global posea más de un AC que la induzca. Si esto sucede, claramente estos ACs diferirán en su vecindad y en los respectivos dominios de su regla local. A propósito de esto, se definen las siguientes relaciones.

Definición 2.1.5 (Equivalencia e isomorfismo). Sean $\Phi_1 = (V_1, A_1, \phi_1)$, $\Phi_2 = (V_2, A_2, \phi_2)$ dos ACs. Se dirá que Φ_1 y Φ_2 son **equivalentes**, y se denotará $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, si $A_1 = A_2$ y ambos inducen la misma función global.

Por otra parte, se dirá que Φ_1 y Φ_2 son **isomorfos**, denotado $\Phi_1 \cong \Phi_2$, si existe una biyección $\pi : A_1 \rightarrow A_2$ tal que:

$$\bar{\pi} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \bar{\pi}. \quad (2.1.6)$$

Así, dos ACs isomorfos son en la práctica el mismo AC con símbolos quizá denotados de manera distinta. Evidentemente, dos ACs equivalentes son isomorfos.

Definición 2.1.6 (Conjunto de ACs). Se define el conjunto de autómatas celulares unidimensionales \mathcal{AC} como:

$$\mathcal{AC} := \{\Phi = (V, A, \phi) : \Phi \text{ es AC}\}. \quad (2.1.7)$$

Por otro lado, se define el conjunto de funciones globales inducidas por ACs como:

$$\mathcal{AC}_{\equiv} := \mathcal{AC} / \equiv. \quad (2.1.8)$$

Observación. Es importante notar que la cantidad de información necesaria para describir un elemento de \mathcal{AC} o de \mathcal{AC}_{\equiv} es finita, lo cual será fundamental para el tratamiento algorítmico de éste.

Por lo tanto, y como se comenta en [35], los elementos del conjunto \mathcal{AC} cumplen con las siguientes tres propiedades:

- *uniformidad*: todos los elementos son actualizados bajo las mismas reglas;
- *sincronicidad*: todos los elementos son actualizados simultáneamente;
- *localidad*: las reglas son de naturaleza finita y local.

2.1.1. Vecindades

Dos ACs equivalentes pueden diferir en sus vecindades. Resulta natural preguntarse si existe y cómo encontrar la representación de vecindad más pequeña que induzca una función global dada. A propósito de esto, la siguiente definición:

Definición 2.1.7 (Elementos irrelevantes [21]). Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Se dirá que $i^* \in V$ es **irrelevante** si:

$$\phi(a_1, \dots, u_{i^*}, \dots, a_{|V|}) = \phi(a_1, \dots, v_{i^*}, \dots, a_{|V|}), \quad (2.1.9)$$

para todo $a_1, \dots, a_{|V|}, u_{i^*}, v_{i^*} \in A$. Un AC cuya vecindad no posee elementos irrelevantes se dirá que es de **vecindad minimal**.

Así, es fácil ver que dado un AC con algún elemento irrelevante en la vecindad, al eliminarlo —es decir, al removerlo de la vecindad y redefinir la regla local en función de este cambio—, se obtiene un AC equivalente al original, pues el símbolo asociado a tal elemento no influye en la dinámica. Repitiendo tal procedimiento hasta agotar los elementos irrelevantes, se obtiene un AC de vecindad minimal equivalente que además resulta ser único. La unicidad se discute en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 ([21]). Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ equivalentes y de vecindad minimal. Entonces $\Phi_1 = \Phi_2$.

Demostración. Es suficiente demostrar que las vecindades de Φ_1 y Φ_2 son iguales, esto es $V_1 = V_2$. Sea $i^* \in V_1$ un elemento cualquiera. Como V_1 no posee elementos irrelevantes, existen dos configuraciones $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ (donde $A = A_1 = A_2$) tales que:

1. $x_{i^*} \neq y_{i^*}$;
2. $x_i = y_i, \forall i \neq i^*$;
3. $(\Phi_1(x))_0 \neq (\Phi_1(y))_0$.

Como Φ_1 y Φ_2 son equivalentes, esto significa que i^* debe ser vecino de 0 en V_2 , pues si no se tendría que $(\Phi_2(x))_0 = (\Phi_2(y))_0$. Luego, $V_1 \subseteq V_2$. Por argumento análogo, $V_2 \subseteq V_1$ y se tiene el resultado. \square

En el estudio de autómatas celulares existen vecindades que se utilizan usualmente y ameritan una caracterización. Las más utilizadas en el estudio de autómatas celulares unidimensionales son las siguientes.

Definición 2.1.8 (Vecindad de radio r). En \mathbb{Z} , se define la **vecindad de radio** r como:

$$V^r = \{-r, \dots, 0, \dots, r\}. \quad (2.1.10)$$

Es útil notar que todo AC posee un AC equivalente con vecindad de radio r , para algún $r \in \mathbb{N}$. Para esto, dado un AC cualquiera con vecindad V , basta tomar:

$$r = \max\{|i| : i \in V\}, \quad (2.1.11)$$

agregando a V probablemente elementos irrelevantes hasta completar V^r .

Otra vecindad menos utilizada pero que se caracteriza por ser la más pequeña que induce dinámicas no triviales, es la vecindad de radio- $\frac{1}{2}$.

Definición 2.1.9 (Vecindad de radio- $\frac{1}{2}$). En \mathbb{Z} , se define la **vecindad de radio- $\frac{1}{2}$** como:

$$V^{\frac{1}{2}} = \{0, 1\}. \quad (2.1.12)$$

Un AC con tal vecindad se dice que es del tipo **one-way**.

2.1.2. Diagramas espacio-tiempo

En parte, es de interés estudiar la dinámica de los ACs. Para esto se hace necesario representar cómo actúa la función global de un AC y sus iteraciones sobre las configuraciones. Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, la órbita de un punto $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se define como el conjunto:

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi^t(x) : t \geq 0\}, \quad (2.1.13)$$

de tal modo que $\Phi^{t+1} = \Phi \circ \Phi^t$ y $\Phi^0 = \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es la función identidad.

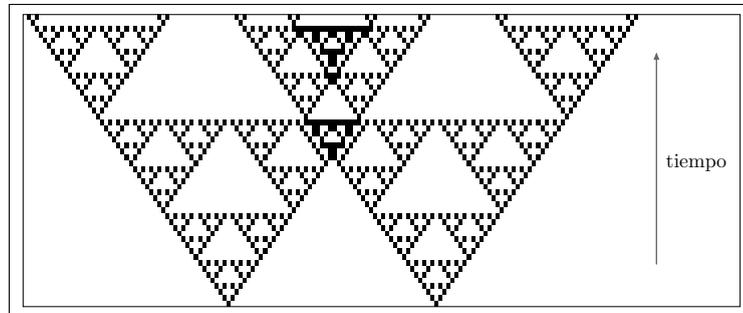


Figura 2.1.1: Diagrama espacio-tiempo usual.

Para observar estas órbitas, se hace uso de **diagramas espacio-tiempo**. En primer lugar, se piensa cada elemento de $x \in A^{\mathbb{Z}}$ como un arreglo lineal bi-infinito de estados de la forma:

$$x = \dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots \quad (2.1.14)$$

Luego, para construir el diagrama, se coloca por sobre x el arreglo correspondiente a $\Phi(x)$ y así sucesivamente. Obviamente para que esto sea posible en la práctica, todo se restringe a una ventana finita de observación como en la Figura 2.1.1.

Teniendo esto, se procede a clasificar ciertos tipos de órbitas.

Definición 2.1.10 (Clasificación de órbitas [21]). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se dice:

- **punto fijo** si $\Phi(x) = x$;
- **temporalmente periódica** si $\Phi^t(x) = x$, para algún $t > 0$. Cualquier t que satisfaga tal condición se llamará **período de x** y el menor t que lo haga se llamará **mínimo período de x** ;
- **finalmente punto fijo** si existe un $s \geq 0$ tal que $\Phi^s(x)$ es punto fijo;

- **finalmente temporalmente periódica** si existe un $s \geq 0$ tal que $\Phi^s(x)$ es temporalmente periódica. Si $s > 0$, x se dirá **preperiódica** y s será su **preperíodo**.

Notar que una configuración x es eventualmente temporalmente periódica si y sólo si su órbita $\mathcal{O}(x)$ es finita.

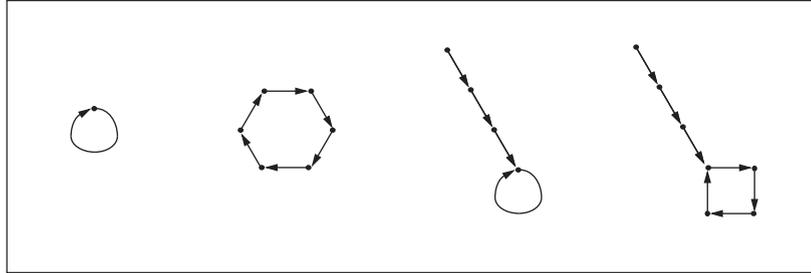


Figura 2.1.2: Tipos de órbitas.

2.1.3. Tipos de estados y configuraciones

Algunos estados y configuraciones en ACs poseen ciertas propiedades características que se reflejan en las dinámicas y diagramas espacio-tiempo de los cuales forman parte. En lo sucesivo se definen algunas de éstas.

Definición 2.1.11 (Estado estacionario). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, un estado $q \in A$ se dice **estacionario** si:

$$\phi(q, \dots, q) = q. \quad (2.1.15)$$

Dado un estado estacionario q , una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se dirá **q -finita** si:

$$|\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq q\}| < +\infty. \quad (2.1.16)$$

Notar que si x es una configuración q -finita, $\Phi(x)$ también lo es. Luego, las configuraciones q -finitas son cerradas bajo la aplicación de Φ .

Definición 2.1.12 (Estado invasivo). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, un estado $s \in A$ se dice **invasivo** si:

$$s \in \{x_1, \dots, x_{|V|}\} \implies \phi(x_1, \dots, x_{|V|}) = s. \quad (2.1.17)$$

Previo a la caracterización de algunos tipos de configuraciones, se hace necesario introducir una operación que será fundamental en todo lo que sigue.

Definición 2.1.13 (Shift). Dado un alfabeto A , se define el **shift** como la función:

$$\begin{aligned} \sigma : A^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow A^{\mathbb{Z}} \\ x &\longmapsto \sigma(x) \end{aligned}, \quad (2.1.18)$$

de modo que $\sigma(x)$ corresponde a la configuración que satisface:

$$(\sigma(x))_i = x_{i+1}. \quad (2.1.19)$$

Claramente el shift es una función invertible, con inversa dada localmente por:

$$(\sigma^{-1}(x))_i = x_{i-1}, \tag{2.1.20}$$

y constituye en sí mismo un caso particular de autómata celular.

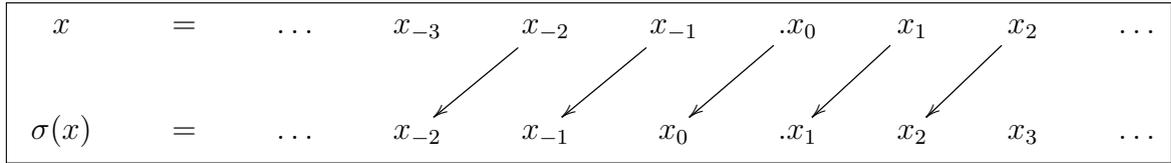


Figura 2.1.3: Acción del shift sobre una configuración.

Definición 2.1.14 (Configuraciones espacialmente periódicas). Dado $m \in \mathbb{Z}$, una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se dirá **m -periódica** si:

$$\sigma^m(x) = x. \tag{2.1.21}$$

Una configuración se dirá **espacialmente periódica** si es m -periódica para algún m . Notar que para toda configuración m -periódica x , existe $u \in A^m$ tal que $x = {}^\infty u^\infty$, donde:

$$({}^\infty u^\infty)_{km+i} = u_i, \tag{2.1.22}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, para todo $i = 0, \dots, m - 1$.

Una configuración $x \in A^{\mathbb{Z}}$ se dirá **eventualmente espacialmente periódica** si existe $u \in A^+$ tal que:

$$|\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq ({}^\infty u^\infty)_i\}| < +\infty \tag{2.1.23}$$

Definición 2.1.15 (Configuraciones asintóticas). Dado un conjunto de estados A , dos configuraciones $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ se dicen:

- **asintóticas a la izquierda**, si $\exists i \in \mathbb{Z}$ tal que: $x_{(-\infty, i]} = y_{(-\infty, i]}$;
- **asintóticas a la derecha**, si $\exists i \in \mathbb{Z}$ tal que: $x_{(i, \infty)} = y_{(i, \infty)}$.

Es fácil ver que si x e y son configuraciones asintóticas a la derecha (resp. izquierda), también lo son $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$.

2.1.4. Algunas operaciones sobre autómatas

En algunos casos, se pueden definir operaciones sobre ACs con cierto grado de utilidad. En los próximos capítulos serán muy requeridas las dos operaciones binarias que se definen a continuación.

Definición 2.1.16 (Producto). Se define la operación **producto** entre dos ACs $\Phi_1 = (V_1, A_1, \phi_1)$ y $\Phi_2 = (V_2, A_2, \phi_2)$ como:

$$\otimes : \mathcal{AC} \times \mathcal{AC} \longrightarrow \mathcal{AC} \\ (\Phi_1, \Phi_2) \longmapsto \Phi_1 \otimes \Phi_2, \tag{2.1.24}$$

donde $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ se define como la tupla:

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \times A_2, \phi_1 \times \phi_2), \quad (2.1.25)$$

con:

$$\begin{aligned} \phi_1 \times \phi_2 : (A_1 \times A_2)^{|V_1 \cup V_2|} &\longrightarrow A_1 \times A_2 \\ (x_i^1, x_i^2)_{i \in V_1 \cup V_2} &\longmapsto (\phi_1((x_i^1)_{i \in V_1}), \phi_2((x_i^2)_{i \in V_2})) \end{aligned}, \quad (2.1.26)$$

Así, el producto entre dos ACs se puede entender como un nuevo AC en donde ocurre la dinámica de ambos pero en dos componentes distintas.

Definición 2.1.17 (Unión). Se define la operación **unión** entre dos ACs $\Phi_1 = (V_1, A_1, \phi_1)$ y $\Phi_2 = (V_2, A_2, \phi_2)$ como:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{AC} \times \mathcal{AC} &\longrightarrow \mathcal{AC} \\ (\Phi_1, \Phi_2) &\longmapsto \Phi_1 \oplus \Phi_2 \end{aligned}, \quad (2.1.27)$$

donde $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ se define —considerando que los alfabetos son disjuntos ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$) y que existe un símbolo $\# \notin A_1 \cup A_2$ — como la tupla:

$$\Phi_1 \oplus \Phi_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup \{\#\}, \phi_1 \oplus_{\#} \phi_2), \quad (2.1.28)$$

con:

$$\phi_1 \oplus_{\#} \phi_2((x_i)_{i \in V_1 \cup V_2}) = \begin{cases} \phi_1((x_i)_{i \in V_1}) & , \text{ si } x_i \in A_1, \forall i \in V_1 \cup V_2 \\ \phi_2((x_i)_{i \in V_2}) & , \text{ si } x_i \in A_2, \forall i \in V_1 \cup V_2 \\ \# & , \text{ si no.} \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Así, la suma de dos ACs se puede entender como un nuevo AC tal que ocurre la dinámica de ambos ACs disjuntamente, y si llegan a mezclarse estados de ambos en una vecindad, se propaga un estado invasivo $\#$.

2.2. Espacios de shift y consideraciones dinámicas

Una buena perspectiva para comenzar a entender el conjunto \mathcal{AC} surge de algunas nociones que brinda la dinámica simbólica y el concepto de espacio de shift. Además, las definiciones acá entregadas son de absoluta necesidad para comprender algunas de las proposiciones posteriores (en especial la Proposición 3.3.12, que requiere de la Proposición A.5).

2.2.1. Definiciones

Definición 2.2.1 (Full-shift). Dado un alfabeto A , se define el **full-shift** sobre A como el conjunto de funciones del tipo $x : \mathbb{Z} \longrightarrow A$, que son identificadas con el conjunto de configuraciones con estados en A de la Definición 2.1.2 y que son denotadas del mismo modo, esto es, $A^{\mathbb{Z}}$.

Definición 2.2.2 (Espacio de shift). Dado un full-shift $A^{\mathbb{Z}}$, un **espacio de shift** se define como cualquier subconjunto $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = X(F)$, para alguna colección de palabras $F \subseteq A^+$, donde:

$$X(F) = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \nexists I \text{ intervalo}, x_I \in F\},$$

es decir, $X(F)$ es el conjunto de configuraciones en las que ninguna palabra de F ocurre. Si X puede ser definido por una familia F tal que $|F| < +\infty$, entonces se hablará de un **shift de tipo finito**¹. Cuando un espacio de shift Y esté contenido en otro espacio de shift X , se dirá que Y es **subshift** de X .

Definición 2.2.3 (Shift-invarianza). Un subconjunto $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ se dirá **shift-invariante** si cumple que $\sigma(X) = X$.

Observación. Notar que todo espacio de shift resulta ser un conjunto shift-invariante.

Definición 2.2.4 (Lenguaje de un espacio de shift). Dado un espacio de shift X , se denota $\mathcal{L}_n(X)$ al conjunto de palabras de largo n que ocurren en algún punto de X . El **lenguaje de X** está dado por:

$$\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(X).$$

Se denotará $A(X)$ el alfabeto sobre el que se define X , es decir, $A(X) = \mathcal{L}_1(X)$.

Definición 2.2.5 (Irreducibilidad [26]). Un espacio de shift X se dice **irreducible** si para todo par de bloques $u, v \in \mathcal{L}(X)$ existe $w \in \mathcal{L}(X)$ tal que $uvw \in \mathcal{L}(X)$.

Se define a continuación una medida fundamental que caracteriza de cierta manera la complejidad de un espacio de shift.

Definición 2.2.6 (Entropía [26]). Sea X un espacio de shift. Se define la **entropía** de X como:

$$h(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{L}_n(X)|. \quad (2.2.1)$$

Así, la entropía mide la riqueza asintótica del lenguaje del shift. Por otro lado, una conexión entre el estudio de autómatas celulares y los espacios de shift se encuentra a partir de la siguiente definición.

Definición 2.2.7 (Sliding block code [26]). Sea X un espacio de shift sobre un alfabeto A_1 , y sea A_2 otro alfabeto. Dados $m, a \in \mathbb{Z}$, tales que $-m \leq a$, se define un **$(m + a + 1)$ -block map** como una función del tipo $\phi : \mathcal{L}_{m+a+1}(X) \rightarrow A_2$. Por otro lado, una función $\Phi : X \rightarrow A_2^{\mathbb{Z}}$ se denomina **sliding block code** de **memoria m** y **anticipación a** , si existe un $(m + a + 1)$ -block map ϕ tal que:

$$(\Phi(x))_i = \phi(x_{[i-m, i+a]}), \quad (2.2.2)$$

para todo $x \in X$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observación. Es directo ver que un AC es un caso particular de un sliding block code con dominio y recorrido en un mismo full-shift.

¹Notar que un subshift puede estar definido por más de una familia de palabras prohibidas.

La ventaja de trabajar con la generalidad que poseen los espacios de shift, es la posibilidad de manipular el alfabeto. Dado un espacio de shift X sobre un alfabeto A , se define $A(X)^{[N]} = \mathcal{L}_N(X)$ como la colección de todas las N -palabras permitidas en X . Considerando $A(X)^{[N]}$ como un alfabeto en sí mismo, se puede formar el full-shift $(A(X)^{[N]})^{\mathbb{Z}}$. Así, se obtienen dos recodificaciones muy utilizadas, y que además sirven como ejemplo de la flexibilidad adquirida.

Definición 2.2.8 (Higher block code [26]). Se define el N -**higher block code** por:

$$\beta_N : X \longrightarrow (A(X)^{[N]})^{\mathbb{Z}}, \\ x \longmapsto \beta_N(x), \quad (2.2.3)$$

donde, para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$(\beta_N(x))_{[i]} = x_{[i, i+N-1]}. \quad (2.2.4)$$

Definición 2.2.9 (Higher power code [26]). Se define el N -**higher power code** por:

$$\gamma_N : X \longrightarrow (A(X)^{[N]})^{\mathbb{Z}}, \\ x \longmapsto \gamma_N(x), \quad (2.2.5)$$

donde, para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$(\gamma_N(x))_{[i]} = x_{[iN, iN+N-1]} \quad (2.2.6)$$

Esta última recodificación es de suma importancia para los capítulos que siguen, pues constituirá un ingrediente fundamental en las transformaciones sintácticas aplicadas a ACs que serán estudiadas.

Ejemplo 2.2.1 ([26]). Considerar:

$$x = \dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots \in A^{\mathbb{Z}}.$$

Luego, bajo β_4 , x tiene la forma:

$$\beta_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \dots \in (A_X^{[4]})^{\mathbb{Z}};$$

y, bajo γ_4 , x tiene la forma:

$$\gamma_4(x) = \dots \begin{bmatrix} x_{-9} \\ x_{-10} \\ x_{-11} \\ x_{-12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-5} \\ x_{-6} \\ x_{-7} \\ x_{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \\ x_{-3} \\ x_{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \end{bmatrix} \dots \in (A_X^{[4]})^{\mathbb{Z}}.$$

Finalmente, se define un último caso particular de espacio de shift, íntimamente relacionado con la recodificación higher power code.

Definición 2.2.10 (Block subshift [9]). Dado un alfabeto A y una familia $\mathcal{B} \subseteq A^m$, donde $m \in \mathbb{N}$, se define el **block subshift** inducido por \mathcal{B} , denotado $X^{\mathcal{B}}$, como la cerradura por traslaciones de $\gamma_m^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{Z}})$, esto es:

$$X^{\mathcal{B}} := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \sigma^z \circ \gamma_m^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}) \\ = \bigcup_{0 \leq z < m} \sigma^z \circ \gamma_m^{-1}(\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}). \quad (2.2.7)$$

Luego, un block subshift es un espacio de shift tal que cada configuración es una concatenación infinita de palabras en \mathcal{B} .

2.2.2. Subshifts como espacios métricos

Definición 2.2.11 (Espacio métrico). Se define un **espacio métrico** como una tupla (X, d) tal que X es un conjunto sobre el cual existe una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, denominada **métrica**, con las siguientes cuatro propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$;
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$;
4. $d(x, y) = 0 \iff x = y, \forall x, y \in X$.

Definición 2.2.12 ([24]). Dado un espacio de shift X , se define la métrica:

$$d(x, y) = 2^{-n(x,y)}, \quad (2.2.8)$$

donde:

$$n(x, y) = \inf\{i \geq 0 : x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i}\}. \quad (2.2.9)$$

Con esta función, la tupla (X, d) resulta ser un espacio métrico compacto, perfecto (no contiene puntos aislados) y totalmente desconexo, es decir, los conjuntos que son cerrados y abiertos a la vez —denominados **clopen**— forman una base para la topología. Dado un punto $x_0 \in X$, se define la **bola de radio ε centrada en x_0** como:

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}. \quad (2.2.10)$$

La ventaja de dotar de una métrica al espacio de estudio es que se obtienen caracterizaciones de objetos ya definidos que resultan de suma utilidad. A continuación, tres resultados fundamentales.

Proposición 2.2.1 ([26]). *Dado un full-shift $A^{\mathbb{Z}}$, $X \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ es un espacio de shift si y sólo si X es cerrado y shift-invariante.*

Teorema 2.2.2 (Curtis-Hedlund-Lyndon [15]). *Sea $\Phi : X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios de shift X e Y . Entonces, Φ es un sliding block code si y sólo si es continua y conmuta con el shift, esto es, $\sigma_Y \circ \Phi = \Phi \circ \sigma_X$, donde σ_X y σ_Y denotan el shift en el espacio correspondiente.*

Teorema 2.2.3 ([26]). *La imagen de un espacio de shift vía un sliding code block es un espacio de shift.*

Demostración. Sea $\Phi : X \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ un sliding code block, con X un espacio de shift y A un alfabeto cualquiera. Sea $Y = \Phi(X)$. Por el Teorema 2.2.2, Φ es continua y luego Y es compacto (en particular, cerrado), pues X es compacto. Además,

$$\sigma(Y) = \sigma \circ \Phi(X) = \Phi \circ \sigma(X) = \Phi(X) = Y,$$

debido a la shift-invarianza de X . Por la Proposición 2.2.1, se concluye el resultado. \square

De estos tres resultados, el de más importancia en este estudio es el Teorema 2.2.2, pues logra caracterizar de manera útil y elegante las funciones globales que efectivamente corresponden a las de un AC (esto es, inducidas por una regla local). Gracias a esto, las funciones globales de ACs se pueden componer, iterar y trasladar, teniendo la certeza de que siempre inducirán un AC. Además, como pequeño corolario, se tiene el siguiente resultado concerniente a configuraciones espacialmente periódicas.

Corolario. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Luego, la imagen vía Φ de una configuración m -periódica también lo es. Además, toda configuración espacialmente periódica es eventualmente temporalmente periódica.*

Demostración. Sea x una configuración m -periódica. Luego,

$$\sigma^m \circ \Phi(x) = \Phi \circ \sigma^m(x) = \Phi(x),$$

es decir, $\Phi(x)$ es m -periódica.

Gracias a la Ecuación 2.1.22, existe una clara biyección entre las configuraciones m -periódicas y las palabras de largo m (que son finitas). Así, la órbita $\mathcal{O}(x)$ necesariamente es finita, lo cual es equivalente a la condición de que x sea eventualmente temporalmente periódica. \square

Observación. Notar que la función $\gamma_N : X \longrightarrow \left(\mathbf{A}_X^{[N]}\right)^{\mathbb{Z}}$ resulta ser continua pero no conmuta con el shift, y por tanto no constituye un sliding block code. Sin embargo, satisface la siguiente igualdad:

$$\sigma \circ \gamma_N = \gamma_N \circ \sigma^N. \quad (2.2.11)$$

2.2.3. ACs como sistemas dinámicos

Considerando la métrica definida anteriormente, ya no sobre un espacio de shift general sino que sobre el full-shift correspondiente al dominio de un AC, resulta enriquecedor para el trabajo aquí expuesto estudiar los ACs desde una perspectiva dinámica, pues se logran proveer clasificaciones relevantes en cuanto al comportamiento de éstos.

Definición 2.2.13 (Sistema dinámico topológico). Un **sistema dinámico topológico (s.d.t.)** es una 2-tupla (X, Φ) , tal que $\Phi : X \longrightarrow X$ es una función continua sobre un espacio métrico compacto X .

En el contexto de este trabajo, Φ siempre será una función en \mathcal{AC}_{\equiv} y X será el full-shift $A^{\mathbb{Z}}$ con la métrica d definida anteriormente. Un conjunto $Y \subseteq X$ se dirá **invariante** si $\Phi(Y) \subseteq Y$ y **fuertemente invariante** si $\Phi(Y) = Y$. Si Y es cerrado e invariante, (Y, Φ) es un s.d.t. que es llamado **subsistema** de (X, Φ) . Además, un s.d.t. se dirá **abierto**, si $\Phi(U)$ es abierto para todo abierto $U \subseteq X$.

Definición 2.2.14. Un **homomorfismo** $\varphi : (X_1, \Phi_1) \longrightarrow (X_2, \Phi_2)$ entre dos s.d.t. es una función continua $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$ tal que $\varphi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \varphi$. Cuando esto sucede, se dice que el diagrama de abajo **conmuta**:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & X_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X_2 & \xrightarrow{\Phi_2} & X_2 \end{array}$$

Una **conjugación** es un homomorfismo biyectivo. Los sistemas (X_1, Φ_1) e (X_2, Φ_2) son **conjugados** si existe una conjugación entre ellos. Si φ es inyectivo, $(\varphi(X_1), \Phi_2)$ es un subsistema de (X_2, Φ_2) , pues $\varphi(X_1) \subseteq X_2$ es un conjunto cerrado invariante. Si φ es sobreyectiva, entonces se dice que (X_2, Φ_2) es un **factor** de (X_1, Φ_1) .

Observación. Notar que la relación de isomorfismo entre ACs es un caso muy particular de conjugación.

Un objeto que ha sido muy estudiado, particularmente en el contexto de ACs (ver, por ejemplo, [13]), es el que se define a continuación.

Definición 2.2.15. Dado un s.d.t. (X, Φ) , se define el **conjunto límite** de Φ como:

$$\omega(\Phi) = \bigcap_{t=0}^{\infty} \Phi^t(X). \tag{2.2.12}$$

Así, el conjunto límite se puede interpretar como los puntos que aparecen arbitrariamente tarde en el conjunto de órbitas y en cierta medida representa el comportamiento asintótico del sistema. Al ser $\omega(\Phi)$ un conjunto cerrado, resulta ser siempre un subsistema de (X, Φ) .

Por último, y como gran motivo de este apartado, se definen tres propiedades dinámicas que resultan ser invariantes bajo conjugación y que en cierta medida clasifican el comportamiento de un AC.

Definición 2.2.16 (Equicontinuidad). Un punto $x \in X$ es un **punto de equicontinuidad** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall t \geq 0 : d(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) < \varepsilon. \tag{2.2.13}$$

Un sistema dinámico se dice **equicontinuo** si todo punto es de equicontinuidad. En este caso, por compacidad, es **uniformemente equicontinuo**, esto es:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \implies \forall t \geq 0, d(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) < \varepsilon. \tag{2.2.14}$$

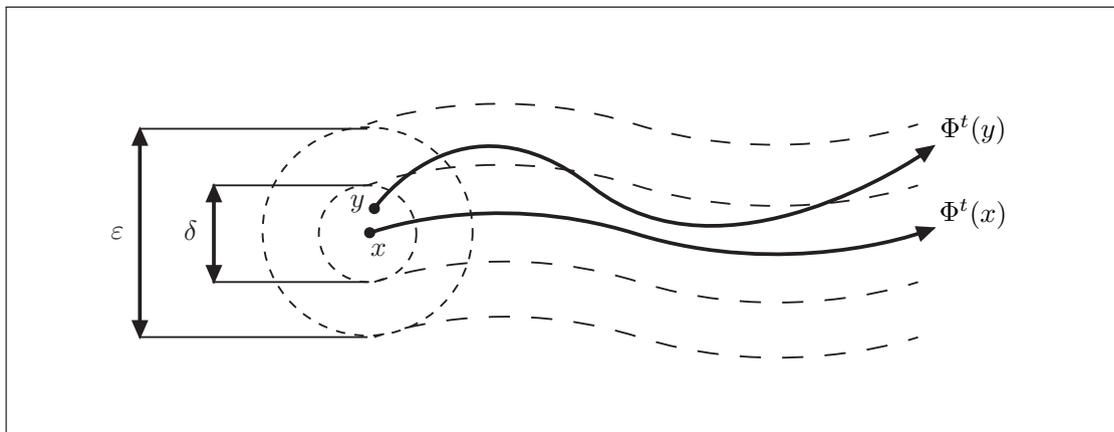


Figura 2.2.1: Equicontinuidad.

Definición 2.2.17 (Sensibilidad a las condiciones iniciales). Un sistema dinámico es **sensible a las condiciones iniciales** si:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists t \geq 0 : d(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) \geq \varepsilon. \quad (2.2.15)$$

Definición 2.2.18 (Expansividad). Un sistema dinámico es **positivamente expansivo** si:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \neq y \in X, \exists t \geq 0 : d(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) \geq \varepsilon.$$

2.3. Familias de autómatas celulares y propiedades

Para finalizar, se entregan algunas definiciones, propiedades y clasificaciones concernientes al estudio de autómatas celulares que complementan las secciones anteriores y que serán de utilidad a lo largo de todo este trabajo. Según su naturaleza, estos atributos son clasificados en locales, globales y asintóticos.

2.3.1. Atributos locales

Se llamarán atributos locales a todos los referentes a características de la regla local de un AC. A continuación, algunos de ellos que serán relevantes.

Definición 2.3.1 (ACs elementales). Un AC se dice **elemental** si puede ser definido a partir de una regla local de radio 1 y un alfabeto de tamaño 2. Existen sólo 256 ACs con esta cualidad.

Definición 2.3.2 (ACs totalísticos). Un AC Φ se dice **totalístico** si $\exists n \in \mathbb{N} : A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ y:

$$\forall u, v \in A^{|V|} : \sum_{i=1}^{|V|} u_i = \sum_{i=1}^{|V|} v_i \implies \phi(u) = \phi(v), \quad (2.3.1)$$

esto es, el resultado de la regla local sólo depende de la suma de los valores asociados a los estados que lee.

Definición 2.3.3 (ACs cautivos [37]). Diremos que $\Phi \in \mathcal{AC}$ es **cautivo** si:

$$\forall x_1, \dots, x_{|V|} \in A, \phi(x_1, \dots, x_{|V|}) \in \{x_1, \dots, x_{|V|}\}. \quad (2.3.2)$$

Luego, un AC cautivo es de algún modo localmente invariante (no pueden aparecer estados no presentes en la configuración inicial).

Definición 2.3.4 (ACs permutativos). Dada $\phi : A^{|V|} \rightarrow A$ una regla local, entonces:

1. ϕ es **permutativa a la izquierda** si: $\forall u \in A^{|V|-1}, \forall b \in A, \exists! a \in A, \phi(au) = b$;
2. ϕ es **permutativa a la derecha** si: $\forall u \in A^{|V|-1}, \forall b \in A, \exists! a \in A, \phi(ua) = b$.

Un AC se dirá **permutativo a la izquierda (resp. derecha)** si puede ser inducido por una regla local permutativa a la izquierda (resp. derecha); se dirá **permutativo** si es permutativo en alguna dirección y se dirá **bipermutativo** si es permutativo en ambas.

Proposición 2.3.1 ([23]). *Todo AC permutativo es sobreyectivo.*

2.3.2. Atributos globales

Se llamarán atributos globales a todos los referentes a la función global de un AC. Algunos de ellos a continuación.

Definición 2.3.5. Se dirá que $\Phi \in \mathcal{AC}$ es:

- **sobreyectivo** si para toda configuración $y \in A^{\mathbb{Z}}$, existe $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\Phi(x) = y$;
- **inyectivo** si para todo par de configuraciones $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ tales que $x \neq y$, se tiene que $\Phi(x) \neq \Phi(y)$;
- **biyectivo** si es inyectivo y sobreyectivo;
- **reversible** si existe $\Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tal que $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1 = \mathbb{I}$.

Proposición 2.3.2 ([38]). *Dado $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. Φ_1 es reversible;
2. Φ_1 es biyectivo;
3. Φ_1 es inyectivo;
4. $\exists \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ con $A_1 = A_2$ tal que $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \mathbb{I}$;
5. $\exists \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ con $A_1 = A_2$ tal que $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \mathbb{I}$.

Proposición 2.3.3 ([38]). *Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. Φ es sobreyectivo;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u, v \in A^n : |\phi^{-1}(u)| = |\phi^{-1}(v)|$, donde ϕ se entiende como la extensión natural de la regla local a palabras de largo arbitrario;
3. $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ tales que $0 < |\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}| < +\infty$, se tiene que $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

Observación. Notar que de la tercera caracterización de la sobreyectividad se desprende que la inyectividad implica sobreyectividad en ACs.

Proposición 2.3.4 ([2, 20]). *Tanto la inyectividad como la sobreyectividad son decidibles a tiempo polinomial en ACs unidimensionales. En ACs multidimensionales ambas propiedades son indecidibles.*

Definición 2.3.6. $\Phi \in \mathcal{AC}$ se dice **cerrado a la derecha (resp. izquierda)** si $\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ asintóticos a la izquierda (resp. derecha) tales que $x \neq y$, se tiene que $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. $\Phi \in \mathcal{AC}$ se dice **cerrado** si es cerrado a la izquierda o es cerrado a la derecha.

Observación. Por la definición anterior, se tiene que un AC es inyectivo sólo si es cerrado sólo si es sobreyectivo.

Definición 2.3.7 (ACs lineales). Un AC se dice **lineal** si existe un operador $+$ tal que $(A, +)$ es un semigrupo con elemento neutro $e \in A$ y tal que para todo par de configuraciones x e y se tiene que:

$$\Phi(x \overline{+} y) = \Phi(x) \overline{+} \Phi(y), \quad (2.3.3)$$

en donde $\overline{+}$ denota la extensión uniforme de $+$.

2.3.3. Atributos asintóticos

Se entenderá por atributos asintóticos todos aquellos que se preocupan del comportamiento de un AC en tiempos arbitrariamente grandes, siendo la nilpotencia el más relevante de ellos.

Definición 2.3.8. Un AC Φ se dice **estable** si existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(\Phi) = \Phi^{t_0}(A^{\mathbb{Z}})$. En caso contrario, se dice que es **inestable**.

Definición 2.3.9 (Nilpotencia). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $s \in A$, se dirá que Φ es **s -nilpotente** si toda configuración es eventualmente temporalmente punto fijo, con ${}^\infty s^\infty$ como tal. Se dirá que Φ es **nilpotente** si es s -nilpotente para algún estado s .

Proposición 2.3.5 ([18]). *Un AC es nilpotente si y sólo si su conjunto límite es un singleton.*

Definición 2.3.10 (Conjunto límite SFT). Se dice que el conjunto límite de un AC Φ es **SFT** si $\omega(\Phi)$ es un subshift de tipo finito.

Proposición 2.3.6 ([17]). *Todo AC con conjunto límite SFT es estable.*

Definición 2.3.11 (Conjunto límite sófico). Se dice que el conjunto límite de un AC Φ es **sófico** si $\mathcal{L}(\omega(\Phi))$ es un lenguaje regular.

Definición 2.3.12 (Nilpotencia en configuraciones periódicas). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $s \in A$, se dice que Φ es **s -nilpotente en las configuraciones periódicas** si toda configuración espacialmente periódica es eventualmente temporalmente punto fijo, con ${}^\infty s^\infty$ como tal. Se dirá que Φ es **nilpotente en las configuraciones periódicas** si es s -nilpotente para algún estado s .

Teniendo ya establecidas las nociones básicas concernientes al estudio de autómatas celulares unidimensionales, se tienen las condiciones para comenzar un tratamiento particular de éstos como el que se realiza en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Simulaciones y universalidad intrínseca

*(“That’s exactly the method”, the Bellman bold
In a hasty parenthesis cried,
“That’s exactly the way I have always been told
That the capture of Snarks should be tried!”)*

Fit the Third - THE BAKER’S TALE

En el presente capítulo se introducen las nociones de universalidad intrínseca más aceptadas en la literatura actual. Primero, se revisa un modelo de simulación con buenas propiedades pero algo restringido, que no alcanza a soportar universalidad. Luego, se buscan ciertas extensiones y variaciones de éste que sí lo hacen o que al menos preservan algunas de sus características. En este último sentido, más tarde se exploran los preórdenes que inducen las relaciones de simulación previamente vistas, caracterizando elementos mínimos y máximos, además de encontrando subclases bien comportadas con respecto a éstas. Para finalizar, se demuestra un resultado de indecidibilidad sumamente relevante para este estudio.

3.1. Simulación en tiempo real (grouping)

El primer tratamiento manifiestamente algebraico de la capacidad de simulación en autómatas celulares (esto es, de manera intuitiva, la idea de que los diagramas espacio-tiempo de un autómata celular pueden ser emulados en algún sentido por los de otro) mediante la agrupación de celdas con un mapeo del tipo higher power code (ver Definición 2.2.9) se puede encontrar en el trabajo fundacional de Jacques Mazoyer e Iván Rapaport, *Inducing an Order on Cellular Automata By a Grouping Operation* [28]. En éste, por primera vez se intenta dotar al conjunto de ACs unidimensionales de una estructura de preorden coherente con la capacidad de simulación y con la geometría de los diagramas espacio-tiempo. Este tipo de simulación resulta poseer fuertes simetrías entre la cantidad de celdas agrupadas y las iteraciones de la función global, lo cual da lugar a la calificación de esta simulación como «en tiempo real».

En tal publicación, se trabaja con autómatas de radio 1 y se hace hincapié en la estructura de la regla local al agrupar. En esta sección, se intentan mostrar y extender algunos de los resultados de ésta, con mayor manipulación de la función global que de la regla local, tal como en el

tratamiento que se hace en la literatura (ver [9, 10]) de las transformaciones más generales que se exponen en la sección siguiente. Además, los resultados aquí expuestos (como la transitividad del preorden en la Proposición 3.1.3) dan una idea de cómo se demuestran resultados análogos de las transformaciones más generales, cuyas demostraciones se omiten por cuestión de espacio y claridad.

Para comenzar introduciendo los conceptos necesarios, se define una de las nociones más básicas de simulación entre ACs.

Definición 3.1.1. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Φ_1 se dice **sub-autómata** de Φ_2 si existe una inyección $\iota : A_1 \rightarrow A_2$ tal que:

$$\bar{\iota} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \bar{\iota}, \quad (3.1.1)$$

donde $\bar{\iota}$ denota la extensión uniforme de ι . Esto se denota $\Phi_1 \sqsubseteq_{\bar{\iota}} \Phi_2$, o simplemente $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$ cuando se quiera omitir la función involucrada. En resumen, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_1^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A_2^{\mathbb{Z}} \\ \Phi_1 \downarrow & & \downarrow \Phi_2 \\ A_1^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & A_2^{\mathbb{Z}} \end{array} \quad (3.1.2)$$

Es fácil comprobar que si $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$ y $\Phi_2 \sqsubseteq \Phi_1$, entonces $\Phi_1 \cong \Phi_2$.

Observación. Notar que un sub-autómata es un caso particular de subsistema.

Así, un sub-autómata corresponde simplemente a un AC que funciona restringido a un subconjunto de estados de otro, susceptible al renombramiento de tales. A pesar de ser una noción natural y adecuada para la comparación de la capacidad de simulación entre dos ACs, es fácil ver que tal definición no es suficiente para dar una estructura no trivial a \mathcal{AC} , pues inevitablemente un AC con gran capacidad de simulación sufriría una explosión en la cardinalidad de su conjunto de estados. Para evitar tal inconveniente, se recurre a lo que en el título de [28] se denomina *grouping*.

Definición 3.1.2. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Se define la **n -potencia** de Φ como:

$$\Phi^{[n]} = \gamma_n \circ \Phi^n \circ \gamma_n^{-1}, \quad (3.1.3)$$

donde γ_n denota la función n -higher power code de la Definición 2.2.9.

Como se observa en la Figura 3.1.1, la n -potencia de un AC Φ se puede pensar como un nuevo AC (y fácilmente se puede comprobar que efectivamente constituye uno gracias al Teorema 2.2.2), en donde el conjunto de estados ahora es A^n y la regla salta $n - 1$ tiempos correspondientes al diagrama espacio-tiempo del AC original.

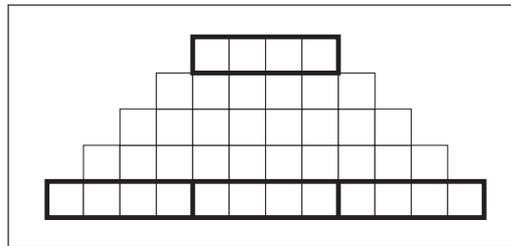


Figura 3.1.1: 4-potencia de un AC de radio 1.

Además, la n -potencia de ACs posee propiedades interesantes, tales como las que se exponen en los siguientes lemas.

Lema 3.1.1. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_1^{[n]} \sqsubseteq \Phi_2^{[n]}. \quad (3.1.4)$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\iota : A_1 \rightarrow A_2$ inyección tal que:

$$\bar{\iota} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \bar{\iota}.$$

Luego, es fácil ver inductivamente que:

$$\bar{\iota} \circ \Phi_1^n = \Phi_2^n \circ \bar{\iota}.$$

Considerar $\gamma_{n,A_1} : A_1^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A_1^n)^{\mathbb{Z}}$ y $\gamma_{n,A_2} : A_2^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A_2^n)^{\mathbb{Z}}$ como en 2.2.9, para los respectivos alfabetos. Componiendo γ_{n,A_2} por la izquierda y γ_{n,A_1}^{-1} por la derecha, se obtiene que:

$$\gamma_{n,A_2} \circ \bar{\iota} \circ \Phi_1^n \circ \gamma_{n,A_1}^{-1} = \gamma_{n,A_2} \circ \Phi_2^n \circ \bar{\iota} \circ \gamma_{n,A_1}^{-1}.$$

Así, definiendo $\bar{\alpha} : (A_1^n)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (A_2^n)^{\mathbb{Z}}$ por:

$$\bar{\alpha} = \gamma_{n,A_2} \circ \bar{\iota} \circ \gamma_{n,A_1}^{-1},$$

se tiene que:

$$(\bar{\alpha} \circ \gamma_{n,A_1}) \circ \Phi_1^n \circ \gamma_{n,A_1}^{-1} = \gamma_{n,A_2} \circ \Phi_2^n \circ (\gamma_{n,A_2}^{-1} \circ \bar{\alpha}),$$

esto es:

$$\bar{\alpha} \circ \Phi_1^{[n]} = \Phi_2^{[n]} \circ \bar{\alpha},$$

donde $\bar{\alpha}$ está inducido por la inyección $\alpha : A_1^n \rightarrow A_2^n$, con:

$$\alpha(a_1 \cdots a_n) = \iota(a_1) \cdots \iota(a_n),$$

para $a_1 \cdots a_n \in A_1^n$. Luego, $\Phi_1^{[n]} \sqsubseteq \Phi_2^{[n]}$. □

Lema 3.1.2. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Entonces, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$(\Phi^{[n]})^{[m]} \cong \Phi^{[nm]}. \quad (3.1.5)$$

Demostración. Considerar la biyección:

$$\begin{aligned} \pi : (A^n)^m &\longrightarrow A^{nm} \\ (a_1^1 \cdots a_1^n, \dots, a_m^1 \cdots a_m^n) &\longmapsto a_1^1 \cdots a_1^n \cdots a_m^1 \cdots a_m^n \end{aligned}$$

y su extensión uniforme:

$$\bar{\pi} : ((A^n)^m)^{\mathbb{Z}} \longrightarrow (A^{nm})^{\mathbb{Z}},$$

definida de la manera obvia.

Por definición,

$$\begin{aligned} (\Phi^{[n]})^{[m]} &= \gamma_{m,A^n} \circ (\gamma_{n,A} \circ \Phi^n \circ \gamma_{n,A}^{-1})^m \circ \gamma_{m,A^n}^{-1} \\ &= \gamma_{m,A^n} \circ (\gamma_{n,A} \circ \Phi^{nm} \circ \gamma_{n,A}^{-1}) \circ \gamma_{m,A^n}^{-1} \\ &= (\gamma_{m,A^n} \circ \gamma_{n,A}) \circ \Phi^{nm} \circ (\gamma_{m,A^n} \circ \gamma_{n,A})^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, notando que:

$$\gamma_{m,A^n} \circ \gamma_{n,A} = \bar{\pi}^{-1} \circ \gamma_{mn,A},$$

se puede ver que:

$$\begin{aligned} (\Phi^{[n]})^{[m]} &= (\bar{\pi}^{-1} \circ \gamma_{mn,A}) \circ \Phi^{nm} \circ (\bar{\pi}^{-1} \circ \gamma_{mn,A})^{-1} \\ &= \bar{\pi}^{-1} \circ (\gamma_{mn,A} \circ \Phi^{nm} \circ \gamma_{mn,A}) \circ \bar{\pi} \\ &= \bar{\pi}^{-1} \circ \Phi^{[nm]} \circ \bar{\pi}, \end{aligned}$$

es decir:

$$\bar{\pi} \circ (\Phi^{[n]})^{[m]} = \Phi^{[nm]} \circ \bar{\pi}.$$

□

Ahora, con los dos ingredientes previamente definidos, esto es, sub-autómata y n -potencia, se procede a introducir la relación en \mathcal{AC} que representa la noción de simulación en tiempo real.

Definición 3.1.3. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Se dice que Φ_2 **simula en tiempo real** a Φ_1 , y se denota $\Phi_1 \leq_{\square} \Phi_2$, si existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\Phi_1^{[n_1]} \sqsubseteq \Phi_2^{[n_2]}. \quad (3.1.6)$$

Se procede a comprobar que esta relación constituye un preorden en \mathcal{AC} .

Proposición 3.1.3. La relación \leq_{\square} es un preorden en \mathcal{AC} .

Demostración. La reflexividad se tiene directamente. Para la transitividad, considerar ACs Φ_1, Φ_2 y Φ_3 tales que $\Phi_1 \leq_{\square} \Phi_2$ y $\Phi_2 \leq_{\square} \Phi_3$. Por definición, existen $n_1, n_2, n'_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{[n_1]} &\sqsubseteq \Phi_2^{[n_2]} \\ \Phi_2^{[n'_2]} &\sqsubseteq \Phi_3^{[n_3]}. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 3.1.1, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\Phi_1^{[n_1]})^{[n'_2]} &\sqsubseteq (\Phi_2^{[n_2]})^{[n'_2]} \\ (\Phi_2^{[n'_2]})^{[n_2]} &\sqsubseteq (\Phi_3^{[n_3]})^{[n_2]}. \end{aligned}$$

Utilizando el Lema 3.1.2 y la transitividad de \sqsubseteq , se observa que:

$$\Phi_1^{[n_1 n'_2]} \sqsubseteq \Phi_3^{[n_2 n_3]},$$

y se tiene el resultado. □

Como todo preorden, la relación \leq_{\square} puede ser vista como un orden en el cociente $\mathcal{AC}/\simeq_{\square}$, donde \simeq_{\square} es la relación de orden canónica definida por:

$$\Phi_1 \simeq_{\square} \Phi_2 \iff \Phi_1 \leq_{\square} \Phi_2 \wedge \Phi_2 \leq_{\square} \Phi_1.$$

Así, la relación \simeq_{\square} tiene un buen comportamiento, como se ilustra en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.4. *Todas las potencias de un AC son \simeq_{\square} -equivalentes, es decir, para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y para todo $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

$$\Phi^{[n_1]} \simeq_{\square} \Phi^{[n_2]}. \quad (3.1.7)$$

Demostración. Es directo a partir del Lema 3.1.2:

$$(\Phi^{[n_1]})^{[n_2]} \cong \Phi^{[n_1 n_2]} \cong (\Phi^{[n_2]})^{[n_1]}.$$

□

En [28], es demostrado que el orden canónico inducido $(\mathcal{AC}/\simeq_{\square}, \leq_{\square})$ posee cadenas infinitas no acotadas, teniendo como corolario que tal orden no posee máximo (aún más, se demuestra que ni siquiera posee elementos maximales). Luego, no existe un AC tal que el conjunto de subautómatas de todas sus potencias pueda contener todas las dinámicas presentes en \mathcal{AC} en el sentido de la relación \leq_{\square} . Como conclusión, tal tipo de simulación no permite engendrar el fenómeno de la universalidad intrínseca en el modelo de autómatas celulares.

Algunos intentos por extender esta noción de simulación de manera que se tengan buenas propiedades —entre ellas, claramente, la universalidad— se registran en la literatura posterior. El con más aceptación, dada su compatibilidad con algunas nociones geométricas, es el dado por las transformaciones que se introducen en la siguiente sección.

3.2. Otras simulaciones (bulking)

Considerando lo anterior, es claro que los conceptos de sub-autómata y potencia proveen un conjunto de herramientas adecuado —pero como fue visto, no suficiente— para los propósitos de definir una noción de universalidad intrínseca de manera diáfana.

Tomando la definición de simulación en tiempo real e independizando los reescalamientos de tiempo y espacio (desarticulando el parámetro n en un parámetro t para el tiempo y m para el espacio), tentativamente se puede definir una transformación del tipo:

$$\Phi^{(m,t)} := \gamma_m \circ \Phi^t \circ \gamma_m^{-1}.$$

Con esto, y tomando una relación similar a la dada por la Definición 3.1.3, se puede verificar que esta vez sí se da lugar a un elemento máximo, es decir, a un AC intrínsecamente universal. Una intuición de cómo esto es posible se puede apreciar más adelante en la demostración del Teorema 3.4.3. Sin embargo, existe una noción más utilizada por su compatibilidad con ciertas transformaciones geométricas de los diagramas espacio-tiempo —que aquí se omiten— y la

relación de sub-autómata. Sobre esto último, es importante notar que un sub-autómata de un AC Φ dado, siempre estará inducido por un subconjunto de estados estable bajo iteraciones, esto es, un conjunto $E \subseteq A$ tal que el full-shift $E^{\mathbb{Z}}$ es invariante bajo Φ , es decir, $\Phi(E^{\mathbb{Z}}) \subseteq E^{\mathbb{Z}}$. Considerando esto, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1 ([9]). *Sean $t, m, q \in \mathbb{N}$, y $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$. Entonces, las dos proposiciones siguientes son equivalentes:*

1. *existe un conjunto $E \subseteq A_1^m$, con $|E| = q$, tal que $\Phi_1^t(E^{\mathbb{Z}}) \subseteq E^{\mathbb{Z}}$;*
2. *existen $z \in \mathbb{Z}$ y $\Phi_2 \in \mathcal{AC}$, con $|A_2| = q$, tales que:*

$$\Phi_2 \sqsubseteq \gamma_m \circ \sigma^z \circ \Phi_1^t \circ \gamma_m^{-1}.$$

Luego, se debe interpretar la proposición anterior como lo siguiente: si se quiere que todo conjunto de estados invariante vía un AC pueda ser identificado con un sub-autómata de algún reescalamiento de éste, entonces debe ser incorporado el shift en los ingredientes de la transformación. Una extensión —o visto desde el punto de vista de simulación, una relajación— de la técnica de grouping es lo que se denomina *bulking*¹, que, además de otorgar la independencia a los reescalamientos temporales y espaciales de \leq_{\square} como se esbozó previamente, añade un factor de traslación a la comparación de diagramas, como se sugiere necesario en el resultado anterior, con el fin de enriquecer una posible relación de simulación.

Definición 3.2.1. Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$ y los parámetros $m, t \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{Z}$, se define:

$$\Phi^{\langle m, t, z \rangle} := \gamma_m \circ \sigma^z \circ \Phi^t \circ \gamma_m^{-1},$$

donde γ_m es el m -higher power code, σ^z es el shift iterado z veces y Φ^t es la t -ésima iteración de Φ . Este conjunto de operaciones sobre la función global de un AC es lo que denominamos **bulking**.

Observación. Notar que gracias al Teorema 2.2.2, todo reescalamiento de un AC mediante esta operación constituye a su vez otro AC.

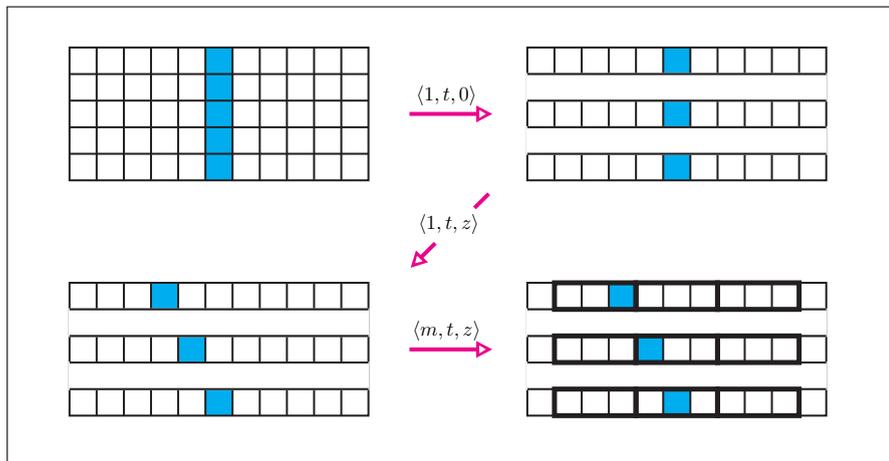


Figura 3.2.1: Bulking paso a paso.

¹Para una presentación completa, ver [9, 10].

Junto a este tipo de reescalamientos y considerando la relación de sub-autómata, se define una noción paralela (y en cierto sentido dual) a ésta, con pleno sentido en lo que intuitivamente se espera de una relación de simulación.

Definición 3.2.2. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Φ_1 se dice **cuociente** de Φ_2 si existe una sobreyección $\varphi : A_2 \rightarrow A_1$ tal que:

$$\bar{\varphi} \circ \Phi_2 = \Phi_1 \circ \bar{\varphi}, \tag{3.2.1}$$

donde $\bar{\varphi}$ denota la extensión uniforme de φ . Esto se denotará $\Phi_1 \preceq_{\bar{\varphi}} \Phi_2$, o simplemente $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ cuando se quiera omitir la función involucrada. En resumen, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_1^{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{\bar{\varphi}} & A_2^{\mathbb{Z}} \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 \\ A_1^{\mathbb{Z}} & \xleftarrow{\bar{\varphi}} & A_2^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Observación. Notar que la relación de cuociente entre ACs es un caso particular de factor.

Dadas estas operaciones y relaciones sobre ACs, se pueden definir tres preórdenes (\preceq_i, \preceq_s y \preceq_m) en el conjunto \mathcal{AC} , con propiedades interesantes.

Definición 3.2.3. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Se dice que Φ_1 **simula inyectivamente** a Φ_2 , y se denota $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$, si existen parámetros $\langle m_1, t_1, z_1 \rangle, \langle m_2, t_2, z_2 \rangle$ tales que:

$$\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \sqsubseteq \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}, \tag{3.2.2}$$

esto es, $\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle}$ es sub-autómata de $\Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}$.

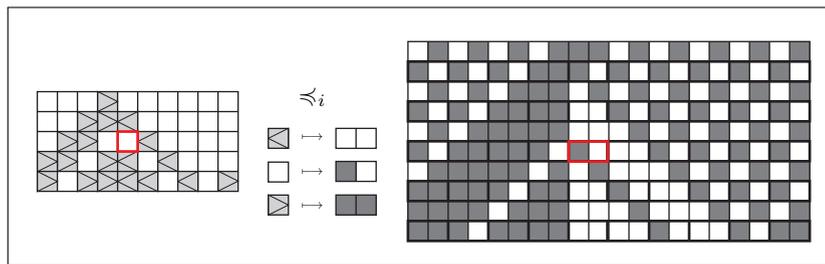


Figura 3.2.2: Ejemplo de simulación inyectiva.

Un ejemplo de cómo se observa una simulación en los diagramas espacio-tiempo se tiene en la Figura 3.2.2, en donde se consideran dos ACs cuyo funcionamiento conviene entender, pues se utilizarán en lo sucesivo. El AC simulado (a la izquierda) se conoce como JustGliders y consiste de tres estados tales que cada cual simula una partícula moviéndose en la dirección que indica la flecha interior correspondiente, donde el estado en blanco es un estado estacionario que simula el medio en el cual se desenvuelven. Al chocar dos partículas en direcciones opuestas, éstas se anulan. El AC que simula es el conocido AC elemental número 184, cuya regla local viene dada por:

x_i^{t+1}	1	0	1	1	1	0	0	0
$x_{i-1}^t x_i^t x_{i+1}^t$	111	110	101	100	011	010	001	000

Cuadro 3.2.1: Regla ECA184.

Definición 3.2.4. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Se dice que Φ_1 **simula sobreyectivamente** a Φ_2 , y se denota $\Phi_1 \preceq_s \Phi_2$, si existen parámetros $\langle m_1, t_1, z_1 \rangle, \langle m_2, t_2, z_2 \rangle$ tales que:

$$\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \preceq \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}, \quad (3.2.3)$$

esto es, $\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle}$ es cociente de $\Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}$.

En la Figura 3.2.3, se puede apreciar una simulación sobreyectiva entre el AC elemental 128 (izquierda) y el AC elemental 146, con parámetros $\langle 1, 1, 0 \rangle$ y $\langle 3, 3, 0 \rangle$, respectivamente.

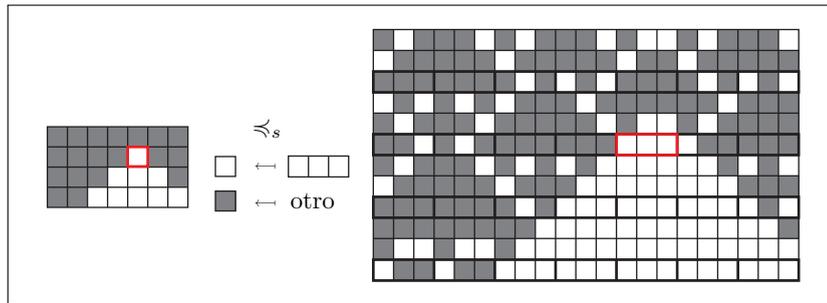


Figura 3.2.3: Ejemplo de simulación sobreyectiva.

Los simulaciones inyectivas y sobreyectivas son la base de los preórdenes que se buscan para dar significado y jerarquía a la capacidad de simulación de cada AC. Por otro lado, \preceq_i y \preceq_s resultan ser incomparables [10], es decir,

$$\Phi_1 \preceq_i \Phi_2 \not\Rightarrow \Phi_1 \preceq_s \Phi_2 \quad (3.2.4)$$

$$\Phi_1 \preceq_s \Phi_2 \not\Rightarrow \Phi_1 \preceq_i \Phi_2 \quad (3.2.5)$$

Así, ambas nociones son válidas y necesarias, en la medida que las dos prescriben un preorden en concordancia con las intuiciones que se desean formalizar.

El tercer tipo de simulación —y el más general— nace al considerar el conjunto de relaciones \mathcal{R} consistente en las relaciones obtenidas a partir de finitas composiciones de \sqsubseteq y \preceq , con la composición definida como:

$$R_1 R_2 = \{(x, y) : \exists z, (x, z) \in R_1 \text{ y } (z, y) \in R_2\}. \quad (3.2.6)$$

A propósito de esto, el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 ([10]). *Toda relación $R \in \mathcal{R}$ está incluida en $\preceq \sqsubseteq$, es decir:*

$$(\Phi_1, \Phi_2) \in R \implies \Phi_1 \preceq \sqsubseteq \Phi_2. \quad (3.2.7)$$

Además, las únicas relaciones transitivas en \mathcal{R} son: \preceq, \sqsubseteq y $\preceq \sqsubseteq$.

El teorema anterior en cierto modo establece que si se busca dar una estructura y orden con algún grado de interés (que por lo menos posea la cualidad de transitividad), se debe buscar entre las tres relaciones que se proponen. En concordancia con esto, se define el tercer y último tipo de simulación que se considerará.

Definición 3.2.5. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$. Se dice que Φ_1 **simula de manera mixta** a Φ_2 , y se denota $\Phi_1 \preceq_m \Phi_2$, si existen parámetros $\langle m_1, t_1, z_1 \rangle, \langle m_2, t_2, z_2 \rangle$ y $\Phi_3 \in \mathcal{AC}$ tales que:

$$\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \trianglelefteq \Phi_3 \sqsubseteq \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}, \quad (3.2.8)$$

o, más suscintamente, si existen aquellos parámetros de modo que:

$$\Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \trianglelefteq \sqsubseteq \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}. \quad (3.2.9)$$

Otra manera de entender la simulación mixta es considerarla como una simulación inyectiva en donde un estado del AC simulado se identifica con uno o más estados del autómatas que simula (y no sólo uno como en la simulación inyectiva). Claramente, la simulación mixta es una relajación de ambas simulaciones.

Luego, las tres relaciones de simulación definidas cumplen con definir un preorden en el conjunto \mathcal{AC} . Finalmente, una conexión importante entre las simulaciones que involucran bulking y las que son en tiempo real, viene dada por el siguiente lema.

Lema 3.2.3 ([10]). Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ y $\triangleleft \in \{\sqsubseteq, \trianglelefteq, \trianglelefteq \sqsubseteq\}$. Luego, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\exists m_1, m_2, t_1, t_2 \in \mathbb{N}, z_1, z_2 \in \mathbb{Z} : \Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \triangleleft \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle};$
2. $\exists m_1, t_1, n_2 \in \mathbb{N}, z_1 \in \mathbb{Z} : \Phi_1^{\langle m_1, t_1, z_1 \rangle} \triangleleft \Phi_2^{[n_2]};$
3. $\exists n_1, m_2, t_2 \in \mathbb{N}, z_2 \in \mathbb{Z} : \Phi_1^{[n_1]} \triangleleft \Phi_2^{\langle m_2, t_2, z_2 \rangle}.$

Así, ya se está en condiciones de definir el concepto de universalidad intrínseca. Para esto, primero se requiere de una versión de simulación más restringida.

Definición 3.2.6 (Simulación fuerte). Dada una relación $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$ y dos ACs Φ_1, Φ_2 , se dice que $\Phi_2 \preceq$ - **simula fuertemente** a Φ_1 si existen parámetros $\langle m, t, z \rangle$ tales que:

$$\Phi_1 \preceq \Phi_2^{\langle m, t, z \rangle}, \quad (3.2.10)$$

es decir, si Φ_2 es capaz de simular a Φ_1 sin que éste necesite ser reescalado.

Definición 3.2.7 (Universalidad). Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Un AC Ψ se dice que es **\preceq -universal** si es capaz de simular a todo AC Φ .

Definición 3.2.8 (Universalidad fuerte). Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Un AC Ψ se dice que es **fuertemente \preceq -universal** si es capaz de simular fuertemente a todo AC Φ .

Finalmente, un resultado que surge a partir de las propiedades de los reescalamientos y la transitividad de las simulaciones.

Teorema 3.2.4 ([10]). Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Si existe un AC fuertemente \preceq -universal, entonces todo AC \preceq -universal es fuertemente \preceq -universal.

3.3. Estructura de los preórdenes y propiedades

3.3.1. Máximos y mínimos

Una pregunta clave para este estudio es si estos tres preórdenes aceptan elemento máximo, lo cual, en el caso de las simulaciones vía sub-autómata, equivale a la noción más típica de universalidad intrínseca en la literatura. Para \preceq_i (y por consiguiente, para \preceq_m), efectivamente se tiene la existencia de tal elemento. Una pregunta aún abierta es si el preorden \preceq_s posee o no alguno.

Teorema 3.3.1 ([10]). *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_m\}$. Existe un AC fuertemente \preceq -universal y todo AC \preceq -universal es fuertemente \preceq -universal.*

Demostración. En la demostración del Teorema 3.4.3 se da una idea de cómo lo primero es posible. La consecuencia siguiente se obtiene directamente del Teorema 3.2.4. \square

Nota. La universalidad intrínseca es una propiedad más común de lo que parece. De hecho, como se explora en *How Common Can Be Universality for Cellular Automata?* [39], en familias tales como los ACs cautivos (ver Definición 2.3.3) los ACs intrínsecamente universales tienen densidad 1 en el sentido ahí definido.

Teorema 3.3.2 ([10]). *No existe un AC fuertemente \preceq_s -universal.*

Por otro lado, también resulta de interés saber cómo es el conjunto \mathcal{AC} en los niveles inferiores de los preórdenes inducidos. Como indican los siguientes resultados, todos los preórdenes aceptan elemento mínimo (que resulta ser el mismo en los tres casos).

Definición 3.3.1. Se define \perp como el AC tal que $V_\perp = \{0\}$, $A_\perp = \{0\}$ y cuya función global es la identidad \mathbb{I} .

Definición 3.3.2. Sea $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$ y $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Se define $[\Phi_1]_{\preceq}$ como el conjunto de ACs Φ_2 tales que $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ y $\Phi_2 \preceq \Phi_1$.

Teorema 3.3.3. *Sea $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$ y $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces:*

1. *existe $\Phi_2 \in [\Phi_1]_{\preceq}$ tal que posee un estado estacionario;*
2. *existe $\Phi_2 \in [\Phi_1]_{\preceq}$ de radio 1;*
3. $\perp \preceq \Phi_1$;
4. $\Phi_1 \preceq \Phi_1 \otimes \Psi$ ($\Phi_1 \preceq \Psi \otimes \Phi_1$), para todo $\Psi \in \mathcal{AC}$.

Demostración.

1. Sea $s \in A_1$ arbitrario y $x = {}^\infty s^\infty$ la configuración uniforme. Necesariamente tal configuración es finalmente temporalmente periódica. Luego, existe una configuración uniforme $y = {}^\infty q^\infty$ temporalmente periódica y un tiempo $1 \leq t \leq |A_1|$ tales que $\Phi_1^t(y) = y$. Tomando tal estado q y tal tiempo t , se tiene que aquel es estado estacionario de Φ_1^t , y claramente $\Phi_1^t \in [\Phi_1]_{\preceq}$.

2. Considerando $\Phi_1^{\langle r,1,0 \rangle}$, con r el radio de Φ_1 , se tiene que tal AC admite una representación con radio 1 y $\Phi_1^{\langle r,1,0 \rangle} \in [\Phi_1]_{\preceq}$.
3. Primero, siempre se tiene que $\perp \trianglelefteq_{\pi} \Phi_1$, donde π es la sobreyección que a todo estado asigna el único estado de \perp . Luego, se tiene que la proposición es cierta tanto para \preceq_s como para \preceq_m . Segundo, se tiene que $\perp \sqsubseteq_{\iota} \Phi_2$ si Φ_2 posee un estado estacionario mediante la inyección trivial que asigna al único estado de \perp tal estado de Φ_2 . Además, para todo Φ_1 existe tal $\Phi_2 \in [\Phi_1]_{\preceq_i}$, como se demostró en la primera afirmación.
4. Basta con probarlo para el caso $\Phi_1 \otimes \Psi$, el otro es análogo. Primero, siempre se tiene que $\Phi_1 \trianglelefteq_{\pi_1} \Phi_1 \otimes \Psi$, donde π_1 es la proyección en la primera componente. Segundo, si Ψ posee un estado estacionario q , se tiene que $\Phi_1 \sqsubseteq_{\iota} \Phi_1 \otimes \Psi$ con la inyección definida como $\iota(s) = (s, q)$, para todo $s \in A_1$. Si Ψ no posee estado estacionario, basta con considerar Ψ^t como en la primera afirmación para obtener:

$$\Phi_1^t \sqsubseteq \Phi_1^t \otimes \Psi^t = (\Phi_1 \otimes \Psi)^t,$$

y luego, $\Phi_1 \preceq_i \Phi_1 \otimes \Psi$.

□

Proposición 3.3.4 ([10]). *El conjunto de ACs nilpotentes con 2 o más estados constituye una clase de equivalencia para $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$.*

3.3.2. Ideales

Otra característica de estos preórdenes es que logran capturar y traspasar vía simulaciones propiedades que son de interés general. A modo de ejemplo, resulta ser que dada cualquier relación de simulación, si cierto AC es simulado por un AC reversible, entonces éste también debe serlo. Esto da pie para caracterizar ciertas clases de ACs que poseen un buen comportamiento con respecto a las relaciones de simulación ya definidas.

Definición 3.3.3. Sea \preceq un preorden en \mathcal{AC} . Un subconjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{AC}$ se dice **ideal** para (\mathcal{AC}, \preceq) si verifica lo siguiente:

1. $\forall \Phi_1 \in \mathcal{I}, \forall \Phi_2 \in \mathcal{AC} : \Phi_2 \preceq \Phi_1 \implies \Phi_2 \in \mathcal{I}$;
2. $\forall \Phi_1 \in \mathcal{I}, \forall \Phi_2 \in \mathcal{I}, \exists \Phi_3 \in \mathcal{I} : \Phi_1 \preceq \Phi_3 \wedge \Phi_2 \preceq \Phi_3$.

Un ideal se dice **principal** si $\exists \Psi \in \mathcal{I}$ tal que:

$$\Phi \in \mathcal{I} \iff \Phi \preceq \Psi. \quad (3.3.1)$$

La siguiente proposición entrega condiciones suficientes para que un subconjunto de \mathcal{AC} constituya un ideal en los preórdenes que nos interesan.

Proposición 3.3.5 ([10]). *$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{AC}$ es un ideal para \preceq_i (resp. \preceq_s, \preceq_m) si:*

1. $\forall m, t \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z} : \Phi \in \mathcal{I} \iff \Phi^{\langle m,t,z \rangle} \in \mathcal{I}$;

2. $\Phi_2 \in \mathcal{I} \wedge \Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$ (resp. $\Phi_1 \trianglelefteq \Phi_2, \Phi_1 \trianglelefteq \sqsubseteq \Phi_2$) $\implies \Phi_1 \in \mathcal{I}$;
3. $\Phi_1 \in \mathcal{I} \wedge \Phi_2 \in \mathcal{I} \implies \Phi_1 \otimes \Phi_2 \in \mathcal{I}$.

Considerando lo anterior, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 3.3.6 ([10]). *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, el conjunto de ACs nilpotentes en las configuraciones periódicas es un ideal para \preceq .*

Proposición 3.3.7 ([10]). *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, el conjunto de ACs reversibles es un ideal para \preceq .*

Teorema 3.3.8 ([10]). *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_m\}$. Luego, el ideal de ACs reversibles es principal, es decir, existe $\Psi \in \mathcal{AC}$ tal que:*

$$\Phi \text{ reversible} \iff \Phi \preceq \Psi. \quad (3.3.2)$$

Proposición 3.3.9 ([10]). *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, el conjunto de ACs sobreyectivos es un ideal para \preceq .*

Proposición 3.3.10 ([10]). *El conjunto de ACs expansivos es un ideal para \preceq_i .*

Proposición 3.3.11 ([10]). *El conjunto de ACs con conjunto límite sófico es un ideal para \preceq_s .*

Como aporte de esta investigación al enriquecimiento de la estructura prescrita por estos preórdenes, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, el conjunto de ACs cerrados a la derecha (resp. izquierda) es un ideal para \preceq .*

Demostración. Para probar el teorema, se recurre la Proposición 3.3.5, adoptando una numeración consistente con ésta.

1. Sean $m, t \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}$. Luego:

- Φ es cerrado a la derecha $\iff \gamma_m \circ \Phi \circ \gamma_m^{-1}$ es cerrado a la derecha.

En efecto, si Φ es cerrado a la derecha, supóngase existen puntos $x, y \in (A^m)^\mathbb{Z}$, $x \neq y$, asintóticos a la izquierda y tales que: $\Phi^{(m,1,0)}(x) = \Phi^{(m,1,0)}(y)$. Luego,

$$\gamma_m \circ \Phi \circ \gamma_m^{-1}(x) = \gamma_m \circ \Phi \circ \gamma_m^{-1}(y).$$

Como γ_m es biyectiva, sigue que:

$$\Phi \circ \gamma_m^{-1}(x) = \Phi \circ \gamma_m^{-1}(y).$$

Así, se tiene que $\gamma_m^{-1}(x), \gamma_m^{-1}(y) \in A^\mathbb{Z}$ son distintos, asintóticos a la izquierda y sus imágenes vía Φ son iguales, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, supóngase que $\Phi^{(m,1,0)}$ es cerrado a la derecha y existen $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$, $x \neq y$, asintóticos a la izquierda, tales que:

$$\begin{aligned} & \Phi(x) = \Phi(y) \\ \iff & \Phi \circ \gamma_m^{-1}(\gamma_m(x)) = \Phi \circ \gamma_m^{-1}(\gamma_m(y)) \\ \iff & \gamma_m \circ \Phi \circ \gamma_m^{-1}(\gamma_m(x)) = \gamma_m \circ \Phi \circ \gamma_m^{-1}(\gamma_m(y)) \\ \iff & \Phi^{(m,1,0)}(\gamma_m(x)) = \Phi^{(m,1,0)}(\gamma_m(y)), \end{aligned}$$

pero esto es una contradicción, pues $\gamma_m(x), \gamma_m(y) \in (A^m)^{\mathbb{Z}}$ son distintos y asintóticos a la izquierda.

- Φ es cerrado a la derecha $\iff \Phi^t$ es cerrado a la derecha.

En efecto, supóngase que Φ es cerrado a la derecha. Se verá que Φ^t también lo es. Para esto, notar que si $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ son distintos y asintóticos a la izquierda, entonces $\Phi(x), \Phi(y) \in A^{\mathbb{Z}}$ también lo son. Iterando el argumento, se concluye que $\Phi^{t-1}(x), \Phi^{t-1}(y)$ son distintos y asintóticos a la izquierda. Luego, nuevamente por cerradura a la derecha de Φ , se tiene que $\Phi^t(x) \neq \Phi^t(y)$. Por otro lado, si Φ^t es cerrado a la derecha y $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ son distintos y asintóticos a la izquierda, se tiene que $\Phi^t(x) \neq \Phi^t(y)$, pero esto implica necesariamente que $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

- Φ es cerrado a la derecha $\iff \sigma^z \circ \Phi$ lo es.

Notar que $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ son distintos y cerrados a la izquierda si y sólo si $\sigma^z(x)$ y $\sigma^z(y)$ también lo son. Luego,

$$\begin{aligned} & \Phi(\sigma^z(x)) \neq \Phi(\sigma^z(y)) \\ \implies & \sigma^z \circ \Phi(x) \neq \sigma^z \circ \Phi(y) \\ \implies & \Phi(x) \neq \Phi(y). \end{aligned}$$

Esto último por la caracterización del Teorema 2.2.2 y la biyectividad del shift.

Luego, componiendo lo anterior, se tiene el resultado.

2.

- \sqsubseteq : sea $\Phi_2 \in \mathcal{AC}$ cerrado a la derecha y $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$ tal que $\Phi_1 \sqsubseteq_{\bar{\iota}} \Phi_2$. Luego, si $x, y \in A_1^{\mathbb{Z}}$ son distintos y asintóticos a la izquierda, entonces $\bar{\iota}(x), \bar{\iota}(y) \in A_2^{\mathbb{Z}}$ también lo son. Luego,

$$\bar{\iota} \circ \Phi_1(x) = \Phi_2 \circ \bar{\iota}(x) \neq \Phi_2 \circ \bar{\iota}(y) = \bar{\iota} \circ \Phi_1(y).$$

Así, $\bar{\iota} \circ \Phi_1(x) \neq \bar{\iota} \circ \Phi_1(y)$, lo cual implica que $\Phi_1(x) \neq \Phi_1(y)$.

- \triangleleft : dado el largo y lo técnico de esta demostración, ésta se puede encontrar en el Anexo A.

3. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ cerrados a la derecha. Luego, $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ también lo es. En efecto, sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A_{\Phi_1 \otimes \Phi_2}^{\mathbb{Z}}$ distintos y asintóticos a la izquierda. Luego, necesariamente alguno de los pares x_1, y_1 o x_2, y_2 también lo son. Así, por cerradura a la derecha de Φ_1 o Φ_2 , respectivamente, se tiene que:

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2(x_1, x_2) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)) \neq (\Phi_1(y_1), \Phi_2(y_2)) = \Phi_1 \otimes \Phi_2(x_1, x_2).$$

La demostración para el caso cerrado a la izquierda es análoga. □

Corolario. Si $\Phi \in \mathcal{AC}$ es máximo para el ideal de los sobreyectivos en el orden inducido por \preceq_i , entonces no es cerrado.

Demostración. Por el teorema anterior, el conjunto de ACs cerrados constituye un ideal. Luego, si un elemento maximal para el ideal de los sobreyectivos fuese cerrado, todo AC sobreyectivo sería cerrado. Pero esto no es el caso, como se ve gracias al siguiente ejemplo: considerar el AC Φ con conjunto de estados $\{0, 1, 2\}$ dado por la siguiente regla local ϕ :

ab	00	01	02	10	11	12	20	21	22
$\phi(ab)$	0	1	0	1	0	1	2	2	2

Cuadro 3.3.1: Ejemplo de AC sobreyectivo pero no cerrado.

Se puede ver que este AC es permutativo a la izquierda, pues:

$$\phi(\cdot, b) : \{0, 1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$$

es biyectiva para todo $b \in \{0, 1, 2\}$. Luego, Φ es sobreyectivo, por la Proposición 2.3.1. Por otro lado,

$$\Phi(\infty 20^\infty) = \infty 220^\infty = \Phi(\infty 21^\infty),$$

donde $\infty 20^\infty$ y $\infty 21^\infty$ son puntos distintos y asintóticos a la izquierda. Es decir, Φ no es cerrado a la derecha. □

Lema 3.3.13 ([15]). *Un AC es abierto si y sólo si es cerrado a la derecha y a la izquierda.*

Corolario. Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, el conjunto de ACs abiertos es un ideal para \preceq .

Demostración. Basta utilizar la demostración del Teorema 3.3.12 y la caracterización del lema anterior. □

La siguiente tabla resume las propiedades que se comportan como ideales en (\mathcal{AC}, \preceq) , donde $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$.

Ideales	\preceq_i	\preceq_s	\preceq_m
Sobreyectivos	✓	✓	✓
Cerrados a la derecha (resp. izquierda)	✓	✓	✓
Abiertos	✓	✓	✓
Inyectivos	✓	✓	✓
Nilpotentes en configuraciones periódicas	✓	✓	✓
Expansivos	✓	?	?
Conjunto límite sófico	✗	✓	✗

Cuadro 3.3.2: Ideales.

3.4. Resultados de indecidibilidad

Una vez formalizado el concepto de universalidad intrínseca, se obtiene mayor claridad a la hora de decidir si cierto AC posee o no esta cualidad (cosa que es más esquivada a la hora de decidir la Turing-universalidad, dada su definición más ad-hoc). Por ejemplo, una estrategia plausible para demostrar universalidad (intrínseca) en un AC es mostrar que éste simula a otro que sea universal. Por otro lado, para demostrar la no universalidad en cierto AC, puede buscarse algún AC no universal que lo simule o verificar si cumple alguna propiedad que constituya un ideal. Sin embargo, se puede apreciar que este último cometido —el probar no universalidad— no posee una metodología general. Además, aceptar² universalidad es un procedimiento a todas luces semi-decidible, pues teniendo la existencia de un AC universal y otro a verificar universalidad, basta con recorrer y buscar los parámetros de agrupamiento, iteración y shift adecuados para la simulación y luego estudiar las reglas locales asociadas bajo alguna inyección entre estados (representando la relación de sub-autómata). Así, la motivación de esta sección será demostrar la no recursividad del conjunto de ACs intrínsecamente universales o, dicho de otra manera, la no existencia de un procedimiento algorítmico capaz de decidir si un AC posee o no esta propiedad. Además, como propósito paralelo, se aprovecha la necesidad de la demostración de un AC universal particular para ilustrar la construcción de uno (fácilmente adaptable para ser fuertemente universal) y la veracidad del Teorema 3.3.1.

Para poder demostrar este resultado, primero es necesario enunciar otros teoremas auxiliares de indecidibilidad. En *Global Fixed Point Attractors of Circular Cellular Automata and Periodic Tilings of the Plane: Undecidability Results* [29] (1999), Mazoyer y Rapaport estudiaron la decidibilidad del problema de la nilpotencia en configuraciones periódicas CA-1D-NIL-PER, cuya definición se puede encontrar en el Cuadro 3.4.1. A propósito de esto, el siguiente teorema cuya demostración es omitida.

Teorema 3.4.1 ([29]). *El problema de la nilpotencia en configuraciones periódicas en autómatas celulares unidimensionales CA-1D-NIL-PER es indecidible. Es semi-decidible pero su complemento no lo es.*

CA-1D-NIL-PER	
Entrada	$\langle \Phi, s \rangle$, tal que $\Phi \in \mathcal{AC}$, $s \in A_\Phi$.
Pregunta	¿Es Φ s -nilpotente para las configuraciones periódicas?

Cuadro 3.4.1: Problema de decisión CA-1D-NIL-PER.

Antes de proceder con el teorema principal de la sección, se enuncia un lema que de alguna manera recuerda los resultados descritos en *A Simple Universal Cellular Automaton and Its One-Way and Totalistic Version* [1] (1987).

Lema 3.4.2. *Sea $\preceq \in \{\preceq_i, \preceq_s, \preceq_m\}$. Entonces, Φ es intrínsecamente \preceq -universal si y sólo si es capaz de simular todo AC one-way.*

Demostración. La demostración es directa notando que todo AC se puede reescalar para obtener un AC one-way equivalente. \square

²En el sentido computacional de la palabra.

Teorema 3.4.3 ([32]). *El problema de la universalidad intrínseca en autómatas celulares uni-dimensionales CA-1D-UNIV es indecidible. Es semi-decidible pero su complemento no lo es.*

CA-1D-UNIV	
Entrada	$\langle \Phi \rangle$, tal que $\Phi \in \mathcal{AC}$.
Pregunta	¿Es Φ intrínsecamente universal?

Cuadro 3.4.2: Problema de decisión CA-1D-UNIV.

Demostración. La demostración de la indecidibilidad se basa en una reducción al problema de nilpotencia sobre configuraciones periódicas, esto es:

$$\text{CA-1D-UNIV} \leq_m \text{CA-1D-NIL-PER},$$

donde \leq_m denota una reducción no inyectiva (*many-one*), y utiliza la existencia de un AC intrínsecamente universal particular Ψ que se define a continuación.

El AC Ψ se basa en la simulación de una máquina de Turing multi-cabezal $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$, donde Q es el conjunto de estados, Σ el alfabeto y:

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q \times \Sigma \times \{\triangleleft, \nabla, \triangleright\},$$

la función de transición. El comportamiento de \mathcal{M} en el caso de configuraciones en donde más de una cabeza comparten posición no está definido y tampoco es relevante. Así, Ψ está definido como:

$$\Psi = (V^1, (\{\cdot\} \cup Q) \times \Sigma, \phi).$$

Un estado de Ψ , está constituido por un símbolo en Σ y un estado de \mathcal{M} o un símbolo en blanco « \cdot ». Así, una configuración de Ψ se vería como algo del estilo:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} a & a & a & a & b & b & a & b & a & b & a & a & a & b & a & a & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & s & \cdot & s' & \cdot & \cdot \end{array}$$

La función local ϕ está definida de tal manera que emule a \mathcal{M} de acuerdo a δ en configuraciones «localmente válidas» de \mathcal{M} . Por localmente válidas, se entenderá que son configuraciones en donde ningún par de cabezales están en la vecindad de radio 1 del otro. Para definir totalmente ϕ , basta con considerar la regla que simplemente destruye los cabezales ante tal situación.

Ahora, definiendo \mathcal{M} de manera adecuada, es posible notar que dado cualquier AC one-way Φ , existe $m \in \mathbb{N}$ y un mapeo inyectivo $\iota : A_\Phi \longrightarrow A_\Psi^m$ tal que Ψ simula inyectivamente a Φ sin el shift, es decir, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\bar{\iota} \circ \Phi = \Psi^{(m,t,0)} \circ \bar{\iota},$$

donde $\bar{\iota}$ denota la extensión uniforme de ι .

Primero, cada macro-celda —es decir, cada bloque de celdas que codifica alguna celda de el AC simulado— está manejada por un cabezal de la máquina \mathcal{M} . Más rigurosamente, existe un estado $q_0 \in Q$ tal que, para cada símbolo $a \in A_\Phi$, su imagen $\iota(a)$ contiene a q_0 como el componente del cabezal de la primera celda y en ninguna otra parte más.

Segundo, durante la simulación, todos los cabezales se mueven coordinados. Para cada configuración x de Φ y para cada tiempo t , las componentes de los cabezales de la configuración $x^{(t)} := \Psi^t(\bar{\iota}(x))$ de Ψ contienen los cabezales exactamente en posiciones $(mi + l_t)_{i \in \mathbb{Z}}$, para alguna sucesión $(l_t)_{t \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$.

Tercero, se puede extender la simulación a macroceldas con un m mayor, rellenando éstas³ y preservando todas las propiedades. Formalmente, existe una letra $\bar{a} \in \Sigma$ tal que, para cada entero positivo l , la suma $m + l$ y el mapeo inyectivo:

$$\begin{aligned} \iota_l : A_\Phi &\longrightarrow A_\Psi^{m+l} \\ s &\longmapsto (\iota(s))(\cdot, \bar{a})^l, \end{aligned}$$

son elecciones válidas para reemplazar m y ι , y mantener las propiedades de la simulación.

El comportamiento de tal autómata se puede apreciar en la Figura 3.4.2, donde el movimiento de los cabezales está representado por líneas rectas.

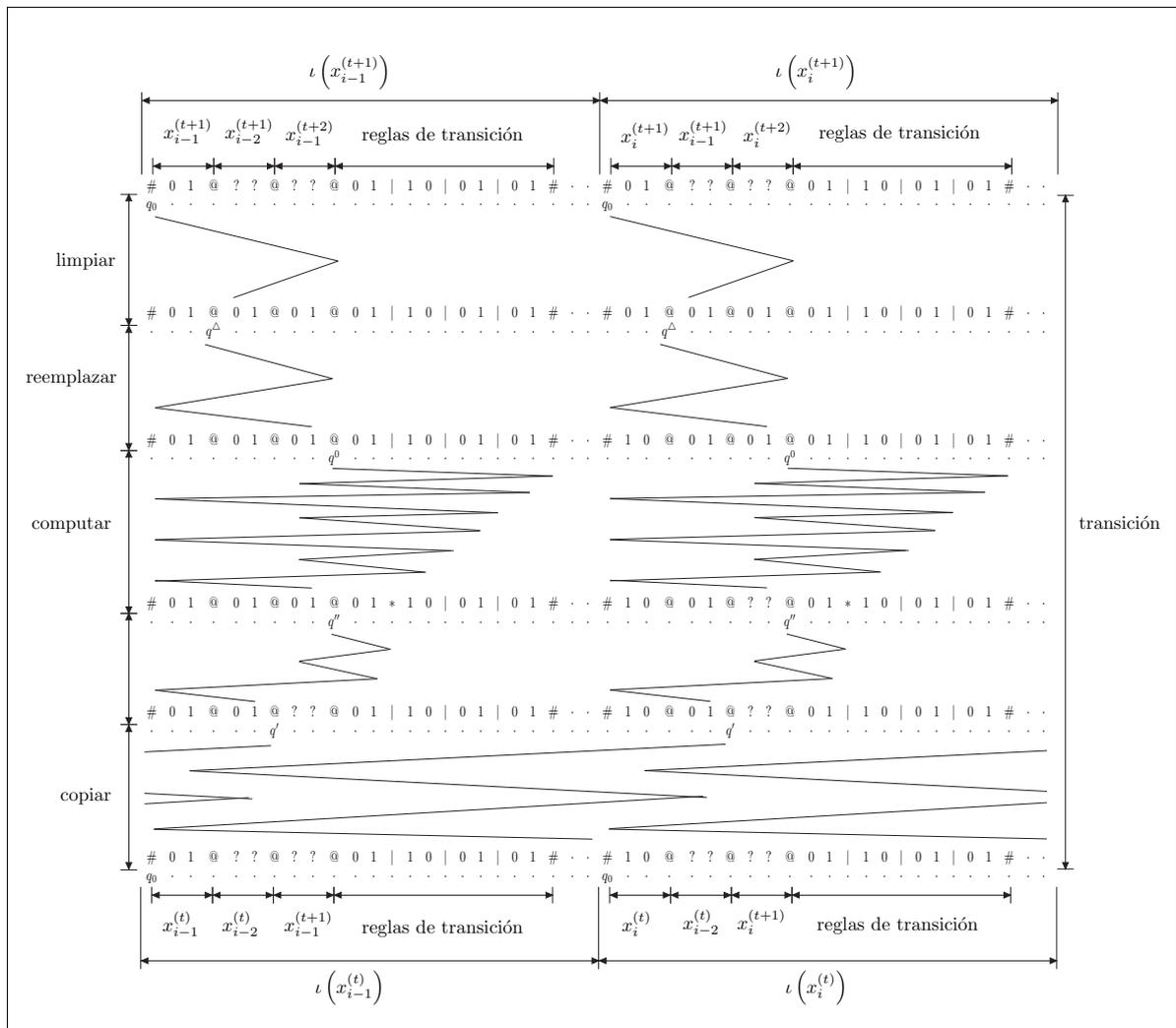


Figura 3.4.1: Comportamiento de un AC intrínsecamente universal canónico.

³En algunos contextos esta técnica se conoce con el nombre de *padding*.

La primera idea de la construcción es separar regularmente en bloques el arreglo de celdas. Cada bloque corresponde a una macro-celda que codifica una celda del autómata one-way simulado. El borde entre dos bloques está representado por dos símbolos de borde # separados por un vacío de letras ..

Dentro de cada bloque, se distinguen distintas regiones que son separadas por el símbolo @:

1. en la primera región es almacenado el estado de la macro-celda;
2. en la segunda, se almacena durante la transición el estado de la macro-celda vecina;
3. en la tercera, se almacena temporalmente el próximo estado de la macro-celda;
4. y en la final, se almacena las reglas de transición del AC simulado.

Una transición de las macro-celdas es llevada a cabo por los siguientes pasos:

1. primero, el cabezal copia el estado de la macro-celda vecina en la región de almacenamiento apropiada;
2. luego, la tabla de transición es leída completamente. En cada paso, los valores de los estados almacenados son comparados con la posición actual de la tabla de transición y el resultado de la transición es copiado en la región de almacenamiento para el próximo estado o la copia es emulada si los valores no calzan;
3. una vez que la lectura de la tabla de transición ha concluído, el cabezal reemplaza el contenido de la región destinada a almacenar el estado de la macro-celda y procede a borrar todas las otras regiones de almacenamiento;
4. finalmente, el cabezal vuelve a su posición inicial y entra en el estado q_0 .

Teniendo esto, se procede a definir la siguiente operación entre ACs. Dado un $\Phi \in \mathcal{AC}$ y el AC intrínsecamente universal descrito anteriormente Ψ , se considera:

$$\Phi \otimes_s \Psi = \left(V_\Phi \cup V^{\frac{1}{2}} \cup V_\Psi, A_\Phi \times \{ \cdot, * \} \times A_\Psi, \lambda \right).$$

La componente correspondiente a Φ se denomina la «componente de producción», que consiste en una configuración de Φ que evoluciona de acuerdo a la regla local de éste. La segunda componente se denomina «componente de difusión», y consiste en una configuración con estados * (sin energía) y · (con energía) cuya evolución es como la del shift salvo por lo siguiente: si la primera componente no posee un estado s en cierta posición, entonces la segunda componente produce un estado de energía *; por otro lado, si la tercera componente posee un cabezal en cierta posición y la segunda componente recibe un estado de energía de su vecino, entonces la componente de difusión «disipa» la energía y cambia el estado de energía por uno sin energía ·. Finalmente, la tercera componente se denomina «componente de consumo», y consiste en una configuración de Ψ que evoluciona de acuerdo a su regla local pero que está bajo el control de la segunda componente: si en cierta posición de la tercera componente hay un cabezal en la celda vecina y la segunda componente posee un estado de energía *, entonces se evoluciona de acuerdo a la regla local de Ψ ; si no, entonces la primera componente funciona como la identidad.

Ahora, para finalizar la demostración, bastará con verificar que para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$, $\Phi \otimes_s \Psi$ es intrínsecamente universal si y sólo si Φ no es s -nilpotente en las configuraciones periódicas.

Si Φ no es s -nilpotente en las configuraciones periódicas, entonces existe una configuración $\bar{x} \in A_{\mathbb{F}}^{\mathbb{Z}}$ periódica temporal y espacialmente tal que es diferente de la configuración ${}^{\infty}s^{\infty}$. Sea p el período espacial de \bar{x} . Para probar que $\Phi \otimes_s \Psi$ es intrínsecamente universal, basta con probar que éste es capaz de simular cualquier AC one-way. Sea $\Xi \in \mathcal{AC}$ un AC one-way cualquiera y m, t y ι los parámetros de simulación de Ψ descritos anteriormente de tal manera que p divide a m (usando la propiedad de padding si es necesario). Luego, $\Phi \otimes_s \Psi$ simula a Ξ^{t_0} para algún $t_0 > 0$ con parámetros $m, t_0 t$ y $\tilde{\iota}$, donde $\tilde{\iota}$ es obtenido a partir de ι considerando las siguientes ideas: la primera componente de $\tilde{\iota}$ consiste en períodos de \bar{x} ; la tercera componente, viene directamente dada por ι ; como \bar{x} es periódica y su período divide a m , ésta periódicamente produce «energía» para la simulación, conservando la coordinación entre cabezales y permitiendo que la simulación tenga lugar con quizá algún ralentamiento. Finalmente, por argumentos de cardinalidad, es posible escoger la segunda componente para $\tilde{\iota}$ de tal manera que en cualquier simulación ésta aparezca periódicamente en t' iteraciones (notar que cada macro-celda produce y consume energía de la misma manera sea cual sea el estado que ésta codifique). Así, escogiendo t_0 de tal manera que t divida a $t_0 t$, se tiene lo requerido: $\tilde{\iota}$ es inyectiva y $\Phi \otimes_s \Psi$ simula a Ξ^{t_0} con parámetros $m, t_0 t$ y $\tilde{\iota}$.

Ahora, si Φ es s -nilpotente en las configuraciones periódicas, basta con demostrar que $\Phi \otimes_s \Psi$ no es capaz de simular un AC particular. Sea Ξ el AC definido por la regla local:

$$\xi(x_{i-1}, x_i) = x_i + x_{i+1} \pmod{2},$$

sobre el conjunto de estados $A_{\Xi} = \{0, 1\}$. Supóngase que $\Phi \otimes_s \Psi$ es capaz de simularlo y sean w_0 y w_1 las respectivas codificaciones de 0 y 1. El AC Ξ admite un diagrama espacio-tiempo con periódico espacial y temporalmente con el siguiente patrón:

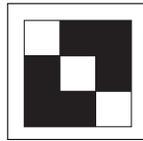


Figura 3.4.2: Patrón temporal y espacialmente periódico de Ξ .

esto es, algo como lo que observa en la Figura 3.4.3.

Si Φ es s -nilpotente en configuraciones periódicas, la primera componente de la simulación del diagrama espacio-tiempo periódico considerado de Ξ deja de crear energía en la segunda componente después de un tiempo finito. Luego, ni w_0 ni w_1 pueden contener celdas de energía en su componente de difusión y cabezas lectoras en su componente de consumo a la vez, pues las cabezas consumirían toda la energía en tiempo finito y no se preservaría la inyectividad de la codificación (ya que inicialmente $w_i, i \in \{0, 1\}$, contenía celdas de energía).

Si hay un cabezal en la componente de consumo de w_0 ó w_1 , entonces la componente de difusión no posee celdas de energía. Luego, la componente de producción se comporta periódicamente y las otras componentes de manera constante, esto es, $\Phi \otimes_s \Psi$ se comporta como un AC periódico en las configuraciones de simulación. Por otro lado, si no hay cabezales ni en w_0 ni en w_1 , entonces la componente de consumo es periódica, la componente de difusión es un shift

y la componente de producción es constante, esto es, $\Phi \otimes_s \Psi$ se comporta como el producto de un shift con un AC periódico en las configuraciones de simulación.

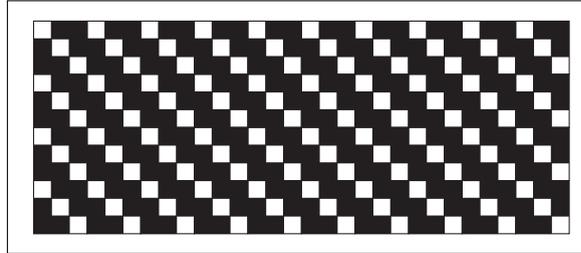


Figura 3.4.3: Diagrama espacio-tiempo periódico de Ξ .

En estos últimos dos casos, ambos comportamientos fallan al intentar capturar el comportamiento de Ξ , pues Ξ en la configuración ${}^\infty 010^\infty$ produce un triángulo de Pascal módulo 2, que no puede ser obtenido por el producto de un shift y un AC periódico.

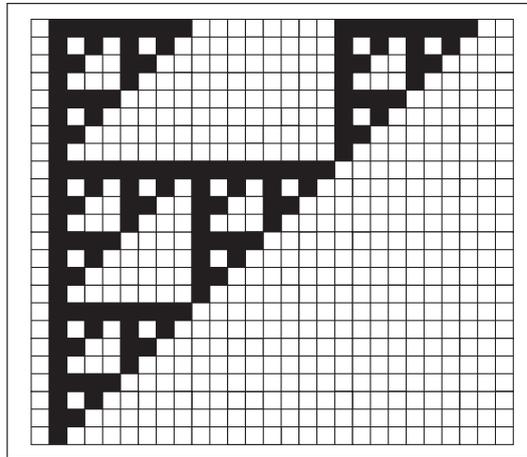


Figura 3.4.4: Triángulo de Pascal módulo 2 a partir de la configuración ${}^\infty 010^\infty$.

□

Como se vio, la universalidad intrínseca resulta ser indecidible. Como comentario adicional, es preciso notar que dada esta demostración, lo que se tiene es que la clase de elementos maximales para \preceq_i es indecidible. Sin embargo, como se comenta en *Four States are Enough!* [34] (2011) por el mismo autor de este resultado, tal resultado es extensible al preorden mixto \preceq_m . En ese mismo artículo, se muestra la existencia de un AC de radio 1 con cuatro estados intrínsecamente universal para \preceq_m . También, se discute sobre la igualdad de la clase de ACs universales para \preceq_i con la de ACs universales para \preceq_m y se plantea como otro problema abierto el encontrar más herramientas para probar no universalidad intrínseca.

Capítulo 4

Problemas computacionales inducidos por ACs

*“The rest of my speech” (he explained to his men)
“You shall hear when I’ve leisure to speak it.
But the Snark is at hand, let me tell you again!
'Tis your glorious duty to seek it!”*

Fit the Fourth - THE HUNTING

En este capítulo se definen problemas computacionales que surgen a partir de considerar un AC particular y algún aspecto de su dinámica. Se procede a establecer su complejidad y se muestra que todos son completos para alguna clase de complejidad conocida.

4.1. Predicción

Definición 4.1.1 (Predicción [14]). De manera general, dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, el problema de predicción busca establecer el valor de las celdas que se obtienen al iterar Φ sobre una palabra inicial hasta que el radio de la regla local lo permite. Para definir esto, considerar la representación canónica de Φ como una tupla del tipo (V_r, A, ϕ) , donde $\phi : A^{2r+1} \rightarrow A$ es una regla local de radio r que induce Φ con el menor radio posible. Además, se define la extensión $\phi : A^n \rightarrow A^{n-2rt}$, para $n \geq 2r + 1$ y $1 \leq t \leq \lfloor (n - 1)/2r \rfloor$, por:

$$\begin{cases} \phi^1 = \phi \\ \phi^t(x_1 \cdots x_n) = \phi(\phi^{t-1}(x_1 \cdots x_{n-2r}) \cdots \phi^{t-1}(x_{2r+1} \cdots x_n)) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Por último, se define $\phi^{*,r} : A^* \rightarrow A^*$ como:

$$\phi^{*,r}(x) = \begin{cases} \phi^{\lfloor \frac{|x|-1}{2r} \rfloor}(x) & , \text{ si } \lfloor \frac{|x|-1}{2r} \rfloor > 0 \\ \lambda & , \text{ si no.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Así, $\phi^{*,r}$ consiste en iterar ϕ sobre una palabra $x \in A^+$ lo más posible hasta que tenga sentido, es decir, hasta terminar con una palabra de largo a lo más $2r$. Teniendo esto, el problema PRED_Φ se define como:

$$\begin{aligned} \text{PRED}_\Phi : A^+ &\longrightarrow \bigcup_{i=0}^{2r} A^i \\ x &\longmapsto \phi^{*,r}(x) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

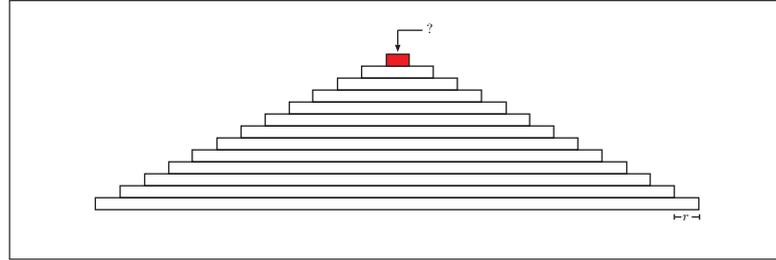


Figura 4.1.1: Problema de predicción.

Proposición 4.1.1. Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$, $\text{PRED}_\Phi \in \text{P}$. Además, existe $\Psi \in \mathcal{AC}$ tal que $\text{PRED}_\Psi \in \text{P-COMPLETE}$.

Nota. La cualidad de que el problema de Predicción de un AC pertenezca a P-COMPLETE, es una condición necesaria para la universalidad intrínseca, pues se traspaşa vía simulaciones.

Definición 4.1.2 (Predicción parametrizado). El problema de predicción parametrizado, dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, y de manera muy similar a PRED_Φ , busca establecer el valor de un grupo de celdas que se obtienen al iterar Φ sobre una palabra inicial. Más precisamente, dado $a \in \mathbb{N}$, y considerando la representación canónica (V_r, A, ϕ) de Φ , en una palabra $x \in A^+$ se itera ϕ sobre x , $\lfloor \frac{|x|-a}{2r} \rfloor$ veces. Con esto se obtiene una palabra de largo ℓ , con $a \leq \ell < a + 2r$. Así, se define $\phi^{*,r,a} : A^* \longrightarrow A^*$ por:

$$\phi^{*,r,a}(x) = \begin{cases} \phi^{\lfloor \frac{|x|-a}{2r} \rfloor}(x) & , \text{ si } \frac{|x|-a}{2r} > 0 \\ \lambda & , \text{ si no.} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Luego, dado $a \in \mathbb{N}$, el problema de predicción parametrizado PRED_Φ^a se define como:

$$\begin{aligned} \text{PRED}_\Phi^a : A^+ &\longrightarrow \bigcup_{i=0}^{a+2r-1} A^i \\ x &\longmapsto \phi^{*,r,a}(x) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

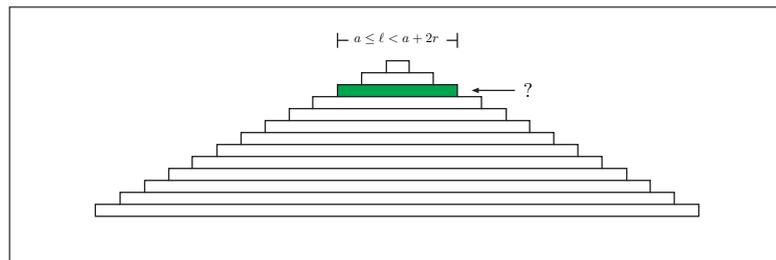


Figura 4.1.2: Problema de predicción parametrizado.

Observación. Notar que con el parámetro $a = 1$ se recupera la definición de Predicción, es decir, para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$, $\text{PRED}_\Phi^1 = \text{PRED}_\Phi$.

4.2. Largo de ciclo

Definición 4.2.1 (Largo de ciclo [14]). Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $k \in \mathbb{N}$, se define el problema CYCL_{Φ}^k como:

$$\text{CYCL}_{\Phi}^k : A^+ \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \text{CYCL}_{\Phi}^k(x) , \tag{4.2.1}$$

con:

$$\text{CYCL}_{\Phi}^k(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \chi_{\Phi}(x) \leq k \\ 0 & , \text{ si no.} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

en donde, dada la configuración espacialmente periódica $p_x = {}^{\infty}x^{\infty}$, $\chi_{\Phi}(x)$ se define como:

$$\chi_{\Phi}(x) := \text{mín}\{p \geq 0 : \exists t_0 \in \mathbb{N}, \forall t \geq t_0, \Phi^t(p_x) = \Phi^{t+p}(p_x)\}. \tag{4.2.3}$$

Es decir, en otras palabras, el problema de largo de ciclo se pregunta si el ciclo de una configuración eventualmente (temporalmente) periódica es menor o igual a k .

Proposición 4.2.1. Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, $\text{CYCL}_{\Phi}^k \in \text{PSPACE}$. Existen $\Psi \in \mathcal{AC}$ y $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tales que $\text{CYCL}_{\Psi}^{\bar{k}} \in \text{PSPACE-COMPLETE}$.

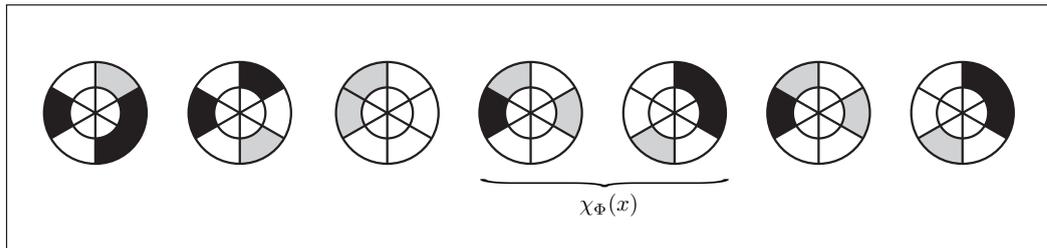


Figura 4.2.1: Problema de largo de ciclo.

4.3. Invasión espacial

Definición 4.3.1 (Invasión espacial [14]). El problema de invasión espacial busca determinar si en una configuración periódica y una perturbación local de ésta las diferencias se propagarán al infinito.

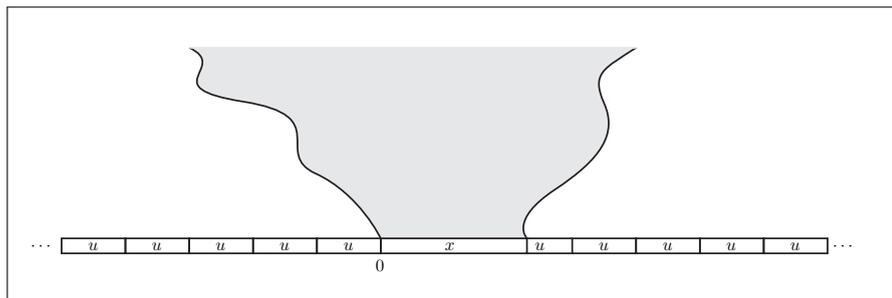


Figura 4.3.1: Problema de invasión espacial.

Para formalizar esto, considerar un AC Φ y una palabra finita $u = u_1 \cdots u_\ell \in A^\ell$. Sea $p_u = {}^\infty u {}^\infty$ la configuración u -periódica tal que cada ocurrencia de u termina en una posición de la forma $i|u|$, con $i \in \mathbb{Z}$. Luego:

1. se toma la órbita $\{\Phi^t(p_u)\}_{t \geq 0}$ como punto de referencia;
2. para $x = x_1 \cdots x_n \in A^n$, se define la configuración $p_u(x)$ obtenida a partir de la modificación de p_u como:

$$(p_u(x))_i = \begin{cases} (p_u)_i & \text{si } i \leq 0 \vee i \geq n+1 \\ x_i & \text{si } 1 \leq i \leq n; \end{cases} \quad (4.3.1)$$

3. para cada $t \in \mathbb{N}$, se denotan $\delta_l(t)$ y $\delta_r(t)$ las diferencias extremas entre las t -ésimas imágenes de p_u y $p_u(x)$, esto es:

$$\delta_l(t) = \min\{i \in \mathbb{Z} : \Phi^t(p_u)_i \neq \Phi^t(p_u(x))_i\} \quad (4.3.2)$$

$$\delta_r(t) = \max\{i \in \mathbb{Z} : \Phi^t(p_u)_i \neq \Phi^t(p_u(x))_i\}. \quad (4.3.3)$$

Luego, el problema de invasión espacial para la regla global Φ y la palabra finita $u \in A^+$ se define como:

$$\begin{aligned} \text{SINV}_\Phi^u : A^+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \text{SINV}_\Phi^u(x), \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

donde:

$$\text{SINV}_\Phi^u(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \overline{\lim}_{t \nearrow \infty} (\delta_r(t) - \delta_l(t)) = \infty \\ 0 & , \text{ si no.} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Proposición 4.3.1. *Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $u \in A_\Phi^+$, $\text{SINV}_\Phi^u \in \Pi_1^0$. Existen $\Psi \in \mathcal{AC}$ y $v \in A_\Psi^+$ tales que $\text{SINV}_\Psi^v \in \Pi_1^0$ -COMPLETE.*

4.4. Invasión temporal

Definición 4.4.1 (Invasión temporal [4]). El problema de invasión temporal se define de manera similar al de invasión espacial: dado un AC Φ , se considera un patrón $u \in A^+$, una configuración espacialmente periódica p_u y una perturbación de ésta, $p_u(x)$. Luego, se considera la órbita eventualmente temporalmente periódica $\{\Phi^t(p_u)\}_{t \geq 0}$ como referencia y se define TINV_Φ^u como:

$$\begin{aligned} \text{TINV}_\Phi^u : A^+ &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \text{TINV}_\Phi^u(x), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

donde:

$$\text{TINV}_\Phi^u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \forall t \geq 0, \Phi^t(p_u) \neq \Phi^t(p_u(x)) \\ 0, & \text{si } \exists t \geq 0, \Phi^t(p_u) = \Phi^t(p_u(x)). \end{cases} \quad (4.4.2)$$

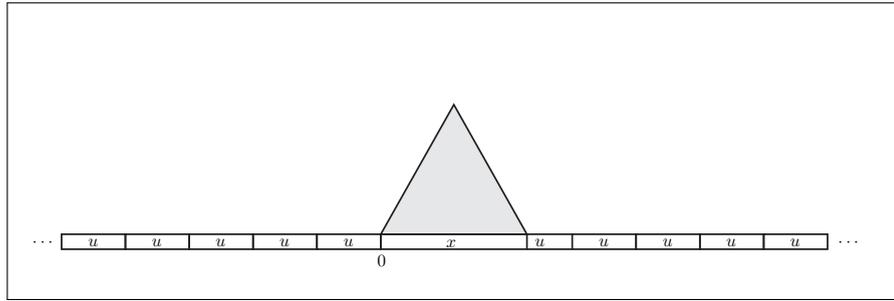


Figura 4.4.1: Problema de invasión temporal.

Proposición 4.4.1. Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $u \in A_{\Phi}^+$, $\text{TINV}_{\Phi}^u \in \Pi_1^0$. Existen $\Psi \in \mathcal{AC}$ y $v \in A_{\Psi}^+$ tales que $\text{TINV}_{\Psi}^v \in \Pi_1^0$ -COMPLETE.

Demostración. Notar que el problema de Invasión temporal toma el valor 1 si se satisface la siguiente proposición:

$$\forall t \geq 0, \exists i \in \mathbb{Z} : (\Phi^t(p_u))_i \neq (\Phi^t(p_u(x)))_i,$$

la cual es equivalente a:

$$\forall t \geq 0, \underbrace{\exists |i| \leq \Delta(t) : (\Phi^t(p_u))_i \neq (\Phi^t(p_u(x)))_i}_{\text{predicado recursivo}},$$

pues las perturbaciones en una configuración pueden desplazarse sólo hasta una distancia que depende linealmente del tiempo y del radio de la regla local del AC, lo que hace de Δ una función recursiva en t . Luego, para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $u \in A_{\Phi}^+$, $\text{TINV}_{\Phi}^u \in \Pi_1^0$.

De manera análoga a la demostración de la propiedad correspondiente a SINV realizada en [14], se construye $\Psi \in \mathcal{AC}$ capaz de simular una 2-counter-machine, que se sabe es Turing-universal. Para esto, considerar estados con dos componentes: una referente al control de la máquina (un conjunto finito de estados Q junto a dos estados adicionales \leftarrow y \rightarrow) y otra con los datos de los contadores. Además, a cada componente se adjunta un estado estacionario \emptyset y un estado invasivo s . Así, el conjunto de estados está dado por:

$$(Q \cup \{\leftarrow, \rightarrow\} \cup \{s, \emptyset\}) \times (\{A, B, M, 0\} \cup \{s, \emptyset\}).$$

Una configuración válida será aquella igual a \emptyset en todas partes salvo en porciones finitas con la configuración determinada en sus dos componentes por:

- una componente de datos de la forma: $0^* A^+ M B^+ 0^*$;
- otra componente de control de la forma: $\rightarrow^+ q \leftarrow^+$, donde $q \in Q$.

Control		∅		∅		→		→		→		q		←		←		∅		∅		∅		∅
Datos		∅		∅		A		A		A		M		B		0		∅		∅		∅		∅

Figura 4.4.2: Ejemplo de configuración válida.

Ahora, a diferencia de la construcción para el caso de SINV, en el conjunto de estados Q se considera que existen dos estados especiales: q_{\rightarrow} y q_{\emptyset} . Luego, se identifica el estado de aceptación de la máquina con q_{\rightarrow} , estado del AC diseñado para moverse a la derecha hasta encontrar el carácter \emptyset , de manera que en la componente de control se tiene la función local definida como:

$$\begin{aligned} f(q_{\rightarrow}, \leftarrow, \cdot) &= q_{\rightarrow} & f(\rightarrow, q_{\rightarrow}, \leftarrow) &= \rightarrow \\ f(\cdot, q_{\rightarrow}, \emptyset) &= q_{\emptyset} & f(\rightarrow, q_{\emptyset}, \cdot) &= \emptyset \\ f(\cdot, \rightarrow, q_{\emptyset}) &= q_{\emptyset} & f(\emptyset, q_{\emptyset}, \emptyset) &= \emptyset \end{aligned}$$

A grandes rasgos, lo que se busca es que una vez que la máquina acepte (en lugar de detenerse, como era en el caso de Invasión espacial), el estado q_{\rightarrow} se mueva a la derecha hasta encontrar el final para luego borrar las dos componentes con el estado q_{\emptyset} , que va dejando en \emptyset tanto la componente de control como la de datos. La última ecuación indica que en el momento que tanto a la izquierda como a la derecha hayan sólo estados \emptyset , el estado q_{\emptyset} se autoelimina para llegar así a la configuración estacionaria. El estado invasivo s se agrega para asegurarse que sólo hayan configuraciones válidas. lo cual es posible verificar localmente. Así, se tiene que, para $u = \emptyset$, el problema de la parada se reduce a TINV_{Ψ}^u , pues la máquina para si y sólo si no hay invasión temporal. \square

4.5. Invasión controlada

Dada la fuerte simetría entre Invasión espacial e Invasión temporal, una manera de agotar los posibles escenarios de la dinámica que sigue una perturbación de una configuración periódica es considerando el siguiente problema, que surge a partir de la idea de utilizar conectores lógicos entre problemas ya existentes.

Definición 4.5.1 (Invasión controlada). El problema de invasión controlada se define a partir de los problemas de Invasión espacial e Invasión temporal. Dado $\Phi \in \mathcal{AC}$, un patrón $u \in A^+$, una configuración espacialmente periódica p_u y una perturbación de ésta $p_u(x)$, se considera la órbita eventualmente temporalmente periódica $\{\Phi^t(p_u)\}_{t \geq 0}$ como referencia y se define:

$$\text{CINV}_{\Phi}^u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \text{TINV}_{\Phi}^u(x) = 1 \wedge \text{SINV}_{\Phi}^u(x) = 0 \\ 0, & \text{si } \text{TINV}_{\Phi}^u(x) = 0 \vee \text{SINV}_{\Phi}^u(x) = 1. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

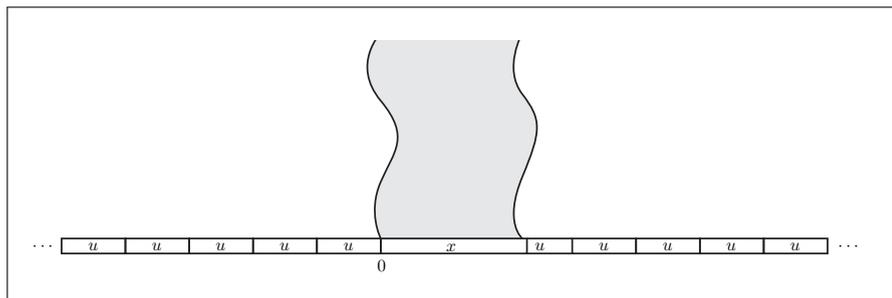


Figura 4.5.1: Problema de invasión controlada.

También, CINV_{Φ}^u se puede definir como:

$$\text{CINV}_{\Phi}^u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < \overline{\lim}_{t \nearrow \infty} (\delta_r(t) - \delta_l(t)) < \infty \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Proposición 4.5.1. *Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $u \in A_{\Phi}^+$, $\text{CINV}_{\Phi}^u \in \Pi_1^0$. Existen $\Psi \in \mathcal{AC}$ y $v \in A_{\Psi}^+$ tales que $\text{CINV}_{\Psi}^v \in \Pi_1^0$ -COMPLETE.*

Demostración. La demostración es análoga a la correspondiente a TINV . □

Capítulo 5

Problemas comunicacionales inducidos por ACs

*Then the Butcher contrived an ingenious plan
For making a separate sally;
And fixed on a spot unfrequented by man,
A dismal and desolate valley.*

Fit the Fifth - THE BEAVER'S LESSON

Los problemas definidos en el capítulo anterior no fueron escogidos de manera antojadiza. En este capítulo se vuelve a recurrir a ellos con el fin de encontrar nuevas herramientas para probar no universalidad desde una perspectiva distinta, no computacional. Para esto, se introducen nociones que permiten el estudio riguroso de problemas comunicacionales desde el área de la complejidad comunicacional. Luego, y continuando en el capítulo siguiente, se encuentran nuevas condiciones necesarias para la universalidad y se provee de una nueva clasificación y visión de los autómatas celulares unidimensionales.

5.1. Complejidad comunicacional

La comunicación es inherente a cualquier proceso computacional que conste de paralelismo y distribución en la información. Esta necesidad de traspasar información por lo general surge cuando dos o más componentes de un sistema requieren realizar alguna tarea en conjunto y ninguna de éstas tiene la capacidad o los recursos para realizarla por sí sola. Así, aparecen problemáticas naturales en computación distribuida y otras áreas que se adaptan bien al enfoque de comunicación. Por ejemplo, un caso paradigmático es el diseño de circuitos VLSI, en donde es importante minimizar el gasto de energía reduciendo la cantidad de conexiones entre distintas componentes, lo cual claramente está relacionado de manera directa con la cantidad de comunicación entre éstas. Ejemplos más cotidianos se observan en las conexiones entre computadores remotos que se da a lugar en internet y otros tipos de redes. Por otro lado, otros casos son menos explícitos y requieren de cierta abstracción para repensar sistemas que a primeras luces parecieran estar constituidos por una sola «componente». Ejemplos de esto son algunas

caracterizaciones de la profundidad en circuitos booleanos y ciertas cotas inferiores en tiempos de reconocimiento de lenguajes por máquinas de Turing, que intentan observar estos problemas desde una perspectiva en que la información necesaria para ser resueltos puede ser fragmentada.

Es en este contexto donde Andrew Yao se basó para introducir el concepto de «complejidad comunicacional»¹, que partió siendo un modelo sumamente simplificado de la interacción entre dos agentes, que en lo sucesivo son denominados Alice y Bob, pero con propiedades teóricas sumamente interesantes.

Así como la teoría de la información se preocupa sobre el *cómo* transmitir cierta información de manera óptima, la complejidad comunicacional se preocupa sobre el *qué* debe ser informado para optimizar la cantidad de información transmitida y resolver alguna tarea. El escenario propuesto por Yao —y el más usual en la literatura— es el siguiente: dos agentes Alice y Bob reciben strings de n bits x e y , respectivamente. Luego, dada una función a dos variables $f(\cdot, \cdot)$, el objetivo es conocer el valor de $f(x, y)$ intercambiando la mínima cantidad de información acerca del input xy , que Alice y Bob conozcan de manera parcial. Es claro que si uno de ellos traspasa toda la información al otro, éste puede computar $f(x, y)$ sin problemas, pues parte del modelo es suponer que los agentes tienen poder de cómputo ilimitado. Por esto, la complejidad comunicacional no se preocupa sobre cuántos recursos utilizan Alice y Bob por su cuenta para lograr su cometido, si no que se preocupa exclusivamente de la cantidad de bits intercambiados en la interacción, lo cual es justamente lo que hace que constituya un enfoque divergente y poderoso. Además, al intentar optimizar la información traspasada —que es medida en bits y formalizada mediante un «protocolo»— y no utilizar la alternativa grosera, se llegan a situaciones interesantes y que muchas veces desembocan en problemas con conexiones inadvertidas a resultados de otra índole pues, para estos propósitos, se hace necesario desarrollar herramientas que provean tanto cotas superiores como inferiores en la cantidad óptima, tal como ocurre en la complejidad computacional.

En esta sección se intenta hacer un compilado de acuerdo a la nomenclatura del libro *Communication Complexity* [25] (Kushilevitz y Nisan, 1997) de las definiciones relevantes para este estudio en cuanto a complejidad comunicacional. Primero, se define lo que es un protocolo, las propiedades estructurales de éstos y las medidas de complejidad básicas para problemas de comunicación en funciones. Luego, se muestra cómo se puede entender la complejidad comunicacional desde el punto de vista de tilings y rectángulos monocromáticos, con el fin de proveer herramientas para probar cotas inferiores. De acuerdo a esto, se discute la complejidad de funciones específicas frecuentemente estudiadas en la literatura. Finalmente, se presentan algunos modelos alternativos que resultan ser restricciones (protocolos unidireccionales) o relajaciones (protocolos de relaciones) del modelo original.

5.1.1. Modelo básico

Existen múltiples analogías entre la complejidad computacional y la complejidad comunicacional. Tal como en la primera existe la idea primordial de «proceso computacional» plasmado en el concepto de *algoritmo* —y que se puede formalizar de diversas maneras equivalentes—, la complejidad comunicacional se preocupa de procesos comunicacionales denominados *protocolos*, susceptibles de ser definidos rigurosa e inequívocamente.

¹Ver [41], 1979.

Definición 5.1.1 ([25]). Un **protocolo** \mathcal{P} con dominio $X \times Y$ y rango Z es un árbol binario enraizado en donde cada nodo interno v está etiquetado con una función $a_v : X \rightarrow \{0, 1\}$ o con una función $b_v : Y \rightarrow \{0, 1\}$, y cada hoja está etiquetada con un elemento $z \in Z$.

El **valor de un protocolo** \mathcal{P} en la entrada (x, y) es la etiqueta alcanzada partiendo desde la raíz y avanzando de tal manera que si el nodo interno v posee etiqueta a_v se avanza hacia la izquierda si $a_v(x) = 0$ y derecha si $a_v(x) = 1$. Si el nodo interno v posee etiqueta b_v se avanza hacia la izquierda si $b_v(y) = 0$ y derecha si $b_v(y) = 1$. El **costo de un protocolo** \mathcal{P} en la entrada (x, y) es el largo del camino tomado por la entrada (x, y) . El **costo de un protocolo** \mathcal{P} es la altura del árbol.

Así, intuitivamente, cada nodo interno etiquetado con una función a_v corresponde a un bit enviado por Alice —el bit $a_v(x)$ — y cada nodo interno etiquetado con una función b_v corresponde a un bit enviado por Bob —el bit $b_v(y)$ —. Es importante recalcar que la complejidad comunicacional no se preocupa de los cómputos internos que cada agente realiza, sino que sólo de la cantidad de información intercambiada.

Definición 5.1.2 ([25]). Para una función $f : X \times Y \rightarrow Z$, la **complejidad comunicacional determinística de f** es el mínimo costo de \mathcal{P} sobre todos los protocolos \mathcal{P} que computan f . Tal valor se denotará $cc(f)$.

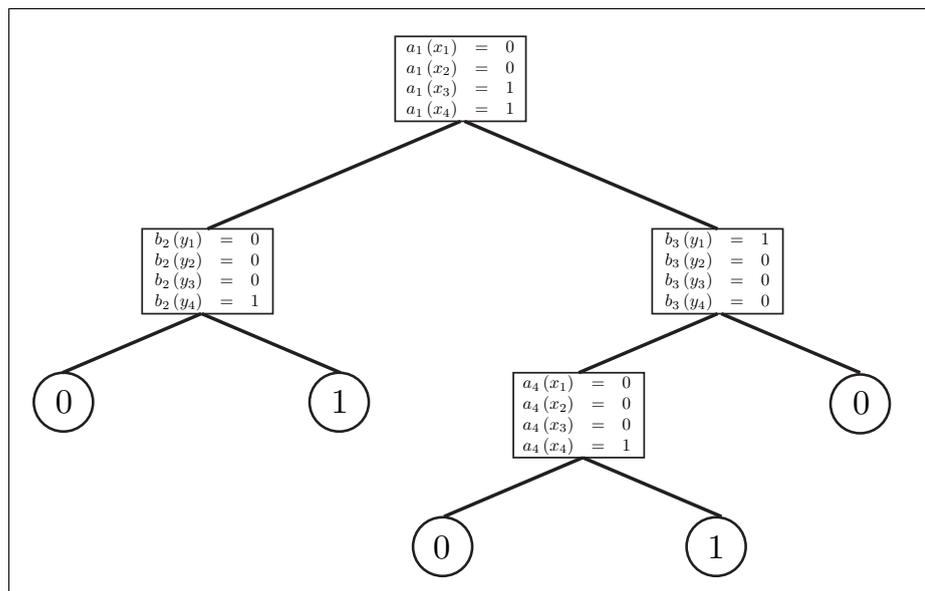


Figura 5.1.1: Ejemplo de árbol de protocolo.

Ejemplo 5.1.1 ([25]). Dada una función $f : X \times Y \rightarrow Z$, siempre se puede representar a ésta disponiendo sus evaluaciones en una matriz denotada M_f como en el Cuadro 5.1.1, donde M_f es la matriz de dimensiones $|X| \times |Y|$ tal que sus filas están indexadas por los elementos de X ; sus columnas, por los elementos de Y ; y la entrada (x, y) es simplemente $f(x, y)$. Supóngase que $f : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \times \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \rightarrow \{0, 1\}$ posee tal representación matricial.

Luego, un protocolo (no necesariamente óptimo) para evaluar a f , se puede representar como algo semejante a la Figura 5.1.1.

La representación matricial de una función es un enfoque sumamente importante en el ámbito de la complejidad comunicacional, pues, como se verá a continuación, permite asociar la complejidad de cierta función con tilings o cubrimientos de la matriz asociada, lo cual brinda un carácter geométrico al concepto. La estructura fundamental desde este punto de vista son los rectángulos combinatoriales, o simplemente rectángulos si no hay peligro de confusión.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0	1
x_2	0	0	0	1
x_3	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1

Cuadro 5.1.1: Ejemplo de representación matricial M_f para una función f .

Definición 5.1.3 ([25]). Un **rectángulo en** $X \times Y$ es un subconjunto $R \subseteq X \times Y$ tal que $R = A \times B$ para algún $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.

Así, un rectángulo se puede entender como la matriz M_f restringida a un subconjunto de coordenadas. Bajo permutación de filas y columnas esto claramente constituye lo que usualmente se concibe como un rectángulo. Estos objetos se pueden caracterizar de otras maneras, como se desprende de la Proposición 5.1.1.

Proposición 5.1.1. $R \subseteq X \times Y$ es un rectángulo si y sólo si:

$$(x_1, y_1) \in R \wedge (x_2, y_2) \in R \implies (x_1, y_2) \in R. \quad (5.1.1)$$

Los rectángulos que más interesan son los rectángulos que poseen la cualidad de ser univaleados en sus entradas. A propósito de esto, la siguiente definición.

Definición 5.1.4 ([25]). Dada $f : X \times Y \longrightarrow Z$, un subconjunto $R \subseteq X \times Y$ se dirá **f -monocromático** si f es constante en éste. Se denota \mathcal{R}_f al conjunto de todos los rectángulos monocromáticos de f .

La particularidad de estos rectángulos es que, como se verá a continuación, aparecen de manera natural al trabajar con protocolos.

Definición 5.1.5 ([25]). Sea \mathcal{P} un protocolo y v un nodo del árbol asociado. Se define R_v como el conjunto de pares (x, y) que alcanzan el nodo v .

Lema 5.1.2 ([25]). Para todo protocolo \mathcal{P} y hoja ℓ en él, R_ℓ es un rectángulo f -monocromático, es decir, $R_\ell \in \mathcal{R}_f$.

Proposición 5.1.3 ([25]). Sea $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Si L es el conjunto de hojas del árbol asociado a un protocolo \mathcal{P} para f , entonces $\{R_\ell\}_{\ell \in L}$ es una partición de $X \times Y$ en rectángulos f -monocromáticos (esto es, el número de rectángulos es el número de hojas del árbol asociado a \mathcal{P}).

Corolario (Método de tiling [25]). Si toda partición de $X \times Y$ en rectángulos f -monocromáticos requiere al menos t rectángulos, entonces $\text{cc}(f) \geq \log_2 t$.

Demostración. Por la Proposición 5.1.3, las hojas de cualquier protocolo para f inducen una partición de $X \times Y$ en rectángulos monocromáticos. Luego, si se requieren al menos t rectángulos para particionar $X \times Y$, entonces todo protocolo tendrá al menos t hojas y luego la altura de su árbol (que es binario) será al menos $\log_2 t$. \square

Teniendo en mente el corolario anterior, se logrará concebir una herramienta muy práctica a la hora de establecer cotas inferiores.

Definición 5.1.6 (Fooling set [25]). Dada una función $f : X \times Y \rightarrow Z$, un conjunto $\mathcal{F} \subseteq X \times Y$ es un **fooling set** para f si existe $z \in Z$ tal que:

1. $\forall (x, y) \in \mathcal{F} : f(x, y) = z$;
2. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{F} : (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \implies f(x_1, y_2) \neq z \vee f(x_2, y_1) \neq z$.

Lema 5.1.4 (Método de fooling set [25]). Si \mathcal{F} es un fooling set de tamaño m para f , entonces $\text{cc}(f) \geq \log_2(m)$.

Demostración. Basta con demostrar que ningún rectángulo monocromático contiene más de un elemento de \mathcal{F} . Supóngase que un rectángulo R contiene dos pares distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que además pertenecen a \mathcal{F} . Por la caracterización dada por la Proposición 5.1.1, entonces (x_1, y_2) y (x_2, y_1) también pertenecen a R . Pero, como \mathcal{F} es un fooling set, se sabe que existe $z \in Z$ tal que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = z$, pero al menos uno de los pares (x_1, y_2) y (x_2, y_1) es distinto de z . Luego, R no es monocromático. Entonces, al menos t rectángulos monocromáticos son necesarios para cubrir \mathcal{F} y el resultado se tiene gracias al Corolario 5.1.1. \square

El último método para probar cotas inferiores, y estrechamente relacionado con el modelo unidireccional que se verá más adelante, es el que utiliza el rango de la matriz M_f .

Definición 5.1.7 ([25]). Dada una función $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$, se define $\text{rank}(f)$ como el rango de la matriz M_f sobre el cuerpo de los reales.

Lema 5.1.5 (Método de rango [25]). Para toda función $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$,

$$\text{cc}(f) \geq \log_2 \text{rank}(f). \quad (5.1.2)$$

Entre los tres métodos vistos, a saber, el de tiling, el de fooling set y el de rango, como se demuestra en el libro *Communication Complexity and Parallel Computing* [16] (Hromkovič, 1997), el que provee de mejores cotas es el de tiling (teniendo algunas veces un gap exponencial con respecto a los otros dos). Sin embargo, éste muchas veces resulta difícil de utilizar por lo que conviene considerar las otras técnicas.

5.1.2. Otros modelos

A continuación se presentan dos variaciones del modelo anterior que es bueno considerar.

Protocolos unidireccionales

Los protocolos unidireccionales consisten en la restricción de permitir que sólo una de las partes pueda transmitir información a la otra y ésta última se encargue de entregar una respuesta. Así, dada una función f , se define la **complejidad comunicacional unidireccional** $cc^{1,Alice}(f)$ como el costo del mejor protocolo de estas características, en donde sólo Alice envía mensajes y Bob finalmente responde. Por otro lado, se denota $cc^{1,Bob}(f)$ al costo del mejor protocolo unidireccional en donde es Bob quien comienza la comunicación. Esta cualidad constituye en ciertos momentos una ventaja a la hora de estimar la complejidad, pues ésta es generalmente más fácil de calcular y posee una caracterización simple dada por el siguiente lema.

Lema 5.1.6 ([25]). *Dada una función f , $cc^{1,Alice}(f)$ (resp. $cc^{1,Bob}(f)$) es igual a $\log_2 t + 1$, donde t es igual al número de filas (resp. columnas) distintas de la matriz M_f .*

Nota. Existen casos en donde los protocolos unidireccionales tienen un costo exponencialmente mayor a los protocolos bidireccionales.

Relaciones

El modelo de relaciones resulta ser una relajación del modelo principal, en donde un input (x, y) puede tener más de una respuesta o incluso ninguna². A pesar de su mayor generalidad, éste logra preservar algunas propiedades y técnicas para probar cotas inferiores.

Definición 5.1.8 ([25]). Un protocolo \mathcal{P} **computa una relación** R si para toda entrada legal $(x, y) \in X \times Y$, el protocolo alcanza una hoja marcada con un valor z tal que $(x, y, z) \in R$. La **complejidad comunicacional determinística** de una relación R , denotado $cc(R)$, es el número de bits enviados en la entrada peor caso, legal o ilegal, por el mejor protocolo que computa R . Otras medidas de complejidad son definidas de similar manera.

En este caso, la noción de rectángulo monocromático cambia, pues, dada una relación R , las entradas de la matriz M_R —que se define de manera análoga al caso de funciones— ya no son univaluadas.

Definición 5.1.9 ([25]). $A \times B$ es un **rectángulo monocromático** con respecto a una relación R , si existe un valor z tal que para todo $(x, y) \in A \times B$, $(x, y, z) \in R$ ó (x, y) es ilegal.

Por último, un resultado que proporciona técnicas para probar cotas inferiores en la complejidad.

Proposición 5.1.7 ([25]). *Todo protocolo \mathcal{P} de t bits que computa la relación R induce una partición de $X \times Y$ en a lo más 2^t rectángulos monocromáticos.*

5.1.3. Problemas de alta complejidad

Usualmente lo que importará es el comportamiento asintótico de la complejidad de ciertas funciones o relaciones. Para esto, se hace natural variar y hacer crecer el dominio de éstas y considerar sucesiones.

²Cuando esto suceda se dice que la entrada es **ilegal**.

Definición 5.1.10. Dado un alfabeto A y un conjunto Z con $|Z| < +\infty$, se define un **problema comunicacional** como una sucesión de funciones:

$$\text{Prob} = \{f_n^i : A^i \times A^{n-i} \longrightarrow Z, i \in I_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (5.1.3)$$

o, más generalmente, una sucesión de relaciones:

$$\text{Prob} = \{R_n^i \subseteq A^i \times A^{n-i} \times Z, i \in I_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (5.1.4)$$

donde $I_n \subseteq \{1, \dots, n\}$. Consecuentemente, se define el **dominio de Prob** como:

$$\text{Dom}(\text{Prob}) := \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{i \in I_n} A^i \times A^{n-i}, \quad (5.1.5)$$

y la **complejidad comunicacional de Prob** como la función:

$$\begin{aligned} \text{CC}(\text{Prob}) : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \max_{i \in I_n} \text{cc}(f_n^i), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

o:

$$\begin{aligned} \text{CC}(\text{Prob}) : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \max_{i \in I_n} \text{cc}(R_n^i), \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

según corresponda.

A continuación se definen tres de los problemas comunicacionales más estudiados, y que resultan ser de complejidad lineal.

Definición 5.1.11 (Equality). Se define el problema **Equality** como la sucesión de funciones:

$$\begin{aligned} \text{EQ}_n : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, y) &\longmapsto \text{EQ}_n(x, y), \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

donde:

$$\text{EQ}_n(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \quad (5.1.9)$$

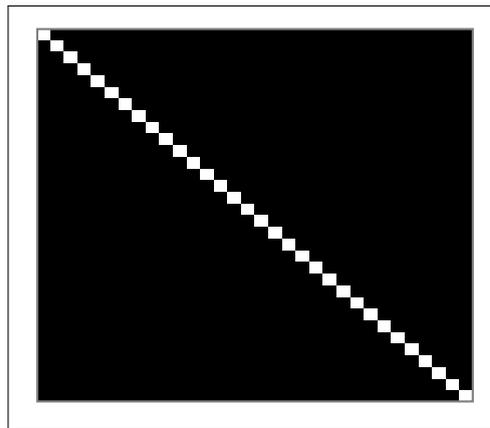


Figura 5.1.2: Matriz M_{EQ} para $n = 5$.

Definición 5.1.12 (Disjointness). Se define el problema **Disjointness** como la sucesión de funciones:

$$\text{DISJ}_n : \begin{array}{l} \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, y) \longmapsto \text{DISJ}_n(x, y) \end{array}, \quad (5.1.10)$$

donde:

$$\text{DISJ}_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \forall i, x_i = 0 \vee y_i = 0 \\ 0, & \exists i, x_i = y_i = 1 \end{cases} \quad (5.1.11)$$

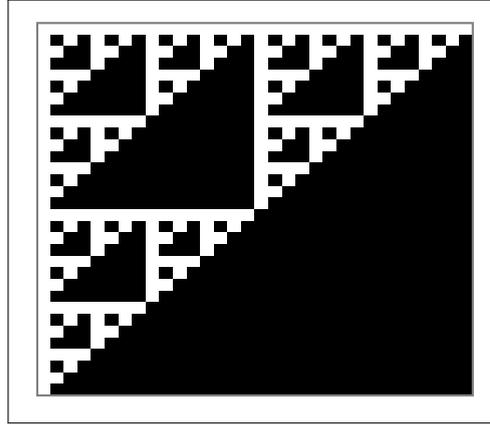


Figura 5.1.3: Matriz M_{DISJ} para $n = 5$.

Definición 5.1.13 (Inner Product). Se define el problema **Inner product** como la sucesión de funciones:

$$\text{IP}_n : \begin{array}{l} \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, y) \longmapsto \text{IP}_n(x, y) \end{array}, \quad (5.1.12)$$

donde:

$$\text{IP}_n(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \pmod{2}. \quad (5.1.13)$$

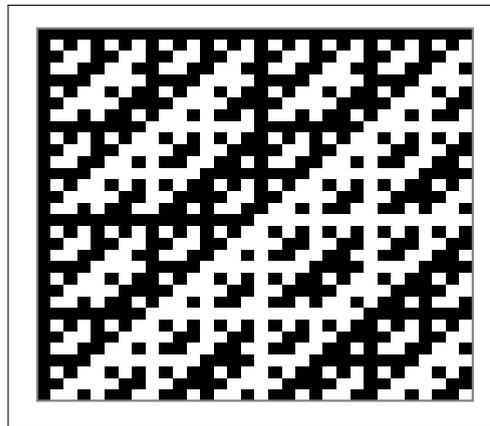


Figura 5.1.4: Matriz M_{IP} para $n = 5$.

Para probar la linealidad de la complejidad de las funciones anteriores, se puede comprobar que los siguientes fooling sets son suficientes para el caso de EQ y DISJ, respectivamente.

$$\mathcal{F}_{\text{EQ}} = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n : x_i = y_i, \forall i\} \quad (5.1.14)$$

$$\mathcal{F}_{\text{DISJ}} = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n : x_i \neq y_i, \forall i\}. \quad (5.1.15)$$

Para el caso del producto interno, se puede demostrar que $\text{rank}(M_{IP_n}^2) \in \Theta(n)$, lo cual es suficiente.

5.1.4. Inducción de problemas comunicacionales

La principal idea o pregunta subyacente en todo lo que viene a continuación es la siguiente: suponiendo que Alice y Bob conocen de manera parcial la configuración inicial de un AC, ¿cuánta información deben intercambiar para poder predecir cierto aspecto en la dinámica de éste? Se verá que se pueden construir problemas interesantes que cumplen la propiedad de preservar —en un sentido por definir— la complejidad comunicacional vía simulaciones y, al observar que un AC universal es capaz de simular cualquier otro, se tiene que una condición necesaria para ser intrínsecamente universal es la de tener complejidad de orden máximo. Para entender esto, lo mejor es atender los siguientes ejemplos, en especial el problema Predicción, que resulta ser el más natural.

Como fue anticipado, los problemas estudiados en el Capítulo 4 no fueron escogidos arbitrariamente y se verá a continuación que poseen muchas propiedades deseables. Estos problemas cumplen con cierta invarianza vía simulaciones en la complejidad comunicacional. Además, como nexos con la complejidad clásica, todos resultan ser completos³ para alguna clase conocida.

De modo general, se considera un problema (no necesariamente computable) de la forma input-output $P : A^+ \rightarrow Z$, en donde el input son palabras en algún alfabeto A y el output es algún elemento del conjunto finito Z . Normalmente se tendrá que $Z = \{0, 1\}$. Además, se considera la restricción de P a las palabras de largo n , $P|_n : A^n \rightarrow Z$.

Para transformar un problema tal en un problema de naturaleza comunicacional, para $1 \leq i < n$ se define el **split** de éste:

$$P|_n^i : A^i \times A^{n-i} \rightarrow Z, \quad (5.1.16)$$

tal que, para $x \in A^i$ e $y \in A^{n-i}$, se tiene que $P|_n^i(x, y) = P|_n(xy)$, donde $xy \in A^n$ es la concatenación de x e y . Luego, se define el problema comunicacional inducido por P como:

$$\text{Prob} = \{P|_n^i : A^i \times A^{n-i} \rightarrow Z, i = 1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (5.1.17)$$

Ejemplo 5.1.2. Considerar el AC JustGliders (o más brevemente, JG) con conjunto de estados $A = \{\rightarrow, \leftarrow, \square\}$ definido en el Capítulo 3 y el problema $\text{SINV}_{\text{JG}}^u$, para $u \in A^+$ arbitrario. Luego, se tiene que:

1. $\forall u \in A^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\text{JG}}^u) \in O(\log n)$;
2. $\exists \bar{u} \in A^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\text{JG}}^{\bar{u}}) \in \Omega(\log n)$.

³Esto es, existe un AC tal que el problema inducido por éste es completo.

En efecto, para probar (1), considerar en primera instancia el lenguaje libre de contexto:

$$L = \{u \in A^+ : \#_{\rightarrow}(u) = \#_{\leftarrow}(u)\}.$$

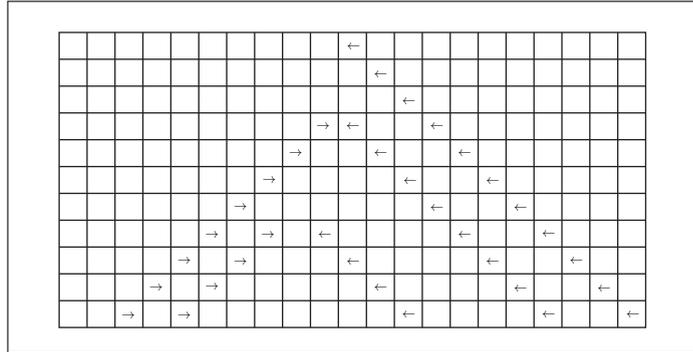


Figura 5.1.5: AC JustGliders.

Es preciso notar que, para t suficientemente grande (más precisamente, para $t > |u|$), toda configuración periódica p_u satisface:

- $\#_{\rightarrow}(u) = \#_{\leftarrow}(u) \implies JG^t(p_u) = \infty \square \infty$;
- $\#_{\rightarrow}(u) > \#_{\leftarrow}(u) \implies JG^t(p_u) = p_v$, con $v \in \{\rightarrow, \square\}^+$ y $\#_{\rightarrow}(v) = \#_{\rightarrow}(u) - \#_{\leftarrow}(u)$;
- $\#_{\rightarrow}(u) < \#_{\leftarrow}(u) \implies JG^t(p_u) = p_v$, con $v \in \{\leftarrow, \square\}^+$ y $\#_{\leftarrow}(v) = \#_{\leftarrow}(u) - \#_{\rightarrow}(u)$.

Luego, el protocolo es el siguiente:

1. $u \notin L$. $SINV_{JG}^u(x, y) = 0$, pues hay infinitos gliders en un sólo sentido y cualquier perturbación queda restringida a un ancho proporcional al tamaño de la entrada.
2. $u \in L$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la situación es como la de la Figura 5.1.6.

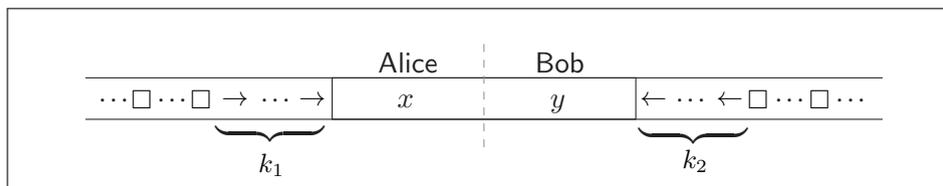


Figura 5.1.6: JustGliders, caso $u \in L$.

Así, Alice y Bob deben ser capaces de determinar si sus inputs x e y son capaces de ganar en número a los gliders que vienen tanto desde la derecha como desde la izquierda. Para esto, basta con que comuniquen si los gliders que poseen logran atravesar la «barrera» de k_i gliders que provienen del patrón periódico (costo constante de información). Si la respuesta es negativa, deben comunicarse las cantidades respectivas que poseen cada uno de manera de decidir si el otro es capaz de atravesar lo que queda de la barrera y lo que le envía el contrario (costo logarítmico de información). Luego, $CC(SINV_{JG}^u) \in O(\log n)$.

Para probar (2), considerar $\bar{u} = \square$ y el fooling set:

$$\mathcal{F}_n = \{(\rightarrow^{n-i} \square^i, \square^i \leftarrow^{n-i} \rightarrow) : 0 \leq i < n\}.$$

Todo $(x, y) \in \mathcal{F}_n$ cumple que $\text{SINV}_{\text{JG}}^u(x, y) = 0$, pero, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{F}_n$ son tales que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ y, sin pérdida de generalidad, $\#_{\rightarrow}(x_1) < \#_{\rightarrow}(x_2)$, entonces:

$$\text{SINV}_{\text{JG}}^u(x_1, y_2) = 1.$$

Notando que $|\mathcal{F}_n| = n$, se tiene que $\text{CC}(\text{SINV}_{\text{JG}}^{\bar{u}}) \in \Omega(\log n)$, lo que concluye la demostración.

En este mismo sentido, se puede probar que para los cinco problemas discutidos en el Capítulo 4 existen ACs que inducen un problema de complejidad lineal, como se enuncia en la proposición siguiente.

Proposición 5.1.8. *Existen ACs $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,5}$ tales que:*

1. $\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_1}) \in \Theta(n)$;
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_2}^k) \in \Theta(n)$;
3. $\exists u \in A_3^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_3}^u) \in \Theta(n)$;
4. $\exists u \in A_4^+, \text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_4}^u) \in \Theta(n)$;
5. $\exists u \in A_5^+, \text{CC}(\text{CINV}_{\Phi_5}^u) \in \Theta(n)$;

Algunas de estas construcciones se pueden encontrar en [14]. Otras serán corolario directo de resultados que se verán más adelante (considerar en especial la Sección 6.1 y la Proposición 6.2.6).

Por último, en lo sucesivo, para comparar las complejidades en función del tamaño de la entrada, se considerará la siguiente relación entre funciones.

Definición 5.1.14. Dadas dos funciones $f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, se dirá que $f_1 \prec f_2$ si:

$$\exists a, b, d, x_0 \in \mathbb{R}_+, \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \geq x_0, f_1(ax) \leq df_2(b(x+c)). \quad (5.1.18)$$

Lema 5.1.9. \prec es transitiva.

Demostración. Sean f_1, f_2, f_3 funciones de los reales positivos en los reales positivos tales que:

$$\begin{aligned} f_1 &\prec f_2 \\ f_2 &\prec f_3. \end{aligned}$$

Por definición, existen $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, x_0 \in \mathbb{R}_+$ tales que, para todo $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} f_1(a_1x) &\leq d_1 f_2(b_1(x+c_1)) \\ f_2(a_2x) &\leq d_2 f_3(b_2(x+c_2)). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f_1(a_1x) &\leq d_1f_2(b_1(x+c_1)) \\
&= d_1f_2\left(a_2\left(\frac{b_1}{a_2}(x+c_1)\right)\right) \\
&\leq d_1d_2f_3\left(b_2\left(\frac{b_1}{a_2}(x+c_1)+c_2\right)\right) \\
&= d_1d_2f_3\left(\frac{b_1b_2}{a_2}\left(x+\left(\frac{b_1b_2c_1}{a_2}+c_2\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Así, esta relación resulta ser refleja y transitiva, por lo cual consiste en un preorden. Además, se define la relación de equivalencia canónica \asymp de modo que:

$$f_1 \asymp f_2 \iff f_1 \prec f_2 \wedge f_2 \prec f_1. \quad (5.1.19)$$

En lo que resta de este trabajo, por lo general se trabajará con funciones de dominio en los naturales. Sin embargo, la relación anterior no es transitiva restringida a tales funciones. En [14] se utiliza una relación similar sobre las funciones con dominio en los naturales definida como:

$$f_1 \prec' f_2 \iff \exists a, b, c \in \mathbb{N}, \forall n : f_1(an) \leq cf_2(bn), \quad (5.1.20)$$

que resulta ser útil, pero no acepta traslaciones como \prec sin perder la transitividad. Por lo demás, los resultados no pierden fuerza al agregar tal grado de libertad. Por otro lado, para trabajar con \prec y funciones de dominio en los naturales, se considerará implícita la extensión de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$\begin{aligned}
\tilde{f} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
x &\longmapsto f(\lfloor x \rfloor)
\end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Así, siempre que dos funciones $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ se comparen como $f_1 \prec f_2$, se entenderá que $\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_2$.

Nota. En este trabajo, todas las funciones que se compararán con \prec pertenecerán a $O(n)$, pues provendrán de un problema de complejidad comunicacional. Por otro lado, es importante notar que: $\Theta(n) \subsetneq \{f : f \asymp n\} =: [n]_{\asymp}$. En efecto, para ver que la inclusión es estricta, basta con pensar en la función:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (5.1.22)$$

Tal función satisface que $2n \leq f(2n) \leq 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, $f \in [n]_{\asymp}$. Sin embargo, no existen $C \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq Cn$, para todo $n \geq n_0$. Luego, $f \in [n]_{\asymp} \setminus \Theta(n)$.

5.2. Problemas compatibles con \preceq_i

A continuación, se muestra que la mayoría de los problemas que se mencionaron en el Capítulo 4 son «compatibles» comunicacionalmente con las transformaciones de bulking y, en definitiva, con el preorden \preceq_i . En términos generales pero no exhaustivos, por compatibilidad se entenderá la situación en la cual la complejidad comunicacional de un problema inducido por algún AC es equivalente o creciente en los sentidos brindados por \asymp y \prec a la de algún otro AC, que usualmente será una transformación sintáctica del primero. Así, la compatibilidad denotará la robustez que presenta la complejidad comunicacional de ciertos problemas inducidos por ACs frente a transformaciones o relaciones de simulación, proveyendo las primeras condiciones necesarias para la \preceq_i -universalidad.

5.2.1. Predicción

En primera instancia, es importante remarcar que el resultado al problema Predicción depende fuertemente del radio que se considere para la regla local. El considerar la representación canónica —esto es, el menor radio posible— es en parte arbitrario pero, sin embargo, veremos que el problema se comporta robustamente frente a cualquier **radio válido** (es decir, un radio suficiente para definir una regla local que induzca el AC en cuestión). Para esto, se define el problema auxiliar de Predicción con radio parametrizado como:

$$\text{PRED}_{\Phi,r} = \phi^{*,r}, \quad (5.2.1)$$

donde $\phi^{*,r}$ es como en la Definición 4.1.1, pero con un radio válido cualquiera, y no necesariamente el menor. A propósito de esto, el siguiente lema.

Lema 5.2.1. *Para todo $\Phi \in \mathcal{AC}$ y radios válidos $r_1 < r_2$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_1}) \asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_2}). \quad (5.2.2)$$

Demostración. Se demuestran ambas direcciones de la relación por separado:

- $\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_1}) \prec \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_2})$. Es fácil ver de la Figura 5.2.1 que restringiéndose a palabras de largo $2r_1n$ y $2r_2n$, respectivamente, donde $n \in \mathbb{N}$, el resultado de PRED_{Φ,r_1} es la subpalabra central del resultado de PRED_{Φ,r_2} .

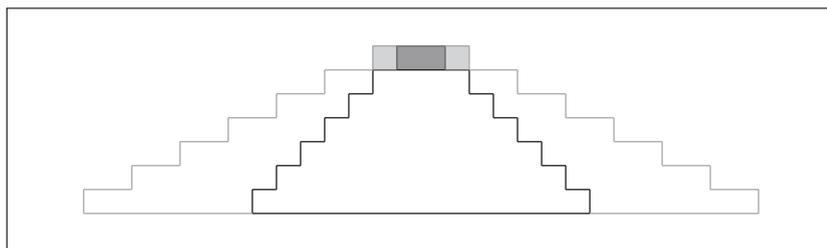


Figura 5.2.1: Paso 1.

Luego, se tiene que:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_1})(2r_1n) \leq \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi,r_2})(2r_2n).$$

- $CC(\text{PRED}_{\Phi, r_2}) \prec CC(\text{PRED}_{\Phi, r_1})$. Para demostrar la otra dirección, si se desea resolver PRED_{Φ, r_2} en palabras de largo $2r_2n$, se hace necesario aplicar a lo más $(1 + r_2 - r_1)$ veces el protocolo de PRED_{Φ, r_1} en palabras de largo $2r_1n$, de manera de juntar los resultados y recomponer la palabra que es output de PRED_{Φ, r_2} .

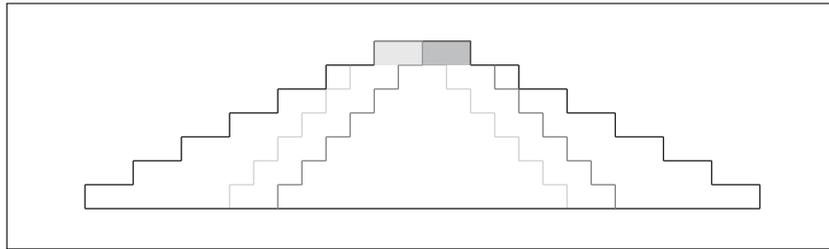


Figura 5.2.2: Paso 2.

Luego, se tiene que:

$$CC(\text{PRED}_{\Phi, r_2})(2r_2n) \leq (1 + r_2 - r_1)CC(\text{PRED}_{\Phi, r_1})(2r_1n),$$

lo que finaliza la demostración. □

Gracias al lema anterior, en lo sucesivo se podrá considerar el radio válido que más se estime conveniente y trabajar sin problemas con la definición original del problema Predicción. Otra propiedad que será de ayuda y es interesante en sí misma, es la siguiente.

Proposición 5.2.2. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Luego, para todo $a \in \mathbb{N}$, $CC(\text{PRED}_{\Phi}^a) \asymp CC(\text{PRED}_{\Phi})$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{N}$. Luego,

- $CC(\text{PRED}_{\Phi}) \prec CC(\text{PRED}_{\Phi}^a)$. Dado un protocolo para PRED_{Φ}^a , basta con obtener el resultado e iterarlo hasta obtener el resultado de PRED_{Φ} , pues constituye una palabra antecedente que lo determina totalmente. Luego,

$$CC(\text{PRED}_{\Phi})(n) \leq CC(\text{PRED}_{\Phi}^a)(n).$$

- $CC(\text{PRED}_{\Phi}^a) \prec CC(\text{PRED}_{\Phi})$. Para este caso, basta con considerar entradas de tamaño $2rn$, $n \in \mathbb{N}$. Luego, notando que, para $x \in A^{2rn}$, $\text{PRED}_{\Phi}(x) \in A^{2r}$ y $\text{PRED}_{\Phi}^a(x) \in A^{2ra}$, se tiene que:

$$CC(\text{PRED}_{\Phi}^a)(n) \leq aCC(\text{PRED}_{\Phi})(n - 2r(a - 1)),$$

considerando una estrategia similar a la segunda parte de la demostración del Lema 5.2.1. □

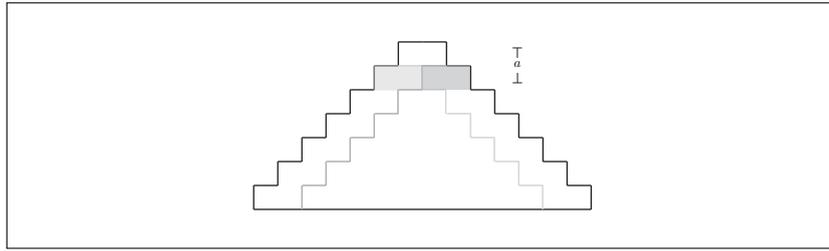


Figura 5.2.3: Acople de protocolos.

Teniendo todos estos ingredientes, se puede proceder a enunciar el primer resultado fundamental concerniente a este estudio.

Teorema 5.2.3. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$. Entonces:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_1}) \prec \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_2}). \quad (5.2.3)$$

Demostración. Dada la transitividad de \prec , se consideran por separado cada uno de las transformaciones de la relación \preceq_i .

- **Sub-autómata.** Si $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$, entonces cualquier protocolo válido para $\text{PRED}_{\Phi_2}|_n^i$ es también un protocolo válido para $\text{PRED}_{\Phi_1}|_n^i$, salvo quizá renombración de estados;
- **Potencia.** Dado un AC Φ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi}) \asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi^{(m,1,0)}})$. Para ver esto, basta considerar, gracias al Lema 5.2.1, que $r_1 = mr_m$, donde r_1 denota el radio de Φ y r_m el radio de $\Phi^{(m,1,0)}$. Luego, se verifica:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi})(2r_1n) = \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi^{(m,1,0)}})(2r_mn),$$

que se tiene, pues basta con utilizar γ_m o γ_m^{-1} según corresponda para obtener la respuesta a partir del protocolo contrario.

- **Iteración.** Se puede ver que para todo $t \in \mathbb{N}$, $\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi}) \asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi^t})$. Utilizando el Lema 5.2.1, supóngase que el radio de Φ , dígase r_1 , cumple la relación $r_t = tr_1$ con el radio r_t de Φ^{t4} . Luego, iterando el resultado si es necesario (ver Figura 5.2.4), se tiene que:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi, r_1})(2r_1tn) \leq \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi^t, r_t})(2r_tn);$$

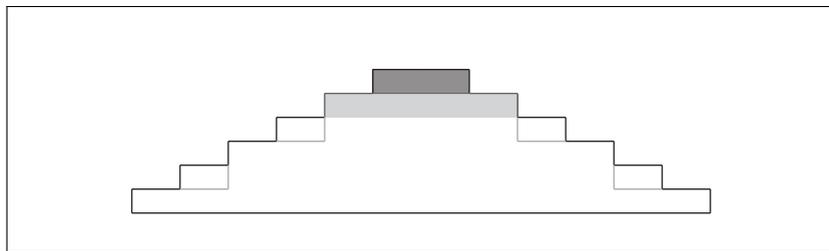


Figura 5.2.4: Iteración.

⁴Notar que r_t cumple con ser radio válido.

Por otro lado, se puede verificar que:

$$CC(\text{PRED}_{\Phi^t, r_t})(2r_t n) \leq t CC(\text{PRED}_{\Phi, r_1})(2r_1 t(n-1)).$$

- Shift.** Se cumple que, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $CC(\text{PRED}_{\Phi}) \asymp CC(\text{PRED}_{\sigma^z \circ \Phi})$. Notar que basta demostrar que $CC(\text{PRED}_{\Phi}) \asymp CC(\text{PRED}_{\sigma \circ \Phi})$ y luego, gracias a la transitividad de \asymp , componer el resultado y utilizar simetría para los casos con $z < 0$. Utilizando el Lema 5.2.1, suponer que $r_{\sigma \circ \Phi} = 2r_{\Phi} = r$.

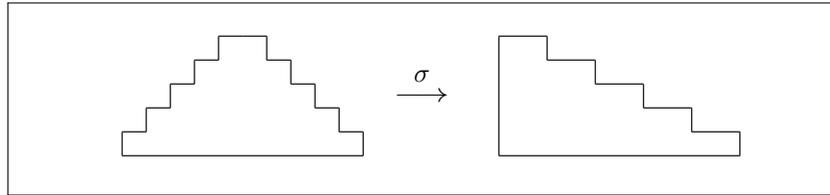


Figura 5.2.5: Efecto del shift en el problema PRED.

Como la medida de complejidad toma máximo sobre todas las particiones, se tiene que:

$$CC(\text{PRED}_{\Phi})(2rn) \leq CC(\text{PRED}_{\sigma \circ \Phi})(4rn).$$

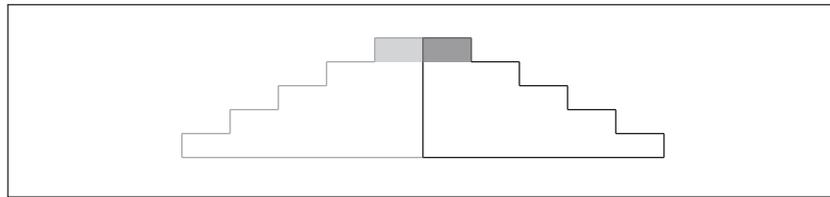


Figura 5.2.6: $CC(\text{PRED}_{\Phi}) \prec CC(\text{PRED}_{\sigma \circ \Phi})$.

Por otro lado, utilizando dos veces el protocolo para Φ , se puede ver que:

$$CC(\text{PRED}_{\sigma \circ \Phi})(4rn) \leq 2CC(\text{PRED}_{\Phi})(2rn).$$

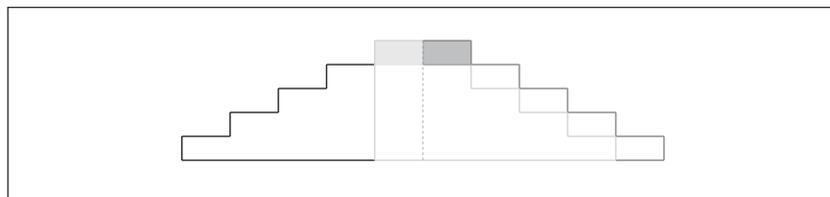


Figura 5.2.7: $CC(\text{PRED}_{\sigma \circ \Phi}) \prec CC(\text{PRED}_{\Phi})$.

Finalmente, componiendo todos los resultados, se obtiene que:

$$\begin{aligned} CC(\text{PRED}_{\Phi}) &\asymp CC\left(\text{PRED}_{\Phi_1^{(m_1, t_1, z_1)}}\right) \\ &\prec CC\left(\text{PRED}_{\Phi_2^{(m_2, t_2, z_2)}}\right) \\ &\asymp CC(\text{PRED}_{\Phi_2}), \end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración. □

A continuación se verá que Predicción parametrizado también preserva la complejidad comunicacional.

Proposición 5.2.4. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$. Entonces, para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_1}^{a_1}) \prec \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_2}^{a_2}). \quad (5.2.4)$$

Demostración. Utilizando la Proposición 5.2.2 y el Teorema 5.2.3 y, dados $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ se constata que:

$$\begin{aligned} \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi}^{a_1}) &\asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi}) \\ &\asymp \text{CC}\left(\text{PRED}_{\Phi_1^{(m_1, t_1, z_1)}}\right) \\ &\prec \text{CC}\left(\text{PRED}_{\Phi_2^{(m_2, t_2, z_2)}}\right) \\ &\asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_2}) \\ &\asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_2}^{a_2}), \end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración. □

Corolario. Sea Ψ un AC intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces, para todo $a \in \mathbb{N}$:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Psi}^a) \asymp n. \quad (5.2.5)$$

Demostración. Por la Proposición 5.2.2, basta con demostrar que se cumple para PRED no parametrizado. Para esto, sólo resta encontrar un AC particular que posea complejidad lineal y utilizar la compatibilidad de PRED con \preceq_i , que se tiene gracias a la Proposición 5.1.8. □

5.2.2. Largo de ciclo

A continuación se verá que el problema de Largo de ciclo también preserva en algún sentido la complejidad comunicacional.

Teorema 5.2.5. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$ sin utilizar el shift, esto es, los parámetros de simulación son tales que $z_1 = z_2 = 0$. Entonces, para todo $k_0 \in \mathbb{N}$, existen $k_1, k_2 \geq k_0$ de modo que:

$$\text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_1}^{k_1}) \prec \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_2}^{k_2}). \quad (5.2.6)$$

Demostración. El efecto de los reescalamientos en órbitas cíclicas de configuraciones periódicas es cambiar el largo del período tanto espacial como temporal. Más precisamente, se tiene que:

- **Sub-autómata.** Si $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$, entonces, directamente, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_1}^k) \prec \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_2}^k).$$

- **Potencia.** Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi}^k)(mn) = \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi^{(m, 1, 0)}}^k)(n).$$

■ **Iteración.**

1. Para todo $t, k \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$CC(\text{CYCL}_{\Phi^t}^k) \prec CC(\text{CYCL}_{\Phi}^{tk});$$

2. para todo $t, k \in \mathbb{N}$ tales que $t|k$, se tiene que:

$$CC(\text{CYCL}_{\Phi}^k) \prec CC(\text{CYCL}_{\Phi^{<1,t,0>}}^{k/t}).$$

Luego, dado $k_0 \in \mathbb{N}$, y tomando $k_1 = t_1 k_0$ y $k_2 = t_2 k_0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} CC(\text{CYCL}_{\Phi_1}^{t_1 k_0}) &\asymp CC\left(\text{CYCL}_{\Phi_1^{(m_1,1,0)}}^{t_1 k_0}\right) \\ &\prec CC\left(\text{CYCL}_{\Phi_1^{(m_1,t_1,0)}}^{k_0}\right) \\ &\prec CC\left(\text{CYCL}_{\Phi_2^{(m_2,t_2,0)}}^{k_0}\right) \\ &\prec CC\left(\text{CYCL}_{\Phi_2^{(m_2,1,0)}}^{t_2 k_0}\right) \\ &\asymp CC(\text{CYCL}_{\Phi_2}^{t_2 k_0}), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario. Sea Ψ un AC intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$CC(\text{CYCL}_{\Psi}^k) \asymp n. \quad (5.2.7)$$

Demostración. Dado que CYCL no es del todo compatible con \preceq_i , pues la complejidad no se preserva ante traslaciones, la existencia de un AC con complejidad lineal no basta para demostrar el corolario. En comunicación personal con Guillaume Theyssier, se demostró la existencia de un AC Φ tal que, para todo conjunto de parámetros $\langle m, t, z \rangle$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$n \prec CC(\text{CYCL}_{\Phi^{(m,t,z)}}^k).$$

Así, dado un AC intrínsecamente \preceq_i -universal Ψ , y utilizando el Lema 3.2.3, se tiene que existen parámetros $\langle m, t, z \rangle$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\Phi^{(m,t,z)} \sqsubseteq \Psi^{[n]}.$$

Luego, dado $k_0 \in \mathbb{N}$, existen $k_1, k_2 \geq k_0$ tales que:

$$\begin{aligned} n &\prec CC(\text{CYCL}_{\Phi^{(m,t,z)}}^{k_1}) \\ &\prec CC(\text{CYCL}_{\Psi^{[n]}}^{k_1}) \\ &\asymp CC(\text{CYCL}_{\Psi}^{k_2}), \end{aligned}$$

donde la última equivalencia se tiene gracias al Teorema 5.2.5. □

5.2.3. Invasión espacial

Proposición 5.2.6. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$. Entonces, para todo $u \in A_1^+$, existe $v \in A_2^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_1}^u) \prec \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_2}^v).$$

Demostración. Se considera la relación \preceq_i por partes:

- **Sub-autómata.** Claramente, si existe una inyección $\iota : A_1 \rightarrow A_2$ tal que:

$$\bar{\iota} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \bar{\iota},$$

entonces:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_1}^u) \prec \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_2}^{\iota(u)}),$$

donde $\iota(u) = \iota(u_1) \dots \iota(u_\ell)$, para $u \in A_1^\ell$.

- **Potencia.** Dado $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Phi}^u)(|u|mn) \leq \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^{\gamma_m(u^m)})(|u|n);$$

y, por otro lado:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^u)(|u|n) \leq \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^{\gamma_m^{-1}(u)})(|u|mn),$$

donde γ_m y γ_m^{-1} están aplicados en palabras de la manera natural.

- **Iteración.** Claramente la complejidad de Invasión espacial no depende del parámetro t , pues:

$$\text{SINV}_{\Phi^t}^u = \text{SINV}_{\Phi}^u.$$

- **Shift.** Al igual que en el caso de las iteraciones, dada la definición de Invasión espacial, el límite superior de la separación entre extremos de la invasión no se ve afectado por las traslaciones.

Componiendo todos los resultados y considerando $v = \gamma_{m_2}^{-1} \circ \iota \circ \gamma_{m_1}(u^{m_1})$, se completa la demostración. \square

Corolario. Sea Ψ un AC intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces, existe $\bar{u} \in A^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Psi}^{\bar{u}}) \asymp n. \quad (5.2.8)$$

Demostración. Considerando la Proposición 5.1.8 y la compatibilidad con \preceq_i , se tiene directamente el resultado. \square

5.2.4. Invasión temporal

Proposición 5.2.7. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$. Entonces para todo $u \in A_1^+$, existe $v \in A_2^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_1}^u) \prec \text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_2}^v).$$

Demostración. Basta con demostrar que los protocolos se preservan para cada ingrediente de las transformaciones asociadas a \preceq_i :

- **Sub-autómata.** si $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$, un protocolo para Φ_2 será directamente un protocolo para Φ_1 .
- **Potencia.** Utilizando argumentos similares a la demostración de Invasión espacial, se tiene que las diferencias se preservan bajo agrupamientos, ajustando el patrón periódico.
- **Iteración.** Como la condición para que $\text{TINV}_{\Phi}^u(x)$ sea igual a 1 es que la diferencia entre el patrón periódico p_u y su perturbación $p_u(x)$ sea persistente en el tiempo $\forall t \geq 0$, se tiene que:

$$\text{TINV}_{\Phi^{t_0}}^u(x) = \text{TINV}_{\Phi}^u(x), \forall t_0 \geq 1.$$

- **Shift.** Claramente las diferencias son invariantes para el shift:

$$\Phi^t(p_u) = \Phi^t(p_u(x)) \iff \sigma^z \circ \Phi^t(p_u) = \sigma^z \circ \Phi^t(p_u(x)).$$

□

Corolario. Sea Ψ un AC intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces, existe $\bar{u} \in A^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{TINV}_{\Psi}^{\bar{u}}) \asymp n. \quad (5.2.9)$$

Demostración. La demostración es análoga a la de Invasión espacial. □

5.2.5. Invasión controlada

Proposición 5.2.8. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$. Entonces para todo $u \in A_1^+$, existe $v \in A_2^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{CINV}_{\Phi_1}^u) \prec \text{CC}(\text{CINV}_{\Phi_2}^v).$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la de Invasión espacial e Invasión temporal. □

Corolario. Sea Ψ un AC intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces, existe $\bar{u} \in A^+$ tal que:

$$\text{CC}(\text{CINV}_{\Psi}^{\bar{u}}) \asymp n. \quad (5.2.10)$$

Demostración. La demostración es análoga a la de Invasión espacial e Invasión temporal. □

5.3. Problemas compatibles con \preceq_s y \preceq_m

En la sección anterior se trabajó exclusivamente con el preorden \preceq_i , que hace uso de la noción de sub-automata. Otro preorden relevante previamente discutido es \preceq_s , que hace uso de la noción de automata cuociente \trianglelefteq . Como se comentó en el Capítulo 3, un problema abierto aún es si existe en este preorden elemento máximo, esto es, intrínsecamente \preceq_s -universal.

Con respecto a problemas de comunicación que se preserven bajo este preorden, no se tiene información de que aún se hayan discutido en la literatura salvo por el problema de Predicción⁵. Más aún, se verá que, de los problemas compatibles con \preceq_i , la mayoría no se preserva bajo \preceq_s y, más precisamente, bajo la relación de cuociente \trianglelefteq . Esto puede explicar en parte la dificultad que se ha tenido al trabajar con \preceq_s en relación a \preceq_i . Se espera encontrar algún problema comunicacional propio del preorden \preceq_s . Por el momento, lo mejor que se tiene es la preservación de PRED.

5.3.1. Predicción

Proposición 5.3.1. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_s \Phi_2$ (resp., $\Phi_1 \preceq_m \Phi_2$). Entonces:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_1}) \prec \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi_2}) \quad (5.3.1)$$

Demostración. Análogamente al caso de \preceq_i , dado $\Phi \in \mathcal{AC}$ y parámetros $\langle m, t, z \rangle$, se tiene que los protocolos se preservan bajo bulking. Esto es:

$$\text{CC}(\text{PRED}_{\Phi}) \asymp \text{CC}(\text{PRED}_{\Phi\langle m, t, z \rangle}).$$

Lo único que resta verificar es que se preserven bajo la relación de cuociente. Sea $\varphi : A_2 \rightarrow A_1$ una sobreyección tal que:

$$\bar{\varphi} \circ \Phi_2 = \Phi_1 \circ \bar{\varphi},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \text{PRED}_{\Phi_1}(y) &= \text{PRED}_{\Phi_1}(\bar{\varphi}(x)) \\ &= \text{PRED}_{\Phi_1 \circ \bar{\varphi}}(x) \\ &= \text{PRED}_{\bar{\varphi} \circ \Phi_2}(x) \\ &= \bar{\varphi}(\text{PRED}_{\Phi_2}(x)) \end{aligned}$$

en donde $y \in A_1^+$ y $x \in A_2^+$ es tal que $\bar{\varphi}(x) = y$, no necesariamente único. \square

A continuación se verá que PRED es el único problema de los compatibles con \preceq_i conocidos que se preserva bajo \preceq_s . Para esto, se mostrará un AC «difícil» para un problema dado que es simulado sobreyectivamente por uno «fácil» para el mismo problema.

⁵Ver [38, p. 94], 2005.

5.3.2. Contraejemplos

En esta sección se mostrará que la relación de cociente \trianglelefteq no preserva la complejidad comunicacional de la mayoría de los problemas anteriores, que sí la preservaban en el orden inyectivo. En consecuencia, tanto el preorden sobreyectivo como mixto no preservan la complejidad comunicacional de estos problemas.

Proposición 5.3.2. $\exists \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \trianglelefteq \Phi_2$ y:

1. $\exists k \in \mathbb{N}, \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_1}^k) \in \Omega(n)$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_2}^k) \in O(\log n)$.

Demostración. Sea $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$ con conjunto de estados:

$$A_1 = \left\{ \emptyset, \vec{0}, \vec{1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, s \right\} \times \{0, \leftarrow, \rightarrow\} \cup \{(\top, \top)\}$$

en donde se distinguen dos componentes, una indicada con color negro y la otra con color rojo. La primera componente es tal que:

1. \top es un muro tal que nunca se crea ni se destruye;
2. \emptyset es un estado estacionario;
3. $\vec{0}$ y $\vec{1}$ son señales que se mueven hacia la derecha a través de \emptyset ;
4. $\overleftarrow{0}$ y $\overleftarrow{1}$ son señales que se mueven hacia la izquierda a través de \emptyset ;
5. s es un estado invasivo.

Por otro lado, en la segunda componente se tiene que:

1. \top es un muro tal que nunca se crea ni se destruye;
2. 0 es un estado estacionario;
3. \leftarrow y \rightarrow son señales que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente, a través de 0 , y que cambian de sentido al chocar con \top . Además si dos señales en sentido contrario chocan, la que va en sentido izquierdo prevalece y la otra se anula.

La idea subyacente es la siguiente: en la primera componente se simula un test de DISJ, esto es, dada una entrada de DISJ, dígame (x, y) , siempre se puede interpretar como una instancia en la primera componente del AC como:

$$\vec{x}_n \cdots \vec{x}_1 \top \overleftarrow{y}_1 \cdots \overleftarrow{y}_n$$

Luego, las señales en la primera componente siempre se desintegran al chocar con \top pero, si se da lugar a la palabra $\vec{1} \top \overleftarrow{1}$, entonces se genera en la segunda componente una señal hacia la izquierda $\leftarrow \top$, representando que los inputs no son disjuntos.

Además, cuando no se tiene algo como lo buscado, esto es, señales adyacentes en la primera componente en sentidos contrarios, se considera que hay un «error» en la configuración y se propaga un estado s que borra todo salvo los muros, dejando homogéneamente el estado 0 en la segunda componente.

Considerar además $\Phi_2 \in \mathcal{AC}$ con conjunto de estados:

$$A_2 = \left\{ \emptyset, \vec{0}, \vec{1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, s \right\} \times \{0, \leftarrow, \rightarrow\} \times \{0, \leftarrow, \rightarrow\} \cup \{(\top, \top, \top)\}.$$

El funcionamiento de este AC en la primera y segunda componente es idéntico al de Φ_1 . La tercera componente funciona de manera similar a la segunda, con la salvedad de que las señales se crean siempre que se tenga la palabra $\vec{1}\top$ en la primera componente, sin importar lo que hay al otro lado del muro. Es decir, siempre que se crea un \leftarrow en la segunda componente, se crea un \leftarrow en la tercera, pero no viceversa (ver Figura 5.3.1).

Claramente, dado que la tercera componente no incide en el comportamiento de las otras dos, se tiene que $\Phi_1 \preceq \Phi_2$, mediante la proyección de la primera y segunda componente:

$$\pi_{1,2} : \begin{array}{ccc} A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, a_2, a_3) & \longmapsto & (a_1, a_2) \end{array},$$

esto es, $\bar{\pi}_{1,2} \circ \Phi_2 = \Phi_1 \circ \bar{\pi}_{1,2}$. A continuación, se verá que tales ACs cumplen lo descrito en la proposición.

1. $\exists k \in \mathbb{N}, \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_1}^k) \in \Omega(n)$. Considerar $k = 1$ y el fooling set:

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \top \\ \vec{x}_n & \cdots & \vec{x}_1 & \top \end{array}, \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ \overleftarrow{y}_1 & \cdots & \overleftarrow{y}_n & \end{array} \right) : x_i \neq y_i, \forall i \right\}$$

Luego, al igual que con DISJ, se puede probar que $|\mathcal{F}_n| = 2^n$, teniendo que:

$$\text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_1}^k) \in \Omega(n),$$

por el Lema 5.1.4.

2. $\forall k \in \mathbb{N}, \text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi_2}^k) \in O(\log n)$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y considerar un escenario como el de la Figura 5.3.1, que cumple con ser suficientemente general considerando la propagación del estado s ante cualquier diferencia cualitativa con respecto a éste. Así, en una configuración circular sin error (si hay error claramente el ciclo posee largo 1 y la verificación de que no hay es de costo constante), el largo de ciclo sólo dependerá de la segunda y tercera componente, pues la primera es consumida por \top , que se supone existe, pues si no el problema es trivial.

Luego, después de un período transiente, entre dos muros (o entre un muro y él mismo en caso de sólo haber uno) existirá una o ninguna señal en cada componente, por la condición de que éstas rebotan contra el muro y se eliminan al chocar entre ellas. Así, el largo de ciclo dependerá de la máxima distancia entre muros y si hay o no señales en alguna de las dos últimas componentes. Para saber esto último, basta chequear si ya existen señales o si se crearán mediante el choque de una señal $\vec{1}$ contra el muro, lo cual tiene complejidad

constante, a diferencia del caso de Φ_1 , en donde se requiere la coordinación de las señales a ambos lados del muro. Así, la complejidad es $O(\log n)$ pues se necesita conocer la máxima distancia entre muros (lo cual se puede codificar de manera logarítmica) y si se crearán o no señales (lo cual es de costo constante): si no son creadas, el largo de ciclo es 1 y si sí, es proporcional a la distancia máxima entre muros que puede llegar a ser de orden n .

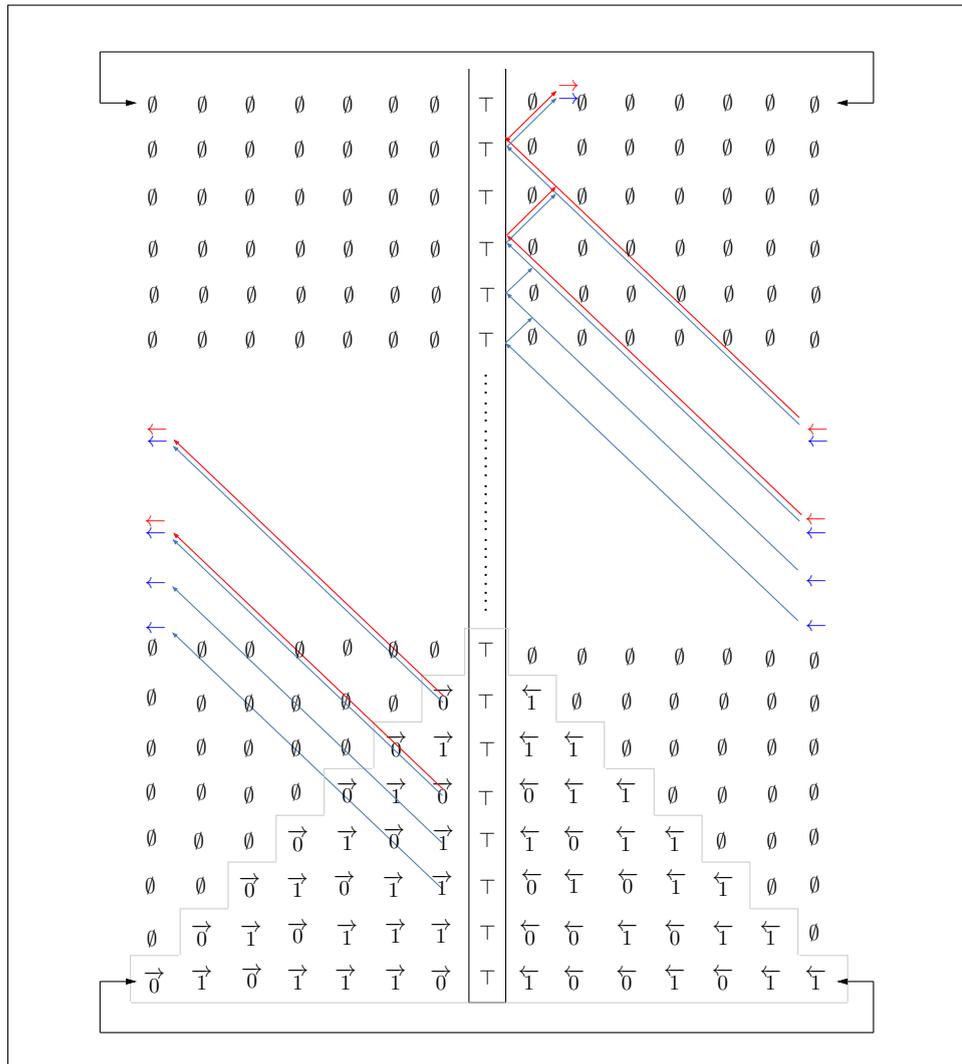


Figura 5.3.1: Evolución del AC Φ_2 en un patrón periódico.

□

Proposición 5.3.3. $\exists \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ y:

1. $\exists u \in A_1^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_1}^u) \in \Omega(n)$.
2. $\forall v \in A_2^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_2}^v) \in O(1)$.

Demostración. Sea $\Phi_2 \in \mathcal{AC}$ con conjunto de estados:

$$A_2 = \{\emptyset, \vec{0}, \vec{1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, s\} \times \{0, \leftarrow\} \cup \{(\top, \top)\}.$$

El funcionamiento general se describe a continuación.

1. El AC Φ_2 consta de dos componentes, en donde el estado (\top, \top) es un muro para ambas.
2. En la primera componente, el estado s funciona como un estado invasivo. El estado s que se propaga por la primera componente, borra los \leftarrow con los que se va encontrando en la segunda, dejando el estado 0 a su paso. El estado (\top, \top) se respeta como muro en ambas componentes y no se propagan señales a través de él.
3. Los estados \overleftarrow{x} e \overrightarrow{y} funcionan como señales que se mueven en la dirección que indica la flecha respectiva.
4. Se considera un «error» (en la primera componente) las siguientes situaciones:
 - a) dos estados \overleftarrow{x} e \overrightarrow{y} adyacentes,
 - b) un estado \overrightarrow{x} junto a \emptyset por la derecha o un estado \overleftarrow{x} junto a \emptyset por la izquierda,
 - c) dos estados $\vec{1}$ y $\overleftarrow{1}$ adyacentes o a una celda de distancia,
 - d) un estado \overleftarrow{x} adyacente a (\top, \top) por la izquierda o un estado \overrightarrow{x} , por la derecha.

Ante cualquier error, se propaga el estado invasivo s .

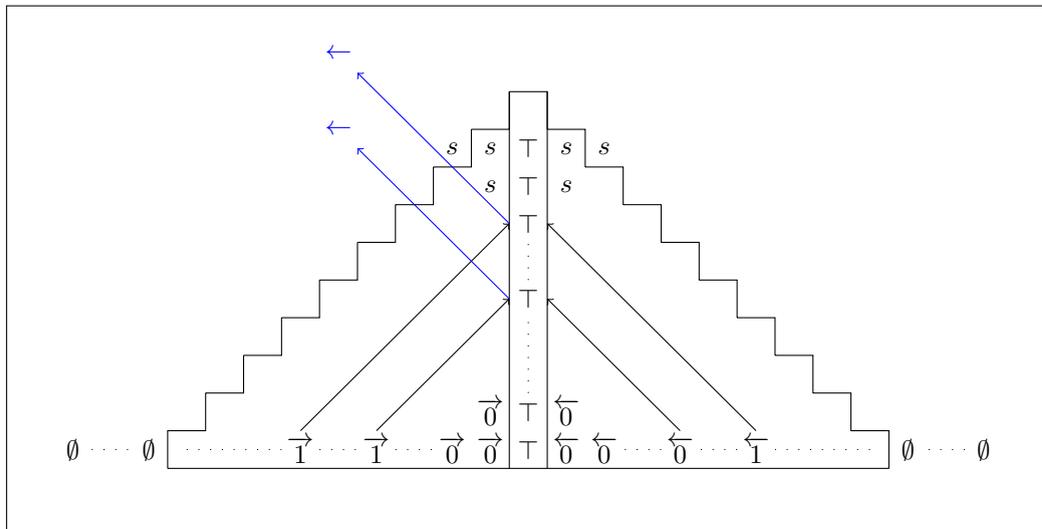


Figura 5.3.2: Ejemplo de configuración.

5. Cuando las señales \leftarrow chocan contra el muro (\top, \top) desaparecen convirtiéndose en el estado 0 y, en el caso de un choque por la izquierda de una señal $\vec{1}$ contra el muro en la primera componente, se produce una señal \leftarrow en dirección opuesta en la segunda componente. Así, alrededor de un muro, se puede generar la dinámica usual que se utiliza para simular la función DISJ.

Teniendo parcialmente definido este AC, considerar el AC Φ_1 que funciona como la primera componente de Φ_2 de manera independiente, con alfabeto:

$$A_1 = \{\emptyset, \vec{0}, \vec{1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, s, \top\}.$$

Se cumple lo siguiente:

- $\Phi_1 \preceq_s \Phi_2$, mediante la sobreyección:

$$\pi_1 : \begin{array}{ccc} A_2 & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, a_2) & \longmapsto & a_1 \end{array},$$

donde π_1 es la proyección sobre la primera componente. Como la segunda componente de Φ_2 no incide en el comportamiento de la primera, se verifica fácilmente que: $\bar{\pi}_1 \circ \Phi_2 = \Phi_1 \circ \bar{\pi}_1$.

- $\exists u = \emptyset \in A_1^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_1}^u) \in \Omega(n)$. Esto es directo a partir de considerar el fooling set que se ocupa regularmente para DISJ.

Resta demostrar que $\forall v \in A_2^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi_2}^v) \in O(1)$. Para esto se divide en los siguientes casos:

- $(\top, \top) \sqsubset v$: en este caso no es posible que ocurra una invasión, pues (\top, \top) actúa como muro a ambos lados de la perturbación.
- $(\top, \top) \not\sqsubset v$:
 - p_v contiene un error: si p_v no es una configuración válida, el estado s se propaga por la primera componente, borra los gliders de la segunda y luego no hay invasión.
 - p_v es válido:
 1. $\pi_1(v) \in (\vec{0} | \vec{1})^+ \cup (\overleftarrow{0} | \overleftarrow{1})^+$:
 - $(\top, \top) \sqsubset x$: necesariamente hay invasión, pues el muro borra los elementos que pasan a través de él bajo la acción del shift respectivo.
 - $(\top, \top) \not\sqsubset x$: en este caso basta con que Alice y Bob verifiquen que sus partes sean compatibles con la configuración periódica.
 2. $\pi_1(v) \in \emptyset^+$:
 - $(\top, \top) \sqsubset x$: si $\pi_2(v)$ posee gliders, entonces necesariamente hay invasión, pues \top los borra. Ahora, si $\pi_2(v) \in \emptyset^+$ y Alice posee un $\vec{1}$ también hay invasión. Si no es ninguno de los casos anteriores, entonces sólo hay invasión si las porciones de Alice y Bob tienen algún error.
 - $(\top, \top) \not\sqsubset x$: en este caso basta con que Alice y Bob verifiquen que sus partes sean compatibles con la configuración periódica y no generen error.

□

De manera análoga a Invasión espacial, se cumple algo similar para los otros dos problemas de invasión.

Proposición 5.3.4 ([4]). $\exists \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ y:

1. $\exists u \in A_1^+, \text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_1}^u) \in \Omega(n)$.
2. $\forall v \in A_2^+, \text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_2}^v) \in O(1)$.

Proposición 5.3.5 ([4]). $\exists \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq \Phi_2$ y:

1. $\exists u \in A_1^+, \text{CC}(\text{CINV}_{\Phi_1}^u) \in \Omega(n)$.
2. $\forall v \in A_2^+, \text{CC}(\text{CINV}_{\Phi_2}^v) \in O(1)$.

Observación. Notar que la misma demostración de la propiedad para Invasión espacial se puede adaptar para el caso de Invasión controlada.

Capítulo 6

Independencia y superposición

*The Jury had each formed a different view
(Long before the indictment was read),
And they all spoke at once, so that none of them knew
One word that the others had said.*

Fit the Sixth - THE BARRISTER'S DREAM

El presente capítulo pretende ser la culminación de todos los capítulos anteriores y de esta investigación. En el primer apartado, se discute la incomparabilidad de las condiciones comunicacionales necesarias para la universalidad intrínseca desarrolladas en el Capítulo 5, llegando a la conclusión de que todas éstas son necesarias de estudiar y en algún sentido complementarias. A continuación, y como punto importante, se introduce una nueva herramienta comunicacional desarrollada durante el transcurso del trabajo de memoria y que provee de condiciones necesarias más fuertes que todas las anteriores y, en definitiva, una nueva y más general metodología de trabajo. Finalmente, se muestra cómo clases completas de ACs son simples para algún problema comunicacional, deduciéndose su incapacidad de soportar la cualidad de universalidad.

6.1. Independencia

La motivación del artículo *Communication Complexity and Intrinsic Universality in Cellular Automata* [14] y de gran parte del capítulo anterior, fue encontrar ciertos problemas de índole comunicacional que proveyeran condiciones necesarias (más específicamente, que la complejidad comunicacional fuese «alta» en todos ellos) para la universalidad intrínseca en un AC. Surge la pregunta de si alguna de estas condiciones implica otra, es decir, algo del estilo: *todo AC que posee alta complejidad en el problema de Invasión espacial, debe también poseer alta complejidad en el problema de Predicción*. En esta sección se enuncian diversos resultados que muestran que tal cosa no sucede, y que intentan ser exhaustivos con respecto a la multitud de pares posibles de problemas. Luego, «ninguna condición es más fuerte que la otra» [14]. Estas construcciones, además de ser interesantes en sí mismas, serán necesarias y justificarán en cierta medida el sentido de la sección siguiente.

Definición 6.1.1. Se definen las respectivas clases de «ACs difíciles» para cada problema como:

- $H(\text{PRED}) = \{\Phi \in \mathcal{AC} : \exists a \in \mathbb{N}, n \prec \text{CC}(\text{PRED}_\Phi^a)\};$
- $H(\text{CYCL}) = \{\Phi \in \mathcal{AC} : \exists k \in \mathbb{N}, n \prec \text{CC}(\text{CYCL}_\Phi^k)\};$
- $H(\text{SINV}) = \{\Phi \in \mathcal{AC} : \exists u \in A^+, n \prec \text{CC}(\text{SINV}_\Phi^u)\};$
- $H(\text{TINV}) = \{\Phi \in \mathcal{AC} : \exists u \in A^+, n \prec \text{CC}(\text{TINV}_\Phi^u)\};$
- $H(\text{CINV}) = \{\Phi \in \mathcal{AC} : \exists u \in A^+, n \prec \text{CC}(\text{CINV}_\Phi^u)\}.$

Dado que $\Theta(n) \subsetneq [n]_{\succ}^1$, la Proposición 5.1.8 implica que ninguna de las clases anteriores es vacía. Por otro lado, por el Corolario 5.2.5, todo AC intrínsecamente universal pertenece a la intersección de éstas. Sin embargo, ninguna clase está incluida en la otra, es decir, existen ACs que son de complejidad equivalente a n en cierto problema pero son sublineales en otro. En concordancia con esto, dos problemas inducidos por ACs, dígase Prob^1 y Prob^2 , se dirán **independientes** si existen ACs Φ_1 y Φ_2 tales que: $\Phi_1 \in H(\text{Prob}^1) \setminus H(\text{Prob}^2)$ y $\Phi_2 \in H(\text{Prob}^2) \setminus H(\text{Prob}^1)$. En lo que sigue se muestra la independencia de la mayor parte de las clases recién definidas.

Proposición 6.1.1 ([14]). $H(\text{PRED}) \setminus H(\text{SINV}) \neq \emptyset$.

Demostración. Ver [14]. □

Proposición 6.1.2 ([14]). $H(\text{SINV}) \setminus H(\text{PRED}) \neq \emptyset$.

Demostración. Ver [14]. □

Proposición 6.1.3 ([14]). $H(\text{CYCL}) \setminus H(\text{PRED}) \neq \emptyset$.

Demostración. Ver [14]. □

Proposición 6.1.4 ([14]). $H(\text{PRED}) \setminus H(\text{CYCL}) \neq \emptyset$.

Demostración. Ver [14]. □

Proposición 6.1.5. $H(\text{SINV}) \setminus H(\text{TINV}) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ con conjunto de estados $A = \{0, 1, \sqcap, s\} \times \{0, 1\}$, en donde se distinguen dos componentes que interactúan:

1. la primera consiste de un shift a la derecha que actúa sobre los estados 0 y 1. El estado s es un estado invasivo que se propaga sólo por la primera componente. El estado \sqcap indica el lugar en dónde se compara (para intentar simular un test de DISJ) el contenido de la primera y la segunda componente, verificando si en ambas hay un estado 1 o no. Además, \sqcap se propaga hacia la derecha borrando los estados 0 y 1;
2. la segunda componente es un shift a la izquierda sobre los estados 0 y 1.

Para entender con más claridad el funcionamiento de este AC, lo mejor es poner atención a la Figura 6.1.1 que intenta representar la dinámica justo antes de generar un estado invasivo. Teniendo en claro cómo funciona éste, se tiene que satisface lo siguiente:

¹Donde $[n]_{\succ}$ es la clase de equivalencia de n inducida por la relación \succ .

1. $\exists \bar{u} \in A^+, \text{CC}(\text{SINV}_{\Phi}^{\bar{u}}) \in \Omega(n)$.
2. $\forall u \in A^+, \text{CC}(\text{TINV}_{\Phi}^u) \in O(1)$.

En efecto, para (1) basta considerar el siguiente fooling set:

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(\begin{array}{ccccccccc} 0^n & x_1 & \cdots & x_n & 0 & \sqcap & 0 & \cdots & 0 \\ 0^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_n & y_{n-1} & \cdots & y_1 \end{array} \right) : x_i \neq y_i, \forall i \right\}$$

Si se toma $\bar{u} = (\sqcap, 0)$, entonces:

- $\forall (x, y) \in \mathcal{F}, \text{SINV}_{\Phi}^{\bar{u}}(xy) = 0$;
- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{F}$ tal que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$:

$$\text{SINV}_{\Phi}^{\bar{u}}(x_1y_2) = 1 \vee \text{SINV}_{\Phi}^{\bar{u}}(x_2y_1) = 1,$$

pues el estado invasivo se propaga. Como tal fooling set es de tamaño 2^n , se tiene que:

$$\text{CC}(\text{SINV}_{\Phi}^{\bar{u}}) \in \Omega(n).$$

Para verificar el punto (2), es necesario demostrar que para todo $u \in A^+$, existe un protocolo de costo $O(1)$ que resuelve TINV_{Φ}^u . Para esto, considerar π_i ($i = 1, 2$), la proyección en la primera y segunda componente, respectivamente. Luego, hay dos casos básicos posibles:

- $\pi_2(p_u(x)) \neq \pi_2(p_u)$. En este caso, $\text{TINV}_{\Phi}^u(x) = 1$, pues la segunda componente nunca se modifica salvo shift.

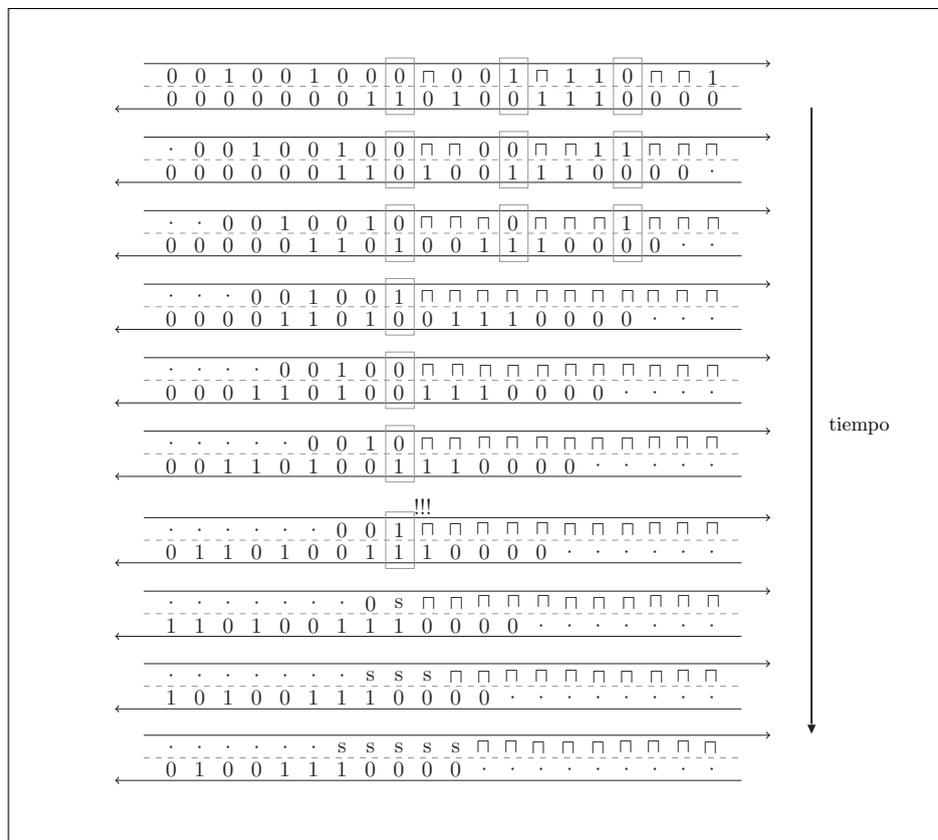


Figura 6.1.1: Evolución del AC en el tiempo. Los cuadrados grises representan las evaluaciones en curso.

En efecto, para (1), considerar el siguiente fooling set:

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(\begin{array}{cccccccc} 1^n & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1^n \\ 0^n & x_n & \cdots & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0^n \\ 0^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1 & \cdots & y_n & 0^n \end{array} \right) : x = \bar{y} \right\}$$

Si se toma $\bar{u} = (1, s, s)$, entonces se tiene que:

- $\forall (x, y) \in \mathcal{F}, \text{TINV}_{\Phi_2}^{\bar{u}}(xy) = 1$, pues queda un 0 en la primera componente;
- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{F}$ tal que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$:

$$\text{TINV}_{\Phi_2}^{\bar{u}}(x_1 y_2) = 0 \vee \text{TINV}_{\Phi_2}^{\bar{u}}(x_2 y_1) = 0,$$

pues el estado invasivo se propaga. Como tal fooling set es de tamaño 2^n , se tiene que:

$$\text{CC}(\text{TINV}_{\Phi_2}^{\bar{u}}) \in \Omega(n).$$

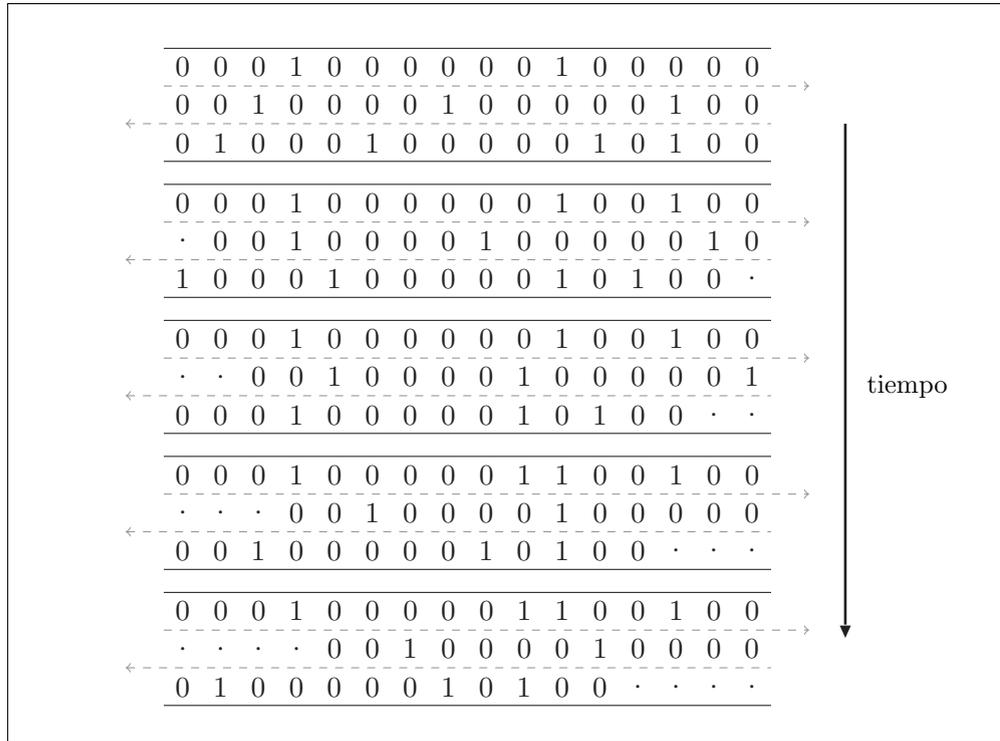


Figura 6.1.3: Dinámica del AC Φ_1 .

Ahora, para probar (2), es necesario verificar que para todo $u \in A_2^+$ existe un protocolo de costo $O(1)$ para $\text{SINV}_{\Phi_2}^u$. Existen cuatro casos posibles²:

- $\pi_2(p_u) = \pi_2(p_u(x)), \pi_3(p_u) = \pi_3(p_u(x))$. Claramente no hay invasión espacial pues, de haber diferencias, éstas quedan restringidas a la primera componente entre 0 y $|x|$.
- $\pi_2(p_u) \neq \pi_2(p_u(x)), \pi_3(p_u) = \pi_3(p_u(x))$. En este caso, Alice y Bob deben verificar que en $\pi_1(p_u(x))$ no aparecerá un 1 en alguna posición en donde no aparezca éste en la órbita de $\pi_1(p_u)$ ³, con el fin de que la única diferencia de p_u con $p_u(x)$ esté en la

²Es fácil ver que se requiere comunicación constante saber en qué caso se está.

³Notar que en tiempo $|u|$ la primera componente de p_u queda fija.

segunda componente y así haya sólo invasión temporal. Para este propósito, lo que Alice y Bob poseen en la segunda componente funciona de manera independiente, esto es, cada uno debe verificar si lo que tiene en relación a la configuración $\pi_3(p_u)$ producirá alguna diferencia en la primera componente con respecto a $\pi_1(p_u)$. El verdadero problema ocurre sólo por el hecho de que Bob (a la derecha) no conoce la segunda componente de Alice, y, por otro lado, Alice no conoce la primera componente de Bob. Para solucionar esto, basta observar que lo único que debe preocuparle a Bob es que en su primera componente no haya un 1 en un lugar que no aparecerá en la configuración periódica. Por otro lado, Alice sólo debe preocuparse de que lo que tiene en su segunda componente no dé lugar a un 1 en la primera componente —recordar que en este caso Alice conoce totalmente la tercera componente— donde no corresponde con respecto a p_u .

			Alice			Bob									
u^1	u^1	u^1	x_1^1	\cdot	\cdot	\cdot	x_n^1	y_1^1	\cdot	\cdot	\cdot	y_m^1	u^1	u^1	u^1
u^2	u^2	u^2	x_1^2	\cdot	\cdot	\cdot	x_n^2	y_1^2	\cdot	\cdot	\cdot	y_m^2	u^2	u^2	u^2
u^3	u^3	u^3	\cdot	u^3	u^3	u^3	\cdot	\cdot	u^3	u^3	u^3	\cdot	u^3	u^3	u^3

Figura 6.1.4: Caso $\pi_2(p_u) \neq \pi_2(p_u(x))$, $\pi_3(p_u) = \pi_3(p_u(x))$.

- $\pi_2(p_u) = \pi_2(p_u(x))$, $\pi_3(p_u) \neq \pi_3(p_u(x))$. Este caso es análogo al anterior.
- $\pi_2(p_u) \neq \pi_2(p_u(x))$, $\pi_3(p_u) \neq \pi_3(p_u(x))$. En tal caso necesariamente existe invasión espacial, pues las diferencias se desplazan en sentidos contrarios.

□

Proposición 6.1.7. $H(\text{CINV}) \setminus H(\text{TINV}) \neq \emptyset$.

Demostración. Basta con utilizar el mismo AC de la demostración de la Proposición 6.1.5. Por contradicción, suponer que tal AC Φ cumple que $\Phi \notin H(\text{CINV})$. Luego, $\Phi \notin H(\text{TINV}) \cup H(\text{CINV})$. Pero esto es una contradicción, pues $\Phi \in H(\text{SINV})$ y, si se tuvieran protocolos sublineales para TINV y CINV, entonces fácilmente se podría obtener una respuesta para SINV con un protocolo de costo sublineal pues: (1) si hay invasión controlada, no hay invasión espacial; (2) si no hay invasión controlada y no hay invasión temporal, tampoco hay invasión espacial; y, por último, (3) si no hay invasión controlada pero hay invasión temporal, entonces hay invasión espacial. □

Proposición 6.1.8. $H(\text{CINV}) \setminus H(\text{SINV}) \neq \emptyset$.

Demostración. La demostración es análoga al caso $H(\text{CINV}) \setminus H(\text{TINV}) \neq \emptyset$. □

Proposición 6.1.9. $H(\text{SINV}) \setminus H(\text{CINV}) \neq \emptyset$.

Por ahorro de espacio y claridad, la demostración de esta última proposición es omitida, pero basta con considerar un AC similar al de la Proposición 6.1.5 para demostrar su veracidad.

6.2. Superposición

A modo de resumen, el enfoque que ha tenido la perspectiva comunicacional en el estudio de ACs intrínsecamente universales⁴ —que hasta el momento todavía se puede clasificar de incipiente— consta de tres aristas básicas:

1. la búsqueda de problemas compatibles con algún preorden (con especial énfasis en \preceq_i);
2. la creación de instancias con alta complejidad comunicacional para cada problema; y
3. la verificación o refutación de la independencia entre ellos;

todo esto con el fin de encontrar más condiciones necesarias para la pertenencia a la clase de elementos máximos en cada preorden.

Así, la línea seguida en esta investigación fue la de buscar más problemas pero, además, otra cualidad que se deseó conseguir es que estos problemas soporten protocolos cada vez menos intrincados, de bajo costo y que, en términos de independencia, sean cada vez más potentes como filtro, esto es, que la clase de ACs difíciles que engendran sea pequeña comparativamente a las del resto y ojalá esté estrictamente incluida.

Teniendo esto último en mente, surgió la idea de relajar los problemas que ya se tenían de la siguiente manera: si Alice y Bob poseen cierta entrada —en definitiva, una secuencia de estados de un AC—, ¿qué sucede si les damos la libertad de escoger el problema que van a resolver? O, dicho de otra manera, ¿qué sucede si el problema al que a ellos les conviene responder, en el sentido de reducir su costo de comunicación, dependiese de la instancia que ellos han recibido? ¿Cómo formalizar esta idea?

Para responder a las preguntas anteriores se apreció que el modo más natural de extender de la manera propuesta las nociones que ya se tenían requería cambiar de objeto de estudio, esto es, la complejidad comunicacional de funciones, por algo un poco más general como son las relaciones.

Así, Alice y Bob ya no buscan evaluar una función, si no que buscan un elemento en cierto espacio que satisfaga alguna relación dada con los elementos que ambos poseen. Para esto se introduce la noción de *superposición* que se define y explica en lo que sigue.

6.2.1. Definición del modelo

Se define a continuación un modelo desarrollado durante esta investigación (del cual no se tiene conocimiento que exista previamente en la literatura) consistente en un caso específico del modelo de relaciones, pero que goza de ciertas propiedades no extendibles a éste.

Definición 6.2.1 ([5]). Sea $\{f_i : X \times Y \rightarrow Z_i\}_{i=1,\dots,k}$ un conjunto finito de funciones con dominio común $X \times Y$ y recorridos Z_i tales que $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para $i \neq j$. Se define la **superposición** sobre este conjunto como la relación:

$$f_1 \uplus \cdots \uplus f_k := \left\{ (x, y, (z, i)) \in X \times Y \times \bigcup_{i=1}^k (Z_i \times \{i\}) : f_i(x, y) = z \right\} \quad (6.2.1)$$

⁴Teniendo como principal referencia [14].

Así, intuitivamente, la superposición formaliza la idea anterior: dada una entrada x para Alice y una entrada y para Bob, ambos buscan una respuesta $z \in Z_i$ para alguna función f_i . Una propiedad fundamental de la superposición y la que en gran parte motiva su definición es la siguiente.

Proposición 6.2.1 ([5]). *Sea $\{f_i : X \times Y \rightarrow Z_i\}_{i=1,\dots,k}$ un conjunto finito de funciones con dominio común. Entonces,*

$$\text{cc}(f_1 \uplus \dots \uplus f_k) \leq \min_{i=1,\dots,k} \text{cc}(f_i). \quad (6.2.2)$$

Demostración. La demostración es prácticamente directa. Sea $i^* \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\text{cc}(f_{i^*}) = \min_{i=1,\dots,k} \text{cc}(f_i)$. Considerando un protocolo para f_{i^*} se obtiene un protocolo para $f_1 \uplus \dots \uplus f_k$ de igual costo. Luego, $\text{cc}(f_1 \uplus \dots \uplus f_k) \leq \text{cc}(f_{i^*})$. \square

A pesar de la utilidad de la cota superior anterior, existen casos en que el costo mínimo de protocolo sobre la familia de problemas es exponencialmente mayor que el costo de la superposición. De hecho, no es difícil ver que incluso existen casos en donde la superposición tiene protocolo de costo constante y el protocolo de mínimo costo sobre la familia es lineal. Claramente, esto es relevante desde el punto de vista asintótico. Gracias a la Definición 5.1.10, es fácil ver cómo extender la superposición de funciones a problemas comunicacionales —basta con considerar la familia de relaciones inducidas por la superposición. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo puede variar la complejidad al superponer y cómo es un protocolo para una superposición.

Ejemplo 6.2.1. Considerar las funciones EQ y DISJ definidas anteriormente. Sabemos que ambas funciones tienen complejidad $\Theta(n)$ por sí solas. Ahora, la pregunta es cuál es la complejidad de $\text{EQ} \uplus \text{DISJ}$. Para esto, considerar el siguiente protocolo:

1. Alice envía a Bob un 1 si posee algún 1 o un 0 en caso contrario.
2. Si Alice envió un 0, Bob responde $\text{DISJ}(x, y) = 1$. Si Alice envió un 1, entonces se continúa con el siguiente paso.
3. Alice envía la posición del primer 1 en el string x .
4. Finalmente, Bob compara la posición enviada por Alice con la suya. Si posee un 1 en tal posición, responde $\text{DISJ}(x, y) = 0$, y si posee un 0, responde $\text{EQ}(x, y) = 0$.

Claramente el protocolo anterior es $O(\log n)$ (el paso más costoso es el envío de la posición del primer 1). Por otro lado, se considera el siguiente conjunto a modo de fooling set:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n : x = y, \#_1(x) = 1\},$$

esto es, el conjunto de pares (x, x) tales que x posee exactamente un 1.

Claramente, se tiene que $|\mathcal{F}| = n$. Además, si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{F}$ y éstos son distintos, no pueden estar en un mismo rectángulo monocromático.

En efecto, para esto último, supóngase por contradicción que sí. Notar que para todo $(x, y) \in \mathcal{F}$ se tiene que $\text{EQ}(x, y) = 1$ y $\text{DISJ}(x, y) = 0$. Ahora, si se consideran $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, se tiene que $\text{EQ}(x_1, y_2) = 0$ y $\text{DISJ}(x_1, y_2) = 1$, lo que concluye la demostración.

Así, $\text{EQ} \uplus \text{DISJ}$ requiere al menos n rectángulos monocromáticos para cubrir su matriz de comunicación, por lo cual $\text{cc}(\text{EQ} \uplus \text{DISJ}) \in \Omega(\log n)$. Luego, la cota anterior es óptima y se tiene que:

- $\text{cc}(\text{EQ}) \in \Theta(n)$,
- $\text{cc}(\text{DISJ}) \in \Theta(n)$, y, sin embargo,
- $\text{cc}(\text{EQ} \uplus \text{DISJ}) \in \Theta(\log n)$.

El resultado del ejemplo anterior se puede ver de otra manera y es la siguiente: considerando las representaciones matriciales M_{EQ} y M_{DISJ} , un protocolo para una superposición se puede ver como un tiling con tilings parciales en ambas matrices que superpuestos consisten en un tiling total. Para el caso anterior, considerando los tiles de la Figura 6.2.1, se tiene la siguiente recursión dada la estructura autosimilar de las matrices:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 + T(n-1) \\ T(1) &= 1 \end{aligned} .$$

La solución de tal recurrencia es $T(n) = 3n - 2$, y se puede concluir de otra manera que:

$$\text{cc}(\text{EQ} \uplus \text{DISJ}) \in O(\log n).$$

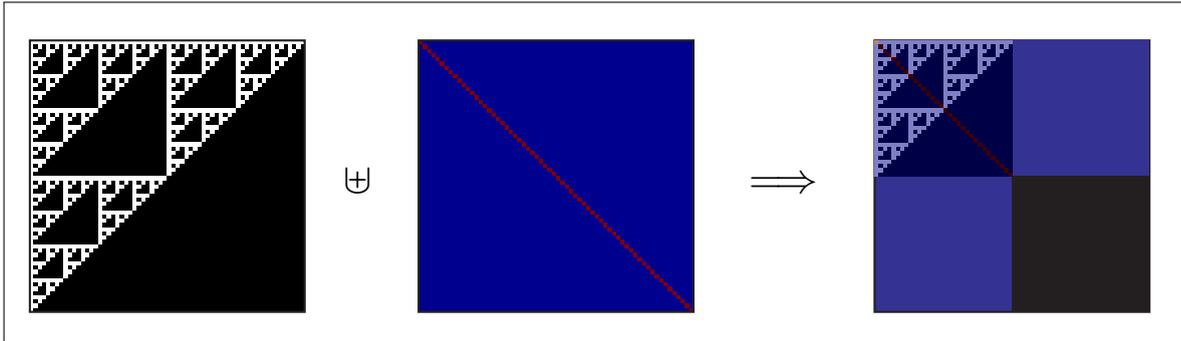


Figura 6.2.1: La recurrencia del tiling T .

Viendo que el costo de la superposición siempre es menor —y en algunos casos dramáticamente— que el mínimo costo sobre la familia, otra pregunta que puede surgir es si la superposición siempre da lugar a protocolos triviales o de bajo costo. Con respecto a esto, se logró en cierta manera caracterizar la complejidad de la superposición en función de la complejidad original de sus componentes, además de establecer y cuantificar cuándo un problema es tal que su complejidad no es factible que disminuya al ser superpuesto con otros de complejidad similar.

Definición 6.2.2. Dada una función $f : X \times Y \rightarrow Z$, se define su **apertura** como:

$$\delta(f) = \log \max_{\substack{R \in \mathcal{R}_f \\ R = A \times B}} \min(|A|, |B|), \quad (6.2.3)$$

donde:

$$\mathcal{R}_f = \{R = A \times B \subseteq X \times Y : R \text{ es } f\text{-monocromático}\}. \quad (6.2.4)$$

Así, la apertura de una función será el logaritmo del mayor cuadrado monocromático que ésta posea.

Lema 6.2.2. Sean $f_i : X \times Y \rightarrow Z_i$ ($i = 1, 2$) un par de funciones con dominio común. Entonces:

$$\text{cc}(f_1 \uplus f_2) \leq \text{cc}(f_1) \leq \text{cc}(f_1 \uplus f_2) + \delta(f_2). \quad (6.2.5)$$

Demostración. Sea \mathcal{P} un protocolo para la superposición $f_1 \uplus f_2$. Tal protocolo se puede ver como un árbol de altura h en donde el conjunto de hojas del árbol $L = L_1 \cup L_2$ se puede particionar en dos, donde L_1 es el conjunto de hojas que resuelven f_1 y L_2 , las que resuelven f_2 . Además, por una adaptación del Lema 5.1.2 al caso de relaciones (en particular, superposiciones), se tiene que $R_\ell \in \mathcal{R}_{f_2}$, para todo $\ell \in L_2$.

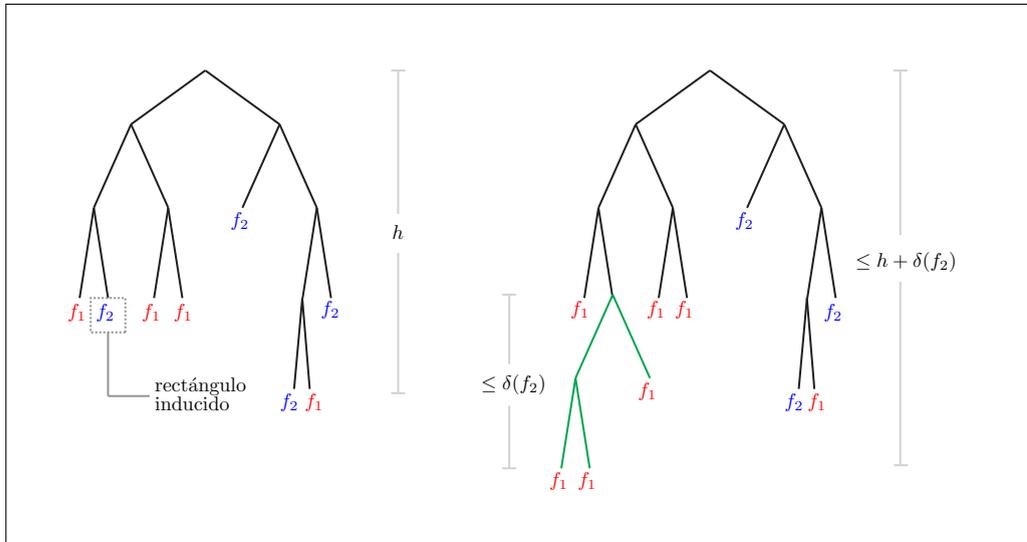


Figura 6.2.2: Esquema de demostración.

Ahora, se verá que a partir de \mathcal{P} se puede construir un protocolo $\tilde{\mathcal{P}}$ que resuelve f_1 . Supóngase que en el protocolo \mathcal{P} se llega a una hoja que resuelve f_1 , esto es, en L_1 . Si éste es el caso, se deja tal hoja intacta. En caso contrario, si el protocolo alcanza una hoja ℓ perteneciente a L_2 , se sabe que tal hoja induce un rectángulo monocromático R_ℓ en f_2 . Sin embargo, tal rectángulo es de lado menor o igual a $\delta(f_2)$. Luego, si se considera ahora tal rectángulo en f_1 (notar que no necesariamente es monocromático en f_1), se sabe que la complejidad del subproblema $f_1|_{R_\ell}$ es menor o igual al logaritmo del menor lado de R_ℓ con el protocolo trivial en que una de las partes comunica toda la entrada. Así, reemplazando cada hoja que resuelve f_2 por tal subprotocolo, se construye un protocolo $\tilde{\mathcal{P}}$ en donde todas las hojas son del tipo L_1 . Tal protocolo efectivamente resuelve f_1 y su árbol es de altura menor o igual a $h + \delta(f_2)$. Tomando mínimo sobre todos los protocolos \mathcal{P} que resuelven $f_1 \uplus f_2$ se tiene el resultado. \square

Corolario. Sea $\{f_i : X \times Y \rightarrow Z_i\}_{i=1, \dots, k}$ una familia de funciones con dominio común. Entonces:

$$\text{cc}(f_1 \uplus \dots \uplus f_k) \leq \text{cc}(f_i) \leq \text{cc}(f_1 \uplus \dots \uplus f_k) + \max_{j \neq i} \delta(f_j), \quad (6.2.6)$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración. Fijando i y adaptando la demostración del Lema 6.2.2, sigue de manera análoga el resultado. \square

Notar que al superponer una función con otra, mientras más pequeña sea la apertura de esta última, más se preserva la complejidad ante la superposición. Una pregunta natural es qué tan pequeña puede ser la apertura de una función. Esto se relaciona directamente con los rectángulos combinatoriales monocromáticos de una matriz. En el caso de funciones del tipo $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, que no resulta ser un caso tan particular, pues siempre podemos recodificar el alfabeto, se pueden obtener resultados asintóticos que dan algunas luces sobre tal cuestión. Para esto, conviene trasladar el resultado a grafos bipartitos.

Toda matriz binaria $M \in \mathcal{M}^{n \times n}$ se puede interpretar como un grafo bipartito $G_M = (V_M, E_M)$, donde $V_M = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ y E_M es tal que $a_i b_j \in E_M \iff M_{i,j} = 1$. Recíprocamente, todo grafo bipartito se puede interpretar como una matriz de tal tipo. Teniendo esto en mente, existen resultados del tipo Ramsey sobre coloramientos en grafos bipartitos que reinterpretados contestan directamente la pregunta anterior. Antes, una definición.

Definición 6.2.3 (Grafo bipartito completo). Dado $n \in \mathbb{N}$, se define el **grafo bipartito completo** $K_{n,n} = (V, E)$ como el grafo bipartito con conjunto de vértices $V = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ y conjunto de aristas $E = \{a_i b_j : i, j \in \{1, \dots, n\}\}$.

Definición 6.2.4. Dado $k \in \mathbb{N}$, se define el número $b(k)$ como el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que cualquier bicoloración de $K_{n,n}$ contiene a $K_{k,k}$ como subgrafo monocromático.

Teorema 6.2.3 ([7]). *Para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tiene que:*

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k \sqrt{2}^k \leq b(k) \leq (1 + o(1)) 2^{k+1} \log k. \quad (6.2.7)$$

Corolario. *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que:*

1. *para toda función $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$:*

$$\delta(f) \geq \log \log n - 1; \quad (6.2.8)$$

2. *existe una función $f^* : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:*

$$\delta(f^*) \leq \log \log n + 1. \quad (6.2.9)$$

Demostración. Considerar la desigualdad del Teorema 6.2.3:

$$(1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k \sqrt{2}^k \leq b(k) \leq (1 + o(1)) 2^{k+1} \log k.$$

Luego, para k grande, de tal desigualdad se obtiene:

$$1. \ b(k) \leq (1 + o(1)) 2^{k+1} \log k \leq k^2 2^{k+1};$$

$$2. \ b(k) \geq (1 + o(1)) \frac{\sqrt{2}}{e} k \sqrt{2}^k \geq k \sqrt{2}^{k-1}.$$

Tomando logaritmo en ambas ecuaciones, sigue que:

$$1. \ \log b(k) \leq 2 \log k + (k + 1) \leq 2k;$$

$$2. \ \log b(k) \geq \log k + \frac{k-1}{2} \geq \frac{k}{2}.$$

Y se tiene el resultado identificando n con $b(k)$ y k con $2^{\delta(f)}$. □

6.2.2. Superposición en ACs

Hasta el momento se tienen cinco problemas compatibles con \preceq_i , a saber, PRED, CYCL, SINV, TINV y CINV. A continuación, definimos una superposición de éstos a modo de ejemplo.

Ejemplo 6.2.2. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Para $u \in A^+$, $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i < n$, se define la relación:

$$(\text{SINV}_{\Phi}^u \uplus \text{TINV}_{\Phi}^u)|_n^i \subseteq A^i \times A^{n-i} \times (\{0_{\text{SINV}}, 1_{\text{SINV}}\} \times \{1\} \cup \{0_{\text{TINV}}, 1_{\text{TINV}}\} \times \{2\}),$$

donde $(x, y, (z, j)) \in (\text{SINV}_{\Phi}^u \uplus \text{TINV}_{\Phi}^u)|_n^i \iff f_j(x, y) = z$, con $f_1 = \text{SINV}_{\Phi}^u$ y $f_2 = \text{TINV}_{\Phi}^u$. Nótese que encontrar un par (z, j) que satisfaga la relación para x e y dados, es equivalente a responder alguna pregunta sobre la dinámica del AC, dentro del conjunto $\{\text{SINV}_{\Phi}^u, \text{TINV}_{\Phi}^u\}$. En cierto sentido, esto es una relajación de los problemas SINV_{Φ}^u y TINV_{Φ}^u por separado, bastando que se conteste sobre una entrada dada alguno de éstos.

Una pregunta natural es si existen ACs en donde efectivamente la relación anterior sea más simple que ambas funciones por separado. A propósito de esto, el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2.3. Considerar el AC JustGliders. Se sabe que para tal AC, por el Ejemplo 5.1.2, se tiene:

$$\forall u \in A^+ : \text{CC}(\text{SINV}_{\text{JG}}^u) \in O(\log n),$$

y que existen patrones periódicos en donde la cota es óptima. De manera muy similar al caso de Invasión espacial, también se puede probar que:

$$\forall u \in A^+ : \text{CC}(\text{TINV}_{\text{JG}}^u) \in O(\log n),$$

y que también existen patrones periódicos en donde la cota es óptima. A continuación se verá que para todo $u \in A^+$ se tiene un protocolo de orden $O(1)$ para la relación $\text{SINV}_{\text{JG}}^u \uplus \text{TINV}_{\text{JG}}^u$, es decir, si se superponen los problemas el costo de los protocolos se reduce de manera importante.

Para esto, considerar el lenguaje libre de contexto definido en el Ejemplo 5.1.2:

$$L = \{u \in \{\rightarrow, \leftarrow, \square\}^+ : \#_{\rightarrow}(u) = \#_{\leftarrow}(u)\}$$

Ahora, el protocolo es el siguiente:

- $u \notin L$. $\text{SINV}_{\text{JG}}^u(x, y) = 0$, pues hay infinitos gliders en un sólo sentido y toda perturbación es de un tamaño proporcional a la entrada.
- $u \in L$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la situación es como la de la Figura 5.1.6. Así, si Alice tiene un prefijo $x_p \sqsubset x$ tal que $k + \#_{\rightarrow}(x_p) < \#_{\leftarrow}(x_p)$, o Bob tiene un sufijo $y_s \sqsubset y$ tal que $\#_{\rightarrow}(y_s) > \#_{\leftarrow}(y_s) + k$, entonces $\text{TINV}_{\text{JG}}^u(x, y) = 1$. Si no, $\text{SINV}_{\text{JG}}^u(x, y) = 0$, pues para que haya invasión las dos barreras deben ser traspasadas y no puede ser el caso.

Nota. Un protocolo parecido se puede aplicar al AC elemental número 184, cuyo funcionamiento es muy similar al de JustGliders.

Generalizando la estrategia anterior, se define lo siguiente.

Definición 6.2.5 (Overlapping). Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$. Dados $a, k \in \mathbb{N}$ y $u \in A^+$, se define la relación $\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,k}$ como:

$$\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,k} := \text{PRED}_{\Phi}^a \uplus \text{SINV}_{\Phi}^u \uplus \text{TINV}_{\Phi}^u \uplus \text{CINV}_{\Phi}^u \uplus \text{CYCL}_{\Phi}^k. \quad (6.2.10)$$

Proposición 6.2.4. Sean $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{AC}$ tales que $\Phi_1 \preceq_i \Phi_2$ sin utilizar el shift. Entonces, para todo $a_1, k_0 \in \mathbb{N}$, para todo $u \in A_1^+$, existen $a_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \geq k_0$ y $v \in A_2^+$ tales que:

$$\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{a_1,u,k_1}) \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi_2}^{a_2,v,k_2}). \quad (6.2.11)$$

Demostración. De manera similar a la Sección 5.2, se procede a establecer la compatibilidad de cada acción por separado.

- **Sub-autómata.** Si $\Phi_1 \sqsubseteq \Phi_2$, un protocolo para Φ_2 será directamente un protocolo para Φ_1 , bajo identificación de alfabetos.
- **Potencia.** Sea $m \in \mathbb{N}$. Luego, se tiene que:

$$\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,k})(mn) \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^{a,\gamma_m(u^m),k})(n),$$

y:

$$\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^{a_1,u,k})(|u|n) \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi_{\langle m,1,0 \rangle}}^{a_1,\gamma_m^{-1}(u),k})(|u|mn),$$

de manera muy similar a la demostración de los problemas de invasión. Como siempre se puede cambiar el radio de la representación de Φ (pues éste sólo es relevante para el problema PRED), y agrupar o desagrupar la palabra que se obtiene como resultado, el tomar potencia no afecta al problema de Predicción parametrizado.

- **Iteración.** Sea $t \in \mathbb{N}$. Luego, se cumple que⁵:

$$\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,kt})(n) \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi^t}^{a,u,k})(n),$$

y:

$$\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi^t}^{a,u,k})(n) \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{at,u,kt})(n).$$

Luego, dados parámetros $\langle m_1, t_1, 0 \rangle, \langle m_2, t_2, 0 \rangle$, $a, k_0 \in \mathbb{N}$ y $u \in A_1^+$, tomando $k_1 = t_1 k_0$, $k_2 = t_2 k_0$ y $v = \gamma_{m_2}^{-1} \circ \iota \circ \gamma_{m_1}(u^{m_1})$, se obtiene el resultado. \square

Nota. Viendo la demostración anterior, adquiere sentido el hecho de incorporar el problema de Predicción parametrizado pues, dada la naturaleza de los protocolos en una superposición, no es posible asegurar que siempre se puedan acoplar los resultados como en el problema de Predicción original era requerido, por el hecho de que un protocolo en una superposición brinda respuestas a variados problemas según el caso. Además, dados dos radios distintos, los problemas de Predicción parametrizados son equivalentes sin necesidad de acoplar protocolos.

De manera análoga a la sección anterior, se define la clase de «ACs difíciles» para OVRL.

⁵Notar que en segunda dirección el problema de Predicción parametrizado requiere cambiar la altura a la que se define, pero en la primera no, pues se puede iterar el resultado.

Definición 6.2.6. Se define la clase de ACs difíciles para OVRL como:

$$H(\text{OVRL}) = \left\{ \Phi \in \mathcal{AC} : \exists a, k \in \mathbb{N}, \exists u \in A^+, n \prec \text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,k}) \right\}. \quad (6.2.12)$$

Una observación básica pero fundamental es que, dados dos ACs Φ_1 y Φ_2 , siempre se cumple que:

$$\Phi_i \sqsubseteq \Phi_1 \oplus \Phi_2, \quad (6.2.13)$$

para $i = 1, 2$. Utilizando esta propiedad, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.2.5.

$$H(\text{OVRL}) \subsetneq H(\text{PRED}) \cap H(\text{SINV}) \cap H(\text{TINV}) \cap H(\text{CINV}) \cap H(\text{CYCL}). \quad (6.2.14)$$

Demostración. Considerando la Proposición 6.2.1, claramente se tiene que:

$$H(\text{OVRL}) \subseteq H(\text{PRED}) \cap H(\text{SINV}) \cap H(\text{TINV}) \cap H(\text{CINV}) \cap H(\text{CYCL}).$$

Para ver que la inclusión es estricta, considerar ACs Φ_i , con $i \in \{1, \dots, 5\}$, tales que:

1. $\Phi_1 \in H(\text{PRED}) \setminus H(\text{CYCL})$;
2. $\Phi_2 \in H(\text{CYCL}) \setminus H(\text{SINV})$;
3. $\Phi_3 \in H(\text{SINV}) \setminus H(\text{CINV})$;
4. $\Phi_4 \in H(\text{CINV}) \setminus H(\text{TINV})$;
5. $\Phi_5 \in H(\text{TINV}) \setminus H(\text{PRED})$.

Luego, se afirma que $\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_3 \oplus \Phi_4 \oplus \Phi_5$ cumple con pertenecer a la intersección pero no pertenece a los problemas difíciles para OVRL. En efecto, para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$, se cumple que:

$$\Phi_i \sqsubseteq \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \Phi_3 \oplus \Phi_4 \oplus \Phi_5.$$

Luego, como el i -ésimo AC es difícil para el i -ésimo problema, por transitividad Φ es difícil para todos los problemas. Resta ahora ver que $\Phi \notin H(\text{OVRL})$. En efecto, dada la condición de independencia entre problemas, si la entrada posee estados exclusivamente de un sólo AC, entonces basta con considerar el AC de tales estados y utilizar el protocolo para el problema donde éste es simple. Si no, es decir, si hay estados de más de un AC, la dinámica se vuelve trivial (todo se invade) y en particular, la complejidad del problema de Invasión espacial es de orden constante. \square

Uno de los resultados más importante obtenidos es el siguiente, que relaciona de manera definitiva los tres problemas de invasión —lo cual aparecía como natural de realizar— y los otros dos. Su importancia reside en que logra unificar de manera precisa los cinco problemas para dar lugar a una herramienta más poderosa que las cinco juntas por separado y que, en particular, demuestra que en un AC intrínsecamente universal la comunicación es máxima a la hora de querer predecir cualquier aspecto invasivo en la dinámica de una perturbación de un patrón espacialmente periódico: permanencia en el tiempo, propagación por el espacio, etc.

Proposición 6.2.6.

$$H(\text{OVRL}) \neq \emptyset. \tag{6.2.15}$$

Demostración. El principal desafío es lograr diseñar un AC en donde sea simultáneamente difícil predecir los tres tipos de invasiones, esto es, Invasión espacial, Invasión temporal e Invasión controlada. La dificultad proviene del hecho de que estos tres problemas están estrechamente relacionados e instancias difíciles para dos de ellos por lo general resultan ser fáciles para el tercero. Hasta ahora, el esquema general de construcciones que ha sido utilizado es la implementación en un AC de un test de alguna función conocida de tal manera que la dinámica se comporte según el resultado de éste. Así, según el resultado del test, las dinámicas se agrupan en dos —por ejemplo, hay invasión espacial o no hay invasión temporal—, dejando trivial la respuesta al problema no considerado —por ejemplo, luego no hay invasión controlada.

Para lograr sortear este problema, considerar $\Phi_1 \in \mathcal{AC}$ con conjunto de estados:

$$A_1 = \left\{ \vec{0}, \vec{1}, \overleftarrow{0}, \overleftarrow{1}, \top, *, \boxtimes, s \right\}.$$

La idea subyacente será que en las instancias difíciles de Φ_1 se simula un test de igualdad (=) pero, a diferencia de todas las construcciones anteriores, además se simula un test de mayor (>) y de menor (<).

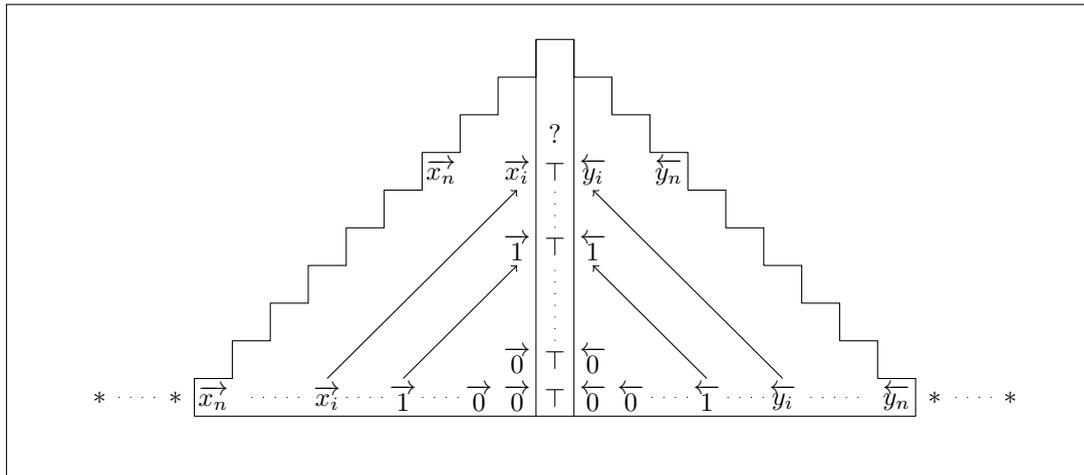


Figura 6.2.3: Ejemplo de test.

Se dota al AC de las siguientes reglas locales:

$\vec{0}$	\top	$\overleftarrow{0}$	$\vec{0}$	s	$\overleftarrow{1}$	$\vec{1}$	\boxtimes	$\overleftarrow{0}$	$\vec{1}$	\top	$\overleftarrow{1}$
$\vec{0}$	\top	$\overleftarrow{0}$	$\vec{0}$	\top	$\overleftarrow{1}$	$\vec{1}$	\top	$\overleftarrow{0}$	$\vec{1}$	\top	$\overleftarrow{1}$

Cuadro 6.2.1: Resultados del test local.

Las reglas anteriores garantizan que el AC se comporte de manera distinta (en cuanto al tipo de invasiones) de acuerdo a los valores de x e y cuando éstos son interpretados en notación binaria. Así, en una instancia que conforme un test válido (como en la Figura 6.2.3), se tendrán tres casos y sus respectivas consecuencias:

$ \begin{array}{cccccccccccc} * & * & * & & * & \boxtimes & * & & s & s & s \\ * & * & \top & * & * & * & * & \boxtimes & * & * & * & * & s & * & * \end{array} $
--

Cuadro 6.2.2: Comportamiento de cada resultado.

- $x = y$: no hay invasión temporal;
- $x < y$: hay invasión espacial;
- $x > y$: hay invasión controlada.

Así, si $u = *$, y se considera una perturbación inicial del tipo:

$$\boxed{\vec{x}_n \quad \cdots \quad \vec{x}_1 \quad \top \quad \overleftarrow{y}_1 \quad \cdots \quad \overleftarrow{y}_n}$$

Cuadro 6.2.3: Configuración inicial con instancias de alta complejidad.

se tiene la siguiente submatriz de comunicación:

	$0 \cdots 00$	$0 \cdots 01$	\cdots	$x_1 \cdots x_n$	\cdots	$y_1 \cdots y_n$	\cdots	$1 \cdots 11$
$0 \cdots 00$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 1)$	\cdots	$(1, 0, 1)$	\cdots	$(1, 0, 1)$	\cdots	$(1, 0, 1)$
$0 \cdots 01$	$(1, 1, 0)$	$(0, 0, 0)$	\cdots	$(1, 0, 1)$	\cdots	$(1, 0, 1)$	\cdots	$(1, 0, 1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots		\vdots		\vdots
$x_1 \cdots x_n$	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$	\cdots	$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$	\cdots	$(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$	\cdots	$(1, 0, 1)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\ddots	\vdots		\vdots
$y_1 \cdots y_n$	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$	\cdots	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$	\cdots	$(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$	\cdots	$(1, 0, 1)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\ddots	\vdots
$1 \cdots 11$	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$	\cdots	$(1, 1, 0)$	\cdots	$(1, 1, 0)$	\cdots	$(0, 0, 0)$

Cuadro 6.2.4: Submatriz de comunicación.

donde, por claridad:

$$(a, b, c) \iff \begin{cases} \text{TINV}_{\Phi_1}^* = a \\ \text{CINV}_{\Phi_1}^* = b \\ \text{SINV}_{\Phi_1}^* = c \end{cases}$$

Luego, considerando el fooling set:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{x}_n \cdots \vec{x}_1 \top, \overleftarrow{x}_1 \cdots \overleftarrow{x}_n) : x_1 \cdots x_n \in \{0, 1\}^n\},$$

se tiene que en un rectángulo monocromático no pueden haber dos elementos de éste contenidos en él. Para demostrar esto (observar el Cuadro 6.2.4), notar que dos elementos de la diagonal de la submatriz inducen un cuadrado de la forma:

Restringido a cualquiera de los tres problemas, en ningún caso es monocromático. Como $|\mathcal{F}| = 2^n$, por la Proposición 5.1.7, se tiene que necesariamente la complejidad comunicacional es lineal. Luego, existe un AC tal que la superposición de los tres problemas de invasión es

$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 1)$
$(1, 1, 0)$	$(0, 0, 0)$

Cuadro 6.2.5: Cuadrado inducido por dos elementos de la diagonal de la submatriz.

difícil. Notar además que el AC construido y el mismo fooling set demuestran que el problema de Predicción es difícil, pues el valor de la columna central define la relación entre las cantidades representadas a ambos lados.

Ahora, para demostrar el enunciado principal, es necesario hacer un ajuste al AC anterior. Considerar que en lugar de haber invasión con un estado s como antes, esta vez se considera una señal \leftarrow que se propaga hacia la izquierda borrando (es decir, dejando el estado $*$) los estados del tipo \overleftarrow{x} y un cambio del muro \top al muro \perp .

$\overrightarrow{0}$	\top	$\overleftarrow{0}$	\leftarrow	\perp	$\overleftarrow{1}$	$\overrightarrow{1}$	\bowtie	$\overleftarrow{0}$	\top	$\overleftarrow{1}$
$\overrightarrow{0}$	\top	$\overleftarrow{0}$	\leftarrow	\perp	$\overleftarrow{1}$	$\overrightarrow{1}$	\top	$\overleftarrow{0}$	\top	$\overleftarrow{1}$

Cuadro 6.2.6: Redefinición de reglas.

Así, la condición de invasión espacial se mantiene en el caso $x < y$. Por otro lado, viendo la entrada como una instancia de $CYCL^k$, tenemos que el ciclo es de largo $\Omega(n)$, suponiendo que el glider rebota en el muro \perp , transformándose en \rightarrow , si $x < y$ y de largo 1, en caso contrario.

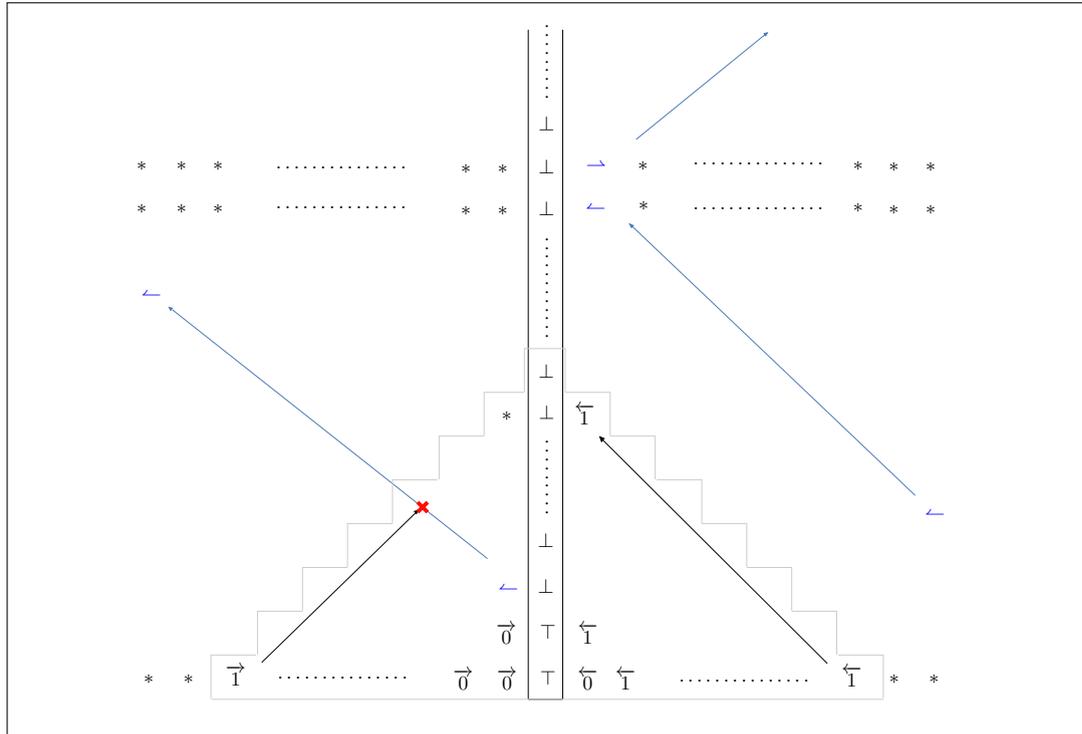


Figura 6.2.4: Caso de invasión espacial y ciclo con largo $\Omega(n)$.

□

Corolario. Sea $\Psi \in \mathcal{AC}$ intrínsecamente \preceq_i -universal. Entonces $\Psi \in \mathsf{H}(\mathsf{OVRL})$.

Demostración. Basta con notar que el AC de la Proposición 6.2.6 tiene complejidad lineal para toda transformación sintáctica (es fácil ver que agrupando, iterando o trasladando sirve el mismo fooling set con los ajustes necesarios). Luego, por la Proposición 6.2.4 y el Lema 3.2.3, se tiene el resultado. \square

6.3. Condiciones necesarias para la universalidad

En esta investigación, para estudiar la compatibilidad con las simulaciones, se recurrió a la relación entre funciones \prec . La clase de equivalencia $[n]_{\prec}$ resulta contener estrictamente a $\Theta(n)$ y, sin embargo, los resultados anteriores concluyen que la complejidad para cualquier problema en un AC intrínsecamente universal debe pertenecer $[n]_{\prec}$. Recordemos que tal relación establece que $f_1 \prec f_2$ si $f_1(ax) \leq df_2(b(x+c))$ para ciertos parámetros a, b, c, d y $x > x_0$, es decir, se comparan las complejidades con respecto a entradas de tamaño correspondiente a progresiones aritméticas y no todos a partir de un punto, como sucede con la notación O . Así, se abre la pregunta de si la condición sobre la complejidad para que un AC sea intrínsecamente universal se restringe a ciertas progresiones aritméticas o para todo tamaño a partir de un punto. La respuesta varía según el caso, lo que da lugar a una curiosa propiedad de estas condiciones.

Proposición 6.3.1. Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ tal que $\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi}) \in [n]_{\prec}$. Entonces, $\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi}) \in \Theta(n)$.

Demostración. Considerando la representación canónica de Φ , se tiene que, para todo $k \geq 2r + 1$, existe $C_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n) \leq C_k \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n - k),$$

para todo $n \geq k$. Esto pues, siempre se pueden componer C_k protocolos correspondientes a entradas de tamaño $(n - k)$ para determinar la respuesta a una entrada de tamaño n . Luego, si $\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi}) \in [n]_{\prec}$, se tiene que $\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi}) \in \Theta(n)$, pues, dada la progresión aritmética en la que $\mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})$ es lineal, las instancias de tamaños que no se realizan en la progresión están relacionadas con las que sí se realizan por una constante, extendiendo la linealidad a todos los tamaños suficientemente grandes. En efecto, sin pérdida de generalidad y ahorrándose constantes innecesarias, se puede suponer que:

$$n \leq \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(bn),$$

para alguna constante $b \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\frac{n}{b} \leq \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $b|n$. Tomando $\alpha = b \max_{k=0,1,\dots,b} C_k$, con $C_0 = 1$, se tiene que:

$$n \leq b \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n) \leq \alpha \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n - k),$$

para todo $k \leq b$. En consecuencia:

$$n - k \leq n \leq \alpha \mathsf{CC}(\mathsf{PRED}_{\Phi})(n - k),$$

y se tiene el resultado. \square

Proposición 6.3.2. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ y $u \in A^+$ tal que $\text{CC}(\text{SINV}_\Phi) \in [n]_{\prec}$ (resp. $\text{CC}(\text{TINV}_\Phi) \in [n]_{\prec}$, $\text{CC}(\text{CINV}_\Phi) \in [n]_{\prec}$). Entonces, $\text{CC}(\text{SINV}_\Phi) \in \Theta(n)$ (resp. $\text{CC}(\text{TINV}_\Phi) \in \Theta(n)$, $\text{CC}(\text{CINV}_\Phi) \in \Theta(n)$).*

Demostración. Notar que la función $\text{CC}(\text{SINV}_\Phi)$ es creciente, esto es:

$$\text{CC}(\text{SINV}_\Phi)(n) \leq \text{CC}(\text{SINV}_\Phi)(n+1).$$

Esto se tiene por el hecho de que cualquier instancia de tamaño n se puede considerar como una de tamaño $n+1$ tomando como símbolo extra parte del patrón periódico. Luego, el que sea creciente, acotada por n y lineal en una progresión aritmética, basta para probar que $\text{CC}(\text{SINV}_\Phi) \in \Theta(n)$. El resultado es análogo para los otros dos problemas. \square

Corolario. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ intrínsecamente universal. Entonces $\text{CC}(\text{PRED}_\Phi) \in \Theta(n)$ y existe $\bar{u} \in A^+$ tal que $\text{CC}(\text{SINV}_{\bar{\Phi}}), \text{CC}(\text{TINV}_{\bar{\Phi}}), \text{CC}(\text{CINV}_{\bar{\Phi}}) \in \Theta(n)$.*

Demostración. Se tiene directamente de las proposiciones anteriores y las condiciones de la Sección 5.2. Para la uniformidad del patrón u en los problemas —esto es, para que exista un patrón común a todos los problemas de invasión—, basta con considerar el AC de la demostración de la Proposición 6.2.6. \square

Proposición 6.3.3. *Existe $\Phi \in \mathcal{AC}$ intrínsecamente universal tal que:*

$$\text{CC}(\text{CYCL}_\Phi^k) \in [n]_{\prec} \setminus \Theta(n),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\Psi \in \mathcal{AC}$ intrínsecamente universal cualquiera. Considerar ahora el AC Φ que funciona como Ψ pero posee una segunda componente en donde se alternan 0s y 1s y con un estado invasivo que se propaga y borra ambas componentes si no se cumple tal alternancia. Tal AC también es intrínsecamente universal y, por el Corolario 5.2.2, se tiene que $\text{CC}(\text{CYCL}_\Phi^k) \in [n]_{\prec}$. Sin embargo, si la entrada es de tamaño impar, siempre se produce un error en la segunda componente, y luego el problema de Largo de ciclo es trivial. Así, como hay una sucesión de entradas triviales, $\text{CC}(\text{CYCL}_\Phi^k) \in [n]_{\prec} \setminus \Theta(n)$. \square

Para finalizar, se muestra el comportamiento de ciertas clases de ACs con respecto a los problemas aquí estudiados y, de paso, se desechan como intrínsecamente universales con argumentos puramente comunicacionales.

Proposición 6.3.4. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ equicontinuo. Entonces:*

$$\text{CC}(\text{PRED}_\Phi) \in O(1). \tag{6.3.1}$$

Demostración. Recordando la definición de equicontinuidad,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X : d(x, y) < \delta \implies \forall t \geq 0, d(\Phi^t(x), \Phi^t(y)) < \varepsilon,$$

y tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que existe un intervalo $[-i^*, i^*]$ (parametrizado por δ y la definición de d) tal que la evolución de la columna central de PRED sólo depende de los estados en éste. Así, para entradas arbitrariamente grandes, el valor de PRED depende de una cantidad constante de estados y se tiene el resultado. \square

Proposición 6.3.5. *Sea Φ un AC lineal. Entonces:*

$$\text{CC}(\text{PRED}_\Phi) \in O(1). \quad (6.3.2)$$

Demostración. Recordando la Definición 2.3.7, existe un operador $+$ tal que $(A, +)$ es un semigrupo con elemento neutro $e \in A$ y tal que para todo par de configuraciones x e y se tiene que $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Notar que de esto se desprende que $\Phi^t(x_1 + x_2) = \Phi^t(x_1) + \Phi^t(x_2)$, para todo $t > 0$. Luego, el protocolo es el siguiente: en la entrada (x, y) , Alice supone que Bob posee la entrada $e^{|y|}$ y calcula $\text{PRED}_\Phi(xe^{|y|})$; análogamente, Bob supone que Alice posee la entrada $e^{|x|}$ y calcula $\text{PRED}_\Phi(e^{|x|}y)$. Finalmente, compartiendo sus resultados, pueden estimar el valor, pues:

$$\text{PRED}_\Phi(xy) = \text{PRED}_\Phi(xe^{|y|}) + \text{PRED}_\Phi(e^{|x|}y).$$

□

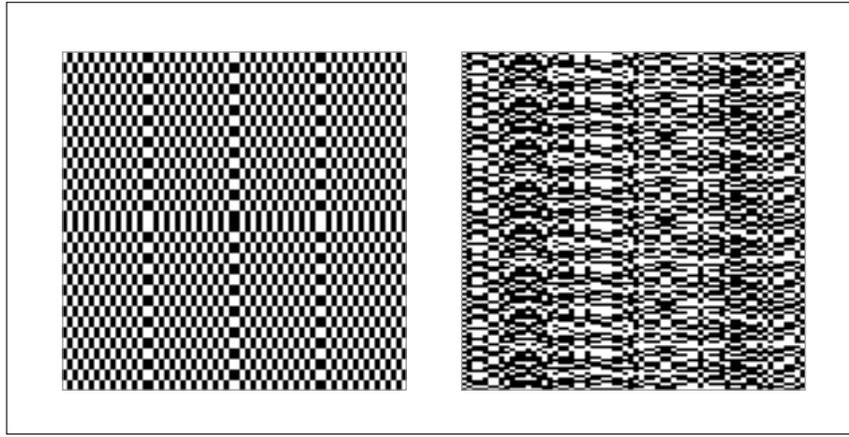


Figura 6.3.1: A la izquierda, la matriz de comunicación del AC elemental número 90, lineal, para $n = 7$. A la derecha, la matriz de comunicación del AC elemental número 110, para el mismo n .

Proposición 6.3.6. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ reversible. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{CYCL}_\Phi^k) \in O(1). \quad (6.3.3)$$

Demostración. Para un AC reversible, las órbitas de configuraciones espacialmente periódicas son temporalmente periódicas. Más precisamente, para cualquier configuración espacialmente periódica x , el largo del ciclo temporal partiendo de x es menor que k si y sólo si:

$$\exists t \leq k : \Phi^t(x) = x.$$

Luego, el siguiente protocolo de comunicación —de costo constante— resuelve el problema $\text{CYCL}_\Phi^k|_n$ en el input x :

- Alice y Bob conocen la evolución de una parte de la configuración durante los primeros k pasos de tal manera que pueden comunicar la lista de tiempos $t \leq k$ para los cuales la parte de configuración que conocen vuelve a ser idéntica a la parte correspondiente a c .

- La parte de configuración que ni Alice ni Bob pueden conocer durante los primeros k pasos no depende de n ; luego, después de una cantidad constante de comunicación, Alice y Bob pueden tener toda la información para saber la evolución de esta parte de la configuración y producir la lista de los $t \leq k$ tales que ésta parte de la configuración es idéntica a la correspondiente a c .
- Finalmente, Alice y Bob pueden responder simplemente chequeando que las listas de tiempos t generadas en los pasos anteriores tienen intersección no vacía.

□

Proposición 6.3.7. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ positivamente expansivo. Entonces, para todo $u \in A^+$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{CINV}_{\Phi}^u) = 0. \quad (6.3.4)$$

Demostración. Sea $u \in A^+$ y sea una entrada $x \in A^n$ tal que $p_u(x) \neq p_u$. Luego, por un resultado de P. Kůrka [22], existe una constante α tal que $\delta_r \geq \alpha t$ y $\delta_l \leq -\alpha t$. Luego, hay invasión espacial si y sólo si $p_u(x) \neq p_u$. Así, nunca se da lugar a invasión controlada, pues si $p_u(x) = p_u$ no puede haber invasión temporal, y Alice y Bob no deben intercambiar nada de información. □

Proposición 6.3.8. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ nilpotente en las configuraciones periódicas. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{CYCL}_{\Phi}^k) = 0. \quad (6.3.5)$$

Demostración. Toda configuración periódica convergerá a una misma configuración ${}^{\infty}s^{\infty}$ para algún estado s . Luego, todo ciclo será de largo 1. □

Proposición 6.3.9. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ sobreyectivo. Entonces, para todo $u \in A^+$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{TINV}_{\Phi}^u) = 1. \quad (6.3.6)$$

Demostración. Por la Proposición 2.3.3, Φ es sobreyectivo si y sólo si:

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, 0 < |\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}| < +\infty \implies \Phi(x) \neq \Phi(y).$$

lo cual implica que:

$$p_u \neq p_u(x) \implies \Phi^t(p_u) \neq \Phi^t(p_u(x)), \forall t > 0,$$

pues $\forall t > 0, 0 < |\{i \in \mathbb{Z} : \Phi^t(p_u)_i \neq \Phi^t(p_u(x))_i\}| < +\infty$.

Luego, un protocolo para TINV^u consiste simplemente en que Alice y Bob comparen sus partes con la configuración p_u . Si hay alguna diferencia (que será finita), ésta prevalecerá todo el tiempo por lo expuesto anteriormente. □

Proposición 6.3.10. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ con conjunto límite SFT. Entonces, para todo $u \in A^+$, se tiene que:*

$$\text{CC}(\text{TINV}_{\Phi}^u) \in O(1). \quad (6.3.7)$$

Demostración. Sea $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(\Phi) = \Phi^{t_0}(A^{\mathbb{Z}})$. Luego, $\Phi : \omega(\Phi) \rightarrow \omega(\Phi)$ es un sliding code block sobreyectivo sobre $\omega(\Phi)$ (subshift de tipo finito) y, de manera análoga al caso de ACs sobreyectivos [26], todo par de puntos $x, y \in \omega(\Phi)$, $x \neq y$, con finitas diferencias, cumplen que $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Así, el protocolo es el siguiente: Alice y Bob iteran lo que tienen t_0 veces (intercambiando una cantidad de bits proporcionales a $2rt_0$), luego, tienen la certeza de que $\Phi^{t_0}(\infty u^\infty), \Phi^{t_0}(\infty uxyu^\infty) \in \omega(\Phi)$. Finalmente, hay invasión temporal si y sólo si las configuraciones iteradas difieren, lo cual se puede verificar con cantidad constante de información. \square

La condición sobre el conjunto límite de ser SFT en la proposición anterior, al parecer no puede ser relajada. Por ejemplo, en [6] se discute y se muestran contraejemplos de ACs restringidos a espacios de shift sóficos que resultan ser sobreyectivos pero no *preinyectivos* (esto es, que colapsan configuraciones con finitas diferencias), dando pistas sobre la cuestión de si tal cosa es posible en el conjunto límite de un AC.

Corolario. *Sea $\Phi \in \mathcal{AC}$ en alguna de las siguientes clases: nilpotentes; nilpotentes en las configuraciones periódicas; lineales; positivamente expansivos; reversibles; abiertos; cerrados; sobreyectivos; conjunto límite SFT. Entonces, para todo $a, k \in \mathbb{N}$ y $u \in A^+$, $\text{CC}(\text{OVRL}_{\Phi}^{a,u,k}) \in O(1)$. En consecuencia, ninguna de estas clases soporta la universalidad intrínseca.*

Capítulo 7

Consideraciones finales

*“Leave him here to his fate—it is getting so late!”
The Bellman exclaimed in a fright.
“We have lost half the day. Any further delay,
And we sha’nt catch a Snark before night!”*

Fit the Seventh - THE BANKER’S FATE

7.1. Conclusiones

Para finalizar, conviene hacer una retrospectiva de lo ya expuesto con el fin de brindar un panorama acerca de los resultados obtenidos.

Como se discutió en el Capítulo 3, se enriqueció la estructura de los preórdenes demostrando la existencia de nuevos ideales. Para esto, se recurrió a herramientas de dinámica simbólica que escaparon un poco del contexto general de la memoria, por lo cual parte importante de la demostración se incluyó en Anexos (ver Anexo A). Así, se adicionaron a las clases que se conocían como ideales, los conjuntos de autómatas celulares unidimensionales cerrados y abiertos, cosa que se supuso de importancia abordar para atacar y dar luces sobre el problema abierto acerca de la principalidad del ideal de ACs sobrejectivos [10].

Por otra parte, en el Capítulo 4 y en el Capítulo 5, se introdujeron y estudiaron nuevos problemas (con respecto al artículo *Communication Complexity and Intrinsic Universality in Cellular Automata* [14]) con buenas propiedades, a saber, Invasión temporal e Invasión controlada. Este último surgido de la idea de combinar los problemas que ya se tenían con conectores lógicos, estrategia que aún puede ser explotada para estudiar las conexiones entre los problemas ya existentes. Además, ambos resultan ser completos para una clase conocida —tal como los otros tres problemas que se conocían con anterioridad—, brindando un nexo con la complejidad clásica.

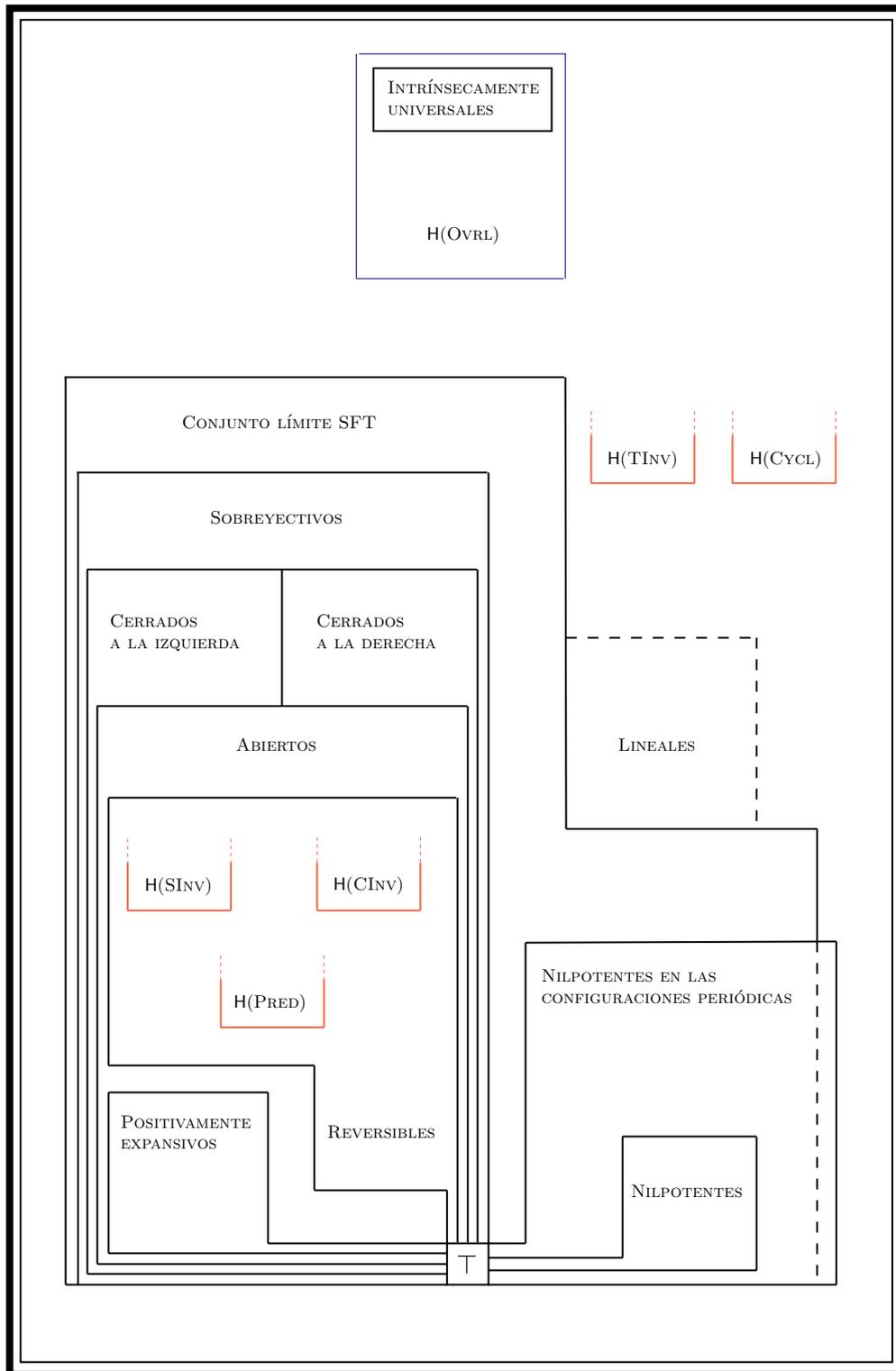
Por último, es preciso remarcar que no se tiene registro de que antes se haya expuesto sobre la problemática de la superposición en el área de la complejidad comunicacional. En el Capítulo 6 se le definió y se mostraron cotas en función de la complejidad de los problemas originales, siendo fundamental el Lema 6.2.2 como avance en este sentido y la relación de éste con las

cotas tipo Ramsey para grafos bipartitos. Además, y como punto fuerte, se le dio una aplicación que generaliza y unifica las técnicas de comunicación que se tenían hasta el momento para probar no universalidad, validándole como modelo y creando un nuevo modo de abordar y crear protocolos, resultando ser, casi por definición, la herramienta más eficaz hasta la fecha para probar no universalidad, cumpliendo de manera satisfactoria —mas no definitiva— la problemática planteada por Nicolas Ollinger [33, 34], entre otros, de generar más y mejores herramientas con tal propósito.

7.2. Trabajo futuro

A modo de lista, se enuncian a continuación algunas direcciones sobre las cuales puede continuar esta investigación.

1. Establecer todas las relaciones de independencia restantes.
2. Estudiar otros problemas surgidos a partir de conectar lógicamente los problemas que ya se tienen, al modo de Invasión controlada.
3. Seguir desechando ACs elementales como intrínsecamente universales (ver Anexo B).
4. Encontrar ACs con complejidad $\Theta((\log(n))^k)$, con $k > 1$, para alguno de los problemas (o algún AC con complejidad de orden distinto de n , $\log n$ y 1).
5. Encontrar un AC elemental con complejidad $\Theta(n)$ para algún problema (ver Anexo C).
6. Explorar cómo extender las nociones de complejidad comunicacional a autómatas celulares multidimensionales.
7. Extender estas ideas a otros modelos que soporten la noción de universalidad intrínseca, tales como los Tiles de Wang, Self-assembling, etc. (ver [11]).
8. Entender la relación entre las clases que son desechadas de manera natural por problemas comunicacionales y las clases que conforman ideales.
9. Estudiar el conjunto de ACs estables y la propiedad de ideal en éste. A propósito de esto, ¿existe algún AC sobreyectivo y no preinyectivo restringido a su conjunto límite?



Inclusiones de clases en el preorden \preceq_i .

Bibliografía

- [1] J. ALBERT Y K. ČULIK II. A simple universal cellular automaton and its one-way and totalistic version. *Complex Systems* **1**, 1–16 (1987).
- [2] S. AMOROSO Y Y. N. PATT. Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. *Journal of Computer and System Sciences* **6**, 448–464 (1972).
- [3] E. R. BANKS. Universality in cellular automata. En “Eleventh Annual Symposium on Switching and Automata Theory”, Santa Monica, California (1970). IEEE.
- [4] R. BRICEÑO Y P.-E. MEUNIER. The structure of communication problems in cellular automata (prepublicación).
- [5] R. BRICEÑO E I. RAPAPORT. Letting Alice and Bob choose which problem to solve: implications to the study of cellular automata (prepublicación).
- [6] T. CECCHERINI-SILBERSTEIN, F. FIORENZI Y F. SCARABOTTI. “The Garden of Eden Theorem for cellular automata and for symbolic dynamical systems.”, páginas 73–108. Berlin: de Gruyter (2004).
- [7] D. CONLON. A new upper bound for the bipartite Ramsey problem. *J. Graph Theory* **58**, 351–356 (2008).
- [8] M. COOK. Universality in elementary cellular automata. *Complex Systems* **15**, 1–40 (2004).
- [9] M. DELORME, J. MAZOYER, N. OLLINGER Y G. THEYSSIER. Bulking I: an abstract theory of bulking. HAL:hal-00451732 (2010).
- [10] M. DELORME, J. MAZOYER, N. OLLINGER Y G. THEYSSIER. Bulking II: classifications of cellular automata. HAL:hal-00451729. (2010).
- [11] D. DOTY, J. H. LUTZ, M. J. PATITZ, S. M. SUMMERS Y D. WOODS. Intrinsic universality in self-assembly. En “STACS”, páginas 275–286 (2010).
- [12] B. DURAND Y Z. RÓKA. “Cellular Automata: a Parallel Model”, tomo 460 de “Mathematics and its Applications.”, capítulo The game of life: universality revisited, páginas 51–74. Kluwer Academic Publishers (1999).
- [13] E. GOLES, A. MAASS Y S. MARTÍNEZ. On the limit set of some universal cellular automata. *Theoretical Computer Science* **110**(1), 53 (1993).

- [14] E. GOLES, P.-E. MEUNIER, I. RAPAPORT Y G. THEYSSIER. Communication complexity and intrinsic universality in cellular automata. *CoRR* **abs/0912.1777** (2009).
- [15] G. A. HEDLUND. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems. *Mathematical Systems Theory* **3**(4), 320–375 (1969).
- [16] J. HROMKOVIČ. “Communication complexity and parallel computing”. Springer (1997).
- [17] L. P. HURD. Recursive cellular automata invariant sets. *Complex Systems* **4**, 119–129 (1990).
- [18] K. ČULIK II, J. PACHL Y S. YU. On the limit sets of cellular automata. *SIAM J. Comput.* **18**, 831–842 (1989).
- [19] U. JUNG. On the existence of open and bi-continuing codes. *arXiv:0810.4632v2* (2009).
- [20] J. KARI. Reversibility and surjectivity problems of cellular automata. *Journal of Computer and System Sciences* **48**(1), 149–182 (1994).
- [21] J. KARI. Theory of cellular automata: a survey. *Theoretical Computer Science* **334** (2005).
- [22] P. KÚRKA. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **17**, 417–433 (1997).
- [23] P. KÚRKA. Topological dynamics of one-dimensional cellular automata. En “Encyclopedia of Complexity and Systems Science”. Springer (2008).
- [24] P. KÚRKA. Topological dynamics of cellular automata. En “Encyclopedia of Complexity and Systems Science”, páginas 9246–9268. Springer (2009).
- [25] E. KUSHILEVITZ Y N. NISAN. “Communication complexity”. Cambridge University Press (1997).
- [26] D. LIND Y B. MARCUS. “An introduction to symbolic dynamics and coding”. Cambridge University Press (1995).
- [27] K. LINDGREN Y M. G. NORDAHL. Universal computation in simple one-dimensional cellular automata. *Complex Systems* **4**, 299–318 (1990).
- [28] J. MAZOYER Y I. RAPAPORT. Inducing an order on cellular automata by a grouping operation. En “STACS”, páginas 116–127. LNCS (1998).
- [29] J. MAZOYER Y I. RAPAPORT. Global fixed point attractors of circular cellular automata and periodic tilings of the plane: undecidability results. *Discrete Mathematics* **199**, 103–122 (1999).
- [30] T. NEARY Y D. WOODS. P-completeness of cellular automaton Rule 110. En “In International Colloquium on Automata Languages and Programming (ICALP), volume 4051 of LNCS”, páginas 132–143. Springer (2006).
- [31] N. OLLINGER. “Automates cellulaires : structures”. Tesis Doctoral, École Normale Supérieure de Lyon (2002).

- [32] N. OLLINGER. The intrinsic universality problem of one-dimensional cellular automata. En “STACS”, páginas 632–641 (2003).
- [33] N. OLLINGER. Intrinsically universal cellular automata. En “CSP”, páginas 199–204 (2008).
- [34] N. OLLINGER Y G. RICHARD. Four states are enough! *Theoretical Computer Science* **412**(1–2), 22–32 (2011).
- [35] J. L. SCHIFF. “Cellular Automata: a discrete view of the world (Wiley Series in Discrete Mathematics & Optimization)”. John Wiley & Sons, Inc. (2007).
- [36] A. R. SMITH III. Simple computation-universal cellular spaces. *Journal of the Association for Computing Machinery* **18**, 339–353 (1971).
- [37] G. THEYSSIER. Captive cellular automata. En “Mathematical Foundations of Computer Science”, páginas 427–438 (2004).
- [38] G. THEYSSIER. “Automates cellulaires : un modèle de complexités”. Tesis Doctoral, École Normale Supérieure de Lyon (2005).
- [39] G. THEYSSIER. How common can be universality for cellular automata? En “STACS”, páginas 121–132 (2005).
- [40] J. VON NEUMANN. “Theory of self-reproducing automata”. University of Illinois Press, Urbana, Illinois (1966).
- [41] A. YAO. Some complexity questions related to distributed computing. En “STOC”, tomo 14, páginas 209–213 (1979).

Anexos

Anexo A

Cuociente de ACs cerrados

En este apartado se demuestra la propiedad sobre cuociente de ACs cerrados necesaria para la demostración del Teorema 3.3.12.

Lema A.1 ([26]). $\Phi \in \mathcal{AC}$ es cerrado a la derecha si y sólo si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x_{[-N,0]} = y_{[-N,0]} \wedge \Phi(x)_{[-N,N]} = \Phi(y)_{[-N,N]} \implies x_1 = y_1. \quad (\text{A.1})$$

La propiedad es análoga para el caso cerrado a la izquierda.

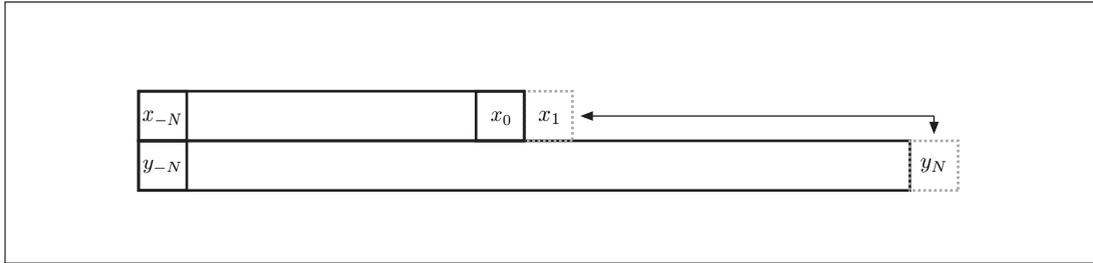


Figura A-1: Caracterización ACs cerrados

Definición A.1. Un sliding block code $\Phi : X \longrightarrow Y$ es un **1-block code** si puede ser inducido por un 1-block map con memoria $m = 0$ y anticipación $a = 0$, es decir, si existe $\phi : A(X) \longrightarrow A(Y)$ tal que:

$$\Phi(x)_i = \phi(x_i),$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in X$.

Definición A.2. Un subshift de tipo finito X se dice de M -paso si existe $F \subseteq A(X)^{M+1}$ tal que $X = X(F)$.

Definición A.3. Un sliding block code $\Phi : X \longrightarrow Y$ es una **conjugación de X a Y** , si éste es invertible. Dos espacios de shift se dicen **conjugados** si existe una conjugación entre ellos.

Proposición A.2. Sea $\Phi : X \longrightarrow Y$ un sliding block code. Entonces existe un espacio de shift \tilde{X} , una conjugación $\pi : X \longrightarrow \tilde{X}$ y un 1-block code $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \longrightarrow Y$ tal que $\tilde{\Phi} \circ \pi = \Phi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\cong]{\pi} & \tilde{X} \\ \Phi \downarrow & & \swarrow \tilde{\Phi} \\ Y & & \end{array} \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Supóngase que Φ posee memoria m , anticipación a y es inducido por un block map ϕ . Sea $\pi : X \rightarrow \mathcal{L}_{m+a+1}(X)^\mathbb{Z}$ tal que $\pi(x)_{[i]} = x_{[i-m, i+a]}$. Entonces $\pi = \sigma^{-m} \circ \beta_{m+n+1}$. Luego, $\tilde{X} = \pi(X) = X^{[m+n+1]}$ es un espacio de shift y, como σ y β_{m+n+1} son conjugaciones, π también lo es. Considerando $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi^{-1}$ se tiene el resultado. Por último, notar que $\tilde{\Phi}$ es un 1-block code. \square

Definición A.4. Sean S y T subshifts de tipo finito. Un 1-block code $\Phi : S \rightarrow T$ se dice **e-resolvente a la derecha** si, dados $b_1 b_2 \in \mathcal{L}(T)$ y $a_1 \in A(S)$ con $\phi(a_1) = b_1$, existe $a_2 \in A(S)$ con $\phi(a_2) = b_2$ y tal que $a_1 a_2 \in \mathcal{L}(S)$.

Definición A.5. Sean S, T subshifts de tipo finito. Un 1-block code $\phi : S \rightarrow T$ se dice **u-resolvente a la derecha** si, dados $b_1 b_2 \in \mathcal{L}(T)$ y $a_1 \in A(S)$ con $\phi(a_1) = b_1$, existe un único $a_2 \in A(S)$ con $\phi(a_2) = b_2$ y tal que $a_1 a_2 \in \mathcal{L}(S)$.

Observación. Claramente todo 1-block code u-resolvente a la derecha también es e-resolvente a la derecha. Sin embargo, existen ejemplos en donde el recíproco no es cierto.

Los sliding block codes cerrados a la derecha se pueden caracterizar como todos aquellos que tienen una conjugación u-resolvente a la derecha. A continuación se demuestra la implicancia no trivial.

Proposición A.3. Sea $\Phi : X \rightarrow Y$ un sliding block code cerrado a la derecha. Entonces existe un espacio de shift X' , una conjugación $\Theta : X' \rightarrow X$ y un sliding block code u-resolvente a la derecha Φ' tal que $\Phi' \circ \Theta = \Phi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Theta} & X' \\ \Phi \downarrow & & \swarrow \Phi' \\ Y & & \end{array} \quad (\text{A.3})$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, por la Proposición A.2, se puede considerar que Φ es un 1-block code cerrado a la derecha, pues es fácil comprobar que la cualidad de cerrado a la derecha es invariante bajo conjugaciones de este tipo. Por el Lema A.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x_{[-N, 0]} = x'_{[-N, 0]} \wedge \Phi(x)_{[-N, N]} = \Phi(x')_{[-N, N]} \implies x_1 = x'_1.$$

Dado este N , considerar la relación de equivalencia \simeq definida sobre $\mathcal{L}_{2N+1}(X)$ como:

$$x_{-N} \cdots x_N \simeq x'_{-N} \cdots x'_N \iff \begin{array}{l} x_{-N} \cdots x_0 = x'_{-N} \cdots x'_0 \\ \phi(x_i) = \phi(x'_i), \forall |i| \leq N. \end{array}$$

Se define $A(X')$ como $\mathcal{L}_{2N+1}(X) / \simeq$, esto es:

$$A(X') = \left\{ W(x_{-N} \cdots x_0; y_{-N} \cdots y_N) : \begin{array}{l} x_{-N} \cdots x_0 \in \mathcal{L}(X) \\ y_{-N} \cdots y_N \in \mathcal{L}(Y) \end{array} \right\},$$

donde:

$$W(x_{-N} \cdots x_0; y_{-N} \cdots y_N) = \left\{ x'_{-N} \cdots x'_N \in \mathcal{L}_{2N+1}(X) : \begin{array}{l} x_{-N} \cdots x_0 = x'_{-N} \cdots x'_0 \\ \phi(x_i) = \phi(x'_i), \forall |i| \leq N. \end{array} \right\}.$$

Luego, se define X' como un subshift 1-paso tal que:

$$W(x_{-N} \cdots x_0; y_{-N} \cdots y_N)W(x'_{-N} \cdots x'_0; y'_{-N} \cdots y'_N) \in \mathcal{L}_2(X')$$

si y sólo si:

$$x_{-N+1} \cdots x_0 = x'_N \cdots x'_1, y_{-N+1} \cdots y_N = y'_{-N} \cdots y'_{N-1}$$

y x'_0 es el estado determinado por $x_{-N} \cdots x_0$ e $y_{-N} \cdots y_N$, debido a la cerradura a la derecha de Φ .

Considerando esto, se define el 1-block code $\Theta : X' \rightarrow X$ por el block map:

$$\theta(W(x_{-N} \cdots x_0; y_{-N} \cdots y_N)) = x_0,$$

con inversa definida localmente por:

$$\theta^{-1}(x_{-N}, \dots, x_N) = W(x_{-N} \cdots x_0; \phi(x_{-N}) \cdots \phi(x_N)).$$

Finalmente, se define el 1-block code $\Phi' : X' \rightarrow Y$ por el block map:

$$\phi'(W(x_{-N} \cdots x_0, y_{-N} \cdots y_N)) = y_N,$$

esto es, $\Phi' = \Phi \circ \sigma^N \circ \Theta$. Luego, se tiene que Φ' es u-resolvente a la derecha. En efecto, supóngase que se tienen $y_N y_{N+1} \in \mathcal{L}(Y)$ y $W \in \mathcal{A}(X')$ tales que $\phi'(W) = y_N$. Luego, W será de la forma:

$$W = W(x_{-N} \cdots x_0; y_{-N} \cdots y_N).$$

Por la definición de X' , cualquier $W' \in \mathcal{A}(X')$ tal que $WW' \in \mathcal{L}(X')$ deberá ser de la forma:

$$W' = W(x_{-N+1} \cdots x_0 a; y_{-N+1} \cdots y_N b),$$

donde sólo queda por determinar el valor de a y b . El valor de b está determinado por y_{N+1} y la condición de que $\phi'(W') = y_{N+1}$. Y, por último, a está determinado (tanto la existencia como la unicidad) por la cerradura a la derecha de Φ . Así, se tiene el resultado. \square

Lema A.4 ([19]). *Sea $\Phi : S \rightarrow T$ un 1-block code e-resolvente a la derecha, con S y T subshifts de tipo finito irreducibles tales que $h(S) = h(T)$. Entonces, Φ es u-resolvente a la derecha.*

Proposición A.5. *Sean $\Phi : X \rightarrow X$, $\Psi : Y \rightarrow Y$ autómatas celulares, con Ψ cerrado a la derecha y tales que $\Phi \trianglelefteq \Psi$. Entonces Φ es cerrado a la derecha.*

Demostración. Sea $\pi : \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$ tal que $\Phi \trianglelefteq_{\pi} \Psi$. El enunciado se puede representar mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Y \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array} .$$

Por la Proposición A.2, existen espacios de shift \tilde{X} y \tilde{Y} , conjugaciones π_X y π_Y y 1-block codes $\tilde{\Psi} : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\tilde{\Phi} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ tales que $\tilde{\Psi} \circ \pi_X = \Psi$ y $\tilde{\Phi} \circ \pi_Y = \Phi$, respectivamente. Luego, se tiene la siguiente completación del diagrama anterior:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi_X^{-1}} & X & \xrightarrow{\pi} & Y & \xrightarrow{\pi_Y} & \tilde{Y} \\ & \searrow \tilde{\Psi} & \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & \swarrow \tilde{\Phi} & \\ & & X & \xrightarrow{\pi} & Y & & \end{array}$$

Aplicando el argumento anterior a $\pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y$, existe un espacio de shift \bar{X} , una conjugación $\pi_{\bar{X}}$ y un 1-block code $(\pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y) : \bar{X} \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $(\pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y) \circ \pi_{\bar{X}} = \pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{X} & & \\ & \swarrow \pi_{\bar{X}}^{-1} & & \searrow (\pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y) & \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\pi_X^{-1}} & X & \xrightarrow{\pi} & Y & \xrightarrow{\pi_Y} & \tilde{Y} \\ & \searrow \tilde{\Psi} & \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & \swarrow \tilde{\Phi} & \\ & & X & \xrightarrow{\pi} & Y & & \end{array} \tag{A.4}$$

Luego, renombrando variables ($X_1 = \bar{X}$, $X_2 = X$, $Y_1 = \tilde{Y}$, $Y_2 = Y$, $\varphi_1 = (\pi_X^{-1} \circ \pi \circ \pi_Y)$ y $\varphi_2 = \pi$, $\Psi_X = \tilde{\Psi} \circ \pi_{\bar{X}}^{-1}$) y $\Phi_Y = \tilde{\Phi}$, la situación se resume en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\ \Psi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ X_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & Y_2 \end{array}$$

donde Ψ_X , Φ_Y , φ_1 y φ_2 son 1-block codes y Ψ_X es cerrado a la derecha. Utilizando la Proposición A.3, existe un espacio de shift X'_1 , una conjugación $\Theta : X'_1 \rightarrow X_1$ y un sliding block code u-resolvente a la derecha Ψ'_X tal que $\Psi'_X \circ \Theta = \Psi_X$.

$$\begin{array}{ccccc} X'_1 & \xrightarrow{\Theta} & X_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\ & \searrow \Psi'_X & \downarrow \Psi_X & & \downarrow \Phi_Y \\ & & X_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & Y_2 \end{array}$$

Como Θ es un 1-block code, también lo es $\varphi'_1 = \varphi_1 \circ \Theta$. Luego, resumiendo nuevamente, se tiene un diagrama que conmuta con sólo 1-block codes involucrados y tal que Ψ'_X , φ'_1 y φ_2 son e-resolventes a la derecha (pues la u-resolvencia de Ψ'_X implica su e-resolvencia y se puede verificar la e-resolvencia de φ'_1 y φ_2 observando que X e Y son full-shifts) entre subshifts de tipo finito irreducibles.

$$\begin{array}{ccc} X'_1 & \xrightarrow{\varphi'_1} & Y_1 \\ \Psi'_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ X_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & Y_2 \end{array}$$

Afirmación: Φ_Y es e-resolvente a la derecha. En efecto, sea $y_1^2 y_2^2 \in \mathcal{L}(Y_2)$ e $y_1^2 \in A(Y_1)$ tal que $\phi_Y(y_1^1) = y_1^2$. Como φ_1 es sobreyectiva (pues es un factor), existe $x_1^1 \in A(X_1)$ tal que $\varphi_1(x_1^1) = y_1^1$. Luego, por la conmutatividad del diagrama, $y_1^2 = \phi_Y \circ \varphi_1(x_1^1) = \varphi_2 \circ \psi_X(x_1^1)$. Por otro lado, es fácil verificar que la composición de dos 1-block codes e-resolventes también es e-resolvente. Así, se tiene que $y_1^2 y_2^2 \in \mathcal{L}(Y_2)$ y $\varphi_2 \circ \psi_X(x_1^1) = x_1^1$ y por la e-resolvencia de $\varphi_2 \circ \psi_X$, existe $x_2^1 \in A(X_1)$ tal que $x_1^1 x_2^1 \in \mathcal{L}(X_1)$ y $\varphi_2 \circ \psi_X(x_1^1 x_2^1) = y_1^2 y_2^2$. Tomando $y_2^1 = \varphi_2(x_2^1)$ se tiene la e-resolvencia de Φ_X .

Finalmente, como Φ es sobreyectivo (pues Ψ en particular lo es al ser cerrado y Φ es cuociente de Ψ) y sólo hay involucradas conjugaciones, se tiene que $h(Y_1) = h(Y_2)$ y, por el Lema A.4, Φ_X es u-resolvente. Como Φ_X y Φ son conjugados, Φ es cerrado (pues un sliding block code es cerrado si y sólo si es conjugado a un sliding code block u-resolvente). \square

Anexo B

Protocolos para ACs elementales

Mediante reflexiones y simetrías, el estudio del conjunto de 256 ACs elementales se puede reducir a un grupo de 88. Estos son los ACs número: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 60, 62, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 90, 94, 104, 105, 106, 108, 110, 122, 126, 128, 130, 132, 134, 136, 138, 140, 142, 146, 150, 152, 154, 156, 160, 162, 164, 168, 170, 172, 178, 184, 200, 204 y 232. A continuación se muestran protocolos de costo sublineal para algunos de estos, descartándolos como intrínsecamente universales.

Proposición B.6. *Las reglas número 15, 51, 60, 90, 105, 108, 128, 136, 150, 160, 170 y 204 son lineales y todas tienen un protocolo de costo $O(1)$ para PRED.*

Proposición B.7. *En todas las configuraciones, luego de un paso, la regla 76 se comporta como la regla 204 (pues la única diferencia en ambas reglas es cómo son definidas en el patrón 111, que no posee antecedente). Luego, posee un protocolo de orden constante (una cantidad constante de bits para comunicar el resultado luego de una iteración y otra cantidad constante para aplicar el protocolo de la regla 204).*

Proposición B.8. *El AC Φ_{11} definido por la regla número 11 es tal que: $CC(\text{PRED}_{\Phi_{11}}) \in \Theta(\log n)$.*

0	0	0	0	1	0	1	1
111	110	101	100	011	010	001	000

Cuadro B.1: Regla número 11.

Demostración. De la definición de la regla es fácil ver que en la evolución —vista desde abajo hacia arriba—, no es posible que de un 1 a la izquierda se suceda otro 1:

$$\begin{array}{c} \lambda \\ 1 \cdot \cdot \end{array}$$

Luego, necesariamente:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \cdot \cdot \end{array}$$

Ahora, para el caso de un 0 a la izquierda, se tiene que son válidas ambas situaciones, esto es:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot \end{array}$$

Además, para el primer caso quedan totalmente determinados los tres antecedentes:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Sin embargo, no es posible que se sucedan tres 0s consecutivos en una diagonal:

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{array}$$

pues se llega a una contradicción:

$$\begin{array}{ccc} & \emptyset & \\ 0 & \cancel{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Así, lo que se tiene es que la diagonal que va desde el extremo izquierdo hasta el centro pertenece al lenguaje $(1 + \varepsilon)(01 + 001)^*(0 + \varepsilon)$. Esto será fundamental a la hora de poder predecir el valor de Φ_{11} .

Por otro lado, notar que la palabra 101 no posee antecedente. En efecto, rellenando con las únicas posibilidades:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \implies \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & ? & 0 & \cdot \end{array}$$

No existe valor compatible para la celda marcada con el símbolo ?. Luego, como 101 no tiene antecedente, se puede asumir que la entrada es una subpalabra del subshift $X(F)$, donde $F = \{101\}$, haciendo que Alice y Bob iteren una vez. Por esto, también se tiene que al aparecer el patrón diagonal 00 está determinada toda una columna diagonal:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & \mathbf{0} & 0 & 1 & & \\ & & & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Se puede apreciar que una condición necesaria para que aparezca el patrón 00 es la existencia

del patrón 00100 y su conservación en el tiempo:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
 & & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Por otro lado, el patrón 00100 —considerando que el patrón 101 está prohibido— se tiene a sí mismo como antecedente:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Se deduce que el patrón 00100 se desplaza diagonalmente, nunca se crea, sólo se mantiene en el tiempo, y desaparece si se encuentra con un 0:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Además, si se considera $G = \{101, 010\}$ y el subshift $X(G) \subseteq X(F)$, es fácil ver que $(X(G), \Phi_{11}^2) = (X(G), \sigma^{-2})$.

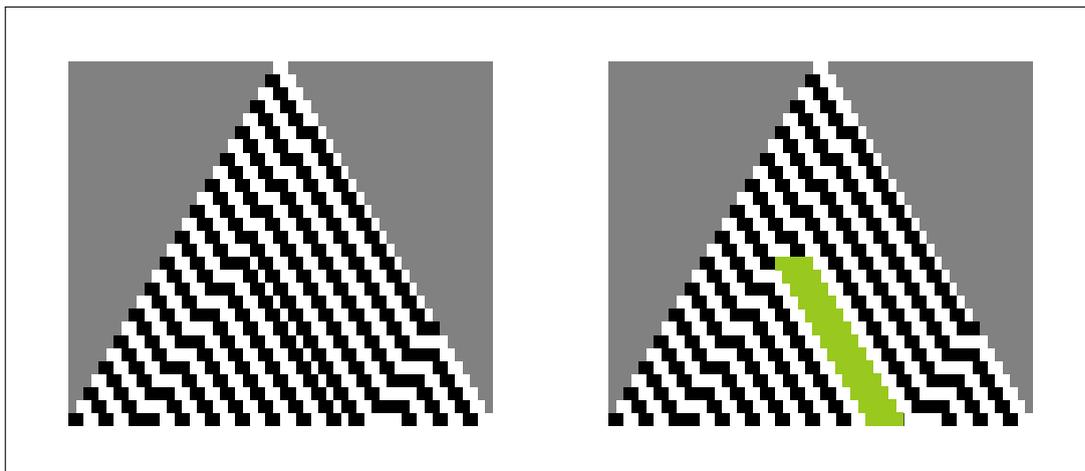


Figura B-1: Evolución de la regla 11. Los 1s son blancos y los 0s, negros. El patrón 00100 se ve marcado en verde.

Ahora, ¿cómo se puede desprender un protocolo de predicción a partir de todo esto? Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que Alice (que posee la parte izquierda de la entrada) parte con un 1 en la primera celda. Luego, el protocolo buscará calcular cuántas «descoordinaciones» ocurren en la diagonal que va desde la primera celda de la entrada hasta la última celda de la evolución.

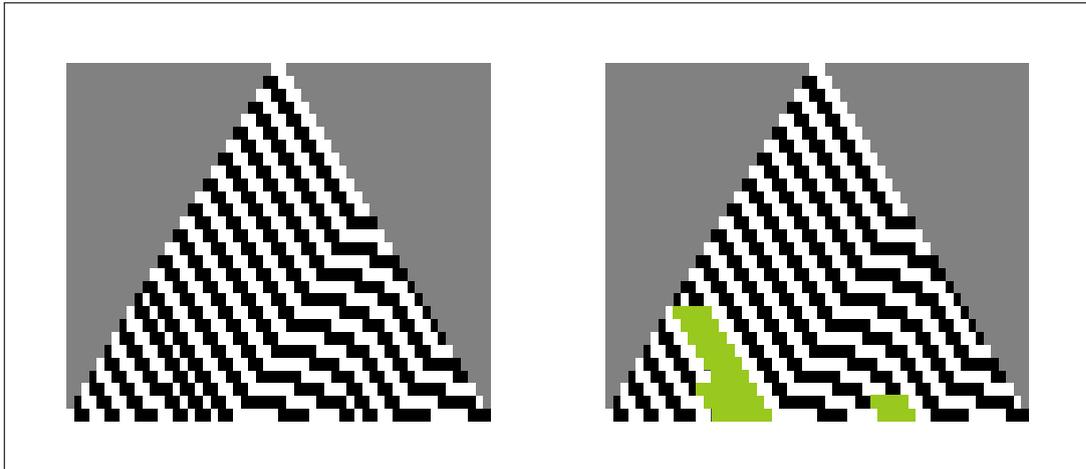


Figura B-2: Descoordinación en la diagonal izquierda.

Es posible ver que:

$$\Phi_{11}(\infty(0011)00100(1100)\infty) = \infty(0011)00100(1100)\infty$$

esto es, el patrón se mantiene invariante cuando se encuentra rodeado con 0011 y 1100. Además, si el patrón tiene a la derecha un 0, desaparece. Ahora, una condición suficiente y, dado el subshift con que se trata, necesaria para que un patrón 00100 desaparezca es que a su izquierda haya una palabra que contenga tres 0s o 1s consecutivos.

Es más, el problema de predicción se reduce a contar cuántos patrones 00100 alcanzan a llegar a la primer diagonal de manera que se forme el patrón 100100. Esto requiere comunicar una cantidad $O(\log n)$ de información.

Por otro lado, la regla 11 es capaz de simular al AC JustGliders con parámetros $\langle 20, 20, 0 \rangle$, esto es:

$$\text{JG} \sqsubseteq_{\tau} \Phi_1^{(20,20,0)},$$

donde $\iota : A_{\text{JG}} \rightarrow A_{\Phi_{11}}^{20}$ está definida como:

$$\begin{aligned} \iota(0) &= 11001100110011001100 \\ \iota(\leftarrow) &= 11001001001001001100 \\ \iota(\rightarrow) &= 11001100111111001100, \end{aligned}$$

teniéndose la optimalidad del protocolo. □

Anexo C

AC minimal con complejidad lineal

Aún no se ha encontrado un AC elemental cuya complejidad comunicacional en algún problema compatible con \asymp_i sea de orden $\Omega(n)$. Esto es relevante para la existencia de ACs candidatos como intrínsecamente universal de 2 estados. El mejor resultado que se tiene es la construcción de un AC de radio 1 con 3 estados y que hace uso de la regla número 184. Para lograr esto, primero se consideró un AC como el representado en la Figura C-1, capaz de simular los test de igualdad tan utilizados en esta investigación y en [14].

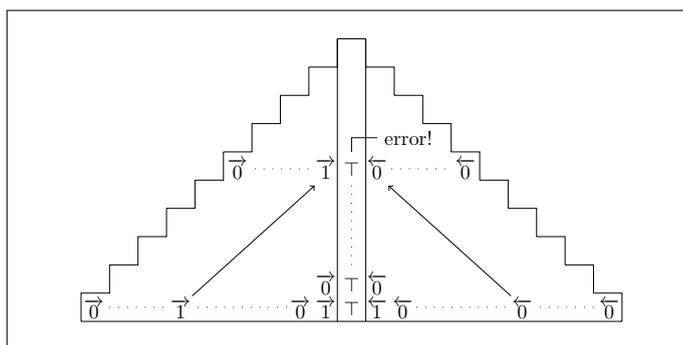


Figura C-1: AC que simula un test de igualdad con 5 estados.

Notar que para lograr el efecto buscado, no es necesario dotar al 0 de dirección, pues basta con que sólo alguno (el 1 o el 0) posea para inducir la dinámica. Así, basta con un AC de cuatro estados (0 , $\vec{1}$, $\overleftarrow{1}$ y \top), como el de la Figura C-2.

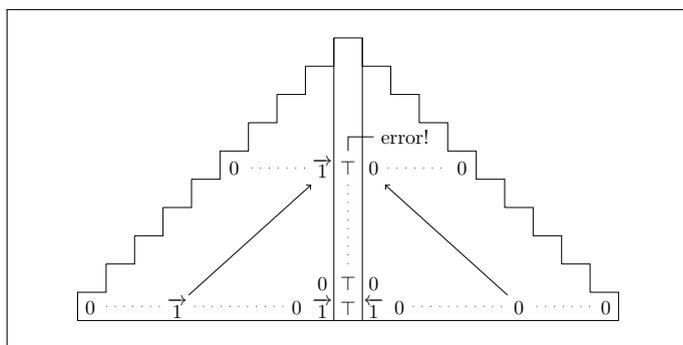


Figura C-2: AC que simula un test de igualdad con 4 estados.

Ahora, un AC de cuatro estados no es muy interesante pues, como se demuestra en [34], existe un AC un con tal cantidad de estados y con la propiedad de ser intrínsecamente universal. Sin embargo, teniendo estos antecedentes y utilizando la capacidad de la regla número 184 de simular a JustGliders con un packing de $m = 2$, se intentó emular (no precisamente en el sentido de *bulking*) el funcionamiento del AC anterior como se intenta describir en el siguiente diagrama:

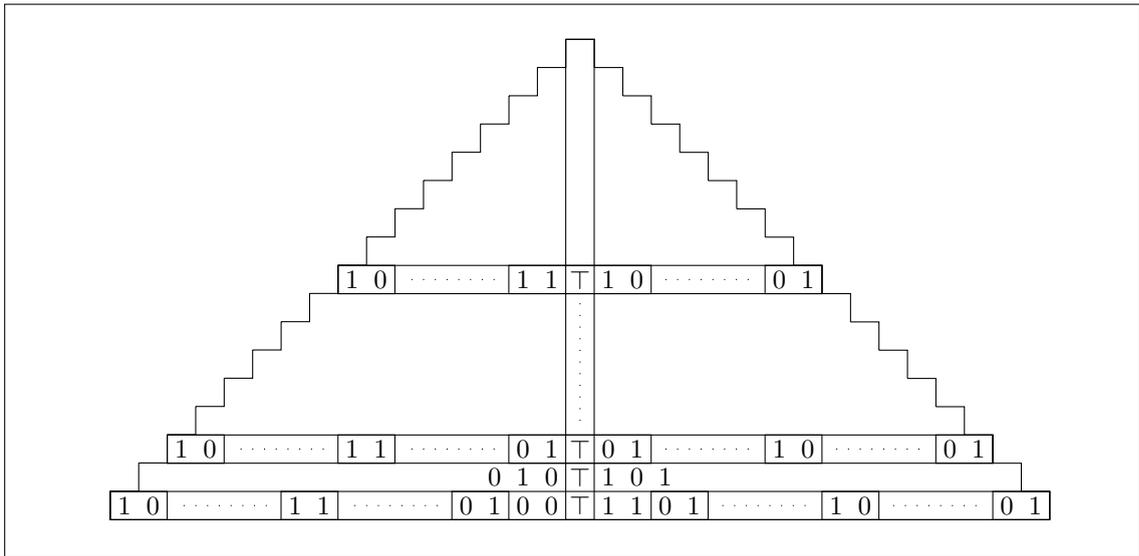


Figura C-3: AC que simula un test de igualdad con 3 estados.

Este AC posee sólo tres estados (0, 1 y \perp) y la complejidad de PRED es claramente lineal.

*Then, silence. Some fancied they heard in the air
A weary and wandering sigh
Then sounded like jum!"but the others declare
It was only a breeze that went by.*

Fit the Eighth - THE VANISHING