



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA RESPUESTA DE ONDAS
INTERNAS GRAVITACIONALES AFECTADAS POR LA
ROTACIÓN TERRESTRE EN UN FLUJO ESTRATIFICADO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

HUGO NICOLÁS ULLOA SÁNCHEZ

PROFESOR GUÍA
YARKO NIÑO CAMPOS

PROFESOR CO-GUÍA:
ALBERTO DE LA FUENTE STRANGER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CARLOS M. GARCÍA RODRÍGUEZ
ROBERTO RONDANELLI ROJAS

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2011

**RESUMEN DE MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL
POR: HUGO ULLOA SÁNCHEZ
FECHA: 25/01/2010
PROF. GUÍA: Sr. YARKO NIÑO CAMPOS**

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA RESPUESTA DE ONDAS INTERNAS
GRAVITACIONALES AFECTADAS POR LA ROTACIÓN TERRESTRE EN UN FLUJO
ESTRATIFICADO**

Los lagos en Chile central, como la mayoría de los cuerpos lacustres a latitudes medias, se estratifican durante la temporada estival. La transición entre la zona superficial cálida denominada epilimnion y la zona profunda fría denominada hipolimnion, es usualmente brusca, lo que permite tener un modelo conceptual de dos capas de densidad homogénea, separados por una interfaz de densidad en la zona, denominada termoclina, que se ubica en la profundidad a la cual se registran los máximos gradientes verticales de densidad. A escala diaria, la principal fuente de energía de un lago es el viento que actúa en la superficie. El trabajo mecánico realizado por el viento se transfiere a la columna de agua como energía cinética turbulenta, teniendo capacidad suficiente para mezclar las aguas someras y excitar ondas en un amplio rango de escalas, desde seiches internos de baja frecuencia hasta ondas de alta frecuencia con características no-lineales y no-hidrostáticas, como las ondas tipo solitarias. Estas ondas se ven afectadas por la aceleración de Coriolis si la frecuencia inercial de la Tierra a la latitud del lago es mayor a la frecuencia de las ondas internas excitadas, trayendo como consecuencia la modificación de las ondas internas de gran escala, que pueden transformarse en ondas tipo Kelvin y Poincaré, principalmente. La dinámica de las ondas internas excitadas por el viento y afectadas por la rotación terrestre puede ser alteradas por fenómenos no-lineales cuando la escala de empinamiento, la cual está relacionada con la razón de aspecto de la estratificación, es menor que el periodo de las ondas internas.

Considerando estas variables, o sea la acción del viento sobre la superficie, la acción de la rotación terrestre y la razón de aspecto de la estratificación, se llevó a cabo un estudio experimental de laboratorio, con el objetivo principal de estudiar la respuesta de ondas internas de gran escala en un cuerpo de agua estratificado afectado por la rotación del medio. Las experiencias fueron caracterizadas a partir de los números adimensionales Wedderburn, Burger y la razón de aspecto. El estudio experimental se desarrolló en el laboratorio de Hidráulica del Departamento de Ingeniería Civil, de la Universidad de Chile.

Los principales resultados de esta investigación fueron la construcción de una mesa rotatoria experimental, la modelación y metodología experimental y los registros experimentales, con su posterior análisis. El montaje experimental permite modelar un variado rango de frecuencias de rotación, crear diferentes condiciones de estratificación utilizando mezclas salinas, generar inclinaciones de la interfaz de densidad hasta condiciones extremas, pudiendo simular la ausencia súbita de viento, que permite analizar el comportamiento de la interfaz de densidad luego que se pierde el estado forzado. La dinámica vertical de la picnoclina se registró con dos cámaras que rotan solidarias al estanque. Usando este sistema, se realizaron tres set de experimentos, con un total de 24 experimentos, los cuales buscaron capturar el comportamiento de las ondas internas variando cada uno de los parámetros analizados, con especial interés en las condiciones adimensionales existentes en el lago Villarrica, IX Región de Chile.

Las observaciones permiten concluir que la relajación de la condición forzada inicial genera un seiche que evoluciona en el tiempo en respuesta a efectos de rotación, como ondas Kelvin y Poincaré, que, debido a sus interacciones no-lineales y no-hidrostáticos, degenera en ondas tipo solitones. A través del uso de un filtro Pasa-Banda se reconstituyeron sintéticamente los modos dominantes de oscilación observados en el espectro de densidad potencial de las series de tiempo, con los cuales se estudió y caracterizó: (1) Ondas no-lineales, tipo solitarias, las cuales fueron observadas para razones de aspecto menores a 0.5; (2) Interacción no-lineal y no-hidrostática de las ondas fundamentales Kelvin y Poincaré, la que fue observada principalmente para números de Wedderburn 0.5 (condición de upwelling); (3) Distribución de energía entre los modos dominantes, lo que arrojó que los modos fundamentales de las ondas Kelvin y Poincaré, contienen gran parte de la energía potencial del sistema; (4) Disipación de energía de la onda Kelvin debido a cambios en los números de Wedderburn, Burger y razón de aspecto, con lo que se obtuvo que tanto el efecto de la rotación, como los fenómenos no-lineales gatillados por la razón de aspecto y el número de Wedderburn son relevantes parámetros en la escala temporal de disipación de energía. Los resultados obtenidos permiten entender de forma más acabada el comportamiento no-lineal y no-hidrostático de las ondas internas en función de los forzantes externos, de la estratificación y la rotación del medio.

A Yarko, por ser “El Profe”.

Agradecimientos

A Yarko y Beto, por ser Guías, Maestros y Compañeros durante estos últimos años.
A Carlos, por toda su ayuda y amistad a lo largo de esta investigación.
A Marcelo, por ser un apoyo en todo sentido.
A Roberto, por mostrar desde el inicio un fuerte interés en nuestro trabajo.
A Juan y Manuel, por su trabajo y simpatía.
A Eugenio, Tomás y Chalo, por ayudarme en el laboratorio.
A mis compañeros y amigos, por entenderme y aceptarme.
A Aldo y Cristián por ayudarme en momentos claves.
A Jessica, por ayudar en las cosas del día a día.
A Tito, por escucharme sin entender algo.
A Carito, por trasnochar a mi lado.
A mis Padres (4) y Hermanos (6), por el simple hecho de preguntarme: *y... ¿Cuándo terminas?*
A mis mecenas, en especial al Proyecto Fondecyt 1080617.

Esta tesis terminó tal como comenzó...

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Antecedentes Generales	3
1.2. Motivación	4
1.3. Objetivos	5
1.3.1. Objetivos Generales	5
1.3.2. Objetivos Específicos	5
1.4. Metodología	6
1.4.1. Estudio de los fenómenos físicos que gobiernan el experimento	6
1.4.2. Diseño, construcción y puesta en marcha de mesa rotatoria e instrumental	6
1.4.3. Modelación y desarrollo de los experimentos	6
1.4.4. Análisis de los resultados	6
1.5. Organización del Informe	7
2. Marco Teórico	8
2.1. Estratificación y mezcla en lagos y embalses	8
2.2. Estratificación térmica de lagos y embalses	9
2.3. Campo de ondas internas gravitacionales	10
2.3.1. Ondas internas afectadas por Coriolis	10
2.3.2. Ondas internas no-lineales	12
2.4. Cascada de energía en lagos estratificados	14
2.4.1. Energía en ondas internas afectadas por Coriolis	16
2.4.2. Distribución de energía	17
2.4.3. Transferencia de energía debido a ondas tipo solitarias	17
2.4.4. Disipación de energía por fricción	18
2.5. Ecuaciones que gobiernan la dinámica de ondas internas	18
2.5.1. Solución fundamental de ondas lineales	24
2.6. Números adimensionales que gobiernan el modelo	28
2.6.1. Número de Wedderburn	28
2.6.2. Número de Burger	29
2.6.3. Razón de aspecto	29
2.6.4. Modelación física del prototipo	29
2.6.5. Condición inicial: amplitud máxima de seiche interno	32
2.6.6. Escalas de tiempo de ondas internas	33
3. Montaje Experimental	35
3.1. Desarrollo de Mesa Rotatoria	35
3.1.1. Estructura principal	35

3.1.2.	Cubeta Cicular	35
3.1.3.	Sistema upwelling	36
3.1.4.	Sistema electro-mecánico	38
3.2.	Estratificación del fluido	38
3.2.1.	Estructura de densidad	39
3.2.2.	Método de estratificación	39
3.3.	Metodología de adquisición y transformación de datos	40
3.3.1.	Adquisición de datos	40
3.3.2.	Transformación de escala	42
3.4.	Resumen metodología experimental	43
4.	Set de Experimentos	45
4.1.	Campaña de Terreno - Villarrica, Verano 2009	45
4.1.1.	Datos de campo	46
4.2.	Modelación de experimentos	48
4.2.1.	Primer set de experimentos	51
4.2.2.	Segundo set de experimentos	51
4.2.3.	Tercer set de experimentos	51
4.3.	Análisis de error en el desarrollo experimental	52
5.	Análisis de resultados experimentales	57
5.1.	Resultados experimentales	57
5.2.	Caracterización de las series de tiempo	57
5.2.1.	Análisis de estado estacionario	60
5.2.2.	Análisis de periodicidad	61
5.3.	Campo de ondas internas: análisis de frecuencia	62
5.3.1.	Clasificación de ondas internas con criterio de frecuencia	63
5.3.2.	Descomposición del campo de ondas internas	64
5.3.3.	Ondas no-lineales	65
5.3.4.	Interacción Kelvin-Poincaré	70
5.4.	Distribución de energía	72
5.4.1.	Disipación de energía	73
6.	Discusión y Conclusiones	78
6.1.	Discusión	78
6.1.1.	Sobre el desarrollo experimental	78
6.1.2.	Sobre los resultados experimentales	79
6.1.3.	Extrapolación a terreno: lago Villarrica	80
6.2.	Conclusiones	81
7.	Anexos	89
7.1.	Apéndice I: Resultados de la propagación de error	89
7.2.	Apéndice II: Análisis estadístico de las series de tiempo	89
7.3.	Apéndice III: Espectro de densidad potencial	89
7.4.	Apéndice IV: Clasificación modal de frecuencias dominantes	89
7.5.	Apéndice V: Características físicas y temporales de las ondas Solitón-Kelvin	89
7.6.	Apéndice VI: Interacción Kelvin-Poincaré	96

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Generales

Varios lagos en el centro sur de Chile presentan estratificación térmica durante la estación de verano (Meruane & Niño, 2005). Entre los forzantes meteorológicas del sistema, el viento y el intercambio de calor con la atmósfera poseen una importancia fundamental. Tales forzantes, particularmente los fuertes vientos, pueden establecer un amplio espectro de respuestas en la hidrodinámica del lago, incluyendo Seiches superficiales e internos, además de un número de ondas internas más pequeñas, las cuales resultan de, entre otras fuentes, la interacción no lineal de los modos de oscilación del sistema (Hodges *et al.*, 2000; Wüest & Lorke, 2003). Las ondas internas son afectadas por la batimetría, pudiendo gatillar fenómenos tales como reflexión y refracción de ondas (Rueda *et al.*, 2005).

Cuando un lago es suficientemente grande las ondas internas son afectadas por la aceleración de Coriolis, la cual induce rotación y cambios en las frecuencias de las ondas (Lemmin *et al.*, 2005). Entre las ondas excitadas por Coriolis se encuentran las *Kelvin* y *Poincaré*.

El espectro de cascadas de ondas internas se ve afectado por la turbulencia (Staquet & Sommeria, 2002). La mezcla inducida por el viento es llevada a cabo por la turbulencia existente en el sistema, estando directamente relacionada con la agitación de la capa superficial, en donde comienza el proceso de mezcla, o con el rompimiento de las ondas internas en la parte inferior de esta capa (Boegman *et al.*, 2003, 2005b,a). Todos estos procesos también están afectados por el Efecto Coriolis, al igual que la interacción entre la tensión de corte inducida por el viento en la superficie libre y la rotación terrestre, la que es llamada espiral o Capa de Ekman. Ésta tiende a limitar el alcance de la difusión vertical de la energía cinética turbulenta inducida por el viento, además genera modificaciones en la eficiencia del proceso de mezcla debido a la acción del flujo de corte (Condie, 1999; Galmiche, 2001).

Aun cuando hoy en día existe una cantidad sustancial de investigación asociada a la hidrodinámica de lagos, la interacción de las diferentes fuentes de mezcla está sólo parcialmente entendida, varios aspectos de tales interacciones permanecen siendo investigadas, tales como la formación y dinámica de ondas no-lineales y no-hidrostáticas bajo ambientes en que la rotación del medio juega un rol fundamental, como también la distribución y transferencia de energía entre los modos de oscilación y la disipación de ésta por fricción. Tanto estudios de campo como experimentales, son contrastados con modelos matemáticos/numéricos (Wüest & Lorke, 2003) que buscan caracterizar y predecir de

forma más completa los diferentes fenómenos observados.

La necesidad de comprender de forma más acabada la dinámica de las ondas internas afectadas por la rotación del terrestre en flujos estratificados desde un enfoque experimental, ha sido la motivación principal de esta investigación, en consecuencia, el presente estudio se centralizará en:

1. Poner en marcha una instalación experimental y desarrollar una metodología de trabajo para el estudio del efecto de la rotación en cuerpos lacustres estratificados.
2. Generar una base de registro que permita un mayor conocimiento del Efecto Coriolis sobre la evolución de las ondas internas afectadas por la rotación terrestre.
3. Analizar la evolución de las ondas internas en un fluido estratificado afectadas por la rotación.

Finalmente, el estudio pretende continuar con una línea de investigación en fluidodinámica y aspectos medio ambientales de sistemas acuáticos, desarrollado a lo largo de varios años a través de una secuencia de proyectos de investigación (Fondecyt), en pos de aumentar el conocimiento y desarrollo de herramientas para el análisis de la hidrodinámica de lagos estratificados tales como varios lagos del centro sur de Chile, combinando campañas de terreno, estudios experimentales y análisis generados a través de modelos matemáticos/numéricos.

1.2. Motivación

En la Novena Región de la Araucanía, se encuentra el lago Villarrica, ubicado en los $30^{\circ}15'$ de latitud Sur y $72^{\circ}05'$ de longitud Oeste, con una altura promedio del espejo de agua de 230 *msnm*, a los pies del volcán que lleva su mismo nombre. El lago está colindado por los cordones montañosos que pertenecen al inicio precordillerano de los Andes Sur, los cuales limitan su geometría subrectangular, elongada en una dirección promedio Este-Oeste, alcanzando un largo máximo de 23,05 *km*, un largo mínimo de 11,20 *km* y una superficie de 176 *km*² aproximadamente (Campos, 1983).

El régimen morfotectónico del área, junto con la última glaciación, dieron origen a este cuerpo lacustre en estudio. La formación de la cuenca que alberga actualmente al lago se debería a la socavación de un valle preexistente, mientras que el desplazamiento general de los glaciares, principalmente en dirección Este a Oeste, provocó que las morrenas frontales arrastradas taparan el área de evacuación de la cuenca (Laugenie, 1971).

La batimetría del lago Villarrica posee las características de una cuenca lacustre, presentando un alto gradiente de profundidad, medido desde las costas al centro geométrico del lago. A 4 *km* de la costa Oeste se encuentra la única isla, *Aillaquillen*, la cual pertenece a una meseta sublacustre, desarrollada en el área Sur-Oeste, entregando una singularidad batimétrica al lago Villarrica. La profundidad máxima medida alcanza los 167 *m* (SHOA, 2008).

La reserva de agua que existe en el lago se debe a su principal afluente, el río Trancura, y varios afluentes secundarios. El único efluente del lago Villarrica es el río Toltén, el cual nace en el extremo poniente del lago, capturando las aguas de una cuenca de drenaje de 2920 *km*² aproximadamente, lo que corresponde a 16,6 veces el área del lago (Campos, 1983).

El lago Villarrica posee un clima templado frío lluvioso debido a su latitud y ubicación precordillerana. Esta zona se caracteriza por las bajas temperaturas durante todo el año y el aumento de las

precipitaciones con la altura. La escorrentía registrada anualmente en la zona del lago Villarrica es de 2967 mm (DGA-UACH, 1994). Por otra parte, en la localidad de Flor de Lago, 5 km al norte de Villarrica, se han registrado 2595 mm de precipitación anual, de los cuales 1160 mm se concentran en los meses invernales (Lagos, 2002). Las temperaturas medias mensuales varían entre 7°C en el invierno y los 16°C en verano. Los vientos por lo general tienen una componente predominantemente Este-Norte/Este durante el día y Oeste-Sur/Oeste durante la noche, éstos también son llamados *Vientos Cruzados* (Norte/Este-Sur/Oeste). Además de éstos, se observan bajo cierta frecuencia vientos en dirección Este en algunos sectores de la zona. Estos vientos son llamados *Puelches* por los oriundos del zona, que significa *Gente del Este*. El fenómeno Puelche es uno de los agentes principales en los procesos de mezcla que ocurren en el lago Villarrica.

Las características físicas, hidrometeorológicas y ambientales del lago Villarrica hacen que este cuerpo lacustre tenga un comportamiento hidrodinámico de mucho interés social y científico. La complejidad de su dinámica puede ser estudiada analizando la respuesta del lago frente a forzantes meteorológicos, tales como la radiación solar y el viento que sopla en la superficie libre del agua. Estos dos factores son los responsables de los fenómenos de estratificación térmica en periodo estival y ondas superficiales e internas que se generan como respuesta. La dinámica de estas ondas es de especial interés, debido a que pueden transferir momentum, masa y calor a través del cuerpo de agua.

Debido al tamaño que posee y a la latitud que se encuentra el lago Villarrica, se puede verificar que el Efecto Coriolis no es despreciable (Meruane & Niño, 2005), por lo que los fenómenos hidrodinámicos, entre ellos las ondas internas, son perturbadas por la rotación terrestre, trayendo como consecuencia una serie de ondas secundarias, las cuales pueden gatillar redistribuciones de la masa (sedimentos, nutrientes, biomasa) en el cuerpo de agua.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivos Generales

La investigación tiene como objetivo principal estudiar experimentalmente la respuesta de ondas internas gravitacionales afectadas por la rotación terrestre en un flujo estratificado.

1.3.2. Objetivos Específicos

El estudio de investigación propuesto posee tres objetivos específicos, los cuales serán desarrollados en el orden que se presenta a continuación:

1. Diseño, construcción y puesta en marcha de una mesa rotatoria experimental, desarrollada en el laboratorio de Hidráulica Francisco J. Domínguez de la Universidad de Chile.
2. Generación de una metodología de trabajo experimental y modelación de experimentos, aplicado al uso de la mesa rotatoria y los equipos e instrumentos que interactúan con ésta.
3. Desarrollo, registro y análisis de resultados de un conjunto de experimentos realizados en la mesa rotatoria, que busca estudiar la respuesta de un flujo estratificado frente a la rotación terrestre.

1.4. Metodología

1.4.1. Estudio de los fenómenos físicos que gobiernan el experimento

Es fundamental entender la hidrodinámica del problema a estudiar. Los principales tópicos que se tomarán en cuenta en el estudio son: i) análisis de los parámetros adimensionales relevantes que entregan restricciones a la escala del experimento; ii) los efectos de aceleración de Coriolis sobre un fluido estratificado; iii) ondas internas de pequeña amplitud que se pueden generar en un fluido estratificado; iv) modos de un sistema estratificado frente a la acción del viento; v) efectos no lineales y no hidrostáticos en un fluido estratificado y bajo rotación.

1.4.2. Diseño, construcción y puesta en marcha de mesa rotatoria e instrumental

En esta etapa se plantea el diseño del montaje experimental en función de la caracterización adimensional de las ecuaciones que gobiernan del fenómeno en estudio. El objetivo del diseño, construcción y puesta en marcha de una mesa rotatoria es poder desarrollar a nivel experimental ondas internas afectadas por la rotación del medio en un flujo estratificado. Es importante conocer las escalas físicas y temporales involucradas en el problema en estudio, puesto que son parámetros de entrada para las dimensiones y rangos de operación del sistema.

Las principales sub-etapas que se identifican son: i) diseño conceptual del montaje experimental, el cual está caracterizado por las características de los fenómenos en estudio: estratificación, inclinación de la interfaz de densidad, rotación del medio y ondas internas; ii) construcción del montaje experimental, el que se llevará a cabo en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Chile; iii) puesta en marcha de mesa rotatoria. Los principales problemas a solucionar en esta primera etapa están ligados al funcionamiento mecánico y eléctrico de la mesa rotatoria y los dispositivos con los cuales interactúa; iv) instrumentación del sistema experimental, lo cual buscará capturar la dinámica de las ondas internas afectadas por la rotación del medio, en un flujo estratificado.

1.4.3. Modelación y desarrollo de los experimentos

Luego de tener bajo funcionamiento la mesa rotatoria y los instrumentos de medición, se desarrollará una metodología de trabajo, la que entregará un esquema a seguir para el buen procedimiento en el manejo instrumental. Una vez que se tenga desarrollada la metodología de trabajo se llevarán a cabo los experimentos, los cuales serán registrados y posteriormente estudiados desde el punto de vista hidrodinámico, específicamente enfocándose al análisis de ondas internas generadas a partir de la rotación, estratificación y *seiche* artificial inducido.

1.4.4. Análisis de los resultados

En esta etapa se estudia la frecuencia y el estado energético de las ondas, además de identificar y caracterizar posibles efectos no lineales y no hidrostáticos en los modos generados y observados. Las principales ondas que se busca identificar y analizar son las *Kelvin*, *Poincaré*, y ondas *tipo solitarias*.

1.5. Organización del Informe

El informe de este estudio está dividido en siete capítulos, los cuales son resumidos a continuación.

En el **Capítulo 2: Marco Teórico**, se desarrollan y revisan los principales resultados teóricos que caracterizan la dinámica de ondas internas gravitacionales, con el objetivo de entender la física y el Estado del Arte de los fenómenos estudiados.

En el **Capítulo 3: Montaje Experimental**, se describen y diseñan los diferentes elementos que conforman el montaje experimental, analizando las funciones e interacciones entre los componentes. Además se mencionan las diferentes etapas que se llevaron a cabo en el proceso de montaje y puesta en marcha de los experimentos.

En el **Capítulo 4: Set de Experimentos**, se expone y fundamenta el conjunto de experimentos realizados, en donde la principal fuente de información para la modelación fue obtenida de los resultados de terreno de la campaña Villarrica - Verano 2009. Además se resumen las principales características de los parámetros medidos y analizados. Posteriormente se realiza un análisis del error que se comete en la obtención de las variables involucradas.

En el **Capítulo 5: Análisis de Resultados Experimentales**, se expone el proceso de adquisición, transformación y método de clasificación de los datos experimentales obtenidos. Además se desarrolla el análisis para la identificación de las ondas relevantes en el sistema estudiado, basándose en la caracterización de series de tiempo y análisis de Fourier. Finalmente se presentan tres resultados importantes obtenidos en esta investigación: i) caracterización de ondas internas de origen lineal y no-lineal; ii) interacción Kelvin-Poincaré fundamental; iii) distribución y disipación de energía.

En el **Capítulo 6: Discusión y Conclusiones**, se discuten los resultados obtenidos en el Capítulo 6, y se concluye con respecto a los objetivos buscados en la investigación.

En el **Capítulo 7: Anexos**, se presentan los resultados experimentales obtenidos, específicamente series de tiempo de la interfaz de densidad y espectros de densidad potencial.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Estratificación y mezcla en lagos y embalses

El término termo-hidrodinámica se refiere a los procesos físicos asociados al calor, la energía, la masa y el transporte de momento en el cuerpo de agua. El proceso físico en conjunto posee tres principales aspectos: distribución de temperatura, turbulencia y corrientes. La estructura de temperatura en un cuerpo de agua está principalmente caracterizada por la radiación solar incidente sobre la superficie y el intercambio de calor en la atmósfera. Por otra parte, la turbulencia y las corrientes están conducidas esencialmente por el viento, afluentes y efluentes, plumas boyantes y, dependiendo del tamaño y latitud, por la aceleración de Coriolis. Sin embargo, estas tres características son interdependientes, cualquiera de ellas es afectada y modulada por las otras dos.

La entrada de energía solar a la superficie libre tiende a disminuir la energía potencial, generando una capa superficial más caliente y en consecuencia más liviana que las inferiores, las cuales son más frías y en consecuencia más pesadas, definiendo de esta forma una estratificación estable de la columna de agua. Este mecanismo de estabilización tiende a interrumpir el movimiento del cuerpo de agua, dificultando cualquier intercambio vertical entre las aguas superficiales y las aguas profundas. La energía cinética entra al sistema a través del viento, afluentes y/o efluentes, tendiendo a perturbar la estabilidad debido a la aparición de corrientes y seiches de gran escala. Estos últimos, en particular, degeneran en ondas internas de escalas más pequeñas, las cuales pueden actuar como un mecanismo de inestabilidad y producción de turbulencia. La termo-hidrodinámica, en este contexto, puede ser interpretada como la interrelación entre la energía potencial generada por la radiación solar y la energía cinética turbulenta introducida, principalmente, por el viento al cuerpo de agua.

Los procesos termo-hidrodinámicos de lagos y embalses están usualmente determinados por pequeñas diferencias verticales de densidades asociadas a gradientes verticales de temperatura en el interior del cuerpo de agua, gradientes de diferentes especies disueltas y/o suspendidas, o una combinación de todas estas variables (Niño & Tamburrino, 2004c). Dentro de los procesos que gobiernan el comportamiento físico y biogeoquímico de lagos y embalses se pueden nombrar los siguientes: (1) estratificación térmica estable inducida por la radiación solar, ésta impide el desarrollo de mezcla vertical; (2) convección natural causada por un perfil inestable de densidad; (3) Circulación de corrientes, seiches, ondas internas y mezclas inducidas por forzantes meteorológicos; (4) Circulación y ondas internas modificadas por rotación terrestre en cuerpos de agua suficientemente grandes, entre otros fenómenos.

2.2. Estratificación térmica de lagos y embalses

La radiación solar actuando sobre la superficie de un lago o embalse calienta el agua superficial, induciendo un gradiente vertical negativo de temperatura debido a la difusión, desde la superficie hacia aguas más profundas. El gradiente de temperatura en la columna de agua tiene un gradiente de densidad asociado, acorde a las relaciones termodinámicas entre la temperatura y la densidad del agua. En el caso del agua destilada a 1 atm, la densidad máxima posible se alcanza a 4°C de temperatura y esta relación decrece suavemente para temperaturas mayores (pero significativamente en términos de efectos boyantes) y más rápidamente para temperaturas menores. Por otro lado, para temperaturas mayores a 4°C, el gradiente positivo de temperatura tiene asociado un gradiente negativo de densidad en la columna de agua, con aguas más livianas localizadas sobre aguas más pesadas. Este tipo de estratificación es llamada *estable*, la cual no induce convección térmica natural en el interior del cuerpo de agua.

El resultado es la formación de una estructura de densidad y temperatura que tiende a dividir o aislar, a través de una interfaz, la capa superficial más caliente y liviana de la más fría y pesada. La zona de temperatura y densidad donde el gradiente de estas variables es máximo (en valor absoluto) es llamada *termoclina*. La capa superficial es llamada *epilimnion* y la capa inferior es llamada *hipolimnion* (Mortimer, 1951; Csanady, 1967).

El *epilimnion* está usualmente bien mezclado debido a que el viento induce la turbulencia necesaria para que esto suceda. Por el contrario, el *hipolimnion* permanece más bien tranquilo, porque la *termoclina* frena el intercambio de momento entre la capa superficial y la inferior. Eventos de fuertes vientos, sostenidos en el tiempo, incrementan el nivel de energía cinética turbulenta del *epilimnion* y en consecuencia la capacidad de mezcla a través de la *termoclina*. Eventualmente, niveles altos de intensidad de turbulencia local pueden erosionar y profundizar la ubicación de la *termoclina*, causando mezcla entre las aguas de las capas inferiores y las superficiales. Este proceso hace decrecer la temperatura de la superficie del agua o de la misma forma, aumenta la densidad del agua superficial e incrementa la energía potencial del cuerpo de agua en conjunto. Esto ocurre a expensas de la energía cinética turbulenta transferida desde el viento (Mortimer, 1974).

A un nivel estacional, cambios en la estratificación de lagos y embalses son conducidos por las variaciones estacionales en las condiciones atmosféricas y en las variables meteorológicas. Cambios estacionales sólo en la radiación solar y en la temperatura del aire pueden modificar completamente el balance del intercambio de calor entre el cuerpo de agua y la atmósfera.

Un fenómeno gatillado por estos cambios en la transferencia de calor es conocido como *turnover* del lago, el cual ocurre si el *epilimnion* reduce su temperatura con respecto a la del *hipolimnion*, en respuesta a un rápido enfriamiento de la temperatura del aire, generando una condición inestable, y en consecuencia, convección térmica natural y una mezcla rápida en la columna de agua. Un ejemplo de este fenómeno, de *turnover*, es cuando un lago permanece estratificado durante la estación de verano, volviéndose homogénea su temperatura durante el invierno debido a la reducción de temperatura en el *epilimnion*.

2.3. Campo de ondas internas gravitacionales

El campo de ondas internas gravitacionales puede ser entendido como el movimiento oscilatorio de todas las escalas y frecuencias bien definidos en una interfaz de densidad. La fuerza gravitacional continuamente busca restablecer el cuerpo de agua a su estado o nivel horizontal, pero en el caso de un flujo estratificado, por gradientes de densidad, el proceso de estabilización puede llevarse a cabo a través de diferentes modos de oscilación debido a la inercia propia de cada capa (Cushman-Roisin, 1994). De la fauna de ondas internas se excluyen patrones de circulación debido a afluentes o efluentes, intrusiones y movimientos turbulentos. Por lo general, cuerpos de agua estratificados, como los lagos, no presentan mayores procesos de recirculación vertical.

Gran parte de los lagos están dentro de la categoría de cuerpos de agua que presentan una dinámica casi totalmente dominada por algún tipo de onda interna, gatillada por una forzante externo como el esfuerzo de corte del viento sobre la superficie y/o el efecto de Coriolis sobre el cuerpo de agua (Imberger, 1998). Un ejemplo del campo de ondas internas desarrollado en una termoclina está dado por la Figura 2.1. El espectro corresponde a la medición de una cadena de termistores ubicada en el lago Villarrica, durante el mes de Febrero del 2009 Rozas *et al.* (2009b). Las frecuencias observadas están limitadas por la ventana de medición, que corresponde a dos semanas, y la tasa de muestreo de los sensores, que corresponde a 30 seg (El criterio de Nyquist define la banda de frecuencia de ondas posibles de observar). De la figura es posible observar la presencia de ondas dominantes (desde un punto de vista energético) de diferentes frecuencias, que van desde periodos diario y subdiarios, marcados con números del 1 al 5, a períodos asociados entorno a la frecuencia boyante, marcado con el número 6.

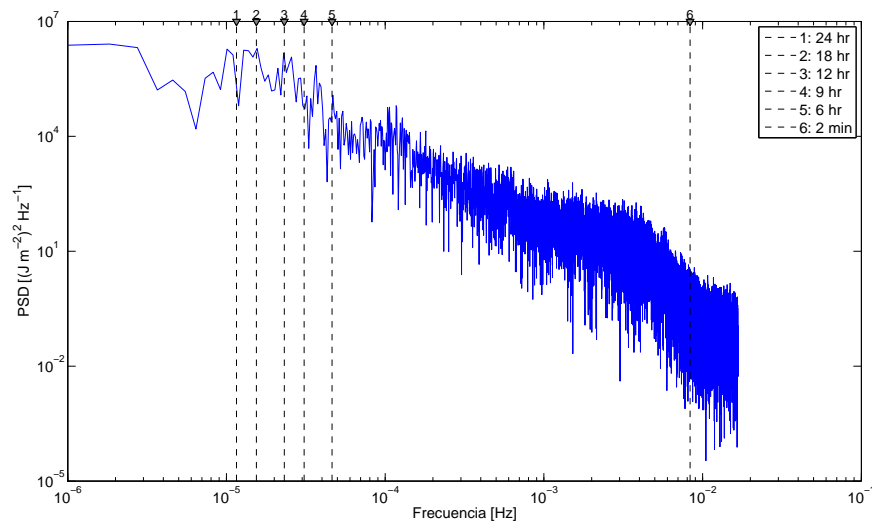


Figura 2.1: Espectro de energía de las oscilaciones de la termoclina del lago Villarrica observadas a través de una cadena de termistores, Febrero 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

2.3.1. Ondas internas afectadas por Coriolis

La rotación de la Tierra afecta a las ondas internas gravitacionales cuando la escala de longitud característica del cuerpo de agua es cercana o mayor al radio de formación de Rossby, definido como

$R = c_i/f$. En lagos de latitudes medias, como el Villarrica (IX región, Chile), la escala de longitud es aproximadamente 5 km. El efecto directo de la rotación sobre las ondas internas de gran escala es provocar una propagación alrededor del borde del lago, en lugar de cruzar el lago a través de su centro, como es el caso de un sistema sin rotación (Antenucci & Imberger, 2001). Como ya fue enunciado en la sección anterior, de la solución fundamental se deriva la existencia de dos tipos de ondas predominantes, las que están caracterizadas por su frecuencia adimensional, σ_k . Estas ondas son usualmente llamadas Kelvin y Poincaré. En el caso de las ondas Kelvin, éstas pueden ser sub o súper inerciales. Además, dichas ondas se pueden clasificar en ciclónicas y anticiclónicas, según su sentido de propagación. Las ondas Poincaré solo pueden ser súperinerciales, y siempre tienen sentido de propagación opuesto a la onda Kelvin.

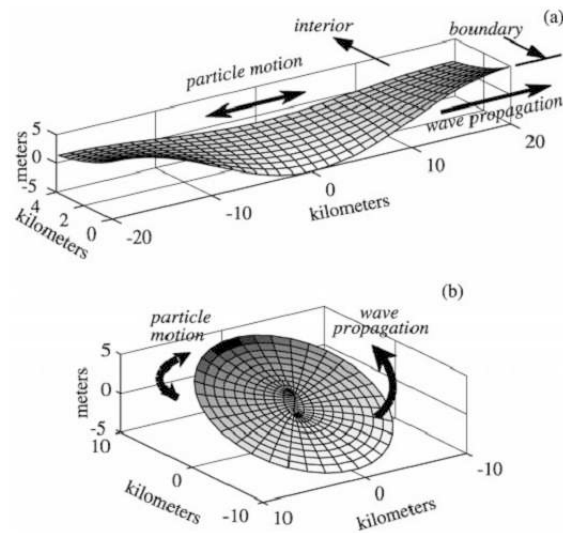


Figura 2.2: Forma teórica de la onda kelvin, con sentido de propagación ciclónico en el hemisferio norte: (a) Onda Kelvin a lo largo de la costa. (b) Modo fundamental de la onda Kelvin para una cubeta circular. (Hodges *et al.*, 2000)

Las ondas Kelvin son llamadas ondas atrapadas en los bordes del cuerpo de agua, debido a que su formación y dinámica se desarrolla en la periferia del dominio Hodges (Hodges *et al.*, 2000). Estas ondas tienen una estructura sinusoidal en la variable azimutal, y estructura exponencial en la variable radial. La forma de la onda decae exponencialmente desde el borde hacia el interior, en función del radio de formación de Rossby. Su dirección de propagación es azimutal, en sentido antihorario en el hemisferio sur, donde f es negativo, y en sentido horario en el hemisferio norte, donde f es positivo. Sus máximos y mínimos se encuentran ligados a los bordes del cuerpo de agua. En la Figura 2.2 se observa la forma teórica de una onda Kelvin, con el sentido de propagación del hemisferio norte (horario).

Las ondas Poincaré son una de las soluciones de la ecuación de momento para un flujo afectado por la rotación terrestre, en un dominio con ausencia de límites horizontales (Antenucci & Imberger, 2001). La estructura de esta onda es similar a la de una onda sin rotación, tal como un seiche interno. Sin embargo, debido al efecto de rotación del medio, la onda adquiere una dinámica rotacional, provocando que las parcelas de fluido sigan trayectorias elípticas en el plano horizontal. El sentido de rotación de estas ondas puede ser horaria o antihoraria según sea el hemisferio. Las ondas Poincaré pueden ser visualizadas como la superposición de dos ondas sinusoidales progresivas de

igual frecuencia, amplitud y número de onda, pero con dirección de propagación que forman el mismo ángulo con los ejes principales del cuerpo de agua (Mortimer, 1974). Un corte transversal del cuerpo de agua muestra que el desplazamiento de la interfaz de una onda Poincaré en 2D es generalmente indistinguible a un seiche lineal (Hodges *et al.*, 2000). En la Figura 2.3 es posible observar la estructura celular desarrollada por este tipo de onda, donde los máximos y mínimos son alcanzados en la región interior, y en el borde de cada célula el desplazamiento es nulo. Como se dijo anteriormente, las ondas Poincaré sólo pueden ser ondas súperinerciales (en todos sus posibles modos), además su frecuencia decrece con respecto a la frecuencia inercial a medida que el número de Burger decrece a cero. Esto es equivalente a que la dimensión del cuerpo de agua llegue a ser muy grande, como es el caso del océano (Antenucci & Imberger, 2001).

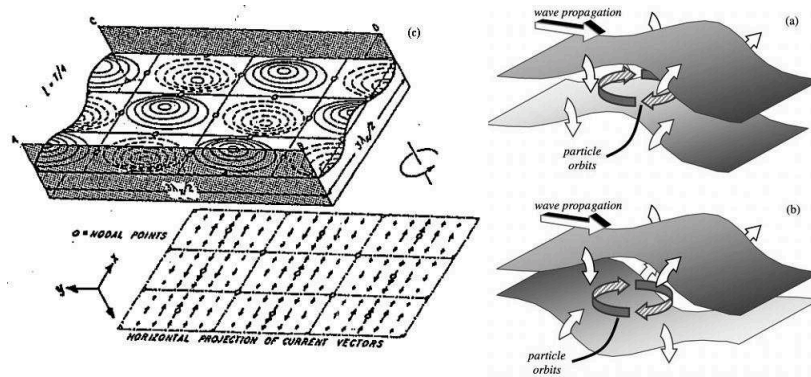


Figura 2.3: Onda Poincaré progresivas: (a) modo uno vertical y (b) modo dos vertical (Hodges *et al.*, 2000). (c) Onda Poincaré estacionaria en el ancho de un canal en rotación con profundidad uniforme. Se observa la distribución celular de las ondas (Mortimer, 1974).

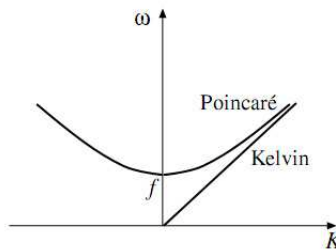


Figura 2.4: Relación de dispersión para las ondas de Poincaré y Kelvin. K corresponde al número de onda, la celeridad de una onda Poincaré está dada por la siguiente relación de dispersión $c_{iP} = \pm c_i / \sqrt{1 - \sigma^{-2}}$, mientras que la celeridad de una onda Kelvin sigue siendo la de un seiche interno, $c_{iK} = c_i$. (Niño & Tamburrino, 2004a)

2.3.2. Ondas internas no-lineales

Las ondas solitarias, o solitones, son el resultado de la degeneración de un seiche interno inicial. Una onda de gran escala comienza a crecer debido a efectos no-lineales, hasta que el empinamiento es balanceado por efectos dispersivos, generando una onda interna solitaria (Horn, 2000). Este tipo de ondas han sido observadas en muchos lagos (Horn *et al.*, 2002) en donde el viento que actúa sobre la superficie genera ondas de gran escala. El asomeramiento y el quiebre de este tipo de onda es un importante sumidero de energía para el campo de onda interno, jugando un rol importante

en el proceso de mezcla en lagos estratificados (Imberger, 1998).

El inicio del empinamiento de una onda de amplitud y largo finito debido a efectos no-lineales puede ser descrito por la ecuación de onda no-lineal y no-dispersiva sin rotación, unidireccional siguiente (Horn *et al.*, 2001):

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + c_i \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \alpha_1 \eta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

donde η_2 corresponde al desplazamiento vertical de la interfaz de densidad, $\alpha_1 = \frac{3}{2}c_i(h_1 - h_2)/h_1h_2$. En este caso, η_2 , está definido como positivo hacia arriba. Para estudiar la evolución de una onda solitaria se debe considerar además efectos no-lineales y dispersivos no-hidroestáticos en la ecuación de onda (Horn, 2000).



Figura 2.5: Muestra un paquete de ondas internas solitarias generadas a nivel experimental en un flujo estratificado (Horn *et al.*, 2001). Es posible observar el frente vertical de la primera onda, y el proceso de degeneración llevado a cabo.

La ecuación de Korteweg-de Vries extendida (eKdV) considera que los efectos no-lineales tienen el mismo orden que los efectos dispersivos, entonces, considerando un flujo estratificado en dos capas, como el analizado en este estudio, y haciendo la aproximación de Boussinesq, la ecuación eKdV puede ser escrita como (Helfrich & Melville, 2006)

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} + (c_i + \alpha_1 \eta_2 + \alpha_2 \eta_2^2) \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial^3 \eta_2}{\partial x^3} = 0 \quad (2.2)$$

donde $\alpha_2 = \frac{3c_i}{(h_1h_2)^2} \left(\frac{7}{8} (h_1 - h_2)^2 - \left(\frac{h_2^3 + h_1^3}{h_1 + h_2} \right) \right)$, $\beta_1 = \frac{1}{6}c_i h_1 h_2$. La solución de onda solitaria derivada de este análisis puede escribirse de la siguiente forma (Helfrich & Melville, 2006):

$$\eta_2(x, t) = \frac{a}{b + (1 - b) \cosh^2 \left(\frac{x - ct}{\lambda} \right)} \quad (2.3)$$

donde a es la amplitud inicial de la onda solitaria, $\lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{a(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 a)}}$ es la longitud de onda característica, $b = -\frac{a\alpha_2}{2\alpha_1 + \alpha_2 a}$, y $c = c_i + \frac{a}{3} (\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 a)$ es su celeridad.

Ondas tipo solitarias, desarrolladas por la interacción y degeneración de ondas internas descritas anteriormente, en un cuerpo de agua circular estratificado afectado por Coriolis, fueron investigadas por de la Fuente *et al.* (2008). Para un determinado valor de S , es posible identificar la presencia de ondas tipo solitarias a partir de las ondas Kelvin, similares a ondas solitarias en un sistema sin rotación, en función de las siguientes características: (1) la escala azimutal (longitud de onda) incrementa con el número de Wedderburn, como en el caso sin rotación, en el cual solitones más grandes tienen longitudes de ondas más cortas. (2) La forma azimutal de la onda tipo solitaria es muy cercana a la solución de la ecuación KdV (ecuación 2.3) para razones pequeñas de h_1/h_2 , sin embargo, para capas superficiales más profundas el perfil se asemeja más a una tangente hiperbólica. (3) La amplitud de la onda es proporcional a la magnitud de la perturbación inicial y es una función

de h_1/h_2 . (4) El efecto de Coriolis incide directamente en la amplitud de las ondas tipo solitarias, a medida que el S disminuye (mayor efecto de la rotación) la amplitud decae (de la Fuente *et al.*, 2008). En la Figura 2.6 se observa un ejemplo de onda tipo solitaria desarrollada a partir de una onda Kelvin fundamental.

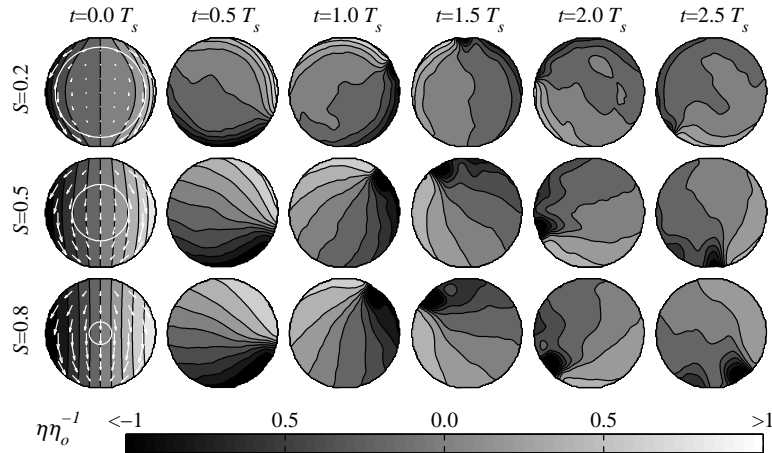


Figura 2.6: En la figura se muestra la evolución del desplazamiento de la interfaz, $\eta_2(r_*, \theta, t_*)$, considerando términos no-hidrostáticos para una onda Kelvin monocromática con un Wedderburn inicial $W = h_1/2\eta_0$. Un círculo blanco muestra la condición inicial medida para el radio de Rossby, y las flechas blancas muestran el campo de velocidad promediado en la vertical para la capa superficial (de la Fuente *et al.*, 2008).

2.4. Cascada de energía en lagos estratificados

Las principales fuentes de producción de energía en cuerpos lacustres son la radiación solar y la tasa de trabajo del viento que actúa en la superficie. La transferencia de calor desde la superficie hacia la columna de agua puede establecer una estratificación térmica, trayendo como consecuencia una estructura densimétrica que caracteriza la energía potencial de un cuerpo de agua. Por otra parte, el viento sobre la superficie de un lago transfiere momento y energía cinética turbulenta (TKE) desde la superficie hacia la columna de agua (Niño & Tamburrino, 2004b). Estas dos cantidades energéticas comienzan a interactuar desde la superficie de forma muy modulada. Parte de la TKE transferida se transforma en ondas superficiales de alta frecuencia y baja longitud de onda, y en la mezcla de las aguas superficiales. Este mecanismo turbulento permite transportar el calor de la superficie hacia la columna de agua de forma más eficiente que la difusión térmica.

La energía cinética turbulenta transportada a través de la columna es la principal fuente de energía para el campo de ondas internas es la acción del viento sobre la superficie libre, generando ondas gravitacionales de gran escala (tamaño del lago), con frecuencias relativamente bajas (Horn *et al.*, 2001). Bajo este efecto, el cuerpo de agua puede responder a escala de la cuenca lacustre a través una onda conocida como seiche interno, la que puede degenerarse en otros tipos de ondas dependiendo de las condiciones iniciales, de borde y del fluido. Cuando la rotación terrestre es importante en un lago, existen dos tipos de ondas gravitacionales que responden a estos efectos, éstas son conocidas como ondas Poincaré y Kelvin. Sin embargo, si superponemos el efecto del viento, Coriolis (rotación terrestre), y condiciones geométricas del cuerpo de agua (razón de aspecto, batimetría, forma)

dichas ondas pueden transformarse en una serie de otras ondas, de caracterización más compleja. De esta forma se puede dar origen a un campo de ondas internas que tiene un rango de espectro continuo, desde ondas cuasi-estacionarias de baja frecuencia hasta ondas con frecuencias cercanas a la boyante o *Brünt-Väisälä* (Horn *et al.*, 2001).

La disipación y amortiguamiento de ondas internas pueden tomar lugar a través de diferentes mecanismos. En el interior de un lago, la energía contenida en las ondas internas de gran escala pueden ser transferidas a ondas internas de modos más altos, con longitudes de onda menores y frecuencias mayores, y ondas tipo solitarias de alta frecuencia debido a empujamiento no-lineal (de la Fuente *et al.*, 2008), o esta puede ser disipada como un resultado de la fricción por corte, inestabilidades, y mezcla a diferentes profundidades (Wüest & Lorke, 2003).

Mediciones de microestructuras han mostrado que casi el 90 % de la energía cinética turbulenta en el hipolimnion ocurre cerca del borde (Wüest *et al.*, 2000), indicando que las ondas internas son amortiguadas predominantemente por los procesos de fricción en la capa límite béntica, dejando casi una columna de agua laminar en el hipolimnion (Shimizu & Imberger, 2009). Estos resultados son muy importantes para entender la ruta del flujo de energía en un lago. Shimizu & Imberger (2009) han estudiado los fenómenos de disipación de energía en las ondas internas debido a la presencia de capas límites en los bordes del cuerpo de agua. Resultados numéricos indican que la presencia del amortiguamiento de Ekman y la cancelación de ondas internas son los principales mecanismos que generan cambios en el campo de velocidad de los modos de oscilación, provocando desaceleración de las ondas y en consecuencia un drenaje de energía cinética a otros modos y a energía potencial.

En este contexto, se puede estudiar la degeneración de una onda interna de gran escala, tipo seiche interno, generada por el efecto de relajación de la inclinación de la interfaz de densidad, bajo los efectos de rotación terrestre. La degeneración de esta onda principal trae como resultado una redistribución de la energía, transfiriendo parte de ésta a ondas de menor escala. La excitación de diferentes modos propios de oscilación, trae como consecuencia la existencia de diferentes escalas de longitud y tiempo, según el tipo de ondas derivadas del proceso. En esta etapa se quiere analizar las escalas de tiempo relativas entre las ondas de interés para poder identificar características y mecanismos que dan origen a la degeneración y disipación por fricción de las ondas internas de gran escala. El análisis propuesto sigue el esquema realizado por Horn *et al.* (2001), considerando además el efecto de la rotación terrestre en el proceso degenerativo y disipación de energía. En la Figura 2.7 se presenta un esquema que sintetiza el flujo de la energía en un lago estratificado afectado por forzantes de viento. Conceptualmente un cuerpo lacustre afectado por la radiación solar tiene una estructura térmica que se va ver afectada por la incorporación de energía cinética turbulenta desde la superficie, provocando la mezcla superficial, la formación de una estratificación y excitación de ondas tanto superficiales como internas, las cuales pueden ser afectadas por la rotación terrestre para $S < 1,0$ y amortiguadas por el efecto de la fricción viscosa debido a las condiciones de borde, entre otros factores. Cuando la estructura térmica genera razones de aspecto menores a 0.5 procesos de degeneración y dispersión de ondas desencadenan ondas tipo solitarias, las cuales retroalimentan los procesos de mezcla, generando cambios en la estratificación, y la transferencia de energía hacia ondas de más alta frecuencia y menor longitud de onda, que pueden ser disipadas por fricción.

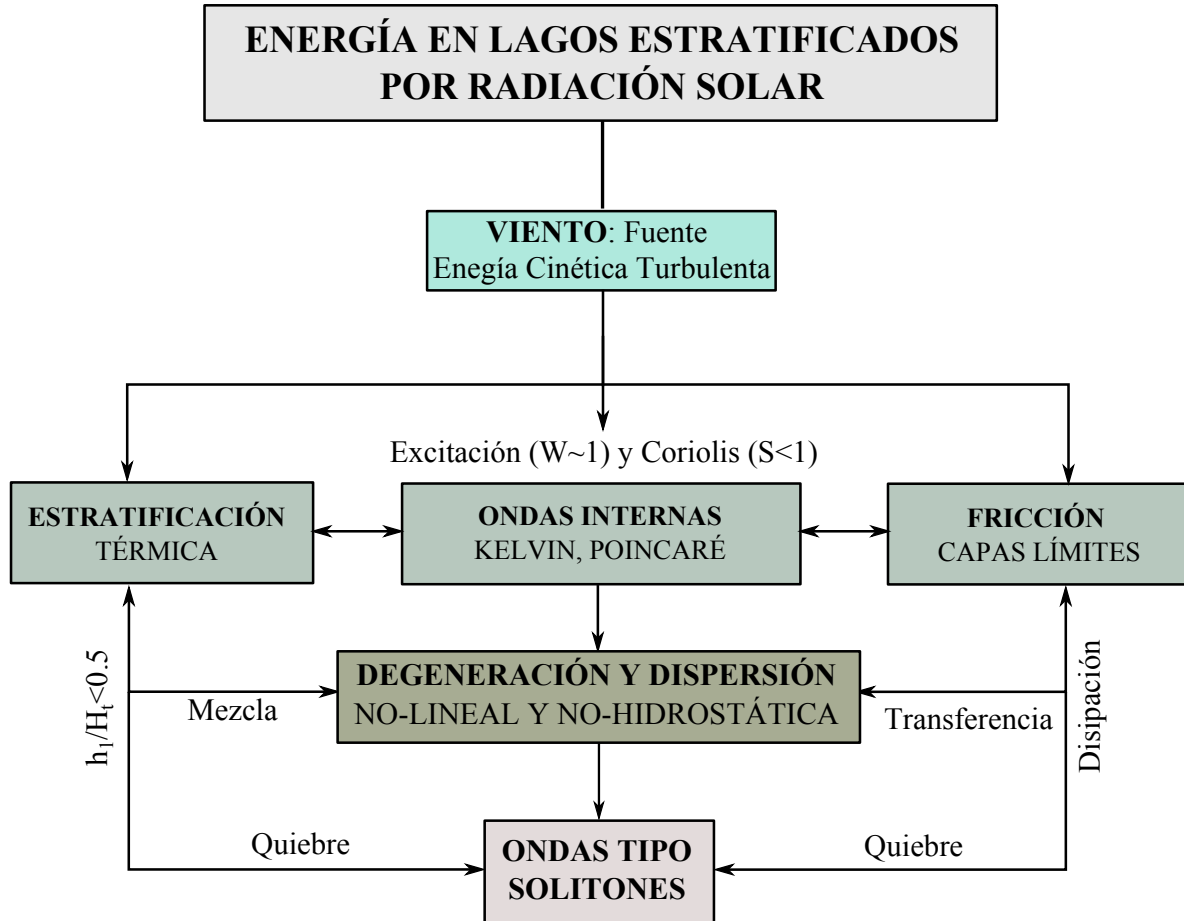


Figura 2.7: Muestra un esquema conceptual de la ruta de la energía en un lago estratificado afectado por la rotación y forzantes de viento.

2.4.1. Energía en ondas internas afectadas por Coriolis

Como se mencionó al inicio de la sección, las principales fuentes de energía en lagos de latitudes medias son la radiación solar y el trabajo del viento que actúa en la superficie. Tanto el balance neto de energía calórica en la interfaz aire-agua como la capacidad de mezcla que tiene la energía cinética turbulenta que entra al sistema por la acción del viento pueden establecer configuraciones térmicas de la columna de agua que pueden ser caracterizadas por una estratificación en dos o tres capas (Niño & Tamburrino, 2004a), cada una de éstas asociada a una estructura de temperatura y densidad en un cierta ventana de tiempo. Estas dos cantidades energéticas comienzan a interactuar desde la superficie hacia la zona béntica de forma muy modulada. En esta ruta parte de la TKE transferida se transforma en ondas superficiales de alta frecuencia y baja longitud de onda, que ayudan en el proceso de mezcla de las aguas someras (Wüest & Lorke, 2003), mientras que el resto de la energía puede ser transferida hacia la columna de agua, pudiendo excitar ondas internas de gran escala en las interfaces de densidad existentes (Imberger, 1998; Horn *et al.*, 2001). La fricción con los bordes del cuerpo de actúa siempre como un mecanismo restituyente, por lo que la energía contenida en las ondas está constantemente disipándose, trayendo como consecuencia el amortiguamiento de éstas (Stocker *et al.*, 2000; Shimizu & Imberger, 2008).

2.4.2. Distribución de energía

Parte de la energía entrante a través del viento se utiliza en la generación de ondas internas. Dependiendo de la intensidad de la TKE puede excitar ondas de gran escala, como seiches internos. Las ondas de gran escala contienen gran parte de la energía del sistema, y son las responsables del transporte de masa y momento a gran escala (Imberger, 1998). La energía total del campo de ondas internas es de particular interés, especialmente cuando se intenta determinar la escala de decaimiento de energía. Antenucci & Imberger 2001 estudiaron teóricamente la distribución de energía para un cuerpo circular estratificado, considerando la solución modal de la ecuación de onda internas lineales en un sistema bajo rotación (Csanady, 1967). Estos autores determinaron la razón entre energía potencial y cinética es función del número de Burger, del modo normal de oscilación, y de la forma del cuerpo de agua:

$$\frac{PE}{KE} = f\left(S, m, n, \frac{\psi}{\phi}\right) \quad (2.4)$$

Posteriormente, Stocker & Imberger (2003) estudiaron la distribución de energía de las ondas internas derivadas de la solución teórica para el problema forzado y el problema de condición límite inicial. En este contexto, la estructura espacial de la energía del cuerpo de agua está caracterizada en términos del número de Burger y el número de Wedderburn (Spigel & Imberger, 1980). La energía potencial y cinética adimensional para el modo radial k -ésimo de una cubeta circular está definida a través de las siguientes funciones:

$$PE_k = \int_0^{2\pi} \int_0^{S^{-1}} \int_0^{1+\eta_k} \rho g r dz dr d\theta \quad (2.5)$$

$$KE_k = \int_0^{2\pi} \int_0^{S^{-1}} \int_0^{1+\eta_k} \frac{\rho}{2} (u_k^2 + v_k^2) r dz dr d\theta \quad (2.6)$$

2.4.3. Transferencia de energía debido a ondas tipo solitarias

Investigaciones previas a de la Fuente *et al.* (2008) muestran que los dos mayores mecanismos de amortiguamiento de ondas internas se deberían al esfuerzo de corte en la capa límite béntica (Wüest & Lorke, 2003) y la transferencia no-lineal de energía a ondas de alta frecuencia, las cuales se difunden hacia los límites donde éstas quiebran sobre lechos inclinadas (Horn *et al.*, 2001; Boegman *et al.*, 2003, 2005b). La disipación en el interior del cuerpo, debido a inestabilidades, es relativamente pequeño para los efectos estudiados y puede ser despreciada (Wüest *et al.*, 2000). La intensidad y la intermitencia de los flujos de energía pueden provocar la descomposición de las ondas de gran escala, derivando en la excitación de modos de menores longitudes de ondas y mayores frecuencias. Además, bajo ciertas circunstancias, estas ondas pueden presentar frentes verticales, gatillados por la dinámica no-lineal y no hidrostática. Estos tipos de ondas pueden llegar a dispersarse y romper en ondas de escalas más pequeñas aún. de la Fuente *et al.* (2008) analizaron la energía contenida y transferida desde las ondas de gran escala al proceso de empinamiento de ondas tipo solitones. La energía de estas ondas puede ser calculada a través del ajuste de la solución analítica homogénea del problema lineal como una función del tiempo. Esto es equivalente a utilizar un espectro de energía para capturar el flujo de energía entre los diferentes números de onda. Incluyendo las aceleraciones no-lineales y no-hidrostáticas, cuando se caracteriza la respuesta de un lago estratificado y afectado por Coriolis, se obtiene que las ondas Kelvin rápidamente transfieren su energía a sub-modos azimutales y ondas tipo solitones. En contraste, las ondas Poincaré no transfieren mucha energía a otros modos o a ondas de alta frecuencia, sino más bien presenta un

comportamiento cíclico limitado, donde la energía es transferida hacia atrás y hacia adelante entre las ondas cercanas y sus modos azimutales, pero además, la energía es drenada en la distorsión de la interfaz de densidad debido a efectos no-lineales.

2.4.4. Disipación de energía por fricción

El viento excita una amplia gama de movimientos, desde energéticas ondas de gran escala hasta pequeñas escalas de movimiento turbulento (Imberger, 1998). Todas estas escalas de movimiento generan transporte de materia. en la columna de agua, parte de la energía cinética turbulenta es convertida en energía potencial a través de la mezcla desarrollada en la zona de altas frecuencias boyantes. Parte de la energía restante se transfiere al lecho, gatillando procesos de resuspensión de materia a través de la interfaz agua sedimento (Lorke *et al.*, 2003). Estos procesos hacen a la energía de las ondas internas relevantes no solo por los procesos físicos, también por los procesos biogeoquímicos.

La disipación y amortiguamiento de ondas internas pueden tomar lugar a través de diferentes mecanismos. En el interior de un lago, la energía contenida en las ondas internas de gran escala pueden ser transferidas a otras ondas internas y ondas tipo solitarias de alta frecuencia debido a empinamiento no-lineal (de la Fuente *et al.*, 2008), o esta puede ser disipada como un resultado de la fricción por corte, inestabilidades, y mezcla a diferentes profundidades (Wüest & Lorke, 2003). Mediciones de microestructuras han mostrado que casi el 90 % de la energía cinética turbulenta en el hipolimnion ocurre cerca del borde (Wüest *et al.*, 2000), indicando que las ondas internas son amortiguadas predominantemente por los procesos de fricción en las capas límites, dejando casi una columna de agua laminar en el hipolimnion (Shimizu & Imberger, 2009). Estos resultados son muy importantes para entender la ruta del flujo de energía en un lago. Shimizu & Imberger (2009) han estudiado los fenómenos de disipación de energía en las ondas internas debido a la presencia de capas límites en los bordes del cuerpo de agua. Resultados numéricos indican que la presencia del amortiguamiento de Ekman y la cancelación de ondas internas son los principales mecanismos que generan cambios en el campo de velocidad de los modos de oscilación, provocando desaceleración de las ondas y en consecuencia un drenaje de energía cinética a otros modos y a energía potencial.

La influencia de la fricción puede ser incluida en las ecuaciones de movimiento linealizadas utilizando un término de fricción de Rayleigh tipo Ku , donde K es un coeficiente de decaimiento. Stocker *et al.* (2000) demostraron que en una cubeta circular rotatoria, la estructura espacial de la interfaz de densidad y la velocidad azimutal, determinadas a través de la solución de las ecuaciones de momento linealizadas, decaen en magnitud en el tiempo acorde a $e^{K\tau}$. Resultados experimentales (Wake *et al.*, 2005) son consistentes con este modelo de amortiguamiento friccional. Sin embargo, la compleja interacción entre las capas de Ekman no-estacionarias en los bordes horizontales y las capas de Stewartson no-estacionarias desarrolladas en los bordes verticales (paredes de una cubeta) ha sido poco estudiada.

2.5. Ecuaciones que gobiernan la dinámica de ondas internas

Considerando un cuerpo de agua estratificado de extensión finita, de forma circular, con diámetro $D = 2R$, que está estratificado en dos capas de espesor h_1 y h_2 , y densidades promedio ρ_1 y ρ_2 respectivamente. El subíndice 1 denota la capa superior y el subíndice 2 denota la capa inferior

de la Figura 2.8. Para condiciones estables ρ_1 es menor que ρ_2 . Al considerar que la acción del viento sobre la superficie tiene una componente dirección radial r y una componente tangencial θ , entonces se induce un esfuerzo de corte τ_s , en la superficie libre y en igual dirección. Este esfuerzo de corte genera una transferencia vertical de momento longitudinal en el cuerpo de agua, dando origen a un transporte de diferentes cantidades físicas (velocidad, masa, momento, energía, entre otros), que tienden a una nueva condición de equilibrio en la medida en que existan agentes restituyentes.

Considerando las ecuaciones de momento parametrizadas en coordenadas cilíndricas, incluyendo el Efecto Coriolis en cada capa, se obtienen las siguientes expresiones (Cushman-Roisin, 1994):

$$\frac{\partial v_{ri}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{ri}}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial v_{ri}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_{ri}}{\partial z} - \frac{v_{\theta i}^2}{r} - f v_{\theta i} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right)_i + \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \tau_{rri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta ri}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zri}}{\partial z} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v_{\theta i}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial r} + \frac{v_{\theta i}}{r} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial z} + \frac{v_{ri} v_{\theta i}}{r} + f v_{ri} = -\frac{1}{\rho_i r} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \right)_i + \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta \theta i}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta i}}{\partial z} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v_{zi}}{\partial t} + v_{ri} \frac{\partial v_{zi}}{\partial r} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial v_{zi}}{\partial \theta} + v_{zi} \frac{\partial v_{zi}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \right)_i + \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \tau_{rzi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta zi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zzi}}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

donde v_{ri} , $v_{\theta i}$ y v_{zi} denotan las tres componentes de velocidad de la capa i en coordenadas cilíndricas, con $i \in \{1, 2\}$, \hat{p}_i denota la presión motriz de la capa i , y f denota el parámetro de Coriolis, el cual es positivo para el hemisferio norte, nulo en el ecuador y negativo en el hemisferio sur. Por otra parte, $(\tau_{jk})_i$, con $j, k \in \{r, \theta, z\}$, es el tensor de esfuerzos viscosos.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible en cada una de las capas, está determinada por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_{ri})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{zi}}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

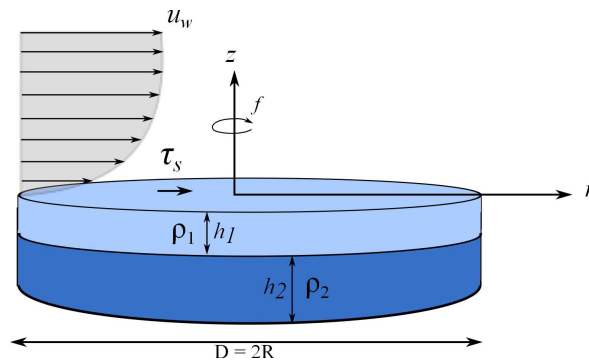


Figura 2.8: Flujo estratificado en dos capas, bajo los efectos de esfuerzos de corte inducidos por la velocidad del viento, y la aceleración de *Coriolis*.

Considerando que la escala temporal de las ondas en estudio escalan con el inverso de la frecuencia intercal, $t \propto f^{-1}$, que el campo de velocidad horizontal de las ondas escalan con la celeridad de ondas internas, $|\vec{v}_i| \propto c_i$, que la coordenada espacial radial escala con el radio de formación de Rossby, $r \propto R_o$, y que la coordenada espacial vertical escala con la profundidad máxima de

agua, $z \propto H_t = h_1 + h_2$, donde $c_i = \sqrt{\epsilon g h_1 h_2 (h_1 + h_2)^{-1}}$ y $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$, mientras que $R_o = c_i/f$, entonces, adimensionalizando las ecuaciones de continuidad por cada capa con los términos discutidos, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* v_{ri}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{\theta i}^*}{\partial \theta} + \frac{R_o}{c_i H_t} \frac{\partial v_{zi}^*}{\partial z_*} = 0 \quad (2.11)$$

por lo tanto $v_{zi} \propto (H_t/R_o) c_i v_{zi}^*$. Considerando una aproximación de capa límite $H_t \ll R_o$ (lago Villarrica: $H_t/R_o \propto 0,01$), entonces es posible despreciar comparativamente la componente de velocidad vertical v_{zi} de las ecuaciones de momento. De la misma forma, la aproximación de la capa límite permite despreciar los esfuerzos de corte horizontales respecto a los verticales ($\partial_z \tau_{zr} \gg \partial_r \tau_{rr}; \partial_\theta \tau_{\theta r}$ y $\partial_z \tau_{z\theta} \gg \partial_r \tau_{r\theta}; \partial_\theta \tau_{\theta\theta}$), por lo tanto las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial v_{ri}}{\partial t} + \frac{\partial v_{ri}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta i} v_{ri}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta i}^2}{r} - f v_{\theta i} = -\frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{zri}}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v_{\theta i}}{\partial t} + \frac{\partial v_{ri} v_{\theta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta i}^2}{\partial \theta} + \frac{v_{ri} v_{\theta i}}{r} + f v_{ri} = -\frac{1}{\rho_i r} \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \tau_{z\theta i}}{\partial z} \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Suponiendo que el efecto del viento y de Coriolis generan desplazamientos $\eta_1(r, \theta)$ y $\eta_2(r, \theta)$ en la superficie libre y la interfaz de densidad, respectivamente (2.9), se obtienen expresiones para las presiones motrices de cada una de las capas, para posiciones (r, θ) en el plano horizontal. De la ecuación 2.14 se deriva que $\hat{p}_i = p_i + \rho_i g z = cte$, con lo cual se obtienen los siguientes resultados:

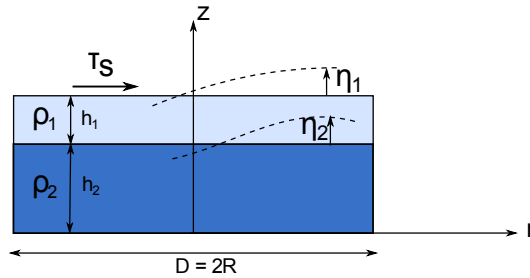


Figura 2.9: Presiones motrices de cada capa.

$$\hat{p}_1 = \rho_1 g (h_1 + h_2 + \eta_1) \quad (2.15)$$

$$\hat{p}_2 = \rho_2 g (h_2 + \eta_2) + \rho_1 g (h_1 + \eta_1 - \eta_2) \quad (2.16)$$

luego, los gradientes de presiones de las ecuaciones de momento, en cada capa, se obtienen a partir de las ecuaciones 2.15 y 2.16:

$$\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial r} = \rho_1 g \frac{\partial \eta_1}{\partial r} \quad \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \theta} = \rho_1 g \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial r} = \rho_1 g \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \quad \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \theta} = \rho_1 g \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} \quad (2.18)$$

Si integramos cada una de las ecuaciones en su respectiva capa, con respecto a la coordenada vertical, y luego normalizamos por el espesor medio de la capa, se obtendrá el campo de velocidad medio en la horizontal en cada una de las capas.

Para el caso de la capa superior se debe hacer la siguiente integración:

$$\frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{r1}}{\partial t} + \frac{\partial v_{r1}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1} v_{r1}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 1}^2}{r} - f v_{\theta 1} \right) dz = -\frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{zr1}}{\partial z} \right) dz \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial t} + \frac{\partial v_{r1} v_{\theta 1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1}^2}{\partial \theta} + \frac{v_{r1} v_{\theta 1}}{r} + f v_{r1} \right) dz = -\frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} \left(\frac{1}{\rho_1 r} \left(\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \tau_{z\theta 1}}{\partial z} \right) dz \quad (2.20)$$

Definiendo las velocidades promediadas en la vertical en la capa superior como:

$$U_{r1} = \frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} u_{r1} dz \quad U_{\theta 1} = \frac{1}{\bar{h}_1} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2+\eta_1} u_{\theta 1} dz \quad (2.21)$$

donde \bar{h}_1 corresponde al espesor de la capa superior en la condición de equilibrio. Por otra parte, de la integración de los términos adyectivos y tomando en cuenta la condición de borde cinemática, los aceleración adevectiva puede ser escrita como:

$$\int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{r1}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1} v_{r1}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 1}^2}{r} \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{r1}^2 dz + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{\theta 1} v_{r1} dz + \frac{1}{r} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{\theta 1}^2 dz \quad (2.22)$$

$$\int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{\theta 1} v_{r1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1}^2}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 1} v_{r1}}{r} \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{r1} v_{\theta 1} dz + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{\theta 1}^2 dz + \frac{1}{r} \int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} v_{r1} v_{\theta 1} dz \quad (2.23)$$

donde las ecuaciones 2.22 y 2.23 pueden ser escritas en función de coeficientes de Boussinesq, β_{ij} , que para un flujo turbulento se aceptan generalmente como $\beta_{ij} \approx 1$:

$$\int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{r1}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1} v_{r1}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 1}^2}{r} \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} (\beta_{11} h_1 U_{r1}^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\beta_{12} h_1 U_{\theta 1} U_{r1}) + \frac{\beta_{13} h_1 U_{\theta 1}^2}{r} \quad (2.24)$$

$$\int_{\bar{h}_2+\eta_2}^{H_t+\eta_1} \left(\frac{\partial v_{\theta 1} v_{r1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta 1}^2}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta 1} v_{r1}}{r} \right) dz = \frac{\partial}{\partial r} (\beta_{21} h_1 U_{\theta 1} U_{r1}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\beta_{22} h_1 U_{\theta 1}^2) + \frac{\beta_{23} h_1 U_{\theta 1} U_{r1}}{r} \quad (2.25)$$

Remplazando los resultados obtenidos en las ecuaciones 2.19 y 2.20, se obtienen las siguientes expresiones para las ecuaciones momentum:

$$\frac{\partial U_{r1}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{h}_1} \frac{\partial (h_1 U_{r1}^2)}{\partial r} + \frac{1}{\bar{h}_1 r} \frac{\partial (h_1 U_{\theta 1} U_{r1})}{\partial \theta} - \frac{h_1 U_{\theta 1}^2}{\bar{h}_1 r} - \frac{f h_1 U_{\theta 1}}{\bar{h}_1} = -\frac{1}{\rho_1 \bar{h}_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1 \bar{h}_1} ((\tau_{zr})_t - (\tau_{zr})_i) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial U_{\theta 1}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{h}_1} \frac{\partial (h_1 U_{r1} U_{\theta 1})}{\partial r} + \frac{1}{\bar{h}_1 r} \frac{\partial (h_1 U_{\theta 1}^2)}{\partial \theta} + \frac{h_1 U_{r1} U_{\theta 1}}{\bar{h}_1 r} + \frac{f h_1 U_{r1}}{\bar{h}_1} = -\frac{1}{\rho_1 \bar{h}_1 r} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_1 \bar{h}_1} ((\tau_{z\theta})_t - (\tau_{z\theta})_i) \quad (2.27)$$

Analogamente, para la capa inferior se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial U_{r2}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{h}_2} \frac{\partial (h_2 U_{r2}^2)}{\partial r} + \frac{1}{\bar{h}_2 r} \frac{\partial (h_2 U_{\theta 2} U_{r2})}{\partial \theta} - \frac{h_2 U_{\theta 2}^2}{\bar{h}_2 r} - \frac{f h_2 U_{\theta 2}}{\bar{h}_2} = -\frac{1}{\rho_2 \bar{h}_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial r} + \frac{1}{\rho_2 \bar{h}_2} ((\tau_{zr})_i - (\tau_{zr})_b) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial U_{\theta 2}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{h}_2} \frac{\partial (h_2 U_{r2} U_{\theta 2})}{\partial r} + \frac{1}{\bar{h}_2 r} \frac{\partial (h_2 U_{\theta 2}^2)}{\partial \theta} + \frac{h_2 U_{r2} U_{\theta 2}}{\bar{h}_2 r} + \frac{f h_2 U_{r2}}{\bar{h}_2} = -\frac{1}{\rho_2 \bar{h}_2 r} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho_2 \bar{h}_2} ((\tau_{z\theta})_i - (\tau_{z\theta})_b) \quad (2.29)$$

Considerando las ecuaciones de continuidad por cada capa (promediadas en la vertical) y suponiendo la aproximación de tapa rígida (*Rigid-lid*) (Gill, 1982; Shintani *et al.*, 2010; de la Fuente. *et al.*, 2010):

$$\frac{\partial}{\partial r} (r (h_1 U_{r1} + h_2 U_{r2})) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 U_{\theta 1} + h_2 U_{\theta 2}) = 0 \quad (2.30)$$

$$h_1 U_{r1} + h_2 U_{r2} = 0 \quad h_1 U_{\theta 1} + h_2 U_{\theta 2} = 0 \quad (2.31)$$

De esta última aproximación se puede expresar el campo de velocidad horizontal de la capa inferior en función del campo de velocidad de la superior: $(U_r, U_\theta)_2 = -h_1/h_2 (U_r, U_\theta)_1$. Este resultado es válido para modos baroclínicos horizontales de origen gravitacional, considerando que la velocidad de la capa superior es siempre opuesta en dirección a la velocidad de la capa inferior (de la Fuente. *et al.*, 2010). Ahora, rescribiendo la ecuación de momento de la capa inferior utilizando este resultados y restandola a la ecuación de momento de la capa superior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{H_t}{h_2} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}_1 \right\} + f \frac{H_t}{h_2} \begin{pmatrix} -U_\theta \\ U_r \end{pmatrix}_1 + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{h_1 h_2 \bar{h}_2 - h_1 \bar{h}_1}{h_2 \bar{h}_1 \bar{h}_2} \begin{pmatrix} U_r^2 \\ U_r U_\theta \end{pmatrix}_1 \right\} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{h_1 h_2 \bar{h}_2 - h_1 \bar{h}_1}{h_2 \bar{h}_1 \bar{h}_2} \begin{pmatrix} -U_r U_\theta \\ U_\theta^2 \end{pmatrix}_1 \right\} + \frac{1}{r} \frac{h_1 h_2 \bar{h}_2 - h_1 \bar{h}_1}{h_2 \bar{h}_1 \bar{h}_2} \begin{pmatrix} -U_\theta^2 \\ U_r U_\theta \end{pmatrix}_1 = \\ & = g' \nabla_H \eta_2 + \frac{1}{\rho_1 \bar{h}_1} \begin{pmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{pmatrix}_t - \frac{\rho_2 \bar{h}_2 + \rho_1 \bar{h}_1}{\rho_1 \rho_2 \bar{h}_1 \bar{h}_2} \begin{pmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{pmatrix}_i \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ la gravedad reducida, los subíndices en los vectores corresponden a 1: capa superior, 2: capa inferior, t: superficie e i: interfaz de densidad. Por otro lado, el espesor de las capas puede ser escrito como $h_1 = \bar{h}_1 + \eta_1 - \eta_2$ y $h_2 = \bar{h}_2 + \eta_2$, donde h_1 y h_2 dependen de la posición y el tiempo. Para un análisis de primer orden se consideró que $h_1 \approx \bar{h}_1 + \epsilon_1$ y $h_2 \approx \bar{h}_2 + \epsilon_2$, considerando que ϵ_1 y ϵ_2 son variaciones de los espesores de las capas de un orden menor, entonces la ecuación 2.32 puede ser aproximada como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}_1 + f \begin{pmatrix} -U_\theta \\ U_r \end{pmatrix}_1 + \left(1 - \frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}\right) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} U_r^2 \\ U_r U_\theta \end{pmatrix}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} -U_r U_\theta \\ U_\theta^2 \end{pmatrix}_1 + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -U_\theta^2 \\ U_r U_\theta \end{pmatrix}_1 \right\} = \\ & = \frac{\bar{h}_2}{H_t} g' \nabla_H \eta_2 + \frac{\bar{h}_2}{\rho_1 \bar{h}_1 H_t} \begin{pmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{pmatrix}_t - \frac{\rho_i}{\rho_1 \rho_2 \bar{h}_1} \begin{pmatrix} \tau_{zr} \\ \tau_{z\theta} \end{pmatrix}_i \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde $\rho_i = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)/(h_1 + h_2)$ corresponde a la densidad promedio del cuerpo de agua y $\nabla_H = (\partial_r, (1/r)\partial_\theta)^T$ al operador del gradiente horizontal.

El esfuerzo de corte actuando en la superficie libre, τ_s , se debe al efecto del viento, el cual puede estar actuando en un ángulo θ^* cualquiera con respecto al sistema de coordenadas $\hat{r} - \hat{\theta}$. Luego, se puede descomponer el efecto de este esfuerzo en ambas componentes: $(\tau_{zr})_t = \tau_s \cos(\theta - \theta^*)$ y $(\tau_{z\theta})_t = -\tau_s \sin(\theta - \theta^*)$. Por otra parte, el esfuerzo de corte actuando en la interfaz de densidad puede ser expresado como $(\tau_{zr})_i = \tau_i \cos(\theta - \theta^*)$ y $(\tau_{z\theta})_i = -\tau_i \sin(\theta - \theta^*)$, donde τ_i es el esfuerzo de corte en el lecho. El esfuerzo de corte actuando sobre el lecho, τ_b , puede ser descompuesto de la misma forma, $(\tau_{zr})_0 = \tau_b \cos(\theta - \theta^*)$ y $(\tau_{z\theta})_0 = \tau_b \sin(\theta - \theta^*)$. Es posible demostrar tanto teórica como experimentalmente que τ_b es pequeño comparado con τ_s . La razón entre estos esfuerzos es del orden del 1 al 4%, por lo que puede ser despreciados de las ecuaciones (Niño *et al.*, 2003). Por otro lado, definiendo la velocidad de corte como: $u_{*s} = \sqrt{\tau_s/\rho_1}$, la ecuaciones 2.33 puede ser escrita en términos adimensionales si consideramos los siguientes parámetros que el tiempo de las ondas escala con la frecuencia inercial, $t^* = tf$, el campo de velocidad escala con la celeridad de ondas internas, $(v_{r1}, v_{\theta1})^* = (U_{r1}, U_{\theta1})/c_i$, la dimensión radial escala con el radio de formación de Rossby, $r^* = r/R_o$, y $\eta_2^* = \eta_2/h_1$. Por otra parte, el término $f = 2\Omega \sin(\phi)$ corresponde al parámetro de Coriolis, donde $\Omega = 7,29 \times 10^{-5} Hz$ corresponde a la frecuencia inercial (o frecuencia angular de la Tierra), ϕ corresponde a la latitud representativa del cuerpo de agua en interés, R_o corresponde al radio de deformación *Rossby*. La expresión adimensional de la ecuación 2.33 es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t^*} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}_1^* + f \begin{pmatrix} -v_\theta \\ v_r \end{pmatrix}_1^* \right\} + \\ & + \left(1 - \frac{\bar{h}_1}{h_2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial r^*} \begin{pmatrix} v_r^2 \\ v_r v_\theta \end{pmatrix}_1^* + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} -v_r v_\theta \\ v_\theta^2 \end{pmatrix}_1^* + \frac{1}{r^*} \begin{pmatrix} -v_\theta^2 \\ v_r v_\theta \end{pmatrix}_1^* \right\} = \\ & = \nabla_H^* \eta_2^* + \left\{ \frac{S}{W} - S \left(\frac{\rho_i^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{R}{h_1} \frac{\tau_i}{\rho_i c_i} \right) \right\} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta^*) \\ -\sin(\theta - \theta^*) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde W es el número de Wedderburn (Imberger & Hamblin, 1982; Monismith, 1985) y S es el número de Burger (Pedlosky, 1979; Gill, 1982). Por otra parte, el término h_1/h_2 corresponde a una razón de aspecto de la estratificación, la que puede ser escrita en función de $h_* = h_1/H_t$, que corresponde al parámetro adimensional utilizado por Horn *et al.* (2001) para caracterizar la dinámica no-lineal de las ondas internas, tal que si $h_* = 1$, entonces la aceleración advectiva desaparece de la ecuación 2.34, recuperándose la ecuación de momento lineal. El resultado obtenido en la ecuación 2.34 muestra la existencia de tres parámetros adimensionales relevantes, el número de Burger, S , el número de Wedderburn, W , y la razón de aspecto, h_* .

Las ecuaciones de continuidad por cada capa adimensionalizadas a través de los mismos parámetros toman las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* v_{r2}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{\theta 2}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* v_{r1}^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{\theta 1}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t^*} (\eta_1^* - \eta_2^*) = 0 \quad (2.36)$$

Un análisis similar de las ecuaciones de momento y continuidad fue realizado por Csanady 1967, para el caso de una cubeta circular estratificada en dos capas, con el objetivo de plantear un sistema

lineal de EDP, o sea no considerando la aceleración advectiva, lo que permite obtener una solución analítica de los modos internos y superficiales normales de oscilación para la situación no forzada, $\tau_{ij} = 0$. Posteriormente este resultado fue utilizado y generalizado por Antenucci & Imberger (2001) para el caso de cubetas elípticas y circulares, motivado por la necesidad de determinar las escalas de tiempo de decaimiento de las ondas internas de gran escala en grandes lagos, debido a que éstas son las responsables de muchos de los procesos de transporte en lagos, y la distribución de energía entre las ondas de gran escala.

2.5.1. Solución fundamental de ondas lineales

La solución fundamental para las ecuaciones de momento planteadas anteriormente, considerando solo los términos lineales, fue obtenida por primera vez por Lord Kelvin a inicios del siglo XIX. Posteriormente, la solución analítica ha sido desarrollada por diferentes autores, considerando diferentes hipótesis (Csanady, 1967; Antenucci & Imberger, 2001; Stocker & Imberger, 2003). El análisis se basa en la descomposición de los modos normales de oscilación del sistema estratificado. El concepto tras el proceso de descomposición es que, mediante la elección de una adecuada combinación de las variables para el problema de n capas, este puede ser transformado en n problemas independientes. Antenucci & Imberger (2001) entregaron una solución para el campo de velocidad de un cuerpo de agua circular estratificado en dos o tres capas, partiendo del sistema de ecuaciones lineales descrito en la ecuación 2.34, sin considerar forzantes externos en el sistema. El sistema de ecuaciones puede ser expresado a través de las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}_i + f \begin{pmatrix} -U_\theta \\ U_r \end{pmatrix}_i = -gD_i \nabla \pi_i \quad (2.37)$$

donde D_i es la profundidad equivalente de cada capa considerando un fluido homogéneo que mantiene la celeridad de una onda interna para una condición barotrópica. Además, considerando la presión modal de la forma

$$\pi_i = G_i \cos(n\theta) \cos(\omega_i t) \quad (2.38)$$

donde n corresponde al modo azimutal y $G(r)$ es la estructura radial de la presión modal, que cumple con la ecuación de onda siguiente:

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial G_i}{\partial r_*} + \left(\sigma_i^2 - 1 - \frac{n^2}{r_*^2} \right) G_i = 0 \quad (2.39)$$

donde $\sigma_i = \omega_i/f$ corresponde a la frecuencia adimensional del modo i -ésimo. Cuando $|\omega_i| > |f|$ la ecuación 2.39 representa la ecuación de Bessel, en el caso contrario, $|\omega_i| < |f|$ representa la ecuación de Bessel modificada. La solución de esta ecuación depende de los valores que tomen ω_i y f , luego

$$G_i = \begin{cases} J_n \left(\frac{1}{S} \sqrt{|\sigma_i^2 - 1|} \right); & |\sigma_i| > 1 \\ I_n \left(\frac{1}{S} \sqrt{|\sigma_i^2 - 1|} \right); & |\sigma_i| < 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

De este análisis se deriva la existencia de clases de soluciones. En un caso se tienen soluciones para $\sigma_i > 1$, lo que corresponde a soluciones de ondas con frecuencias súperinerciales, también llamadas ondas de Poincaré. Por otra parte, se tienen las soluciones de ondas con $\sigma_i < 1$, lo que corresponde a ondas con frecuencias subinerciales, también llamadas Kelvin (Antenucci & Imberger, 2001). El campo de velocidad modal derivado de este análisis, expresado adimensionalmente, queda definido a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} v_{ri}^* \\ v_{\theta i}^* \end{pmatrix} = -\frac{S}{\sigma_i^2 - 1} \begin{pmatrix} \left\{ \sigma_i \frac{\partial G_i}{\partial r_*} + \frac{n}{r_*} G_i \right\} \sin(n\theta + \sigma_i t_*) \\ \left\{ \frac{\partial G_i}{\partial r_*} + \sigma_i \frac{n}{r_*} G_i \right\} \cos(n\theta + \sigma_i t_*) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

El campo de velocidad está adimensionalizado por la celeridad interna, c_i , la variable espacial radial está adimensionalizada por el radio de la cubeta, R , y el tiempo está adimensionalizado por la frecuencia inercial, f . S corresponde al número de Burger.

Stocker & Imberger 2003 plantearon una solución analítica para la respuesta del campo de velocidad y desplazamiento de la interfaz de densidad, para un cuerpo circular estratificado en dos capas, considerando el problema forzado (FP) (Csanady, 1967) y el problema de condición de borde inicial (IBVP) (condición inicial forzada para la termoclina). Considerando la ecuación 2.34, para $h_* = 1$, despreciando la relevancia de los esfuerzos viscosos desarrollados en la interfaz de densidad y en el manto de la cubeta, y la ecuación 2.35 se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones adimensionales

$$\frac{\partial}{\partial t_*} \begin{pmatrix} v_{r1}^* \\ v_{\theta 1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_{\theta 1}^* \\ v_{r1}^* \end{pmatrix} - \nabla_H^* \eta_2^* = \frac{S}{W_F} \begin{pmatrix} \cos(\theta^*) \\ -\sin(\theta^*) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{r_*} \frac{\partial(r_* v_{ri}^*)}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial v_{\theta i}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_i^*}{\partial t_*} = 0 \quad (2.43)$$

El número de Wedderburn en esta situación forzada se define como $W_F = g\epsilon h_1^2 / Fr$, donde Fr corresponde al número de Froude densimétrico. Para modelar el estado forzado se plantea la siguiente condición inicial, considerando la aplicación de una fuerza uniforme sobre la superficie del cuerpo de agua, actuando a lo largo de una dirección $\theta = 0$ y el siguiente esquema en el tiempo:

$$F(t_*) = \begin{cases} 0 & t_* < 0 \\ F & t_* \geq 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

La condición inicial para la inclinación lineal de interfaz, con pendiente C y velocidades nulas se puede expresar en términos adimensionales

$$\eta(r_*, \theta, t_* = 0) \equiv \eta_0 = SW_c^{-1} r \cos(\theta) \quad (2.45)$$

$$u_{r1}^*(r_*, \theta, t_* = 0) = v_{\theta 1}^*(r_*, \theta, t_* = 0) \quad (2.46)$$

donde $W_c = h_1 / CR$ representa el número de Wedderburn para la inclinación inicial de la interfaz. Además se debe imponer la condición de borde de flujo radial cero para radios mayores al de la cubeta, lo que adimensionalmente se representa a través de la siguiente expresión:

$$u_{r1}^*(r_* = S^{-1}, \theta, t_*) = 0 \quad (2.47)$$

A partir de este punto, considerando las ecuaciones de momento y continuidad, la condición inicial y de borde, se lleva a cabo un análisis matemático que busca desacoplar la parte espacial de la parte temporal del conjunto de ecuaciones. Con este objetivo, se utiliza la transformada de Laplace para resolver la parte temporal del sistema de EDPs. Las ecuaciones transformadas pueden ser combinadas para derivar la ecuación de onda en términos del desplazamiento de la interfaz transformado:

$$\Pi_i = \mathcal{L}(\eta) = \int_0^\infty \eta(t) e^{-st} dt \quad (2.48)$$

A través de un manejo algebraico, utilizando la divergencia y el rotor de las ecuaciones de momento, y la ecuación de continuidad se puede obtener la ecuación de onda para el desplazamiento

$$\Delta\Pi = \left\{ \Pi - \frac{\eta_0}{s} \right\} (s^2 + 1) \quad (2.49)$$

El siguiente paso es expresar la condición de borde de velocidad radial cero en términos del desplazamiento. Utilizando las ecuaciones de momento e imponiendo la ecuación 2.47 se obtiene la siguiente condición

$$s \frac{\partial\Pi}{\partial r} + \frac{\partial\Pi}{r\partial\theta} = \frac{S}{W_F} \left(\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{s} \right) \quad (2.50)$$

Para la ecuación 2.49 buscamos una solución que incorpore todos los modos azimutales, y que cada uno de ellos tenga una estructura radial propia, siguiendo esta idea se puede plantear la siguiente solución general para el desplazamiento transformado (Stocker & Imberger, 2003):

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^c(r) \cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} G_n^s(r) \sin(n\theta) \quad (2.51)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación de onda transformada, se encuentra que la estructura radial de cada modo azimutal debe ser una ecuación de Bessel

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial G}{r\partial r} - \left(1 + s^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) G = 0 \quad (2.52)$$

donde la solución de esta ecuación está constituida por una constante y una función de Bessel modificada (Spiegel, 1970), $G(r) = K I_n(zr)$ donde K es la constante, I_n es la función de Bessel modificada de orden n y $z = \sqrt{1 + s^2}$. En este caso G representa a todas las estructuras radiales del desplazamiento transformado, G_n^c y G_n^s , con la excepción del término G_1^c , el cual en cambio, debido a la condición inicial de la interfaz inclinada, satisface la ecuación de Bessel no-homogénea siguiente

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{\partial G}{r\partial r} - \left(1 + s^2 + \frac{1}{r^2} \right) G = -\frac{1 + s^2}{s} \frac{Sr}{W_c} \quad (2.53)$$

La solución general para la ecuación anterior está compuesta por la solución homogénea más la solución particular:

$$G_1^c = K_1^c I_1(zr) \frac{Sr}{W_c s} \quad (2.54)$$

Ahora, sustituyendo la función 2.51 en la condición de borde, dada por la ecuación 2.50, se encuentra una ecuación para cada modo azimutal, lo que permite determinar los coeficientes de la función del desplazamiento transformado, Π . Sin embargo, debido a que el modo azimutal fundamental ($n = 1$) depende de la condición inicial, en este caso la función 2.51 solo contendrá terminos en $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$. Sustituyendo la expresión reducida para la función 2.51 en la condición de borde 2.50 se derivan dos ecuaciones para los coeficientes incógnitas K_1^c y K_1^s , dadas por los valores que acompañan a las funciones $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$. Con este sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas se determina la función de desplazamiento transformado para el modo azimutal 1. Este resultado se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Pi = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)} \quad (2.55)$$

donde

$$\Phi = \frac{S}{W_c} (1 + M^2 s^2) \cos(\theta) - \left(\frac{1}{W_c} - \frac{1}{W_F} \right) \frac{I_1(zr)}{I_1(z)} \{ (1 + Ms^2) \cos(\theta) + s(1 - M) \sin(\theta) \} \quad (2.56)$$

$$\Psi(s) = s(1 + M^2 s^2) \quad (2.57)$$

con $M = zI_0/I_1 - 1$ y $z(s)$ es un complejo, para evitar el uso de ambas funciones de Bessel (normal y modificada). Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación 2.55 se obtiene el desplazamiento de la interfaz de densidad en el tiempo:

$$\eta(t_*) = \mathcal{L}^{-1}(\Pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Pi(s) e^{st_*} ds \quad (2.58)$$

Utilizando la fórmula de valores propios (Csanady, 1968), la cual considera que la función puede ser escrita como el cociente de dos polinomios, la transformada de Laplace puede ser obtenida a través de la siguiente función:

$$\eta(t_*) = \sum_i \frac{\Phi(s_i)}{\partial_s \Psi(s_i)} e^{s_i t_*} \quad (2.59)$$

La expresión final del desplazamiento de la interfaz, η_2^* , se obtiene después de un proceso algebraico relativamente largo. Finalmente para obtener el campo de velocidad se utiliza las ecuaciones de momento transformadas, que están en función del desplazamiento transformado Π , ya obtenido. Las siguientes expresiones son la solución para el problema fundamental con condición inicial forzada:

$$\eta_2^*(r_*, \theta, t_*) = - \left(\frac{r_* S - A_0}{W_c} + \frac{A_0}{W_F} \right) \cos(\theta) + \left(\frac{1}{W_c} - \frac{1}{W_F} \right) \sum_{k=1}^{\infty} a_k D_k A_k \quad (2.60)$$

$$u_{r1}^*(r_*, \theta, t_*) = S (W_c^{-1} - W_F^{-1}) \left\{ \left(1 - \frac{A_0}{r_* S} \right) \sin(\theta) - \frac{1}{r_* S} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\theta - \sigma_k t_*) \frac{A_k - \sigma_k \Delta_k}{1 - \sigma_k} \right\} \quad (2.61)$$

$$v_{\theta 1}^*(r_*, \theta, t_*) = S (W_c^{-1} - W_F^{-1}) \left\{ \left(1 - \frac{\Delta_0}{r_* S} \right) \cos(\theta) - \frac{1}{r_* S} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\theta - \sigma_k t_*) \frac{\Delta_k - \sigma_k A_k}{1 - \sigma_k} \right\} \quad (2.62)$$

donde

$$a_k = \frac{\sigma_k - 1}{1 + \sigma_k - S^{-2} \sigma_k^3} \quad (2.63)$$

$$A_k = \frac{I_1(r_* z_k S)}{I_1(z_k)} \quad (2.64)$$

$$\Delta_k = r_* \frac{dA_k}{dr_*} = r_* z_k S \frac{I_0(r_* z_k S)}{I_1(z_k)} - \frac{I_1(r_* z_k S)}{I_1(z_k)} \quad (2.65)$$

Es directo observar que si $W_F \rightarrow \infty$ el forzante externo en el tiempo es eliminado, recuperando el problema no forzado para la condición de borde inicial. Por otra parte, la solución del problema

forzado (FP) propuesta por Csanady 1968 se recupera cuando $W_c \rightarrow \infty$.

La solución propuesta por Stocker & Imberger (2003) entrega una mejor herramienta desde el punto de vista experimental, puesto que tanto parámetros como variables están en función de números adimensionales que permiten ser replicados a nivel de laboratorio. Además, la parametrización de las soluciones en función de σ_k ayuda a la identificación del tipo de ondas desarrolladas.

2.6. Números adimensionales que gobiernan el modelo

El análisis de las ecuaciones de momento realizado en el punto anterior deriva la existencia de tres parámetros adimensionales, de los cuales dos de ellos ya han sido enunciados, S y W . El tercer parámetro está constituido por el esfuerzo de corte en la interfaz aire-agua, las densidades, la celeridad y una razón de aspecto geométrica, R/h_1 .

2.6.1. Número de Wedderburn

El número de Wedderburn, W , es el parámetro adimensional que cuantifica la respuesta de la *termoclina* debido a eventos de viento en la superficie de un cuerpo de agua (Shintani *et al.*, 2010). Para un cuerpo en 2D, W se deriva considerando las ecuaciones horizontales de momento linealizadas (despreciando términos advectivos) y en estado estacionario. Bajo estas condiciones, un esfuerzo de corte actuando sobre la superficie de un cuerpo de agua debe ser balanceado por un gradiente baroclínico. En función de este análisis (Shintani *et al.*, 2010), y considerando una cubeta circular, de fondo plano, y estratificada en dos capas, el número de Wedderburn puede ser expresado como:

$$W_{2D} = \frac{g\epsilon\bar{h}_1^2}{u_*^2(2x_g)} \quad (2.66)$$

donde u_* corresponde a la velocidad de corte debido al esfuerzo de corte actuando sobre la superficie del agua, y x_g es el centroide del área superficial de la cubeta, medido desde un eje x paralelo a la dirección máxima del viento, con su origen ubicado en el extremo donde converge el viento a la superficie de agua:

$$x_g = \frac{1}{A_{sup}} \int_0^{2D} xB(x)dx \quad (2.67)$$

considerando $B(x)$ como la función que determina el ancho del cuerpo de agua a lo largo de x . Para el caso de una cubeta circular se obtiene que $x_g = R$, luego el número de Wedderburn queda definido de la siguiente forma:

$$W_{2D} = \frac{g\epsilon\bar{h}_1^2}{u_*^2 2R} \quad (2.68)$$

Para un modelo experimental, en donde se considera una situación forzada inicial del sistema estratificado, es posible expresar el número de Wedderburn en función del desplazamiento inicial de la termoclina, η_0 , y el espesor de la capa superficial, h_1 , para el caso lineal (Horn *et al.*, 2001; de la Fuente *et al.*, 2008)

$$W_0 = \frac{h_1}{2\eta_0} \quad (2.69)$$

2.6.2. Número de Burger

El número de Burger define cuán importante es el efecto de la rotación terrestre sobre la dinámica interna de un cuerpo de agua (Gill, 1982). Este parámetro puede ser discutido y expresado de varias formas, en función del enfoque del problema a abordar. Para un cuerpo de agua suficientemente grande tal que el tiempo de propagación de una onda a través de la cubeta ($T_i/2$) es similar o más largo que el tiempo que le toma a un cuerpo de agua en dar un giro en 360° , $(\Omega)^{-1}$, la onda puede ser fuertemente influenciada por la rotación terrestre (de la Fuente *et al.*, 2008). Experimentalmente, en un sistema rotatorio, en donde la velocidad angular del cuerpo es un parámetro a regular, el número de Burger es conveniente expresarlo como la razón entre estos dos tiempos

$$S = \frac{4}{T_i f} \quad (2.70)$$

Este parámetro también puede ser expresado como

$$S = \frac{c_i}{Rf} \quad (2.71)$$

donde f es el parámetro de Coriolis, el cual puede ser escrito en términos de la proyección de la velocidad angular terrestre para un cierto lugar del planeta, $f = 2\Omega \sin(\phi)$. Este último parámetro es convencionalmente positivo en el hemisferio norte, cero en el ecuador, y negativo en el hemisferio sur.

Es posible desprender de la ecuación 2.34, si tanto W , como S son muy grandes, los efectos del viento y de Coriolis comienzan a ser despreciables para la hidrodinámica de un cuerpo, sin embargo, es posible que uno de estos parámetros gobierne sobre el otro, o en el caso más general, que ambos jueguen un rol fundamental en la caracterización hidrodinámica, específicamente en las ondas internas de un flujo estratificado.

2.6.3. Razón de aspecto

Otro parámetro de interés en el análisis es la razón de aspecto entre las capas que conforman la estructura del cuerpo de agua, h_1/h_2 o la definida por Horn *et al.* (2001), h_1/H_t . Al estar trabajando con un flujo estratificado existen características geométricas que inciden sobre el desarrollo de las ondas internas las cuales pasan a estar gobernadas por fenómenos no-lineales y no-hidrostáticos (Horn *et al.*, 2001). Para el modelo se propone un parámetro adimensional que caracterize la razón de aspecto de la estratificación:

$$h_* = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \quad (2.72)$$

Se puede observar que la altura adimensional, h_* , es la razón entre el espesor de la capa superficial y el espesor total de la columna de agua. Notar que h_* sale naturalmente de las ecuaciones 2.2 y 2.3

2.6.4. Modelación física del prototipo

Los tres parámetros adimensionales están en función de 9 parámetros dimensionales: la gravedad, g , la densidad de las capas que conforman el flujo estratificado, ρ_1 y ρ_2 , los espesores de cada uno de los estratos, h_1 y h_2 , la longitud máxima de la cubeta, $2R$, la velocidad de corte actuando sobre la superficie, u_* , la velocidad angular terrestre, Ω , y la latitud del cuerpo de agua, ϕ . Estos parámetros se combinan de forma tal que se generan los parámetros adimensionales W , S y h_* .

Luego, si conocemos la estructura térmica, la batimetría y geometría del cuerpo de agua, su latitud, y los forzantes meteorológicos que inciden sobre la superficie del cuerpo, es posible determinar el valor de los tres principales parámetros que describen la dinámica de las ondas internas en dos capas que existen en el cuerpo lacustre.

Caracterizando la estructura térmica de un cuerpo lacustre, tal como la del lago Villarrica, se puede determinar su estructura de densidad a través de la siguiente ecuación (UNESCO, 1981):

$$\rho(T, P) = \rho(T, 0) \left(1 - \frac{P}{K(T, P)} \right)^{-1} \quad (2.73)$$

donde ρ es la densidad, que para el caso de cuerpos de agua dulce depende de la presión y la temperatura, el término P corresponde a la presión y el factor K es el módulo de compresibilidad del agua, el cual depende de la temperatura del cuerpo de agua y la presión (DYRESM - CWR, 2007). Al conocer la estructura de densidad se puede caracterizar la columna de agua en función del gradiente de la densidad. De esta forma se puede determinar la existencia de estratificación, y ubicación de la termoclina, buscando la profundidad de las máximas frecuencias boyantes, N . A través de este procedimiento se define el espesor de la capa superficial, h_1 , y en consecuencia el espesor de la inferior, h_2 , en el caso de un cuerpo lacustre estratificado en dos principales capas.

$$h_1 = h(\max(N)) \quad (2.74)$$

donde la frecuencia boyante está definida por la siguiente expresión Spigel & Imberger (1987); Staquet & Sommeria (2002):

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} \quad (2.75)$$

Por último, el efecto de la rotación terrestre, en un cierto punto del globo, está determinado por la latitud, ϕ . Con este dato se puede determinar la frecuencia inercial, f , de la zona de interés. Es importante notar que el análisis propuesto considera que el cuerpo lacustre tiene un valor de f fijo o representativo, con una variación despreciable de magnitud a lo largo de la dirección Norte-Sur. Si el cuerpo de agua es suficientemente grande para que la variación de f sea considerable es necesario replantear las ecuaciones de momento, debido a que f pasa a ser una función de r y θ . Este análisis permite estudiar ondas de escala global (consultar (Cushman-Roisin, 1994; Gill, 1982)).

Conociendo las variables que determinan los parámetros adimensionales en estudio, es posible caracterizar respuestas hidrodinámicas del cuerpo lacustre en función de estos números. Esto permite también generar conjuntos de combinaciones entre las variables involucradas tal que puedan replicar los parámetros adimensionales obtenidos de terreno. Esto último proporciona el desarrollo de un modelo a escala del cuerpo lacustre, apoyándose en la teoría de análisis dimensional y de similitud.

Las leyes de similitud permiten diseñar prototipos de fenómenos físicos a nivel de laboratorio haciendo uso del análisis dimensional. Utilizando un conjunto de características del fenómeno en estudio se puede determinar cantidades adimensionales que pueden ser conservadas por un prototipo dado un nuevo conjunto de condiciones. Las ideas básicas tras estas leyes son las siguientes: el comportamiento de un fluido en un conjunto de condiciones está relacionado con el comportamiento del mismo fluido en otro conjunto de condiciones (Granger, 1995). Esta comparación es usualmente

hecha entre fenómenos de gran escala (e.g.: geofísicos) y fenómenos de pequeña escala (e.g.: laboratorio). Ciertas condiciones de similitud entre el fenómeno real y el prototipo deben lograr que el modelo estudiado sea realmente representado a través del prototipo. Estas condiciones son:

1. Similitud geométrica de las condiciones de borde físicas
2. Similitud en la dinámica del campo de flujo.

Para estudiar el comportamiento de un prototipo es necesario estudiar la ecuación adimensional que gobierna el fenómeno en estudio, tal como la ecuación 2.34. La idea de esta teoría es que la ecuación diferencial adimensional que gobierna el comportamiento y características del fenómeno en estudio, también gobierne el comportamiento y características del prototipo.

En el caso de estudio, se ha demostrado que los parámetros adimensionales obtenidos guardan información importante sobre el comportamiento del fluido, por lo que se considera que éstos son un buen conjunto de parámetros para utilizar como invariantes entre el fenómeno y un prototipo. Como consecuencia de la hipótesis, se pueden plantear ecuaciones de transformación para obtener las características geométricas y dinámicas del prototipo, en función de los parámetros adimensionales que gobiernan el fenómeno. Para comodidad del análisis se utilizará el número Wedderburn escrito como $W_0 = h_1/2\eta_0$, luego:

$$W_c = W_p = \frac{h_{1p}}{2\eta_{0p}} \quad (2.76)$$

$$S_c = S_p = \frac{\sqrt{g\epsilon h_{2p} h_*}}{2R_p \Omega_p} \quad (2.77)$$

$$h_{*c} = h_{*p} = \frac{h_{1P}}{h_{1P} + h_{2P}} \quad (2.78)$$

donde los parámetros con subíndice c indican los números adimensionales obtenidos de campo y con subíndice p indican que pertenecen a las características del prototipo de laboratorio. Si se fijan los parámetros de campo W , S y h_* , podemos obtener un conjunto de variables del prototipo, tales como η_{0p} , h_{1p} y Ω_p , u otro conjunto, dependiendo de lo que se quiera controlar. Sin embargo, por condiciones experimentales, es razonable fijar las escalas geométricas, R_p , $H_p = h_{1p} + h_{2p}$, y la escala densimétrica ϵ o $\Delta\rho$. Es posible tener una densidad de referencia fija, ρ_1 , la cual puede ser la densidad del agua fresca a temperatura ambiente, teniendo que obtener una segunda densidad, ρ_2 , para desarrollar el estrato inferior. Tomando en cuenta estas condiciones y las ecuaciones 2.76, 2.77 y 2.78, se obtienen las características de la estratificación, tamaño y densidad de cada capa, y las características cinemáticas, velocidad angular y efecto del viento sobre la interfaz de densidad.

$$h_{1p} = h_* H_{tp} \quad (2.79)$$

$$h_{2p} = (1 - h_*) H_{tp} \quad (2.80)$$

$$\eta_{0p} = \frac{h_*}{2W} H_{tp} \quad (2.81)$$

$$\Omega_p = \frac{\sqrt{g\epsilon h_* (1 - h_*) H_{tp}}}{2S R_p} \quad (2.82)$$

Las ecuaciones 2.79-2.82 permiten obtener un conjunto de condiciones para el desarrollo del fenómeno a escala del prototipo.

2.6.5. Condición inicial: amplitud máxima de seiche interno

Estudios de campo (Meruane & Niño, 2005) y experimentos de laboratorio (Niño *et al.*, 2003) han obtenido que el efecto del viento sobre la superficie libre de un lago estratificado (en un modelo de 2 o 3 capas) genera la inclinación de la termoclina, transportando agua menos densa hacia la dirección del campo de velocidad del viento. Esto genera que la termoclina tienda acercarse a la superficie libre en el sentido opuesto del flujo superficial, tal como se observa en la Figura 2.10. Este resultado puede derivarse de las ecuaciones de movimiento planteadas anteriormente. Suponiendo que la inclinación de la interfaz de densidad se genera en la dirección r , para un régimen estacionario, entonces:

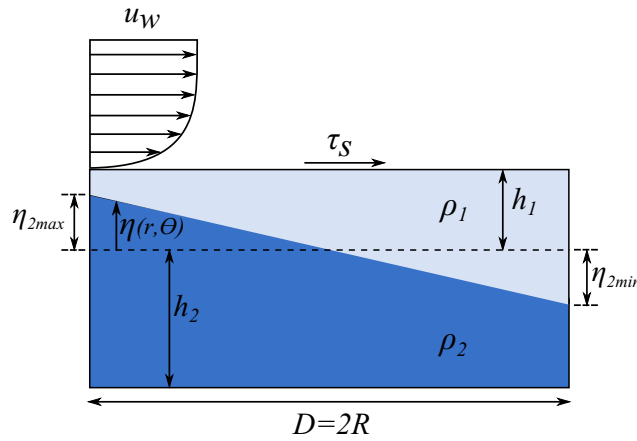


Figura 2.10: Flujo estratificado en dos capas, bajo los efectos esfuerzos de corte inducidos por la velocidad del viento, inclinación de la termoclina.

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial r_*} = - \left(\frac{S}{W_0} - \frac{S \tau_i \rho_i}{\rho_1 \rho_2 c_i^2 h_1} \frac{R}{h_1} \right) \cos(\theta - \theta_*) \quad (2.83)$$

donde del primer término se puede inferir que para valores pequeños de W (grandes magnitudes de viento sobre la superficie) se tendrá una pendiente mayor de la termoclina, mientras que el segundo término, que está compuesto por el esfuerzo de corte en la interfaz y otros parámetros, actúa como mecanismo estabilizador. Este término ha sido eliminado comúnmente del análisis, sin embargo, experimentos de laboratorio (Niño *et al.*, 2003) han verificado la existencia de un esfuerzo de corte negativo (con respecto al esfuerzo de corte existente en la superficie) no despreciable, equivalente al 10% aprox. del esfuerzo de corte superficial, el cual se mantiene durante los primeros minutos tras el inicio del experimento, pero luego tiende a oscilar entorno a cero y desaparece parcialmente alrededor de los 60 min. Este comportamiento puede indicar que ondas de gran escala pueden dominar el proceso de mezcla inicialmente.

Un análisis de órdenes de magnitud de los términos de la ecuación 2.83, indica que el primer término $S/2W_0 \propto 10^0$, considerando que el cuerpo agua se encuentra afectado por Coriolis y el viento sobre la superficie es capaz de entregar la energía suficiente para alcanzar condiciones de *upwelling*. Por otra parte, el término que involucra el esfuerzo de corte interno puede ser despreciado por el momento, puesto que su magnitud es del orden de 10^{-2} - 10^{-3} de los otros términos. De esta

última discusión se puede caracterizar la condición inicial de la interfaz de densidad, considerando que para $W_0 < 0,5$ se tiene la condición de *upwelling* teórico, basado en un análisis lineal de las ecuaciones.

$$\eta_2^*(r_*) = \frac{S}{W_0} \cos(\theta_*) r_* \quad (2.84)$$

Es importante destacar que esta condición inicial adimensional para la amplitud muestra la dependencia del forzante externo, caracterizado por W_0 y la rotación del medio, S , no obstante, en condiciones dimensionales, la rotación del medio no influye sobre la inclinación forzada de la termoclina, este resultado es obtenido porque se utilizó el radio de formación de Rossby para escalar la longitud radial. A través de estos parámetros es posible modelar el estado forzado de la interfaz de densidad producto del viento en la superficie. Cuando el viento es removido del sistema el desplazamiento máximo de la interfaz está determinada por la ecuación 2.84, lo que impone una condición inicial para el proceso de degeneración de ondas internas.

2.6.6. Escalas de tiempo de ondas internas

Las escalas de tiempo de las ondas Kelvin y Poincaré están asociadas a las frecuencias derivadas de la solución analítica. La obtención de estas frecuencias adimensionales, σ_i , se realiza resolviendo la ecuación de onda 2.39, en función de frecuencias adimensionales (Antenucci & Imberger, 2001; Wake *et al.*, 2005):

$$\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} J_{n-1} \left(\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} \right) + n \left(\frac{1}{\sigma_i - 1} \right) J_n \left(\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} \right) = 0 \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} I_{n-1} \left(\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} \right) + n \left(\frac{1}{\sigma_i - 1} \right) I_n \left(\frac{1}{S} \sqrt{\sigma_i^2 - 1} \right) = 0 \quad (2.86)$$

De estas ecuaciones se obtiene σ_{ip} y σ_{ik} , respectivamente. Para el caso de las ondas fundamentales se pueden utilizar los polinomios ajustados en función de S (Antenucci & Imberger, 2001; Wake *et al.*, 2005) para σ_{1p} y σ_{1k} .

El tiempo de acople entre la onda Kelvin y Poincaré se puede determinar de la solución lineal. Para esto se debe imponer que las fases de las ondas coincidan (de la Fuente *et al.*, 2008), luego

$$\sigma_{kp} = \frac{\sigma_k - \sigma_p}{\sigma_k \sigma_p} \quad (2.87)$$

Para estudiar la escala de tiempo de efectos no-lineales de las ondas internas consideramos el análisis de la ecuación de onda no-lineal no-dispersiva, en donde se determina un tiempo característico para el empinamiento, T_s , del seiche interno (Horn *et al.*, 2001; Boegman *et al.*, 2005b; de la Fuente *et al.*, 2008), considerando una escala de longitud L y una velocidad $\alpha\eta_0$

$$T_s = \frac{L}{\alpha\eta_0} \quad (2.88)$$

donde $\alpha = \frac{3}{2}c_i(h_1 - h_2)/h_1h_2$. Esta escala de tiempo puede ser analizada en función de las variables involucradas en el problema en estudio. Considerando que la escala de longitud asociada al tiempo T_s es el perímetro de una cubeta, $2\pi R$ circular circular, escribiendo $h_2 = H_t - h_1$, y adimensionalizando el tiempo por la frecuencia inercial, f , se obtiene el siguiente resultado

$$\sigma_s = \frac{4\pi W_0}{3 S} \frac{1 - h_*}{2h_* - 1} \quad (2.89)$$

de esta forma se define una frecuencia adimensional para el desarrollo de empinamiento de una onda interna. Para analizar si una onda Kelvin se ve afectada por efectos no-lineales se puede considerar la razón entre la frecuencia adimensional σ_{ik} y la frecuencia adimensional σ_s

$$\sigma_{sk} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{ik}} \quad (2.90)$$

El desarrollo de efectos no-lineales en las ondas Kelvin va a ser una función de $\sigma_{sk} = f(h_*, W, S, i)$, luego, si $\sigma_{sk} < 1$ entonces deberían existir interacciones no-lineales en desarrollo de la Kelvin, gatillando ondas Tipo Solitarias.

Capítulo 3

Montaje Experimental

En este capítulo se describen y explican los diferentes elementos que conforman el montaje experimental analizando las funciones e interacciones entre éstos. Además se mencionan las diferentes etapas que se llevaron a cabo en el proceso de montaje y puesta en marcha de los experimentos.

3.1. Desarrollo de Mesa Rotatoria

3.1.1. Estructura principal

La modelación de la mesa rotatoria se desarrolló siguiendo el diseño del Profesor Peter Davies de la Universidad de Dundee (Boyer, 1987). La mesa se ubica en el laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Chile, ha sido fabricada a base de acero, y consta de tres componentes principales (Figura 3.1): i) base cuadrada, desde donde nacen cuatro apoyos, que se fijan al suelo del laboratorio; ii) rotor central, ubicado en el eje de la base y vincula, desde su punto interior, a un motor electromecánico que permite entregar la rotación al sistema; iii) plataforma hexagonal, ubicada sobre el rotor central, la que está formada por doce barras de acero dispuestas radialmente, y unidas a un disco de acero ubicado al centro del hexagono. Estos elementos buscan entregar rigidez a la plataforma. Además, sobre la plataforma hexagonal existe una plancha de acero inoxidable circular, que se acopla a la plataforma simétricamente.

El sistema ha sido calculado estructuralmente para que soporte cargas de hasta 1 ton. La unión entre el rotor central y la plataforma hexagonal se realizó a través de un sistema atornillado, tipo perno-tuerca (donde el perno sería el rotor, y la tuerca la plataforma rectangular), dando la posibilidad de desmontar los elementos de forma fácil y segura. Por otra parte, el rotor central y la base cuadrada se unen a través de dos rodamientos, ubicados a la largo del eje vertical. El rodamiento inferior es del tipo carga axial adaptable, y el superior es del tipo carga frontal. Por último, la base cuadrada se fija al suelo del laboratorio a través de pernos.

3.1.2. Cubeta Circular

Se diseñó y construyó una cubeta circular a base de acrílico transparente de 1 cm de espesor, con un diámetro interno de 1,8 m, y altura de 0,50 m (Figura 3.2). El manto del cilindro está constituido por 4 arcos de 90° cada uno, y en cada unión existe un reforzamiento que entrega resistencia frente a las tensiones desarrolladas. Esta parte se acopló a una base circular de 2,0 m, dispuestos axisimétricamente, dando forma y funcionalidad a la cubeta.

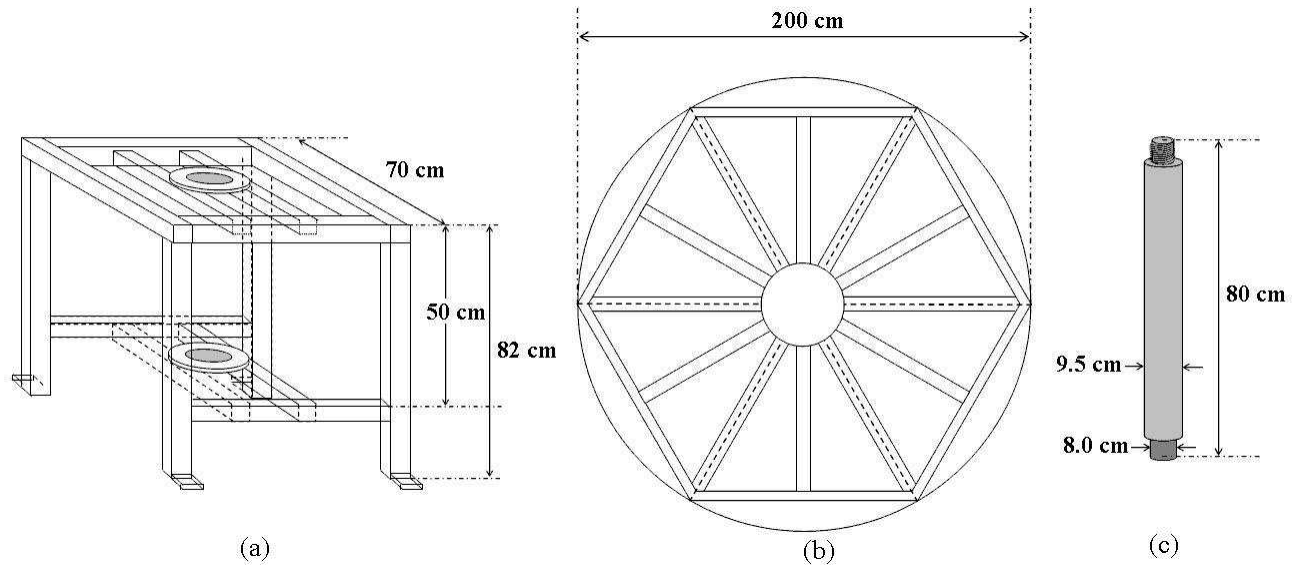


Figura 3.1: Estructura principal de mesa rotatoria: (a) Plataforma hexagonal, (b) base cuadrada, (c) rotor central.

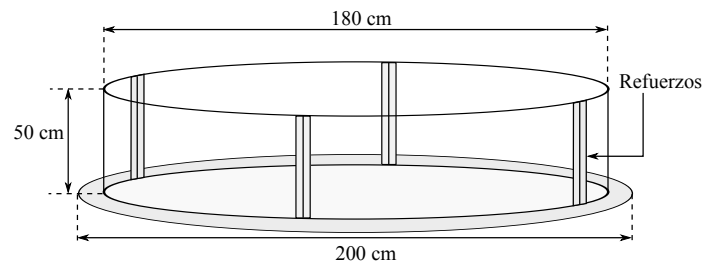


Figura 3.2: Cubeta circular, diámetro $D = 1,8$ m, altura $H = 0,5$ m

3.1.3. Sistema upwelling

Se diseñó y construyó un sistema mecánico-hidráulico, a base de acero, que produce la inclinación de la cubeta con respecto a la horizontal (plataforma de giro). El mecanismo está comprendido por dos plataformas rectangulares paralelas, que se unen en una de las aristas a través de un sistema de visagras, que da origen al eje de giro de la estructura. Las plataformas están conformadas por un marco principal y barras equiespaciadas. La plataforma inferior tiene un largo de 2,1 m, un ancho de 1,8 m y una altura de 5 cm, su función es permanecer fija y horizontal sobre la plataforma hexagonal de la estructura principal. Por otro lado, la plataforma superior tiene un largo de 2,1 m, un ancho de 1,77 m y una altura de 7 cm, y su función es girar con respecto al eje de giro y de esta forma inclinar la cubeta circular que es dispuesta sobre esta misma plataforma.

Para inclinar la plataforma superior se ha desarrollado un sistema hidráulico ubicado en la arista opuesta del eje de giro, donde se ubica el sistema de visagras (Figura 3.3). El dispositivo mecánico hidráulico permite levantar un extremo de la plataforma superior, dando origen a la inclinación. A través de este mecanismo se puede alcanzar un rango de separación de 0 a 20 cm, lo que se traduce en una inclinación θ , con respecto a la horizontal, de 0° a $5,5^\circ$. El sistema tiene una capacidad máxima de 1.6 ton. Una vez inclinado, un sistema de control de liberación rápida es capaz de restituir la cubeta a un estado horizontal, en alrededor de 1 seg.

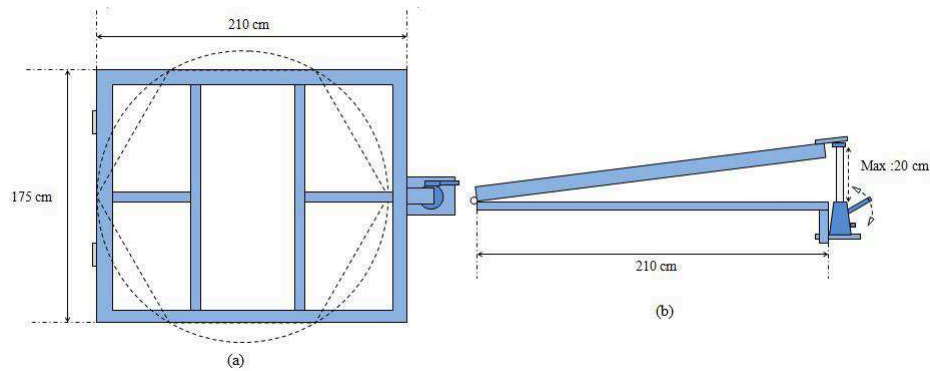


Figura 3.3: Sistema Upwelling

El sistema upwelling se monta sobre la estructura principal, de forma tal que el eje de giro se encuentre ubicado de forma tangencial sobre uno de los bordes de la plataforma hexagonal. Por encima del sistema upwelling se ubica la cubeta circular, la cual es apernada perimetralmente sobre la plataforma superior, con el objetivo que exista simetría axial entre la plataforma hexagonal y la base de la cubeta.

La función de este dispositivo es modelar los efectos generados por el viento sobre la superficie de un lago, específicamente la inclinación de la interfaz de densidad debido al esfuerzo de corte del viento actuando sobre la superficie libre (Figura 3.4) . Para inducir tales efectos en el sistema experimental se creará un seiche artificial posterior a haber alcanzado un regimen permanente en la rotación. Para esto, la cubeta estratificada será inicialmente inclinada un cierto ángulo con respecto a la horizontal de forma tal que, en una condición extrema, exista una condición de upwelling en el fluido experimental (Ulloa *et al.*, 2010). Luego, el sistema de control de liberación rápida llevará a la cubeta a la posición horizontal, similar al que fue hecho por Horn *et al.* (2001; 2002) en un sistema sin rotación.

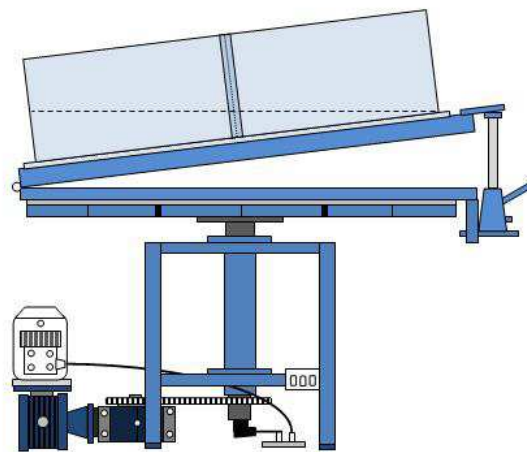


Figura 3.4: Esquema general de la mesa rotatoria

3.1.4. Sistema electro-mecánico

El funcionamiento mecánico y eléctrico de la mesa rotatoria, y los dispositivos con los cuales interactúa, fueron diseñados y desarrollados por el equipo técnico del Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Chile, dirigido por el Profesor Yarko Niño. La instalación proporciona energía eléctrica para conectar todos los equipos de medición sobre la mesa mediante un conector rotatorio, evitando que los cables se enrolen debido al funcionamiento del sistema. La mesa rotatoria cuenta con dos accesos directos a energía eléctrica, en la plataforma hexagonal y en la base cuadrada. La energía es introducida al sistema a través del rotor central.

En el suelo del laboratorio, en uno de los costados de la base cuadrada de la estructura principal, se encuentra un motoreductor Motovario, modelo NMRV 040 (1/2- 30 Hp = 1-380v), el cual está conectado al rotor central de la mesa rotatoria a través de una cadena de transmisión (Figura 3.5a). El motoreductor es operado por un variador de frecuencia modelo F1500 - G00753B (1/2 Hp - 220v), que entrega la energía eléctrica y la frecuencia necesaria para su funcionamiento (Figura 3.5b). El variador de frecuencia se encuentra ubicado en un pilar del laboratorio, a 3 m aproximadamente de la instalación experimental. Este permite activar el funcionamiento del motorreductor, entregando un rango de operación de Ω entre 0 a 6 revoluciones por minuto (rpm) para la mesa rotatoria.



Figura 3.5: Sistema electro-mecánico: (a) motoreductor, (b) variador de frecuencia

Un punto importante en el experimento es la precisión necesaria en la variable de velocidad angular de rotación. Para esto se ha montado un tacómetro digital Autonics, modelo M4W-C, que mide las rpm del rotor central. Este equipo es necesario debido a que el variador de frecuencia no entrega un dato directo entre la señal enviada al motorreductor y la rotación entregada por este último al rotor central, no obstante, el variador de frecuencia fue calibrado con las rpm del rotor central para tener dos lecturas.

3.2. Estratificación del fluido

Con la necesidad de modelar estratificaciones observadas en lagos producto de la radiación solar, específicamente en el lago Villarrica (Chile, IX Región), se desarrolló un método experimental para obtener estratificaciones estables en el interior de la cubeta circular. Considerando, como una buena aproximación, un lago estratificado en capas discretas, con una temperatura, una densidad y un espesor constante asociada a cada capa, es posible generar en el laboratorio un flujo con características similares, de forma tal que la razón de aspecto entre las capas y los contrastes de densidad experimentales reproduzcan los parámetros adimensionales relevantes del fenómeno físico en el cuerpo de agua a estudiar.

3.2.1. Estructura de densidad

Un lago estratificado tiene asociado una estructura de temperatura y de densidad específica, la cual puede ser afectada por diversos factores, sin embargo, en condiciones estables se ha observado, en el caso del lago Villarrica (Meruane & Niño, 2005; Rozas *et al.*, 2009b), una estratificación en dos capas, bien mezcladas, y en consecuencia cada una posee una temperatura y una densidad que puede suponerse homogénea. De esta forma se obtienen perfiles de temperatura y densidad en la vertical, con altos gradientes en la interfaz de densidad.

Para desarrollar una estratificación estable en el laboratorio, se utilizó una solución salina, que permitió alcanzar densidades mayores a la del agua sin sal. De esta forma se obtuvieron las diferencias relativas de densidad necesarias para reproducir los parámetros adimensionales que caracterizan al experimento.

Si bien el contraste de densidades incide tanto en el número de Wedderburn como en el número de Burger, el número de Wedderburn puede ser expresado en función de la condición inicial del experimento, de manera que el contraste de densidad se ajusta de forma tal de reproducir los números de Burger deseados. En la ecuación 3.1 se expresa el número de Burger en función de sus variables.

$$S = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_0} g \frac{h_1 h_2}{H_T} \frac{1}{Rf}} \quad (3.1)$$

3.2.2. Método de estratificación

El desarrollo de la estratificación estable por salinidad se obtuvo a través del uso de una esponja de baja porosidad, con forma de círculo, de diámetro $D_e = 1,8$ m y espesor $e_e = 8$ cm. El método diseñado se basa en las propiedades físicas que tiene la esponja utilizada: (1) un medio poroso de baja densidad; (2) la esponja permite la existencia de flujos gravitacionales de agua desde la superficie hacia su interior, a través de toda su área y a muy baja velocidad. La metodología para generar las estratificaciones experimentales se resumen en los siguientes pasos:

1. Elegir razón de aspecto entre las capas: número de capas y sus respectivos espesores.
2. Elegir estructura de densidad: densidad de cada capa.
3. Crear capa más profunda:
 - Determinar el volumen de agua necesario para la capa más profunda.
 - Determinar la cantidad de sal necesaria para alcanzar la densidad deseada para la capa más profunda.
 - Mezclar el volumen de agua y la masa de sal para alcanzar la densidad buscada.
 - Agregar permanganato de potasio para entregar un color y luego mezclar para obtener una capa de color púrpura.
 - Agregar trazadores sobre la capa inferior para poder observar las velocidades relativas existentes entre el fluido y la cubeta.

4. Crear capa superior:

- Colocar esponja circular sobre la capa más profunda de forma tal que la esponja se encuentre flotando.
- Agregar volumen de agua de la capa superior sobre la superficie de la esponja, a un bajo caudal (del orden de 0,5 l/s).
- Retirar la esponja con lentitud y cuidado una vez alcanzado el espesor de la capa superior, para evitar procesos de mezcla entre las capas (se necesitan al menos tres personas para retirar la esponja).

5. Cerrar el sistema: luego de tener la estratificación estable terminada es necesario cerrar la superficie libre. Para esto se construyó una tapa circular de poliestireno de 1,8 m de diámetro y 50 mm de espesor. Como la tapa no tiene una alta rigidez es importante que ésta sea colocada con cuidado y entre más de una persona, de forma tal que quede en contacto con la superficie libre de la capa superior. Sobre la tapa se colocan cuatro topes, separados por 90° cada uno. Además se dispone una barra de acero, en posición diametral, a lo largo del fetch principal, donde se generará la inclinación de la cubeta. Esto último permite evitar que la superficie libre y la tapa se deformen. Este procedimiento se sintetiza en los siguientes pasos:

- Colocar la tapa sobre la superficie libre de la cubeta circular.
- Ajustar la tapa de manera que no exista aire entre ésta y el agua.
- Asegurar la tapa con cuatro topes y una barra en posición diametral.

3.3. Metodología de adquisición y transformación de datos

3.3.1. Adquisición de datos

Para medir la respuesta de la interfaz de densidad se han utilizado dos cámaras de alta velocidad, ubicadas en dos diferentes puntos de la mesa rotatoria (Figura 3.6 y 3.7). La cámara N°1 marca FOR.A, modelo VFC-300, está ubicada en la dirección del fetch principal, en el punto en donde se genera la máxima inclinación de la cubeta. La cámara N°2 marca PixeLINK, modelo PL-B782, está ubicada a un ángulo $\theta_{c2} = 120^\circ$ (a favor de los punteros del reloj) con respecto a la posición de la primera. Ambas cámaras se han montado sobre la plataforma de la mesa rotatoria, solidaria a la rotación del sistema, a través de un sistema de tipo trípode, que permite alcanzar la posición requerida para los experimentos. En el punto diametralmente opuesto a cada cámara se disponen focos luminosos solidarios a la plataforma de giro, con dirección normal a la superficie del manto de la cubeta. Para suavizar la intensidad del espectro de luz se coloca papel diamante sobre la superficie del cilindro, frente a los focos. Las grabaciones se han realizado sobre el manto del acrílico, en la zona de la interfaz de densidad, en donde se desarrollan las ondas internas.

La cámara N°1 ha sido programada para que capture un cuadro por segundo (1 fps), con una imagen de 512×512 px. La memoria de la cámara permite grabar, en estas condiciones, 1025 cuadros, lo que corresponde a 17 min aproximadamente. Por otra parte, la cámara N°2 permite grabar como mínimo dos cuadros por segundo (2 fps), y los datos producidos son enviados directamente a un computador. Bajo esta situación, la cámara N°1 restringe la duración de la filmación. Por consideraciones del análisis de las series de tiempo se decidió obtener ventanas temporales de 2^n

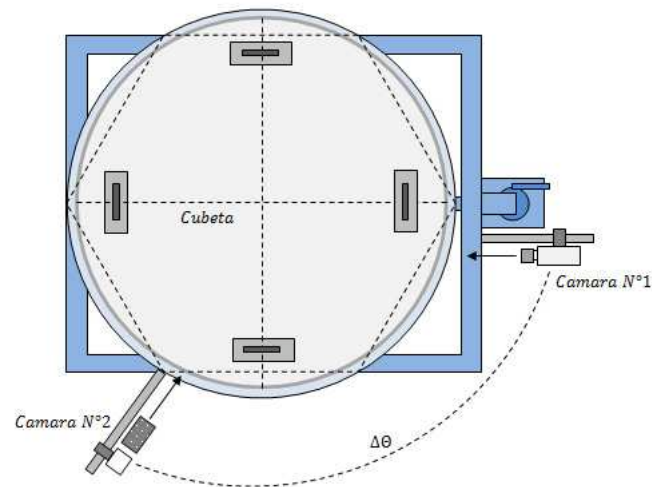


Figura 3.6: Ubicación de cámaras de grabación.



Figura 3.7: Cámaras de alta velocidad. La figura izquierda corresponde a la cámara N°1 y la figura derecha corresponde a la cámara N°2

seg, con $n = 9$.

En cada experimento las cámaras se focalizaron en capturar el desplazamiento de la interfaz de densidad, considerando que las ondas podían alcanzar una cierta amplitud máxima, $\eta_{max} \leq h_1$. Esta condición permitió elegir el tamaño de imagen para cada experiencia. Tanto la captura de luz como la distancia focal se calibraron de forma que el contraste de colores generado por los fluidos estratificados fuera el máximo posible. La Figura 3.8 muestra un ejemplo de la imagen de la cámara capturando la termoclina en escala de grises.

Una vez realizado el experimento se descarga desde la cámara N°1 un archivo .dat, luego este archivo es transformado a un formato .avi a través del software de la cámara, VFC-300 Controller 2.0, mientras que la cámara N°2 tiene la alternativa de generar directamente un archivo .avi. Posteriormente, una rutina en Matlab recupera los cuadros del archivo .avi en formato imagen RGB. De esta operación se obtienen 512 imágenes matriciales con una frecuencia de muestreo de 1 seg (1 fps). Como las imágenes están compuestas por dos colores principalmente (blanco y púrpura), se transforma la imagen a una escala de blanco y negro, considerando un contraste mínimo. De esta forma, la imagen se transforma en una matriz binaria de ceros y unos, donde el número cero corresponde al color negro y el uno corresponde al color blanco.

Se desarrolló un algoritmo simple para buscar la termoclina en las matrices binarias. En cada una

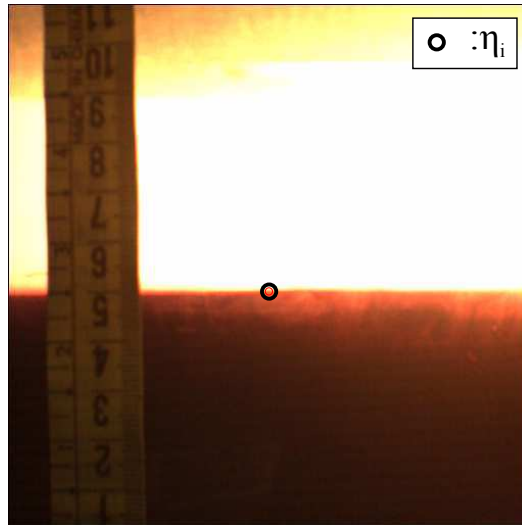


Figura 3.8: Imágen de interfaz de densidad en escala de grises. Color claro muestra el epilimnion y el color oscuro muestra el hipolimnion.

de las imágenes se define el borde, en donde existe el límite entre ceros y unos. Esta interfaz es guardada en una matriz, desde donde luego se hace la búsqueda de la coordenada (x_i, y_i) de la imagen que define la posición límite entre blanco y negro, o sea la termoclina. El algoritmo rescata la variación vertical de la interfaz en el punto medio del rango de coordenadas horizontal ($x_i = 256 px$).

3.3.2. Transformación de escala

El método de adquisición de datos, explicado en el punto anterior, obtiene un conjunto de pares de coordenadas, que caracterizan la variación de la interfaz de densidad en el tiempo, a lo largo de una ventana de tiempo de 512 seg. La escala de longitud asociada a cada dato corresponde al pixel, por lo que es necesario llevar a cabo una transformación de escala para poder operar los datos con otros parámetros físicos.

De esta forma, se define el coeficiente de transformación de escala, C_e , para cada experimento, como el ponderador que permite pasar de pixeles a alguna escala de longitud, por ejemplo *cm*. Este coeficiente debe ser obtenido a partir del tamaño de las imágenes obtenidas en las experiencias. A través del uso de Matlab se obtienen las coordenadas (x, y) en pixeles de dos puntos diferentes ubicados a una misma coordenada x y separados por 1 cm, según la regla milimetrada, en la coordenada y . Luego, se obtiene el coeficiente de transformación mediante la siguiente regla:

$$C_e = \frac{1 \text{ cm}}{\Delta y \text{ px}} \quad (3.2)$$

Multiplicando C_e por la serie de tiempo $y_i(t)$ se obtiene una nueva serie $\eta_i = C_e y_i(t)$ de la termoclina en escala de centímetros. El coeficiente debe ser obtenido para cada experimento, debido a que la calibración de la posición, captura de luz y distancia focal inciden sobre la escala de transformación.

3.4. Resumen metodología experimental

Los experimentos realizados buscan formar ondas internas de gran escala que se vean afectados por los forzantes sistema inercial. Cada experimento fue diseñado a partir del análisis dimensional de las ecuaciones de momento que rigen el fenómeno estudiado para las condiciones físicas experimentales. En función de los análisis teóricos se elaboró una metodología experimental con el fin de generar las condiciones óptimas para la generación de ondas internas afectadas por la rotación del sistema y por fenómenos no-lineales. A continuación se presenta la metodología a seguir para el desarrollo de un experimento.

1. **Elección de números adimensionales:** Para cada experiencia se debe elegir un número de Burger, de Weddurn y de razón de aspecto a reproducir experimentalmente. Cada uno de estos parámetros tiene una escala experimental asociada en función de los espesores de las capas de agua, h_1 y h_2 , inclinación inicial, η_0 , la rotación del sistema, Ω , y la diferencia de densidad entre las capas, $\Delta\rho$.
2. **Reproducción de estos parámetros a nivel experimental:** Se debe elegir el espesor total de la columna de agua, H_t , que tendrá la cubeta circular. Para determinar el espesor de las capas se utiliza la razón de aspecto elegida: $h_1 = H_t h_*$ y $h_2 = H_t(1 - h_*)$. Una vez que se cuenta con el espesor de las capas, se debe determinar la inclinación inicial del sistema para reproducir el número de Wedderburn elegido: $\eta_0 = h_* H_t / 2W_0$. Para reproducir el número de Burger se debe elegir una diferencia de densidad, $\Delta\rho$, con lo cual se obtiene la velocidad angular, Ω , que debe tener el sistema: $\Omega = \sqrt{g\epsilon h_*(1 - h_*)H_t} / 2SR$.
3. **Limpieza de la mesa rotatoria:** El sistema debe estar en perfectas condiciones. La cubeta circular se debe encontrar limpia, sin sedimento en su interior. Tanto la mesa como el sistema de rotación deben tener energía eléctrica para su funcionamiento.
4. **Desarrollo de estratificación y cierre de superficie libre:** Se debe seguir la metodología de explicada en el punto 3.2.2.
5. **Montaje de cámaras y sistema de iluminación:** Una vez que el sistema se encuentra cerrado, se puede comenzar con el montaje de las cámaras e iluminación. Cada cámara cuenta con un trípode que va acoplado a una extensión de la mesa. Además cada cámara cuenta con un foco ubicado diametralmente opuesto a éstas. Entre el foco y el acrílico se debe colocar un papel difusor de luminosidad, para entregar una intensidad más suave y más dispersa. La posición de cada cámara puede ser regulada por el trípode y la extensión. Éstas se encuentran en la parte exterior del acrílico enfocado, en donde existe una regla adherida a éste con el fin de tener una longitud de referencia en los videos registrados. Las cámaras deben tener un campo visual en donde se observe de forma definida la interfaz de densidad, dejando espacio para la máxima amplitud de ondas posiblemente desarrolladas en el sistema.
6. **Rotación del sistema:** Una vez que el sistema de cámaras e iluminación se encuentra montado, se debe comenzar a acelerar la velocidad angular a través del variador de frecuencia, hasta obtener la velocidad angular requerida. Puesto que las paredes entregan un esfuerzo de

corte al agua que puede desencadenar turbulencia y mezcla, se debe realizar una aceleración del sistema extremadamente suave. Es por esto que se recomienda subir 10 hz en el variador de frecuencia cada 10 min. Una vez alcanzada la velocidad angular buscada se debe esperar la estabilización del flujo para lo cual son útiles los trazadores agregados luego de la generación de la capa inferior. Se ha observado que los trazadores alcanzan un régimen permanente (dependiendo a qué radio se ubiquen) en un tiempo de 10 a 20 min.

7. **Inclinación de la cubeta:** En función del parámetro η_0 , se debe elevar desde uno de los extremos de la cubeta la magnitud de $2\eta_0$, específicamente desde donde se encuentra la gata hidráulica. El proceso de elevación debe ser lo más lento posible, para evitar el desarrollo de ondas en la interfaz de densidad. Una vez alcanzada la inclinación buscada se debe esperar a que la estratificación se estabilice (termoclina horizontal). En esta situación la tapa puede estar siendo forzada y deformada por gradientes de presión.
8. **Configuración de cámaras:** Ambas cámaras pueden ser conectadas a un laptop, el cual puede ser ubicado en una de las puntas de la mesa. Se debe programar la frecuencia de muestreo y la ventana de tiempo a medir. A través de los softwares de cada una de las cámaras se puede calibrar el campo visual de forma tal que se registre lo deseado. Una vez que las cámaras se encuentren listas para comenzar a registrar se puede iniciar la siguiente etapa.
9. **Adquisición de datos:** Se debe comenzar a registrar la evolución de la termoclina justo antes de que el sistema sea liberado. La ventana de registro para los experimentos propuestos es de 512 seg, sin embargo es preferible medir del orden de 600 seg por razones de lapsus iniciales. Una vez registrada la ventana de tiempo programada, se guardan los datos desde la cámara al disco duro del laptop.
10. **Liberación rápida de la inclinación:** En el momento en que las cámaras comienzan a registrar, se debe liberar rápidamente la cubeta para que ésta alcance su estado horizontal.
11. **Desmontaje del sistema:** Al terminar la etapa de adquisición de datos se debe proceder a desmontar las cámaras, focos y tapa. Además se debe detener la rotación y apagar la electricidad del rotor y la mesa. Posteriormente se puede inclinar la cubeta para poder extraer el agua de su interior. Finalmente se debe proceder a limpiar la cubeta para evitar la formación de costras debido a la presencia de sal en el sistema.
12. **Transformación de escala y análisis de resultados:** Los datos registrados a través de las cámaras deben ser transformados mediante una escala adimensional de longitud, que atribuye una cierta cantidad de pixeles a un centímetro, esta escala se determina para cada experimento. Posterior a esto, las series de tiempo obtenidas son analizadas matemática y físicamente.

Capítulo 4

Set de Experimentos

En este capítulo se expone y fundamenta el conjunto de experimentos realizados. La principal fuente de información para la modelación fue obtenida de los resultados de terreno de la campaña Villarrica - Verano 2009. Además se resumen las principales características de los parámetros medidos y analizados. Posteriormente se realiza un análisis del error que se comete en la obtención de las variables involucradas.

4.1. Campaña de Terreno - Villarrica, Verano 2009

La campaña de terreno del Proyecto FONDECYT N°1080617 se llevó a cabo durante los meses de enero, febrero y marzo del año 2009, que buscó abarcar casi en su totalidad la estación de verano del hemisferio sur. Durante este periodo el lago Villarrica presenta una estratificación térmica, y además, por estadísticas meteorológicas, es posible el desarrollo de *Puelches*, o vientos de dirección Este (Meruane & Niño, 2005).

La campaña de terreno permitió caracterizar dos variables importantes del estudio experimental que se expone en esta tesis: (1) El campo sinóptico de la zona lacustre en estudio. Para esto se instaló una estación meteorológica en el aeródromo de la comuna de Pucón, capturando a través de ésta la dirección y magnitud del viento, temperatura, radiación solar, presión atmosférica, humedad relativa y precipitación. Cada variable fue registrada cada 10 minutos. (2) Estructura térmica del lago Villarrica. Se instalaron cadenas de termistores en dos diferentes puntos del lago (ver Figura 4.1) a lo largo del fetch principal. Las cadenas están compuestas por 17 termistores HOBO, distribuidos a lo largo de los primeros 80 m de la columna de agua, considerando la estructura térmica del lago registrada en investigaciones previas (Meruane & Niño, 2005). Durante el mes de enero los sensores capturaron la temperatura cada 30 segundos, mientras que durante febrero y marzo los sensores capturaron la temperatura cada 60 segundos (Ulloa, 2009).

Tabla 4.1: Coordenadas de cadenas termistores: Campaña terreno - Villarrica 2009.

Puntos	Latitud [s]	Longitud [w]
CT1	39°15'19"	72°00'43"
CT2	39°15'19"	72°03'49"



Figura 4.1: Lago Villarrica: posición de cadenas de termistores CT1 y CT2 (Google Earth, 2010).

4.1.1. Datos de campo

Los resultados de campo muestran la presencia de una fuerte estratificación térmica durante el mes de febrero del año 2009 (Rozas *et al.*, 2009b). En las Figuras 4.2A y 4.2B se observa la dirección y velocidad del viento, respectivamente, mientras que en las Figuras 4.2C y 4.2D se observan las series de tiempo de la estructura térmica vertical del lago en las coordenadas de las cadenas 1 y 2, respectivamente. Las series de tiempo obtenidas de la cadena de termistores 1 (Figura 4.2C y 4.3C), ubicada en la costa Este del lago (Figura 4.1), presentan una constante actividad entre los 20 m a 25 m de profundidad, con un marcado gradiente de temperatura cercano a los 20 m de profundidad, el cual puede ser observado en las Figuras 4.8C y 4.9C. Sobre los 20 m se tiene un gradiente de temperatura que decrece fuertemente, llegando a ser casi nulo en los primeros 15 m de profundidad. Por otra parte, bajo los 20 m de profundidad el gradiente de temperatura decae fuertemente hasta hacerse nulo luego de los 25 m. Además, en la serie de tiempo de la Figura 4.2C, es posible observar un marcado ciclo diario de trenes de ondas en la zona de altos gradientes térmicos. La estructura térmica del lago Villarrica obtenida de la cadena de termistores 2 en el mes de febrero del 2009 (Figura 4.2D), ubicada aproximadamente en el centro geométrico del lago (Figura 4.1), muestra una estratificación térmica bien marcada, con una menor actividad de ondas internas en la zona de altos gradientes de temperatura. Por otra parte, la estructura térmica capturada por la cadena de termistores 2 en el mes de marzo del 2009 (Figura 4.3D) evidencia notables cambios en los gradientes de temperatura (Figura 4.9D), lo que puede estar atribuido a procesos de mezcla desarrollados en la columna de agua (Wüest & Lorke, 2003).

Utilizando esta información se obtuvieron las series de tiempo de la estructura de densidad de la columna de agua (Figuras 4.4C, 4.4D, 4.5C y 4.5D) en los dos puntos monitoreados. Con esta información se determinaron las frecuencias boyantes en función de la profundidad y el tiempo (Figuras 4.6C, 4.6D, 4.7C y 4.7D), a partir de las cuales se obtuvo la profundidad de la máxima frecuencia boyante en la columna de agua en función del tiempo para los dos puntos analizados. Utilizando esta información se estableció la profundidad de la termoclina en el tiempo. Rozas *et al.* (2009b) determinó que la profundidad de la termoclina era de 20 m aprox. En las Figuras 4.4 y 4.5 se observan la serie de tiempo de la estructura densimétrica del lago en el mes de febrero y marzo del 2009, respectivamente. Considerando este resultado se concluyó que la estratificación

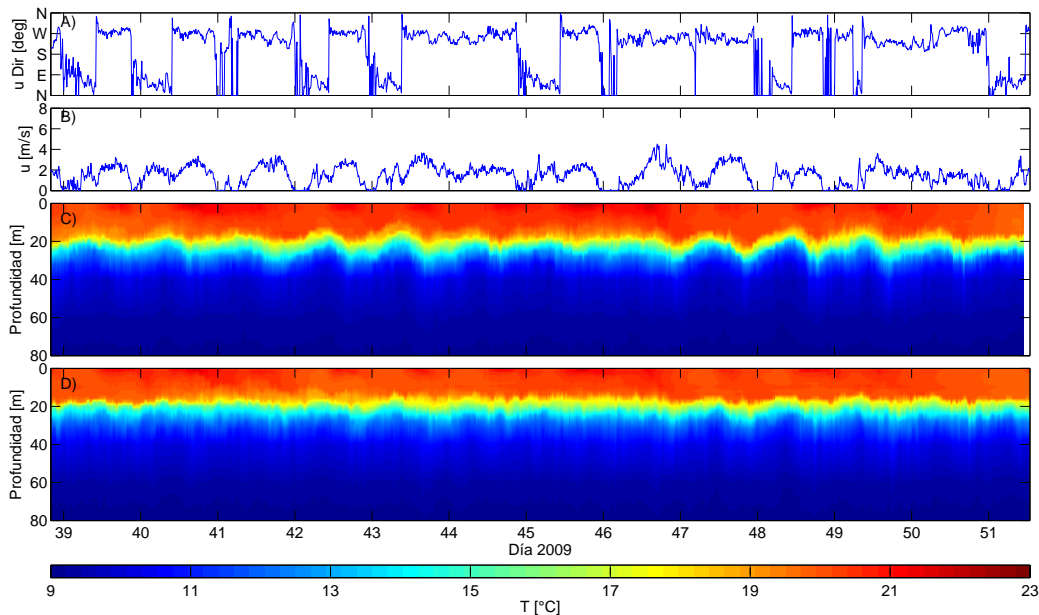


Figura 4.2: Series de tiempo de dirección y magnitud del viento en la zona del lago Villarrica, y series de tiempo de la estructura térmica de la columna de agua del lago Villarrica para dos diferentes puntos. Mes de febrero del 2009.(Rozas *et al.*, 2009b) .

termica desarrollada por el lago Villarrica puede ser bien aproximada por un modelo de dos capas. De esta forma se definió un epilimnio de 20 m de espesor y un hipolimnio de 100 m de espesor aprox, con una diferencia de densidad entre las capas de $\Delta\rho = 1,5kg/m^3$.

Analizando la serie de tiempo de la isoterma que pasa por los 20 m de profundidad se puede tener un registro del desplazamiento vertical desarrollado por la termoclina, en función del tiempo. Esta información permite analizar las amplitudes de ondas desarrolladas en el cuerpo lacustre. En las Figuras 4.8C, 4.8D, 4.9C y 4.9D se observan los desplazamientos verticales de la termoclina a lo largo de la ventana de tiempo estudiada, para los dos puntos de observación. Las amplitudes de la interfaz de densidad en el sector Este del lago son del orden de los 5 m.

Tabla 4.2: Datos de campo observados en lago Villarrica - Verano 2009.

L [km]	h_1 [m]	h_2 [m]	H_t [m]	U_{10} [m/s]	ρ_1 [kg/m ³]	ρ_2 [kg/m ³]	$\Delta\rho/\rho_2$ [%]	c_i [m/s]	R_o [m]	h_* [-]	W [-]	S [-]
23.05	20	100	120	$U_{10}(t)$	998.54	999.84	1.3	0.461	5040.6	0.17	$W(t)$	0.44

Con estos resultados es posible obtener los números adimensionales del lago Villarrica: Burger, Wedderburn y razón de aspecto, para el periodo en estudio. Esta información permite sustentar una mejor caracterización del estudio experimental presentado en esta investigación. En la tabla 4.2 se muestran las principales característica geométricas y números adimensionales de interes. El número de Weddeburn, W , debe ser obtenido a partir de la velocidad del viento actuando a 10 m sobre la superficie del agua, sin embargo, como esta magnitud varía en el tiempo, W también.

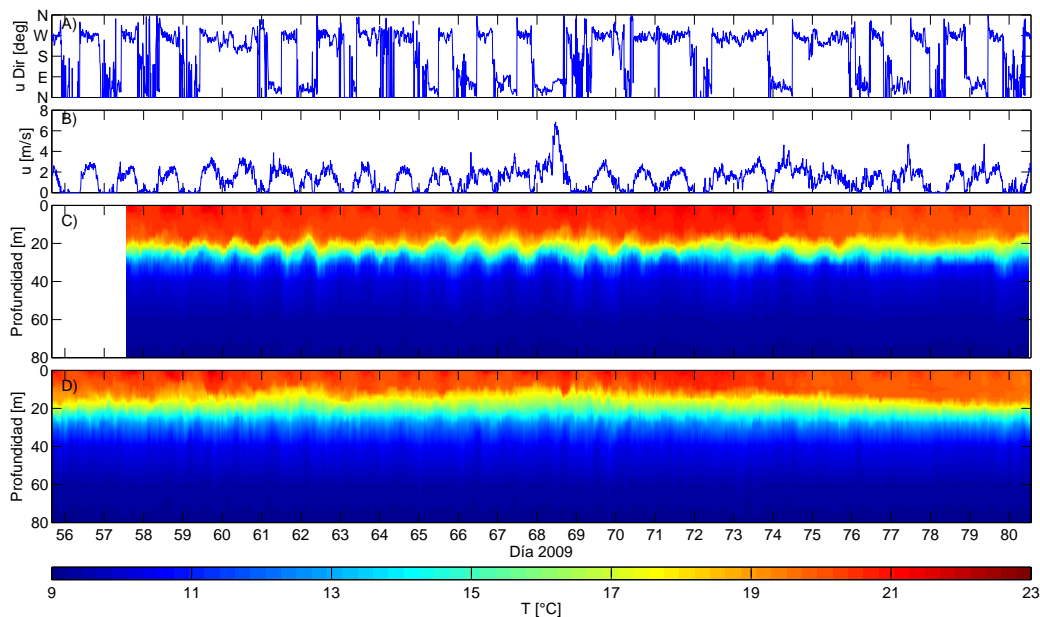


Figura 4.3: Series de tiempo de dirección y magnitud del viento en la zona del lago Villarrica, y series de tiempo de la estructura térmica de la columna de agua del lago Villarrica para dos diferentes puntos. Mes de marzo del 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

4.2. Modelación de experimentos

Es importante recordar que las experiencias están enfocadas a estudiar la respuesta de las ondas internas desarrolladas en la interfaz de densidad de un flujo estratificado afectado por la rotación del medio. Las principales variables a estudiar son la frecuencia y amplitudes de ondas dominantes en el sistema, las que según un análisis teórico de las ecuaciones de momento están caracterizadas esencialmente por tres parámetros adimensionales: número de Burger, de Wedderburn y razón de aspecto. Además se quiere estudiar respuestas no-lineales y no-hidrostáticas de las ondas internas, lo que puede ser logrado para ciertas amplitudes iniciales de la interfaz de densidad y razones de aspecto (Horn *et al.*, 2001). A través de la variación de estos tres parámetros adimensionales se obtienen diferentes posibles escenarios que puede llegar a tener un cuerpo lacustre como el lago Villarrica. Bajo este enfoque, los tres parámetros estarían modulados por la estructura térmica del lago, y la estratificación derivada.

Para un tamaño y una latitud fija, el número de Burger puede variar sólo debido a la celeridad de las ondas internas, la que está en función de la estructura de densidad y en consecuencia de las características térmicas del cuerpo de agua. Para el caso puntual de muchos lagos del centro sur de Chile, en especial el lago en estudio, la estructura térmica varía durante el año debido a las condiciones meteorológicas que interactúan con la superficie de agua. Siguiendo este enfoque se puede estudiar el ciclo anual de la termo-hidrodinámica del Villarrica, el cual es clasificado como un lago monomítico temperado (Campos, 1983) con una estratificación definida en dos principales capas durante los meses estivales (diciembre, enero y febrero), y una posterior degeneración de la estratificación durante los meses de otoño, hasta llegar a un cuerpo de agua bien mezclado, con características de temperatura y densidad homogéneas a lo largo de la columna de agua, durante los meses de invierno y parte de la primavera (Meruane & Niño, 2005), desde donde comienza

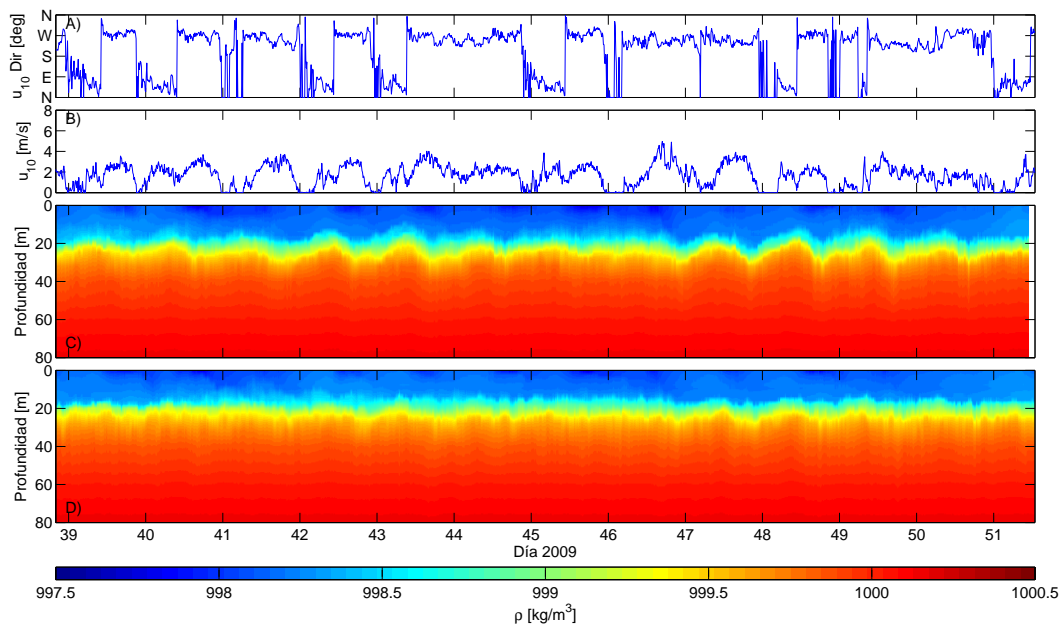


Figura 4.4: Series de tiempo de dirección y magnitud del viento en la zona del lago Villarrica, y series de tiempo de la estructura densimétrica de la columna de agua del lago Villarrica para dos diferentes puntos. Mes de febrero del 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

el gradual proceso de calentamiento de las aguas someras del lago. A partir de este escenario, y considerando la información obtenida en terreno se ha generado un rango de valores del número de Burger que podrían existir en campo, explorando posibles condiciones extremas como por ejemplo capas superficiales más cálidas y/o más profundas de lo normal. Siguiendo este esquema se eligieron números de S en el rango observado para el lago Villarrica, todos menores a la unidad, por lo que las ondas internas deben estar afectadas por Coriolis.

En el caso del número de Wedderburn, éste regula la amplitud inicial de las ondas de gran escala (Stocker & Imberger, 2003), y bajo las condiciones experimentales el parámetro adimensional está determinado por la estratificación del cuerpo de agua. Como se busca analizar la respuesta de las ondas internas posterior a la relajación de un estado forzado de la termoclina, bajo condiciones de upwelling o muy cercanas a ésta, es necesario tener números iniciales de Wedderburn bajos ($\approx 0,5$), que modelen estados forzados límites en el cuerpo de agua. Siguiendo este objetivo se eligieron dos valores de Wedderburn para la condición de amplitud inicial del seiche interno, $W_0 = 0,5$ y $W_0 = 1,0$. Números de un orden mayor que la unidad entregan muy poca actividad al campo de ondas internas, observándose amortiguamiento de ondas lineales (Horn *et al.*, 2001).

El tercer parámetro de importancia es la razón de aspecto, h_1/H_t . La variación de este parámetro tiene incidencia sobre fenómenos no-lineales y no-hidrostáticos de las ondas. La elección de este número se basó en los resultados de campo obtenidos en el lago Villarrica y en un análisis de la escala de tiempo que caracteriza la influencia de la aceleración advectiva en efectos no-lineales o *steepening* de una onda interna de gran escala (Horn *et al.*, 2001; Boegman *et al.*, 2005b; de la Fuente *et al.*, 2008). Horn definió el tiempo característico, T_s , derivado del análisis de la ecuación de onda no-lineal no-dispersiva.

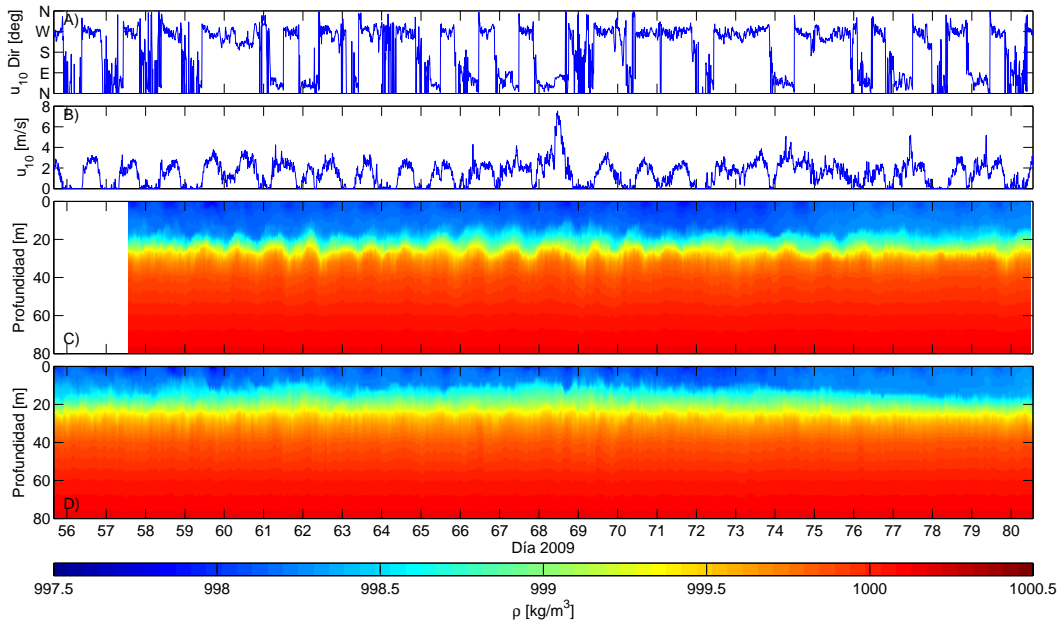


Figura 4.5: Series de tiempo de dirección y magnitud del viento en la zona del lago Villarrica, y series de tiempo de la estructura densimétrica de la columna de agua del lago Villarrica para dos diferentes puntos. Mes de marzo del 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

$$T_s = \frac{L}{\alpha \eta_0} \quad (4.1)$$

donde $\alpha = \frac{3}{2} c_i (h_1 - h_2) / h_1 h_2$, y η_0 es la amplitud inicial de la onda interna de gran escala. Este tiempo característico es comparado con el periodo de onda interna, $T_i = 2L / c_i$, luego, si $T_s / T_i < 1$ la onda interna puede ser influenciada por efectos no-lineales. La razón entre ambos tiempos puede ser expresada en términos del número de Wedderburn inicial, W_0 , y la razón de aspecto, $h_* = h_1 / H_T$:

$$\frac{T_s}{T_i} = \frac{2}{3} W_0 \frac{1 - h_*}{1 - 2h_*} \quad (4.2)$$

Considerando la condición para la existencia de comportamientos no-lineales se puede obtener una expresión para h_* en función de W_0 :

$$h_* < \frac{1}{2} \left(\frac{3 - 2W_0}{3 - W_0} \right) \quad (4.3)$$

Luego, como se tienen dos posibles W_0 , los valores elegidos para h_* quedan a uno u otro lado de la ecuación 4.3, y en consecuencia es un parámetro decisivo para tener o no efectos no-lineales en las ondas internas desarrolladas.

Para analizar el comportamiento de las ondas internas en función de los parámetros adimensionales antes descritos se realizaron tres diferentes set de experimentos, los cuales se resumen en la Tabla 4.3.

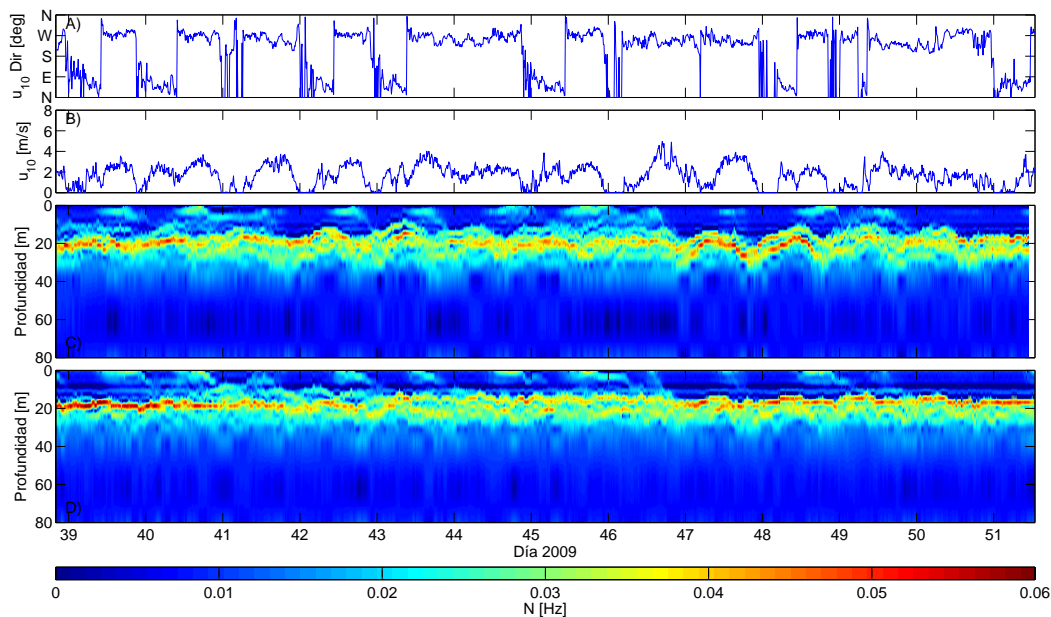


Figura 4.6: Series de tiempo de frecuencia boyante en la columna de agua del lago Villarrica. Mes de febrero del 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

4.2.1. Primer set de experimentos

El primer set estuvo compuesto por 14 experimentos, con los que se buscó estudiar la respuesta de la interfaz de densidad para una misma condición de razón de aspecto, considerando $h_* = h_1/H_t \propto 0,2$, y valores del número de Burger variables, $S \in (0,2 - 0,6) \cup \{\infty\}$. Para cada valor de S se consideraron dos situaciones para el número de Wedderburn, $W_0 = 0,5$ y $W_0 = 1,0$. Este conjunto experimentos tuvo como objetivo principal homologar los números adimensionales del lago Villarrica, considerando condiciones iniciales forzadas para la pycnoclina.

4.2.2. Segundo set de experimentos

El segundo set estuvo compuesto por 8 experimentos, los cuales tenían como objetivo principal estudiar la respuesta de la interfaz de densidad para diferentes razones de aspecto, considerando el rango $h_* \in (0,08 - 0,53)$. A través de este set de experimentos se analizó la influencia de la razón de aspecto frente al comportamiento no-lineal de las ondas internas desarrolladas en la pycnoclina.

4.2.3. Tercer set de experimentos

El tercer set estuvo compuesto por 4 experimentos, los cuales tenían como objetivo estudiar la respuesta de la interfaz de densidad para una misma condición de razón de aspecto, considerando $h_* = h_1/H_t \propto 0,5$, y valores del número del número de Burger variables, $S \in (0,2 - 0,8)$. Para cada valor de S se consideraron una único número de Wedderburn, $W_0 = 1,0$. A través de este set de experimentos se analizó la influencia de la rotación del medio frente a los procesos de degeneración y disipación de las ondas internas desarrolladas en la pycnoclina.

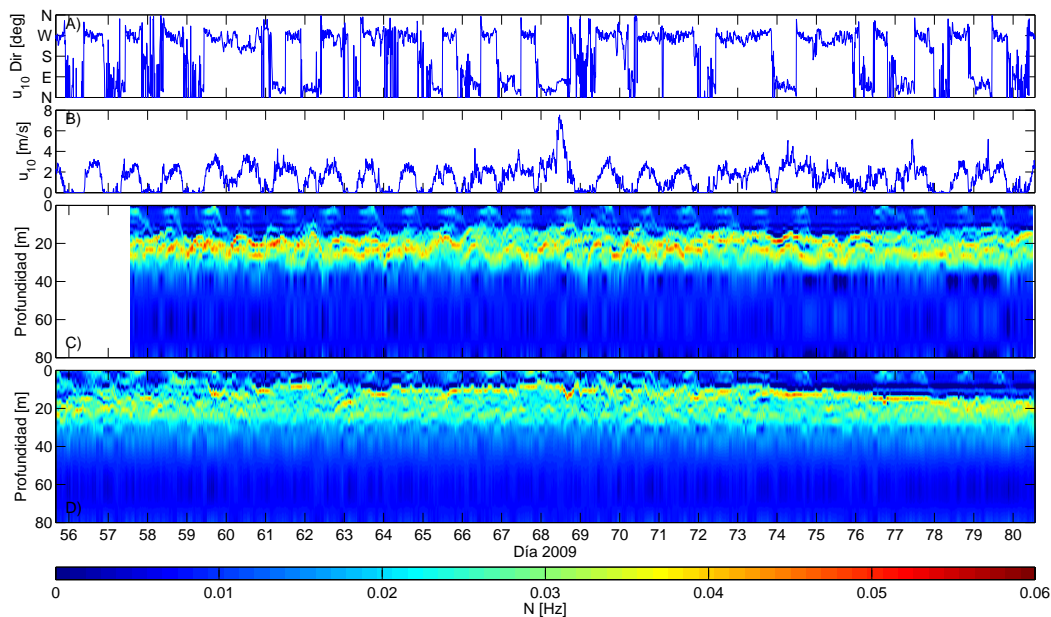


Figura 4.7: Series de tiempo de frecuencia boyante en la columna de agua del lago Villarrica. Mes de marzo del 2009 (Rozas *et al.*, 2009b).

En la Figura 4.10 se resume la relación entre los tres principales parámetros de los experimentos, S , W y h_* .

Los experimentos fueron llevados a cabo durante el mes de abril del año 2010, siguiendo el protocolo experimental discutido en el capítulo 3.

4.3. Análisis de error en el desarrollo experimental

En los experimentos realizados en este estudio hay magnitudes físicas que no se miden directamente, sino que son el resultado de operaciones matemáticas entre otras magnitudes que sí son medidas directamente. De hecho, los números adimensionales de interés, S , W_0 y h_* se obtienen a partir de una serie de otras magnitudes físicas, entre las cuales hay variables que se miden directa e indirectamente.

Cada magnitud medida está expuesta a diferentes posibles tipos de errores. Dependiendo del proceso de adquisición de datos estos pueden ser: (a) instrumentales, (b) de operación, (c) personal, (d) por montaje de equipos. Estos errores además pueden tener un origen aleatorio o sistemático. Para analizar los datos obtenidos a través de los experimentos se propone estudiar los errores desde un punto de vista aleatorio, considerando la precisión de los instrumentos utilizados en los procesos de medición. Para cuantificar el nivel de error y la precisión de las mediciones realizadas se utilizará la teoría de propagación de errores.

Para cada una de las variables medidas y utilizadas en los experimentos propuestos se realizó un análisis de su desviación estándar, con el objetivo de determinar la precisión de los parámetros adimensionales relevantes del problema. En la Tabla 7.1 de Anexos se presentan los resultados obtenidos. A continuación se entrega un resumen del procedimiento realizado para obtener dichos

Tabla 4.3: Set de experimentos propuestos en función de S , W_0 y h_*

Set N°	Exp N°	R [cm]	h_1 [cm]	h_2 [cm]	H_t [cm]	η_0 [cm]	ϵ [%]	c_i [cm/s]	Ω [rpm]	T_s/T_i [-]	f [hz]	h_* [-]	W [-]	S [-]
1 ^{er}	1	90.0	4.5	19.5	24.0	2.3	2.0	8.39	2.20	0.87	0.46	0.19	1	0.20
	2	90.0	5.0	19.0	24.0	5.0	2.0	8.73	2.20	0.45	0.46	0.21	0.5	0.21
	3	90.0	4.1	20.0	24.1	2.1	2.0	8.09	1.45	0.84	0.30	0.17	1.0	0.30
	4	90.0	4.5	19.5	24.0	4.5	2.0	8.39	1.45	0.43	0.30	0.19	0.5	0.31
	5	90.0	5.0	19.0	24.0	2.5	2.0	8.73	1.00	0.90	0.21	0.21	1.0	0.46
	6	90.0	5.5	18.5	24.0	5.5	2.0	9.03	1.00	0.47	0.21	0.23	0.5	0.48
	7	90.0	4.5	19.5	24.0	2.3	2.0	8.39	1.00	0.87	0.21	0.19	1.0	0.44
	8	90.0	4.5	19.5	24.0	4.5	2.0	8.39	1.00	0.43	0.21	0.19	0.5	0.44
	9	90.0	4.5	19.0	23.5	2.3	2.0	8.37	0.85	0.87	0.18	0.19	1.0	0.52
	10	90.0	5.0	19.0	24.0	5.0	2.0	8.73	0.85	0.45	0.18	0.21	0.5	0.54
	11	90.0	4.5	19.5	24.0	2.3	2.0	8.39	0.71	0.87	0.15	0.19	1.0	0.63
	12	90.0	4.0	20.0	24.0	4.0	2.0	8.01	0.71	0.42	0.15	0.17	0.5	0.60
	13	90.0	4.0	20.0	24.0	2.0	2.0	8.01	0.00	0.83	0.00	0.17	1.0	∞
	14	90.0	4.5	19.5	24.0	4.5	2.0	8.39	0.00	0.43	0.00	0.19	0.5	∞
2 ^{do}	15.1	90.0	2.5	21.5	24.0	2.5	2.0	6.56	1.00	0.38	0.21	0.10	0.5	0.35
	15.2	90.0	2.2	21.8	24.0	1.1	2.0	6.20	1.00	0.74	0.21	0.09	1.0	0.33
	16.1	90.0	6.5	17.5	24.0	6.5	2.0	9.55	1.00	0.53	0.21	0.27	0.5	0.51
	16.2	90.0	6.5	17.5	24.0	3.3	2.0	9.55	1.00	1.06	0.21	0.27	1.0	0.51
	17.1	90.0	8.0	16.0	24.0	8.0	2.0	10.13	1.00	0.67	0.21	0.33	0.5	0.54
	17.2	90.0	8.0	16.0	24.0	4.0	2.0	10.13	1.00	1.33	0.21	0.33	1.0	0.54
	18.1	90.0	7.5	7.5	15.0	7.5	2.0	8.49	1.00	∞	0.21	0.50	0.5	0.45
	18.2	90.0	8.0	7.0	15.0	4.0	2.0	8.47	1.00	∞	0.21	0.53	1.0	0.45
3 ^{er}	19	90.0	4.0	20.0	24.0	2.0	2.0	8.01	0.53	0.83	0.11	0.17	1.0	0.80
	20	90.0	4.0	19.0	23.0	4.0	2.0	7.97	0.53	0.42	0.11	0.17	1.0	0.80
	21	90.0	7.5	7.5	15.0	3.8	2.0	8.49	0.56	∞	0.12	0.50	1.0	0.80
	22	90.0	8.0	7.0	15.0	4.0	2.0	8.47	2.22	∞	0.47	0.53	1.0	0.20

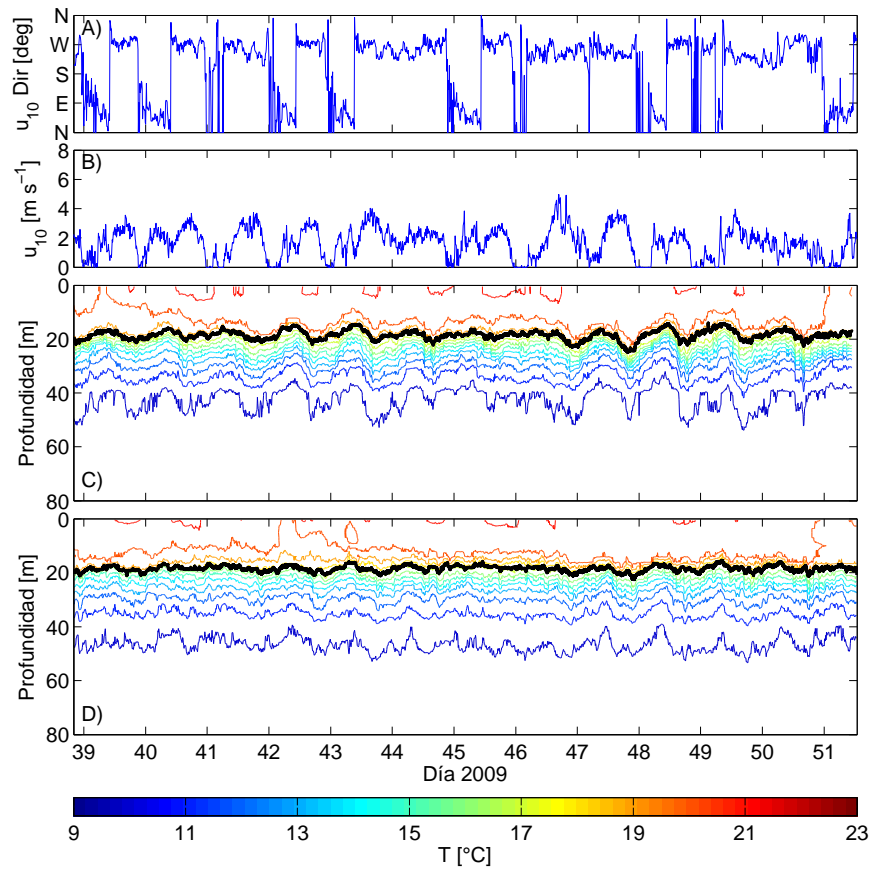


Figura 4.8: Series de tiempo de isotermas en la columna de agua del lago Villarrica. Mes de febrero del 2009 (Rozas *et al.*, 2009a).

valores, considerando la propagación del error que se genera debido a la interacción entre las diferentes variables.

Sea $f(\vec{x})$ una función con n variables, entonces el error asociado a la función f está determinado por la siguiente expresión:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2} \quad (4.4)$$

Se debe hacer una clasificación entre las variables que son medidas directa e indirectamente, en este último caso es importante identificar el tipo de dependencia con otros parámetros (lineal/no-lineal).

Para cada uno de los parámetros enunciados en la Tabla 4.4 se hizo un análisis de propagación de error, considerando la ecuación 4.4. Para las magnitudes medidas directamente se consideró la desviación estandar como la mitad de la menor escala de medición instrumental. En el caso de las magnitudes que no son medidas directamente existe dependencia con los valores que toman las respectivas variables involucradas, y en consecuencia sus desviaciones estándar tienen un carácter funcional. En la Tabla 4.5 se presentan las desviaciones estándar de cada uno de los parámetros involucrados en los experimentos.

Tabla 4.4: Características de las variables medidas experimentalmente

Parámetros	Dependencia	Tipo de medida
R	R	directa
h_1	h_1	directa
h_2	h_2	directa
H_t	$h_1 + h_2$	indirecta
η_0	η_0	directa
ρ_1	ρ_1	directa
ρ_2	ρ_2	directa
ϵ	$\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$	indirecta
c_i	$\sqrt{g\epsilon \frac{h_1 h_2}{H_t}}$	indirecta
T_{rev}	T_{rev}	directa
Ω	$60/T_{rev}$	indirecta
T_i	$4R/c_i$	indirecta
h_*	h_1/H_t	indirecta
W_0	$\frac{h_1}{2\eta_0}$	indirecta
T_s	$\frac{2}{3}T_i W_0 \frac{1-h_*}{1-2h_*}$	indirecta
f	$4\pi/T$	indirecta
S	$\frac{c_i}{fR}$	indirecta

Tabla 4.5: Expresiones de desviaciones estándar de los parámetros involucrados en los experimentos

Parámetro	Expresión
Radio	$\sigma_R = 5 \times 10^{-4}m$
Espesor capa superior	$\sigma_{h_1} = 5 \times 10^{-4}m$
Espesor capa inferior	$\sigma_{h_2} = 5 \times 10^{-4}m$
Desplazamiento Interfaz de densidad	$\sigma_{\eta_0} = 5 \times 10^{-4}m$
Profundidad total de agua	$\sigma_{h_T} = \sqrt{\sigma_{h_1}^2 + \sigma_{h_2}^2} = 7 \times 10^{-4}m$
Densidad capa superior	$\sigma_{\rho_1} = 5 \times 10^{-3}kg/m^3$
Densidad capa inferior	$\sigma_{\rho_2} = 5 \times 10^{-3}kg/m^3$
Diferencia de densidad relativa	$\sigma_{\epsilon} = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_2}\sigma_{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2^2}\sigma_{\rho_2}\right)^2}$
Periodo de revolución	$\sigma_{T_{rev}} = 5 \times 10^{-2}s$
Velocidad angular del medio	$\sigma_{\Omega} = \frac{60}{T_{rev}^2}\sigma_{T_{rev}}$
Celeridad de ondas internas	$\sigma_{c_i} = \frac{c_i}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{h_1}}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{h_2}}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{H_t}}{H_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\epsilon}}{\epsilon}\right)^2}$
Periodo de onda interna	$\sigma_{T_i} = \frac{4}{c_i}\sqrt{\sigma_R^2 + \left(\frac{R}{c_i}\sigma_{c_i}\right)^2}$
Periodo de empinamiento	$\sigma_{T_s} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(W_0 \frac{1-h_*}{1-2h_*}\sigma_{T_i}\right)^2 + \left(T_i \frac{1-h_*}{1-2h_*}\sigma_{W_0}\right)^2 + \left(T_i W_0 \frac{1}{(1-2h_*)^2}\sigma_{h_*}\right)^2}$
Número de Wedderburn	$\sigma_{W_0} = \frac{1}{2\eta_0}\sqrt{\sigma_{h_1}^2 + \left(\frac{h_1}{\eta_0}\sigma_{\eta_0}\right)^2}$
Número de Burger	$\sigma_S = \frac{1}{fR}\sqrt{\sigma_{c_i}^2 + \left(\frac{c_i}{f}\sigma_f\right)^2 + \left(\frac{c_i}{R}\sigma_R\right)^2}$
Razón de Aspecto	$\sigma_{h_*} = \frac{1}{H_t}\sqrt{\sigma_{h_1}^2 + \left(\frac{h_1}{H_t}\sigma_{H_t}\right)^2}$

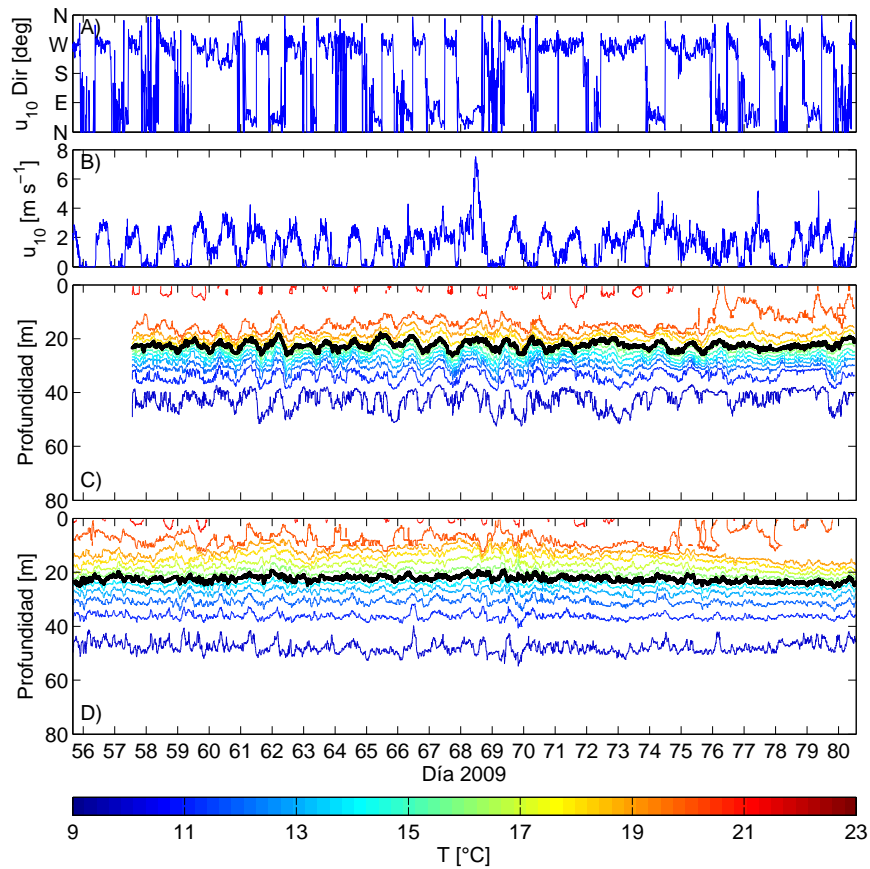


Figura 4.9: Series de tiempo de isotermas en la columna de agua del lago Villarrica. Mes de marzo del 2009 (Rozas *et al.*, 2009a).

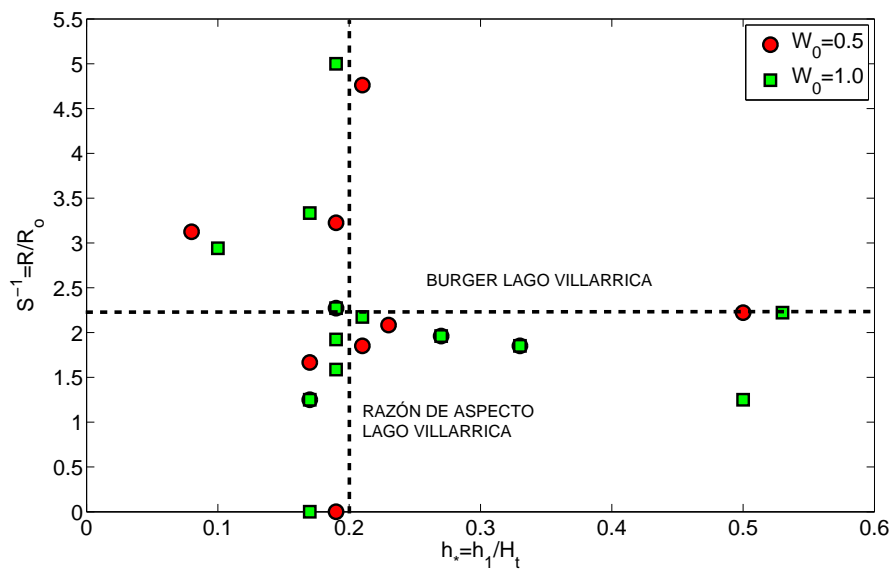


Figura 4.10: Distribución de experimentos en función de los números de Burger y razón des aspecto

Capítulo 5

Análisis de resultados experimentales

En este capítulo se presentan las series de tiempo del desplazamiento vertical de la interfaz de densidad de los tres set de experimentos propuestos. Además se desarrolla el análisis para la identificación de las ondas relevantes en el sistema en estudio, basándose en la caracterización de series de tiempo y análisis de Fourier.

5.1. Resultados experimentales

Las imágenes de la interfaz de densidad capturadas mediante el uso de cámaras se procesaron según la metodología de adquisición y transformación de datos descrita en el Capítulo 3. De esta forma se obtuvieron las series de tiempo del desplazamiento vertical de la interfaz de densidad en la zona de máxima amplitud inicial de la picnoclina. En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 se presentan los resultados de los diferentes set de experimentos.

5.2. Caracterización de las series de tiempo

Mediante la transformación de escala realizada, se obtienen series de tiempo del desplazamiento de la interfaz de densidad. Esta serie de tiempo puede ser reescrita en función de su valor medio y su fluctuación en el tiempo:

$$\eta_i = \bar{\eta}_i + \eta'_i \quad (5.1)$$

Como $\bar{\eta}_i$ es un parámetro invariante para cada experimento, el elemento a analizar de los datos adquiridos es finalmente la fluctuación en el tiempo de la termoclina, $\eta'_i(t)$, en dos diferentes puntos de la cubeta.

Un paso importante en el análisis de las series de tiempo en estudio es la clasificación de éstas en función de su estructura matemática, física y temporal.

Desde el punto de vista matemático, la variable $\eta_i(t_n)$ tiene una solución analítica considerando la solución de las ecuaciones de momento linealizadas, por lo que se podría considerar que esta variable es de origen determinístico. Sin embargo, bajo las condiciones experimentales propuestas, la información que se registra en $\eta_i(t_n)$ contiene una física y matemática más compleja, que involucra efectos no-lineales en su comportamiento, los cuales generan inestabilidades que desencadenan fenómenos de origen turbulento. Además, existe ruido instrumental, propio de los procesos de

adquisición de datos, que entregan efectos aleatorios a las mediciones. Bajo estas condiciones, la variable $\eta_i(t_n)$ contiene información turbulenta y de ruido que provoca la existencia de una componente aleatoria en la medición.

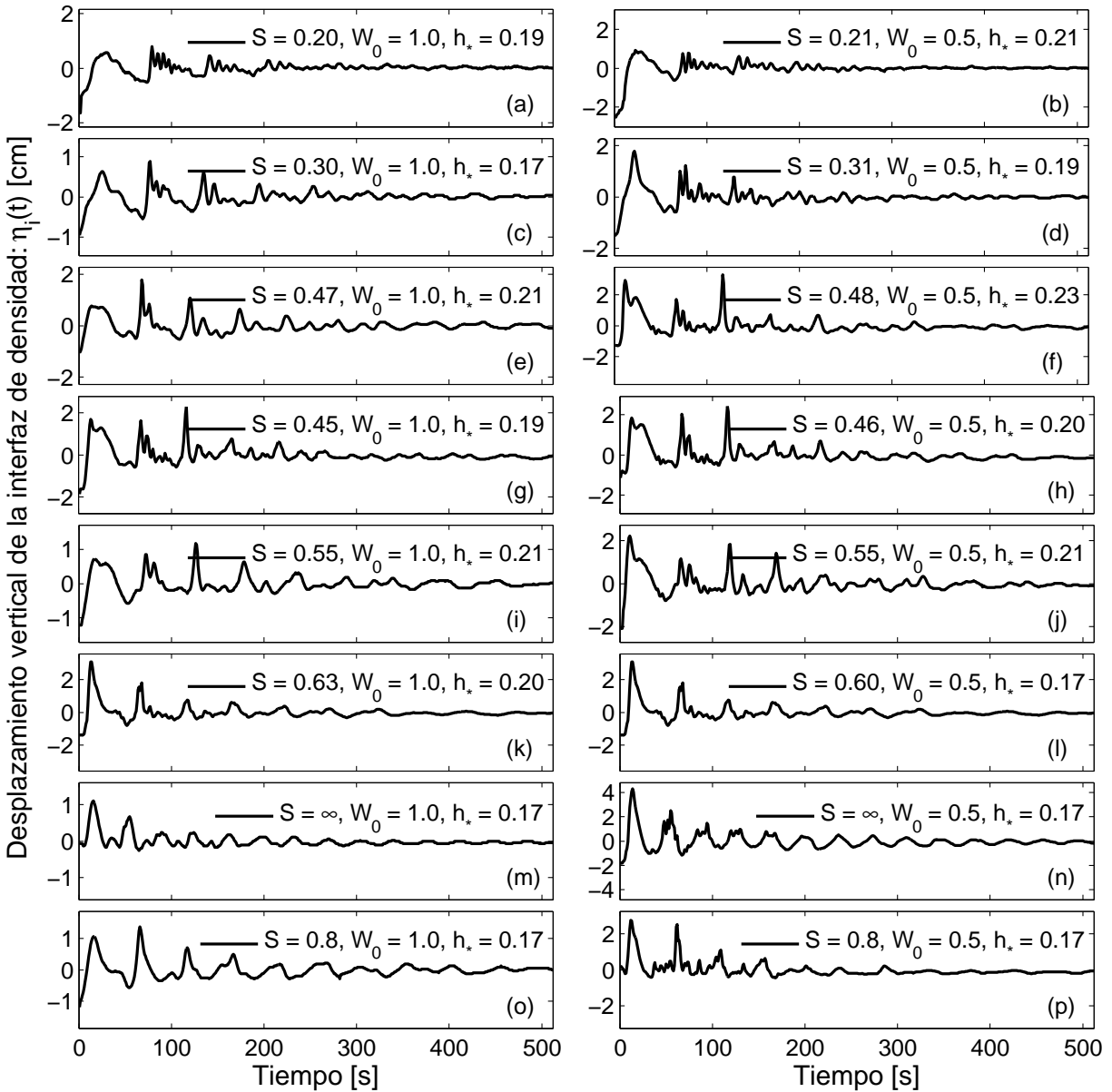


Figura 5.1: Primer set de experimentos: series de tiempo de set de experimentos para $h_* \propto 0,2$, S variable y W_0 tomando los valores de 0.5 y 1.0.

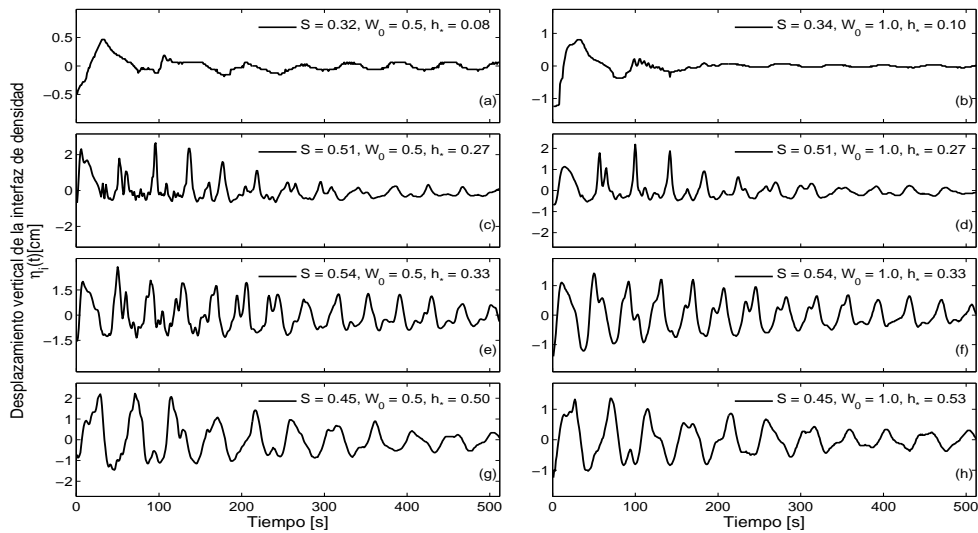


Figura 5.2: Segundo set de experimentos: series de tiempo de set de experimentos para h_* variable, $S \in (0,3 - 0,5)$ y W_0 tomando los valores de 0.5 y 1.0.

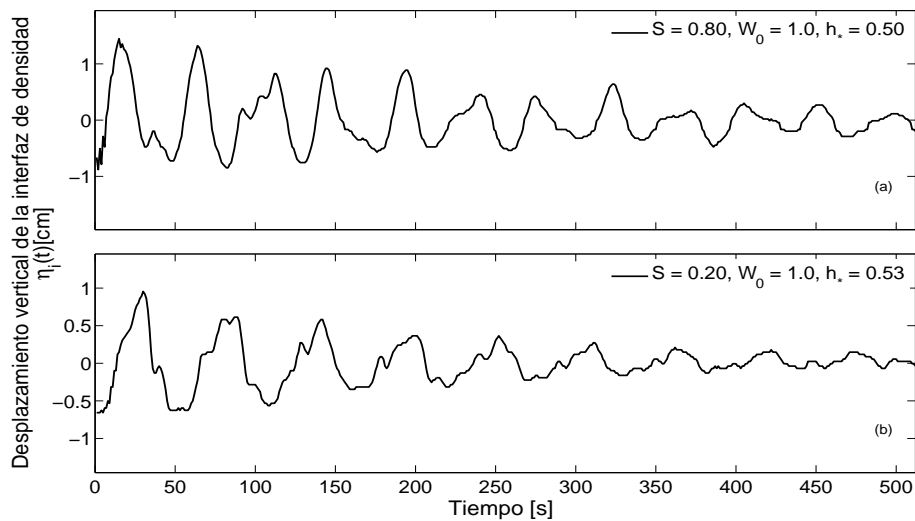


Figura 5.3: Tercer set de experimentos: series de tiempo de set de experimentos para $h_* \propto 0,5$, S variable y $W_0 = 1,0$.

Desde el punto de vista físico, la amplitud de la interfaz de densidad decae en función del tiempo, debido a los mecanismos de difusión viscosa existentes en el sistema (fricción con el manto del cilindro, superficie y base de la cubeta, y esfuerzos de corte en la interfaz de densidad). Estas condiciones generan que las series de tiempo tengan un carácter transitorio. Las condiciones de decaimiento dependen fuertemente de las condiciones iniciales y de los parámetros adimensionales que tiene cada experiencia.

Desde el punto de vista temporal, las series de tiempo están formadas por desplazamientos periódicos de la interfaz. Estos desplazamientos se deben al paso de ondas internas, las cuales tienen periodos constantes desde el punto de vista teórico. No obstante, la existencia de una fauna de ondas internas

de diferentes periodos provoca que éstas interactuen entre sí, dando origen a nuevas ondas, de diferentes amplitudes y periodos. Este proceso de degeneración de ondas de gran escala a ondas de menor escala provoca que se vayan excitando modos de diferentes periodos a medida que el tiempo transcurre. Entonces, se puede decir que existen ondas dominantes en el sistema que tienen una estructura periódica en el tiempo, pero que se pueden ver afectadas por efectos difusivos y dispersivos no-lineales, enriqueciendo el campo de ondas internas a lo largo de la ventana temporal experimental.

Considerando este análisis, las series de tiempo estudiadas tendrían un carácter aleatorio, transitorio en la amplitud, y cuasi-estacionario en el tiempo. Para verificar estas propiedades es necesario realizar pruebas estadísticas que corroboren la hipótesis.

5.2.1. Análisis de estado estacionario

Si los factores físicos básicos que generan el fenómeno son invariantes en el tiempo, entonces la estacionariedad de los datos resultantes generalmente puede ser aceptada sin mayor estudio. Sin embargo, en la práctica, los datos son adquiridos en circunstancias que no permiten suponer esta condición directamente (Bendat & Piersol, 2000). El estado estacionario de datos aleatorios puede ser testeada a través del análisis del estimador del valor cuadrático medio de una serie de tiempo:

$$\hat{\psi}_{\eta_i}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta_i^2(t) dt = \hat{\sigma}_{\eta_i}^2 + \hat{\mu}_{\eta_i}^2 \quad (5.2)$$

donde $\hat{\psi}_{\eta_i}$ corresponde al estimador del valor cuadrático medio, $\hat{\mu}_{\eta_i}$ al estimador del valor medio de η_i y $\hat{\sigma}_{\eta_i}$ al estimador de la varianza de η_i , respectivamente. Se propone el siguiente esquema para analizar la estacionariedad de las series de tiempo estudiadas (Bendat & Piersol, 2000):

1. Dividir la muestra de datos registradas en N intervalos de igual longitud, donde los datos de cada intervalo pueden ser considerados independientes.
2. Calcular el valor cuadrático medio, ψ_{η}^2 (o la media y la varianza por separados) para cada intervalo, y alinear los valores muestreados en una secuencia de tiempo, como la siguiente: $\bar{\eta}_{i1}^2, \bar{\eta}_{i2}^2, \bar{\eta}_{i3}^2, \dots, \bar{\eta}_{iN}^2$.
3. Probar la secuencia de valores cuadráticos medios, ψ_{η}^2 , para detectar la presencia de tendencias fundamentales u otras variaciones debido cambios en el muestreo.

Si la hipótesis de estacionariedad es verdadera, las variaciones en la secuencia de valores muestreados deben tener un carácter aleatorio, por lo que no debería existir una tendencia dominante en la secuencia para los valores de ψ_{η} .

Cada una de las series de tiempo fue sometida al mismo procedimiento para estudiar su estacionariedad. Se dividió de forma arbitraria cada serie en 32 diferentes intervalos, cada uno de éstos compuesto por 16 datos. Posteriormente se obtuvo la media y la varianza de cada uno de los intervalos, con lo que se obtuvo el valor cuadrático medio, ψ_{η_i} , de cada intervalo. Finalmente se graficó $\hat{\psi}_{\eta_i}$, $\hat{\mu}_{\eta_i}$ y $\hat{\sigma}_{\eta_i}$ en función del intervalo, para cada una de las series de tiempo.

Los resultados indican que el valor cuadrático medio decae en función del tiempo, al igual que la varianza. Esto es concordante con el estado transitorio que rige al fenómeno. Por otra parte, la media siempre se mantiene muy cercana a cero. Si bien los datos no presentan rigurosamente un

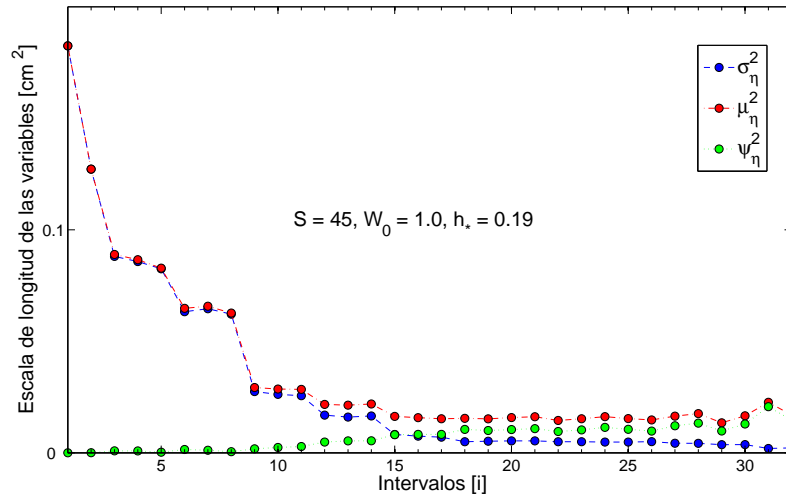


Figura 5.4: Gráfico de las variables estadísticas involucradas en el test de estacionariedad.

estado estacionario, es evidente que la tendencia sigue la estructura física de la variable estudiada, mostrando rangos de cambios pequeños, del orden del error experimental cometido en la medición de la posición de la interfaz de densidad. A través de este análisis se valida la hipótesis sobre el estado cuasi-estacionario de las series de tiempo. Los resultados gráficos se pueden observar en el apéndice IV: Análisis estadístico de las series de tiempo. La Figura 5.4 muestra un ejemplo de los datos obtenidos de este análisis.

5.2.2. Análisis de periodicidad

Las componentes periódicas en una serie de tiempo teórica son definidas como una función delta de Dirac, δ , en el espectro de los datos. En la práctica, las componentes periódicas aparecen en la forma de peaks agudos en el espacio de Fourier, a los cuales se les puede atribuir un cierto ancho de banda que contribuye con una componente aleatoria de espectro. Por lo tanto, es conveniente identificar la presencia de componentes periódicas para caracterizar de forma más rigurosa el ancho de banda atribuido a un peak espectral.

Las series de tiempo estudiadas muestran un comportamiento transitorio, que se debe a los forzantes restituyentes del sistema, como lo son la gravedad y los esfuerzos viscosos, estos factores impiden poder determinar directamente la periodicidad de sus componentes. Debido a esto, se propone un análisis de periodicidad a través del uso de la densidad espectral de los datos. Uno de los procedimientos más efectivos para la detección de componentes periódicas es la inspección visual de la densidad espectral de muestras aleatorias de los datos analizados, considerando diferentes tasas de muestreo de los datos (1 hz, 0.5 hz, 0.1 hz, etc.) y/o diferentes ventanas de datos (dividir en intervalos la serie, y estudiar la densidad espectral de los intervalos por separados). La función de densidad espectral está definida por la siguiente expresión

$$\hat{G}_{\eta_i \eta_i}(f) = \frac{1}{B_e T} \int_0^T \eta_i^2(f, B_e, t) dt = \frac{\hat{\psi}_{\eta_i}^2(f, B_e)}{B_e} \quad (5.3)$$

donde $\eta_i^2(f, B_e, t)$ es la parte de $\eta_i(t)$ que pasa a través de un filtro pasa-banda rectangular ideal con un ancho de banda B_e , centrado en la frecuencia f , y $\hat{\psi}_{\eta_i}^2(f, B_e)$ es la estimación del valor

cuadrático medio de $\eta_i^2(f, B_e, t)$.

Se propone el siguiente esquema para analizar la periodicidad de las componentes dominantes de las series de tiempo estudiadas:

1. Analizar la densidad espectral de las series para diferentes tasas de muestreos: 1 hz, 0.5 hz, 0.25 hz.
2. Analizar la densidad espectral de las series considerando diferentes ventanas de tiempo: datos del 1-256 seg; datos del 257-512 seg; datos 1-512 seg.

Tanto para el primer test como el segundo, la hipótesis de periodicidad se verifica si las frecuencias atribuidas a los peak de energías son invariantes. Si los peak de energía son muy cercanos entre ellos, con diferencias menores al $\pm 10\%$, se dirá que la series de datos son cuasi-periódicas (Garcia *et al.*, 2006).

Cada una de las series de tiempo de los experimentos realizados fue analizada a través del esquema planteado. La Figura 5.5 muestra un ejemplo de los datos obtenidos de este análisis, en donde se observan cuatro frecuencias con características cuasi-periódicas para peak de energías dominantes en la serie. El primer peak tiene un periodo de 51.3 seg, y presenta una frecuencia invariante para las ventanas de tiempo analizadas. Tanto el segundo como el tercer peak presentan pequeños cambios en las frecuencias entre los primeros 256 datos y los segundos 256 datos.

Para el primer test, se obtuvo que para diferentes tasas de muestreos los peak de energía dominantes tienen las mismas frecuencias. Por otra parte, el segundo test mostró que para diferentes ventanas de tiempo existen pequeños desfases de frecuencia entre la ondas dominantes. Sin embargo, las ondas dominantes en energía muestran mayoritariamente características periódicas. Los desfases de periodicidad observados se podrían explicar por cambios de la celeridad de onda debido a procesos de mezcla y en consecuencia cambios en el parámetro ϵ .

Los resultados obtenidos permiten verificar que las series de tiempo estudiadas tienen una estructura temporal cuasi-periódica en los modos de ondas fundamentales y dominantes con respecto a la energía.

Utilizando los resultados obtenidos de los análisis de estacionariedad y periodicidad, se puede considerar en el estudio de las series de tiempo el uso de la Transformada de Fourier para estudiar los modos propios de oscilación excitados en el sistema.

5.3. Campo de ondas internas: análisis de frecuencia

Para caracterizar el campo de ondas internas de cada experimento, se utilizó el espectro de densidad (psd) del desplazamiento de la interfaz. Esta herramienta permite identificar las frecuencias de los peak de energía obtenidos en el psd. Cada uno de los peak corresponde a un modo de oscilar de una onda interna, con un período y frecuencia determinado. Los resultados obtenidos de este criterio son comparados con las frecuencias teóricas derivadas de la solución del problema de valores propios para las ecuaciones de momento linealizadas (Antenucci & Imberger, 2001; Stocker & Imberger, 2003; Wake *et al.*, 2005). A través de este procedimiento se lleva a cabo una clasificación de las

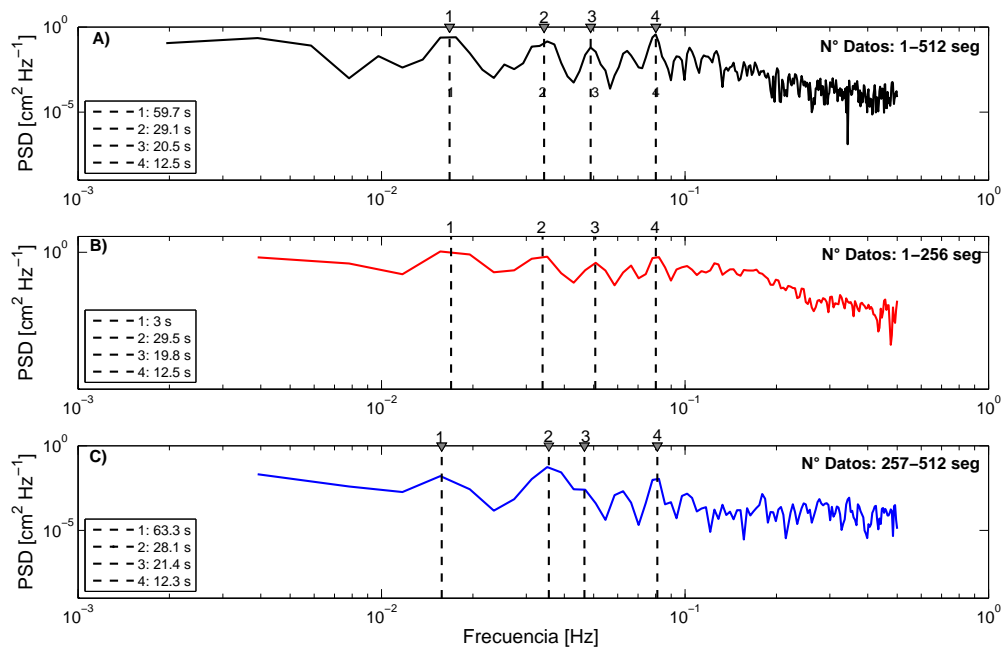


Figura 5.5: Test de periodicidad para series de tiempo con $S = 0,21$, $W_0 = 0,5$ y $h_1/H_t = 0,21$.

ondas internas dominantes en función de sus frecuencias experimentales y las frecuencias teóricas.

Luego de clasificar las ondas observadas en los espectros de densidad, se procede a descomponer el campo de ondas internas a través del uso de un filtro Pasa-Banda. Sin embargo, debido a la estructura del espectro de densidad, el proceso de identificación de las frecuencias de los modos dominantes trae consigo un problema de asignación de energía al modo específico. La dificultad de identificar con exactitud la frecuencia de una onda determinada, ha llevado a redefinir el concepto de una onda en el espacio de Fourier. Se propone definir *paquetes de ondas* con similar frecuencia entorno a una frecuencia dominante, con una energía que considera un cierto ancho de banda, en función de la dispersión observada en el espectro. De esta forma, cada modo puede ser caracterizado en función de un paquete de energía, obteniendo la serie de tiempo del modo en particular a través del uso de la antitransformada. En la Figura 5.6 se observa la serie de tiempo y el espectro de densidad de la interfaz de densidad para un $S = 0,45$, $W_0 = 0,5$ y $h_1/H_t = 0,19$. Además se caracteriza la energía de los modos considerando el concepto de *paquetes de frecuencias*.

5.3.1. Clasificación de ondas internas con criterio de frecuencia

Para cada experimento se obtuvo una clasificación del campo de ondas internas en función de las frecuencias atribuidas a los peak del psd de η_i . La identificación de ondas consideró: periodos de los modos de mayor energía en las series de tiempo, número de Burger, componente azimutal y radial de modos observados, frecuencia adimensional teórica de modos dominantes, frecuencias experimentales adimensionales de modos dominantes, frecuencia sub o súper inercial, tipo de onda y dirección de propagación de onda. En función de esta clasificación se obtuvo para cada experimento la existencia de ondas tipo Kelvin y Poincaré, prevaleciendo normalmente los modos fundamentales. Los resultados se pueden observar en el apéndice A2: Clasificación de ondas internas con criterio

de frecuencia. La Tabla 5.1 muestra la clasificación de ondas según las características discutidas, para $S = 0,45$, $W_0 = 0,5$ y $h_1/H_t = 0,19$.

Tabla 5.1: Clasificación de ondas internas: Experimento N°7, $W_0 = 0,5$ y $h_1/H_t = 0,19$.

Run N°	Ti [s]	S [-]	Modo (azimutal, radial)	σ_{teo} [-]	σ_{exp} [-]	Frecuencia de onda	Tipo de onda	Dirección de propagación
9	46.5	0,45	+(1,1)	0.58	0.65	Sub-inercial	Kelvin	Anticiclónica
	25.6		+(2,1)	1.12	1.17	Súper-inercial	Kelvin	Anticiclónica
	20.6		-(1,1)	-1.43	1,46	Súper-inercial	Poincaré	Ciclonica
	16.7		-(2,1)	-1.88	1.80	Súper-inercial	Poincaré	Ciclonica
	14.2		+(4,1)	2,14	2.11	Súper-inercial	Kelvin	Anticiclónica
	12.5		-(3,1)	-2,34	2.40	Súper-inercial	Poincaré	Ciclonica

5.3.2. Descomposición del campo de ondas internas

Cada uno de los modos identificados a través del espectro de densidad tiene una determinada estructura espacial, temporal y energética. Utilizando un filtro Pasa-Banda se caracterizó el nivel de energía de los modos dominantes. En torno de cada peak de energía se determinó una banda de frecuencia que representa a un paquete de posibles ondas de similar periodo. Estas bandas se eligieron considerando el error cuadrático medio cometido en la elección de la frecuencia peak dominante.

El error cuadrático medio de la función del espectro de densidad (ecuación 5.3) puede ser estimado por la siguiente expresión (Bendat & Piersol, 2000):

$$\epsilon^2[\hat{G}_{\eta_i\eta_i}(f)] \approx \frac{1}{B_e T} + \frac{1}{9} \left(\frac{B_e}{B_r} \right)^4 \quad (5.4)$$

donde B_r corresponde al punto medio de la banda de frecuencia buscada. Para determinar la buena banda se puede minimizar el error cuadrático medio tomando la derivada del error con respecto a B_e , luego, igualando a cero la función resultante se obtiene la siguiente expresión de la banda:

$$B_e = c \left(\frac{B_r^4}{T} \right)^{1/5} \quad (5.5)$$

donde $c = 1,046$ (Bendat & Piersol, 2000). A través de este resultado se determinaron las bandas de frecuencias para determinar la cantidad de energía asociada a los modos dominantes de cada experimento.

Con el espectro de densidad filtrado, para cada modo, se procedió a obtener la serie de tiempo de desplazamientos de la interfaz para la onda asociada, a través del uso de la antitransformada de Fourier.

Para el caso del experimento N°7, mostrado en la Tabla 5.1, se identificaron seis ondas principales a través del espectro de energía. Siguiendo la metodología descrita se obtuvieron las series tiempo de los cuatro modos dominantes observados. La Figura 5.7 muestra los cuatro modos dominantes en la serie de tiempo.

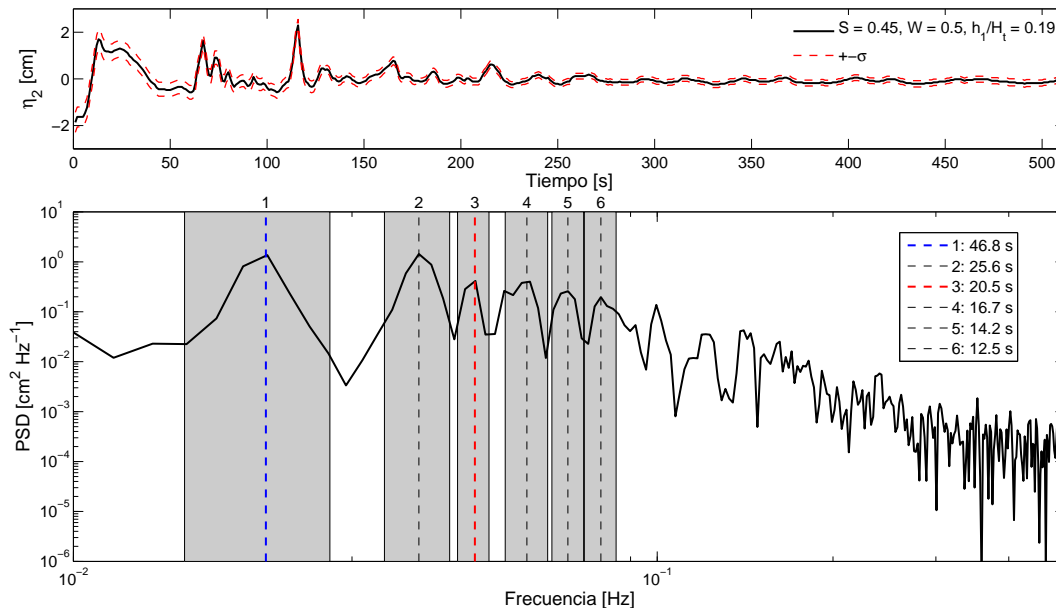


Figura 5.6: Series de tiempo y espectro de densidad del experimento N°7. La figura superior muestra la serie de tiempo junto a la desviación estándar de la serie, obtenida cada 16 seg. En la Figura inferior se observa el espectro de densidad de la serie de tiempo, desde donde se obtuvo las frecuencias de los peak de energía. Además se caracterizan las bandas de frecuencia atribuidas a un paquete de ondas entorno a un modo dominante.

5.3.3. Ondas no-lineales

Para poder identificar la estructura no-lineal desarrollada por ondas tipo Solitones, se propone extraer las componentes modales atribuidas a ondas Poincaré. Utilizando un filtro Pasa-Banda se puede reconstituir una serie de tiempo que contenga principalmente ondas Kelvin, las cuales, dada su característica de propagación, pueden degenerar en ondas tipo Solitones. En la Figura 5.8 se puede observar la serie de tiempo de la parte no-lineal del Experimento N°7. En este caso se anularon las ondas Poincaré fundamental, Poincaré modo 2 y Poincaré modo 3.

En la Figura 5.8C se puede observar que tras el primer período de la onda Kelvin fundamental comienza un proceso de degeneración y dispersión de la onda, mostrando un frente vertical al inicio, seguido de cuatro sub ondas de menor amplitud y menor longitud de onda ($T \in (50, 100)$ seg.). Esta estructura es característica de ondas tipo Solitones (Horn *et al.*, 2001; Boegman *et al.* 2005; de la Fuente *et al.*, 2008). Este proceso se repite para el tercer período, sin embargo, se observa un cambio en la estructura de la onda, mostrando un frente más suave al inicio, pero vertical, seguido de dos ondas de mayor longitud de onda ($T \in (100, 150)$ seg.). Este cambio puede deberse a efectos de difusión viscosa que actúa como sumidero de energía. En los siguientes periodos se observa un mayor amortiguamiento de la amplitud y una pérdida de la estructura vertical de la onda.

En la Figura 5.9 se muestra un acercamiento de la serie de tiempo de la interfaz de densidad para el intervalo de tiempo $T \in (60, 105)$ seg, en el que se observa el desarrollo del primer tren de ondas tipo solitaria del experimento N°7. Es posible identificar la presencia de 6 solitones, en donde el primero de ellos presenta un marcado frente vertical, con una amplitud cercana a los 2 cm. Al

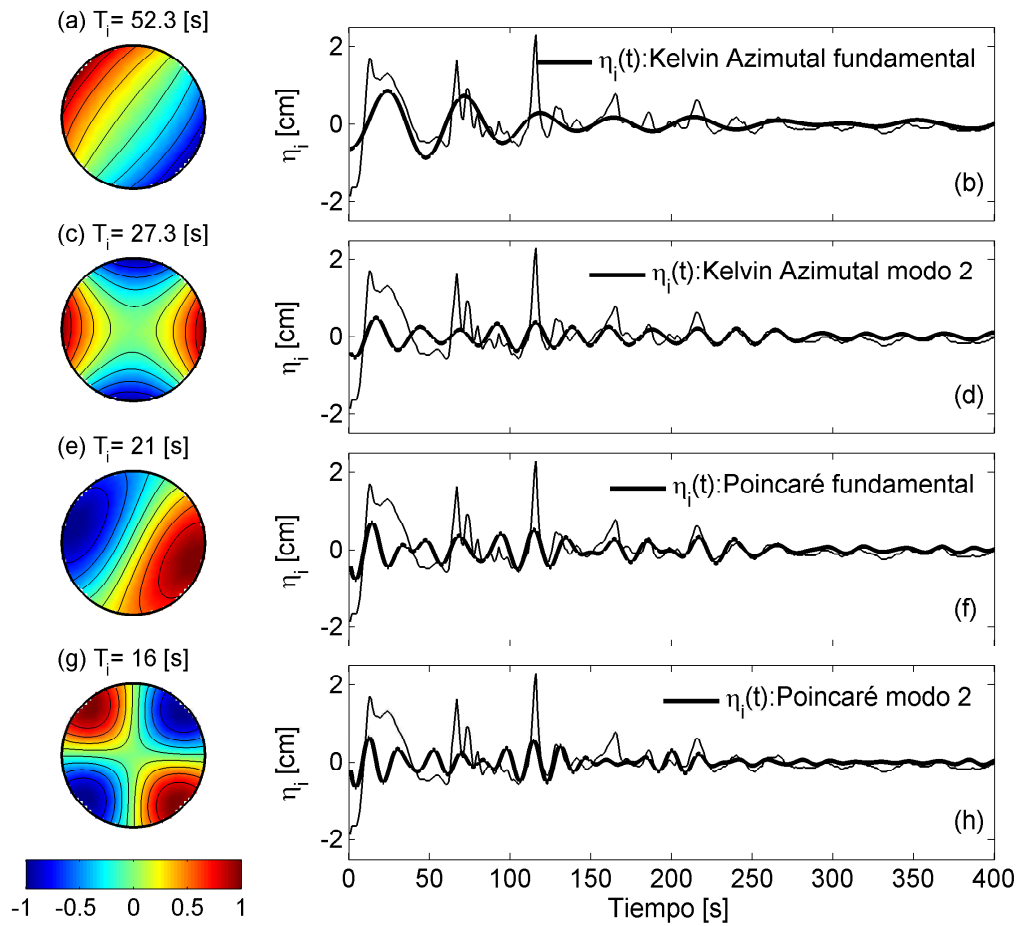


Figura 5.7: Descomposición de modos dominantes en la serie de tiempo de experimento N°7. En todos los gráficos la línea negra corresponde a serie de tiempo del desplazamiento de la interfaz de densidad, mientras que la segunda línea de color corresponde a la serie de tiempo reconstituida a través del uso de un filtro Pasa-Banda de un modo específico, relacionado a un tipo de onda. Figuras (a) y (b) modo fundamental azimutal de onda Kelvin. Figuras (c) y (d) modo azimutal 2 de onda Kelvin. Figuras (e) y (f) modo fundamental de una onda Poincaré. Figuras (g) y (h) modo azimutal 2 de una onda Poincaré.

analizar el espectro de densidad de este intervalo de tiempo se puede determinar la frecuencia media de los solitones. De la Figura 5.9B se identifica el peak de energía de menor frecuencia, con un periodo de $T = 6,6$ seg. Además de este peak dominante de energía, se observan periodos de mayores frecuencias, atribuidas a peak de menor energía. Estos periodos son del orden de $T = 2,5$ seg., y pertenecen a las ondas de mayor frecuencia observables en el experimento (debido al criterio de Nyquist). De hecho, la frecuencia boyante experimental tiene un período del orden de $T_N = 2,02$ seg., la que fue estimada como $T_N \approx 2\pi(\sqrt{-g\Delta\rho/\rho_2\Delta z})^{-1}$, considerando $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = 20\text{kg}/\text{m}^3$ y $\Delta z = 0,01\text{m}$.

En la Tabla 5.2 se observa el resumen de las características observadas de la onda tipo Soliton-Kelvin. $T_{sk\text{teo}}$ corresponde al tiempo de empujamiento teórico, $T_{sk\text{exp}}$ es el tiempo de empujamiento observado experimentalmente, $T_{isk\text{exp}}$ corresponde al periodo de la onda Soliton-Kelvin, a_{sk0} es la amplitud inicial de la onda observada y λ_{exp0} corresponde a la longitud del primer periodo observado.

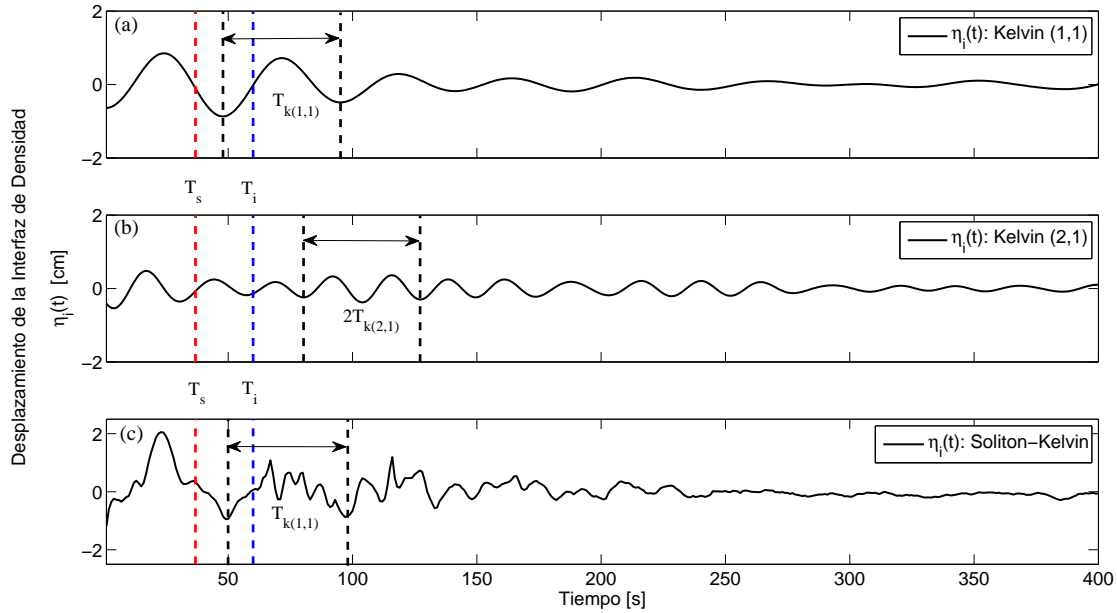


Figura 5.8: Series de tiempo de onda Kelvin dominantes del serie de tiempo filtrada del experimento N°7. (a) Modo fundamental azimutal de onda Kelvin. (b) Modo azimutal 2 de onda Kelvin. (c) Estructura no-lineal azimutal de onda Kelvin. En todas las Figuras se muestra el tiempo de empinamiento de la onda a través de una línea roja segmentada, $T_s = 36,8s$, y el tiempo inercial a través de una línea azul segmentada (tiempo que demora la cubeta en dar una revolución), $T_i = 60s$. Además se observa el periodo natural de las ondas, $T_{k(1,1)}$, $T_{k(2,1)}$ y $T_{sk} \approx T_{k(1,1)}$. Este último periodo es similar al de la onda Kelvin fundamental.

Tabla 5.2: Resumen de característica físicas y temporales de la estructura Solinton-Kelvin observada en el Experimento N°7.

Run N°	Tipo de Onda	Dirección de Propagación	$T_{sk_{teo}}$ [s]	$T_{sk_{exp}}$ [s]	$\Delta T_{sk}/T_{sk_{teo}}$ [%]	$T_{is_{exp}}$ [s]	a_{sk0} [cm]	c_{isk} [cm/s]	λ_{exp0} [cm]
7	Soliton-Kelvin	Ciclónica	36.8	34.2	7.0	48.7	2.4	8.5	56.4

El modelo teórico eKdV, o KdV extendido, que caracteriza la estructura espacial de ondas no-lineales, tipo solitones unidireccionales, considera que la escala de longitud de onda de un Soliton, λ , depende de la amplitud inicial de la onda, a_{s0} , la escala de efectos no-lineales, $\alpha \propto a_{s0}/H$, y una escala de efectos de dispersión no-hidroestática, $\beta \propto (H/L)^2$ (Helfrich & Malville, 2006):

$$\lambda^2 = K_s \frac{\beta}{a_{s0}(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 a_{s0})} \quad (5.6)$$

Esta expresión no está involucrando efectos de rotación en el sistema, sin embargo, considerando que las ondas tipo solitones observadas experimentalmente se desarrollan a través de ondas Kelvin, las cuales se propagan azimutalmente, este resultado puede ser utilizado para tener un orden de magnitud teórico. Para estudiar el efecto de la rotación sobre la escala de longitud, λ , de las ondas tipo solitones observadas, se determinó la variación de la constante, K_s , de la ecuación 5.6. Para el caso de una onda unidirección, no afectada por la rotación terrestre, $K_{s \rightarrow \infty} = 12$.

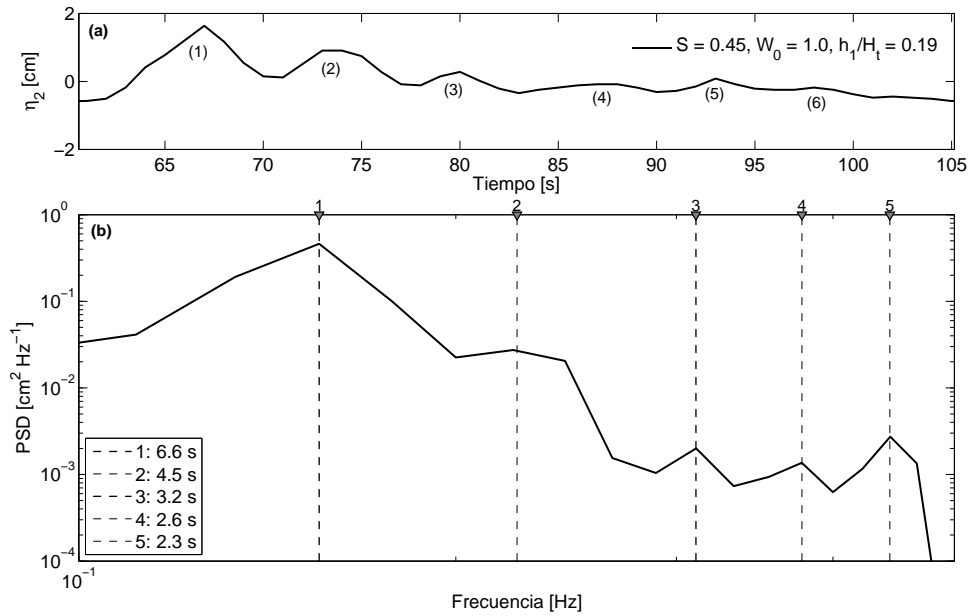


Figura 5.9: Series de tiempo de la primera onda tipo Soliton observada en la serie de tiempo del experimento N°7. El gráfico superior muestra el desplazamiento de la interfaz de densidad debido al paso de 6 solitones, a lo largo 45 seg. En el gráfico inferior se observa el espectro de densidad de la onda tipo soliton. Se observa que el periodo dominante de estas sub-ondas es de 6.6 seg.

Escalando la longitud de onda del Soliton, λ , por la altura h_1 , y reemplazando las expresiones de α_1 , α_2 y β se obtiene una función adimensional que tiene como pendiente la constante K_s . Esta ecuación está determinada por la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\lambda}{h_1}\right)^2 = K'_s (1 - h_*)^2 \left(a_{s*} (1 - 2h_*) + \frac{a_{s*}^2}{2} \left(\frac{1 - h_*}{h_*}\right) \right)^{-1} \quad (5.7)$$

donde $K'_s = K_s/9$, y $a_{s*} = a_{s0}/H_t$. Definiendo la expresión que acompaña a la constante K'_s , en la ecuación anterior, como la función $F(h_*, a_{s*})$, entonces K'_s la podemos escribir de la siguiente forma:

$$K'_s = \left(\frac{\lambda}{h_1}\right)^2 F(h_*, a_{s*}) \quad (5.8)$$

Experimentalmente es posible obtener los valores de λ y a_{s0} . En el caso de la longitud de onda del primer soliton observado en las series de tiempo, ésta se estima multiplicando el intervalo de tiempo, ΔT_{s0} que comprende a la onda por la celeridad del frente, c_{is} , es decir: $\lambda_0 \approx c_{is} \Delta T_{s0}$. Por otra parte, es posible estimar la amplitud inicial, a_{s0} , desarrollada por el primer Soliton, ajustando de una curva que caracteriza el decaimiento de la amplitud máxima de la interfaz de densidad observado en el tiempo. En este caso se ajustó una curva tipo exponencial: $a_{s0} = a_0 \exp(-\gamma_s t)$, la cual fue evaluada en el tiempo teórico estimado para el empinamiento de la onda, T_s . El parámetro γ_s es una escala de tiempo de decaimiento para la onda tipo soliton.

Si bien, en estas expresiones no se encuentra el número de Burger, S , es posible observar que K'_s cambia en función de éste. La Figura 5.10a muestra cómo varía K'_s en función S . Además, se ha

obtenido experimental que h_* podría influir en la longitud de onda del solitón, La Figura 5.10b muestra la variación de K'_s en función de h_* , para un rango de números de Burger, $S \in (0.44, 0.54)$.

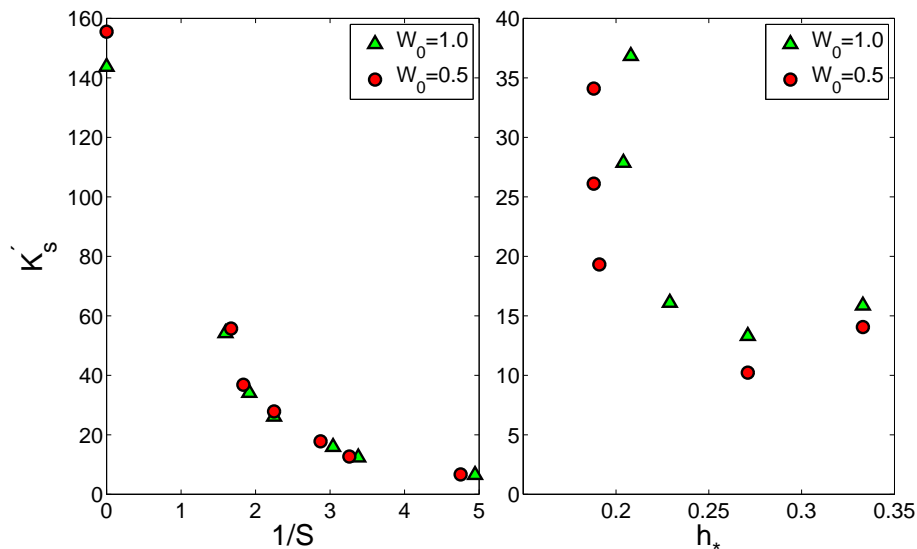


Figura 5.10: (a): Resultado de K'_s en función de S . Los resultados fueron obtenidos para los experimentos del 1-4, 7-8, 11-12 y 19-20. Cada uno de los puntos está asociado a un número de Wedderburn, en este caso, los puntos verdes corresponden a $W_0 = 1,0$ y los puntos rojos corresponden a $W_0 = 0,5$. (b): Resultados de K'_s en función de h_* , para $S \in (0.44, 0.54)$.

La Figura 5.11 muestra el efecto del incremento de la razón de aspecto, h_* , sobre la no-linealidad de las ondas desarrolladas en la interfaz de densidad a través del tiempo. A medida que aumenta h_* el número de solitones decae y el empinamiento de la onda principal comienza a ser menor, además es posible observar la formación de ondas tipo solitones para $h_* < 0,5$. Para la situación límite, $h_* = 0,5$, no es posible distinguir la formación de frentes verticales. Todos los experimentos mostrados en la Figura 5.11 tienen número de Wedderburn, $W_0 = 0,5$ (condición de upwelling). Si bien, los experimentos tienen diferentes números de Burger, es posible notar que para S similares, como por ejemplo los experimentos 5.11d y 5.11h, 5.11e y 5.11f, la disipación de energía se lleva más rápida para el caso de h_* , en donde el número de solitones es comparativamente mayor. En esta situación, h_* sería un factor importante en el mecanismo de transferencia de energía de ondas de gran escala, tal como la Kelvin fundamental, a ondas de mayor frecuencia, como los solitones. La degeneración de la onda fundamental estaría dominada por los efectos dispersivos gatillados por el empinamiento de la onda y por aceleraciones verticales no despreciables, en situaciones en que el proceso de elevación de la interfaz de densidad se lleva a cabo de forma rápida. Horn *et al.* (2001) observó resultados similares en experimentos llevados a cabo en un canal unidireccional, en donde se variaba la razón de aspecto h_1/H_t , y la condición inicial para el número de Wedderburn. La diferencia importante entre ambos resultados es la variación de amplitudes, lo cual está caracterizado por el número de Wedderburn, y además el efecto de la rotación. Por otra parte, se observa que el tiempo de empinamiento teórico, T_s , se correlaciona relativamente bien con el observado. En la Figura 5.11 se muestra este tiempo en línea roja segmentada.

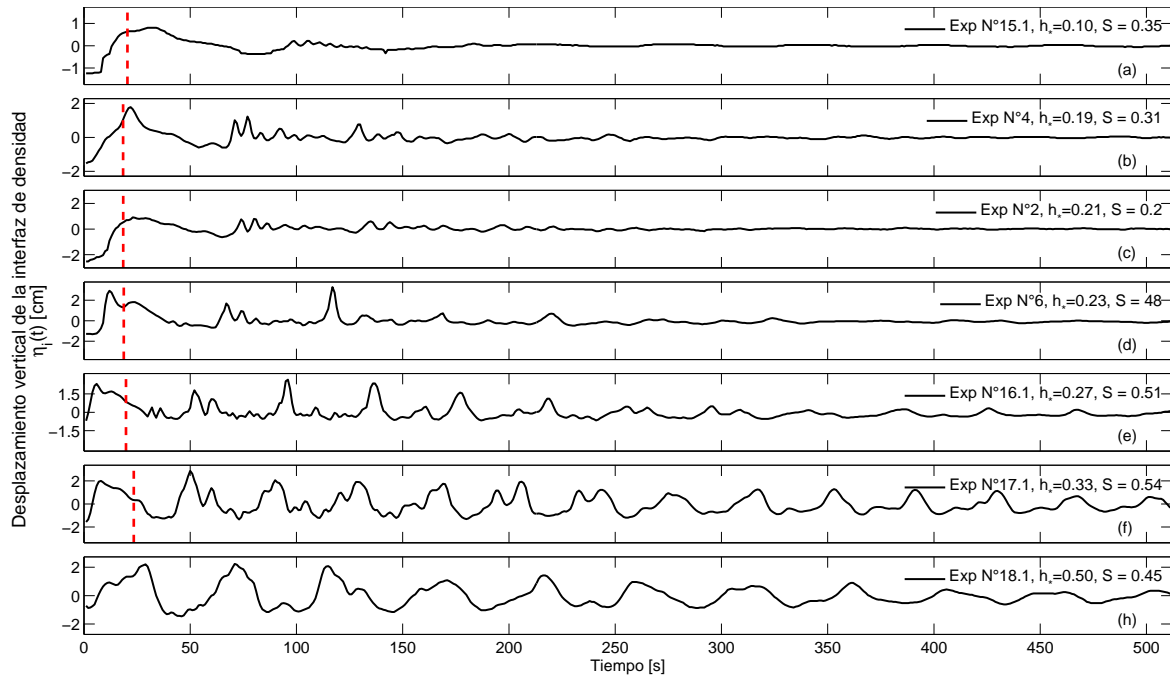


Figura 5.11: La no-linealidad de las ondas se incrementa a medida que la razón de aspecto h_* decrece. Como la razón de aspecto decrece, el tiempo de empinamiento de la onda de gran escala es más rápido, y el número de solitones emergentes incrementa. Desde la Figura (a) hasta la (f) se observa la presencia de ondas tipo solitones, sin embargo, para el caso límite de $h_* = 0,5$ no es posible observar la formación de frentes de ondas no-lineales.

5.3.4. Interacción Kelvin-Poincaré

Los modos con mayor energía observada en el espectro de densidad son atribuidos a las ondas Kelvin y Poincaré fundamental. De estas dos tipos de ondas aparecerían modos de mayor frecuencia, tales como Kelvin (2,1) y Poincaré (2,1). Para estudiar su importancia en la estructura del desplazamiento de la interfaz de densidad en el tiempo se analizó la interacción entre ambas ondas, considerando las series de tiempo obtenidas del análisis espectral y el desacople de los modos mediante el uso de filtro Pasa-Banda. Llevando a cabo una superposición lineal de los modos se obtuvo una nueva serie de tiempo para $\eta_{i(kp)}(t)$, la que fue contrastada con la serie original, $\eta_i(t)$.

En la Figura 5.12 se observa la serie de tiempo obtenida para la interfaz de densidad considerando el aporte de las ondas Kelvin y Poincaré fundamental. Estas dos ondas son capaces de caracterizar los rasgos generales del comportamiento lineal de la interfaz de densidad. Además permite entender ciertos peak observados en la interfaz de densidad, cada ciertos periodos. Estos máximos parciales observados en $\eta_i(t)$ se generan debido al acople entre las ondas Kelvin y Poincaré fundamentales. Cuando estas ondas se encuentran en fase sus efectos se superponen, lo que induce amplitudes importantes en la interfaz de densidad. Este fenómeno podría ser un agente importante en el proceso de empinamiento y posterior degeneración de la onda Kelvin, debido a que aumentos importantes de la interfaz de densidad provocan cambios en la celeridad de la onda interna, cambios en la frecuencia de las ondas y en consecuencia en la dispersión de éstas. La frecuencia adimensional de interacción teórico está dado por $\sigma_{kp} = (\sigma_k - \sigma_p) / \sigma_k \sigma_p$.

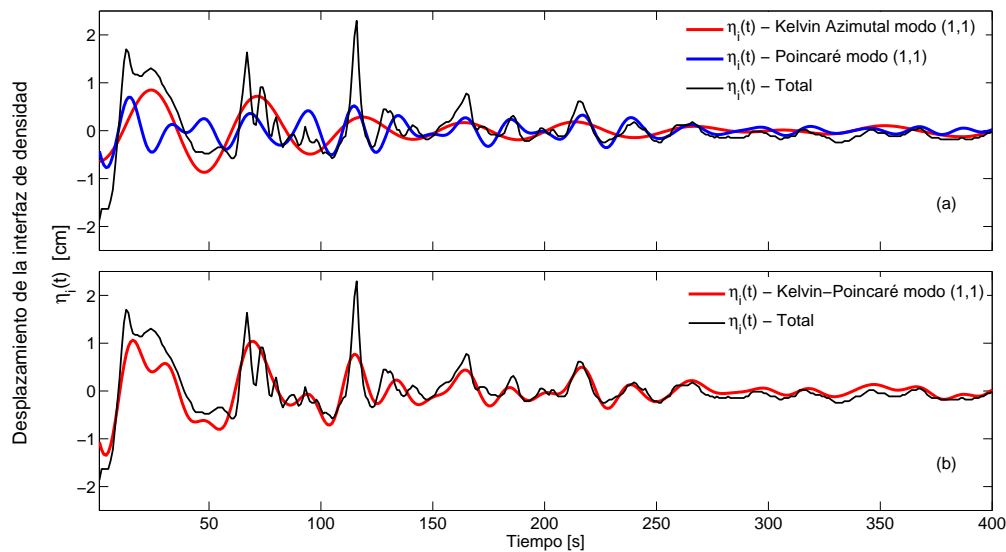


Figura 5.12: (a) Se observa la serie de tiempo de la interfaz de densidad de los dos principales modos, junto con la serie de tiempo completa. (b) La superposición lineal de los dos principales modos es capaz de caracterizar el comportamiento de la interfaz de densidad, además resuelve el problema de los peak observados periódicamente, debiéndose a la superposición de las fases de las ondas Kelvin y Poincaré modo (1,1).

Para estudiar la interacción entre las dos ondas principales se analizó el espectro de frecuencia de la serie de tiempo Kelvin-Poincaré. Como se observa en la Figura 5.12, la interacción de estas ondas provoca los peak en la interfaz de densidad sin embargo estos acoples no son suficiente para explicar los peak alcanzados por la serie completa. En la Figura 5.13 se observan los peak del espectro de densidad derivados de la serie de tiempo de la interacción Kelvin-Poincaré modo (1,1). Los periodos caracterizados a través del análisis de frecuencia muestran la presencia obvia de las ondas Kelvin y Poincaré fundamentales, además de otros cuatro peaks, entre ellos el periodo $T_3 = 35,1s$ que puede estar atribuido a interacciones no-lineales, debido a que es muy cercano al periodo $T_{kp} = T_k T_p (T_k - T_p)^{-1}$, atribuido a la frecuencia adimensional $\sigma_{kp} = (\sigma_k - \sigma_p)(\sigma_k \sigma_p)^{-1}$ y el periodo $T_6 = 17,1s$ que podría estar atribuido al periodo $T_{pk} = T_k T_p (T_k + T_p)^{-1}$, mientras que $T_4 = 25,6s$ podría representar a la frecuencia modal no-lineal $T_{kk} = T_k/2$ (de la Fuente *et al.*, 2008).

Utilizando la solución de Stocker & Imberger (2003) para el desplazamiento vertical de la interfaz de densidad de los modos internos, se puede estudiar la evolución de los modos experimentales relevantes, sin considerar el efecto de disipación viscosa y procesos de mezcla. Este análisis permite contrastar las series de tiempo experimentales con los modos teóricos dominantes. La metodología se aplicó a los experimentos que mostraban importantes peak en la interfaz de densidad, no al inicio de las experiencias. En la Figura 5.14 se muestran los resultados del análisis para los experimentos N°5-N°10. Al observar las series, se identifica que la estructura no-lineal de solitones se desarrolla entorno a las crestas de las onda Kelvin, pero los peaks importantes se desarrollan cerca de los periodos cuando las ondas Kelvin y Poincaré se encuentran en fase. Otro punto importante que puede ser observado en estos resultados es la desaceleración de los frentes de ondas en función del tiempo, lo cuál se debería a procesos de disipación e interacción no-lineal entre el campo de ondas internas.

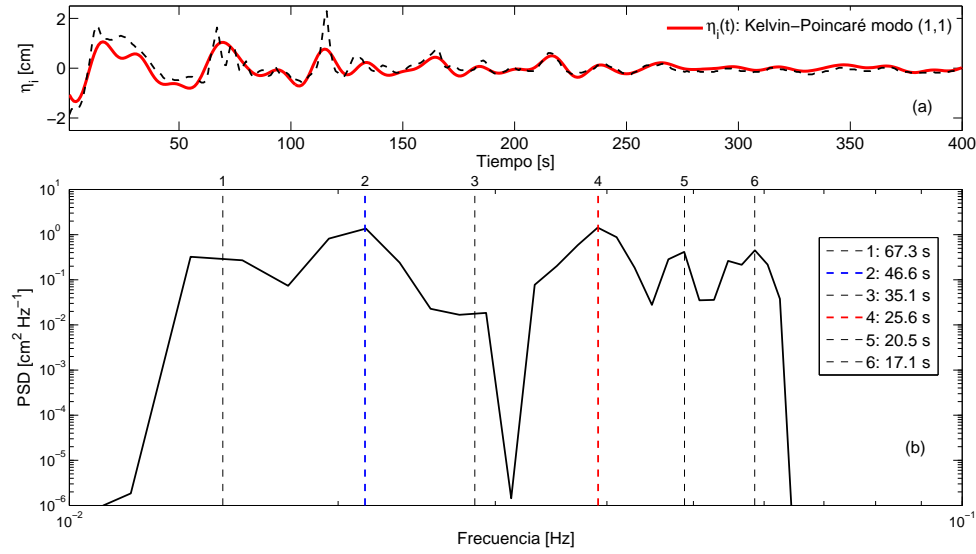


Figura 5.13: (a) Se observa la serie de tiempo de la interfaz de densidad de los dos principales modos, junto con la serie de tiempo completa en línea punteada. (b) Se observa el espectro de densidad para la serie de tiempo de las ondas Kelvin y Poincaré. La línea punteada azul corresponde al periodo $T_k(1,1)$, la roja al periodo $T_p(1,1)$.

5.4. Distribución de energía

A través del desplazamiento de la interfaz de densidad se puede estudiar el comportamiento de la energía potencial del sistema por unidad de área en función del tiempo. Para la condición inicial, $t = 0$, la energía total del sistema corresponde a energía potencial. Para la situación experimental, el estado forzado inicial de la interfaz de densidad se encuentra con energía cinética nula. Entonces, podemos expresar la energía total adimensional del sistema en función del Wedderburn inicial, W_0 , y la densidad relativa, $\epsilon = (1 - \rho_1/\rho_2)$, a través de la siguiente expresión:

$$TE^*(t = 0) \propto \epsilon \frac{W_0^{-2}}{4} \quad (5.9)$$

Este resultado se obtiene considerando la variación de energía potencial (con respecto a la energía potencial base inicial) del sistema, escalada por la energía potencial inicial de la capa inferior. Además, si se utilizan los resultados obtenidos de la descomposición del campo de ondas internas observado, se puede caracterizar la energía de cada modo por separado, estudiando su evolución en el tiempo. De este análisis se obtiene la variación de la energía potencial adimensional siguiente:

$$PE_k^*(t) = \epsilon \eta_{ik*}^2(t) \quad (5.10)$$

donde $\eta_{ik*} = \eta_{ik}/h_1$ es el desplazamiento de la interfaz de densidad adimensional del modo azimutal k -ésimo, y ϵ es la densidad relativa. Considerando esta definición se estudió la evolución de la energía potencial para los diferentes modos observados. En la Figura 5.15 se observa la variación de energía potencial de la serie de tiempo completa del experimento N°7. La Figura 5.16 muestra la distribución de energía potencial media en el tiempo. 40% de la energía potencial media está asignada a la onda Kelvin fundamental, mientras que la onda Poincaré fundamental tiene un

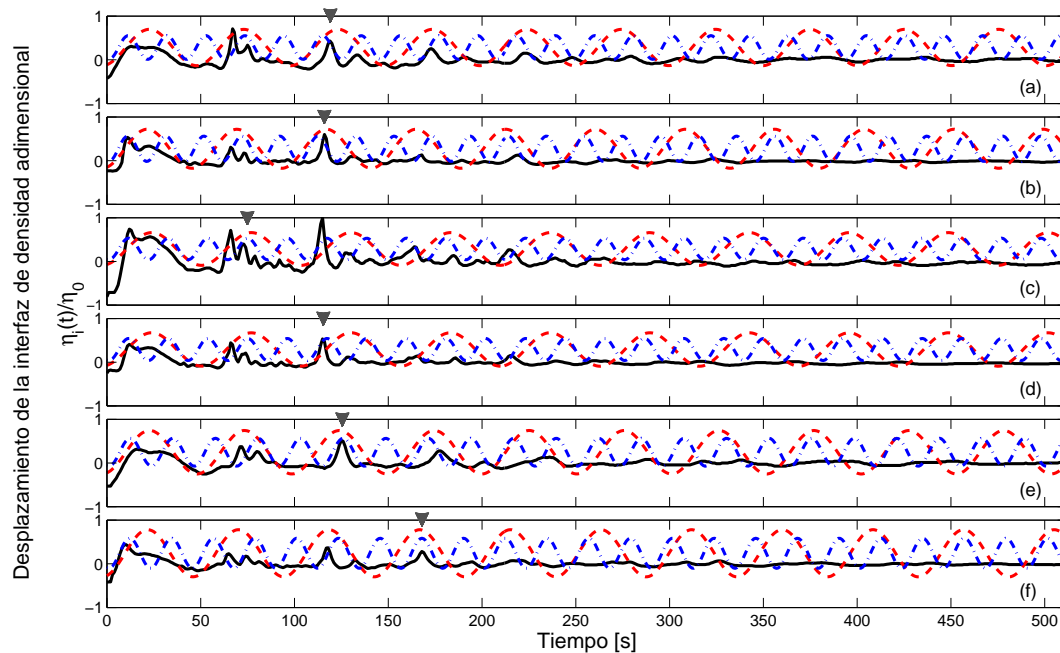


Figura 5.14: Series de tiempo de la interfaz de densidad en línea negra, onda Kelvin fundamental teórica en línea roja (--) y la onda Poincaré fundamental teórica en línea azul (-.). Todas estas series están normalizadas por el respectivo η_0 . En las series de tiempo se marcan los tiempos en que las ondas Kelvin y Poincaré se encuentran en fase, en estos puntos se observan desplazamientos verticales empinados de la interfaz de densidad.

23% de la energía potencial media. La energía potencial debido a otras ondas, entre ellas ondas no-lineales, correspondería a un 4% del total en el tiempo.

5.4.1. Disipación de energía

El decaimiento transitorio del desplazamiento de la interfaz de densidad en el tiempo se debe a efectos viscosos (Stocker *et al.*, 2000; Wake *et al.*, 2005; Wake *et al.*, 2007). La interacción del fluido con los bordes de la cubeta (la tapa superior, el manto y la base) y entre los dos estratos (interfaz de densidad) genera la presencia de condiciones de borde que deben ser cumplidas por la condición intrínseca de un fluido real con viscosidad dinámica. Esta característica desencadena la presencia de capas límites en todo el entorno, que tienden a difundirse a lo largo del tiempo debido a la transferencia de momentum, hasta lograr que el cuerpo de agua tenga una dinámica similar a la de un sólido rígido. En el caso particular estudiado, existen dos capas límites de interés: capas límites de la base y superficie (esta última debido a la presencia de la tapa), de propagación vertical, y la capa límite de las paredes o manto, de propagación radial. Cuando se gatillan las ondas internas debido a la liberación de forzante externo, fuerzas viscosas restituyentes tienden a amortiguar la dinámica de las ondas, tanto en amplitud como en velocidad, hasta alcanzar un estado estacionario nuevamente. Estudiar esta transición observada en las series de tiempo es muy relevante para entender los mecanismos de disipación y balances de energía.

Para analizar la escala de disipación de energía observada experimentalmente se cuantificó el coeficiente de amortiguamiento de cada onda Kelvin fundamental observada. Con este objetivo se ajustó para cada serie de tiempo una curva armónica amortiguada, de la siguiente forma:

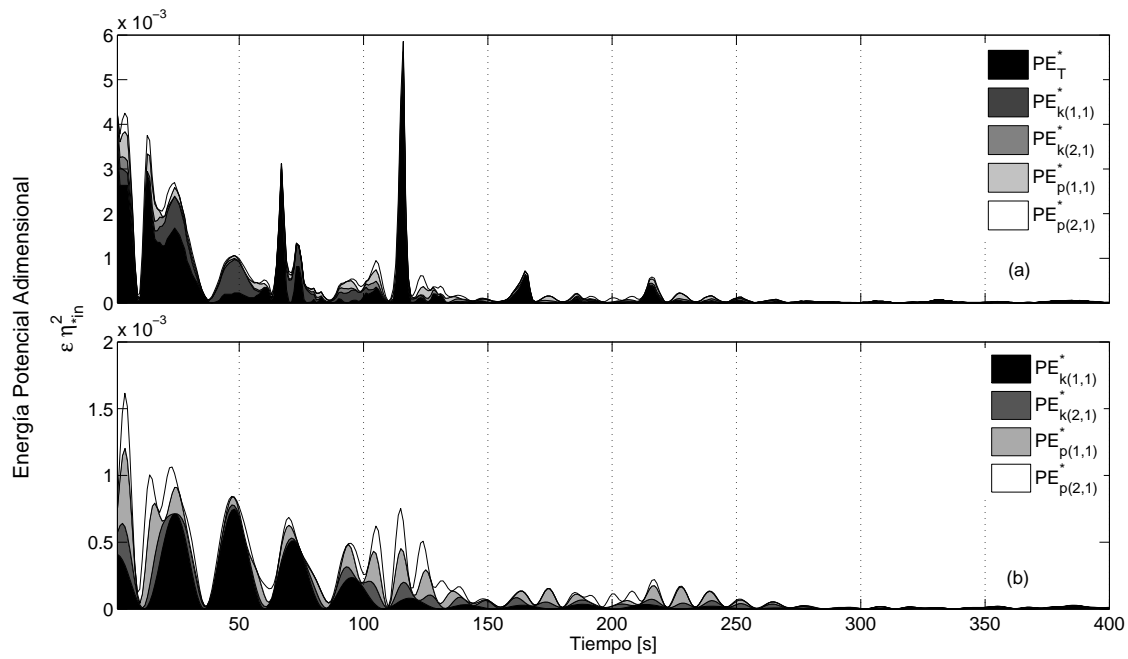


Figura 5.15: En el gráfico (a) se puede observar la evolución de la energía potencial total del sistema en función del tiempo (color negro). Sobre esta curva se observa la energía potencial de los modos dominantes. En el gráfico (b) se observa la energía potencial de los cuatro modos dominantes, $k(1,1)$, $k(2,1)$, $p(1,1)$ y $p(2,1)$.

$$\frac{\eta_2(t)}{\eta_0} = \cos(\omega_k t + \phi) \exp(-\gamma_k t_*) \quad (5.11)$$

donde η_0 es la amplitud inicial, ω_k es la frecuencia de la onda Kelvin fundamental, ϕ es la fase de la onda, t_* es el tiempo, t , escalado por el periodo de las ondas internas, T_i , y γ_k es el coeficiente de decaimiento buscado. Para cada uno de los experimentos se obtuvo el valor de γ_k . Luego, la escala de tiempo de decaimiento experimental queda caracterizada como $\tau_d^e = T_i/\gamma_k$. De este análisis se obtiene que existe una clara relación entre el coeficiente de disipación y la aceleración Coriolis. En la Figura 5.17A se muestran la dependencia entre γ_k y el número de Burger, para una razón de aspecto $h_* \in (0,17 - 0,22)$. Ambas curvas dan cuenta del aumento del coeficiente de decaimiento a medida que la rotación es más importante en la dinámica interna del flujo. En este caso, a cada set se le ajustó una curva de tipo potencial, con coeficientes α_i y β_i . La curva para $W_0 = 0,5$ se ajusta con un exponente $\beta_1 = -0,54$. En el caso de la curva para $W_0 = 1,0$ se ajusta con un exponente $\beta_2 = -0,494$. Si bien los exponentes resultantes son del mismo orden, estos podrían ser el resultado de diferentes mecanismos de disipación de energía. En este caso, la razón de aspecto, h_* , permite la existencia de ondas no-lineales, las cuales se ven intensificadas en función del inverso del número de Wedderburn. Este último punto puede justificar, en cierta forma, el resultado obtenido. El proceso de degeneración de ondas es más eficiente en un caso que en otro. Además, el desplazamiento vertical observado en las curvas se debería a la diferencia de amplitud inicial de las ondas, la que está caracteriza por el número de Wedderburn.

Un tercer set de experimentos fue realizado para determinar el coeficiente de decaimiento y la influencia de efectos no-lineales en los mecanismos de disipación de energía. En la Figura 5.17b

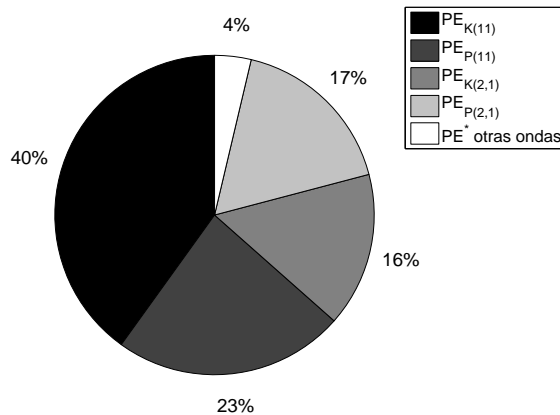


Figura 5.16: Distribución de energía potencial media en el tiempo, entre los modos dominantes observados. La energía potencial debido a ondas fundamentales Kelvin y Poincaré corresponde al 63 %. Los modos secundarios tienen asociado un 33 % de la energía potencial total. La energía debido a modos de mayor frecuencia, y a ondas de características no-lineales, tienen asignado 4 % de la energía total en el tiempo.

se muestra además un conjunto de datos que tienen una razón de aspecto $h_* \propto 0,5$. Sus series de tiempo están caracterizadas por una dinámica lineal de las ondas internas, sin presencia de ondas tipo solitones. En esta situación, se observa un descenso de la curva tipo potencial ajustada para el set de datos, con un $\beta_3 = -0,47$. Se puede observar que las tres curvas son casi paralelas, con variación máxima entre los exponentes de un 10 %.

Los resultados indican que $\gamma_k \propto 1/\sqrt{S}$, o bien $\gamma_k \propto \sqrt{f}$, lo que apuntaría a que el mecanismo de disipación de energía se debería a la fricción desarrollada por una capa de Ekman no estacionaria (?). Para validar esta hipótesis se comparó la escala de tiempo adimensional experimental de amortiguamiento con la escala de tiempo adimensional teórica del amortiguamiento de Ekman, τ_d^t , la que está dada por la siguiente expresión (Gill, 1982):

$$\tau_d^t = \frac{h_2}{\pi} \left(\frac{f}{2\nu} \right)^{1/2} \quad (5.12)$$

Esta escala de tiempo ha sido adimensionalizada por el periodo inercial, $T_f = 2\pi/f$, para entender la escala de decaimiento en función de la fricción existente debido a flujos afectados por la rotación del medio. h_2 corresponde al espesor de la capa inferior, y ν a la viscosidad cinemática.

En la Figura 5.18 se contrasta la escala de tiempo experimental de amortiguamiento versus la escala de tiempo teórica de amortiguamiento debido a la presencia de una capa de Ekman inferior. Del análisis se deriva que dos de los tres set de experimentos muestran una relación uno a uno entre τ_d^e y τ_d^t . Para el caso del set de experimento denotado por puntos verdes ($W_0 \propto 1,0$ y $h_* \propto 0,2$) se tiene que la pendiente de la curva representativa de los datos corresponde a $c_2 = 1,001$, mientras que para el set de experimentos denotados por puntos azules ($W_0 \propto 1,0$ y $h_* \propto 0,5$) se tiene que la pendiente de la curva representativa de los datos corresponde a $c_3 = 1,008$. Esto da cuenta que el mecanismo de decaimiento de la amplitud y celeridad de las ondas estaría fuertemente ligado con la formación de capas de Ekman en el flujo. Es importante notar que tanto para ambas razones de aspecto, $h_* \propto 0,2$ y $h_* \propto 0,5$, existe una muy cercana correlación. En el caso de $h_* \propto 0,2$ se tiene la presencia de fenómenos no-lineales, a diferencia de $h_* \propto 0,5$. No obstante, ambos conjuntos de

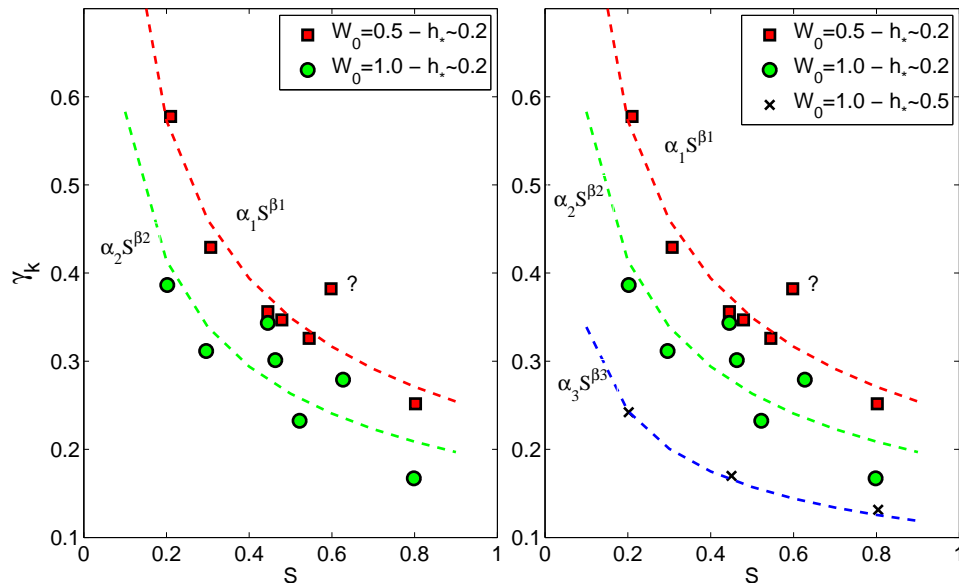


Figura 5.17: (a) Relación entre el coeficiente de decaimiento, γ_k , el número de Wedderburn, W_0 , y el número de Burger, S , para una razón de aspecto $h_* \propto 0,2$. (b) Comparación entre coeficientes de decaimiento en función de S , para dos diferentes razones de aspecto, $h_* \propto 0,2$ y $h_* \propto 0,5$.

experimentos se inician con el mismo número de Wedderburn, parámetro que regula la amplitud de las ondas internas y la escala de tiempo del empinamiento de éstas. Por otra parte, se tiene que el set de experimentos denotados por puntos rojos ($W_0 \propto 0,5$ y $h_* \propto 0,2$) presenta una pendiente de la curva ajustada de $c_1 = 0,509$. Ahora bien, considerando que $\gamma_k \propto 1/\tau_d^e$, este resultado indica que la tasa de decaimiento de las ondas internas es del orden de dos veces la tasa de decaimiento debido al amortiguamiento de Ekman, lo que evidencia la existencia de mecanismos de disipación más eficientes, posiblemente gatillados por fenómenos no-lineales. Cabe mencionar que en este último set de experimentos analizados la dinámica no-lineal y no-hidroestática es un factor importante en el proceso de disipación de energía. En esta situación, debido al Wedderburn inicial y a la razón de aspecto existente, el tiempo de empinamiento de las ondas es menor, por lo que el proceso de formación de frentes verticales se produce rápidamente. Esto último genera importantes amplitudes en las ondas internas, provocando la inestabilidad del frente y su consecuente degeneración en un tren de solitones que decae en amplitud. No obstante, este proceso de transferencia de energía puede excitar modos azimutales de más alta frecuencia, dando espacio para que un campo de ondas internas más complejo pueda interactuar entre sí. Esta interacción puede provocar la cancelación de ondas internas y la modificación de la celeridad de las ondas debido a la presencia de capas límites en la base y en las paredes del manto (Shimizu & Imberger, 2009).

Para mostrar que la presencia de efectos no-lineales está provocando cambios en la disipación de energía se estudió la variación del coeficiente de decaimiento en función de la razón de aspecto de la estratificación. En la Figura 5.19 se muestran los resultados, con lo que se puede observar claramente que a medida que h_* disminuye γ_k aumenta fuertemente.

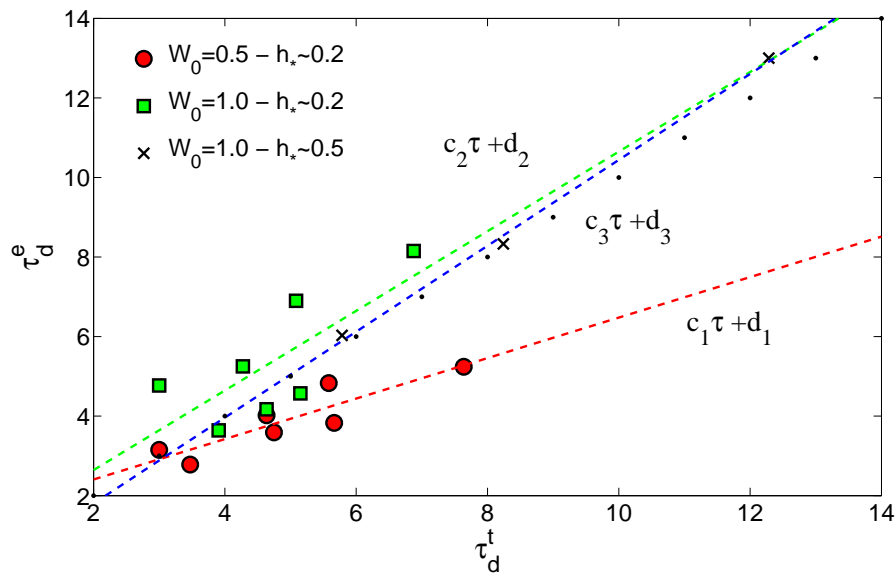


Figura 5.18: Escala de tiempo experimental de la disipación de energía en función de la escala de tiempo teórico de disipación debido a una capa de Ekman inferior.

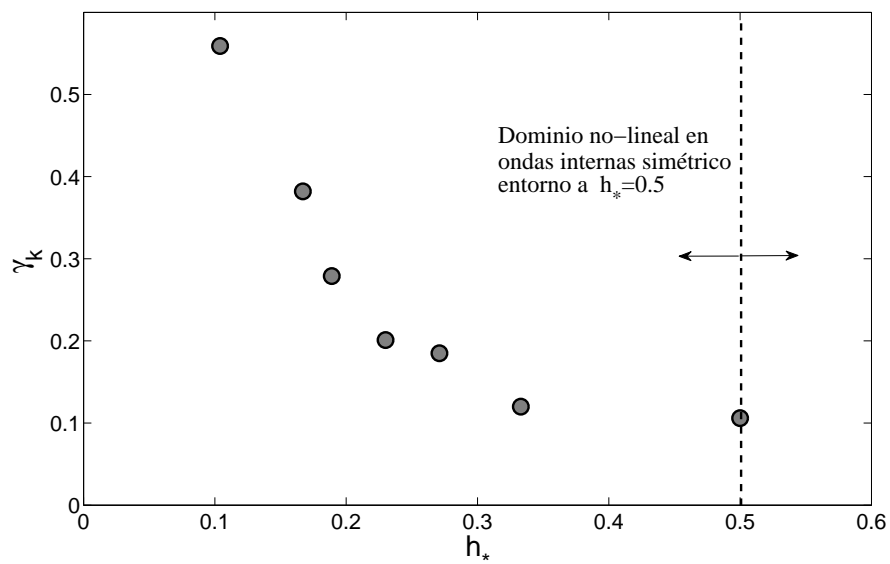


Figura 5.19: Coeficiente de disipación, γ_k , en función de la razón de aspecto, h_* , para $W_0 = 0,5$.

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

6.1. Discusión

6.1.1. Sobre el desarrollo experimental

Sobre el desarrollo del montaje experimental y la metodología experimental se pueden discutir varios temas. La modelación, construcción y puesta en marcha de la mesa rotatoria fue realizada por un grupo interdisciplinario. Por una parte, el modelo del sistema fue diseñado y calculado por el equipo de investigación del proyecto, mientras que la construcción fue realizada por el equipo técnico del laboratorio de Hidráulica Francisco J. Domínguez. El montaje del experimento fue un proceso iterativo, en donde se fueron haciendo mejoras al sistema a medida que se iban armando las diferentes piezas. Uno de los problemas importantes a solucionar fue el cálculo estructural de la plataforma de giro. Ésta tuvo que ser reforzada puesto que se habían hecho cambios en el método de inclinación de la cubeta circular. Una vez que la mesa rotatoria estuvo completamente armada se comenzó a diseñar la metodología experimental. En esta etapa el problema más importante a resolver fue la estratificación. Se desarrolló un método de estratificación mediante el uso de una capa circular porosa (esponja) de 8 cm de espesor. La idea era generar un flujo de Darcy vertical que evitara la existencia de mezcla entre el agua salada y el agua dulce. Tras varias pruebas se consolidó la metodología aplicando bajos caudales a través de una amplia área de la capa porosa, de forma de generar bajas velocidades que impiden la formación de procesos de mezcla. Se optó por modelar las capas de forma inversa, posible por la simetría del fenómeno, para facilitar la visualización de las ondas internas, ya que permite difundir de forma más eficiente la luz en el medio. De este modo la capa superior real fue la capa inferior experimental y, en consecuencia, la capa inferior real fue la capa superior experimental. Por otro lado, el mayor contenido de ruido en los datos entró en la medición de las ondas internas, debido a la disposición de las cámaras, puesto que éstas podían capturar más que solo la dinámica azimutal de las ondas. El enfoque radial y horizontal de las cámaras permitía capturar muy bien las ondas Kelvin, por otra parte, las ondas Poincaré, que no tienen sus máximos en la zona de filmación directa (manto del cilindro), si bien pueden ser registradas, su captura dista de ser óptima. Este es uno de los puntos que debe ser mejorado para futuras experiencias, ya que se tiene una incertidumbre importante en la estructura radial de las ondas internas observadas.

Al igual que las experiencias realizadas por Horn *et al.* (2001), las ondas superficiales fueron eliminadas mediante el uso de una tapa. En este caso la tapa fue construida de un polímero de diferente rugosidad que la base inferior. Esto último provoca la existencia de diferentes coeficientes de fricción en cada uno de los bordes verticales, los que generan una condición de borde que afecta

la velocidad de rotación en el sistema. Se buscó inducir la menor cantidad de mezcla posible, por lo que los cambios de velocidad debían ser a tasas muy bajas. Experimentos preliminares permitieron obtener un rango óptimo de tasas de aceleración que se debían inducir al sistema para alcanzar la velocidad angular buscada. En este caso se consideró que aumentar discretamente la velocidad de rotación de 0 a 1 rpm a través de 1 hr, mediante pasos de 10 minutos, era una buena aceleración entre mezcla observada y tiempo restringido para la experiencia. Una vez alcanzada la velocidad angular buscada se dejaba girando un tiempo razonable con el objetivo de alcanzar un estado estacionario de los fluidos. En esta etapa se utilizaron trazadores para visualizar posibles velocidades angulares relativas.

6.1.2. Sobre los resultados experimentales

El análisis de las series de tiempo es uno de los resultados de esta memoria de investigación. La caracterización del desplazamiento vertical de la interfaz de densidad mediante el uso de herramientas estadísticas permitió utilizar posteriormente la transformada de Fourier, con la cual se puede obtener las frecuencias y energías dominantes existentes en el campo de ondas internas desarrolladas en cada experimento. La hipótesis más fuerte utilizada fue la periodicidad de las ondas dominantes. Esta hipótesis fue validada mediante un test de periodicidad (Bendat & Piersol, 2000). No obstante, es importante notar que debido a la dinámica no-lineal y a los efectos difusivos del fenómeno estudiado, las ondas internas presentan cambios en sus periodos y frecuencias a medida que se desarrolla el experimento. Debido a esto se tuvo que cambiar la identificación de las ondas desde el punto de vista del espectro de Fourier. En esta investigación se habla de un *paquete de frecuencias* atribuido a una onda, debido a la dispersión y difusión que sufre una onda dominante mediante diferentes mecanismos. Esto último permitió utilizar el espectro de densidad potencial (psd) como herramienta de análisis de las series de tiempo. Utilizando este resultado se pudo identificar el tipo de ondas internas observadas, mediante la comparación de las frecuencias teóricas (Antenucci & Imberger, 2001; Wake *et al.*, 2005; Stocker & Imberger, 2003) con las experimentales. Por otra parte, para determinar la cantidad de energía atribuida a un modo se utilizó un filtro de banda en el espacio de Fourier (Bendat & Piersol, 2000). Esta herramienta, que permite identificar distintos modos de oscilación en una serie de tiempo y determinar su contenido de energía, puede ser aplicada a distintos flujos que muestren variabilidad temporal con distintas escalas de tiempo. A través del uso de la anti-transformada de Fourier de los espectros de densidad filtrados se reconstituyeron las series de tiempo de la interfaz de densidad para los modos dominantes identificados. Con este resultado se estudió la interacción entre los modos de mayor energía (ondas fundamentales) y cómo modulan el comportamiento de las series de tiempo observadas.

Finalmente se identificaron y caracterizaron las respuestas de ondas no-lineales y no-hidrostáticas en los experimentos. Con esta información se pudo estudiar las características energéticas de las series de tiempo, específicamente la escala temporal de disipación del modo fundamental de la onda interna Kelvin. Un punto importante a discutir es el resultado obtenido de la reconstitución de las series de tiempo de los modos a partir del uso del filtro Pasa-Banda y la anti-transformada de Fourier. La asignación de energía a un modo es un tema no trivial a estudiar cuando las frecuencias son altas. En estos casos, la banda de frecuencia asignada a un modo debe ser obtenida mediante el método analítico-estadístico utilizado (Bendat & Piersol, 2000) o inspección visual, puesto que si incorporamos frecuencias atribuidas a otros modos se pueden restituir ondas de diferentes características físicas, como es el caso de las ondas Kelvin y Poincaré. Esto puede provocar importantes problemas en el análisis de la disipación y transferencia de energía. Por último, para explicar los fenómenos no-hidrostáticos observados en algunas series de tiempo conviene contrastar

los resultados teóricos con los experimentales, considerando un punto de vista de la fase de las ondas y no de las amplitudes. Esto quiere decir, cuando dos ondas dominantes se encuentran en fase pueden generar aceleraciones verticales importantes, provocando que la inercia del flujo genere amplitudes mayores a las esperadas por la respuesta lineal. El uso del filtro Pasa-Banda no podrá explicar las amplitudes no-hidrostáticas que se pueden desencadenar debido a la interacción Kelvin-Poincaré fundamental.

6.1.3. Extrapolación a terreno: lago Villarrica

Se realizó un set de experimentos que tenían como objetivo estudiar el comportamiento de las ondas internas bajo las condiciones adimensionales existentes en el lago Villarrica, las cuales son $S \approx 0,45$, $h_1/H_t \approx 0,2$ y bajo condiciones extremas de viento $W < 1$. En este contexto se consideró un rango de valores de Burger entre $S \in (0,2 - 0,6)$, razones de aspecto entre $h_1/H_t \in (0,17 - 0,23)$ y dos números de Wedderburn, $W_0 = 0,5$ y $W_0 = 1,0$. Los resultados de la dinámica vertical de la interfaz de densidad en el tiempo evidencian la presencia de modos fundamentales de ondas Kelvin y Poincaré, además de otros modos azimutales de mayor frecuencia tales como Kelvin modo 2 y 3, Poincaré modo 2 y 3. La caracterización de estos modos fue determinada a través de la solución fundamental del problema lineal (Stocker & Imberger, 2003), en donde las frecuencias observadas experimentalmente fueron comparadas con las frecuencias teóricas para las condiciones adimensionales respectivas. Por otra parte, se observó que para las condiciones adimensionales del lago Villarrica, existe una alta degeneración de ondas internas, observándose la presencia de onda tipo solitarias, las que fueron denominadas Solitón-Kelvin. El proceso de empinamiento de la onda Kelvin fundamental se conjuga bastante bien con el periodo de empinamiento teórico en estas condiciones, desencadenando la formación de trenes de solitones. Estos resultados indican que en el lago Villarrica existen las condiciones físicas para la existencia de ondas Kelvin con comportamientos de ondas tipo solitarias. Por otra parte, se analizó la interacción de las ondas fundamentales Kelvin y Poincaré, debido a que son las que presentan peaks más elevados de energía potencial. A través del uso de un filtro Pasa-Banda (García *et al.*, 2006) se reconstituyeron series de tiempo sintéticas del desplazamiento vertical de las ondas Kelvin y Poincaré, con las que se realizó un análisis de su interacción mediante la superposición lineal de las series. Posteriormente se realizó un análisis espectral a la serie de tiempo Kelvin-Poincaré, con lo que se identificó la presencia de las frecuencias normales de oscilación de las ondas Kelvin y Poincaré fundamentales además de otras cuatro frecuencias de importante energía. Estas frecuencias fueron contrastadas con los resultados teóricos y numéricos no-lineales no-hidrostáticos obtenidos por de la Fuente *et al.* (2008), identificándose la presencia de ondas tipo T_{kp} , T_{pk} y $T_{kp}/2$. Además se observó un modo de baja frecuencia que no pudo ser identificado a través de los análisis realizados. En resumen, estos resultados indican que las condiciones físicas del lago Villarrica permiten la existencia de ondas internas con características no-lineales y no-hidrostáticas, puesto que estos fenómenos están gobernados por la estructura térmica del lago, específicamente la razón de aspecto, y en el caso particular del lago Villarrica se tiene que $h_1/H_t \approx 0,19$. En estas condiciones se observó una fuerte presencia de interacciones no-lineales entre modos de oscilación, por lo que es esperable tener también estas condiciones en el lago. Se observó además que variaciones en el número de Burger provocan variaciones en los procesos de difusión y atenuación de las ondas internas, por lo que sería importante estudiar procesos de variaciones de estratificación en el lago Villarrica, como lo son la formación de estratificación y la pérdida de estratificación térmica.

6.2. Conclusiones

En esta investigación se llevó a cabo un estudio experimental de la respuesta de ondas internas gravitacionales afectadas por la rotación del medio en un flujo estratificado. El desarrollo de esta memoria permitió reproducir la dinámica de las ondas internas observadas en grandes lagos, de latitudes medias, que se ven afectados por la rotación terrestre y forzantes meteorológicas que inducen tanto estratificaciones térmicas estivales, como transferencia de energía cinética turbulenta a través de la superficie hacia la columna de agua, debido a forzantes de viento.

En esta investigación se propusieron tres grandes objetivos, los cuales fueron abordados en el siguiente orden: i) Modelación, construcción y puesta en marcha de una mesa rotatoria experimental, en el laboratorio de Hidráulica Francisco J. Domínguez; ii) Generación de una metodología de trabajo experimental, aplicado al uso de la mesa rotatoria y los equipos que interactúan con ésta; iii) Desarrollo, registro y análisis de resultados de un set de experimentos realizados en la mesa rotatoria, que buscó estudiar la respuesta de un flujo estratificado afectado por la rotación del medio.

Con respecto al primer objetivo, se concluye que la modelación, construcción y puesta en marcha de la mesa rotatoria experimental se llevó a cabo con éxito. Actualmente se cuenta con una importante herramienta de carácter experimental para el análisis de ondas internas, que permite modelar: (1) diferentes razones de aspecto y estructuras térmicas de un flujo estratificado, (2) una amplia gama de velocidades angulares (0-5 rpm) que permite modelar diferentes números de Burger y/o latitudes, (3) diferentes condiciones para la inclinación inicial de la interfaz de densidad, que modelan diferentes números de Wedderburn, llegando a la condición de *upwelling*. Este montaje experimental adicionalmente permite llevar a cabo futuros estudios científicos en los campos de la limnología física y ondas internas gravitacionales, entre otros, que actualmente se encuentran en el estado del arte de las ciencias aplicadas, como por ejemplo los fenómenos de mezcla en cuerpos estratificados debido a degeneración de ondas internas y condiciones de resonancia en cuerpos lacustres debido al acople de frecuencias modales de ondas internas con frecuencias de forzantes externos, como el viento, entre otros.

Con respecto al segundo objetivo, se concluye que la metodología desarrollada permite realizar satisfactoriamente estudios sobre la dinámica vertical de ondas internas afectadas por la rotación del medio, en flujos estratificados. El producto más relevante de este resultado es la técnica para producir la estratificación, puesto que es sustancialmente más rápida que otras metodologías empleadas en otras instalaciones experimentales del laboratorio Francisco Javier Domínguez. Este resultado debiera ser una ayuda fundamental para futuras experiencias a desarrollar y una referencia del proceso a seguir cuando se pretendan hacer mejoras y cambios en el método experimental. Por otra parte, es importante recalcar que se debe avanzar en las técnicas de medición, debido a que la metodología actual solo permite conocer la estructura azimutal de las ondas internas, por lo que es importante que en futuras investigaciones se desarrollen técnicas para poder medir tanto la estructura radial como el campo de velocidad de las ondas.

Con respecto al tercer objetivo, éste se puede dividir en dos partes:

Desarrollo y registro de experimentos: Se llevaron a cabo con éxito 24 experimentos, cubriendo a través de éstos una amplia gama de condiciones adimensionales, con el fin de registrar diferentes comportamientos de ondas internas. Tanto el montaje experimental, las metodologías experimental y de adquisición de datos permitieron obtener de forma satisfactoria series de tiempo de la dinámica

vertical de la interfaz de densidad. Estos resultados fueron la materia prima para la investigación realizada, por lo que se concluye que la etapa de desarrollo y registro de los experimentos entregó los resultados esperados. El cumplimiento de este objetivo permite contar con importantes datos para el análisis de las ondas internas gravitacionales afectadas por la rotación terrestre, los cuales se encuentran a disposición de la sociedad científica. Es importante mencionar que las etapas de desarrollo y registros se encuentran fuertemente ligadas a la metodología experimental, por lo que futuras mejoras en esta última permitirían contar con datos de mayor calidad.

Análisis de experimentos: Del análisis de las series de tiempo del desplazamiento vertical de la interfaz de densidad se obtuvieron los siguientes resultados:

1. *Caracterización de las series de tiempo:* Este análisis se basó en el estudio de la estructura funcional, estacionalidad y periodicidad de las series de tiempo, concluyendo que la dinámica vertical de la interfaz de densidad tiene un comportamiento transitorio, cuasi-periodico y no-lineal con componentes aleatorias. Este comportamiento se debe a los forzantes restituyentes que rigen al fenómeno, específicamente la gravedad y los esfuerzos viscosos que actúan en el medio.
2. *Campo de ondas internas:* Este análisis se basó en el estudio del espectro de frecuencia de densidad potencial de las series de tiempo. Los resultados evidenciaron la presencia de un número importante de peaks de energía potencial atribuido a ondas de bajas frecuencias relativas a la banda de frecuencias registradas, como las ondas Kelvin y Poincaré. Además se observó un vasto contenido de altas frecuencias, debido a la presencia de ondas no-lineales, como los trenes de ondas tipo solitarias.
3. *Clasificación de ondas internas:* Mediante la comparación entre las frecuencias obtenidas a través del análisis espectral de las series de tiempo y las frecuencias naturales de la solución analítica del problema se obtuvo que las principales ondas excitadas en los experimentos fueron los modos fundamentales de la Kelvin y la Poincaré. Modos de más alta frecuencia fueron clasificados como ondas Kelvin principalmente, no obstante, si bien la presencia de modos Poincaré de más alta frecuencia no se descartan, su clasificación se estima menos rigurosa, debido a que estas ondas tienen un comportamiento más difícil de identificar mediante la técnica de registro utilizada.
4. *Descomposición del campo de ondas internas:* Mediante el uso de un filtro Pasa-Banda se obtuvieron series sintéticas de las principales ondas observados, las cuales se fueron los modos fundamentales Kelvin y Poincaré. Este análisis permitió identificar el comportamiento físico y temporal de la onda Kelvin fundamental, específicamente el coeficiente de decaimiento de la onda.
5. *Identificación de ondas no-lineales:* Se pudo identificar la presencia de comportamientos no-lineales en las ondas internas en función de los parámetros adimensionales, siendo la razón de aspecto la principal variable que determina las características no-lineales de las ondas internas. Específicamente se observaron fenómenos no-lineales para $h_1/H_t < 0,5$, mientras que para $h_1/H_t \approx 0,5$ no fue posible identificar comportamientos de este tipo. Los principales fenómenos que se identificaron fueron los procesos de empinamiento y degeneración de la onda Kelvin fundamental en trenes de solitones de propagación azimutal, la cual se caracterizó a partir del número de solitones y la frecuencia media de éstos. Además se obtuvo la amplitud, longitud, periodo de empinamiento y celeridad media del primer solitón generado a partir

de la degeneración de la onda Kelvin fundamental. Uno de los resultados más relevantes obtenidos en este análisis es que la longitud de onda del solitón está influenciada tanto por la rotación del medio como por la razón de aspecto de la estratificación, teniendo un comportamiento diferente al caso en que el solitón se propaga de forma unidireccional. De este último resultado se observó que la longitud de onda del solitón decrece fuertemente a medida que la rotación de medio es mayor. Este resultado trae como consecuencia que la ecuación eKdV extendida no puede ser utilizada directamente para modelar ondas tipo solitarias que se vean influenciadas por la rotación del medio. Otro resultado importante a destacar es que el proceso de degeneración estaría influenciado por la rotación del medio, debido a que se observó que la onda Kelvin degenera en un mayor número de solitones para número de Burger cada vez menores.

6. *Interacción Kelvin-Poincaré*: De la reconstitución sintética de las ondas fundamentales Kelvin y Poincaré a través del uso del filtro Pasa-Banda se obtuvo que éstas interactúan de forma no-lineal, para concluir esto se realizó un análisis espectral a la superposición lineal de las series de tiempo, obteniéndose la existencia de varias frecuencias atribuidas a peaks de energía, entre ellas los periodos de la ondas Kelvin, T_k , la onda Poincaré T_p , la interacción T_{kp} , T_{pk} , T_{kk} y $T_{kp}/2$, siendo estos últimos cuatro periodos atribuidos a frecuencias excitadas por interacciones no-lineales entre las ondas Kelvin y Poincaré. De este análisis se obtuvo que el acople en fase de los modos fundamentales Kelvin y Poincaré genera amplitudes verticales importantes, evidenciando la presencia de aceleraciones verticales relevantes, con suficiente inercia como para alcanzar amplitudes mayores de la interfaz de densidad que las obtenidas mediante la solución teórica lineal de la dinámica vertical de los modos Kelvin-Poincaré. Este fenómeno está atribuido a comportamientos no-hidrostáticos.
7. *Distribución de energía*: Se obtuvo que la distribución de energía potencial está principalmente dividida entre los modos fundamentales Kelvin y Poincaré y los modos 2 azimutales Kelvin y Poincaré, siendo la onda Kelvin fundamental la que mayor energía contiene, con un 40 % del total. Por otra parte, menos del 4% de la energía total se deberían a ondas de mayor frecuencia que estas últimas.
8. *Disipación de energía*: Se obtuvo que la escala de tiempo de disipación de la onda Kelvin fundamental tomó valores entre 2 y 8 veces el periodo de la onda Kelvin, además se observó que está fuertemente influenciada por la rotación del medio y la razón de aspecto. El coeficiente de decaimiento de la onda Kelvin fundamental ajustado para cada experimento mostró una disminución potencial con respecto al número de Burger, dando cuenta que a medida que la rotación del medio es más importante el coeficiente de decaimiento crece fuertemente. A partir de los experimentos se determinó que la disipación de energía es mínima para una razón de aspecto $h_1/H_t = 0,5$, y crece potencialmente a medida que la razón de aspecto disminuye. Este último resultado concluye que los fenómenos no-lineales de transferencia y disipación provocan un decaimiento más eficiente de las ondas internas. Esta conclusión fundamenta la importancia de desarrollar modelos numéricos basados en comportamientos no-lineales y no-hidrostáticos de ondas internas, para contar con herramientas científicas que permitan modelar, predecir y entender la hidrodinámica de cuerpos lacustres estratificados y afectados por la rotación terrestre.

En resumen, se puede concluir que el estudio experimental de ondas internas gravitacionales afectadas por la rotación terrestre en un flujo estratificado permitió: (1) generar un montaje y una metodología experimental para el análisis de ondas internas; (2) una base de datos para el análisis de la dinámica vertical de la interfaz de densidad para diferentes condiciones físicas; y (3) contar con una caracterización básica del comportamiento de las ondas internas fundamentales Kelvin y Poincaré, su interacción no-lineal y no-hidrostática, junto con el proceso de degeneración en ondas tipo solitarias y disipación por efectos de la rotación y no-linealidad del fenómeno. Se espera que la investigación desarrollada sea una contribución para el entendimiento de los fenómenos que gobiernan la hidrodinámica de cuerpos lacustres y la base para futuros estudios que se focalicen en acoplar los dos principales tópicos analizados en esta investigación con otros fenómenos tales como procesos de resonancia y mezcla en cuerpos lacustres, cuya importancia radica en la fuerte dependencia que tienen los ecosistemas lacustres con factores hidrodinámicos, meteorológicos y antrópicos. Este estudio permite entender el comportamiento y los principales mecanismos de transferencia de energía en un sistema lacustre estratificado y afectado por Coriolis, a través de: (1) la identificación y caracterización de ondas no-lineales y no-hidrostáticas a partir de la degeneración de la onda Kelvin fundamental y la interacción entre esta última onda y la onda Poincaré fundamental; (2) caracterización de los mecanismos de disipación de la onda Kelvin fundamental en función de los números adimensionales Burger, Wedderburn, razón de aspecto y fenómenos no-lineales, entre otros.

Bibliografía

- Antenucci, J., & Imberger, J. 2001. Energetics of long internal gravity waves in large lakes. *Limnol. Oceanogr.*, **46**, 1760–1773.
- Bendat, J., & Piersol, Allan. 2000. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*.
- Boegman, L., Imberger, J., Ivey, G., & Antenucci, J. 2003. High-frequency internal waves in large stratified lakes. *Limnol. Oceanogr.*, **48**, 895–919.
- Boegman, L., Ivey, G., & Imberger, J. 2005a. The degradation of internal waves in lakes with sloping topography. *Limnol. Oceanogr.*, **50**, 1620 – 1637.
- Boegman, L., Ivey, G., & Imberger, J. 2005b. The Energetics of large-scale internal wave degeneration in lakes. *J. Fluid. Mech.*, **531**, 159–180.
- Boyer, D., Davies P. Holland W. Biolley F. & Honji H. 1987. Stratified Rotating Flow over and around Isolated Three-Dimensional Topography. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **322**, 213–241.
- Campos, H., Steffen W. Román C. Zuñiga L. & Agüero G. 1983. Limnological studies in Lake Villarrica Morphometric, physical, chemical, planktonical factors and primary productivity. *Arch. Hydrobiol./Suppl.65*, **4**, 371–406.
- Condie, S. 1999. Settling regimes for non-motile particles in stratified water. *Deep sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, **46**, 681–699.
- Csanady, G. 1967. Large-lakes motion in the Great Lakes. *Journal of Geophysical Research*, **72**, 4151–4161.
- Csanady, G.T. 1968. Motions in a model Great Lake due to suddenly imposed wind. *J. Geophys. Res.*, **73**, 6435–6447.
- Cushman-Roisin, B. 1994. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamic*.
- de la Fuente, A., Shimizu, K., Imberger, J., & Niño, Y. 2008. The evolution of internal waves in a rotating, stratified, circular basin and the influence of weakly nonlinear and nonhydrostatic accelerations. *Limnol. Oceanogr.*, **53**, 2738–2748.
- de la Fuente., A, Shimizu, K., Niño, Y, & Imberger, J. 2010. Nonlinear and weakly nonhydrostatic inviscid evolution of internal gravitational basin-scale waves in a large, deep lake: Lake Constance. *J. Geophys. Res.*, **115**, CI2045.
- Galmiche, M., Hunt J. Thual O. & Bonneton P. 2001. Turbulence-mean field interactions and layers formation in a stratified fluid. *European Journal of Mechanics*, **20**, 577–585.

- Garcia, C.M., Jackson, P., & Garcia, M. 2006. Confidence intervals in the determination of turbulence parameters. *Experiment in Fluids*, **41**, 91–101.
- Gill, A.E. 1982. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press.
- Granger, Robert Alan. 1995. *Fluid Mechanics*. Dover Pubns.
- Helfrich, K., & Melville, W. K. 2006. Long nonlinear internal waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38**, 395 – 425.
- Hodges, B., Imberger, J., Saggio, A., & Winters, K. B. 2000. Modeling Basin-Scale Waves in Stratified Lakes. *Limnol. Oceanogr.*, **45**, 1603–1620.
- Horn, D.A., Imberger, J., & Ivey, G. 2001. The degradation of large-scale interfacial gravity waves in lakes. *J. Fluid. Mech.*, **434**, 181–207.
- Horn, D.A., Imberger, J., Ivey, G., & Redekopp, L.G. 2002. A Weakly Nonlinear Model for Long Internal Waves in Closed Basins. *J. Fluid. Mech.*, **467**, 269–287.
- Horn, D., Imberger J. & Ivey G. 2000. A weakly nonlinear model of long internal waves in lakes. *Pages 331–336 of: G. A. Lawrence, R. Pieters & N. Yonemitsu (ed), Stratified Flows*, vol. 1. 5th Intl Symp. on Stratified flows, University of British Columbia.
- Imberger, J. 1998. *Flux path in a stratified lake: A review*. 1 - 17 in J. Imberger [ed]. Physical processes in Lakes and Oceans. American Geophysical Union.
- Imberger, J., & Hamblin, P. 1982. Dynamics of lakes, reservoirs, and cooling ponds. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **14**, 153–187.
- Laugenie, Cl. 1971. Elementos de la cronología glaciaria en los Andes chilenos meridionales. *Cuadernos del Sur*, **1**, 7–20.
- Lemmin, U., Mortimer, C.H., & Bäuerle, E. 2005. Internal seiche dynamics in Lake Geneva. *Limnol. Oceanogr.*, **50**, 207–216.
- Lorke, A., Müller, B., Maerki, M., & A., Wüest. 2003. Breathing sediments: The control of diffusive transport across the sediment-water interface by periodic boundary layer turbulence. *Limnol. Oceanogr.*, **48**, 2077–2085.
- Meruane, C, & Niño, Y. 2005. Modelos numéricos y mediciones de campo: herramientas complementarias para el estudio de lagos: Caso Lago Villarrica. XVII Congreso SOCHID.
- Monismith, S.G. 1985. Wind-forced motion in stratified lakes and their effect on mixed-layer shear. *Limnol. Oceanogr.*, **30**, 771–783.
- Mortimer, C. 1951. Water movements in lakes during summer stratification; Evidence from the distribution of temperature in windermere. *Freshwater Biological Association*, **236**, 355–398.
- Mortimer, C. 1974. Lakes Hydrodynamics. *Mill. Internat. Verein. Limnol*, **20**, 124–192.
- Niño, Y., Caballero, R., & Reyes, L. 2003. Mixing and Interface Dynamics in a Two-Layer Stratified Fluid Due to Surface Shear Stress. *J. Hydr. Res.*, **41**, 609–621.

- Niño, Y., & Tamburrino, A. 2004a. *Coriolis Effect on Surface and Internal Waves*. Tech. rept. Universidad de Chile.
- Niño, Y., & Tamburrino, A. 2004b. *Flow and Transport Equations in Surface Water*. Tech. rept. Universidad de Chile.
- Niño, Y., & Tamburrino, A. 2004c. *Stratification and Mixing in Lakes and Reservoir*. Tech. rept. Universidad de Chile.
- Pedlosky, J. 1979. *Geophysical fluid dynamics*. New york: Springer-Verlag.
- Rozas, C., de la Fuente, A., Y., Niño, & Ulloa, H. 2009a. Análisis modal para la caracterización de ondas internas en un lago estratificado. Aplicación al lago Villarrica. XIX Congreso Chileno de Hidráulica.
- Rozas, C., de la Fuente, A., Niño, Y., & Ulloa, H. 2009b. Evolution of internal waves in a rotating, stratified lake forced by wind. Field observations and numerical simulations in Lake Villarrica, Chile. Proc. XXXII IAHR Congress, Vancouver, Canada.
- Rueda, F. J., Schladow, S. G., Monismith, S., & Stacey, M. 2005. On the effects of topography on wind and the generation of currents in a large multi-basin lake. *hydrobiologia*, **532**, 139–151.
- Shimizu, K., & Imberger, J. 2008. Energetics and damping of basin-scale internal waves in a strongly stratified lake. *Limnol. Oceanogr.*, **53**, 1574–1588.
- Shimizu, K., & Imberger, J. 2009. Damping mechanisms of internal waves in continuously stratified rotating basins. *J. Fluid. Mech.*, **637**, 137–172.
- Shintani, T., de la Fuente, A., Niño, Y., & Imberger, J. 2010. Generalizations of the Wedderburn number: Parameterizing upwelling in stratified lakes. *Limnol. Oceanogr.*, **55**, 1377–1389.
- Spiegel, M. R. 1970. *Mathematical Handbook Of Formulas And Tables*. McGraw-Hill Book Co., USA.
- Spigel, R., & Imberger, J. 1980. The Classification of Mixed-Layer Dynamics in Lakes of Small to Medium Size. *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 1104–1121.
- Spigel, R., & Imberger, J. 1987. Mixing Processes Relevant in Phytoplankton Dynamics in Lakes. *New Zeal. J. Mar. Fresh.*, **21**, 361–377.
- Staquet, C., & Sommeria, J. 2002. Internal gravity waves: From Instabilities to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 559–93.
- Stocker, R., & Imberger, J. 2003. Energy Partitioning and Horizontal Dispersion in a Stratified Rotating Lake. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 512–529.
- Stocker, R., J., Imberger, & D'alpaos, L. 2000. An analytical model of a circular stratified rotating basin under the effect of periodic wind forcing. *In: Stratified Flows, 2000*.
- Ulloa, H. 2009. *Campaña Lago Villarrica - Verano 2009*. Tech. rept. Universidad de Chile.
- Ulloa, H., Rozas, C., de la Fuente A., & Y., Niño. 2010. Theoretical, field and experimental study on internal wave dynamics in rotating stratified basins. *In: VI International Symposium on Environmental Hydraulics, Athens, Greece*. Proc. VI International Symposium on Environmental Hydraulics, Athens, Greece.

- UNESCO. 1981. Tenth report of the joint panel on oceanography tables and standards. Sidney, B.C. Canada.
- Wake, G.W., Ivey, G., Imberger, J., & McDonald, N.R. 2005. The Temporal Evolution of a Geostrophic Flow in a Rotating Stratified Basin. *Dynam. Atmos. Oceans*, **39**, 189–210.
- Wüest, A., & Lorke, A. 2003. Small-Scale Hydrodynamics in Lakes. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **35**, 373–412.
- Wüest, A., Piepke, G., & Van Senden, D. 2000. Turbulent kinetic energy balance as a tool for estimating vertical diffusivity in wind-forced stratified waters. *Limnol. Oceanogr.*, **45**, 1388 – 1400.

Capítulo 7

Anexos

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos, divididos en diferentes apéndices.

7.1. Apéndice I: Resultados de la propagación de error

En la Tabla 7.1 se presentan los resultados de la propagación de error de las variables involucradas en el experimento.

7.2. Apéndice II: Análisis estadístico de las series de tiempo

Se presenta el análisis estadístico realizado a las series de tiempo del desplazamiento de la interfaz de densidad. Los tres estadísticos principales estudiados fueron la varianza, σ_η^2 , la media, μ_η , y el valor cuadrático medio, ψ_η^2 . En la Figura 7.1 se resumen los resultados obtenidos.

7.3. Apéndice III: Espectro de densidad potencial

Se presentan en las Figuras 7.2, 7.3 y 7.4 los resultados del análisis del espectro de densidad potencial (PSD) de las series de tiempo. En cada uno de los espectros se identificó la frecuencia correspondiente a la onda Kelvin fundamental. Además se identificó las frecuencias de los seis máximos peak de energía.

7.4. Apéndice IV: Clasificación modal de frecuencias dominantes

En la Tabla 7.2 $K_{(i,j)}$ corresponde a una onda interna Kelvin de modo azimutal i y radial j , por otra parte, $P_{(i,j)}$ corresponde a una onda interna Poincaré de modo azimutal i y radial j . Además σ_t y σ_e corresponden a las frecuencias adimensionales teórica y experimentales respectivamente.

7.5. Apéndice V: Características físicas y temporales de las ondas Solitón-Kelvin

En la Tabla 7.3 se presentan los resultados experimentales del tiempo de empujamiento, la amplitud inicial, el periodo medio del tren de solitones, la celeridad y la longitud de onda del primer solitón.

Tabla 7.1: Errores cuantificados en función de la desviación estándar de las mediciones experimentales

Run N°	σ_{h_1} [cm]	σ_{h_2} [cm]	σ_{H_t} [cm]	σ_{η_0} [cm]	σ_{ϵ} [%]	σ_{c_i} [cm/s]	$\sigma(T_s/T_i)$ [-]	σ_f [s ⁻¹]	σ_{h_*} [-]	σ_W [-]	σ_S [-]
1	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.024	0.008	0.002	0.025	0.022
2	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.008	0.008	0.002	0.007	0.018
3	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.025	0.004	0.002	0.027	0.012
4	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.009	0.004	0.002	0.008	0.010
5	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.023	0.002	0.002	0.022	0.005
6	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.008	0.002	0.002	0.006	0.005
7	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.024	0.002	0.002	0.025	0.006
8	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.009	0.002	0.002	0.008	0.006
9	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.024	0.001	0.002	0.025	0.005
10	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.008	0.001	0.002	0.007	0.004
11	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.024	0.001	0.002	0.025	0.000
12	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.009	0.001	0.002	0.009	0.000
13	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.026	0.000	0.002	0.028	0.005
14	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.009	0.000	0.002	0.008	0.004
15.1	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.07	0.012	0.002	0.002	0.014	0.014
15.2	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.07	0.040	0.002	0.002	0.051	0.017
16.1	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.008	0.002	0.002	0.005	0.004
16.2	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.022	0.002	0.002	0.017	0.004
17.1	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.009	0.002	0.002	0.004	0.003
17.2	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.024	0.002	0.002	0.014	0.003
18.1	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.000	0.002	0.004	0.005	0.002
18.2	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.000	0.002	0.004	0.014	0.001
19	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.026	0.000	0.002	0.028	0.005
20	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.05	0.009	0.000	0.002	0.009	0.005
21	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.000	0.001	0.004	0.015	0.001
22	0.05	0.05	0.07	0.05	6.9E-06	0.04	0.104	0.008	0.004	0.014	0.003

Tabla 7.2: Clasificación de ondas internas mediante frecuencias adimensionales teóricas.

Exp N°	T_i [s]	S [-]	Modo (azm,rad)	σ_t [-]	σ_e [-]	Exp N°	T_i [s]	S [-]	Modo (azm,rad)	σ_t [-]	σ_e [-]
1(a)	64.1	0.20	$K_{(1,1)}$	0.22	0.21	2(b)	58.6	0.21	$K_{(1,1)}$	0.24	0.23
	26.8		$K_{(2,1)}$	0.45	0.51		28.4		$K_{(2,1)}$	0.47	0.48
	20.6		$K_{(3,1)}$	0.67	0.66		20.5		$K_{(3,1)}$	0.70	0.67
	15.5		$K_{(4,1)}$	0.89	0.88		15.5		$K_{(4,1)}$	0.93	0.88
	12.6		$P_{(1,1)}$	-1.11	1.08		12.5		$P_{(1,1)}$	-1.12	1.09
	10.8		$P_{(2,1)}$	-1.25	1.26		9.6		$P_{(3,1)}$	-1.44	1.42
3(c)	57.0	0.30	$K_{(1,1)}$	0.36	0.36	4(d)	56.6	0.31	$K_{(1,1)}$	0.37	0.37
	42.5		?	?	0.49		28.4		$K_{(2,1)}$	0.73	0.73
	28.4		$K_{(2,1)}$	0.70	0.73		17.1		$P_{(1,1)}$	-1.23	1.21
	19.6		$K_{(3,1)}$	1.04	1.06		15.1		$K_{(4,1)}$	1.43	1.37
	15.1		$P_{(2,1)}$	-1.48	1.37		12.1		$P_{(3,1)}$	-1.80	1.71
11.8	$P_{(3,1)}$	-1.76	1.75	9.5	$P_{(4,1)}$	2.10	2.18				
5(e)	51.3	0.47	$K_{(1,1)}$	0.61	0.58	6(f)	51.0	0.48	$K_{(1,1)}$	0.61	0.59
	26.8		$K_{(2,1)}$	1.17	1.12		25.4		$K_{(2,1)}$	1.20	1.18
	17.6		$K_{(3,1)}$	1.72	1.70		21.2		$P_{(1,1)}$	-1.47	1.42
	14.6		$P_{(2,1)}$	-1.94	2.05		17		$K_{(3,1)}$	1.76	1.76
	10.6		$P_{(4,1)}$	-2.91	2.83		12.8		$P_{(4,1)}$	2.30	2.34
9.0	$P_{(5,1)}$	-3.39	3.33	8.7	$P_{(5,1)}$	-3.46	3.45				
7(g)	46.5	0.45	$K_{(1,1)}$	0.58	0.65	8(h)	46.5	0.46	$K_{(1,1)}$	0.59	0.65
	25.6		$K_{(2,1)}$	1.12	1.17		25.4		$K_{(2,1)}$	1.15	1.18
	20.6		$P_{(1,1)}$	-1.43	1.46		20.6		$P_{(1,1)}$	-1.44	1.46
	16.7		$P_{(2,1)}$	-1.88	1.80		16.7		$P_{(2,1)}$	-1.91	1.80
	14.2		$K_{(4,1)}$	2.14	2.11		14.3		$K_{(4,1)}$	2.19	2.10
12.5	$P_{(3,1)}$	-2.34	2.40	12.4	$P_{(3,1)}$	-2.38	2.42				
9(i)	51.3	0.52	$K_{(1,1)}$	0.74	0.69	10(j)	51.3	0.55	$K_{(1,1)}$	0.74	0.69
	27.0		$K_{(2,1)}$	1.40	1.31		27.0		$K_{(2,1)}$	1.40	1.31
	18.6		$K_{(3,1)}$	2.04	1.90		18.4		$K_{(3,1)}$	2.04	1.92
	16.1		$P_{(3,1)}$	-2.74	2.19		15.9		$P_{(3,1)}$	-2.74	2.22
	12.8		$P_{(4,1)}$	-3.32	2.76		12.7		$P_{(4,1)}$	-3.32	2.78
10.6	$P_{(5,1)}$	-3.90	3.33	10.6	$P_{(5,1)}$	-3.90	3.33				
11(k)	51.3	0.63	$K_{(1,1)}$	0.87	0.82	12(l)	51.3	0.60	$K_{(1,1)}$	0.82	0.82
	27.0		$K_{(2,1)}$	1.64	1.56		25.6		$P_{(1,1)}$	-1.67	1.65
	17.7		$K_{(3,1)}$	2.37	2.39		17.1		$P_{(2,1)}$	-2.31	2.47
	13		?	?	3.25		14.5		$K_{(4,1)}$	2.92	2.91
	9.9		$P_{(2,2)}$	4.29	4.27		12.1		$P_{(4,1)}$	-3.58	3.49
8.9	?	?	4.75	9.8	$K_{(6,1)}$	4.25	4.31				
19(o)	73.7	0.8	?	?	0.407	20(p)	101.5	0.8	?	?	0.296
	46.5		?	?	0.645		46.9		?	?	0.640
	25.8		$K_{(1,1)}$	1.15	1.163		25.6		$K_{(1,1)}$	1.15	1.172
	16.4		$P_{(1,1)}$	2.00	1.829		17.1		?	?	1.754
	12.1		?	?	2.479		12.8		?	?	2.344
	10.4		$P_{(2,1)}$	-2.89	2.885		10.1		$P_{(2,1)}$	-2.89	2.970

Tabla 7.3: Resumen de características físicas y temporales de la estructural Soliton-Kelvin observada experimentalmente

Experimentos	T_s	a_{sk_0}	T_{s_1}	C_{isk}	λ_{exp_0}
N°	[s]	[cm]	[s]	[cm/s]	[cm]
1	36.8	1.10	5.44	8.47	46.10
2	18.5	1.42	6.65	8.81	58.63
3	37.1	1.21	5.44	8.09	43.99
4	18.4	2.54	6.70	8.47	56.75
5	37.0	2.43	5.44	8.81	47.97
6	18.7	3.08	7.86	9.12	71.71
7	36.8	2.39	6.65	8.47	56.35
8	18.6	3.29	8.47	8.66	73.30
9	37.0	1.23	7.86	8.81	69.29
10	18.5	1.81	7.86	8.81	69.29
11	37.6	2.80	7.26	8.43	61.16
12	18.9	3.50	9.07	8.05	73.05
13	37.1	0.88	15.12	8.09	122.28
14	18.4	3.08	-	8.47	-
15.1	25.6	0.80	6.05	6.63	40.09
16.1	19.8	2.22	9.68	9.64	93.32
17.1	23.5	1.42	12.10	10.23	123.74
18.1	∞	-	-	8.58	-
15.2	44.0	0.29	6.05	6.00	36.28
16.2	39.6	1.80	7.26	9.64	69.99
17.2	46.9	1.35	9.07	10.23	92.81
18.2	∞	-	-	8.58	-
19	18.5	4.19	9.07	8.09	73.37
20	37.1	3.00	7.33	8.09	59.28

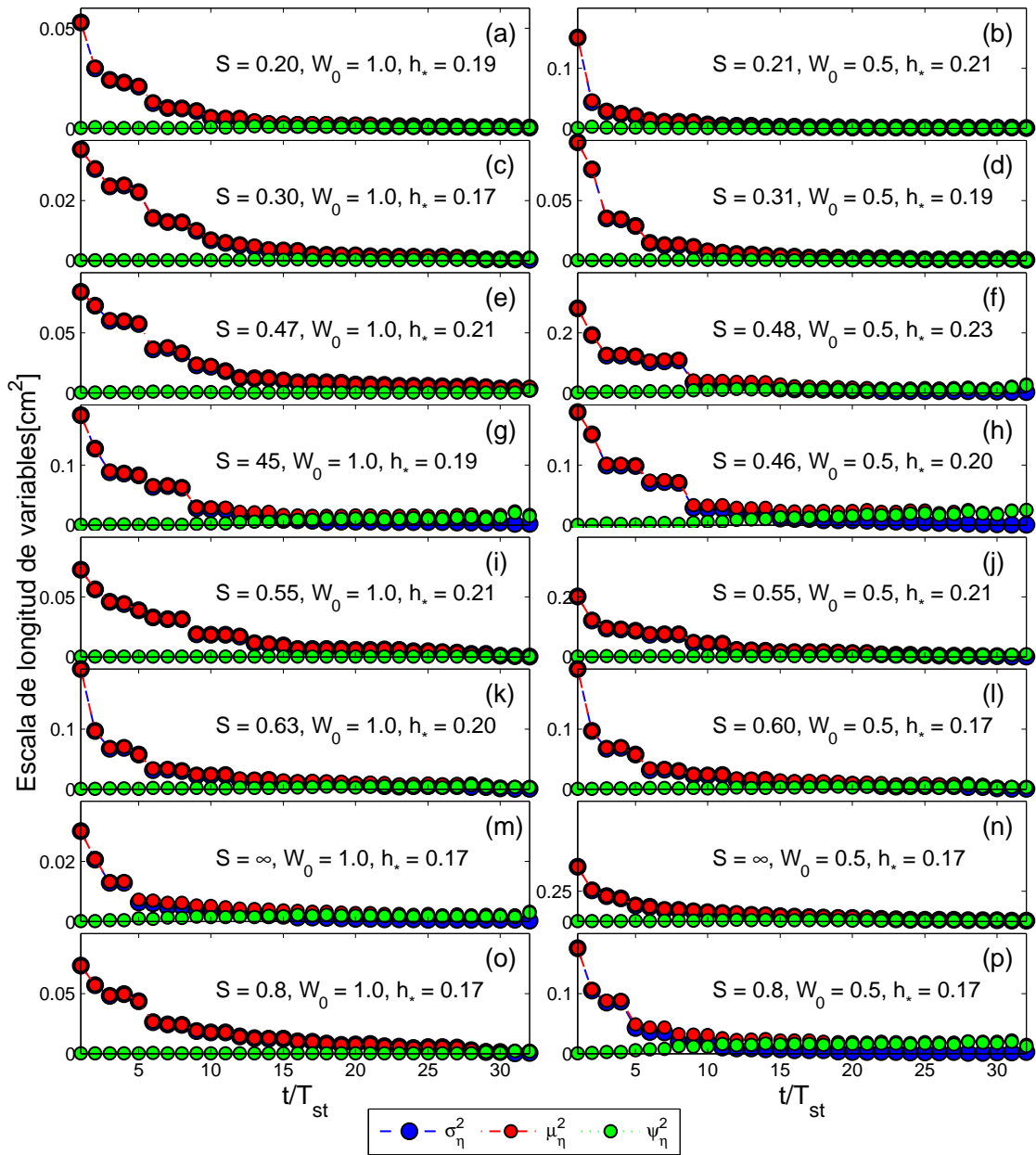


Figura 7.1: Varianza, σ_η^2 ; media, μ_η ; y el valor cuadrático medio, ψ_η^2 de las series de tiempo del desplazamiento de la interfaz de densidad.

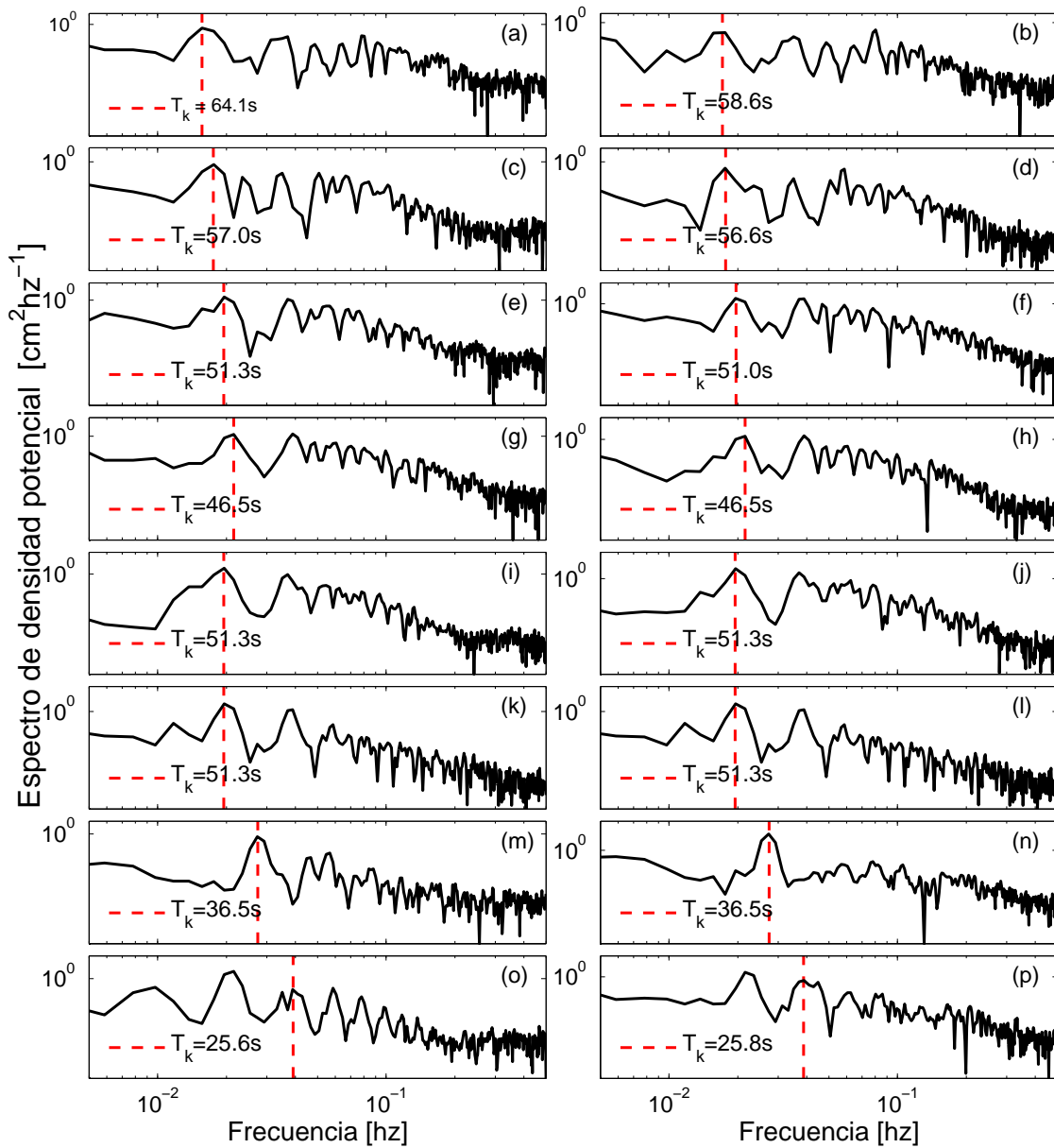


Figura 7.2: Espectros de densidad potencial del primer set de series de tiempo de la interfaz de densidad.

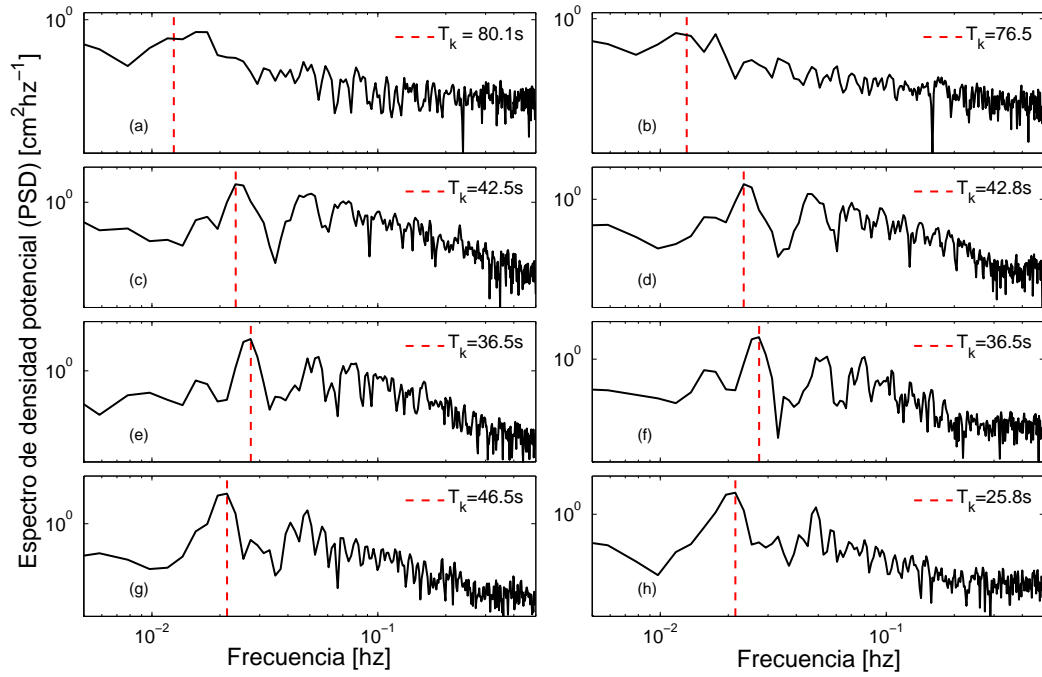


Figura 7.3: Espectros de densidad potencial del segundo set de series de tiempo de la interfaz de densidad.

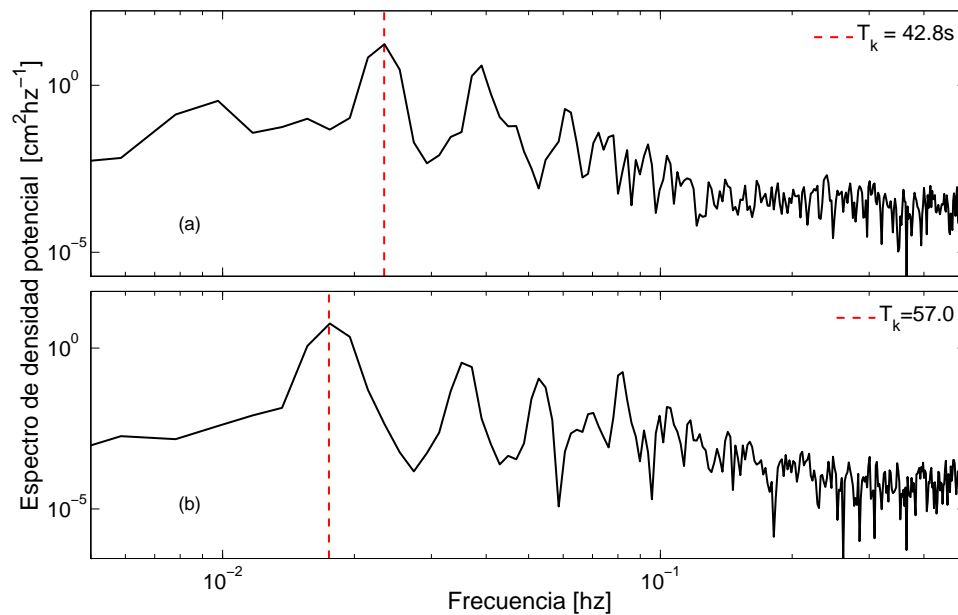


Figura 7.4: Espectros de densidad potencial del tercer set de series de tiempo de la interfaz de densidad.

7.6. Apéndice VI: Interacción Kelvin-Poincaré

En las Figuras 7.5, 7.6 y 7.7 se exponen los gráficos de la importancia que tiene la interacción Kelvin-Poincaré en el desarrollo de las series de tiempo del desplazamiento vertical de la interfaz de densidad. La variación de la interfaz de densidad en el tiempo, $\eta_i(t)$, está escalada por el espesor de la capa 1, h_1 , de cada experimento.

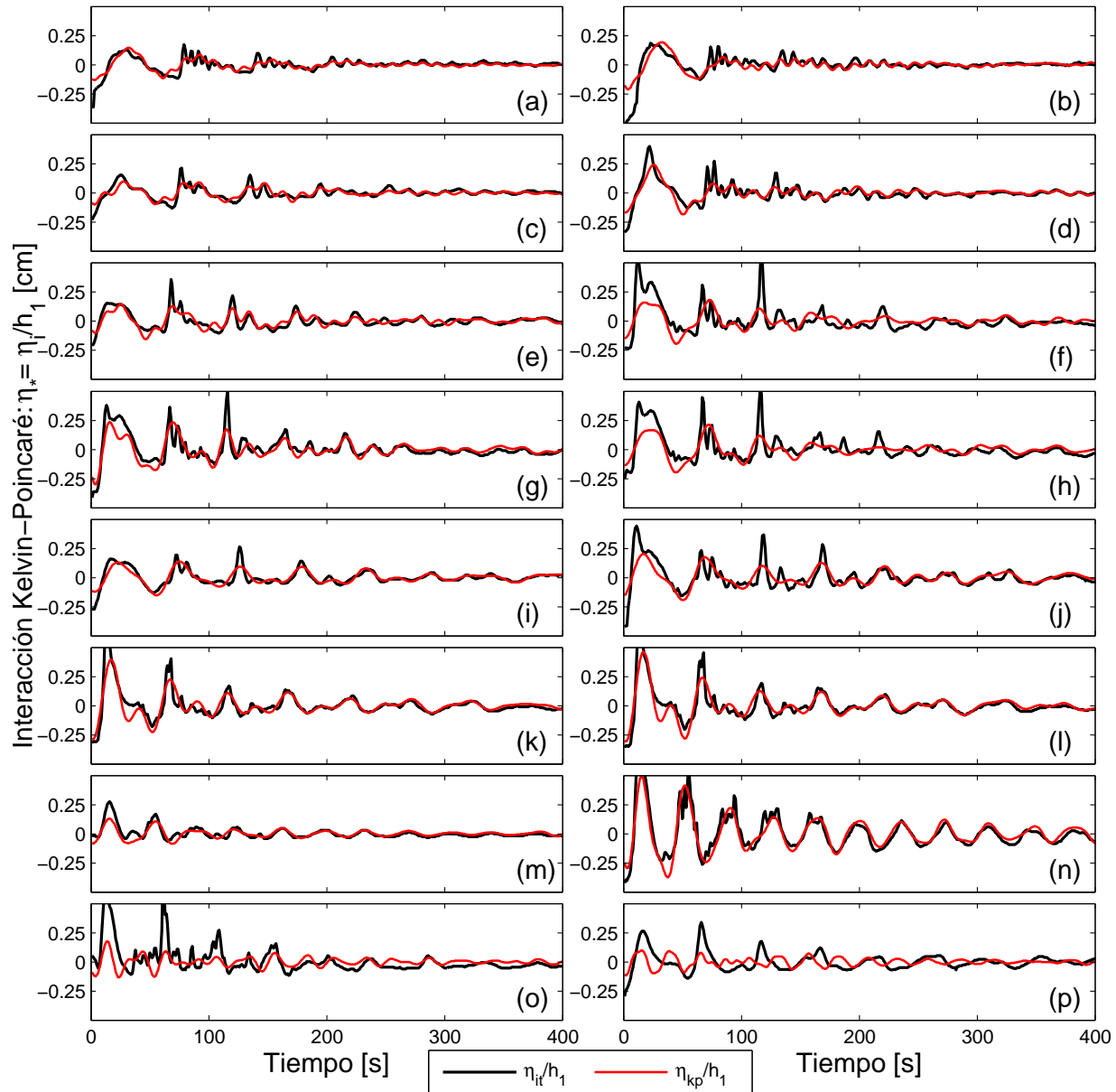


Figura 7.5: Primer set de experimentos: series de tiempo de interfaz de densidad e interacción Kelvin-Poincaré.

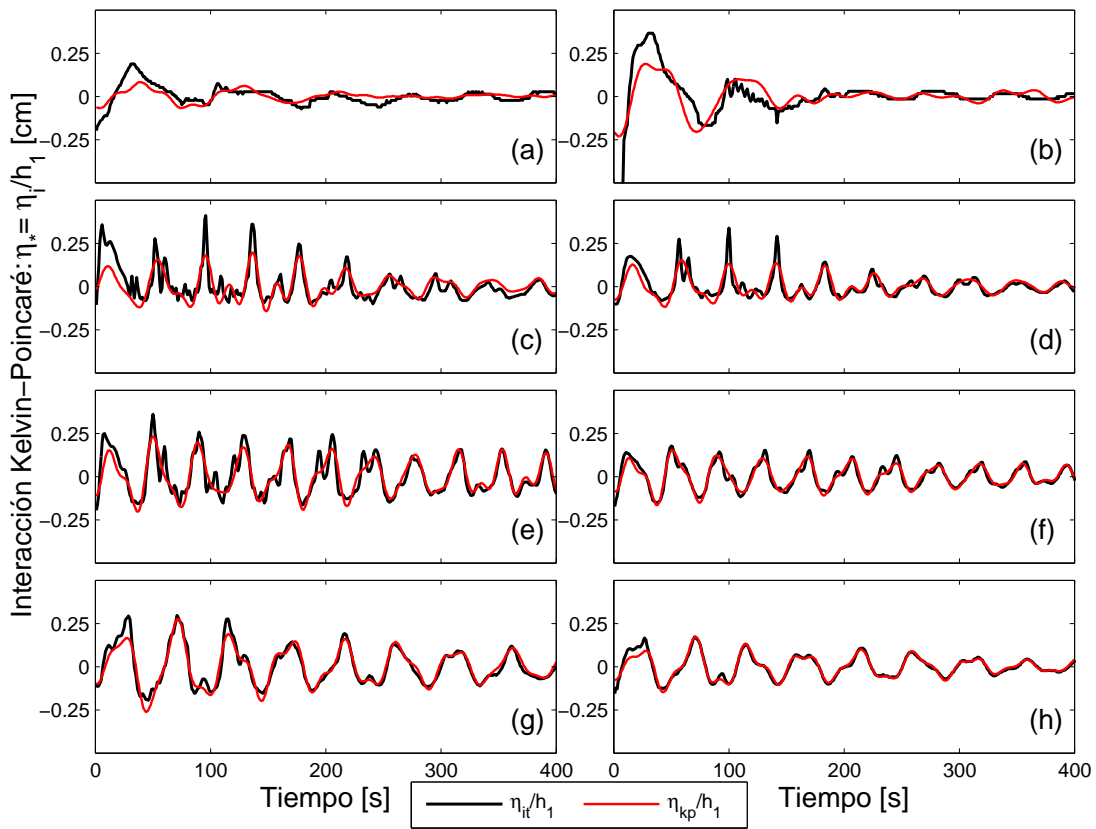


Figura 7.6: Segundo set de experimentos: series de tiempo de interfaz de densidad e interacción Kelvin-Poincaré.

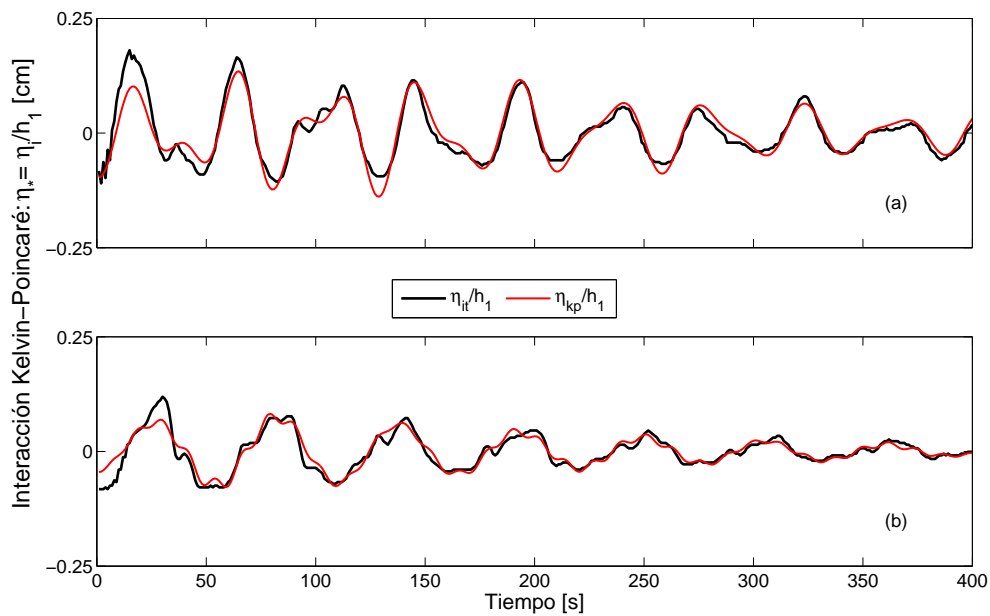


Figura 7.7: Tercer set de experimentos: series de tiempo de interfaz de densidad e interacción Kelvin-Poincaré.