

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

AUTENTIFICACIÓN DESMENTIBLE EN CANALES ANÓNIMOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL EN  
COMPUTACIÓN

ALONSO EMILIO GONZÁLEZ ULLOA

PROFESOR GUÍA:

ALEJANDRO HEVIA ANGULO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

GONZALO NAVARRO BADINO

RODRIGO PAREDES MORALEDA

SANTIAGO DE CHILE

ABRIL 2011

# Resumen Ejecutivo

El problema de comunicación anónima autenticada consiste en diseñar un protocolo que permita intercambiar mensajes entre un conjunto de participantes, de forma tal que cada emisor de un mensaje determina el destinatario de su mensaje y, una vez que se envía el mensaje, éste es efectivamente recibido por el destinatario determinado. La información que revela el protocolo en su ejecución debe mantener el anonimato, es decir debe ser tal que no permite a ningún adversario determinar información relacionada a las identidades de los participantes. El protocolo debe permitir a cada destinatario determinar con exactitud quién es el autor de cada mensaje que recibe, sin que esto contradiga el anonimato. Adicionalmente el protocolo debe mantener las garantías anteriores inclusive si es ejecutado en un ambiente concurrente, es decir es ejecutado con indeterminados otros protocolos.

Las aplicaciones de la comunicación anónima autenticada son variadas. Por ejemplo es útil para diseñar sistemas de denuncia anónima de delitos donde adicionalmente se desea discriminar la información recibida según la identidad del quien origina el mensaje. Esto puede ser útil si algunos informantes son más creíbles que otros.

En este trabajo se plantea el problema de comunicación anónima autenticada y se demuestra constructivamente la existencia de un protocolo que resuelve dicho problema. Para ello se estudian tópicos avanzados de Criptografía como *Universal Compossability*, *Generalized Universal Composability*, Anonimato, Desmentibilidad y las distintas primitivas criptográficas asociadas a dichos tópicos. Se definen rigurosamente las propiedades que debe tener un protocolo para resolver el problema planteado. Finalmente se diseña un protocolo eficiente para el cual se puede garantizar matemáticamente que satisface las propiedades necesarias para resolver el problema de comunicación anónima autenticada.

*A todos los que ayudaron a que llegue a esta instancia.*

# Agradecimientos

Como dije anteriormente agradezco a todos los que, de una u otra forma, ayudaron a que haya podido llegar a esta instancia. Agradezco especialmente a mi papá, Pablo, con quien he vivido casi toda mi vida y fué capaz de educarme de forma tal que haya llegado a la Universidad y ahora me esté titulando. También quiero agradecer a mi mamá Mirella, quien ha sido mi amiga y sustento moral durante muchos años. Todavía me acuerdo que cuando tenía algo así como cinco años me enseñó a dividir y después de un rato me decía “ya mucho, se va a fundir su cerebritito” (o algo parecido). Esto y otras cosas determinaron quién soy ahora. Quiero agradecer a mi polola Carolina, con quien he pasado estos últimos dos años y me ha enseñado a conocerme más y a vivir en pareja. Aunque parezca extraño, algunas de las conversaciones que hemos tenido estan plasmadas en este trabajo. Agradecimientos especiales y espaciales a mi hermano Jerónimo que, no se como describirlo, pero una especie de osmosis cerebral debe haber habido despues de vivir tantos años juntos y algo de él debe haber en mí que me ayudó a hacer este trabajo.

Agradezco a todos mis amigos, los del colegio y vida: Andrés, Gonzalo, Mauricio, René y Nilton. Con ustedes cabros he pasado de los mejores momentos de estos últimos años. También agradezco a mis amigos de la U, entre otros: Jorge y Nicolás, por un monton de cosas que no se pueden comprimir en una frase (lo intenté y no pude).

Si alguien se me escapó, mis disculpas, pero que me pregunte, y si le agradezco algo se lo digo. Yo creo que es mejor que te lo digan en vivo y en directo a leerlo en un papel.

Finalmente, mis más sinceros agradecimientos a Alejandro, mi profesor guía. Gracias a él fue que descubrí la Computación como ciencia y la Criptografía, que son las cosas a las que me gustaría dedicarme de aquí en adelante. Agradezco también a los miembros de la comisión, Gonzalo Navarro y Rodrigo Paredes, por sus acertados comentarios a este trabajo.

Alonso González Ulloa.

# Índice General

<b>Resumen Ejecutivo</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Descripción del problema . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.3.1. Objetivo general . . . . .	4
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	6
2.2. Probabilidades discretas . . . . .	7
2.2.1. Indistinguibilidad . . . . .	8
2.3. Definiciones criptográficas básicas . . . . .	8
2.3.1. El problema de Diffie-Hellman decisonal (DDH) . . . . .	8
2.3.2. Esquemas de Encriptación . . . . .	8
2.3.3. Esquemas de autenticación de mensajes . . . . .	10
2.3.4. Supuestos de inicialización . . . . .	11
<b>3. Modelo Criptográfico</b>	<b>13</b>
3.1. Universal Composability framework . . . . .	13
3.1.1. Descripción general . . . . .	13
3.1.2. Sistemas de Máquinas de Turing Interactivas . . . . .	14
3.1.3. Ejecución de un protocolo . . . . .	18
3.1.4. Teorema de composición . . . . .	18
3.1.5. Funcionalidades Ideales . . . . .	21

3.1.6.	Modelos de corrupción . . . . .	23
3.2.	Generalized Universal Composability . . . . .	24
3.2.1.	Descripción general . . . . .	24
3.2.2.	Ejecución de un protocolo en GUC . . . . .	25
3.2.3.	Un modelo más simple para GUC . . . . .	26
3.3.	Una notación más simple para (G)UC . . . . .	29
<b>4.</b>	<b>Desmentibilidad</b>	<b>33</b>
4.1.	Desmentibilidad online . . . . .	34
<b>5.</b>	<b>Anonimato</b>	<b>36</b>
5.1.	Canales Anónimos . . . . .	36
5.2.	Primitivas para Canales Anónimos . . . . .	38
5.2.1.	Redes de Mezcla o <i>Mix-nets</i> . . . . .	39
5.2.2.	Mix-nets reencriptantes . . . . .	39
5.2.3.	Mixnet con descriptación . . . . .	41
5.2.4.	Anonymous Broadcast o DC-nets . . . . .	43
<b>6.</b>	<b>El protocolo</b>	<b>44</b>
6.1.	Canales Anónimos Autenticados . . . . .	44
6.2.	El protocolo SIGMIX . . . . .	46
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>56</b>
7.1.	Preguntas abiertas . . . . .	56
7.1.1.	Mixnet GUC-segura . . . . .	56
7.1.2.	Una modelación más exacta de la componibilidad en GUC . . . . .	57
	<b>Referencias</b>	<b>58</b>

# Índice de figuras

1.1. Protocolo simple de comunicación . . . . .	5
1.2. Solución propuesta . . . . .	5
2.1. El experimento IND-CPA . . . . .	10
2.2. El experimento UF-CMA . . . . .	11
2.3. La funcionalidad ideal $\mathcal{F}_{CRS}$ . . . . .	11
2.4. La funcionalidad compartida $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ . . . . .	12
3.1. La función de control $C_{EXEC}^{\pi, \mathcal{A}}$ . . . . .	19
3.2. Ejecución de un protocolo en UC . . . . .	19
3.3. Ejecución del protocolo $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$ en UC . . . . .	22
3.4. Análisis modularizado de un protocolo . . . . .	23
3.5. Ejecución del protocolo $\pi$ en GUC . . . . .	27
3.6. Ejecución del protocolo $\pi$ en EUC . . . . .	27
3.7. Ejecución del protocolo $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$ en EUC . . . . .	28
3.8. Ejecución del protocolo $\pi$ con modelo de comunicación real $\mathcal{C}$ . . . . .	30
3.9. Ejecución del protocolo $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$ con modelo de comunicación ideal $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ . . . . .	30
5.1. El experimento $\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}-anon}$ . . . . .	38
5.2. Diagrama de una mix-net . . . . .	39
5.3. La funcionalidad ideal $\mathcal{F}_{MN}$ . . . . .	42
6.1. La funcionalidad ideal $\mathcal{F}_{AAC}$ . . . . .	45
6.2. El protocolo SIGMIX . . . . .	48
6.3. El adversario para DDH sobre $G_{q(\kappa)}$ $D'$ . . . . .	49
6.4. El adversario ideal $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ . . . . .	52
6.5. El adversario para MDDH sobre $G_q$ $\mathcal{D}_{\text{MDDH}}$ . . . . .	53

6.6. El adversario $\mathcal{D}_{\text{MAC}}$ . . . . .	53
---	----

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Para motivar el tema a tratar en este trabajo, presentamos el siguiente problema que perfectamente se podría presentar en un escenario real.

El tribunal de la libre competencia (TDLC) desea desarrollar una plataforma que permita a las distintas empresas presentar pruebas que inculpen a otra empresa en delitos como colusión, monopolio, etc. Para ello ha puesto a disposición de las empresas un conjunto de servidores a los cuales enviar sus denuncias.

Para no amedrentar a una empresa denunciante es necesario que la comunicación entre la empresa y cada servidor sea anónima. Pues de este modo ningún observador podría determinar que una empresa denunciado a otra de cierto delito y tomar represalias.

Por otro lado el TDLC confía más en el testimonio de algunas empresas que en el de otras, ya sea por su conducta anterior u otros factores. Por lo tanto desea estar completamente seguro de la identidad de una empresa cuando esta empresa presente pruebas usando la plataforma, pues así puede determinar un factor de credibilidad en la denuncia.

La plataforma se diseña para operar en internet, por lo tanto debe mantener sus propiedades de seguridad inclusive si es ejecutada concurrentemente con protocolos maliciosos.

Para desarrollar la plataforma, el TDLC ha determinado que su problema es exactamente el siguiente:

*Desea crear un protocolo mediante el cual las empresas se comuniquen con cada uno de los servidores de denuncias. La comunicación entre empresas y servidores debe ser anónima y autenticada, y esto se debe cumplir inclusive si el protocolo es ejecutado concurrentemente con otros protocolos.*

## 1.2. Descripción del problema

En general, el problema anterior puede aplicarse a cualquier de grupo de personas que desean comunicarse entre sí en una red (internet o una red local) y desea obtener garantías similares. A continuación iniciamos el camino de formalización del problema motivacional. La solución del problema consiste en encontrar un protocolo (un algoritmo distribuido) de cual se puedan garantizar matemáticamente las siguientes tres propiedades :

1. Anonimato
2. Autenticación desmentible
3. Componibilidad

### Anonimato

A modo de ejemplo podemos considerar un protocolo “usual” de comunicación, un protocolo IP simplificado. En la Figura 1.1 cada flecha de  $A$  a  $B$  indica que  $A$  envió un mensaje a  $B$ . La etiqueta de una flecha de  $A$  a  $B$  indica el mensaje intercambiado en la ejecución de protocolo. Por ejemplo Empr-1 envió a Serv-1 el mensaje  $(m_{e1s1}, ip_{e1}, ip_{s1})$ , donde  $m_{e1s1}$  es el contenido del mensaje,  $ip_{e1}$  es la dirección IP de la Empresa 1 e  $ip_{s1}$  es la dirección IP del Servidor 1. Notemos que estos datos son necesarios para poder *rutear* los mensajes de un participante a otro, pero a la vez se revela a un observador que Empr-1 envió un mensaje a Serv-1. Por lo tanto podemos decir que **el protocolo IP simplificado no es anónimo** pues **existe un ataque**.

Para definir el anonimato resulta crucial definir formalmente que es considerado un ataque al anonimato, pues un protocolo es anónimo si y solo si no existe ningún ataque. En [17] se define un ataque con el siguiente juego. El observador o adversario determinada dos posibles ejecuciones del protocolo, las cuales difieren en qué mensajes son enviados por quién y qué mensajes son recibidos por quién. Entonces consideraremos que el adversario realiza un ataque si al ejecutar al adversario con cada una de las posibles ejecuciones del protocolo,

el adversario logra identificar cuál es cuál. Por lo tanto un protocolo sera seguro si y solo si cualquier adversario no logra distinguir una ejecución de otra.

### **Autenticación desmentible**

En el protocolo de la Figura 1.1 es posible que un adversario (rol que puede asumir una empresa  $Empr - 2$ ) se haga pasar por una empresa  $Empr - 1$  con buena reputación y denuncie falsamente a una empresa enemiga  $Empr - 3$ . Para ello sólo es necesario que modifique uno de sus mensajes cambiando  $ip_e2$  por  $ip_e1$ . Por lo tanto decimos que el protocolo no implementa canales autenticados.

Con canales autenticados nos referimos protocolos en los cuales es posible estar seguro, con alta probabilidad, de quién es el autor de un mensaje. Sin embargo hay que ser cuidadoso con el protocolo de autenticación usado, pues los más conocidos (firmas digitales por ejemplo) poseen la propiedad de *non repudiability*. Esto es, que el emisor de un mensaje autenticado no puede negar a “la comunidad” que él es el autor del mensaje. Esto estaría contradiciendo el anonimato, pues el adversario también sería capaz de asociar la autoría de un mensaje a el emisor de éste.

La autenticación desmentible, introducida en [13], se refiere a los protocolos que implementan canales anónimos con la propiedad adicional de que cada mensaje es autenticado a un receptor específico y el receptor no es capaz de probar a nadie más quién es el autor del mensaje.

### **Componibilidad**

En general, el hecho de implementar protocolos con ciertas garantías (por ejemplo anonimato y autenticación desmentible) no garantiza que dichas propiedades se sigan teniendo cuando el protocolo es ejecutado concurrentemente con otros protocolos.

En [2], Canetti introduce el *framework* criptográfico conocido como *Universal Composability* (desde ahora UC). UC propone una metodología para definir y demostrar los objetivos de seguridad de un protocolo (por ejemplo anonimato y autenticación) de un protocolo. UC garantiza que el protocolo mantiene su seguridad inclusive si es ejecutado concurrentemente con cualquier protocolo, siempre y cuando no comparta estado con el protocolo analizado.

Cuando el protocolo sí comparte estado con otros protocolo es necesario hacer uso del *framework Generalized Universal Composability* (desde ahora GUC), que generaliza a UC. In-

formalmente GUC propone una metodología para incluir el estado que un protocolo podría compartir con otros.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Diseñar un protocolo criptográfico eficiente que cumpla nociones razonables de Anonimato y Autenticación Desmentible. Demostrar matemáticamente su seguridad usando herramientas modernas de análisis criptográficas (GUC) y estudiar su relación con otras primitivas criptográficas.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

1. Estudiar conceptos asociados a interacciones desmentibles y las técnicas y primitivas criptográficas asociadas (encriptación y mecanismos de autenticación como firmas digitales y esquemas de identificación).
2. Estudiar conceptos de anonimato y las técnicas y primitivas criptográficas asociadas.
3. Proponer un protocolo que combine ambas nociones.
4. Analizar dicho protocolo en términos de efectividad y eficiencia.
5. Analizar la efectividad en términos de las garantías de seguridad obtenidas.
6. Analizar la eficiencia en términos de los costos en tiempo asociados al protocolo.
7. Estudiar su relación con otros protocolos criptográficos.

En la Figura 1.2 se muestra un diagrama para explicar nuestra solución. A grandes rasgos, proponemos combinar un protocolo de autenticación desmentible con un protocolo de canales anónimos. Es por ello que primero los mensajes enviados son procesados por el protocolo de autenticación desmentible para luego ser distribuidos por el protocolo de canales anónimos.

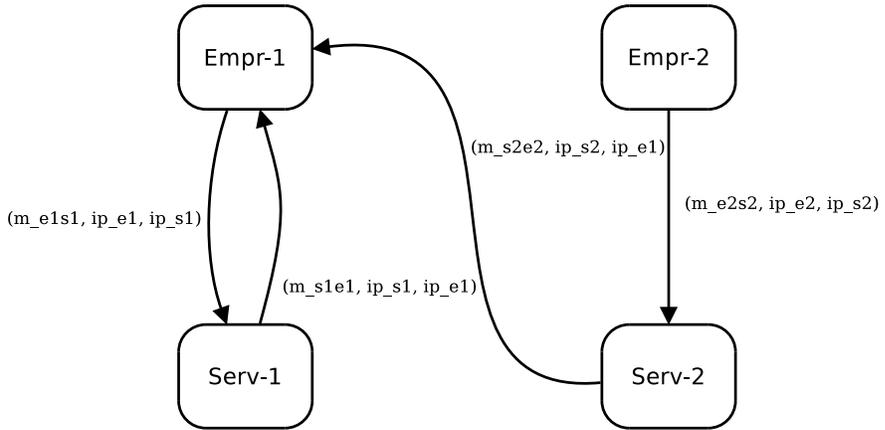


Figura 1.1: Protocolo simple de comunicación

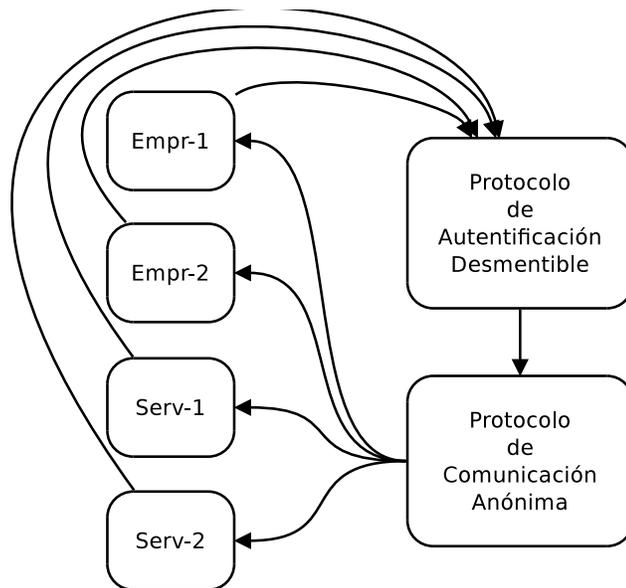


Figura 1.2: Solución propuesta

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En este capítulo hacemos distintas definiciones básicas útiles para este trabajo.

### 2.1. Definiciones básicas

**Definición 1** (String). Decimos que  $\omega$  es un string si  $\omega \in \{0, 1\}^*$ .

**Definición 2** (Largo de un string). Para un string  $\omega$  denotamos por  $|\omega|$  al entero  $k$  tal que  $k$  es el número de caracteres de  $|\omega|$ .

**Definición 3** (Función despreciable). Decimos que una función  $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es despreciable si crece más lento que el inverso de cualquier polinomio. Es decir, para todo polinomio  $p$  existe un  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  se cumple que

$$\eta(n) < \frac{1}{p(n)}$$

Las funciones despreciables permiten definir probabilidades “pequeñas” para cualquier variable aleatoria “algorítmica”. Es decir, variables aleatorias que corresponden a la salida de un algoritmo.

Una forma de ver la utilidad de las funciones despreciables es la siguiente. Consideremos el caso en que queremos determinar si un lenguaje  $L$  es *difícil*, esto es, para cualquier algoritmo de tiempo polinomial determinar si  $x \in L$  es difícil. Diremos que un algoritmo  $A$  tiene éxito si  $A(x) = 1$  cuando  $x \in L$  y  $A(x) = 0$  si no. Si la probabilidad de éxito de un algoritmo  $A$  de tiempo polinomial es despreciable, es imposible usar  $A$  como bloque de otro algoritmo de tiempo polinomial para obtener una mejor probabilidad de éxito. Por el contrario, si la probabilidad de éxito de un algoritmo polinomial  $A$  es pequeña pero no despreciable, entonces es posible construir un algoritmo  $B$  de tiempo polinomial cuya probabilidad de éxito es  $1 - 2^{-n}$ .

<sup>1</sup> De este modo podemos decir que  $L$  es difícil si la probabilidad de éxito es depreciable para cualquier algoritmo  $A$ ; equivalentemente podemos decir que  $L$  es fácil si existe un algoritmo  $A$  con ventaja no despreciable. Notemos que para el caso en que  $L$  es fácil, la probabilidad de éxito del algoritmo  $A$  puede ser muy pequeña, pero puede ser *amplificada* hasta  $1 - 2^{-n}$ , probabilidad para nada pequeña.

**Definición 4** (Grupo Abelian). *Decimos que el par  $(G, +)$ , donde  $G$  es un conjunto y  $+ : G^2 \rightarrow G$ , es un Grupo Abelian si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. (Asociatividad)  $\forall a, b, c \in G \ (a + b) + c = a + (b + c)$ .
2. (Elemento neutro)  $\exists 0 \in G$  tal que  $\forall a \in G \ a + 0 = 0 + a = a$ .
3. (Inverso)  $\forall a \in G \ \exists -a \in G$  tal que  $a + -a = 0$ .
4. (Conmutatividad)  $\forall a, b \in G \ a + b = b + a$ .

En general, cuando decimos que  $G$  es un grupo nos referimos a que es un Grupo Abelian.

**Definición 5** (Generador). *Decimos que  $g \in G$  es un generador de  $G$  si el conjunto generado por  $g$   $\langle g \rangle = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$  es igual a  $G$ .*

**Definición 6** (Grupo cíclico). *Decimos que  $G_q$  es un grupo cíclico de orden  $q$  si existe un generador  $g$  de  $G$  y  $|G| = q$ .*

## 2.2. Probabilidades discretas

**Definición 7** (Espacio de probabilidades finito). *Una espacio de probabilidades finito es un conjunto finito  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{|\Omega|}\}$  con un conjunto de números  $p_1, \dots, p_{|\Omega|} \in [0, 1]$  tales que  $\sum_{i=1}^{|\Omega|} p_i = 1$ .*

A menos que se especifique lo contrario, asumimos que la distribución de  $\Omega$  es uniforme, es decir  $p_i = \frac{1}{|\Omega|}$ . Al experimento de escoger un  $\omega$  en  $\Omega$  al azar lo denotamos por  $\omega \in_R \Omega$ .

**Definición 8** (Evento). *Decimos que  $A$  es un evento de  $\Omega$  si  $A \subseteq \Omega$ . Denotamos por  $\Pr[A] = \sum_{\omega_i \in A} p_i$  a la probabilidad de  $A$ .*

**Definición 9** (Variable aleatoria). *Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna a cada  $\omega \in \Omega$  un número real  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 10** (Distribución). *Dada una variable aleatoria, definimos su distribución como la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = \sum_{i: X(\omega_i)=x} p_i$ .*

**Definición 11** (Distancia estadística). *Dadas dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  definidas sobre  $\Omega$ , definimos la distancia estadística entre ellas como*

$$\Delta(X, Y) = \max_{S \subseteq \Omega} \{X(S) - Y(S)\}$$

---

<sup>1</sup>  $B$  ejecuta  $A$  como caja negra  $t(n)$  veces y responde 1 si la mayoría de las veces  $A$  responde 1, y 0 en caso contrario. Es posible demostrar que existe un polinomio  $q$  tal que si  $t(n) = q(n)$  la probabilidad de éxito de  $B$  es  $1 - 2^{-n}$ .

### 2.2.1. Indistinguibilidad

La noción de indistinguibilidad es una noción fundamental en criptografía pues ha permitido definir la seguridad mediante la similitud entre distintos eventos.

La indistinguibilidad es una noción de similaridad entre familias de variables aleatorias (o conjuntos de variables aleatorias) y existen tres tipos de indistinguibilidad.

**Definición 12** (Indistinguibilidad perfecta). *Decimos que dos familias de variables aleatorias  $U = \{U_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  y  $V = \{V_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  son perfectamente indistinguibles si para todo  $x$   $\Delta(U_x, V_x) = 0$ . Denotamos la indistinguibilidad perfecta por  $U = V$ .*

**Definición 13** (Indistinguibilidad estadística). *Decimos que dos familias de variables aleatorias  $U = \{U_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  y  $V = \{V_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  son estadísticamente indistinguibles si  $\Delta(U_x, V_x)$  es despreciable en  $|x|$ . Denotamos la indistinguibilidad estadística por  $U \approx V$ .*

**Definición 14** (Indistinguibilidad computacional). *Decimos que dos familias de variables aleatorias  $U = \{U_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  y  $V = \{V_x\}_{x \in \{0,1\}^*}$  son computacionalmente indistinguibles si para todo algoritmo polinomial aleatorizado  $A$  existe una función despreciable  $\eta$  y un entero  $n_0$  tal que si  $|x| > n_0$   $|\Pr[A(U_x) = 1] - \Pr[A(V_x) = 1]| \leq \eta(|x|)$ . Denotamos la indistinguibilidad computacional por  $U \stackrel{c}{\approx} V$ .*

## 2.3. Definiciones criptográficas básicas

### 2.3.1. El problema de Diffie-Hellman decisional (DDH)

El problema DDH [11] es un problema que se considera difícil, es decir se conjetura que no existe un algoritmo a tiempo polinomial que lo solucione para ciertos grupos. DDH es una herramienta fundamental en la Criptografía moderna pues permite la construcción eficiente de primitivas con una variada aplicabilidad.

**Definición 15** (DDH). *Sea  $G_q$  un grupo cíclico de orden  $q$  y  $g$  un generador de  $G_q$ . Decimos que en  $G_q$  se cumple DDH si  $(g^\alpha, g^\beta, g^\gamma) \stackrel{c}{\approx} (g^\alpha, g^\beta, g^{\alpha\beta})$  dado que  $\alpha, \beta, \gamma \in_R G_q$ .*

### 2.3.2. Esquemas de Encriptación

Sea  $\mathcal{E} = (K, E, D)$ , donde  $K : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}^*$  es el algoritmo (aleatorizado) de generación de claves;  $E : \mathcal{M} \times \{0,1\}^* \rightarrow \mathcal{C}$  es el algoritmo (aleatorizado) de encriptación;  $D : \mathcal{C} \times \{0,1\}^* \rightarrow \mathcal{M}$  es el algoritmo de desencriptación;  $\mathcal{M}$  es el conjunto de textos planos; y  $\mathcal{C}$  es el conjunto de textos cifrados.

Decimos que  $\mathcal{E}$  es un esquema de encriptación simétrico si para todo parámetro de seguridad

$\kappa \in \mathbb{N}$ , si  $k \stackrel{R}{\leftarrow} K(\kappa)$  (es decir si la clave es generada al azar con cualquier parámetro de seguridad) todo texto plano  $m \in \mathcal{M}$  puede ser recuperado correctamente, esto es  $D_k(E_k(m)) = m$ . Decimos que  $\mathcal{E}$  es un esquema de encriptación asimétrico si para todo  $\kappa \in \mathbb{N}$ , dado  $(sk, pk) \stackrel{R}{\leftarrow} K(\kappa)$  para todo texto plano  $m \in \mathcal{M}$ ,  $D_{sk}(E_{pk}(m)) = m$ . La principal ventaja de los esquemas de encriptación asimétricos sobre los esquemas de encriptación simétricos es que  $pk$ , la clave pública, puede ser conocida por todos los participantes y por lo tanto todos pueden encriptar un mensaje.  $sk$ , la clave privada, solo es conocida por un participante y por lo tanto solo él puede desencriptar un mensaje encriptado con  $pk$ .

### Indistinguibilidad bajo ataque de texto plano escogido (IND-CPA)

También conocida como *seguridad semántica*, es una definición de privacidad de un esquema criptográfico. Apunta a que un esquema de encriptación  $\mathcal{E} = (K, E, D)$  es seguro si ningún atacante es capaz de distinguir entre la encriptación de cualesquier par de mensajes  $m_1, m_2$ .

**Definición 16** (Experimento IND-CPA). *Sea  $\mathcal{A}$  un algoritmo,  $\mathcal{E}$  un esquema de encriptación,  $\kappa$  el parámetro de seguridad y  $b$  un bit. , Definimos el experimento IND-CPA, denotado por  $\text{EXP}_{\mathcal{E}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A}, b, \kappa)$ , como la variable aleatoria resultante de ejecutar el experimento descrito en la Figura 2.1*

En el experimento IND-CPA básicamente se genera una clave al azar y se le permite a un adversario  $\mathcal{A}$  hacer preguntas a un *oráculo* que responde el texto cifrado correspondiente a la encriptación de uno (fijo) de los textos planos pasados como argumentos al oráculo. El objetivo de  $\mathcal{A}$  es determinar el bit  $b$ , es decir, cuál de los argumentos es el que encripta el oráculo. Notemos que  $\mathcal{A}$  puede obtener encriptaciones de los textos planos que desee, haciendo preguntas de la forma  $(m, m)$ . De ahí el nombre *texto plano escogido*, pues se le permite al adversario obtener las encriptaciones de textos planos escogidos por él.

**Definición 17** (Ventaja IND-CPA). *Definimos la ventaja IND-CPA de  $\mathcal{A}$ , denotada por  $\text{Adv}_{\mathcal{E}, \mathcal{A}}^{\text{IND-CPA}}(\kappa)$ , como sigue*

$$\text{Adv}_{\mathcal{E}, \mathcal{A}}^{\text{IND-CPA}}(\kappa) = |\text{EXP}_{\mathcal{E}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A}, b, \kappa) - \text{EXP}_{\mathcal{E}}^{\text{IND-CPA}}(\mathcal{A}, \bar{b}, \kappa)|.$$

**Definición 18** (Seguridad IND-CPA). *Decimos que un esquema de encriptación  $\mathcal{E}$  es IND-CPA seguro si para todo adversario  $\mathcal{A}$   $\text{Adv}_{\mathcal{E}, \mathcal{A}}^{\text{IND-CPA}}(\kappa)$  es una función despreciable en  $\kappa$ .*

El experimento IND-CPA ejecutado con adversario  $\mathcal{A}$ , esquema de encriptación  $\mathcal{E} = (K, E, D)$ , un bit  $b \in \{0, 1\}$  y parámetro de seguridad  $\kappa$  procede como sigue:

1. Escoger las clave del esquema,  $k \xleftarrow{R} K(\kappa)$ .
2. Ejecutar al adversario  $\mathcal{A}$  y cada vez que escriba  $(m_1, m_2)$  retornale  $E_k(m_b)$ .
3. Retornar lo que  $\mathcal{A}$  retorne.

Figura 2.1: El experimento IND-CPA

### 2.3.3. Esquemas de autenticación de mensajes

Sea  $\mathcal{MA} = (K, T, V)$ , donde  $K : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  es el algoritmo (aleatorizado) de generación de claves;  $T : \{0, 1\}^* \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}$  es el algoritmo (aleatorizado) de firmado de mensajes;  $V : \{0, 1\}^* \times \mathcal{M} \times \mathcal{T} \rightarrow \{0, 1\}$  es el algoritmo de verificación;  $\mathcal{M}$  es el conjunto de mensajes; y  $\mathcal{T}$  es el conjunto de firmas. Decimos que  $\mathcal{MA}$  es un esquema de autenticación de mensajes si para todo parámetro de seguridad  $\kappa \in \mathbb{N}$ , si  $k \xleftarrow{R} K(\kappa)$  (es decir  $k$  es generada al azar con parámetro de seguridad  $\kappa$ ) entonces todo mensaje  $m \in \mathcal{M}$  firmado correctamente es verificado correctamente, es decir  $V_k(m, T_k(m)) = 1$ .<sup>2</sup>

En algunas ocasiones, si  $\mathcal{MA} = (K, \text{MAC}, V)$ , con MAC nos referimos indistintamente al algoritmo de firma de mensajes como al esquema de autenticación de mensajes  $\mathcal{MA}$ .

### Infalsificabilidad ante ataques de mensajes escogidos UF-CMA

UF-CMA es una noción de seguridad que aplica a esquemas de autenticación de mensajes. Un esquema de firmas es UF-CMA si ningún adversario es capaz de falsificar la firma de un mensaje. Formalizamos esta noción con las siguientes definiciones.

**Definición 19** (Ventaja UF-CMA). *Definimos la ventaja UF-CMA de un adversario  $\mathcal{A}$  con el esquema  $\mathcal{MA} = (K, T, V)$  como:*

$$\text{Adv}_{\mathcal{MA}, \mathcal{A}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) = \Pr[\text{UF-CMA}_{\mathcal{MA}, \mathcal{A}}(\kappa) = 1]$$

donde  $\text{UF-CMA}_{\mathcal{MA}, \mathcal{A}}(\kappa)$  es la variable aleatoria obtenida al ejecutar el experimento de la figura 2.2.

---

<sup>2</sup>En general se puede considerar que

$$V_k(m, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_k(m) = t, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

cuando  $T$  no es aleatorizado.

El experimento UF-CMA ejecutado con adversario  $\mathcal{A}$ , esquema de autenticación de mensajes  $\mathcal{MA} = (K, T, V)$  y parámetro de seguridad  $\kappa$  procede como sigue:

1. Escoger la clave del esquema,  $k \xleftarrow{R} K(\kappa)$  e inicializar  $\Gamma \leftarrow \emptyset$ .
2. Ejecutar al adversario  $\mathcal{A}$  y cada vez que escriba  $m$  retornale  $T_k(m)$  y actualizar  $\Gamma \leftarrow \Gamma \cup \{m\}$ .
3. Cuando  $\mathcal{A}$  escriba  $(m, t)$ , si  $m \notin \Gamma$  y  $T_k(m) = t$  retornar 1 y 0 de lo contrario.

Figura 2.2: El experimento UF-CMA

La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CRS}^D$  parametrizada por una distribución  $D$  procede como sigue:

1. Si recibe  $(CRS)$  de  $P$ , verificar que  $P \in \mathcal{P}$ , donde  $\mathcal{P}$  es un conjunto de identidades, si  $P \notin \mathcal{P}$  ignorar a  $P$ .
2. Si no hay un valor  $r$  registrado escoger y registrar  $r \xleftarrow{R} D$ .
3. Enviar  $(CRS, r)$  a  $P$ .

Figura 2.3: La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CRS}$

**Definición 20** (Seguridad UF-CMA). *Decimos que un esquema de autenticación de mensajes  $\mathcal{MA}$  es UF-CMA seguro si para todo adversario polinomial aleatorizado  $\mathcal{A}$  la ventaja UF-CMA  $\text{Adv}_{\mathcal{MA}, \mathcal{A}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa)$  es una función despreciable en  $\kappa$ .*

### 2.3.4. Supuestos de inicialización

Los supuestos de inicialización son necesarios para implementar ciertos protocolos criptográficos que de otra forma serían imposible de realizar. Los supuestos de inicialización corresponden a funcionalidades ejecutadas por una entidad confiable, y en UC son representados por una funcionalidad ideal. A continuación listamos dos supuestos de inicialización.

#### String público aleatorio CRS

También conocido como string público de referencia, corresponde a una entidad confiable que publica un string con una distribución fija. En general se considera que la distribución del string es una uniforme.

En UC se modela CRS con la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CRS}$  [4] descrita en la Figura 2.3

La funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}_{KRR}$  parametrizada por una conjunto de protocolos permitidos  $\Phi$ , un algoritmo de generación de claves  $\text{Gen}$  y parámetro de seguridad  $\kappa$ , procede como sigue:

1. Si recibe un mensaje (**register**) de un participante honesto  $P_i$  que aún no se ha registrado escoger  $r \xleftarrow{R} \{0, 1\}^\kappa$ , luego calcular  $(pk_i, sk_i) \leftarrow \text{Gen}^\kappa(r)$  y guardar la tupla  $(P_i, pk_i, sk_i)$ .
2. Si recibe un mensaje (**register**,  $r$ ) de un participante corrupto  $P_i$  que aún no se ha registrado calcular  $(pk_i, sk_i) \leftarrow \text{Gen}^\kappa(r)$  y guardar la tupla  $(P_i, pk_i, sk_i)$ .
3. Si recibe un mensaje (**retrieve**,  $P_i$ ) de  $P_j$ , si existe una tupla registrada  $(P_i, pk_i, sk_i)$  retornar  $(P_i, pk_i)$ . De lo contrario retornar  $(P_i, \perp)$ .
4. Si recibe un mensaje (**retrievesecret**,  $P_i$ ) de  $P_j$ , si  $i = j$ ,  $P_j$  es corrupto esta corriendo un código en  $\Phi$  y existe una tupla registrada  $(P_i, pk_i, sk_i)$  retornar  $(P_i, sk_i)$ . De lo contrario retornar  $(P_i, \perp)$ .

Figura 2.4: La funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}_{KRR}$

### Interfaz de clave pública PKI

Una interfaz de clave pública o PKI (del inglés *Public Key Interface*) es un supuesto de inicialización que permite registrar pares de llaves públicas/privadas en una base de datos confiable y autenticada.

En GUC una forma de modelar PKI es con la funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}_{KRR}$  definida en la Figura 2.4 [21]. Notamos que  $\bar{\mathcal{G}}_{KRR}$  viene parametrizada por un conjunto  $\Phi$ , que corresponde a los protocolos a los cuales les es permitido obtener claves privadas.

# Capítulo 3

## Modelo Criptográfico

Demostremos las garantías de seguridad de nuestro protocolo en el *framework Generalized Universal Composability* (GUC). GUC [5] es una generalización del *framework Universal Composability* (UC) [2]. Ambos sirven para modelar protocolos criptográficos concurrentes, pero GUC adicionalmente modela protocolos concurrentes que comparten estado entre sí. Primero revisaremos el framework UC pues GUC se construye a partir de UC con pequeñas, pero muy significativas, modificaciones.

A modo de recomendación instamos al lector que desea tener una visión general de UC y GUC leer las secciones 3.1.1, 3.2.1 y 3.3 en las páginas 13, 24 y 29 respectivamente. Las demás secciones ahondan en detalles útiles para revisar en detalle los resultados de este trabajo, pero quizás engorrosos para tener una primera idea general de estos.

### 3.1. Universal Composability framework

#### 3.1.1. Descripción general

UC es una metodología para modelar modularmente protocolos criptográficos que son ejecutados en redes del “mundo real” (por ejemplo internet). El espíritu de UC es diseñar un protocolo y luego abstraer la seguridad que uno espera de él en un protocolo ideal, ejecutado en condiciones especiales que garantizan su seguridad. Luego se debe demostrar que ejecutar el protocolo real y ejecutar el protocolo ideal es esencialmente lo mismo, por lo tanto el protocolo real es tan seguro como el protocolo ideal.

Los protocolos reales pueden ser ejecutados concurrentemente con muchos otros protocolos y también pueden ser ejecutados distribuidos entre varios participantes. El protocolo puede ser monitoreado por terceros y algunos participantes pueden salirse arbitrariamente del pro-

protocolo atentando con la seguridad. En UC, todo el posible mal comportamiento es ejecutado por una sola máquina, el Adversario (real)  $\mathcal{A}$ . En una ejecución del protocolo el adversario puede espiar y manipular todos los mensajes intercambiados, también puede manejar la distribución de mensajes a su antojo, y además puede *corromper* participantes del protocolo y ejecutar código arbitrario en ellos.

Por otro lado están los protocolos ideales, llamados *funcionalidades ideales* denotadas por  $\mathcal{F}$ . Las funcionalidades ideales son ejecutadas por una entidad confiable e incorruptible. Para las funcionalidades ideales también existe un adversario ideal o *simulador*  $\mathcal{S}$ , pero este no puede espiar ni controlar la comunicación más de lo que la funcionalidad ideal permite.

La configuración en la que el protocolo real es ejecutado con el adversario real es conocida como *mundo real*, y la configuración en que la funcionalidad ideal es ejecutada con el adversario ideal es conocida como *mundo ideal*. En ambos mundos la ejecución del protocolo concurrentemente con otros protocolos está a cargo de una máquina especial conocida como el ambiente y denotado por  $\mathcal{Z}$ . De este modo en UC los protocolos pueden ser analizados aislados de resto del mundo.

Para demostrar que el protocolo real alcanza la seguridad deseada se debe tener que, para cualquier ejecución del protocolo en el mundo real y para cualquier estrategia adversarial (esto es para todo ambiente y para todo adversario) existe una estrategia adversarial con recursos limitados (un adversario ideal) que tiene el mismo efecto que la estrategia adversarial real (el ambiente no es capaz de percatarse de ninguna diferencia entre la ejecución del protocolo real y el protocolo ideal).

Para definir formalmente las nociones intuitivas descritas anteriormente es necesario introducir un modelo de cálculo conocido como *Máquina de Turing Interactiva* (desde ahora ITM), más precisamente sistemas de ITM. Las definiciones que vienen a continuación siguen, salvo pequeñas modificaciones, a la definiciones dadas por Canetti en [4].

### 3.1.2. Sistemas de Máquinas de Turing Interactivas

Las Máquinas de Turing Interactivas corresponden a Máquinas de Turing con cintas especiales que pueden ser escritas externamente. A dichas cintas las llamamos escribibles externamente (EW), y son de escritura única, es decir, el cabezal siempre se mueve a la derecha.

**Definición 21.** *Una Máquina de Turing Interactiva  $M$  es una Máquina de Turing con las*

*siguientes cintas:*

1. Una cinta EW de identidad.
2. Una cinta EW del parámetro de seguridad.
3. Una cinta EW de entrada.
4. Una cinta EW de comunicación entrante.
5. Una cinta EW de salidas de subrutinas.
6. Una cinta de salida.
7. Una cinta de bits aleatorios.
8. Una cinta de activación, de lectura y escritura y de 1 bit de tamaño.
9. Una cinta de lectura y escritura para trabajo.

La cinta de identidad contiene un string que representa la identidad de  $M$ , que se interpreta como si estuviera compuesto por dos substrings: el identificador de sesión (SID) y el identificador de participante (PID). Identificamos a cada instancia de una ITM (ITI) por el par  $\mu = (\langle M \rangle, id)$ , con  $\langle M \rangle$  el código de  $M$  e  $id$  el contenido de la cinta de identidad. En general omitimos los  $\langle \rangle$  y con  $M$  nos referimos tanto a la máquina como al código.

La cinta del parámetro de seguridad contiene un string de la forma  $1^k$ , con  $k$  el parámetro de seguridad <sup>1</sup>.

La cinta de salida contendrá la salida de  $M$  una vez que haya terminado.

La cinta de bits aleatorios contiene suficientes bits aleatorios para que  $M$  pueda realizar sus cálculos.

La cinta de trabajo es la usual cinta de trabajo de las Máquinas de Turing.

La cinta de activación tiene el valor 0 si la  $M$  no esta activada y 1 si lo esta.

La secuencia de configuraciones <sup>2</sup> de una ejecución de  $M$  esta compuesta por subsecuencias en las que en cada configuración la  $M$  esta activada. A dichas subsecuencias se les conoce como *secuencias de activación*.

Las otras cintas toman importancia cuando  $M$  es ejecutada “conectada” con otras máquinas

---

<sup>1</sup>El parámetro de seguridad indica el nivel de seguridad en el cual se está ejecutando la máquina, y en general mientras crece se debería tener que la seguridad del protocolo ejecutado con la máquina también crece.

<sup>2</sup>Una configuración corresponde a un objeto que determina completamente un instante en la computación de una MT. Podemos ver la ejecución de una MT como una secuencia de configuraciones, donde la primera configuración corresponde a la MT en su estado inicial y la(s) cinta(s) con la(s) entrada(s), y la configuración final corresponde a la MT en un estado final.

en un Sistema de ITMs (sITM).

**Definición 22.** *Un Sistema de ITMs  $S$  viene dado por  $S = (I, C)$ , donde  $I$  es la ITM inicial y  $C$  es la función de control  $C : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ .*

Inicialmente la ITI  $\mu_0 = (I, 0)$  es activada, el sITM terminará cuando  $I$  termine y su salida sera lo que  $I$  deje en su cinta de salida.

Una ITI  $\mu = (M, id)$  puede escribir en una de las cintas de otra ITI  $\mu' = (M', id')$ , para ello es necesario que  $\mu$  ejecute una instrucción especial llamada **escritura-externa** y debe especificar la cinta de  $\mu'$  en la que quiere escribir y los datos a escribir en esa cinta.<sup>3</sup> La semántica de la instrucción de **escritura-externa** es como sigue:

1. Si la función de control  $C$  aplicada a toda la secuencia de instrucciones **escritura-externa** que se han realizado hasta ahora retorna 0, entonces la instrucción es ignorada.
2. Si  $C$  retorna 1 pero no existe una ITI en el sITM  $\mu'' = (M'', id'')$  talque  $id'' = id'$ , se crea una nueva ITI con código  $M'$  y con identidad  $id'$ . Para ello se crea una nueva ITM que en la cinta de identidad contiene  $id'$ , el la cinta del parámetro de seguridad contiene  $1^k$  y en la cinta de bits aleatorios contiene suficientes bits aleatorios. A continuación se evalúa el punto siguiente.
3. Si  $C$  retorna 1 y existe una ITI en el sITM  $\mu'' = (M'', id'')$  talque  $id'' = id'$ :
  - a) Si la cinta objetivo de la instrucción era la cinta de comunicación entrante de  $\mu'$ , entonces los datos especificados son escritos en la cinta de comunicación entrante de  $\mu''$  y  $\mu''$  es activada. Notemos que esto es hecho independiente de si el código de  $\mu''$  es el mismo código especificado por  $\mu$ , con el fin de rescatar que una ITI no conoce el código de la ITI con que se comunica a través de escrituras en la cinta de comunicación entrante.
  - b) Si la cinta objetivo era la cinta de entrada de  $\mu'$  y  $M' = M''$ , entonces los datos especificados son escritos en la cinta de entrada de  $\mu''$  y  $\mu''$  es activada. En este

---

<sup>3</sup>Formalmente podríamos decir que  $M$  entra en un estado especial y en su cinta de trabajo se encuentra un string  $x$  que determina  $\mu'$ , la cinta objetivo y los datos a escribir en la cinta objetivo.

caso la instrucción modela llamados a otras ITIs como subrutina, dentro de un entorno seguro ( $\mu$  conoce el código que esta ejecutando  $\mu''$ ).

- c) Si la cinta objetivo es la cinta de salida de subrutina de  $\mu'$ , entonces los datos especificados son escritos en la cinta de salida de subrutina de  $\mu''$ . En este caso la instrucción modela el retorno de una llamada a subrutina, en que la subrutina no conoce el código de la ITI que la llamó.

Adicionalmente consideramos funciones de control *extendidas* las cuales, además de permitir o no permitir instrucciones **escritura-externa**, son capaces de traducir una instrucción de **escritura-externa** en otra. Por ejemplo, una función de control extendida puede obligar a que todas las ITM creadas tengan un código preespecificado  $M$  traduciendo cualquier instrucción **escritura-externa** con código  $N$  a una instrucción de **escritura-externa** con código  $M$ . Los sITM con función de control extendida los llamaremos sITM extendidos.

Como veremos más adelante, nos interesan especialmente la salida de un sITM.

**Definición 23.** Denotamos a la variable aleatoria obtenida al ejecutar el sITM  $(I, C)$  con parámetro de seguridad  $k$ , entrada  $x$  y escogiendo los bits aleatorios necesarios para su ejecución al azar por  $\text{OUT}_{(I,C)}(k, x)$ .  $\text{OUT}_{(I,C)}$  denota a la familia de variables aleatorias  $\{\text{OUT}_{(I,C)}(k, x)\}_{k \in \mathbb{N}, x \in \{0,1\}^*}$ .

Como es usual nos limitaremos a sITMs “eficientes”, es decir el tiempo completo de ejecución esta acotado por  $p(|x| + k)$ , con  $p$  un polinomio. Se puede garantizar que un sITM  $(I, C)$  es eficiente si la ITM inicial es una PPT [15] (del inglés *Probabilistic Polynomial time Turing machine*).

**Definición 24.** Sea  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función. Decimos que una ITM  $M$  está localmente  $p$ -acotada si, en cualquier punto de su ejecución, el numero total de pasos tomados por  $M$  es a lo más  $p(n)$ , donde

$$n = k + n_I - n_O - k \cdot n_N,$$

$k$  es el parámetro de seguridad,  $n_I$  es el numero total de bits escritos en la cinta de entrada de  $M$ ,  $n_O$  es el numero total de bits escritos por  $M$  a otras ITMs, y  $n_N$  es el número total de otras ITMs en las que  $M$  escribe.

**Definición 25.** Si una ITM  $M$  esta localmente  $p$ -acotada y además  $M$  solo escribe en ITMs localmente  $p$ -acotadas, entonces decimos que  $M$  es  $p$ -acotada.

**Definición 26.** Una ITM  $M$  es una PPT si existe un polinomio  $p$  talque  $M$  es  $p$ -acotada.

### 3.1.3. Ejecución de un protocolo

Definamos primero qué es un protocolo y una instancia de un protocolo.

**Definición 27** (Protocolo PPT). *Un protocolo PPT (o simplemente protocolo)  $\pi$  es la PPT que contiene el código a ejecutar por cada participante del protocolo.*

**Definición 28** (Instancia de un protocolo). *Dado un sITM  $S$ , una instancia de un protocolo  $\pi$  con SID  $sid$  es el conjunto de ITIs cuyo código es  $\pi$  y cuyo SID es  $sid$ .*

**Definición 29** (Participante). *Una ITI  $\mu$  es un participante de una instancia de  $\pi$  con SID  $sid$  si el SID de  $\mu$  es  $sid$ .*

**Definición 30** (Subparticipante). *Una ITI  $\mu$  es subparticipante de una sesión del protocolo  $\pi$  si algún participante o (subparticipante) de la sesión de  $\pi$  escribe en la cinta de comunicación entrante o en la cinta de input de  $\mu$ .*

La ejecución de un protocolo en UC está parametrizada por tres ITMs:

- El protocolo a ser ejecutado  $\pi$ .
- El ambiente  $\mathcal{Z}$ .
- El adversario  $\mathcal{A}$  (o  $\mathcal{S}$ ).

Con las tres ITMs construimos el sITM extendido  $(\mathcal{Z}, C_{\text{EXEC}}^{\pi, \mathcal{A}})$ . La función de control  $C_{\text{EXEC}}^{\pi, \mathcal{A}}$  básicamente se encarga de que la primera ITM invocada por  $\mathcal{Z}$  sea  $\mathcal{A}$ , y de que  $\mathcal{Z}$  sólo invoque ITMs con código  $\pi$  y SID fijo. Adicionalmente se encarga de que todas las corrupciones, es decir las instrucciones ejecutadas por el adversario que le permiten tomar control de un participante, sean producto de una llamada del ambiente al adversario. En la Figura 3.1 se detalla su funcionamiento.

Denotamos la salida de la ejecución de un protocolo  $\pi$  en UC por  $\text{EXEC}_{\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \pi} = \text{OUT}_{(\mathcal{Z}, C_{\text{EXEC}}^{\pi, \mathcal{A}})}$ . En la Figura 3.2 podemos ver como luce la ejecución de un protocolo  $\pi$  con ambiente  $\mathcal{Z}$  y adversario  $\mathcal{A}$  en UC. las flechas indican escrituras de una ITM en otra.

### 3.1.4. Teorema de composición

La noción principal que entrega UC es la emulación de protocolos, que viene dada por la inhabilidad de  $\mathcal{Z}$  de distinguir entre la ejecución de dos protocolos.

**Definición 31.** *Decimos que un protocolo  $\pi$  UC-emula a otro protocolo  $\phi$  si y sólo si para cualquier ambiente  $\mathcal{Z}$  y para cualquier adversario  $\mathcal{A}$  existe un adversario  $\mathcal{S}$  tal que*

$$\text{EXEC}_{\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \pi} \approx \text{EXEC}_{\mathcal{Z}, \mathcal{S}, \phi}$$

La función de control  $C_{EXEC}^{\pi, \mathcal{A}}$  ejecutada con ambiente  $\mathcal{Z}$ , adversario  $\mathcal{A}$  y protocolo  $\pi$  procede como sigue:

1. Para el ambiente  $\mathcal{Z}$ :
  - a) El código de la primera instrucción **escritura-externa** es cambiado por el código de  $\mathcal{A}$ .
  - b) Para cualquier otra instrucción **escritura-externa**, si la ITI objetivo es distinta de  $\mathcal{A}$  entonces cambiar el código por  $\pi$ .
2. Cada vez que el adversario  $\mathcal{A}$  corrompe a un participante escribiendo la instrucción **escritura-externa** donde la ITI objetivo es otro participante con el parámetro especial **corrupt**, la función de control se asegura que anteriormente  $\mathcal{Z}$  haya escrito en  $\mathcal{A}$  la instrucción de corrupción.
3. Cada vez que un participante o subparticipante ejecuta la instrucción **escritura-externa** con ITI objetivo otro participante o subparticipante, es el adversario  $\mathcal{A}$  quien es activado y en quien es escrito el contenido de la instrucción **escritura-externa**.

Figura 3.1: La función de control  $C_{EXEC}^{\pi, \mathcal{A}}$

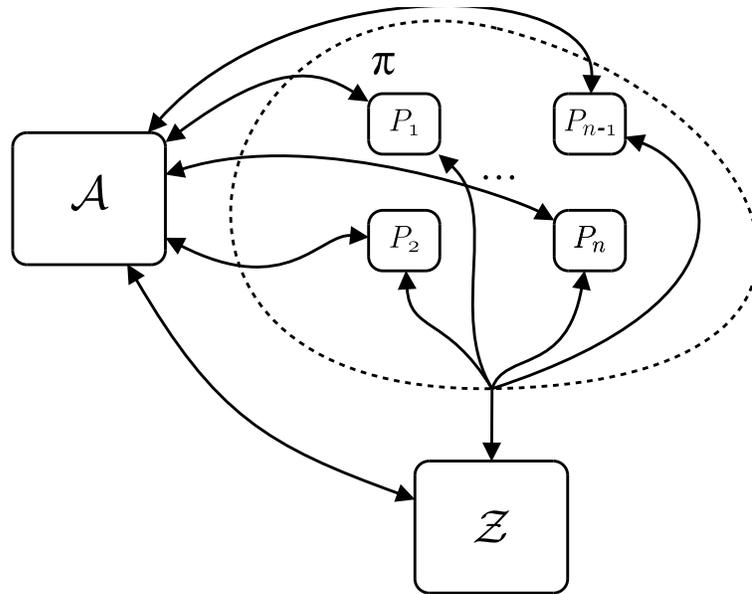


Figura 3.2: Ejecución de un protocolo en UC

Supongamos que tenemos un protocolo  $\pi$ , que llama como subrutina a  $\rho$ . Si ningún ambiente puede distinguir entre la ejecución del protocolo  $\rho$  de otro protocolo  $\phi$ , es útil preguntarse si se pueden cambiar todas las llamadas de  $\pi$  a  $\rho$  por llamadas a  $\phi$  sin cambiar el funcionamiento de  $\pi$ . La conjetura anterior es corroborada por el Teorema 1, el Teorema de Composición. Definamos primero que es “cambiar todas las llamadas a  $\rho$  por llamadas a  $\phi$ ”.

**Definición 32** (Operador Composición). *Sea  $\pi$  un protocolo que (posiblemente) hace llamadas a  $\rho$ . Definimos el operador composición / de forma tal que  $\pi^{\rho/\phi}$  es idéntico que el protocolo  $\pi$  salvo que cada instrucción *escritura-externa* con código  $\rho$ , es cambiada por la misma instrucción *escritura-externa* con código  $\phi$ .*

Una propiedad adicional que necesitan cumplir los protocolos es que sean *subroutine respecting*, que básicamente significa que no comparten estado.

**Definición 33** (Protocolo subroutine respecting). *Decimos que un protocolo  $\rho$  es subroutine respecting si ningún participante o subparticipante de  $\rho$  pasa input o recibe output de una ITI que es participante o subparticipante de otra instancia de algún protocolo.*

**Teorema 1** (Composición). *Sean  $\pi, \rho, \phi$  protocolos tales que  $\rho$  UC-emula a  $\phi$  y  $\rho$  y  $\phi$  son protocolos subroutine respecting. Entonces el protocolo  $\pi^{\rho/\phi}$  UC-emula al protocolo  $\pi$ .*

La demostración del Teorema 1 se puede encontrar en [1]. A continuación mostramos intuitivamente porque el teorema se debería cumplir.

Notemos que el protocolo  $\pi$  puede invocar una cantidad indeterminada de protocolos que se pueden ejecutar concurrentemente con  $\rho$ . Es precisamente por eso que  $\pi^{\rho/\phi}$  podría no UC-emular a  $\pi$ , pues en la configuración en la cual es ejecutado  $\phi$ , donde ningún ambiente puede distinguirlo de  $\rho$ , se ejecuta solamente una instancia de  $\phi$  y de ningún otro protocolo más. Lo que permite concluir acerca de  $\pi^{\phi/\rho}$  es la cuantificación sobre todos los ambientes y que tanto  $\rho$  como  $\phi$  son protocolos *subroutine respecting*. Al cuantificar sobre todos los ambientes estamos diciendo que, en particular, la UC-emulación también se tiene para ambientes que simulan internamente ejecuciones de otros protocolos como las que podría hacer  $\pi$ . El único problema podría ser que las ejecuciones en paralelo de otros protocolos estén “correlacionadas” de alguna forma con  $\rho$ , pero esto no es posible pues al ser  $\rho$  *subroutine respecting* su ejecución es independiente de cualquier otro protocolo. Dicho de otra forma, para que un protocolo este “correlacionado” con  $\rho$  es necesario que  $\rho$  lo llame directamente, o que ambos llamen a un protocolo en común. El primer caso no es problemático, pues el protocolo correlacionado sería un subprotocolo de  $\rho$  y sería parte de una ejecución de  $\rho$ . El segundo caso no es posible, pues el protocolo que  $\rho$  compartiría sería una instancia externa

y contradeciría que  $\rho$  es *subroutine respecting*.

Otra forma de interpretar el teorema de composición es que nos permite asumir que el protocolo  $\pi$  hace llamadas a  $\phi$  y no a  $\rho$ , lo cual puede ser útil cuando no sabemos si  $\rho$  es seguro pero asumimos que  $\phi$  si lo es. En tal caso  $\phi$  sería una *funcionalidad ideal*.

### 3.1.5. Funcionalidades Ideales

Para definir la seguridad de un protocolo en UC es necesario diseñar una funcionalidad ejecutada por una entidad confiable en un protocolo que consideramos seguro. A tal funcionalidad se le llama *funcionalidad ideal* y generalmente se le denota por la letra  $\mathcal{F}$ . Al protocolo se le llama *protocolo ideal* y se denota por  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$ . Todo el cómputo del protocolo es realizado por  $\mathcal{F}$ , pues los participantes solo ejecutan el código del *participante tontito*.

**Definición 34** (Participante tontito). *Una instancia del participante tontito, denotado por  $\tilde{P}$ , es una ITI cuyo código es el siguiente:*

1. Si recibe  $m$ , escribe  $m$  en cinta de entrada de la funcionalidad  $\mathcal{F}$ .
2. Si  $\mathcal{F}$  retorna  $m$ , escribe  $m$  en su cinta de output.

La funcionalidad ideal recibirá entradas de los participantes tontitos y escribirá en su cinta de salida de subrutina los resultados del cómputo que corresponden a cada participante. Por lo tanto su funcionamiento entrada/salida debe ser el deseado, esto es la funcionalidad debe ser *correcta*. Adicionalmente debe revelar solo la información necesaria, de modo tal que la consideremos *segura*. Una ITI que ejecuta el código de una funcionalidad ideal es creada igual que cualquier otra ITI, a excepción que su cinta de identidad tendrá como contenido un string de la forma  $sid|| \perp$ , de modo tal que  $\perp$  es un símbolo especial distinto a cualquier otro PID.

Como en una instancia del protocolo  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$  la comunicación entre participantes y funcionalidades (y de este modo entre participantes) es por la cinta de entrada y la cinta de salida de subrutina, el adversario del protocolo ideal  $\mathcal{S}$  se ve limitado en su capacidad de espiar o modificar la comunicación. En primera instancia  $\mathcal{S}$  no tiene ninguna injerencia en la comunicación, pero en general para que  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$  sea un protocolo “implementable” por un protocolo real es necesario que  $\mathcal{F}$  de cierta injerencia a  $\mathcal{S}$  en la comunicación. En general se asume que las respuestas de  $\mathcal{F}$  a los participantes tontitos pueden ser retardadas tanto como

$\mathcal{S}$  lo desee, incluso por un tiempo infinito. El filtraje de información dependerá del propósito de  $\mathcal{F}$ .

En la figura 3.3 se puede ver como luce una ejecución de la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  con ambiente  $\mathcal{Z}$  y simulador  $\mathcal{S}$  en UC. De forma similar a la UC-emulación definimos la UC-realización de una funcionalidad ideal.

**Definición 35** (UC-realización). *Decimos que un protocolo  $\pi$  UC-realiza a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  si para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario real  $\mathcal{A}$  existe un adversario ideal  $\mathcal{S}$  tal que*

$$\text{EXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{A},\pi} \approx \text{EXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{S},\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}}$$

Como corolario del Teorema 1 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.** *Sean  $\pi, \rho$  protocolos y  $\mathcal{F}$  una funcionalidad ideal tales que  $\rho$  UC-realiza  $\mathcal{F}$  y  $\rho$  es un protocolo subroutine respecting. Entonces el protocolo  $\pi^{\rho/\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}}$  UC-emula a  $\pi$ .*

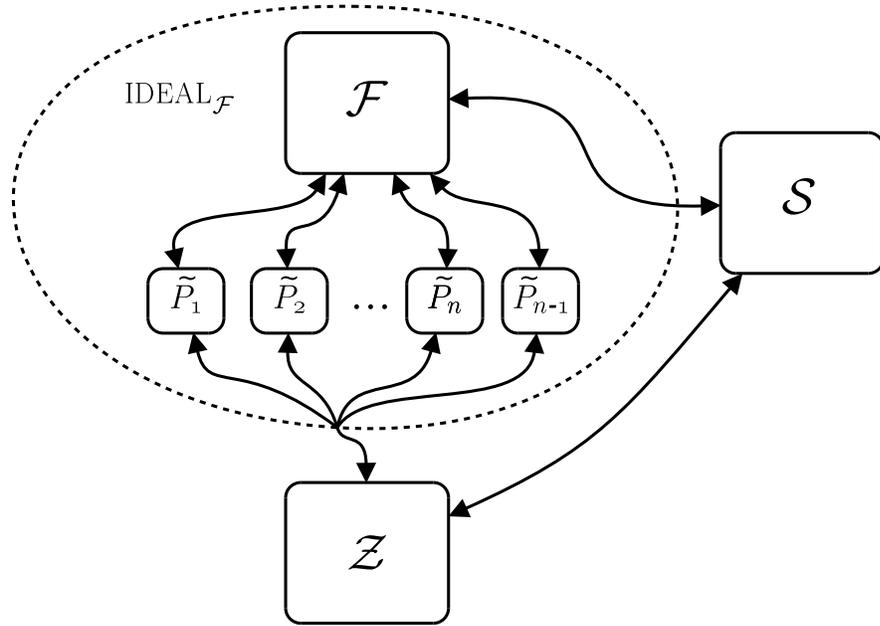


Figura 3.3: Ejecución del protocolo  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$  en UC

El Corolario 1 es lo que le da sentido a la “metodología” de UC, pues permite diseñar y probar la seguridad de protocolos criptográficos complejos de forma modularizada, al introducir los *modelos híbridos*.

**Definición 36** (Modelo Híbrido). *Decimos que un protocolo  $\pi$  es ejecutado en el modelo  $\mathcal{F}$ -híbrido si cada participante de  $\pi$  puede hacer llamadas a una instancia local de la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$ .*

De forma similar se puede definir el modelo  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ -híbrido para funcionalidades ideales  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ .

En la Figura 3.4 se puede apreciar la forma de analizar en UC un protocolo  $\pi$  que llama como subrutina al protocolo  $\rho$ . Primero se debe mostrar que el protocolo  $\rho$  UC-emula a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$ . Por lo tanto, en virtud del Teorema de Composición, es posible reemplazar todas las llamadas que  $\pi$  hace a  $\rho$  por llamadas a  $\mathcal{F}$ . Lo que permite, en la Figura 3.4, pasar del escenario de más a la izquierda al escenario del medio. Posteriormente se debe demostrar que el protocolo  $\pi$  UC-emula a la funcionalidad ideal  $\mathcal{G}$  en el modelo  $\mathcal{F}$ -híbrido. Lo que permite, en la Figura 3.4, pasar del escenario del medio al escenario más a la derecha. Finalmente, en vista de la transitividad de la relación  $\approx$ , se puede concluir que  $\pi$  UC-emula  $\mathcal{G}$  en el modelo *plano*. Esto es, sin acceso a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$ .

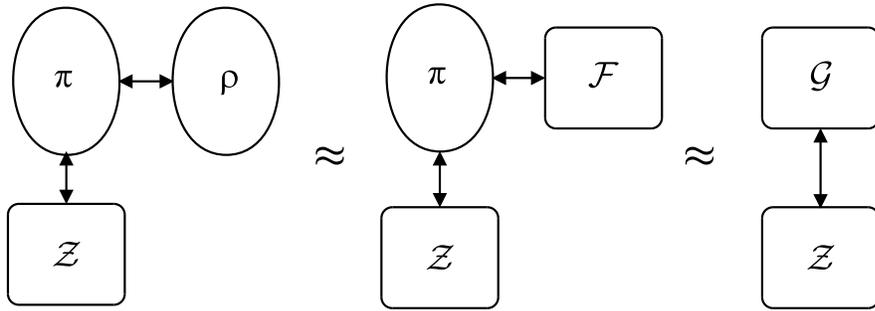


Figura 3.4: Análisis modularizado de un protocolo

### 3.1.6. Modelos de corrupción

Los modelos de corrupción corresponden a considerar distintos tipos de adversarios. Hay que notar que el teorema de composición se sigue teniendo para cualquier clase de adversarios y por lo tanto para cualquier modelo de corrupción. A continuación listamos dos modelos de corrupción.

#### Adversarios estáticos

En este caso el conjunto de participantes a los que corrompe el adversario está fijo a priori, por lo tanto no pueden depender de los distintos valores que se van obteniendo en la ejecución del protocolo. En este caso se puede asumir que el adversario corrompe a los participantes antes de la ejecución del protocolo.

El conjunto de adversarios estáticos está estrictamente contenido en el conjunto de adversarios y corresponde a una simplificación irreal de UC. Sin embargo es útil para comenzar a estudiar un protocolo en UC.

### Adversarios dinámicos

Al contrario del modelo anterior, en este caso el adversario no se encuentra limitado y las corrupciones pueden irse haciendo conforme avanza el protocolo.

## 3.2. Generalized Universal Composability

### 3.2.1. Descripción general

Como vimos en la Sección 3.1, para poder aplicar el Teorema de Composición (teorema 1) es necesario que el protocolo sea *subroutine respecting*. Esto es, el protocolo y todas sus subrutinas no deben intercambiar entradas o salidas con otros protocolos externos a la sesión. Así, el protocolo analizado es independiente de cualquier otro protocolo por lo que su comportamiento entrada/salida y los mensajes intercambiados en su ejecución también son independientes. Sin embargo puede resultar poco realista en ciertas ocasiones.

Una escenario donde no es realista asumir que un protocolo es subroutine respecting es donde es necesario asumir la existencia de funcionalidades ideales existentes a priori, las cuales no son UC-realizadas por un protocolo. A esto se le conoce como *Supuestos de Inicialización* o *Setup Assumptions*. Esto es necesario cuando se desea desarrollar un protocolo que UC-realice cierta funcionalidad, que se sabe irrealizable sin una setup assumption. Por ejemplo consideremos el caso de *Zero Knowledge Proofs* (o *Pruebas de Nula Divulgación* y desde ahora ZKP), es sabido que es imposible UC-realizar ZKP (UC-realizar la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{ZK}^{\mathcal{R}}$  para alguna relación binaria  $\mathcal{R}$ ) sin setup assumptions como por ejemplo el uso de un “string público aleatorio” (CRS) (del inglés *common random string*) cuando la mayoría de los participantes son corruptos [7].

En UC, el CRS es modelado como una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CRS}$  que hace público un string aleatorio. Ciertamente  $\mathcal{F}_{CRS}$  no puede ser UC-realizado por ningún protocolo, pues en ese caso sería posible UC-realizar  $\mathcal{F}_{ZK}^{\mathcal{R}}$ . Para obtener la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CRS}$  en el mundo real es necesario que  $\mathcal{F}_{CRS}$  sea ejecutado por un participante incorruptible e impersonable.

Esta suposición es imposible de obtener,<sup>4</sup> sólo es posible usar técnicas para evitar ataques, y no son infalibles.

Suponiendo la existencia de  $\mathcal{F}_{CRS}$ , la forma de probar que un protocolo  $\pi_{ZK}^R$  que UC-realiza  $\mathcal{F}_{ZK}^R$  sería probar que  $\pi_{ZK}^R$  en el modelo  $\mathcal{F}_{CRS}$ -híbrido. Pero esta configuración tiene el inconveniente que se considera que  $\mathcal{F}_{CRS}$  es local al protocolo, por lo tanto para cada instancia de  $\pi_{ZK}^R$  existiría una instancia de  $\mathcal{F}_{CRS}$ . Más aún, también debería existir una instancia de  $\mathcal{F}_{CRS}$  para cualquier otro protocolo que lo necesite.

La forma correcta de modelar una setup assumption es considerar que es compartida por cada protocolo que hace uso de ella, pero en ese caso los protocolos dejan de ser subroutine respecting. En [19] se muestra que en el caso de un  $\mathcal{F}_{CRS}$  compartido usado para UC-realizar ZKP, el protocolo perdería la propiedad de *deniability* que es natural de obtener en ZKP. Más aún, en [24] se muestra que inclusive esto puede llevar a la pérdida de la correctitud del protocolo.

### 3.2.2. Ejecución de un protocolo en GUC

En GUC se define una ejecución de  $\pi$  donde el ambiente no está limitado a ejecutar sólo ITIs con el código del protocolo analizado (a excepción del adversario) y SID fijo, ya que un protocolo en GUC es ejecutado con el sITM  $(\mathcal{Z}, C_{GEXEC}^{\pi, \mathcal{A}})$ , donde  $C_{GEXEC}^{\pi, \mathcal{A}}$  es idéntica a  $C_{EXEC}^{\pi, \mathcal{A}}$ , salvo que no limita a  $\mathcal{Z}$  como en UC pues permite al ambiente ejecutar cualquier protocolo. De este modo un protocolo  $\pi$  ese ejecutado concurrentemente con otros protocolos que comparten estado con  $\pi$  y por lo tanto pueden existir ataques a un protocolo mediante la ejecución paralela de protocolos maliciosamente correlacionados con  $\pi$ , lo que no es posible de modelar en UC.

Denotamos la salida de la ejecución de un protocolo  $\pi$  en GUC por  $GEXEC_{\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \pi} = \text{OUT}_{(\mathcal{Z}, C_{GEXEC}^{\pi, \mathcal{A}})}$ . En la figura 3.5 se puede ver como luce la ejecución de un protocolo  $\pi$  con ambiente  $\mathcal{Z}$ , adversario  $\mathcal{A}$  y funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}$  en GUC. Notemos que  $\mathcal{Z}$  puede ejecutar protocolos  $\rho_1, \dots, \rho_m$  (posiblemente “adversariales”) concurrentemente con  $\pi$ , y algunos de ellos pueden hacer llamadas a  $\bar{\mathcal{G}}$ .

---

<sup>4</sup>Básicamente hay que tener un servidor de CRS que nadie puede “hackear” ni impersonar.

Definimos la GUC-emulación como sigue.

**Definición 37** (GUC-emulación). *Decimos que un protocolo  $\pi$  GUC-emula a otro protocolo  $\rho$  si para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario real  $\mathcal{A}$  existe un adversario ideal  $\mathcal{S}$  talque:*

$$\text{GEXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{A},\pi} \approx \text{GEXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{A},\rho}$$

### 3.2.3. Un modelo más simple para GUC

Un ambiente que ejecuta un conjunto arbitrario de protocolos puede resultar complejo de manipular en las pruebas de seguridad, y resulta más cómodo trabajar con un modelo más simple aunque no menos expresivo. En efecto es posible obtener un modelo equivalente a GUC, llamado EUC (del inglés *Externalized-subroutine UC*), en el cual el ambiente sólo puede ejecutar una instancia del protocolo más una *funcionalidad compartida*.

Las funcionalidades compartidas permiten al ambiente simular internamente la ejecución concurrente de otros protocolos. Denotadas por la barra superior  $\bar{\cdot}$ , son idénticas que una funcionalidad ideal, salvo que aceptan input de cualquier ITI independiente de su SID. Su cinta de identidad contiene el string  $\#|| \perp$ , donde  $\#$  es un SID distinto a todos los otros SID.

En EUC, un protocolo  $\pi$  puede no ser subroutine respecting, pero sí debe ser  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting, donde  $\bar{\mathcal{G}}$  es una funcionalidad compartida. Al ser  $\pi$   $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting sólo puede comunicarse a través de  $\bar{\mathcal{G}}$ , lo cual no resulta extraño pues en general los protocolos criptográficos comparten estado de forma encapsulable en una funcionalidad (por ejemplo CRS o PKI).

**Definición 38** (Protocolo  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting). *Decimos que un protocolo es  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting si es subroutine respecting sin tomar en cuenta llamadas a una funcionalidad  $\bar{\mathcal{G}}$ .*

A la salida del sITM  $(\mathcal{Z}, C_{EEXEC}^{\pi, \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{A}})$ , donde  $C_{EEXEC}^{\pi, \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{A}}$  es una función de control como la de UC pero que adicionalmente permite al ambiente llamar a una funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}$ , la denotamos por  $\text{EEXEC}_{\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \pi}^{\bar{\mathcal{G}}} = \text{OUT}_{(\mathcal{Z}, C_{EEXEC}^{\pi, \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{A}})}$ . En la figura 3.6 podemos ver como luce la ejecución de un protocolo  $\pi$  con ambiente  $\mathcal{Z}$ , adversario  $\mathcal{A}$  y funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}$ . En la figura 3.7 podemos ver como luce la ejecución de una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  con ambiente  $\mathcal{Z}$ , adversario  $\mathcal{A}$  y funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}$ .

Definimos la EUC-emulación como sigue.

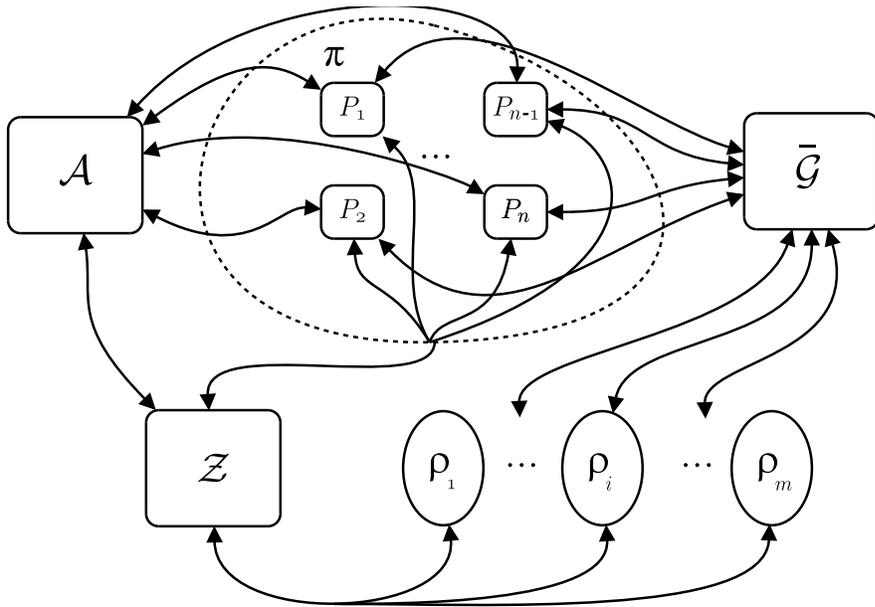


Figura 3.5: Ejecución del protocolo  $\pi$  en GUC

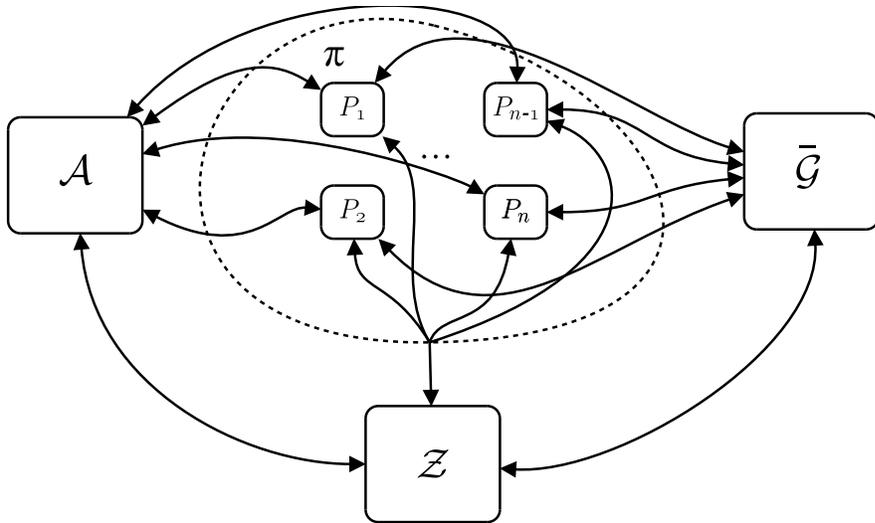


Figura 3.6: Ejecución del protocolo  $\pi$  en EUC

**Definición 39** (EUC-emulación). *Decimos que un protocolo  $\pi$  EUC-emula con funcionalidad compartida  $\bar{\mathcal{G}}$  a otro protocolo  $\rho$  si para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario real  $\mathcal{A}$  existe un adversario ideal  $\mathcal{S}$  tal que*

$$\text{EEXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{A},\pi}^{\bar{\mathcal{G}}} \approx \text{EEXEC}_{\mathcal{Z},\mathcal{S},\rho}^{\bar{\mathcal{G}}}.$$

Se puede demostrar que un protocolo que EUC es sólo una transformación sintáctica de UC, pues el poder de distinción del ambiente es el mismo en ambos.

**Teorema 2.** *Sean  $\pi$  y  $\rho$  dos protocolos  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting,  $\pi$  GUC-emula a  $\rho$  si y solo si  $\pi$  EUC-emula  $\rho$ .*

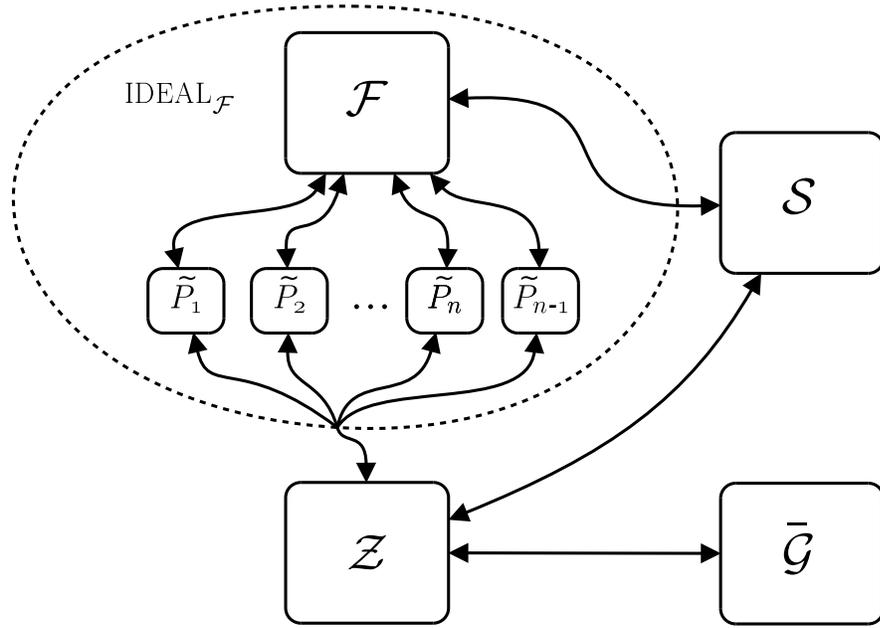


Figura 3.7: Ejecución del protocolo  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$  en EUC

La demostración del Teorema 2 se puede encontrar en [5]. A continuación mostramos porque el Teorema se debería tener. Intuitivamente podemos notar que todo ambiente  $\mathcal{Z}$  que es ejecutado en GUC puede ser simulado por otro ambiente EUC  $\mathcal{Z}'$ , que simula para  $\mathcal{Z}$  todos las instancias de otros protocolos gracias a su acceso a  $\bar{\mathcal{G}}$ . La otra implicancia es trivial dado que EUC es un caso especial de GUC.

Al igual que en UC existe un teorema de composición, que permite reemplazar protocolos reales por protocolos ideales.

**Teorema 3** (Teorema de Composición generalizado). *Sean  $\pi, \rho, \phi$  protocolos tales que  $\rho$  GUC-emula a  $\phi$  y  $\rho$  y  $\phi$  son protocolos  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting. Entonces el protocolo  $\pi^{\rho/\phi}$  GUC-emula al protocolo  $\pi$ .*

**Corolario 2.** Sean  $\pi, \rho$  protocolos y  $\mathcal{F}$  una funcionalidad ideal tales que  $\rho$  GUC-realiza  $\mathcal{F}$  y  $\rho$  es un protocolo  $\bar{\mathcal{G}}$ -subroutine respecting. Entonces el protocolo  $\pi^{\rho/\text{IDEAL}\mathcal{F}}$  GUC-emula a  $\pi$ .

### 3.3. Una notación más simple para (G)UC

Revisaremos la notación ocupada en [22] pues simplifica el análisis de protocolos en el caso en que el número de participantes puede estar fijo a priori. En [22] Wikström introduce una nueva máquina a UC, llamada el modelo de comunicación. El modelo de comunicación esta a cargo de todos los aspectos de la comunicación entre las ITIs en UC. En el mundo real el modelo de comunicación real  $\mathcal{C}$  delega todo el *ruteo* de mensajes al adversario. Por otro lado, en el mundo ideal el modelo de comunicación ideal  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  solo permite al adversario determinar el retraso (inclusive infinito retraso) con que cada mensaje es entregado de una funcionalidad ideal a un participante.

Esta notación simplifica la definición de qué puede hacer el adversario en una ejecución, en efecto permite definir el mundo real y el mundo ideal cambiando sólo el modelo de comunicación. La introducción del modelo de comunicación también hace innecesario el uso de SIDs, pues los modelos de comunicación son locales a cada instancia de un protocolo. En las Figuras 3.8 y 3.9 se puede apreciar la configuración de una ejecución con modelo de comunicación para el mundo real e ideal respectivamente.

Denotamos por ITM el conjunto de todas las ITMs.

**Definición 40** (grafo de ITMs). *Un grafo de ITMs en un conjunto vértices  $V = \{P_1, \dots, P_k\} \subset \text{ITM}$  con un conjunto de aristas  $E$  tales que  $(V, E)$  es un grafo conexo, y ningún  $P_i$  se puede comunicar con una máquina fuera de  $V$ . Si  $(P_i, P_j) \in E$  entonces se dice que  $P_i$  tiene un link con  $P_j$  y viceversa <sup>5</sup>. Sea ITMG el conjunto de todos los grafos de ITMs.*

*Durante la ejecución de un grafo de ITMs, a lo más un participante se encuentra activo. Un participante activo puede desactivarse y activar a alguno de sus vecinos entregándole cierta entrada  $x$ , o puede detenerse en cuyo caso la ejecución de grafo de ITMs se detiene.*

El modelo de comunicación real modela una red con comunicación asíncrona, en donde el adversario puede leer, borrar, modificar e insertar cualquier mensaje de su elección.

**Definición 41.** *Un modelo de comunicación real  $\mathcal{C}$  es una ITM con un link  $l_{P_i}$  a  $P_i$  para  $i = 1, \dots, k$ , y un link  $l_{\mathcal{A}}$  al adversario real  $\mathcal{A}$ . Su código se define como sigue.*

1. Si  $m$  es leído en  $l_s$  donde  $s \in \{P_1, \dots, P_k\}$ , entonces  $(s, m)$  es escrito en  $l_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{A}$  es activado.

---

<sup>5</sup>Las ITMs de esta formulación tienen tantas cintas de comunicación como vecinos.

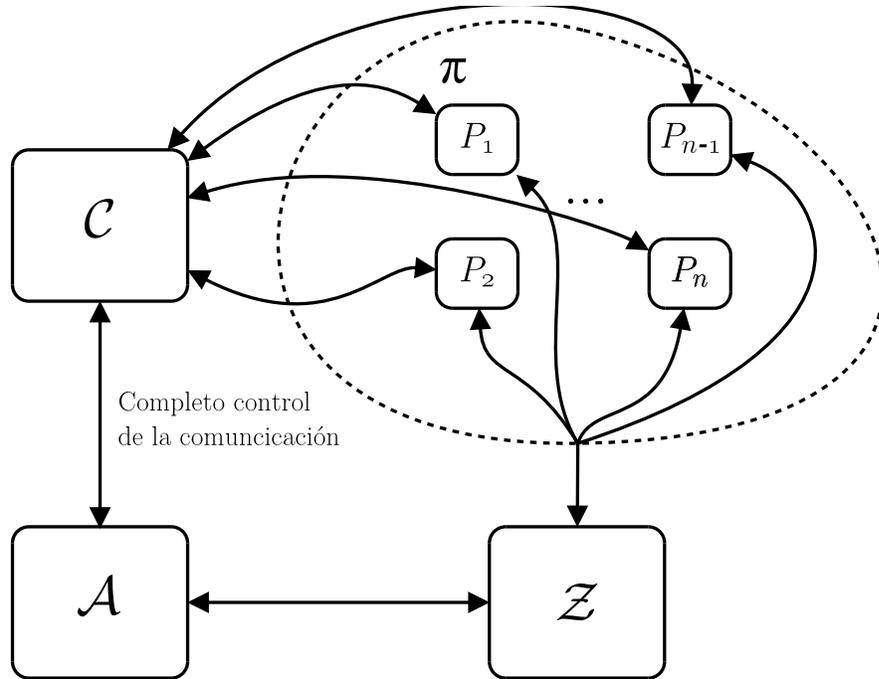


Figura 3.8: Ejecución del protocolo  $\pi$  con modelo de comunicación real  $\mathcal{C}$ .

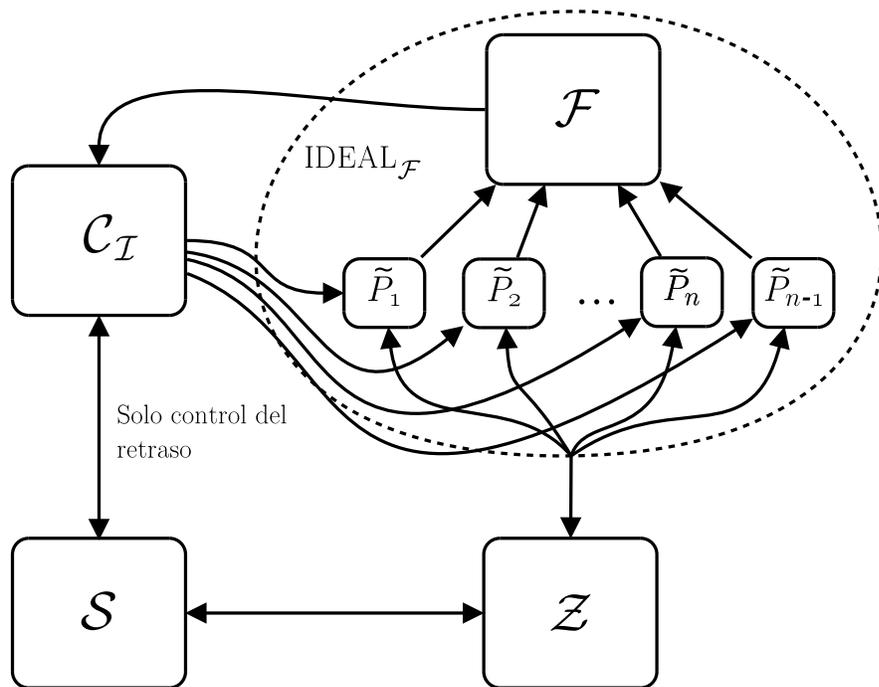


Figura 3.9: Ejecución del protocolo  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$  con modelo de comunicación ideal  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .

2. Si  $(r, m)$  es leído en  $l_A$ , donde  $r \in \{P_1, \dots, P_k\}$ ,  $m$  es escrito en  $l_r$  y  $P_r$  es activado.

Por simplicidad omitimos llamar explícitamente a modelo de comunicación real. Cuando en un protocolo del mundo real escribimos “ $P_i$  envía  $m$  a  $P_j$ ” nos referimos a “ $P_i$  envía  $(P_j, m)$  a  $\mathcal{C}$ ”.

El modelo de comunicación ideal captura el hecho de que el adversario ideal puede decidir si y cuándo enviar un mensaje desde una funcionalidad ideal a un participante, pero no puede leer ni modificar los contenidos de la comunicación entre participantes y la funcionalidad ideal.

**Definición 42.** Un modelo de comunicación ideal  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  es una ITM con un link  $l_{P_i}$  a  $P_i$  para  $i = 1, \dots, k$ , y links  $l_{\mathcal{F}}$  y  $l_{\mathcal{S}}$  a una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  y a un adversario ideal  $\mathcal{S}$  respectivamente. Su código se define como sigue.

1. Si un mensaje  $m$  es leído en  $l_s$ , donde  $s \in \{P_1, \dots, P_k\}$ , entonces  $(s, m)$  es escrito en  $l_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{F}$  es activada.
2. Si un mensaje  $(s, m)$  escrito en  $l_{\mathcal{F}}$  es retornado inalterado,  $m$  es escrito en  $l_s$ . Si no, cualquier string leído desde  $l_{\mathcal{F}}$  es interpretado como una lista  $((r_1, m_1), \dots, (r_t, m_t))$ , donde  $r_i \in \{\mathcal{S}, P_1, \dots, P_k\}$ . Por cada  $m_i$  un string aleatorio  $\tau_i \in \{0, 1\}^n$  es escogido, y  $(r_i, m_i)$  es guardado en el registro etiquetado con  $(\tau_i)$ . Luego  $((r_1, |m_1|, \tau_1), \dots, (r_t, |m_t|, \tau_t))$  es escrito en  $l_{\mathcal{S}}$  y  $\mathcal{S}$  es activado.
3. Todo string leído desde  $l_{\mathcal{S}}$  es interpretado como el par  $(b, \tau)$ , donde  $b \in \{0, 1\}$  y  $\tau$  es un string arbitrario. Si  $b = 1$  y  $(r_i, m_i)$  esta guardado en el registro etiquetado con  $\tau$ ,  $m_i$  es escrito en  $l_{r_i}$  y  $r_i$  es activado. Si  $b = 0$   $(\mathcal{S}, \tau)$  es escrito en  $l_{\mathcal{F}}$  y  $\mathcal{F}$  es activada.

El modelo ideal es equivalente a una ejecución del protocolo  $\text{IDEAL}_{\mathcal{F}}$

**Definición 43.** El modelo ideal es definido como la función  $\mathcal{I} : \text{ITM}^2 \times \tilde{\text{ITM}}^* \rightarrow \text{ITMG}$ , donde  $\mathcal{I} : (\mathcal{F}, \mathcal{S}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k) \mapsto (V, E)$  viene dado por:

$$V = \{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}, \mathcal{F}, \mathcal{S}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k\}$$

$$E = \{(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\mathcal{I}}), (\mathcal{C}_{\mathcal{I}}, \mathcal{F})\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{(\tilde{P}_i, \mathcal{C}_{\mathcal{I}})\}$$

Si  $\tilde{\pi} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k)$ , escribimos  $\mathcal{I}(\mathcal{S}, \tilde{\pi}^{\mathcal{F}})$  en vez de  $\mathcal{I}(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k)$  para facilitar la notación.

El modelo real corresponde a la ejecución de un protocolo “real” en UC, es decir donde los participantes se comunican a través de la cinta de comunicación entrante.

**Definición 44.** El modelo real es definido como la función  $\mathcal{R} : ITM^* \rightarrow ITMG$ , donde  $\mathcal{R} : (\mathcal{A}, P_1, \dots, P_k) \mapsto (V, E)$  viene dado:

$$V = \{\mathcal{C}, \mathcal{A}, P_1, \dots, P_k\}$$

$$E = \{(\mathcal{A}, \mathcal{C})\} \cup \bigcup_{i=1}^k \{(P_i, \mathcal{C})\}$$

Sea  $(V, E) = \mathcal{I}(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k)$ . Entonces  $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{F}, \mathcal{S}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k))$  para denotar al grafo de ITMs  $(V', E')$  definido por  $V' = V \cup \{\mathcal{Z}\}$ , y  $E' = E \cup \{(\mathcal{Z}, \mathcal{S})\} \cup_{i=1}^k \{(\mathcal{Z}, \tilde{P}_i)\}$ . Usamos la misma notación para el modelo real.

El modelo híbrido se define como sigue

**Definición 45.** Sean  $(V, E) = \mathcal{R}(\mathcal{A}, \pi)$ ,  $\pi = (P_1, \dots, P_k)$ . Sean  $(V_j, E_j) = \mathcal{I}(\mathcal{S}_j, \{\tilde{P}_i\}_j^{\mathcal{F}_j})$ ,  $\{\tilde{P}_i\}_j = (\tilde{P}_{j,1}, \dots, \tilde{P}_{j,k})$  para  $j = 1, \dots, t$ , y  $(V_j, E_j) = \mathcal{R}(\mathcal{S}_j, \pi_j)$ ,  $\pi_j = (P_{j,1}, \dots, P_{j,k})$  for  $j = t+1, \dots, s$ .

Denotamos por  $\mathcal{H}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t}, \pi^{\{\tilde{P}_i\}_1^{\mathcal{F}_1}, \dots, \{\tilde{P}_i\}_t^{\mathcal{F}_t}, \pi_{t+1}, \dots, \pi_s})$  al modelo híbrido que se define como el grafo de ITMs  $(V', E')$ , donde

$$V' = V \cup \bigcup_{j=1}^t V_j, \text{ y}$$

$$E' = E \cup \bigcup_{j=1}^t E_j \cup \bigcup_{i=1}^k \left( \{(\mathcal{S}_i, \mathcal{A})\} \cup \bigcup_{j=1}^t \{(P_i, \tilde{P}_{j,i})\} \right)$$

De la misma forma que antes denotamos por  $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t}, \pi^{\{\tilde{P}_i\}_1^{\mathcal{F}_1}, \dots, \{\tilde{P}_i\}_t^{\mathcal{F}_t}, \pi_{t+1}, \dots, \pi_s}))$  al grafo de ITMs  $(V'', E'')$  definido por  $V'' = V \cup \{\mathcal{Z}\}$ , y  $E'' = E' \cup \{(\mathcal{Z}, \mathcal{A})\} \cup_{i=1}^k \{(\mathcal{Z}, P_i)\}$ .

La UC-realización entonces queda como sigue.

**Definición 46.** Un protocolo  $\pi$  UC-realiza una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  si para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario real  $\mathcal{A}$  existe un adversario ideal  $\mathcal{S}$  talque

$$\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \pi)) \approx \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{S}, \mathcal{F}))$$

Usando esta notación, el Teorema de Composición se escribe como sigue.

**Teorema 4.** Supongamos que  $\pi^{\{\tilde{P}_i\}_1^{\mathcal{F}_1}, \dots, \{\tilde{P}_i\}_t^{\mathcal{F}_t}}$  es un protocolo que UC-realiza a la funcionalidad ideal  $\tilde{\pi}^{\mathcal{F}}$ . Sea  $\rho^\pi$  un protocolo subroutine respecting. Entonces el protocolo  $\rho^{\pi/\mathcal{F}}$  en el modelo  $\mathcal{F}$ -híbrido UC-emula al protocolo  $\rho^\pi$ .

Para obtener GUC hacemos la siguiente modificación. Consideremos el grafo de ITMs  $(V, E)$  definido por  $\mathcal{H}(\mathcal{A}^{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_t}, \pi^{\{\tilde{P}_i\}_1^{\mathcal{F}_1}, \dots, \{\tilde{P}_i\}_r^{\mathcal{F}_r}, \{\tilde{P}_i\}_{r+1}^{\mathcal{G}_{r+1}}, \dots, \{\tilde{P}_i\}_t^{\mathcal{G}_t}, \pi_{t+1}, \dots, \pi_s})$ , escribimos  $\mathcal{Z}(V, E)$  para denotar el grafo de ITMs  $(V'', E'')$  definido por  $V'' = V \cup \{\mathcal{Z}\}$ , y  $E'' = E' \cup \{(\mathcal{Z}, \mathcal{A})\} \cup_{i=1}^k \bigcup_{j=r+1}^t \{(\mathcal{Z}, \tilde{P}_{i,j})\} \cup_{i=1}^k \{(\mathcal{Z}, P_i)\}$ . Nótese que los links  $\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=r+1}^t \{(\mathcal{Z}, \tilde{P}_{i,j})\}$  son todo lo necesario para dar acceso al ambiente a las funcionalidades y compartidas y obtener GUC.

# Capítulo 4

## Desmentibilidad

La Desmentibilidad puede tener distintas acepciones, por ejemplo Encriptación desmentible [6]. Aquí nos referimos a la noción de Desmentibilidad asociada a la Autenticación desmentible.

La Autenticación desmentible fue introducida por Dwork, Nahor y Sahai en [13]. Variadas modificaciones, generalizaciones e implementaciones han sido propuestas posteriormente, como por ejemplo en [20]. Aquí consideraremos y adaptaremos la definición hecha por Dodis, Katz, Smith y Walfish en [12], dado que esa definición es la que aplica a una configuración concurrente y distribuida como la necesaria en este trabajo.

Intuitivamente decimos que un protocolo es desmentible si nadie puede probar a otro que una sesión del protocolo, es decir un grupo específico de participantes con identidades públicas definidas, se esta llevando a cabo o alguna vez se llevó a cabo. En [12] se muestra que para el caso de la autenticación la desmentibilidad se puede obtener considerando un juez que en forma *online* debe decidir con quién esta hablando: un informante que esta observando una sesión real del protocolo de autenticación, o un desinformante que no tiene acceso a la sesión real del protocolo pero aún así quiere convencer al juez que la sesión se está llevando a cabo. El protocolo se dice entonces que es un protocolo de autenticación desmentible online si para todo juez y para todo informante existe un desinformante tal que el juez no puede distinguir si habla con el informante o el desinformante. En la versión completa de [12] se demuestra que esta noción es equivalente a GUC-realizar la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{AUTH}$ . Dodis y compañía señalan que en GUC un protocolo que realiza una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  es tan desmentible como  $\mathcal{F}$ . La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{AUTH}$  es “completamente simulable”, lo que significa que el protocolo puede ser simulado completamente sin la participación de ningún

participante de la sesión, luego la funcionalidad  $\mathcal{F}_{AUTH}$  es desmentible.

De forma similar que en [12], pero sin restringirnos a protocolos de autenticación, definiremos la noción de desmentibilidad en línea o *online*.

## 4.1. Desmentibilidad online

Consideraremos dos *mundos*: el mundo real, donde el informante tiene acceso directo a una sesión del protocolo analizado; y el mundo simulado, donde el desinformante no tiene acceso al protocolo. Nos restringiremos a funcionalidades ideales, pues la desmentibilidad es una propiedad a ser chequeada en la funcionalidad ideal.

**Definición 47** (Mundo real). *Sea  $\mathcal{F}$  una funcionalidad ideal que se ejecuta en el modo  $\bar{\mathcal{G}}$ -híbrido con participantes  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ , sea  $\mathcal{D}$  el adversario dummy, sea  $\mathfrak{I}$  el informante,  $\mathcal{J}$  el juez y sea  $(V_{\mathcal{F}}, E_{\mathcal{F}}) = \mathfrak{I}(\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, \{\tilde{P}\}^{\bar{\mathcal{G}}}))$ . Definimos el mundo real como el grafo de ITMs  $\mathfrak{R} = (V, E)$  donde:*

$$\begin{aligned} V &= \{\mathcal{J}, \bar{\mathcal{G}}\} \cup V_{\mathcal{F}} \\ E &= \{(\mathcal{J}, \mathfrak{I})\} \cup E_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Denotamos por  $\text{Real}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{I}}^{\text{Den}}$  a la variable aleatoria que describe la salida de  $\mathcal{J}$  al ejecutarse el grafo de ITMs  $\mathfrak{R}$ .

**Definición 48** (Mundo simulado). *Sea  $\mathcal{F}$  una funcionalidad ideal que se ejecuta en el modo  $\bar{\mathcal{G}}$ -híbrido con participantes  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ , sea  $\mathcal{D}$  el adversario dummy, sea  $\mathfrak{D}$  el desinformante,  $\mathcal{J}$  el juez. Definimos el mundo simulado como el grafo de ITMs  $\mathfrak{S} = (V, E)$  donde:*

$$\begin{aligned} V &= \{\mathcal{J}, \bar{\mathcal{G}}, \mathfrak{D}\} \\ E &= \{(\mathcal{J}, \mathfrak{D}), (\mathcal{J}, \bar{\mathcal{G}}), (\mathfrak{D}, \bar{\mathcal{G}})\} \end{aligned}$$

Denotamos por  $\text{Sim}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{D}}^{\text{Den}}$  a la variable aleatoria que describe la salida de  $\mathcal{J}$  al ejecutarse el grafo de ITMs  $\mathfrak{S}$

Definimos la desmentibilidad como la incapacidad del juez para distinguir entre una ejecución real informada por el informante de la funcionalidad de una ejecución simulada por el desinformante.

**Definición 49** (Desmentibilidad online). *Decimos que una funcionalidad  $\mathcal{F}$  es desmentible online si para todo juez  $\mathcal{J}$  y todo informante  $\mathfrak{I}$  existe un desinformante  $\mathfrak{D}$  talque:*

$$\text{Real}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{I}}^{\text{Den}} \approx \text{Sim}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{D}}^{\text{Den}}$$

Notamos que el experimento  $\text{Real}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{I}}^{\text{Den}}$  es una transformación sintáctica de la ejecución en UC de la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$ , como lo demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 5.** Para toda funcionalidad  $\mathcal{F}$  ejecutada en el modelo  $\bar{\mathcal{G}}$ -híbrido se tiene que para todo juez  $\mathcal{J}$  y todo informante  $\mathfrak{I}$  existe un ambiente  $\mathcal{Z}$  tal que

$$\text{Real}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{I}}^{\text{Den}} \approx \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}}))$$

y también para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  existe un juez  $\mathcal{J}$  y un informante  $\mathfrak{I}$  tales que

$$\text{Real}_{\mathcal{F}, \mathcal{J}, \mathfrak{I}}^{\text{Den}} \approx \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{F}, \mathcal{D}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}}))$$

*Demostración.* (Teorema 5)

En efecto, cualquier combinación juez-informante puede ser simulada por un ambiente  $\mathcal{Z}$ , lo que prueba la segunda afirmación de teorema.

Si consideramos un informante  $\mathfrak{I}$  que solo comunica al juez  $\mathcal{J}$  con los participantes y el adversario dummy  $\mathcal{D}$ , el juez  $\mathcal{J}$  es capaz de simular internamente a cualquier ambiente  $\mathcal{Z}$  pues  $\mathfrak{I}$  le provee una interfaz con vista idéntica a la vista de  $\mathcal{Z}$ . Lo que nos permite probar la primera afirmación del teorema.  $\square$

Como corolario del teorema 5 tenemos el siguiente resultado

**Corolario 3.** Sea  $\pi$  protocolo que GUC-emula a una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}$  desmentible. Entonces  $\pi$  es desmentible.

*Demostración.* La demostración es directa dado que el experimento real para  $\pi$  es idéntico a ejecutarlo en GUC. Como  $\pi$  GUC-emula a  $\mathcal{F}$  existe un simulador que simula a  $\pi$  con  $\mathcal{F}$ , el cual puede ser usado para simular  $\pi$  con el desinformante que existe para  $\mathcal{F}$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Anonimato

### 5.1. Canales Anónimos

Los *Canales Anónimos* permiten a los usuarios intercambiar mensajes sin revelar sus identidades. Las aplicaciones son variadas y van desde votaciones, donde la identidad de los votantes debe ser anónima, hasta bases de datos con información confidencial por su alta sensibilidad, como bases de datos médicas. Seguiremos la definición de canal anónimo de [17], pues es lo suficientemente general.

Consideremos la situación en que existen  $n$  participantes, cuyas identidades son  $P_1, \dots, P_n$ , que ejecutan una instancia de un protocolo  $\pi$ . El conjunto de mensajes intercambiados entre  $P_1, \dots, P_n$  en la ejecución de  $\pi$  se puede representar por una matriz  $M$ . Cada elemento de la matriz,  $m_{ij}$ , es el multiconjunto de mensajes que envía algún participante  $P_i$  a otro participante  $P_j$ . Intuitivamente la comunicación con el protocolo  $\pi$  es anónima si ningún observador es capaz de obtener más que “cierta” información de  $M$ . La información que el observador sí puede obtener es una variable del modelo y lleva a considerar distintos tipos de anonimato.

Consideraremos la ejecución de un protocolo en una configuración similar a UC, en que el adversario es pasivo (no inyecta ni altera mensajes) y adicionalmente el ambiente recibe como parámetro la matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{P}(\{0, 1\}^{p(k)}))$ , con  $k$  el parámetro de seguridad y  $p$  un polinomio. El ambiente pasa como parámetro a  $P_i$   $i \in \{1, \dots, n\}$  los mensajes  $\{(m_{i,j}, P_j)\}_{j=1}^n$ , indicando que el mensaje  $m_{i,j}$  es enviado por  $P_i$  a  $P_j$ . Nos centraremos en protocolos conocidos como *protocolos de transmisión de mensajes*.

**Definición 50** (Protocolo de transmisión de mensajes). *Decimos que un protocolo  $\pi$  es un protocolo de transmisión de mensajes si al ser ejecutado con entrada  $M$  para la salida de cada participante  $P_i$   $i \in \{1, \dots, n\}$  es el multiconjunto  $\uplus_{j=1}^n \{m_{i,j}\}$ .*

Definimos el experimento  $\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}\text{-anon}}$ , donde  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{P}(\{0, 1\}^{p(k)}))^2$ , en la Figura 5.1.

**Definición 51.** Decimos que un protocolo de transmisión de mensajes  $\pi$  es  $\mathcal{R}$ -anónimo si para todo adversario PPT  $\mathcal{A}$  la función  $f(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot \Pr[\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}\text{-anon}}(k) = 1] - 1$  es depreciable en  $k$ .

Notemos que el adversario  $\mathcal{A}$  sólo puede elegir matrices  $M_1, M_2$  tales que  $(M_1, M_2) \in \mathcal{R}$ . De este modo  $\mathcal{R}$  se puede usar para determinar la filtración de información permitida al protocolo y con ello el tipo de anonimato. En efecto, sea  $f$  una función  $f : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{P}(\{0, 1\}^{p(k)})) \rightarrow I$ , con  $I$  algún conjunto, que llamaremos *función de filtración de información*. Si por ejemplo  $f(M) = \sum_{i,j} |m_{i,j}|$ , el filtraje de información correspondería al tamaño total de los mensajes intercambiados. Si  $\pi$  permite computar  $f(M)$  al adversario, entonces trivialmente éste puede distinguir entre la ejecución de  $\pi$  con una matriz  $M_1$  y la ejecución de  $\pi$  con otra matriz  $M_2$  si elige  $M_1$  y  $M_2$  tales que  $f(M_1) \neq f(M_2)$ . Si definimos  $\mathcal{R} = \{(M_1, M_2) | f(M_1) = f(M_2)\}$  entonces  $\mathcal{A}$  ya no podrá efectuar este ataque, y cualquier distinción entre la ejecución de  $\pi$  con  $M_1$  y  $M_2$  dependerá de otro “filtraje” de información.

En [17] se definen tres funciones de filtración de información, estas son  $f_{\cup}, f_{\Sigma}, f_{\#}$  y se definen como sigue:

$$\begin{aligned} f_{\cup}(M) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \biguplus_{j=1}^n \{m_{1,j}\}, \dots, \biguplus_{j=1}^n \{m_{n,j}\} \right) \\ f_{\Sigma}(M) &\stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{j=1}^n |m_{1,j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |m_{n,j}| \right) \\ f_{\#}(M) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \end{aligned}$$

$f_{\cup}(M)$  corresponde al vector donde la componente  $i$ -ésima es el multiconjunto de mensajes enviados por  $P_i$ ,  $f_{\Sigma}(M)$  corresponde al vector donde la componente  $i$ -ésima es el tamaño en bits del total de mensajes enviados por  $P_i$  y  $f_{\#}(M)$  corresponde al tamaño total en bits de mensajes enviados en el protocolo. Adicionalmente se define  $f^T(M) = f(M^T)$  donde  $M^T$  denota la matriz  $M$  transpuesta, y de ese modo  $f_{\cup}^T(M)$  y  $f_{\Sigma}^T(M)$  corresponden a vectores donde el elemento  $i$ -ésimo es un valor calculado sobre los mensajes recibidos por  $P_i$ .

Adicionalmente en este trabajo definimos una nueva función de filtración de información,  $f_{\cup\cup}$  que viene dada por:

$$f_{\cup\cup}(M) = \biguplus_{i=1}^n \biguplus_{j=1}^n m_{i,j}.$$

Tipo de anonimato	Relación
Invinculabilidad débil	$\mathcal{R}_U \cap \mathcal{R}_U^T$
Invinculabilidad del emisor	$\mathcal{R}_\Sigma \cap \mathcal{R}_U^T$
Invinculabilidad del receptor	$\mathcal{R}_U \cap \mathcal{R}_\Sigma^T$
Invinculabilidad	$\mathcal{R}_\Sigma \cap \mathcal{R}_\Sigma^T$
Anonimato del emisor	$\mathcal{R}_U$
Anonimato del receptor	$\mathcal{R}_U^T$
Anonimato $f_{UU}$	$\mathcal{R}_{UU}$
Anonimato del emisor fuerte	$\mathcal{R}_\Sigma$
Anonimato del receptor fuerte	$\mathcal{R}_\Sigma^T$
Anonimato del emisor y receptor	$\mathcal{R}_\#$
Inobservabilidad	$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathcal{P}(\{0, 1\}^{p(k)}))$

Cuadro 5.1: Tipos de anonimato

El experimento  $\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}\text{-anon}}(k)$  procede como sigue:

1. Escoger  $b \in_R \{0, 1\}$  y ejecutar  $(M_0, M_1) \leftarrow \mathcal{A}(k)$
2. Si  $(M_0, M_1) \notin \mathcal{R}$  retornar 0
3. Ejecutar  $\pi$  con la matriz  $M_b$  y adversario  $\mathcal{A}$  hasta que  $\mathcal{A}$  retorne un bit  $b_{\mathcal{A}}$
4. Si  $b = b_{\mathcal{A}}$  retornar 1, de lo contrario retornar 0.

Figura 5.1: El experimento  $\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}\text{-anon}}$

Cada función da lugar a una relación  $\mathcal{R}_f = \{(M_1, M_2 | f(M_1) = f(M_2))\}$ , adicionalmente denotamos por  $\mathcal{R}_\star$  a  $\mathcal{R}_{f_\star}$ . En [17] se definen diez relaciones dando lugar a diez tipos de anonimato, los que se ilustran en el Cuadro 5.1 y adicionalmente, con la función  $f_{UU}$ , definimos un nuevo tipo de anonimato que llamamos *Anonimato  $f_{UU}$* .

Notemos que la nueva noción de anonimato es más fuerte que las nociones de anonimato del receptor/emisor. En efecto, solo hay que notar que para cualquier par de matrices  $f_U(M_1) = f_U(M_2)$  implica que  $f_{UU}(M_1) = f_{UU}(M_2)$ , por lo tanto  $\mathcal{R}_U \subseteq \mathcal{R}_{UU}$  y  $\mathcal{R}_U^T \subseteq \mathcal{R}_{UU}$ .

## 5.2. Primitivas para Canales Anónimos

Variadas primitivas útiles para implementar canales anónimos han sido propuestas en la literatura. A continuación revisamos cuatro primitivas para canales anónimos.

### 5.2.1. Redes de Mezcla o *Mix-nets*

El estudio moderno protocolos de canales anónimos comenzó en [9] con las Redes de Mezcla o *mix-nets*. En una mix-net, el vector  $v_0$  formado por los mensajes encriptados de todos los participantes es enviado a través de una serie de *mixers* (en español mezcladores). Cada mixer  $M_i$  realiza una operación en el vector de textos cifrados  $v_{i-1}$ , obteniendo nuevos textos cifrados  $v'_i$ , y envía una permutación aleatoria de los nuevos textos cifrados  $v_i = \pi(v'_i)$  al siguiente mixer. La operación que cada mixer realiza debe ser tal que permite ocultar la permutación que efectuó el mixer. Finalmente el último mixer publica una permutación del vector de mensajes  $\pi(m_1, \dots, m_n)$  de los participantes. En la Figura 5.2 se puede ver un diagrama de una mix-net.

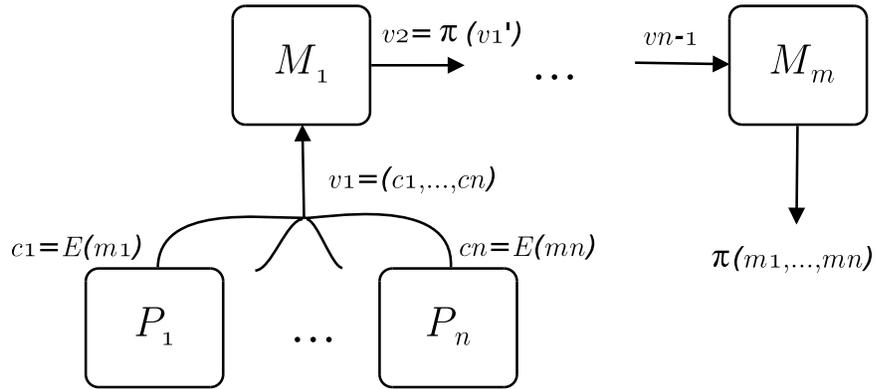


Figura 5.2: Diagrama de una mix-net

Las mix-nets se pueden clasificar en dos, según el tipo de operación que cada mixer realiza en los textos cifrados: mix-nets reencryptantes y mix-nets desencryptantes.

### 5.2.2. Mix-nets reencryptantes

En las mix-nets reencryptantes los Mixers permutan aleatoriamente cada vector de mensajes y re-encryptan los textos planos. Consideremos un esquema de encriptación asimétrico  $\mathcal{E} = (K, E, D)$  y fijemos una clave pública  $pk$ ; entonces una re-encryptación corresponde a aplicar una función  $\rho_{pk} : C \times R \rightarrow C$ , con  $C$  el espacio de textos cifrados, tal que para todo  $m, r, r', c$  tales que  $c = E_{pk}(m, r)$  y  $r \neq r'$ :

$$D_{sk}(\rho_{pk}(c, r')) = m \quad \text{y además } \rho_{pk}(c, r') \neq c$$

En otras palabras la función  $\rho$  cambia la aleatoriedad de un texto cifrado. Al cambiar la aleatoriedad y si  $\mathcal{E}$  es un esquema de encriptación seguro (IND-CPA) no es posible para ningún adversario correlacionar las entradas y salidas de un mixer.

Un ejemplo de esquema de encriptación en el cual es posible reencriptar los textos cifrados es ElGamal [14]. Se puede implementar un algoritmo de reencriptación para ElGamal usando que  $E_y(m, r) \cdot E_y(m', r') = E_y(m \cdot m', r + r')$  (es homomórfico). En efecto:

$$E_y(m, r) \cdot E_y(m', r') = (g^r \cdot g^{r'}, y^r \cdot m \cdot y^{r'} \cdot m') = (g^{r+r'}, y^{r+r'} m \cdot m')$$

Por lo tanto

$$E_y(m, r) \cdot E_y(m', r') = E_y(m \cdot m', r + r')$$

Usando lo anterior es posible construir  $\rho$  tomando  $m' = 1$ , de este modo

$$\rho_y(E(m, r), r') = E_y(m, r) \cdot E_y(1, r') = E_y(m, r + r')$$

Una desventaja de un esquema de encriptación que permite re-enciptación como ElGamal es que para ocupar  $\rho$  es necesario conocer la clave pública del emisor del mensaje. En el contexto de una mix-net esto significaría que cada mixer debería primero obtener la clave de cada enviado, lo cual puede resultar impráctico. En [16] proponen un esquema de encriptación en el cual no es necesario conocer las claves públicas de los enviados. Dicha propiedad la llaman *Universal Re-encryption* y para obtenerla en un esquema basado en ElGamal básicamente adjuntan en el texto cifrado lo necesario para homomórficamente cambiar la aleatoriedad del texto cifrado. El esquema propuesto en [16] está compuesto por los algoritmos  $(K, E, D, \rho)$  donde

$$\begin{aligned} K(k) &\stackrel{\text{def}}{=} (x, y), & x \in_R G_q, & y = g^x \\ E_y(m, (k_0, k_1)) &\stackrel{\text{def}}{=} [(g^{k_0}, y^{k_0} \cdot m); (g^{k_1}, y^{k_1})]y \\ D_x([(u, v); (\alpha, \beta)]) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{u^\alpha}. \end{aligned}$$

Notemos que la segunda componente de  $E_y(m, (k_0, k_1))$  (esto es  $g^{k_1}$  y  $y^{k_1}$ ) es la encriptación de 1 bajo la clave pública  $y$  y aleatoriedad  $k_1$ , entonces  $\rho$  sigue esencialmente igual, salvo que no es necesario conocer la clave pública. En efecto

$$\rho([(u, v); (\alpha, \beta)], (k_0, k_1)) = [(u \cdot \alpha^{k_0}, v \cdot \beta^{k_0}); (\alpha^{k_1}, \beta^{k_1})].$$

### 5.2.3. Mixnet con descriptación

En estos protocolos los Mixers descriptan parcialmente los textos cifrados y los permutan aleatoriamente, de modo que finalmente se obtiene una permutación de los textos planos originales.

Una forma de implementar una mixnet con recriptación es usando un esquema de encriptación semánticamente seguro  $\mathcal{E} = (K, E, D^{dist}, D)$ . Para enviar un texto plano  $m_i$ , un emisor  $P_i$  encripta  $m_i$  bajo una clave pública  $pk$ , cuya correspondiente clave privada es una función  $f$  de las claves privadas de los Mixers  $\{sk_i\}_{i=1}^N$ . Cada mixer  $M_k$  toma un vector de textos cifrados  $(v_1, v_2, \dots, v_M)$  y descripta parcialmente cada texto cifrado con su clave secreta  $sk_k$ , de modo tal que si nos restringimos a vectores de textos cifrados de tamaño 1 el aporte total de los mixers es:

$$D_{sk_1}(D_{sk_2}(\dots D_{sk_N}(E_{pk}(m, r)) \dots)) = D_{f(sk_1, sk_2, \dots, sk_N)}(m) = m$$

Adicionalmente, cada mixer  $M_i$  escoge una permutación al azar  $\pi \in_R \Pi_M$ , con  $\Pi_M$  el conjunto de todas las permutaciones de  $\{1, \dots, M\}$ , y la aplica al vector de textos cifrados parcialmente descriptados para retornar otro vector  $(D_{sk_i}(v_{\pi^{-1}(1)}), D_{sk_i}(v_{\pi^{-1}(2)}), \dots, D_{sk_i}(v_{\pi^{-1}(i)}))$ .

### Mixnet de Wikström

Para realizar nuestro protocolo (Capítulo 6) utilizaremos la mixnet UC-segura propuesta por Wikström en [23]. Básicamente, la mixnet de Wikström's procede como sigue:

1. Cada emisor  $P_i$  espera por las claves públicas de los mixers y computa el producto de todas las claves públicas  $y = \prod_{i=1}^k y_i$ . Luego cada emisor encripta su mensaje con la clave pública  $y$ , publica el texto cifrado en una *pizarra pública*<sup>1</sup> y prueba que es un texto cifrado válido usando un protocolo ZKP.
2. Cada mixer  $M_j$   $j \in 1, \dots, k$  descarta todos los textos cifrados que no son válidos.

Luego, para  $l = 1, \dots, k$  si  $l = j$  el mixer  $M_l$  descripta parcialmente la lista de

---

<sup>1</sup>Una funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{BB}$  que se comporta como una pizarra visible por todos los participantes y donde todos pueden escribir. Vista de otra forma, es una funcionalidad que permite hacer broadcast a todos los participantes.

La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{MN}^\kappa$  corriendo con mixers  $M_1, \dots, M_k$ , enviados  $P_1, \dots, P_N$ , y adversario ideal  $\mathcal{S}$ :

1. Inicializar una lista  $L = \emptyset$ , conjuntos  $J_P = \emptyset$  y  $J_M = \emptyset$  y variable  $c = 0$ .
2. Si  $(P_i, \text{Send}, m_i)$   $m_i \in G_q$  es recibido desde  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ . Si  $i \notin J_P$ , hacer  $J_P \leftarrow J_P \cup \{i\}$ ,  $c \leftarrow c+1$ , adjuntar  $m_i$  a la lista  $L$ . Luego enviar  $(\mathcal{S}, P_i, \text{Send})$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .
3. Supongamos que  $(M_j, \text{Run})$  es recibido desde  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ . Hacer  $J_M \leftarrow J_M \cup \{j\}$ . Si  $|J_M| \geq k/2$  y  $c \geq \kappa$ , luego ordenar la lista lexicográficamente para formar una lista  $L'$ , y enviar  $((\mathcal{S}, M_j, \text{Output}, L'), \{M_l, \text{Output}, L'\}_{l=1}^k)$  a to  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ . De lo contrario, enviar a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  la lista  $(\mathcal{S}, M_j, \text{Run})$

Figura 5.3: La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{MN}$

textos cifrados obtenida de la pizarra pública, les aplica una permutación escogida al azar, publica la lista en la pizarra pública y prueba usando un protocolo ZKP que la lista publicada es una reencriptación de una permutación aleatoria de la lista anterior. Si  $l \neq j$  el mixer  $M_j$  debe chequear que la permutación publicada por  $M_l$  es valida. Finalmente el mixer con índice mayor ordena la lista de textos planos resultantes de la descriptación conjunta, y publica la lista.

Adicionalmente, para fines de este trabajo, modificamos la mixnet de [23] para que el protocolo no empiece a menos que haya una cantidad mínima de mensajes  $\kappa$ . La modificación se puede ver en la Figura 5.3.

En [22] se muestra que este protocolo UC-realiza a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{MN}$ , definida en la Figura 5.3, en el modelo  $\mathcal{F}_{KG}$ -híbrido.

**Teorema 6.** *El protocolo de [23] UC-realiza a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{MN}$  en el modelo  $\mathcal{F}_{KG}$ -híbrido con respecto a adversarios estáticos y bajo DDH en un grupo  $G_q$ .*

Notamos que con la modificación, si bien se generaliza a la mixet de [23], el teorema anterior se sigue teniendo. En efecto si  $\mathcal{C}_{Env}$  es el conjunto de todos los ambientes y  $\mathcal{C}_{Adv}$  es el conjunto de todos los adversarios, entonces el conjunto de ambientes y adversarios  $\mathcal{C}_\kappa$  para los que la cantidad de mensajes enviados a la mixnet es mayor que  $\kappa$  es claramente subconjunto de  $\mathcal{C}_{Env} \times \mathcal{C}_{Adv}$ . Por lo tanto para cada  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{A}$  tales que  $(\mathcal{Z}, \mathcal{A}) \in \mathcal{C}_\kappa$  debe existir un simulador  $\mathcal{S}^{\mathcal{Z}, \mathcal{A}}$  tal que el  $\mathcal{Z}$  no distingue entre el mundo real y el mundo ideal.

### 5.2.4. Anonimous Broadcast o DC-nets

A diferencia de las mixnets, las DC-nets, propuestas por Chaum en [10], no son interactivas. No es necesaria la existencia de otros participantes más que los enviados y receptores, por el contrario en las mixnets se necesita que los mixer manipulen los textos cifrados antes de que puedan ser leídos por los receptores. Cada emisor  $P_i$  publica un vector de textos cifrados  $c_i = ((\delta_1(m_i, r_i) \cdot c'_{i,1}, \dots, \delta_m(m_i, r_i) \cdot c'_{i,n})$  con  $r_i \in 0^{\ell_i} 10^{m-\ell_i}$ ,  $\ell_i \in \{1, \dots, m\}$  distinto para cada  $i$  y:

$$\delta_k(m, r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} m & r[k] = 1 \\ 1 & r[k] = 0 \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\prod_{i=1}^n c'_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\ell_i \neq \ell_j \text{ si } i \neq j$$

Posteriormente es posible obtener una permutación el vector  $(\prod_{i=1}^n c_{i,j})_{j=1}^n$ , que corresponde a una permutación del vector  $(m_i)_{i=1}^n$ . Si la distribución que sigue  $c_i$  es indistinguible de la que sigue  $m_i \cdot c_i \forall i$ , entonces es imposible para un adversario identificar al autor de algún texto plano.

# Capítulo 6

## El protocolo

En este capítulo detallamos los resultados de esta memoria. Primero diseñamos una funcionalidad ideal y demostramos que es anónima y desmentible, posteriormente diseñamos un protocolo que GUC-emula a la funcionalidad ideal. Adicionalmente demostramos que el protocolo diseñado es anónimo y desmentible solucionando el problema a resolver en este trabajo.

### 6.1. Canales Anónimos Autenticados

Un “canal anónimo autenticado” debe permitir a los participantes enviar mensajes a cualquier otro participante sin revelar su identidad más que al destinatario de mensaje. Definimos formalmente un canal anónimo autenticado a través de la definición de una funcionalidad ideal que llamaremos  $\mathcal{F}_{AAC}$  (Figura 6.1).

La Funcionalidad de la figura 6.1 es anónima según la definición de anonimato descrita en el Capítulo 5 demostrando el siguiente lema.

**Lema 1.** *La funcionalidad  $\mathcal{F}_{AAC}$  es Anónima  $f_{UU}$ .*

*Demostración. (Lema 1)* La demostración es directa notando que para cualquier par de matrices  $M_1, M_2 \in \mathcal{R}_{UU}$  las vistas del adversario son la misma, pues el conjunto de mensajes intercambiados es el mismo. Por lo tanto para todo  $\ell$

$$2 \cdot \Pr[\text{Exp}_{\pi, \mathcal{A}}^{\mathcal{R}\text{-anon}}(\ell) = 1] - 1 = 0,$$

y 0 es una función despreciable. □

Una acotación al Lema 1 es que la definición de anonimato usada no necesariamente es válida para protocolos ejecutados en un ambiente concurrente. Sin embargo, hacemos las siguientes acotaciones.

La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{AAC}$  corriendo con participantes  $P_1, \dots, P_N$  y adversario  $\mathcal{S}$ , parametrizada por un grupo  $G_q$  y  $n \in \mathbb{N}$  procede como sigue:

1. Inicializar  $\Gamma \leftarrow \emptyset$  y  $M \leftarrow \emptyset$ .
2. Si  $(\tilde{P}_i, \text{Send}, m_{i,j}, j)$  es recibido desde  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  y mientras  $|M| < n$ :
  - a) Si  $P_i$  ó  $P_j$  no están registrados en  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  ó  $i = j$  enviar  $(\tilde{P}_i, \perp)$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .
  - b) Si  $\tilde{P}_j$  es corrupto enviar  $(\mathcal{S}, \tilde{P}_i, \tilde{P}_j, \text{Corruptsend}, m_{i,j})$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  y hacer  $\Gamma \leftarrow \Gamma \cup \{(m_{i,j}, i, j)\}$  y  $M \leftarrow M \cup \{m_{i,j}\}$ .
  - c) De lo contrario contrario enviar  $(\mathcal{S}, P_i, \text{Sent})$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  y hacer  $\Gamma \leftarrow \Gamma \cup \{(m_{i,j}, i, j)\}$  y  $M \leftarrow M \cup \{m_{i,j}\}$  y enviar  $(\tilde{P}_i, \text{Sent}, \tilde{P}_i, m_{i,j})$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .
3. Si  $(\tilde{P}_i, \text{Corruptsend}, m_{i,j}, i', j)$  es recibido de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ ,  $i \in I_{\mathcal{A}}$  y  $i' \in I_{\mathcal{A}}$ . Entonces hacer  $\Gamma \leftarrow \Gamma \cup \{(m_{i,j}, i', j)\}$  y  $M \leftarrow M \cup \{m_{i,j}\}$ .
4. Una vez que  $|M| = n$ , para cada  $j \in \{1, \dots, N\}$  sea el multiconjunto  $M_j = \{(m, i) | (m, i, j) \in \Gamma\}$  y enviar  $(\tilde{P}_j, \text{Messages}, M_j)$  y  $(\mathcal{S}, \text{Messages}, M)$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ .

Figura 6.1: La funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{AAC}$

Primero, si comparamos la funcionalidad  $\mathcal{F}_{AAC}$  con otras funcionalidades de anonimato *ad-hoc* definidas en la literatura, como la funcionalidad Anon de [18], notamos que  $\mathcal{F}_{AAC}$  es estrictamente más fuerte. En efecto Anon adicionalmente revela el multiconjunto de mensajes recibidos por cada participante  $P_j$ .

Segundo, afirmamos que nuestra funcionalidad es intuitivamente anónima. En este caso estaríamos afirmando que  $\mathcal{F}_{AAC}$  es nuestra definición de anonimato.

Ahora demostraremos que  $\mathcal{F}_{AAC}$  es desmentible.

**Lema 2.** *La función  $\mathcal{F}_{AAC}$  es desmentible.*

*Demostración. (Lema 2)*

La demostración es directa, notando que para simular  $\mathcal{F}_{AAC}$  solo es necesario hacer uso de información pública, que corresponde a quiénes están registrados en  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ ; información estática, que corresponde a quiénes son los participantes corruptos, y por ser información estática puede estar “cableada” en el desinformante  $\mathfrak{D}$ ; y las entradas de los participantes honestos que es provista por el juez  $\mathcal{J}$ . La distribución que sigue la simulación de  $\mathfrak{D}$  es idéntica a la distribución de la salida de  $\mathcal{F}_{AAC}$ . Por lo tanto, si  $\mathfrak{D}$  además simula al informante  $\mathfrak{I}$  con acceso a la simulación de  $\mathcal{F}_{AAC}$ , la distribución que sigue la salida de la simulación de  $\mathfrak{I}$  es idéntica a la salida original de  $\mathfrak{I}$ . Finalmente, la distribución que sigue la salida de  $\mathcal{J}$  debe ser la misma en ambos casos (cuando es informado por  $\mathfrak{I}$  o por  $\mathfrak{D}$ ).  $\square$

## 6.2. El protocolo SIGMIX

Una primera forma “natural” de realizar  $\mathcal{F}_{AAC}$  es simplemente combinando un canal anónimo con un protocolo que GUC-realice la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CERT}$  descrita en [3], pues esta es la funcionalidad “clásica para autenticar mensajes”. Pero este intento falla pues la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{CERT}$  permite que cualquier participante verifique la autenticidad de un par  $(m, \sigma)$ . Esto trae consigo la pérdida del anonimato al relacionar públicamente la identidad del emisor de  $m$  con  $(m, \sigma)$ . Además cada instancia de  $\mathcal{F}_{CERT}$  está restringida a sólo dos participantes, por lo que por trivialmente se conoce la identidad del emisor y receptor de cada mensaje.

En consecuencia, proveer anonimato y autenticación puede parecer contradictorio. Pero notamos que dicha noción puede ser alcanzada por un protocolo que satisface los siguientes puntos:

1. Los mensajes están firmados.
2. Sólo el destinatario puede probar que el participante  $P_i$  es autor de un mensaje que recibió.
3. El destinatario no puede probar a nadie que  $P_i$  es el autor de un mensaje que recibió.
4. El envío de mensajes es hecho en forma anónima.

De este modo, para implementar canales anónimos autenticados, usamos una versión modificada del protocolo de autenticación desmentible GUC-seguro con respecto a adversarios estáticos de [12]. Notamos que en [12] se usa un protocolo de firmado desmentible que nos es útil para satisfacer los puntos 1, 2 y 3 mencionados anteriormente. El proceso de firma es hecho a través de una firma que depende no sólo del contenido del mensaje y la identidad del emisor, si no que adicionalmente depende en la identidad del destinatario. Así, sólo le es permitido al receptor verificar la autenticidad del par  $(m, \sigma)$ . El punto 4 es satisfecho usando la mixnet propuesta por Wikström descrita en la Figura 5.3. El protocolo SIGMIX es ejecutado en el modelo  $\mathcal{F}_{MN}, \bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ -híbrido con adversarios estáticos. La funcionalidad compartida *Key registration with knowledge*  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  de [12]. descrita en la figura 2.4 página 12, provee un PKI para cualquier protocolo que es ejecutado concurrentemente con el protocolo SIGMIX. Remarcamos que cualquier protocolo que usa  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  puede compartir el par clave pública y

privada  $(sk, pk)$  con SIGMIX, siempre y cuando no revelen la clave privada a terceros. Por otro lado consideramos a la funcionalidad  $\mathcal{F}_{MN}$  como una funcionalidad ideal tradicional de UC, esto significa que cada instancia de  $\mathcal{F}_{MN}$  es local a cada protocolo que la llama.

Para proceder con SIGMIX cada enviador  $P_i$  firma un mensaje  $m_i$  a  $P_j$  con una función MAC que es UF-CMA (Sección 2.3.3). La clave con que MAC es usada es la clave secreta  $k_{i,j}$  compartida cíclico de orden  $q$  donde DDH se cumple, y sea  $g$  un generador para  $G_q$ . Supongamos que  $P_i$  y  $P_j$  tienen registrados los pares de claves públicas/privadas  $(x_i, y_i = g^{x_i})$  y  $(x_j, y_j = g^{x_j})$  respectivamente, tales que  $x_i, x_j \in_R G_q$ . Entonces la clave secreta compartida  $k_{i,j}$  puede ser no interactivamente computada <sup>1</sup> por  $P_i$  con  $k_{i,j} = y_j^{x_i}$  y por  $P_j$  con  $k_{i,j} = y_i^{x_j}$ . El mensaje firmado  $(m_i, \sigma_{i,j} = MAC_{k_{i,j}}(m_i))$  es enviado a  $P_j$  usando la mixnet, y finalmente  $P_j$  puede chequear la autenticidad del mensaje recalculando la firma. El protocolo SIGMIX se encuentra descrito en la Figura 6.2.

Antes de demostrar la seguridad de SIGMIX es necesario introducir una variante de DDH, en la cual hay varios participantes, que llamamos MDDH (por multiparticipante DDH). En MDDH con  $n$  participantes se generan  $n$  secretos  $x_1, \dots, x_n$  y cada par de participantes con secretos  $x_i$  y  $x_j$ ,  $i \neq j$  puede calcular el secreto compartido  $g^{x_i x_j}$ . Demostraremos que para todo  $i \neq j$ ,  $g^{x_i x_j}$  luce aleatorio para cualquier adversario que sólo conoce  $g^{x_i}$  y  $g^{x_j}$ . Para ello hacemos la siguiente definición.

**Definición 52** (Ventaja MDDH). *Sea  $G_q$  un grupo cíclico de orden  $q(\kappa)$  y  $g$  un generador de  $G_q$ . Dado un algoritmo  $D$ , definimos su ventaja MDDH como sigue*

$$\text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} |\Pr[D(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{x_i x_j}\}_{i,j=1, i \neq j}^n) = 1] - \Pr[D(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1, i \neq j}^n) = 1]|.$$

El siguiente lema prueba lo que decíamos anteriormente, si en el grupo se cumple DDH.

**Lema 3.** *Sea  $G_q$  un grupo cíclico de orden  $q(\kappa)$  con generador  $g$  donde se cumple DDH. Entonces la variante multi participante de DDH (MDDH) también se cumple. Esto es:*

$$(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{x_i x_j}\}_{i,j=1, i \neq j}^n) \stackrel{c}{\approx} (\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1, i \neq j}^n).$$

Donde  $x_i \in_R G_q$ ,  $r_{i,j} \in_R G_q$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Concretamente para todo adversario  $D$  que ataca MDDH existe un adversario  $D'$  que ataca DDH tal que

$$\text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa) \leq n(n-1)\text{Adv}_{D'}^{\text{DDH}}(\kappa).$$

---

<sup>1</sup>Es decir que puede ser computada sin necesidad de intercambiar mensajes entre  $P_i$  y  $P_j$ .

El protocolo SIGMIX <sup>$\kappa$</sup>  corriendo con participantes  $P_1, \dots, P_N$  y Mixers  $M_1, \dots, M_k$  en el modelo  $\mathcal{F}_{MN}^n, \bar{\mathcal{G}}_{KRK} - hybrid$  con  $n \in \mathbb{N}$ :

**Enviador  $P_i$ :** Cada enviador  $P_i$  procede como sigue:

1. Esperar a recibir la entrada (**Send**,  $P_j, m_{i,j}$ ).
2. Si  $i = j$  retornar  $\perp$ .
3. Sea  $x_i$  la clave secreta de  $P_i$  registrada en  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ .  $P_i$  no esta registrado en  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  retornar  $\perp$ .
4. Enviar (**Retrieve**,  $P_j$ ) a  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  y sea  $y_j$  la respuesta.
5. Si la respuesta fue  $\perp$  retornar  $\perp$ . De lo contrario calcular  $k_{i,j} \leftarrow y_j^{x_i}$  y luego calcular  $\sigma_{i,j} = \text{MAC}_{k_{i,j}}(m_{i,j})$ .
6. Enviar (**Send**,  $m_{i,j} || \sigma_{i,j}$ ) a  $\mathcal{F}_{MN}$ .
7. Retornar (**Sent**,  $P_j, m_{i,j}$ )

**Destinatario  $P_j$ :** Cada destinatario  $P_j$  procede como sigue:

1. Esperar a recibir la entrada (**Output**,  $L$ ) de  $\mathcal{F}_{MN}$ .
2. Sean  $y_1, \dots, y_N$  las claves públicas de todos los participantes del protocolo. Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$  computar el secreto compartido  $k_{i,j} \leftarrow y_i^{x_j}$ .
3. Sea el multiconjunto  $M_j \leftarrow \emptyset$ . Para cada  $(m_l, \sigma_l) \in L$  y para cada  $k_{i,j}$ , si  $\sigma_l = \text{MAC}_{k_{i,j}}(m_l)$  entonces  $M_j \leftarrow M_j \uplus \{(m_l, l)\}$ .
4. Retornar (**Messages**,  $M_j$ ).

**Mixer  $M_i$ :** Cada Mixer  $M_i$  envía  $(\mathcal{F}_{MN}, \text{Run})$  a  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  al principio de la ejecución del protocolo.

Figura 6.2: El protocolo SIGMIX

El adversario  $D'(g^x, g^y, g^z)$  atacando DDH funciona como sigue:

1. Escoger  $k \xleftarrow{R} \{1, \dots, n(n-1)\}$ .

2.  $(i^*, j^*) \leftarrow S_{k+1}$ .

3. Computar los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_1 &\leftarrow (\{g^{x_i}\}_{i=1, i \neq i^*, i \neq j^*}^n), \\ \vec{\gamma}_2 &\leftarrow (\{g^{x_i x_j}\}_{(i,j) \in \bar{I}_k, i \neq i^*, j \neq j^*}), \\ \vec{\gamma}_3 &\leftarrow (\{(g^x)^{x_i}\}_{i=1, i \neq i^*, i \neq j^*}^n), \\ \vec{\gamma}_4 &\leftarrow (\{(g^y)^{x_i}\}_{i=1, i \neq i^*, i \neq j^*}^n), \\ \vec{\gamma}_5 &\leftarrow (\{g^{r_{i,j}}\}_{(i,j) \in I_k}).\end{aligned}$$

4. Simular  $D(\vec{\gamma}_1, g^x, g^y, \vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4, \vec{\gamma}_5, g^z)$  y retornar lo que  $D$  retorne.

Figura 6.3: El adversario para DDH sobre  $G_{q(\kappa)}$   $D'$ .

*Demostración.* (Lema 3)

La demostración está basada en la siguiente observación. Sean  $C = \{1, \dots, n\}^2 \setminus \{(i, i)\}_{i=1}^n$ ,  $\{S_i\}_{i=1}^{n(n-1)}$  una enumeración de  $C$ ,  $I_k = \bigcup_{i=1}^k \{S_i\}$  e  $\bar{I}_k = C \setminus I_k$ . Consideremos la variable aleatoria

$$\vec{\chi}_k = (\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{(i,j) \in I_k}, \{g^{x_i x_j}\}_{(i,j) \in \bar{I}_k}).$$

Donde  $x_i \in_R G_q$ ,  $r_{i,j} \in_R G_q$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Sea  $D$  un adversario que ataca MDDH, notemos que la ventaja de  $D$  se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned}\text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa) &= |\Pr[D(\vec{\chi}_0) = 1] - \Pr[D(\vec{\chi}_{n(n-1)}) = 1]| \\ \text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa) &= \left| \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D(\vec{\chi}_{i-1}) = 1] - \Pr[D(\vec{\chi}_i) = 1] \right|\end{aligned}$$

En la Figura 6.3 mostramos un adversario  $D'$  que ataca DDH usando  $D$ . Para ello elige al azar un índice  $k$  para ejecutar  $D'(\vec{\chi}_{k-1})$  o  $D'(\vec{\chi}_k)$  según la tripleta que recibe de entrada es o no una tripleta Diffie-Hellman.<sup>2</sup> Esto nos permite relacionar la ventaja de  $D'$  con la ventaja de  $D$ .

Analicemos la ventaja DDH de  $D'$ :

<sup>2</sup>Se dice que una tripleta  $(g^x, g^y, g^z)$  es una tripleta Diffie-Hellman si  $g^z = g^{xy}$ .

$$\begin{aligned}
\text{Adv}_{D'}^{\text{DDH}}(\kappa) &= \left| \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D'(g^x, g^y, g^{xy}) = 1 | k = i] \Pr[k = i] - \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D'(g^x, g^y, g^z) = 1 | k = i] \Pr[k = i] \right| \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left| \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D'(g^x, g^y, g^{xy}) = 1 | k = i] - \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D'(g^x, g^y, g^z) = 1 | k = i] \right| \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \left| \sum_{i=1}^{n(n-1)} \Pr[D(\vec{\chi}_{i-1}) = 1] - \Pr[D(\vec{\chi}_i) = 1] \right| \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa)
\end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir para la relación entre las ventajas de  $D$  y  $D'$ . Con esto último podemos demostrar la indistinguibilidad entre  $(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{x_i x_j}\}_{i,j=1, i \neq j}^n)$  y  $(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1, i \neq j}^n)$ . Por contradicción, supongamos que  $\text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa)$  no es despreciable. Es decir, existe un polinomio  $p$  tal que para todo  $\kappa$  existe un  $\kappa' > \kappa$  tal que

$$\text{Adv}_D^{\text{MDDH}}(\kappa') \geq \frac{1}{p(\kappa)}.$$

Entonces se tiene lo siguiente para la ventaja DDH de  $D'$ :

$$\text{Adv}_{D'}^{\text{DDH}}(\kappa) \geq \frac{1}{n(n-1)p(\kappa)}.$$

Lo que contradice que DDH se tiene en  $G_q$ . Luego debe ser que

$$(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{x_i x_j}\}_{i,j=1, i \neq j}^n) \stackrel{c}{\approx} (\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1, i \neq j}^n).$$

□

El lema 4 nos permite relacionar las ventajas de adversarios dos adversarios  $\mathcal{D}_{\text{MDDH}}$  y  $\mathcal{D}_{\text{MAC}}$ , que atacan MDDH y MAC respectivamente, con la capacidad de cualquier ambiente de distinguir entre SIGMIX y  $\mathcal{F}_{\text{AAC}}$ .

**Lema 4.** *Para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario  $\mathcal{A}$  existe un simulador  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ , un adversario  $\mathcal{D}_{\text{MDDH}}$  que ataca MDDH y un adversario  $\mathcal{D}_{\text{MAC}}$  que ataca MAC, de modo tal que*

$$\begin{aligned}
\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) + N(N-1) \text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) &\geq \left| \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \text{SIGMIX}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{MN}}, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}_{KRK}})) - \right. \\
&\quad \left. \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\text{AAC}}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}_{KRK}})) \right|
\end{aligned}$$

*Demostración.* (Lema 4)

Sea  $\mathcal{Z}$  un ambiente y  $\mathcal{A}$  un adversario. Sea  $I_{\mathcal{A}} \subseteq \{1, \dots, N\}$  el conjunto de índices de los participantes que son corruptos por  $\mathcal{A}$  y  $I_{\mathcal{A}}^M$  el conjunto de índices de los mixers corruptos por  $\mathcal{A}$ . El adversario ideal  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$  está descrito en la Figura 6.4, y simula una ejecución de SIGMIX solo con acceso a  $\mathcal{F}_{AAC}$ . Como los valores de los mensajes enviados honestamente (tanto el enviador como el destinatario son honestos) permanecen desconocidos para  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$  hasta que todos los mensajes son enviados,  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$  engaña a la simulación interna de  $\mathcal{A}$  haciendo que  $\mathcal{F}_{MN}$  le diga a  $\mathcal{A}$  que los mensajes fueron enviados siendo que esto no es realmente así. Finalmente, cuando el conjunto de mensajes honestamente enviados le es revelado a  $\mathcal{S}$ , “silenciosamente” modifica la lista de mensajes recibidos de la simulación de  $\mathcal{F}_{MN}$ . Esto es para  $\mathcal{A}$  indistinguible de una ejecución donde un adversario **hipotético**  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$  adivina los mensajes enviados por  $\mathcal{Z}$  a cada participante honesto, puesto que la vista de  $\mathcal{A}$  es la misma en ambos casos.

Consideremos al adversario  $\mathcal{D}_{MDDH}$ , que ataca MDDH, definido en la Figura 6.5. Consideremos también al adversario  $\mathcal{D}_{MAC}$ , que ataca MAC, definido en la Figura 6.6.

Definimos las variables aleatorias Real e Ideal como sigue

$$\begin{aligned} \text{Real} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \text{SIGMIX}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{MN}} \{\tilde{P}_i\}^{\tilde{G}_{KRK}})) \\ \text{Ideal} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{AAC}}, \{\tilde{P}_i\}^{\tilde{G}_{KRK}})). \end{aligned}$$

Analicemos la ventaja de  $\mathcal{D}_{MDDH}$ :

$$\begin{aligned} \text{Adv}_{\mathcal{D}_{MDDH}}^{\text{MDDH}}(\kappa) &= \left| \Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\{g^{x_i}\}_{i=1}^N, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1,i \neq j}^N) = 1 | r_{i,j} = x_i x_j] - \right. \\ &\quad \left. \Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\{g^{x_i}\}_{i=1}^N, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1,i \neq j}^N) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q] \right| \end{aligned} \quad (6.1)$$

Claramente cuando  $r_{i,j} = x_i x_j$  las vistas de  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{A}$  son las mismas en la simulación de  $\mathcal{D}_{MDDH}$  y Real. Luego

$$\Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\{g^{x_i}\}_{i=1}^N, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1,i \neq j}^N) = 1 | r_{i,j} = x_i x_j] = \Pr[\text{Real} = 1]$$

Definimos el evento “ $\mathcal{A}$  falsifica” como el evento en que  $\mathcal{A}$  impersona algún participante honesto. Claramente esto es equivalente a que  $L' \setminus M = \emptyset$  en la línea 7 de  $\mathcal{D}_{MAC}$ . Definimos adicionalmente  $\vec{X} = (\{g^{x_i}\}_{i=1}^N, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1,i \neq j}^N)$ .

Acotamos superiormente el término de más a la derecha de la ecuación 6.1.

$$\begin{aligned} \Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q] &= \Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q \wedge \mathcal{A} \text{ no falsifica}] \underbrace{\Pr[\mathcal{A} \text{ no falsifica}]}_{\leq 1} + \\ &\quad \underbrace{\Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q \wedge \mathcal{A} \text{ falsifica}]}_{\leq 1} \Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}] \\ &\leq \Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q \wedge \mathcal{A} \text{ no falsifica}] + \Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}] \end{aligned}$$

El primer término de la cota superior es igual a  $\Pr[\text{Ideal} = 1]$  por la construcción de  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$  y porque  $\mathcal{F}_{AAC}$  no permite que  $\mathcal{A}$  impersona a un participante honesto. Luego

$$\Pr[\mathcal{D}_{MDDH}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q] \leq \Pr[\text{Ideal} = 1] + \Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}]. \quad (6.2)$$

El adversario ideal  $\mathcal{S}^A$  corriendo con participantes  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N$ , Mixers  $\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_k$  y funcionalidad ideal compartida  $\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}$  procede como sigue:

Inicialmente  $\mathcal{S}^A$  corrompe a los participante  $\tilde{P}_i$   $i \in I_A$  y corrompe a los Mixers  $\tilde{M}_i$   $i \in I_A^M$ . Adicionalmente ejecuta una simulación de  $\mathcal{Z}'(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \text{SIGMIX}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{MN}}, \{\tilde{P}_i\}^{\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}}))$  donde  $\mathcal{Z}'$  es una ITM controlada por  $\mathcal{S}^A$ , y  $\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}$  y  $\mathcal{F}_{MN}$  son ejecutadas honestamente con algunas modificaciones menores.

Simulación de links  $(\mathcal{Z}', \mathcal{A})$  con  $(\mathcal{Z}, \mathcal{S})$ :

Si  $m$  es recibido de  $\mathcal{Z}$  entonces hacer que  $\mathcal{Z}'$  envíe  $m$  a  $\mathcal{A}$ . Si  $m$  es enviado de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{Z}'$  entonces enviar  $m$  a  $\mathcal{Z}$ .

Simulación de participantes corruptos  $\tilde{P}_i$   $i \in I_A$ :

1. Si  $P_i$   $i \in I_A$  envía  $m || \sigma$  a  $\mathcal{F}_{MN}$  y  $\sigma = \text{MAC}_{y_j^{x_{i'}}}(m)$  para alguna clave pública registrada  $y_j$   $j \in \{1, \dots, N\}$  y alguna clave secreta registrada  $x_{i'}$   $i' \in I_A$ , entonces enviar  $(\text{Corruptsend}, m, i', j)$  a  $\tilde{P}_i$ .
2. Si  $\sigma \neq \text{MAC}_{y_j^{x_{i'}}}(m)$  para toda clave pública registrada  $y_j$   $j \in \{1, \dots, N\}$  y toda clave privada registrada  $x_{i'}$   $i' \in I_A$  no hacer nada.

Simulación de participantes honestos  $P_i$   $i \notin I_A$ :

1. Si  $(\tilde{P}_i, \text{Sent})$  es recibido de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  hacer que  $\mathcal{F}_{MN}$  envíe  $(\tilde{P}_i, \text{Sent})$  a  $\mathcal{A}$ .
2. Si  $(\mathcal{F}_{AAC}, \text{Corruptsend}, \tilde{P}_i, \tilde{P}_j, m_{i,j})$  es recibido de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  hacer que  $\mathcal{Z}'$  envíe  $(\text{Send}, m_{i,j}, j)$  a  $P_i$ . Cuando  $P_i$  pregunte por su clave secreta la funcionalidad  $\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}$  simulada debe responder la clave privada de  $P_j$  ( $\mathcal{S}^A$  la conoce pues  $P_j$  es corrupto), y cuando  $P_i$  pregunte por la clave pública de  $P_j$   $\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}$  debe responder la clave pública de  $P_i$ .
3. Si  $(\text{Messages}, M)$  es recibido desde  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  entonces para cada  $m \in M$  escoger  $i, j \xleftarrow{R} \{1, \dots, N\} \setminus I_A$ , hacer que  $\mathcal{Z}'$  envíe  $(\text{Send}, m, j)$  a  $P_i$  y eliminar el mensaje  $(\mathcal{S}, P_i, \text{Send})$  que  $\mathcal{F}_{MN}$  envía a su copia de  $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$  (similarmente  $\mathcal{S}^A$  puede solo adjuntar  $M$  a la lista  $L$  de  $\mathcal{F}_{MN}$ ).

Figura 6.4: El adversario ideal  $\mathcal{S}^A$

El adversario  $\mathcal{D}_{MDDH}(\{g^{x_i}\}_{i=1}^n, \{g^{r_{i,j}}\}_{i,j=1, i \neq j}^n)$  atacando MDDH funciona como sigue:

1. Inicializar  $M_i \leftarrow \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .
2. Simular una ejecución de SIGMIX con ambiente  $\mathcal{Z}$  y adversario  $\mathcal{A}$  en el modo  $\mathcal{F}_{MN}, \bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ -híbrido.
3. Cuando un participante  $P_i$   $i \in \{1, \dots, N\} \setminus I_A$  se registra en  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  setear la clave pública registrada a  $g^{x_i}$ .
4. Si  $\mathcal{Z}$  envía (**Send**,  $m, j$ ) a  $P_i$ , reemplazar la firma de  $P_i$  con  $\text{MAC}_{g^{r_{i,j}}}(m)$ . Adicionalmente si  $P_i$  y  $P_j$  son honestos hacer  $M_j \leftarrow M_j \uplus \{(m, i)\}$ .
5. Cuando la simulación se detiene retornar lo que  $\mathcal{Z}$  retorna.

Figura 6.5: El adversario para MDDH sobre  $G_q$   $\mathcal{D}_{MDDH}$

El adversario  $\mathcal{D}_{MAC}$  que ataca la infasificabilidad de MAC con acceso a un oráculo  $\text{MAC}_k$ ,  $k \in_R G_q$ :

1. Simular una ejecución de SIGMIX con ambiente  $\mathcal{Z}$  y adversario  $\mathcal{A}$  en el modo  $\mathcal{F}_{MN}, \bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ -híbrido.
2. Escojer  $i^*, j^* \in_R \{1, \dots, N\} \setminus I_A$ ,  $i^* \neq j^*$ , y sea  $M \leftarrow \emptyset$ ,
3. Para cada  $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2 \setminus (\{(i, i)\}_{i=1}^n \cup \{(i^*, j^*)\})$  elegir  $k_{i,j} \xleftarrow{R} G_q$ .
4. Si  $\mathcal{Z}$  envía (**Send**,  $m, j$ ) a  $P_i$  e  $i \neq i^*, j \neq j^*, i \neq j^*$  y  $j \neq i^*$ , cuando  $P_i$  llame a MAC reemplazar la firma con  $\text{MAC}_{k_{i,j}}(m)$ .
5. En caso contrario, cuando  $P_i$  llame a MAC reemplazar la firma con  $\sigma \leftarrow \text{MAC}_k(m)$  y hacer  $M \leftarrow M \cup \{m||\sigma\}$ .
6. Cuando  $\mathcal{F}_{MN}$  publica la lista  $L$  desechar todos los mensajes  $m||\sigma$  tal que  $\sigma = \text{MAC}_{k_{i,j}}(m)$ ,  $i \neq i^*$  or  $j \neq j^*$ , y con el resto de los mensajes formar una lista  $L'$ .
7. Si  $L' \setminus M \neq \emptyset$  elegir al azar un elemento  $m||\sigma$  en  $L' \setminus M$  y retornar  $(m, \sigma)$ .
8. De lo contrario abortar.

Figura 6.6: El adversario  $\mathcal{D}_{MAC}$

El evento “ $\mathcal{A}$  falsifica” está relacionado con la ventaja UF-CMA de  $\mathcal{D}_{\text{MAC}}$ . En efecto

$$\begin{aligned}
\text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) &\geq \Pr[\mathcal{D}_{\text{MAC}} \text{ falsifica} | \mathcal{A} \text{ falsifica}] \Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}] \\
&= \Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}] \cdot \\
&\quad \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \Pr[\mathcal{D}_{\text{MAC}} \text{ falsifica} | \mathcal{A} \text{ falsifica} \wedge (i^*, j^*) = (i, j)] \Pr[(i^*, j^*) = (i, j)] \\
&= \frac{\Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}]}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \Pr[\mathcal{D}_{\text{MAC}} \text{ falsifica} | \mathcal{A} \text{ falsifica} \wedge (i^*, j^*) = (i, j)]
\end{aligned}$$

Cuando  $i^*$  y  $j^*$  son los índices del emisor y receptor de una de las falsificaciones de  $\mathcal{A}$  se tiene que  $\Pr[\mathcal{D}_{\text{MAC}} \text{ falsifica} | \mathcal{A} \text{ falsifica} \wedge (i^*, j^*) = (i, j)] = 1$ . Luego

$$\text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) \geq \frac{\Pr[\mathcal{A} \text{ falsifica}]}{N(N-1)}.$$

Reemplazando en la ecuación 6.2, obtenemos

$$\Pr[\mathcal{D}_{\text{MDDH}}(\vec{X}) = 1 | r_{i,j} \in_r G_q] \leq \Pr[\text{Ideal} = 1] + N(N-1) \text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa).$$

Reemplazando en 6.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) &\geq |\Pr[\text{Real} = 1] - \Pr[\text{Ideal} = 1] - N(N-1) \text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa)| \\
\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) + &\geq |\Pr[\text{Real} = 1] - \Pr[\text{Ideal} = 1]| - N(N-1) \text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa)
\end{aligned}$$

Lo último lo podemos hacer pues, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $\Pr[\text{Real} = 1] - \Pr[\text{Ideal} = 1] > 0$  (en caso contrario podemos utilizar un nuevo ambiente  $\vec{Z}$  que responde lo contrario que  $\mathcal{Z}$ ). Finalmente

$$\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) + N(N-1) \text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) \geq |\Pr[\text{Real} = 1] - \Pr[\text{Ideal} = 1]|.$$

Por lo que podemos concluir. □

Podemos relacionar directamente con DDH la seguridad de SIGMIX con el siguiente lema

**Lema 5.** *Para todo ambiente  $\mathcal{Z}$  y para todo adversario  $\mathcal{A}$  existe un simulador  $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ , un adversario  $D$  que ataca DDH y un adversario  $\mathcal{D}_{\text{MAC}}$  que ataca MAC, de modo tal que*

$$\begin{aligned}
N(N-1) (\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) + \text{Adv}_{\text{MAC}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa)) &\geq \left| \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \text{SIGMIX}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{MN}}, \{\tilde{P}_i\}^{\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}})) - \right. \\
&\quad \left. \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\text{AAC}}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N, \{\tilde{P}_i\}^{\tilde{\mathcal{G}}_{KRK}})) \right|
\end{aligned}$$

*Demostración.* (Lema 5)

Se obtiene directamente al combinar el Lema 3 y el Lema 4. □

Finalmente la seguridad de SIGMIX viene garantizada por el siguiente teorema.

**Teorema 7.** *El protocolo SIGMIX GUC-emula a la funcionalidad ideal  $\mathcal{F}_{AAC}$  en el modelo  $\mathcal{F}_{MN}, \bar{\mathcal{G}}_{KRK}$ -híbrido con respecto a adversarios estáticos que corrompen a lo más  $k/2 - 1$  mixers.*

*Demostración.* (Teorema 7)

Por contradicción, supongamos que existe un ambiente  $\mathcal{Z}$ , un adversario  $\mathcal{A}$  y un polinomio  $p$  de modo tal que para todo  $\kappa'$  existe  $\kappa > \kappa'$  tal que

$$\left| \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{A}, \text{SIGMIX}, \{\tilde{P}_i\}^{\mathcal{F}_{MN}}, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}_{KRK}})) - \mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{AAC}, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_N, \{\tilde{P}_i\}^{\bar{\mathcal{G}}_{KRK}})) \right| \geq \frac{1}{p(\kappa)}.$$

En virtud del Lema 5 podemos escribir

$$\text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MDDH}}}^{\text{MDDH}}(\kappa) + \text{Adv}_{\mathcal{D}_{\text{MAC}}, \mathcal{D}_{\text{MAC}}}^{\text{UF-CMA}}(\kappa) \geq \frac{1}{N(N-1)p(\kappa)}.$$

Por lo tanto una de las ventajas no es despreciable, lo que contradice que se cumple DDH en  $G_q$  o la infalsificabilidad de MAC.  $\square$

Notamos que el modo híbrido donde es ejecutado SIGMIX puede ser simplificado.

**Corolario 4.** *El protocolo SIGMIX GUC-emula a la funcionalidad  $\mathcal{F}_{AAC}$  en el modo  $\mathcal{F}_{KG}, \bar{\mathcal{G}}_{KRK}$*

*Demostración.* (Teorema 4)

Directo usando el Teorema 7, el Teorema 6 y el Teorema de Composición (Teorema 1)  $\square$

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se planteó el problema de comunicación anónima autenticada y se demostró constructivamente que existe un protocolo que resuelve dicho problema. Para ello se estudiaron tópicos avanzados de Criptografía como UC, GUC, Anonimato, Desmentibilidad y distintas primitivas criptográficas asociadas a dichos tópicos. Se definieron rigurosamente las propiedades que debe tener un protocolo para resolver el problema planteado. Se desarrolló un protocolo para el cual se puede garantizar matemáticamente que satisface las propiedades necesarias para resolver el problema inicial. El protocolo desarrollado es eficiente, pues se construye a partir de un protocolo que se sabe eficiente por la comunidad [23] y adicionalmente efectúa una operación que es lineal en el número de participantes del protocolo.

### 7.1. Preguntas abiertas

Adicionalmente, del trabajo realizado se desprenden las siguientes preguntas que han quedado abiertas, pues escapan a los alcances de este trabajo. Sin embargo su sola formulación debe ser considerada un resultado de este trabajo, pues estas preguntas proponen interesantes líneas de investigación.

#### 7.1.1. Mixnet GUC-segura

El protocolo SIGMIX se construye a partir de una mixnet que en [23] se demuestra UC-segura. Sin embargo, dado que para poder UC-realizar la mixnet es necesario ocupar la funcionalidad compartida  $\mathcal{F}_{KG}$ , es válido preguntarse si el protocolo de [23] sigue siendo seguro cuando  $\mathcal{F}_{KG}$  es una funcionalidad compartida. En caso negativo es necesario preguntarse

si existe algún protocolo seguro para una mixnet con la setup assumption  $\mathcal{F}_{KG}$ . Finalmente, si todos los esfuerzos han fracasado es necesario preguntarse si existe una setup assumption compartida razonable con la cual se pueda GUC-realizar una mixnet.

### 7.1.2. Una modelación más exacta de la componibilidad en GUC

El objetivo principal de GUC era modelar protocolos que se pueden componer concurrentemente con otros protocolos que posiblemente comparten estado y de los cuales nada se puede asumir. Sin embargo en el trabajo de esta memoria nos dimos cuenta de que en la literatura, para el caso de PKI y CRS, <sup>1</sup> **sí se hacen suposiciones sobre los protocolos con los cuales el protocolo analizado** se componen.

Para caso de PKI se asume que los protocolos que hacen uso de la funcionalidad ideal  $\bar{\mathcal{G}}_{KRK}$  se encuentran dentro de un conjunto de protocolos  $\Phi$ . En general general  $\Phi$  solo contiene al protocolo analizado, por lo que la situación puede resultar muy similar a JUC [8].

El caso de CRS es algo distinto, pero se puede mostrar que es equivalente. En efecto, a la funcionalidad ideal que modela CRS se le especifica que debe distinguir entre los participantes honestos y no honestos. Si bien en [21] notan que asumir esto es irreal, afirman que en la práctica los participantes deben tener cuidado con no revelar cierto valor secreto. Lo anterior no es más que una limitación a los protocolos que puede ejecutar cada participante, pues  $\Phi$  correspondería a protocolo que no revelan el valor antes mencionado.

Adicionalmente, que solo protocolos en un conjunto  $\Phi$  pueden acceder a la funcionalidad compartida no es posible de formalizar en EUC. Si bien es posible de formalizar en GUC, es posible pensar en un modelo más general donde  $\Phi$  no depende de propiedades estáticas de los protocolos si no que de propiedades dinámicas. Lo anterior no es formalizable en GUC, y para ellos es necesario hacer ciertas modificaciones a GUC.

---

<sup>1</sup>En este caso se hace uso de una funcionalidad compartida más fuerte que CRS conocida como *Augmented Common Random String*.

# Referencias

- [1] R. Canetti. Universally composable security: A new paradigm for cryptographic protocols. Cryptology ePrint Archive, Report 2000/067, 2000. <http://eprint.iacr.org/>.
- [2] R. Canetti. Universally composable security: A new paradigm for cryptographic protocols. In *FOCS*, pages 136–145, 2001.
- [3] R. Canetti. Universally composable signature, certification, and authentication. In *CSFW*, page 219. IEEE Computer Society, 2004.
- [4] R. Canetti. Security and composition of cryptographic protocols: A tutorial. Cryptology ePrint Archive, Report 2006/465, 2006.
- [5] R. Canetti, Y. Dodis, R. Pass, and S. Walfish. Universally composable security with global setup. In S. P. Vadhan, editor, *TCC*, volume 4392 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 61–85. Springer, 2007.
- [6] R. Canetti, C. Dwork, M. Naor, and R. Ostrovsky. Deniable encryption. In *CRYPTO: Proceedings of Crypto*, 1997.
- [7] R. Canetti, E. Kushilevitz, and Y. Lindell. On the limitations of universally composable two-party computation without set-up assumptions. *JCRYPTOL: Journal of Cryptology*, 19, 2006.
- [8] R. Canetti and M. Rabin. Universal composition with joint state. In *CRYPTO: Proceedings of Crypto*, 2003.
- [9] D. Chaum. Untraceable electronic mail, return addresses, and digital pseudonyms. *Commun. ACM*, 24(2):84–88, 1981.

- [10] D. Chaum. The dining cryptographers problem: Unconditional sender and recipient untraceability. *J. Cryptology*, 1(1):65–75, 1988.
- [11] W. Diffie and M. E. Hellman. New directions in cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22(5):644–654, 1976.
- [12] Y. Dodis, J. Katz, A. Smith, and S. Walfish. Composability and on-line deniability of authentication. In O. Reingold, editor, *TCC*, volume 5444 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 146–162. Springer, 2009.
- [13] Dwork, Naor, and Sahai. Concurrent zero-knowledge. *JACM: Journal of the ACM*, 51, 2004.
- [14] T. ElGamal. A public-key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-31:469–472, 1985.
- [15] O. Goldreich. *Foundations of cryptography*, volume 1, chapter 4.2.1, pages 191–192. Cambridge University Press, 2001.
- [16] P. Golle, M. Jakobsson, A. Juels, and P. Syverson. Universal re-encryption for mixnets. In *CTRSA: CT-RSA, The Cryptographers’ Track at RSA Conference, LNCS*, 2004.
- [17] A. Hevia and D. Micciancio. An indistinguishability-based characterization of anonymous channels. In N. Borisov and I. Goldberg, editors, *Privacy Enhancing Technologies*, volume 5134 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–43. Springer, 2008.
- [18] Y. Ishai, E. Kushilevitz, R. Ostrovsky, and A. Sahai. Cryptography from anonymity. In *FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2006.
- [19] R. Pass. On deniability in the common reference string and random oracle model. In *CRYPTO: Proceedings of Crypto*, 2003.
- [20] M. D. Raimondo and R. Gennaro. New approaches for deniable authentication. *J. Cryptology*, 22(4):572–615, 2009.
- [21] S. Walfish. *Enhanced security models for network protocols*. PhD thesis, New York, NY, USA, 2008. AAI3310580.

- [22] D. Wikström. A universally composable mix-net. In *Versión completa obtenida directamente del autor.*, 2004.
- [23] D. Wikström. A universally composable mix-net. In *Theory of Cryptography Conference (TCC)*, LNCS, volume 1, 2004.
- [24] A. C.-C. Yao, F. F. Yao, and Y. Zhao. A note on universal composable zero-knowledge in the common reference string model. *Theor. Comput. Sci*, 410(11):1099–1108, 2009.