

**UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS**

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA MAXIMUM/MINIMUM AUTOCORRELATION
FACTORS (MAF) PARA LA COSIMULACIÓN DE LEYES EN YACIMIENTOS
MINERALES**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

JIMMY EDWARD IP LAM

**PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN
JULIÁN ORTIZ CABRERA
MARIO SOLARI MARTINI**

**SANTIAGO DE CHILE
MARZO 2011**

...Familia y amigos

RESUMEN

En el ámbito minero, los estudios geoestadísticos multivariantes para la estimación de recursos son complejos, ya que necesitan modelar no solamente la continuidad espacial de cada variable sino que también las dependencias entre ellas.

En investigaciones recientes, se ha desarrollado una técnica llamada *maximum/minimum autocorrelation factors* (MAF) para simplificar dichos estudios, creando nuevas variables (factores) descorrelacionadas a dos distancias diferentes de separación, mediante una combinación lineal de las variables originales. En ciertos casos estos factores pueden considerarse como totalmente independientes, reduciendo así el problema de modelamiento multivariante a una serie de problemas univariantes.

En este trabajo se presentan y comparan la técnica de cosimulación de leyes vía MAF y la forma tradicional, para determinar sus ventajas y desventajas. Se estudia dos bases de datos, correspondientes a un yacimiento de cobre y otro de hierro.

Se usa como referencia la forma tradicional de cosimular múltiples variables, la que consiste en transformar las variables originales en variables Gaussianas, ajustar un modelo lineal de correogionalización (variogramas simples y cruzados), generar realizaciones y condicionarlas a los datos por cokriging. En el caso MAF, se simula cada uno de los factores independientes y luego se recombinan para obtener las variables originales.

Se concluye que la cosimulación vía MAF tiene varias ventajas sobre la cosimulación tradicional: se simplifica el problema de modelamiento (sólo se debe ajustar los variogramas simples de los factores MAF, en lugar de un modelo de correogionalización completo) y se reduce el tiempo de simulación. En los casos estudiados, la cosimulación vía MAF reproduce bastante bien las distribuciones univariantes, correlaciones espaciales y la correlación cruzada entre las variables correogionalizadas a simular.

Sin embargo, el principal inconveniente proviene de la pérdida de información en la presencia de muestreos heterotópicos, cuando no todas las variables son conocidas en las mismas ubicaciones. La información en las ubicaciones donde no se conoce alguna variable se pierde por completo, por lo que la cosimulación vía MAF no está condicionada a todos los datos originales. En cambio, la cosimulación tradicional no sufre de este inconveniente, por lo que resulta ser más versátil en cuanto al manejo de bases de datos heterotópicos.

ABSTRACT

Currently, in the mining industry, multivariate studies for the estimation of resources are complex. They not only need to model the spatial continuity of each variable, but also the dependencies between variables.

Recent research have developed a technique called minimum / maximum autocorrelation factors (MAF), which simplifies such multivariate studies, creating new variables (factors) uncorrelated for two separation distances, by a linear combination of the original variables. In some cases these factors can be considered as completely independent, reducing the multivariable modeling problem to a series of univariate problems.

This paper presents and compares different simulations techniques (traditional and MAF approaches) to determine their advantages and disadvantages. Two databases, corresponding to a copper deposit and an iron deposit, are considered.

The multivariate traditional cosimulation, which consists in transforming the original variables to Gaussians variables, fit a linear model of coregionalization (direct and cross variograms) generate realizations and condition them to the data by cokriging, is used as a reference. In the case of MAF, one gets independent variables or factors, which can be simulated independently and then recombined to obtain the original variables

We conclude that the MAF cosimulation has several advantages over traditional cosimulation: it simplifies the modeling problem (only the direct variograms for MAF factors are fitted, rather than a full coregionalization model) and it reduces the CPU time to generate the realizations. MAF cosimulation reproduces fairly well the univariate distributions, spatial correlation and cross correlation of the coregionalized variables to simulate.

However, the main drawback comes from the loss of information in the presence of heterotopic samplings, when not all the variables are known at all the data locations: the information at the data points with missing variables is completely lost, so the MAF cosimulation is not conditioned to all the original data. The traditional cosimulation approach does not suffer from this problem, so, it is more versatile in the management of heterotopic databases.

AGRADECIMIENTOS

Agradecer a mi familia, sobre todo a mi mamá, a quien le dedico cien por ciento este trabajo. A mi mamá por todo el cariño y las enseñanzas que me ha inculcado, para ser una excelente persona. A mi papá que fue el verdadero motivador para terminar la carrera. A mi hermano Steven por todo lo que me ha ayudado en todas las cosas, que son miles, un gran soporte. A mi hermana Teresa quien siempre me motivó por terminar esta carrera y recordarme siempre el camino correcto de los principios y de las promesas. Los quiero infinito. Finalmente a mi tío Fernando por toda la ayuda.

A todos mis amigos que me han acompañado en estos seis años de carrera, a todos los del departamento que me ayudaron en todo, a estudiar, en tareas etc. A mis mejores amigos, los cuales siempre compartieron de su tiempo para tener un grato almuerzo (que voy a extrañar), sin importar el estado de ánimo que tuviera, alegre, estresado, enojado, cansado etc. A Velin por todo el tiempo que somos amigos y todas las cosas que hemos hecho. A Camilo porque siempre apaña a todo. Verdaderos amigos por siempre.

A los profesores encargados de guiarme en este proceso, sobre todo a mi profesor guía Xavier Emery el cual fue un pilar fundamental para poder realizar este trabajo, destaco en él su excelente voluntad, su buena disposición y su gran conocimiento. También a todos los profesores y funcionarios del departamento, que gracias a ellos aprendí mucho.

Al Proyecto Fondecyt 1090013 por el tema de esta memoria relacionada a la aplicación de la teoría MAF y su financiamiento, que es muy interesante y ha ampliado un poco más los conocimientos sobre esta técnica MAF. Agradecer también a Codelco por patrocinar la Cátedra de Evaluación de Yacimientos.

ÍNDICE

RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
ÍNDICE	iv
ÍNDICE DE FIGURAS	vi
ÍNDICE DE TABLAS	viii
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación del trabajo	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo General	2
1.2.2. Objetivos Específicos	2
1.3. Alcances	2
2. ANTECEDENTES	4
2.1. Variable regionalizada y función aleatoria	4
2.2. Modelamiento multivariable	6
2.3. Kriging y cokriging	6
2.4. Simulación y cosimulación	7
2.5. Análisis en componentes principales	8
2.6. Teoría Max/Min Autocorrelation factors. MAF	9
2.7. Análisis factorial geoestadístico	10
3. METODOLOGÍA	12
3.1. Estudio exploratorio y variográfico	12
3.2. Cosimulación tradicional	12
3.3. Simulación mediante MAF	13
3.4. Comparación de las simulaciones	13
4. CASO DE ESTUDIO 1: YACIMIENTO POLIMETALICO DE COBRE	16
4.1. Análisis exploratorio de datos	16
4.2. Cosimulación tradicional	21
4.2.1. Transformar variables originales a gaussianas:	21
4.2.2. Estudio variográfico	22
4.2.3. Cosimulación de las variables	23
4.3. Cosimulación tradicional base homotópica	25
4.4. Simulación vía MAF, con vector de distancia $h=10m$	27
4.4.1. Definir una distancia de separación	27
4.4.2. Cálculos para crear las variables MAF	28
4.4.3. Estudio variográficos univariable	28
4.4.4. Simulación condicional mediante “bandas rotantes”, cien simulaciones ..	29
4.4.5. Recombinar los MAF para obtener las variables gaussianas	29
4.4.6. Transformar de vuelta las simulaciones gaussianas a las variables originales mediante una anamorfosis inversa	29
4.5. Caso 4: Simulación vía MAF con $h=20m$ y $h=30m$	31
4.6. Consideraciones de tiempo para cada (co)-simulación.	33
5. CASO DE ESTUDIO 2: YACIMIENTO POLIMETALICO DE FIERRO	34
5.1. Análisis exploratorio de datos	34
5.2. Caso 1: cosimulación tradicional	41

5.2.1.	Transformar variables originales a gaussianas:.....	41
5.2.2.	Cosimulación de las variables.....	43
5.3.	Caso 2: Cosimulación tradicional base homotópica.....	45
5.4.	Caso 3: Simulación vía MAF h= 10m.....	48
5.5.	Caso 4: Simulación vía MAF h= 25m y h= 50m.....	50
5.6.	Consideraciones de tiempo para cada (co)-simulación.	51
6.	DISCUSIÓN DE RESULTADO.....	52
6.1.	Tiempos de simulación.....	52
6.2.	Reproducción de las distribuciones estadísticas.....	52
6.3.	Reproducción de la correlación espacial (variogramas).....	54
6.4.	Reproducción de la correlación entre las variables.....	55
6.5.	Condicionamiento de los datos.....	56
7.	CONCLUSIONES.....	58
8.	REFERENCIAS.....	59
9.	ANEXO A: yacimiento polimetálico.....	60
9.1.	Datos heterotópicos.....	60
9.2.	Histogramas.....	61
9.3.	Modelo de corregeionalización.....	63
9.4.	Matrices de correlación a diferentes distancias.....	64
9.5.	Modelos variográficos para los factores de MAF.....	65
9.5.1.	Distancia h = 20m.....	65
9.5.2.	Distancia h = 30m.....	66
9.6.	Boxplot.....	67
9.7.	Estadísticas básicas.....	69
9.8.	Los histogramas promedio de las leyes simuladas.....	70
9.9.	Promedio de variogramas.....	72
9.10.	Matrices de correlación.....	74
9.11.	Desviación condicional.....	75
10.	ANEXO B: yacimiento de hierro.....	80
10.1.	Datos heterotópicos.....	80
10.2.	Histogramas.....	81
10.3.	Modelo de corregeionalización.....	82
10.4.	Matrices de correlación a diferentes distancias.....	83
10.5.	Modelos variográficos para los factores de MAF.....	84
10.5.1.	Distancia h = 10m.....	84
10.5.2.	Distancia h = 25m.....	85
10.5.3.	Distancia h = 50m.....	86
10.6.	Bloxplot.....	87
10.7.	Estadísticas básicas.....	89
10.8.	Los histogramas promedio de las leyes simuladas.....	90
10.9.	Promedio de variogramas.....	92
10.10.	Matrices de correlación.....	95
10.11.	Desviación estándar condicional.....	96

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Ejemplo de variograma	5
Figura 2: Esquema de procedimiento para realizar la comparación.....	14
Figura 3: Vista en planta y secciones de los sondajes	16
Figura 4: Histograma de leyes para cada variable.....	17
Figura 5: Gráficos de dispersión.....	18
Figura 6: Variogramas simples y cruzados	20
Figura 7: Histogramas para las variables gaussianas	21
Figura 8: Variogramas experimentales y modelados	22
Figura 9: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. heterotópica)	24
Figura 10: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. homotópica). ...	26
Figura 11: Variograma experimental y modelado.....	28
Figura 12: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=10m).....	30
Figura 13 :Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=20m).....	31
Figura 14: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=30m).....	32
Figura 15: Vista en planta y secciones de los sondajes	34
Figura 16: Planta representativa de la malla de sondajes 50 x 50 metros	34
Figura 17: Histogramas para cada variable.	36
Figura 18: Gráficos de dispersión.....	37
Figura 19: Variogramas simples y cruzados.....	39
Figura 20: Histogramas para las variables gaussianas.....	41
Figura 21 Variogramas experimentales y modelados.....	42
Figura 22: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. heterotópica). ..	44
Figura 23: Variogramas experimentales y modelados para las variables homotópicas	46
Figura 24 Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. homotópica)	47
Figura 25: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=10m).....	49
Figura 26: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=25m).....	50
Figura 27: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=50m).....	51
Figura 28: Histograma de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de cobre.....	53
Figura 29: Histograma de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de fierro.....	54
Figura 30: Desviación condicional, bloques seleccionados en yacimiento de cobre.	57
Figura 31: Desviación condicional, bloques seleccionados en yacimiento de fierro	57
Figura 32: Histogramas de las variables originales	61
Figura 33: Histogramas de las variables gaussianas.....	62
Figura 34: Variogramas experimentales y modelados para las variables homotópicas,	63
Figura 35: Variogramas de los MAF, h= 20m	65
Figura 36: Variogramas de los MAF, h= 30m	66
Figura 37: Boxplot de los promedios de los histogramas, Ag.....	67
Figura 38: Boxplot de los promedios de los histogramas, As	67
Figura 39: Boxplot de los promedios de los histogramas, Cu	68
Figura 40: Boxplot de los promedios de los histogramas, Sb	68
Figura 41: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Ag.....	70
Figura 42: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, As	70
Figura 43: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Cu	71
Figura 44: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Sb	71
Figura 45: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Ag y As ...	72

Figura 46: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Cu y Sb....	73
Figura 47: Ubicación de algunos bloques seleccionados en sectores con datos heterotópicos.....	75
Figura 48: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Ag	76
Figura 49: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, As.....	76
Figura 50 Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Cu.....	77
Figura 51: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Sb	77
Figura 52: Desviación estándar condicional, Ag.....	78
Figura 53: Desviación estándar condicional, As	79
Figura 54: Desviación estándar condicional, Cu.....	79
Figura 55: Desviación estándar condicional, Sb	79
Figura 56: Representación de sondajes homotópicos.....	80
Figura 57: Histogramas de las variables originales y gaussianas.....	81
Figura 58: Variogramas experimentales y modelados para las variables gaussianas homotópicas,	82
Figura 59: Variogramas de los MAF, h= 10m	84
Figura 60: Variogramas de los MAF, h= 25m	85
Figura 61: Variogramas de los MAF, h=50m	86
Figura 62: Boxplot de los promedios de los histogramas, Fierro.....	87
Figura 63: Boxplot de los promedios de los histogramas, Magnetismo.....	87
Figura 64: Boxplot de los promedios de los histogramas, Sílice.....	88
Figura 65: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Fierro	90
Figura 66: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Magnetismo.....	90
Figura 67: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Sílice.....	91
Figura 68: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Fierro.....	92
Figura 69: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Magnetismo	93
Figura 70: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Sílice	94
Figura 71: Ubicación de algunos bloques seleccionados cerca de datos heterotópicos.	96
Figura 72: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Fierro.....	96
Figura 73: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Magnetismo ..	97
Figura 74: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Sílice	97
Figura 75: Desviación estándar condicional, Fierro.....	98
Figura 76: Desviación estándar condicional, Magnetismo.....	98
Figura 77: Desviación estándar condicional, Sílice.....	99

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Parámetros de los yacimientos	15
Tabla 2: Estadísticas básicas de las variables.....	16
Tabla 3 Matriz de correlación.....	18
Tabla 4: Estadísticas básicas después de filtrar datos duplicados.	19
Tabla 5: Matriz de correlación después de filtrar datos duplicados.	19
Tabla 6: Parámetros para cálculo de variogramas experimentales.....	19
Tabla 7: Estadísticas básicas de los datos originales.....	21
Tabla 8: Parámetros para el cálculo de los variogramas experimentales	22
Tabla 9: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones.	24
Tabla 10: Estadísticas básicas de los datos homotópicos.	25
Tabla 11: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones.	25
Tabla 12: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones	29
Tabla 13: Tiempos de simulación.....	33
Tabla 14: Estadísticas básicas de las variables.....	35
Tabla 15: Matriz de correlación.....	37
Tabla 16: Estadística básica después de los filtros.....	38
Tabla 17: Parámetro para el cálculo de variogramas experimentales	38
Tabla 18: Estadísticas básicas de los datos originales.....	41
Tabla 19: Parámetros de cálculo de los variogramas experimentales	41
Tabla 20 : Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones	43
Tabla 21: Estadísticas básicas de los datos originales homotópicos	45
Tabla 22: Estadísticas básicas para el modelo de bloque, media de las cien simulaciones.....	47
Tabla 23: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones	48
Tabla 24: Tiempos de simulación.....	51
Tabla 25: Tiempos de simulación, enfoque tradicional y vía MAF 10m.....	52
Tabla 26: Estadísticas básicas de leyes simuladas por ambos enfoques	53
Tabla 27: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque tradicional	55
Tabla 28: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque MAF h=10m	56
Tabla 29: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque tradicional	56
Tabla 30: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque MAF.....	56
Tabla 31: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional heterotópica.....	69
Tabla 32: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional homotópica.....	69
Tabla 33: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=10m.	69
Tabla 34: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=20m.	69
Tabla 35: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=30m.	69
Tabla 36: Matriz de correlación, tradicional heterotópica.....	74
Tabla 37 Matriz de correlación, tradicional homotópica.....	74
Tabla 38: Matriz de correlación, MAF h=10m	74
Tabla 39: Matriz de correlación, MAF h =20m	74
Tabla 40: Matriz de correlación, MAF h=30m	74
Tabla 41: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional heterotópica.....	89
Tabla 42: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional homotópica.....	89
Tabla 43: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=10m.	89
Tabla 44: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=25m.	89
Tabla 45: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=50m.	89

Tabla 46: Matriz de correlación, tradicional heterotópica.....	95
Tabla 47: Tabla N° 2: Matriz de correlación, tradicional homotópica.....	95
Tabla 48: Matriz de correlación, vía MAF $h=10$	95
Tabla 49: Matriz de correlación, vía MAF $h=25m$	95
Tabla 50: Matriz de correlación, vía MAF $h=50m$	95

1. INTRODUCCIÓN

Cuantificar recursos en yacimientos con más de un elemento es muy importante, en particular si existen contaminantes que pueden hacer desfavorable el interés económico de una futura explotación de los recursos, pero puede resultar muy complejo debido a las posibles dependencias entre elementos.

En la actualidad se ha propuesto aplicar la teoría MAF (*maximum/minimum autocorrelation factors*) para la evaluación de recursos mineros, la cual simplifica y reduce los tiempos de simulación en los casos multivariados. Esta técnica consiste en transformar los casos multivariados en sencillos casos univariados, mediante la generación de nuevas variables o “factores” que son combinaciones lineales de las originales.

En los análisis estadísticos de datos multivariados se puede encontrar correlaciones entre las variables, las cuales son utilizadas como información adicional para estimar variables usando la información del resto de las variables, afinando o mejorando las estimaciones.

La teoría MAF está basada en la teoría de “análisis de componentes principales” (ACP). El ACP transforma un conjunto de variables correlacionadas en igual número de variables (llamados factores, componentes principales o componentes), no correlacionados entre sí, que contienen la información del conjunto inicial.

La teoría MAF es más específica, si bien descorrelaciona las variables en la misma ubicación al igual que la teoría ACP, esta técnica permite además que las variables se descorrelacionan a una distancia $h = \Delta$ determinada por el usuario. En casos específicos, cuando el modelo de correogionalización sólo presenta dos estructuras anidadas haría que estos nuevos factores sean independientes para todas las distancias. Para las simulaciones, esto hará que estos factores se puedan simular totalmente por sí solos. Finalmente recombinando estos factores se obtendrán las variables originales

Un problema es que la condición de independencia de los factores generalmente no se cumple para casos multivariados donde los modelos de correogionalización son muy complejos y mientras más variables se vuelven aún más complejos.

Otro punto interesante que se puede entender a priori, es la pérdida de información que significa trabajar con MAF, ya que en los yacimientos polimetálicos, donde existe una gran cantidad de variables, éstas no necesariamente se muestrean en todas las ubicaciones o puntos (tan sólo se tiene la información de una variable). Como se mencionó anteriormente, esta teoría crea factores mediante una combinación lineal de las variables originales, por lo tanto si falta alguna de esas variables en algún punto de medición, el factor no podrá ser calculado y se perderá

información. Tan solo si falta una variable, la información del punto se perderá aunque tenga por ejemplo cuatro de cinco variables.

1.1. Motivación del trabajo

En la actualidad se está tratando de usar esta teoría MAF debido a su simplicidad, sin verificar que se cumpla la condición de dos estructuras anidadas en el modelo de correogionalización, lo cual significa que las simulaciones pueden no ser las mejores. Por lo tanto es necesario verificar qué tan buenas son las simulaciones aplicando esta teoría, y cuáles son sus posibles falencias.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Comparar entre las (co)simulaciones de un yacimiento creadas a partir de la forma tradicional y las simulaciones mediante la aplicación de la teoría MAF.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Determinar las ventajas y desventajas de la aplicación de esta teoría para yacimientos polimetálicos.
- Realizar algunas recomendaciones en caso de utilizar esta teoría.
- Aplicar herramientas geoestadísticas de análisis multivariable.

1.3. Alcances

Para determinar las ventajas y desventajas de la aplicación de la teoría MAF se estudiarán dos bases de datos. La primera corresponde a un yacimiento polimetálico de cobre junto con otros metales como plata, arsénico y antimonio. La otra base de dato corresponde a un yacimiento de fierro, junto con su magnetismo y también la variable sílice. Estas bases datos presentan una característica en común, ambas contienen datos heterotópicos, es decir, hay puntos en que no se muestrean todas las variables. Las bases de datos se mostrarán con más detalles en los capítulos correspondientes.

Se simulan las leyes de estos yacimientos para hacer comparaciones con respecto a las diferentes formas de simular, tales como el método tradicional de cosimulación y las simulaciones vía MAF. Se analizarán los resultados según algunos criterios como reproducción de medias, histogramas y variogramas entre otras. Luego de obtener los resultados se hará una generalización de ambos yacimientos para ver la factibilidad de usar la teoría MAF y recomendar

en qué casos se puede aplicar. La metodología se muestra en el capítulo correspondiente, que puede aplicarse para cualquier base de datos.

2. ANTECEDENTES

2.1. Variable regionalizada y función aleatoria

La geoestadística comprende el estudio de los fenómenos regionalizados, es decir, de fenómenos distribuidos en el espacio. En el caso de la evaluación de recursos minerales, se entiende como espacio una región geográfica determinada, y como fenómeno, la mineralización de éste.

Una variable regionalizada es una variable numérica que presenta una distribución espacial definida dentro de un dominio limitado. Como característica general varía irregularmente en dicho dominio, por lo que se escapa a toda representación simplificadora, pero presenta cierta tendencia a una continuidad espacial, vale decir, suele ser coherente con el hecho de que en zonas de altos o bajos valores, los datos más cercanos presentan la misma tendencia.

Una variable regionalizada queda caracterizada por:

- Su naturaleza: puede ser continua, discreta o categórica
- El dominio o campo $D \subset \mathbb{R}^3$ en estudio, es decir las dimensiones espaciales que abarca la variable
- El volumen sobre el cual se mide (tamaño de soporte), dado que no es lo mismo medirla en puntos del espacio o en soportes mayores (bloques)

En cada posición x del espacio el valor de la variable regionalizada $z(x)$ es considerado una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. Al recorrer cada punto se obtiene una familia de variables aleatorias $\{Z(x), x \in D\}$ que constituyen una función aleatoria.

Una función aleatoria se caracteriza por su distribución espacial, que se representa mediante:

- Una función de distribución univariable $F(z)$:
Para todo z perteneciente a R $F(z) = \text{probabilidad } (Z(x) < z)$
- Funciones de distribución multivariadas:
 $F(z_1, \dots, z_n) = \text{prob } \{ Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_n) < z_n \}$

Sin embargo resulta ilusorio inferir la distribución espacial entera de una función aleatoria, dado el número finito de observaciones disponible sobre la variable regionalizada. Por esta razón en general se asume la distribución espacial invariante por traslación (estacionaridad) y

sólo se utilizan los dos primeros momentos de la función aleatoria, con lo que se obtiene una caracterización elemental de ésta.

El momento de primer orden corresponde a la esperanza (o media):

$$m = E[Z(x)]$$

Los momentos de segundo orden corresponden a:

- Varianza (dispersión de datos):

$$\sigma^2 = \text{var}[Z(x)]$$

- Covarianza (relación entre dos datos)

$$C(h) = \text{cov} [Z(x+h), Z(x)]$$

- Variograma (medida de disimilitud entre datos)

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \{ [Z(x) - Z(x+h)]^2 \}$$

El variograma es una herramienta que permite analizar el comportamiento espacial de una propiedad o variable sobre una zona dada como, por ejemplo, detectar anisotropías, correlación espacial y variabilidad con la distancia. Generalmente tiene la siguiente forma:

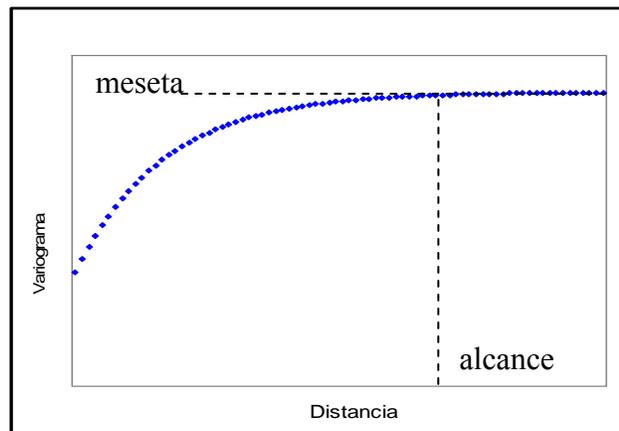


Figura 1: Ejemplo de variograma

Presentando un alcance, que es la distancia a la cual el variograma se estabiliza en una horizontal llamado meseta.

2.2. Modelamiento multivariable

El variograma cruzado entre dos variables (Z_1 y Z_2) para cierta distancia se define como sigue:

$$\gamma_{12}(h) = \frac{1}{2} E[(Z_1(x) - Z_1(x+h)) (Z_2(x) - Z_2(x+h))]$$

Dado un conjunto de variables, es preciso calcular y modelar el conjunto de variogramas simples (de cada variable) y cruzados (entre variables). Un modelo comúnmente utilizado es el llamado modelo lineal de correogionalización. Este modelo asume que todos los variogramas (simple y cruzados) se componen de las mismas funciones variográficas elementales pero asociadas a distintos coeficientes (mesetas). Existen tres aspectos principales a considerar en la construcción del modelo, uno de ellos es relacionado a la forma matemática (estructuras anidadas a usar), lo otro involucra los parámetros de estos (alcances y mesetas) y por último, las restricciones matemáticas (las matrices de mesetas o matrices de correogionalización deben ser simétricas y de tipo positivo).

2.3. Kriging y cokriging

El kriging es un método que permite estimar el valor de un punto o de un bloque a partir de una combinación lineal ponderada de los valores observados en los puntos circundantes, tomando en cuenta la continuidad espacial de la variable regionalizada según su variograma. Presenta las siguientes propiedades:

- Interpolación exacta en el sitio donde hay un valor conocido.
- Los valores estimados presentan una menor dispersión que los valores reales, esto se conoce como suavizamiento.
- El error de estimación tiene media nula y varianza mínima.

El cokriging es similar que el kriging, sólo que usa información adicional de las otras variables según su correlación espacial (modelo de correogionalización), es decir, necesita de los modelos de los variogramas cruzados para poder realizarse. Presenta las mismas propiedades que el kriging.

2.4. Simulación y cosimulación

Si una función aleatoria $Y(x)$ presenta la propiedad que toda combinación lineal de sus valores sigue una distribución gaussiana, se dice que la función aleatoria tiene una distribución multigaussiana. Dicha función aleatoria queda caracterizada por su media y su variograma

Las variables por lo general no se comportan como gaussianas, pero existen transformaciones para que así sea. Esta transformación se realiza mediante una función biyectiva llamada “anamorfosis”, que posee una transformación inversa para volver a las variables originales.

Para comprobar que, después de aplicar la anamorfosis, los datos siguen una distribución multigaussiana, se utilizan diversas herramientas, como la nube de correlación diferida. Corresponde a la nube de puntos formada por todos los pares de valores separados espacialmente por un vector h . Bajo la hipótesis multigaussiana, se tiene que las curvas de isodensidad de la distribución bivariable del par $\{Y(x), Y(x+h)\}$ son elipses concéntricas. Si h tiende a infinito las curvas de isodensidad se vuelven circulares, reflejando escasa o nula correlación entre pares de puntos distantes. En tanto que si h tiende a cero, las curvas se ubican en torno a la primera bisectriz, reflejando que existe un alto grado de correlación entre los puntos cercanos. La prueba consiste entonces en encontrar y verificar que, para un vector de separación h , la nube de correlación diferida tiene forma elíptica y cumple con las características geométricas señaladas.

La simulación corresponde a las múltiples realizaciones de un escenario particular por posible dentro de los márgenes impuestos como parámetros. De esta manera para los modelos multigaussianos, es necesario ajustar un modelo de correogionalización para luego ingresar los parámetros a ciertos algoritmos de simulación. En este trabajo se realizará bajo el algoritmo de bandas rotantes el cual consiste en realizar la simulación en el espacio tridimensional mediante una serie de simulaciones a lo largo de direcciones distribuidas uniformemente en \mathbb{R}^3 .

La cosimulación corresponde a la simulación de varias variables, utilizando la información de todas las variables. Por esta razón es necesario ajustar los modelos de correogionalización (variogramas simples y cruzados). De esta manera se usa mayor cantidad de información, sobre todo para casos donde no hay valores de una variable pero existe información de las otras variables (muestreo “heterotópico”).

2.5. Análisis en componentes principales

El análisis en componentes principales (ACP) transforma un conjunto de variables correlacionadas en igual número de variables (llamadas factores, componentes principales o componentes), no correlacionadas entre sí, que contienen la información del conjunto inicial. Los factores están jerarquizados, en el sentido que el primer factor contiene la mayor parte de la información y el último factor la menor parte. La construcción de los factores se basa en la diagonalización de la matriz de varianza-covarianza de las variables originales y la multiplicación de la matriz de datos por la matriz de vectores propios asociados a dicha diagonalización. Al limitarse a los primeros factores el ACP permite guardar la información de un gran número de variables en un pequeño número de componentes no correlacionados, con la mínima pérdida de información.

Las principales razones para realizar un ACP son:

- Reducir el número de variables a un número menor de factores que contiene la mayor cantidad posible de la información de las variables
- Tener nuevas variables (factores) no correlacionadas entre sí.
- Tener representaciones simples, de pocas dimensiones, de un conjunto de datos multivariantes

Procedimiento:

Se calcula la matriz de correlación entre las variables, matriz cuadrada y simétrica, luego a esta matriz se le calculan los vectores propios. Estos darán un nuevo sistema de ejes de vectores ortogonales entre ellos, cada uno con un cierto largo (el valor propio asociado) que representará su varianza. Lo importante de destacar es que los nuevos componentes son combinaciones lineales de las variables originales, las cuales en general son estandarizadas (media 0, varianza 1) previo al análisis.

[Wackernagel 2003] demuestra que, si bien los factores calculados a partir de diferentes variables regionalizadas no tienen correlación en sitios colocalizados (es decir, considerando la misma posición en el espacio) no pasa lo mismo al considerar sitios diferentes. En otras palabras los factores del ACP tienen una correlación espacial, por lo que contienen información parcialmente redundante y no son independientes. Como excepción, se tiene el caso en donde el modelo de correogionalización contiene una sola estructura básica, de modo que todos los variogramas simples y cruzados son proporcionales entre sí. Bajo la hipótesis multigaussiana, los factores del ACP son entonces independientes, lo que permite simplificar el problema multivariable en una serie de problemas monovariantes.

2.6. Teoría Max/Min Autocorrelation factors. MAF

Sea $Z(x) = [Z_1(x), \dots, Z_n(x)]$ un vector $n \times 1$ (vertical) de los valores de la correogionalización en el sitio x , de media 0 (variables centradas). La matriz de covarianza para un vector h es:

$$C_Z(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} C_{z_1 z_1}(\mathbf{h}) & \cdots & C_{z_1 z_n}(\mathbf{h}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{z_n z_1}(\mathbf{h}) & \cdots & C_{z_n z_n}(\mathbf{h}) \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz simétrica de tipo positivo. Se calcula como $C_Z(\mathbf{h}) = E(Z(x)Z(x+h)^T)$.

Supongamos que el modelo de correogionalización consta solamente de dos estructuras anidadas:

$$C_Z(\mathbf{h}) = B_0 \rho_0(\mathbf{h}) + B_1 \rho_1(\mathbf{h})$$

Donde B_0 y B_1 son matrices $(n \times n)$ simétricas de tipo positivo, ρ_0 y ρ_1 son funciones de covarianza de meseta unitaria (correogramas). Equivalente, planteando $B = B_0 + B_1$, se tiene:

$$C_Z(\mathbf{h}) = B \rho_1(\mathbf{h}) + B_0 [\rho_0(\mathbf{h}) - \rho_1(\mathbf{h})]$$

Diagonalicemos B :

$$B = HDH^T$$

Con D una matriz $(n \times n)$ diagonal con elementos no negativos, H una matriz ortogonal tal que $HH^T = I$ (identidad). Planteamos:

$$W = HD^{-1/2}$$

$$X = W^T B_0 W = D^{-1/2} H^T B_0 H D^{-1/2}$$

X es una matriz $(n \times n)$ simétrica de tipo positivo. Diagonalicemos ahora X :

$$X = CAC^T$$

Con A una matriz $(n \times n)$ diagonal con elementos no negativos, C una matriz ortogonal tal que $CC^T = I$ (identidad). Definimos:

$$A = WC = HD^{-1/2} C$$

$$Y(x) = A^T Z(x)$$

Y calculamos la matriz de covarianza de Y para un vector h:

$$\begin{aligned}
 C_Y(h) &= E(Y(x)Y(x+h)^T) \\
 &= E(A^T Z(x)Z(x+h)^T A) \\
 &= A^T E(Z(x)Z(x+h)^T) A \\
 &= A^T C_Z(h) A \\
 &= A^T B A \rho_1(h) + A^T B_0 A [\rho_0(h) - \rho_1(h)] \\
 &= C^T \underbrace{D^{-1/2} H^T B H D^{-1/2}}_D C \rho_1(h) + C^T \underbrace{D^{-1/2} H^T B_0 H D^{-1/2}}_X C [\rho_0(h) - \rho_1(h)] \\
 &= \underbrace{C^T C}_I \rho_1(h) + \underbrace{C^T X C}_A [\rho_0(h) - \rho_1(h)]
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$C_Y(h) = A \rho_0(h) + (I-A) \rho_1(h)$$

Se trata de una matriz diagonal, cualquiera sea h: los factores (Y) no están correlacionados espacialmente.

Por lo tanto se tiene factores no correlacionados para cualquier h cuando el modelo de corregeonización tiene dos estructuras anidadas [Desbarats & Dimitrakopoulos 2000; Boucher & Dimitrakopoulos 2003]. Esta propiedad ya no es válida al tener más de dos estructuras anidadas [Vargas - Guzmán & Dimitrakopoulos 2003]. En este último caso se puede asegurar solamente que los factores no están correlacionados para h = 0 y para otro vector h = Δ elegido por el usuario, pero no para cualquier h.

2.7. Análisis factorial geoestadístico

Al tener un modelo lineal de corregeonización con varias estructuras anidadas, se puede definir un conjunto de factores sin correlación espacial mediante el llamado método de análisis factorial geoestadístico. Este método, en su esencia, consiste en diagonalizar cada una de las matrices de meseta del modelo de corregeonización, definiendo un conjunto de factores para cada estructura anidada. [Wackernagel 2003, Goovaerts 1997]

Si bien el número de factores es más importante (es el número de variables multiplicado por el número de estructuras anidadas), el método permite obtener factores independientes en el caso multigaussiano, lo cual permite diseñar algoritmos de cosimulación exactos. En el enfoque tradicional de cosimulación pasa implícitamente por una descomposición en factores por este método y por la simulación de cada factor por separado. [Chilès and Delfiner 1999, Emery 2008]

3. METODOLOGÍA

Es importante entender que lo principal será trabajar con un enfoque práctico sin considerar un modelo lineal de correogionalización explícito, sino que trabajando con los variogramas experimentales y con un vector distancia (*lag*) predeterminado por usuario en cada base de dato, de modo que la factorización por los MAF construye factores no correlacionados para cualquier vector de separación si las variables obedecen a un modelo de correogionalización con una o dos estructuras anidadas.

Se estudiarán dos bases de datos. La primera corresponde a un yacimiento polimetálico de cobre, plata, arsénico y antimonio, mientras que la otra base corresponde a datos de fierro, magnetismo y sílice.

Para realizar la comparación se realizan cosimulaciones mediante el método tradicional y las versiones vía MAF con tres diferentes distancias. En general para ambos casos se realizarán los siguientes pasos.

3.1. Estudio exploratorio y variográfico

Se analizan los datos, mediante estadísticas básicas encontrando los máximos y mínimos, media y varianza. Enmascarando los datos aberrantes, como leyes negativas, máximos que estén sobre los porcentajes admisibles. Luego se realizar el desagrupamiento de los datos para que sectores con más muestras ponderen o pesen menos que otros datos, mediante el método de celdas, como por ejemplo la malla de sondaje realizada sobre los datos. Se obtendrán los histogramas, nubes de correlación, mapas variográficos etc.

Los variogramas se realizan en la dirección de mayor continuidad y dos direcciones perpendiculares a ellas en el caso que corresponda (presencia de anisotropías). Estas direcciones se eligen a partir de los mapas variográficos, los cuales son variogramas en todas las direcciones.

3.2. Cosimulación tradicional

Para la cosimulación tradicional hay que realizar los estudios correspondientes: anamorfosis gaussiana, la cual deja exactamente un histograma gaussiano para cada variable transformada, estudios variográficos simples y cruzados para modelar la correlación espacial de los datos, los cuales serán usados en la siguiente cosimulación. La cosimulación se realizará mediante bandas rotantes, con dos mil bandas y cien realizaciones para cada variable gaussiana. Como el algoritmo de bandas rotantes no condiciona los datos, es decir, que no reproduce los valores donde existen los sondajes, es necesario condicionar las simulaciones mediante cokriging.

Finalmente se realiza la transformación inversa de la anamorfosis para obtener las variables originales de vuelta.

3.3. Simulación mediante MAF

Se aplica la teoría MAF a las variables (después de anamorfosis), lo que significa que se crean factores que son combinaciones lineales de las variables originales. Estos nuevos factores tienen la propiedad que a una distancia cero y a otra h , definida por el usuario, no presentan correlación. Lo siguiente es hacer la simulación de los factores por separado (como si fueran independientes), considerando cien realizaciones con dos mil bandas rotantes, luego condicionar mediante kriging, y recombinar los factores para obtener las variables gaussianas. Finalmente se realiza la transformación de vuelta para obtener las variables originales.

Cabe mencionar que los factores, al ser una combinación lineal de las variables, es necesario tener todas las variables muestreadas en cada ubicación, en caso contrario la información de esa ubicación se pierde.

3.4. Comparación de las simulaciones

Se realizarán cinco casos diferentes de cosimulación de las variables para cada base de dato: dos cosimulaciones tradicionales, la primera con todos los datos (base heterotópica) y la otra sólo con los datos que poseen información de todas las variables (base homotópica). Las otras tres simulaciones corresponden a simulaciones vía MAF, vectores de separación h , los cuales deben ser definidos por el usuario.

Para comparar se utilizará la cosimulación tradicional como punto de referencia, ya que es la generalmente utilizada para la simulación de leyes en casos multivariados. Se comparará las estadísticas básicas, histogramas, correlaciones, variogramas y varianzas condicionales. Adicionalmente se hará una comparación entre las simulaciones obtenidas vía MAF para revisar la sensibilidad entre las distancias escogidas.

Se presenta un punteo con un esquema asociado a los pasos a realizar.

Cosimulación tradicional

- Transformar los datos de cada variable en datos con distribución normal (gaussianas, media 0 y varianza 1).
- Calcular variogramas simples y cruzados de las variables gaussianas y ajustar al modelo de correogionalización lineal. Algoritmos semiautomáticos [Goulard 1992 y Emery 2010] pueden ser usados en esta etapa.
- La cosimulación no condicional de las variables gaussianas se realiza mediante el método de bandas rotantes. La cosimulación implícitamente se realiza mediante la

combinación de un conjunto de factores independientes, con distribución normal (media 0 y varianza 1) asociadas a diferentes estructuras anidadas del modelo correogionalización, un procedimiento conocido es el análisis de kriging factorial [Goovaerts 1997 y Chilès 1999].

- Condicionar las variables gaussianas a los datos mediante cokriging.
- Transformar de vuelta, de variables gaussianas a las variables originales (variable de leyes).

Cosimulación vía MAF

- Transformar los datos de cada variable en datos con distribución normal (gaussianas, media 0 y varianza 1).
- Definir un vector de separación h , En este caso, el vector está orientado en dirección norte-sur (la cual presenta mayor correlación), con norma de 10 metros.
- Transformar las variables gaussianas en factores sin correlación en 0 y a una distancia de h , como dice la teoría MAF.
- Calcular sólo variogramas simples de cada factor y ajustar separadamente cada modelo variográfico para cada factor.
- Cosimulación no condicional de cada factor MAF mediante bandas rotantes. Condicionar cada factor a los datos mediante kriging.
- Transformar de vuelta, de factores MAF a variables gaussianas.
- Transformar de vuelta, de variables gaussianas a las variables originales (variable de leyes).

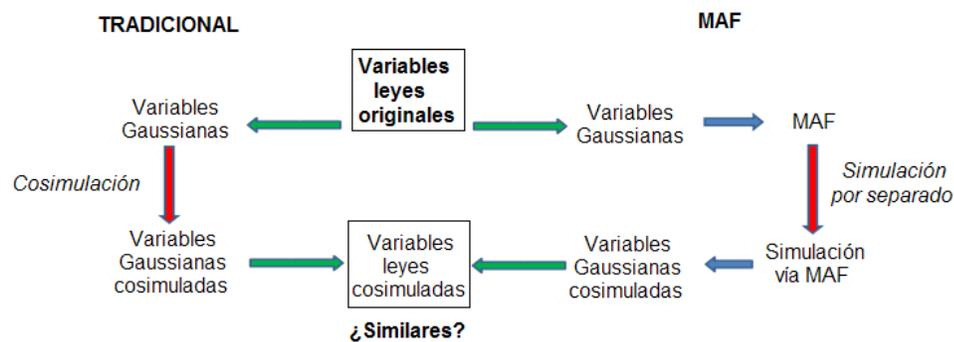


Figura 2: Esquema de procedimiento para realizar la comparación.

Casos de estudios a comparar:

- Cosimulación tradicional, todos los datos
- Cosimulación tradicional, base de datos homotópico
- Simulación vía MAF, con $h = h_0$
- Simulación vía MAF, con $h = h_1 > h_0$
- Simulación vía MAF, con $h = h_2 > h_1$

Se realiza la cosimulación tradicional con la base homotópica, para poder hacer una comparación ya que el método MAF sólo considera los datos homotópicos, lo que implica que para la base original (parcialmente heterotópica) se perderán los datos donde no exista información de todas las variables en estudio.

Para todos los casos de estudio se realiza el mismo desagrupamiento, método utilizado para asignar un ponderador a cada muestra y determinar los histogramas representativos de las variables sin dar mayor peso a los sectores sobre muestreados. Generalmente en minería se toma una mayor cantidad de sondajes en las zonas de leyes altas, por lo tanto se tendería a tener un mayor número de muestras de alta ley. El desagrupamiento le dará un menor peso a las muestras que están muy cercanas, evitando tener histogramas sesgados.

Para los yacimientos de estudio se utiliza el método de las celdas, el cual consiste en hacer una grilla de celdas, cada uno con un peso de uno sobre el resto de las celdas. Una muestra de un conjunto dentro de una misma celda tendrá un ponderador proporcional a uno sobre la cantidad de datos dentro de la celda.

En el caso del yacimiento de hierro que es de mayor tamaño, se hizo una selección de bloques de la parte inferior y central del depósito, ya que es más representativa en cuanto a la ley de hierro y facilita en gran medida la simulación

Yacimiento	Cobre	Hierro /(selección)
Dimensión (largo x ancho x profundidad)	200m x 250m x 200m	1000m x 1200m x 800m
Desagrupamiento Método de celda	15m x15m x 15m	50m x 50m x 50m
Modelo de bloque	10m x10m x 10m	15m x 15m x 15m
Cantidad de bloques		
Total	10450	403200 / (39424)
X (este)	19	70 / (32)
Y (norte)	25	96 / (44)
Z (profundidad)	22	60 / (28)
Distancias de separación MAF	10 - 20 - 30 metros	10 - 25 - 50 metros

Tabla 1: Parámetros de los yacimientos

La elección de las diferentes distancias de separación MAF, se debe: para el yacimiento de cobre ya que los compósitos son de 10 metros, en cuanto para el yacimiento de hierro los datos están alrededor de 10 metros de distancia y los sondajes están en una malla regular de 50m x 50m.

4. CASO DE ESTUDIO 1: YACIMIENTO POLIMETALICO DE COBRE

4.1. Análisis exploratorio de datos

La base de datos a estudiar corresponde a un yacimiento polimetálico, que contiene leyes de Ag, As, Cu y Sb. Las dimensiones son aproximadamente de 200m, 250m y 200m de profundidad, como se muestra en las siguientes figuras.

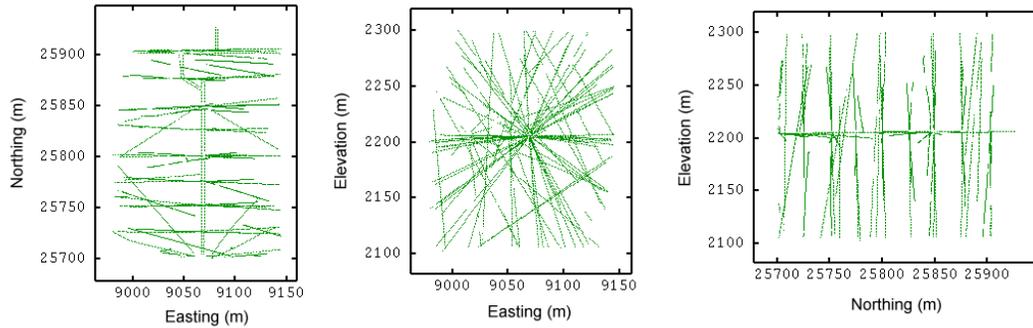


Figura 3: Vista en planta y secciones de los sondajes

Como se puede apreciar en las diversas vistas, la campaña de sondajes es irregular. Corresponde a una galería de exploración desde la cual se realizan sondajes de forma radial cada 25 metros aproximadamente. La base de datos presenta leyes composadas cada 1.5 metro con un total de aproximadamente 5800 datos con las siguientes estadísticas básicas:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [ppm]	5636	0.4	855	36.94	58.23
As [ppm]	5768	5	126100	1997.07	4488.06
Cu [%]	5796	0.01	29.9	1.66	2.40
Sb [ppm]	2161	1	8240	220.51	557.71

Tabla 2: Estadísticas básicas de las variables

Se puede observar que el muestreo es heterotópico, es decir, que no en todos los puntos existe el análisis químico de las cuatro variables. Otra forma de entenderlo es que existe una mayor cantidad de datos para el Cu y tan sólo un tercio de ellas para el Sb. Hay una alta varianza para las variables de As y Sb, lo que quiere decir que en sectores de la mina se puede encontrar una alta contaminación de arsénico (As) o antimonio (Sb) y en otras partes con muy pocos contaminantes.

Las muestras no presentan datos aberrantes, ya que leyes de cobre de 29,9% son posibles de encontrar y se encontraron 168 datos duplicados. Los siguientes histogramas muestran la frecuencia de ocurrencia de las leyes.

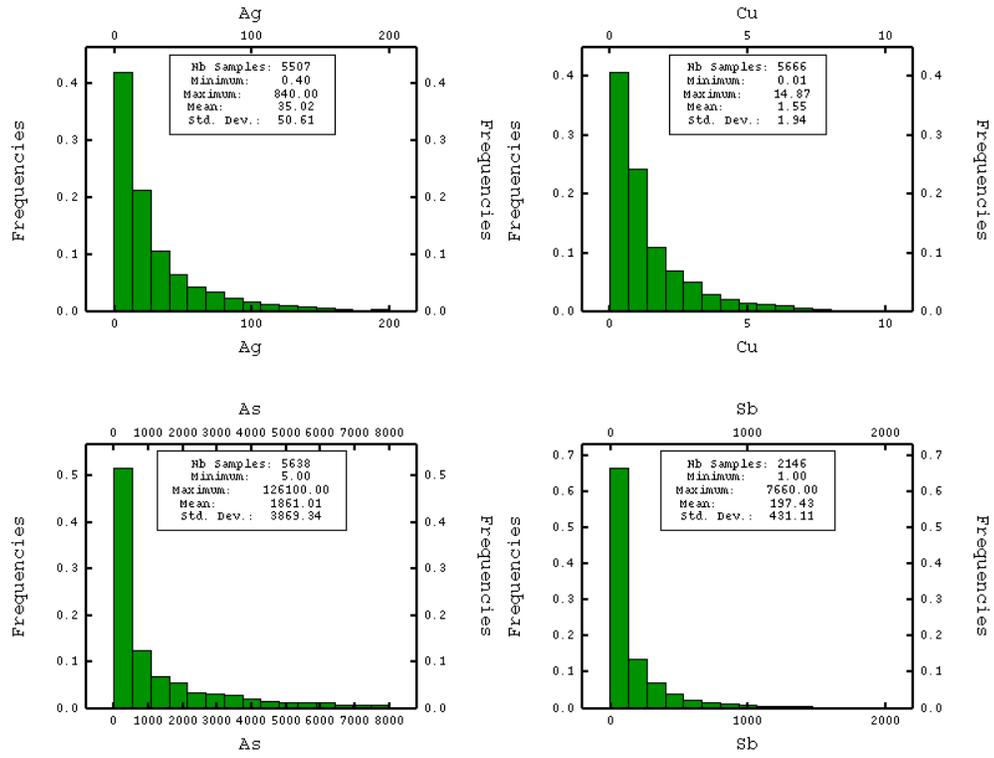


Figura 4: Histograma de leyes para cada variable

Se observa que los histogramas muestran distribuciones fuertemente asimétricas.

Los gráficos de dispersión, muestran las relaciones de dependencia entre las variables:

Scatter Diagram (Cu, Ag, As, Sb)

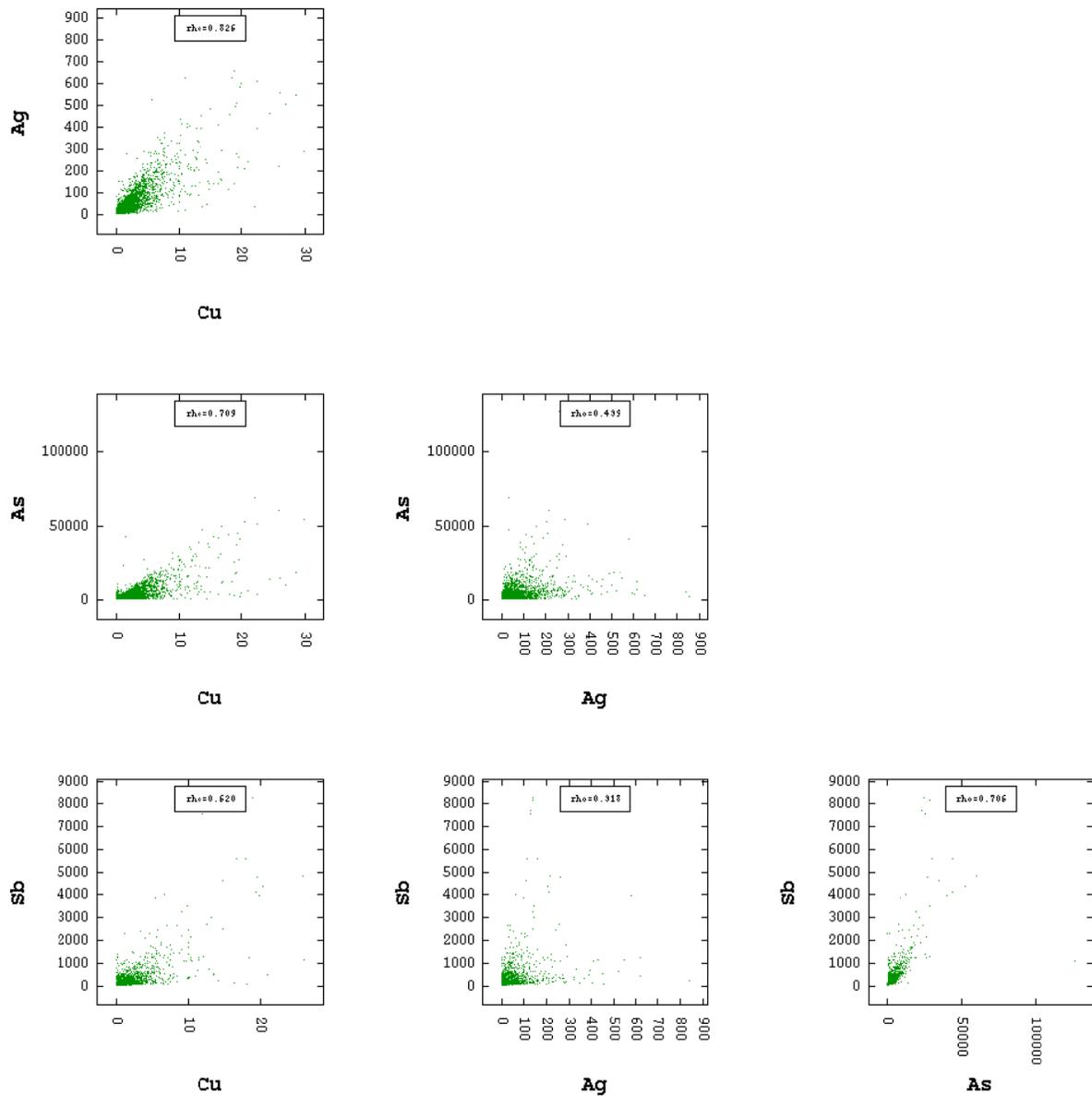


Figura 5: Gráficos de dispersión

La siguiente tabla muestra la matriz de correlación de las variables.

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.45	0.82	0.34
As	0.45	1	0.72	0.7
Cu	0.82	0.72	1	0.68
Sb	0.34	0.7	0.68	1

Tabla 3 Matriz de correlación

De las cuatro variables se puede observar que el Cu se correlaciona muy bien con el resto de las variables, con correlaciones sobre 0.68, y que la plata Ag no correlaciona muy bien con el arsénico (As) ni el antimonio (Sb). Esta alta correlación de los contaminantes con el Cu, puede deberse a la formación de minerales como la enargita (Cu_3AsS_4), la tenantita ($\text{Cu}_3\text{AsS}_{3,25}$) y la luzonita (Cu_3AsS_4) para el caso del arsénico y para el antimonio se tiene el mineral tetraedrita ($\text{Cu}_{12}\text{Sb}_4\text{S}_{13}$). Por ende, las leyes muestran una alta correlación simplemente por el fenómeno físico y químicos de formación.

Para poder trabajar adecuadamente se procede a marcar y esconder los datos duplicados, obteniendo las siguientes estadísticas básicas:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [ppm]	5594	0.4	855	36.87	58.16
As [ppm]	5726	5	126100	2000.4	4501.32
Cu [%]	5754	0.01	29.9	1.66	2.40
Sb [ppm]	2160	1	8240	220.31	557.76

Tabla 4: Estadísticas básicas después de filtrar datos duplicados.

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.45	0.82	0.34
As	0.45	1	0.72	0.70
Cu	0.82	0.72	1	0.68
Sb	0.34	0.70	0.68	1

Tabla 5: Matriz de correlación después de filtrar datos duplicados.

Después de realizar varios estudios variográficos, se obtuvieron los mejores parámetros para visualizar los variogramas experimentales. Las direcciones principales fueron identificadas como el Norte (y), Este(x) y la perpendicular a ella (z).

	Norte	Este	Vertical
Tolerancia del ángulo (°)	30	30	90
Distancia del paso (m)	15	15	15
Número de pasos	7	7	7
Tolerancia en la distancia (m)	7.5	7.5	7.5
Altura de la banda(m)	3	3	-

Tabla 6: Parámetros para cálculo de variogramas experimentales.

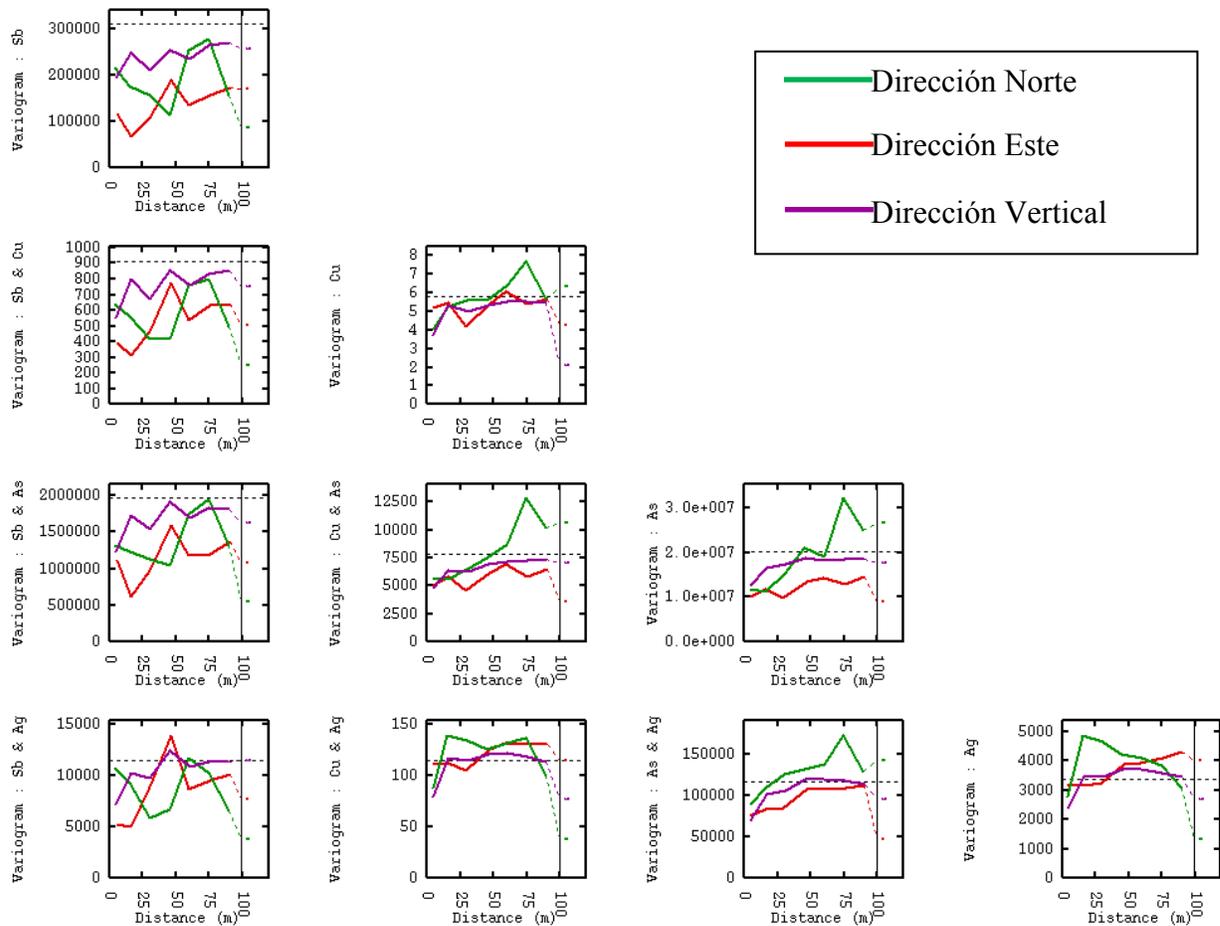


Figura 6: Variogramas simples y cruzados
 Línea roja, Norte. Línea verde Este. Línea morada, vertical

En este momento no es necesario modelar los variogramas experimentales, pero lo importante es notar que son bien diferentes los variogramas simples para cada variable, mostrando diferentes alcances y estructuras, por lo cual hace muy difícil de obtener un modelo de correogionalización simplemente con dos estructuras anidadas. No se modelarán ya que no es necesario, debido a que las variables se transformarán previamente a variables normales de media cero y varianza uno (gaussianas), para efecto de las cosimulaciones. En las siguientes etapas se modelará según el caso.

4.2. Cosimulación tradicional

4.2.1. Transformar variables originales a gaussianas:

Para los datos de ley, se tienen las siguientes medias y desviaciones:

	Media	Desv. est.
Ag	36.87	58.16
As [ppm]	2000.4	4501.32
Cu [%]	1.66	2.40
Sb [ppm]	220.31	557.76

Tabla 7: Estadísticas básicas de los datos originales

Luego se realiza una transformación (anamorfosis) de cada variable, de modo que las variables transformadas presentan una distribución gaussiana de media cero y varianza unitaria.

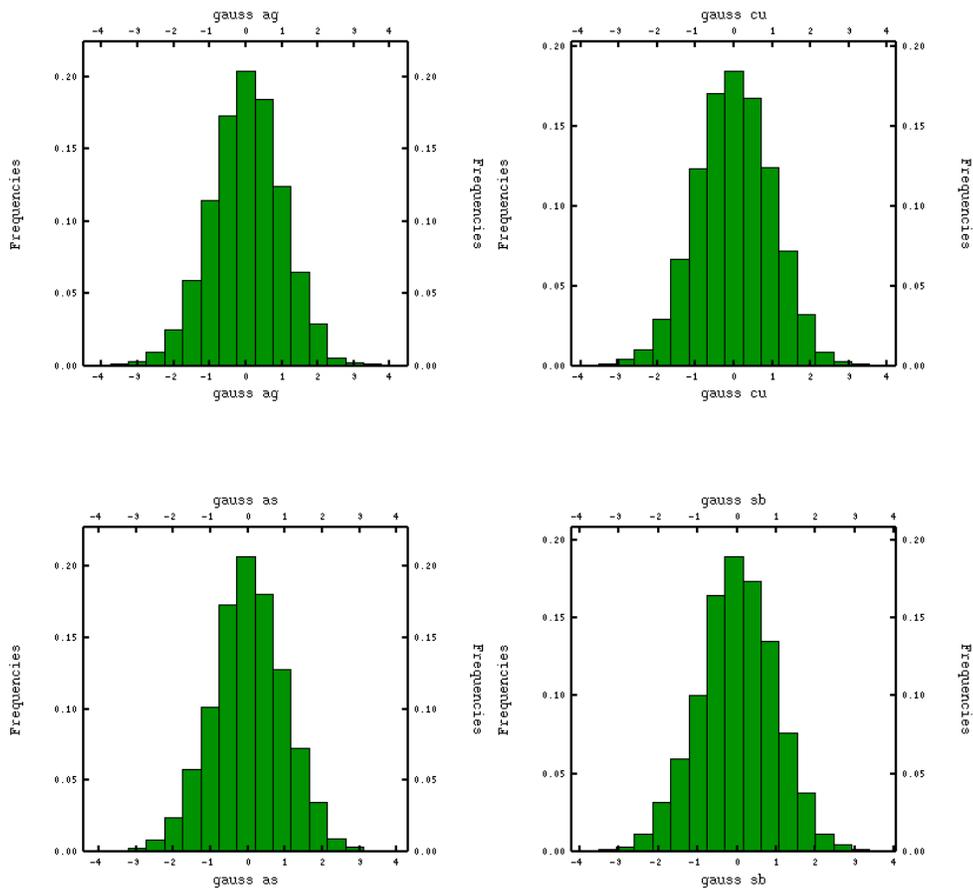


Figura 7: Histogramas para las variables gaussianas

4.2.2. Estudio variográfico

Los variogramas experimentales de las variables gaussianas se calculan con los siguientes parámetros:

	Norte	Este	Vertical
Tolerancia del ángulo (°)	30	30	90
Distancia del paso (m)	15	15	15
Número de pasos	7	7	7
Tolerancia en la distancia (m)	7.5	7.5	7.5
Altura de la banda (m)	3	3	-

Tabla 8: Parámetros para el cálculo de los variogramas experimentales

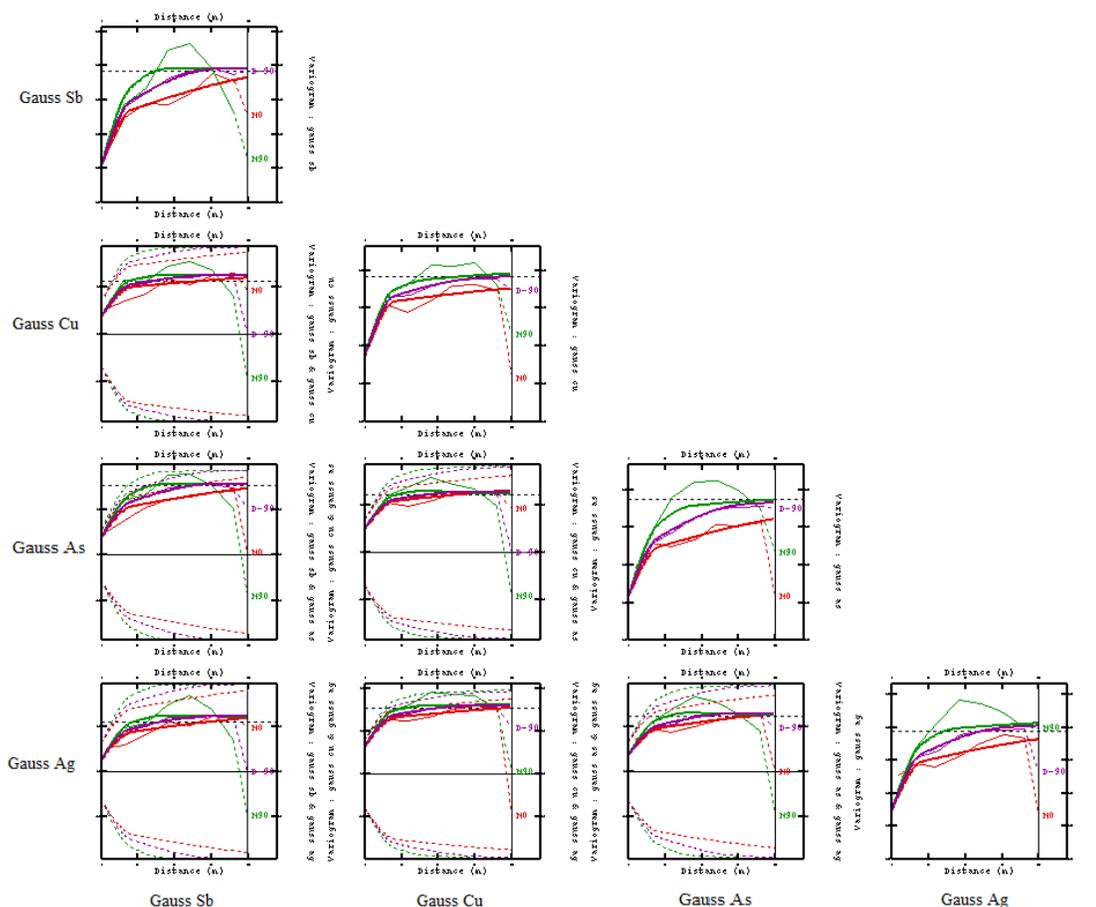


Figura 8: Variogramas experimentales y modelados

Experimental (línea fina) y modelado (línea gruesa),

Línea verde, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea morada, dirección Vertical.

La primera columna y fila corresponde a la variable Sb, luego la segunda columna o fila corresponde a la variable Cu, posteriormente la tercera columna o fila corresponde a la variable As y finalmente la última columna o fila corresponde a la variable Ag.

Los variogramas que están en la diagonal superior corresponden a los variogramas de las variables gaussianas por sí solas, en cambio el resto son variogramas cruzados según

corresponda. Las direcciones de cálculo corresponden a las direcciones norte, este y cota, dado que son aquellas que presentan la mayor anisotropía.

Luego se procede a modelar todos los variogramas en conjunto. Esto se puede realizar con programas computacionales de ajuste automático de mesetas, ya que es muy difícil de modelar manualmente.

El modelo de correogionalización comprende un efecto pepita y tres variogramas esféricos anidados (alcances en metros indicados entre paréntesis, para las direcciones este, norte y cota, respectivamente):

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.3753 & 0.1845 & 0.3272 & 0.1252 \\ 0.1845 & 0.2907 & 0.2535 & 0.1888 \\ 0.3272 & 0.2535 & 0.4324 & 0.1810 \\ 0.1252 & 0.1888 & 0.1810 & 0.2642 \end{pmatrix} \textit{pepa} \\
 + & \begin{pmatrix} 0.3088 & 0.2409 & 0.2991 & 0.2611 \\ 0.2409 & 0.2670 & 0.2561 & 0.2786 \\ 0.2991 & 0.2561 & 0.3331 & 0.2768 \\ 0.2611 & 0.2786 & 0.2768 & 0.3364 \end{pmatrix} \textit{Sph} \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 20 \end{pmatrix} \\
 + & \begin{pmatrix} 0.2632 & 0.2551 & 0.1749 & 0.2399 \\ 0.2551 & 0.2918 & 0.1761 & 0.3082 \\ 0.1749 & 0.1761 & 0.1326 & 0.1525 \\ 0.2399 & 0.3082 & 0.1525 & 0.3686 \end{pmatrix} \textit{Sph} \begin{pmatrix} 44 \\ 150 \\ 80 \end{pmatrix} \\
 + & \begin{pmatrix} 0.0929 & -0.0651 & 0.0102 & -0.0232 \\ -0.0651 & 0.0949 & -0.0719 & 0.0037 \\ 0.0102 & -0.0719 & 0.0892 & 0.0125 \\ -0.0232 & 0.0037 & 0.0125 & 0.0096 \end{pmatrix} \textit{Sph} \begin{pmatrix} 140 \\ \infty \\ 200 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4.2.3. Cosimulación de las variables

Después de obtener el modelo que ajusta los variogramas experimentales, se procede a realizar la cosimulación de las variables gaussianas. Se realizan cien cosimulaciones por el método de bandas rotantes y condicionamiento por cokriging para obtener una cantidad suficiente de escenarios posibles para caracterizar las leyes del yacimiento.

Luego de obtener estas cien simulaciones, se realiza la transformación (anamorfosis) inversa para volver a las variables originales (leyes)

Se obtienen las siguientes estadísticas básicas para el modelo de bloques correspondientes al promedio de las simulaciones:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Ag [ppm]	979300	0.39	855.01	34.45	58.58
As [ppm]	979300	3.74	12610	2041.3	4530.5
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.6	2.42
Sb [ppm]	979300	0.92	8240.1	232.02	594.27

Tabla 9: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones.

Se puede calcular el variograma experimental para cada variable simulada dentro de nuestro modelo de bloque. De esta manera se podrá comparar las correlaciones espaciales de las variables. La siguiente figura representa el promedio de los 100 variogramas de las cosimulaciones realizadas anteriormente.

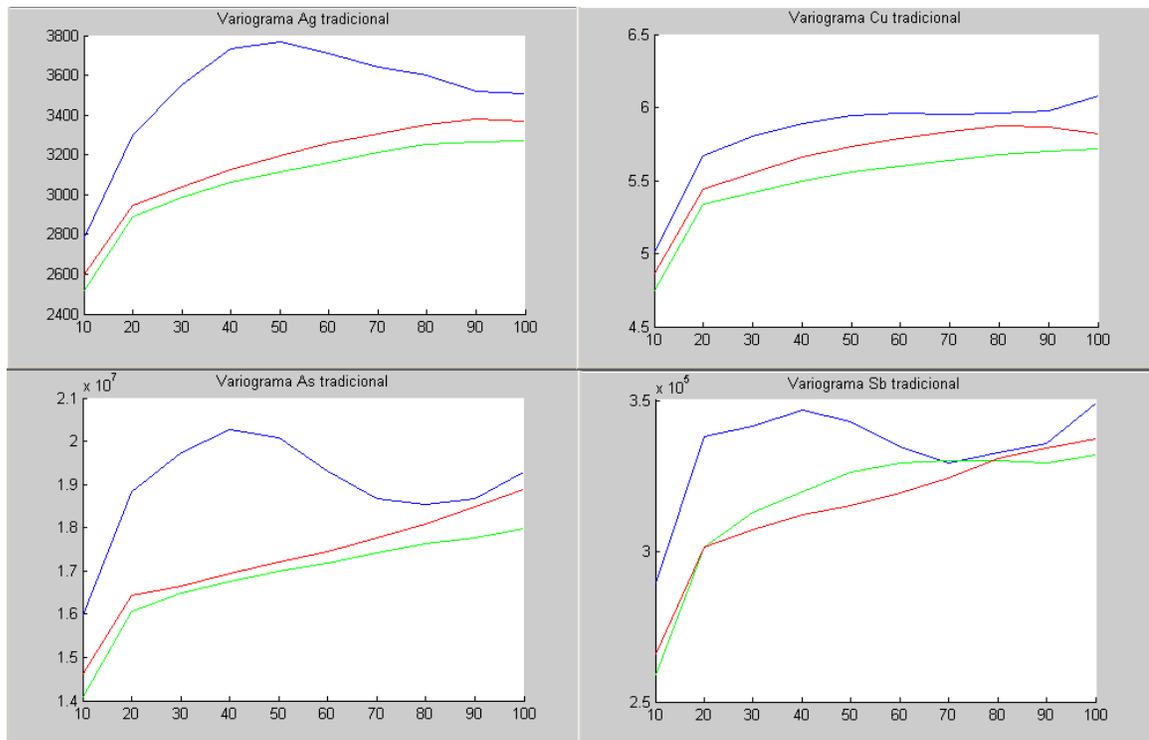


Figura 9: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. heterotópica)
 Línea azul, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea verde, dirección Vertical.

4.3. Cosimulación tradicional base homotópica

Para lograr una base homotópica es necesario filtrar los datos donde no están presentes las cuatro variables, por lo tanto la variable que tendrá mayor relevancia será la que tenga menos datos, en este caso la variable Sb. Después de filtrar los datos se obtienen las siguientes estadísticas básicas.

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [ppm]	2148	0.4	840	35.67	59.83
As [ppm]	2148	6	126100	2141.21	5034.79
Cu [%]	2148	0.01	26.03	1.63	2.41
Sb [ppm]	2148	1	8240	221.47	559.10

Tabla 10: Estadísticas básicas de los datos homotópicos.

Se realizan las mismas etapas que en el caso heterotópico (anexo 9.1; 9.2):

- Transformación de cada variable de ley a una variable gaussiana
- Análisis variográfico: cálculo de variogramas experimentales simples y cruzados, y ajusta de un modelo de correogionalización. El modelo de correogionalización comprende un efecto pepita y tres variogramas esféricos anidados (anexo 9.3)
- Cosimulación por bandas rotantes (100 realizaciones)
- Condicionamiento por cokriging
- Transformación de vuelta a las variables originales

De esta manera se obtienen las siguientes estadísticas básicas correspondientes al promedio de las simulaciones

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Homo Ag [ppm]	979300	0.39	840.01	35.69	65.5
Homo As [ppm]	979300	4.74	12610	1974.09	4640.1
Homo Cu [%]	979300	0.01	26.03	1.63	2.6
Homo Sb [ppm]	979300	0.92	8240.1	219.83	568.7

Tabla 11: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones.

Se puede calcular también el variograma experimental para cada variable simulada. La siguiente figura representa el promedio de los cien variogramas de las cosimulaciones realizadas anteriormente.

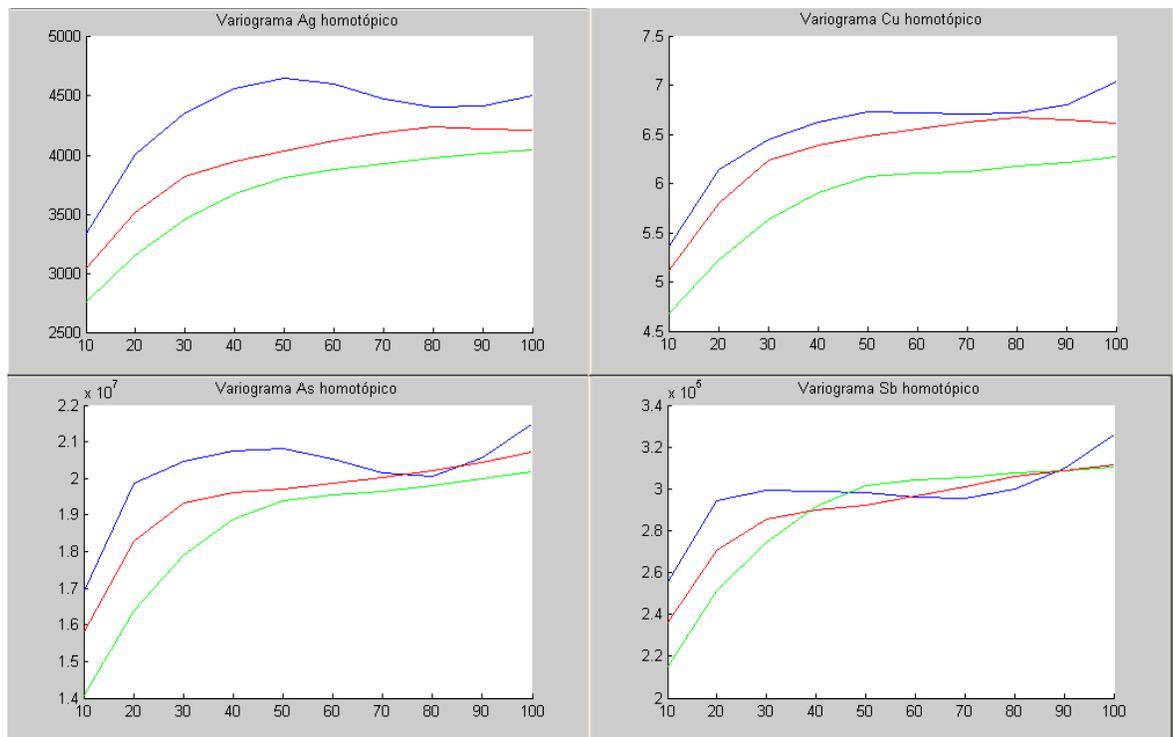


Figura 10: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. homotópica).
 Línea azul, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea verde, dirección Vertical.

4.4. Simulación vía MAF, con vector de distancia h= 10m

Como se mencionó en la metodología, la simulación vía MAF es muy similar al caso tradicional lo único diferente es que en el momento de realizar los modelos de correogionalización, en el caso tradicional, todos los variogramas simples y cruzados se transforman mediante los MAF en simples modelos univariables. En vez de utilizar todos los variogramas simples y cruzados sólo se utiliza un número de modelos iguales al número de variables originales. Para esto es necesario definir una distancia para realizar los MAF. En este trabajo se analizarán 3 diferentes vectores distancias para realizar comparaciones (10m, 20m y 30m).

4.4.1. Definir una distancia de separación

En la teoría MAF es necesario definir una distancia para poder crear componentes o factores donde la correlación de estos factores se anula a una distancia de cero y a la distancia definida anteriormente. De esta manera se tendrán variables (factores MAF) que se podrán considerar como independientes.

Se define el vector distancia en la dirección norte-sur donde se observa una mayor continuidad. Con 10 metros de distancia en dirección N-S obtenemos las siguientes matrices de correlación.

Matriz de correlación de las variables gaussianas para h=0

$$\text{Corr}_{h=0} = \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.66707 & 0.83174 & 0.56044 \\ 0.66707 & 1.00000 & 0.69165 & 0.82927 \\ 0.83174 & 0.69165 & 1.00000 & 0.57688 \\ 0.56044 & 0.82927 & 0.57688 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

Matriz de correlación de las variables gaussianas para h = 10 metros

$$\text{Corr}_{h=10} = \begin{pmatrix} 0.88714 & 0.42016 & 0.64120 & 0.20832 \\ 0.42016 & 0.80690 & 0.59358 & 0.62025 \\ 0.64120 & 0.59358 & 0.82640 & 0.40757 \\ 0.20832 & 0.62025 & 0.40757 & 0.98685 \end{pmatrix}$$

4.4.2. Cálculos para crear las variables MAF.

La matriz de transformación desde las variables gaussianas hacia los factores (MAF) es

$$B_{10m} = \begin{pmatrix} 0.6539 & 0.2753 & 1.3131 & -1.0942 \\ 1.0630 & -0.5879 & -1.4622 & -0.7571 \\ -1.2741 & 0.9041 & -0.9496 & 0.5485 \\ 0.1306 & 0.3895 & 1.0004 & 1.4259 \end{pmatrix}$$

Los factores presentan media 0 y varianza 1 por construcción. En los anexos se presenta un cálculo de la descorrelación de los MAF, tanto para $h = 0$ como para $h = 10m$.

4.4.3. Estudio variográficos univariable

Se calcula y ajusta el variograma experimental de cada factor MAF:

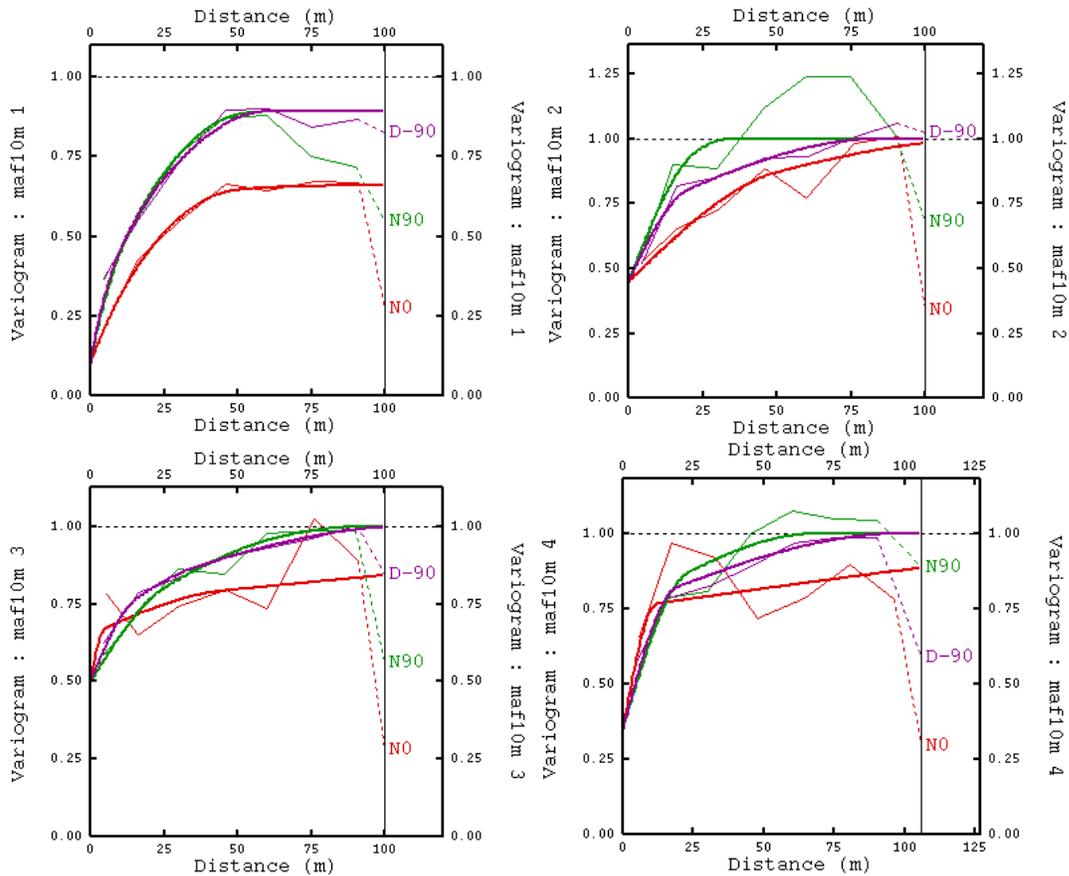


Figura 11: Variograma experimental y modelado.
Línea verde, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea punteada, dirección Vertical.

Los modelos variográficos para cada factor corresponden a los siguientes:

$$\begin{aligned}\gamma_{maf1}(h) &= 0.1 \textit{pepa} + 0.3 \textit{Exp} \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} + 0.26 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} + 0.23 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 60 \\ \infty \\ 60 \end{pmatrix} \\ \gamma_{maf2}(h) &= 0.45 \textit{pepa} + 0.25 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 23 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} + 0.3 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 35 \\ 125 \\ 85 \end{pmatrix} \\ \gamma_{maf3}(h) &= 0.5 \textit{pepa} + 0.15 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + 0.25 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 95 \\ 400 \\ 110 \end{pmatrix} + 0.1 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 65 \\ 45 \\ 35 \end{pmatrix} \\ \gamma_{maf4}(h) &= 0.35 \textit{pepa} + 0.4 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 23 \\ 12 \\ 19 \end{pmatrix} + 0.25 \textit{Sph} \begin{pmatrix} 70 \\ 280 \\ 100 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.4.4. Simulación condicional mediante “bandas rotantes”, cien simulaciones

Para cada MAF, se realizan 100 simulaciones con 2000 direcciones rotantes. El condicionamiento se realiza por kriging. La vecindad o radio de búsqueda es de 120m en X, 120m en Y y 150m en Z. Se divide en ocho sectores, cada octante con un mínimo de 1 dato y un óptimo 5 datos.

Cada simulación de MAF usa su propio modelo de variograma, mientras que el enfoque multivariable usa el modelo completo de correogionalización entre las cuatro variables.

4.4.5. Recombinar los MAF para obtener las variables gaussianas

Se recombinan de vuelta mediante la inversa de la matriz de transformación para obtener simulaciones de las variables gaussianas:

$$B_{10m}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3765 & 0.7263 & 0.0804 & 0.6436 \\ 0.8534 & 0.5440 & 0.9511 & 0.5778 \\ 0.1086 & -0.4134 & -0.2916 & -0.0240 \\ -0.3438 & 0.0749 & -0.0626 & 0.5013 \end{pmatrix}$$

4.4.6. Transformar de vuelta las simulaciones gaussianas a las variables originales mediante una anamorfosis inversa.

Se obtiene la siguiente tabla que representa las medias de las simulaciones.

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [ppm]	979300	0.39	855.01	34.45	58.90
As [ppm]	979300	3.74	12610	1740.51	4005
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.62	2.5
Sb [ppm]	979300	0.92	8240.1	204.16	526.64

Tabla 12: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones

Se puede calcular también el variograma experimental para cada variable simulada. La siguiente figura representa el promedio de los cien variogramas de las cosimulaciones realizadas anteriormente.

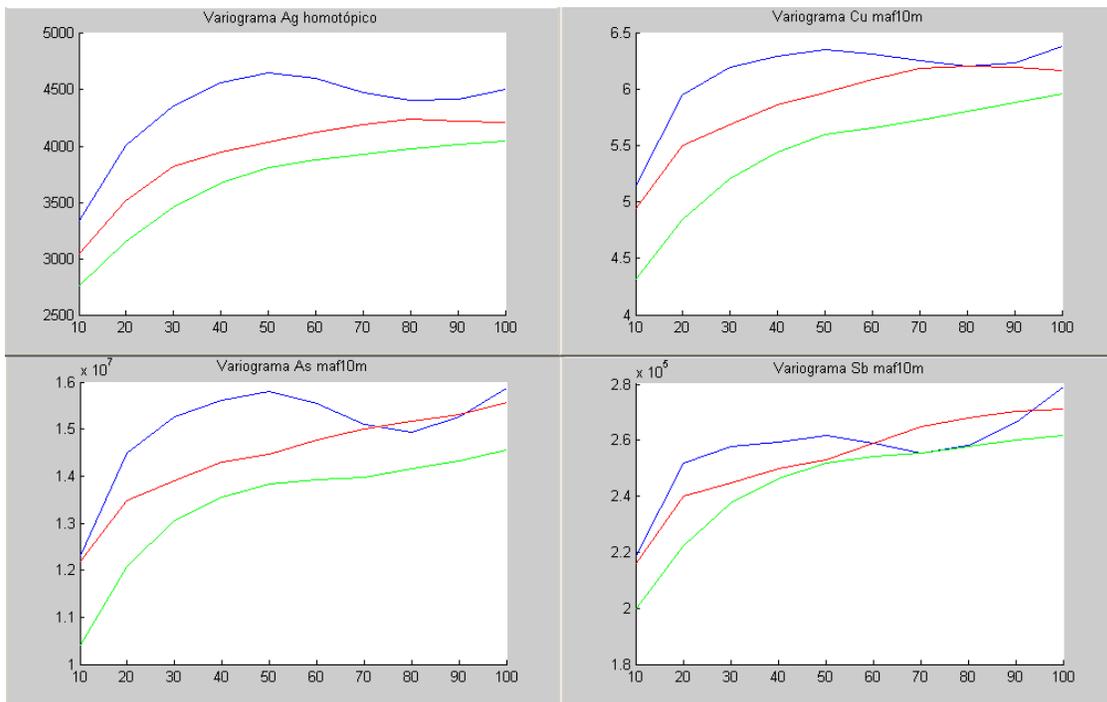


Figura 12: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=10m)
 Línea azul, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea verde, dirección Vertical.

4.5. Caso 4: Simulación vía MAF con h= 20m y h= 30m

Se aplica la metodología anterior, cambiando la distancia para el cálculo de los MAF a h=20m y luego a h=30m. A continuación, se indica las matrices de transformación de MAF y los variogramas promedio de las 100 realizaciones de las leyes simuladas (anexo 9.4; 9.5)

La transformación de las variables originales a gaussianas son exactamente las mismas que en el caso anterior y en la simulación tradicional heterotópica.

$$B_{20m} = \begin{pmatrix} 0.8370 & 1.5179 & -0.4449 & 0.4717 \\ 0.8407 & -0.9999 & 0.8384 & 1.3331 \\ -0.4822 & -0.9768 & -0.7004 & -0.0421 \\ 0.2729 & 0.1225 & -0.6758 & -1.6300 \end{pmatrix}$$

$$B_{30m} = \begin{pmatrix} 0.5524 & 1.5193 & 0.7503 & 0.4986 \\ 0.7560 & -0.7194 & 1.0797 & -1.3900 \\ -1.4532 & -1.1659 & -0.0804 & 0.4072 \\ 0.4667 & -0.0660 & -1.1421 & 1.2947 \end{pmatrix}$$

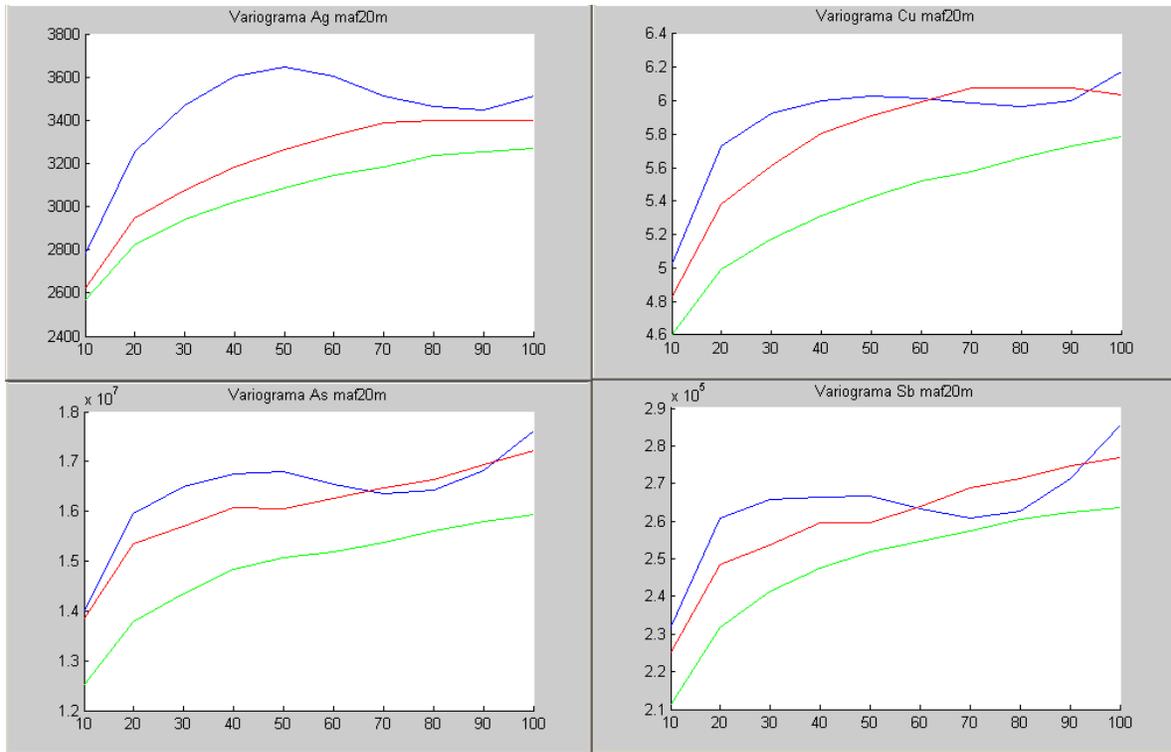


Figura 13 :Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=20m)
 Línea azul, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea verde, dirección Vertical.

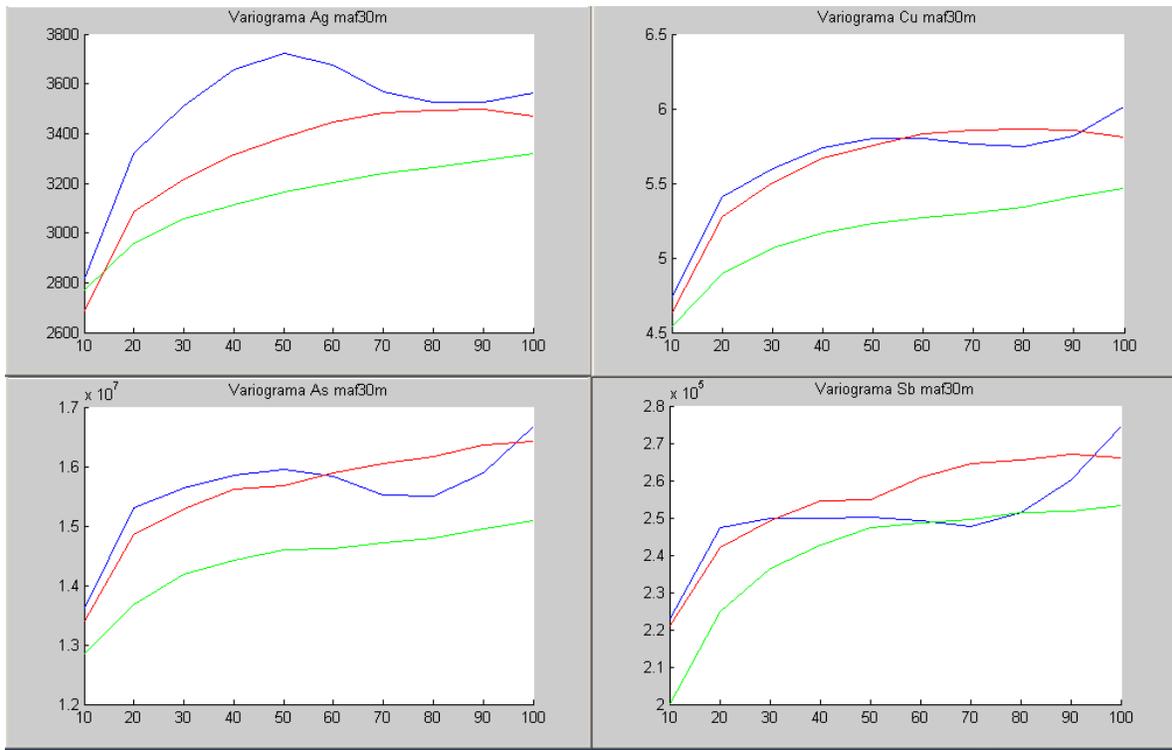


Figura 14: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=30m)
 Línea azul, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea verde, dirección Vertical.

4.6. Consideraciones de tiempo para cada (co)-simulación.

Si bien los modelos de simulación dependen de los algoritmos computacionales, los cuales están muy bien optimizados. Es necesario dar a conocer que también dependen de otros factores.

En este caso las simulaciones dependen de los modelos de corregeionalización, número de direcciones, estructuras anidadas empleadas, como modelos esféricos y exponenciales. Una dependencia importante es la capacidad de los computadores, el nivel de procesamiento, cantidad de núcleos y si los algoritmos se pueden realizar en paralelo. En este caso se utilizó el algoritmo de bandas rotantes el cual se puede paralelizar. También depende si el usuario está realizando otro tipo de actividades computacionales, que pueden perjudicar en cierta medida el tiempo real de simulación.

Se obtuvieron de manera aproximada los tiempos de simulación, sólo tomando en cuenta la simulación propiamente tal, es decir sin tomar en cuenta los tiempos de: exportación, transformación, de ordenar y guardar datos. Ya que todos estos tiempos son similares para cada caso.

La siguiente tabla muestra los tiempos de simulación.

Simulación	Tiempo total (hr, min, seg)	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
Tradicional heterotópica	0:27:30	.-	.-	.-	.-
Tradicional homotópica	0:19:12	.-	.-	.-	.-
Vía MAF 10m	0:18:30	0:05:22	0:03:55	0:05:17	0:03:56
Vía MAF 20m	0:18:21	0:03:53	0:03:54	0:05:18	0:05:16
Vía MAF 30m	0:17:20	0:05:25	0:03:56	0:03:55	0:04:04

Tabla 13: Tiempos de simulación

Como se observa los tiempos vía MAF son menores, aunque no hay mucha diferencia con respecto a la forma tradicional homotópica. Pero en casos de mayor número de variables y datos, la reducción de tiempo debe ser más notoria. Esto se debe a que la teoría MAF transforma un problema complejo multivariable (cuatro variables) en cuatro simples casos univariados representados por cada factor.

5. CASO DE ESTUDIO 2: YACIMIENTO POLIMETALICO DE FIERRO

5.1. Análisis exploratorio de datos

La siguiente base de datos a estudiar corresponde a un yacimiento de hierro, que contiene leyes de hierro, magnetismo (correspondiente a la fracción recuperable de hierro), leyes de sílice y densidad de la roca. Las dimensiones son aproximadamente de 1250m, 1000m y 750m de profundidad, como se muestra en las siguientes figuras.

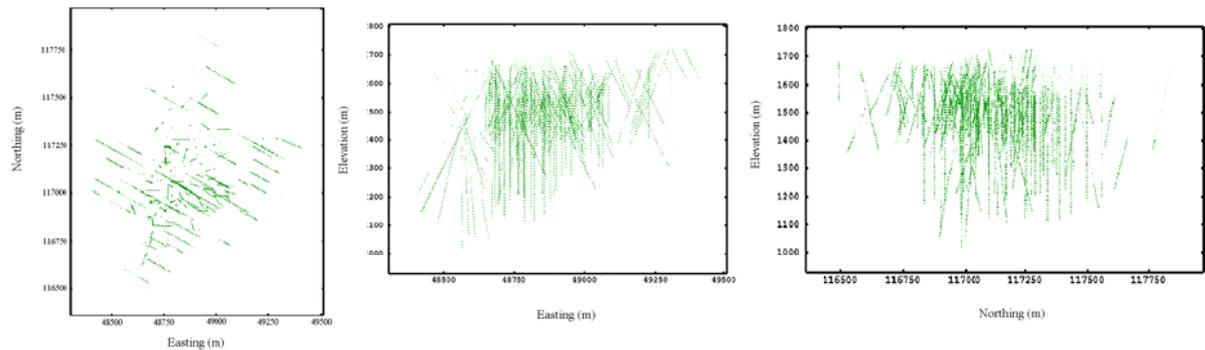


Figura 15: Vista en planta y secciones de los sondajes

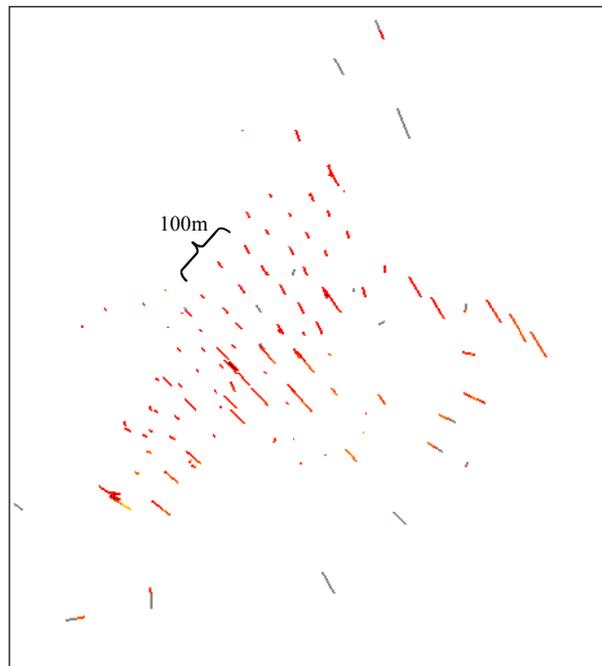


Figura 16: Planta representativa de la malla de sondajes 50 x 50 metros

Como se puede apreciar en las diversas vistas, la campaña de sondajes es aproximadamente regular en una malla de 50 x 50 metros. La malla de sondajes está compuesta

por 200 sondajes compositados cada 10 metros. Los sondajes son subverticales, con profundidades de 700 metros. La siguiente tabla muestra la base de datos:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Densidad [t/m ³]	5079	2.44	4.71	3.3047	0.56
Fe [%]	5018	0.22	69.61	26.2059	17.51
Magnetismo	1179	0.28	1.05	0.9156	0.09
Sílice [%]	4184	1.05	85.96	31.4146	15.21

Tabla 14: Estadísticas básicas de las variables.

Al igual que el caso anterior hay una mayor cantidad de datos para una variable, el fierro (Fe), aproximadamente 5000 datos y tan sólo 1000 datos para la variable magnetismo. Hay una alta varianza para las variables de fierro y sílice, lo que quiere decir que en sectores de la mina se puede encontrar una alta concentración de fierro (Fe) y en otras partes casi nada. Los sondajes muestran que existe una capa cercana a la superficie con leyes de fierro muy bajas, por lo que existe una alta concentración de sílice en esa zona. La mayor concentración de fierro se encuentra en la parte más profunda del yacimiento

Como el fierro y la sílice son minerales formadores de roca, es muy probable que en sectores donde existe alta concentración de fierro hay poca concentración de sílice y viceversa.

Las muestras presentan datos aberrantes, ya que el magnetismo se mide entre 0 y 1 como fracción del fierro que está magnetizado. Por lo tanto, valores sobre 1 son datos aberrantes, debidos a una mala digitación o algún error de medición, y fueron removidos. No se encontraron datos duplicados. Se tienen los siguientes histogramas de leyes, los cuales muestran la frecuencia de ocurrencia de las leyes.

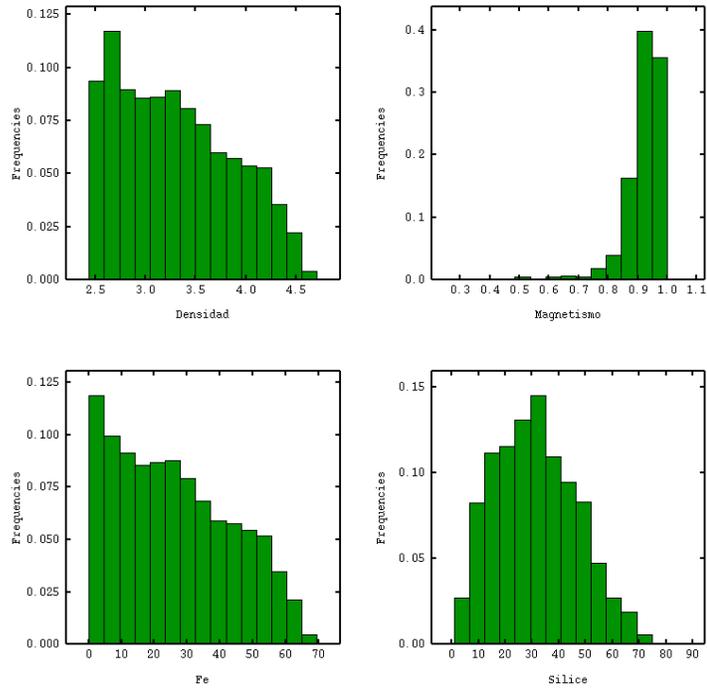


Figura 17: Histogramas para cada variable.

Se observa que los histogramas muestran distribuciones fuertemente asimétricas. Las variables hierro (Fe) y densidad tienen distribuciones muy similares, esto se debe a que la densidad está fuertemente asociada a la cantidad de hierro en la muestra. El hierro presenta una densidad de 7 ton/m^3 mucho mayor a la densidad de la roca normal que bordea los 2.7 ton/m^3 . Por lo que condiciona mucho la densidad, también juega un rol importante el porcentaje que llega casi a un 70% con un promedio de 26%, no como el cobre que en promedio no supera el 2% en yacimientos cupríferos.

Los gráficos de dispersión muestran las relaciones de dependencia entre las variables:

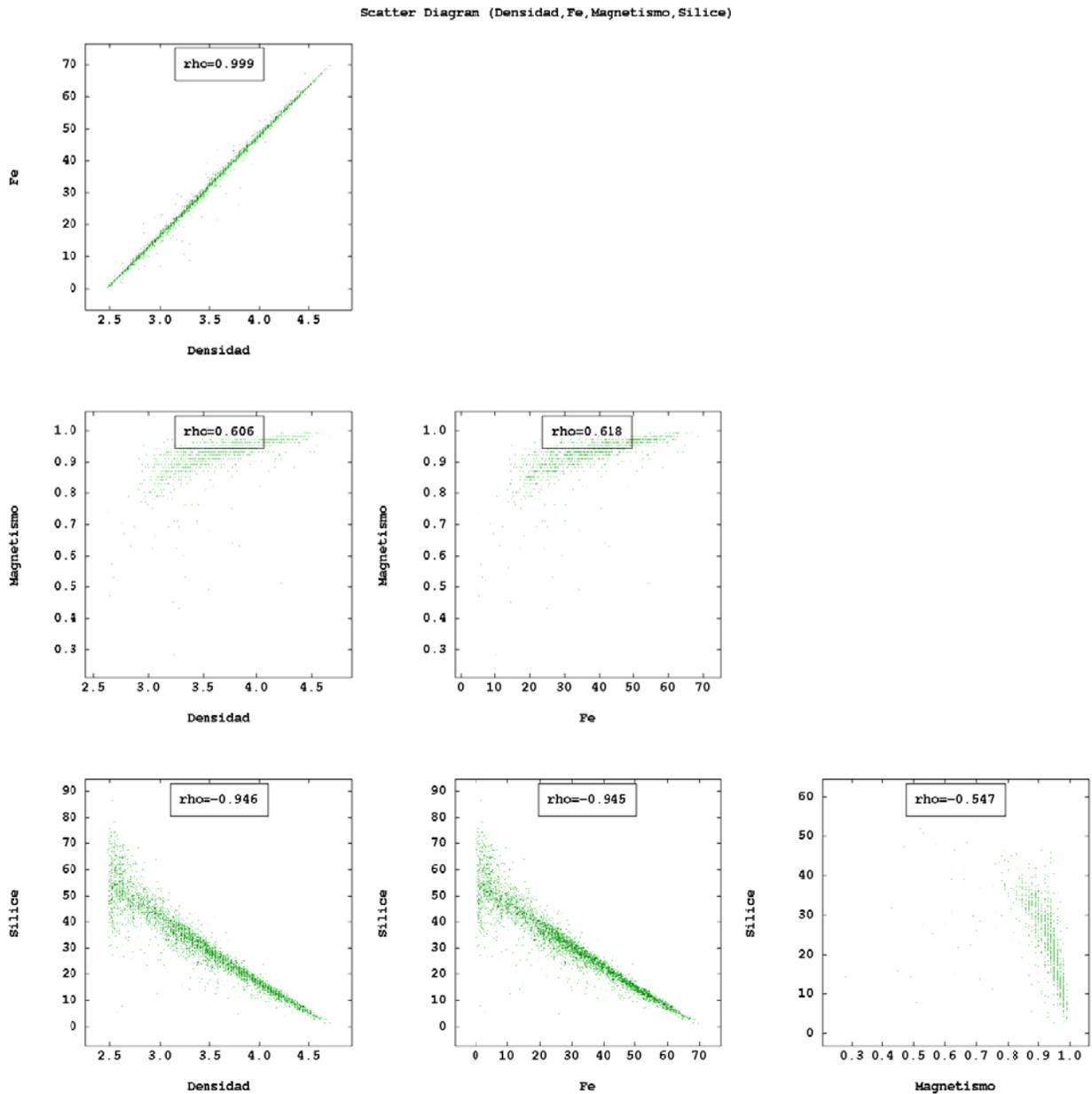


Figura 18: Gráficos de dispersión

La siguiente tabla muestra la matriz de correlación de las variables.

	Densidad	Fe	Magnetismo	Sílice
Densidad	1	0.9989	0.6061	-0.9458
Fe	0.9989	1	0.6183	-0.945
Magnetismo	0.6061	0.6183	1	-0.547
Sílice	-0.9458	-0.945	-0.547	1

Tabla 15: Matriz de correlación

De las cuatro variables se puede observar que la densidad se correlaciona muy bien con la ley de fierro Fe, con correlaciones 0.99, y que la ley de sílice se correlaciona negativamente con la ley de fierro Fe.

Por lo tanto para poder trabajar adecuadamente se procede filtrar los datos aberrantes y dejar a un lado la variable densidad, que depende totalmente de la ley de fierro y es redundante con esta variable.

Se obtiene las siguientes estadísticas básicas:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Fe [%]	5015	0.22	69.61	26.2066	306.7426
Magnetismo	1176	0.28	0.99	0.9153	0.0047
Sílice [%]	4181	1.05	85.96	31.4142	231.5432

Tabla 16: Estadística básica después de los filtros

Después de realizar varios estudios variográficos, se obtuvieron los mejores parámetros para visualizar los variogramas experimentales; a saber, las tres direcciones Noreste (45°), Noroeste (135°) y la perpendicular a ella (profundidad).

	N45°	N135°	Vertical
Tolerancia del ángulo (°)	25	25	90
Distancia del paso (m)	50	50	20
Número de pasos	10	10	25
Tolerancia en la distancia (m)	25	25	10
Altura de la banda(m)	10	10	-

Tabla 17: Parámetro para el cálculo de variogramas experimentales

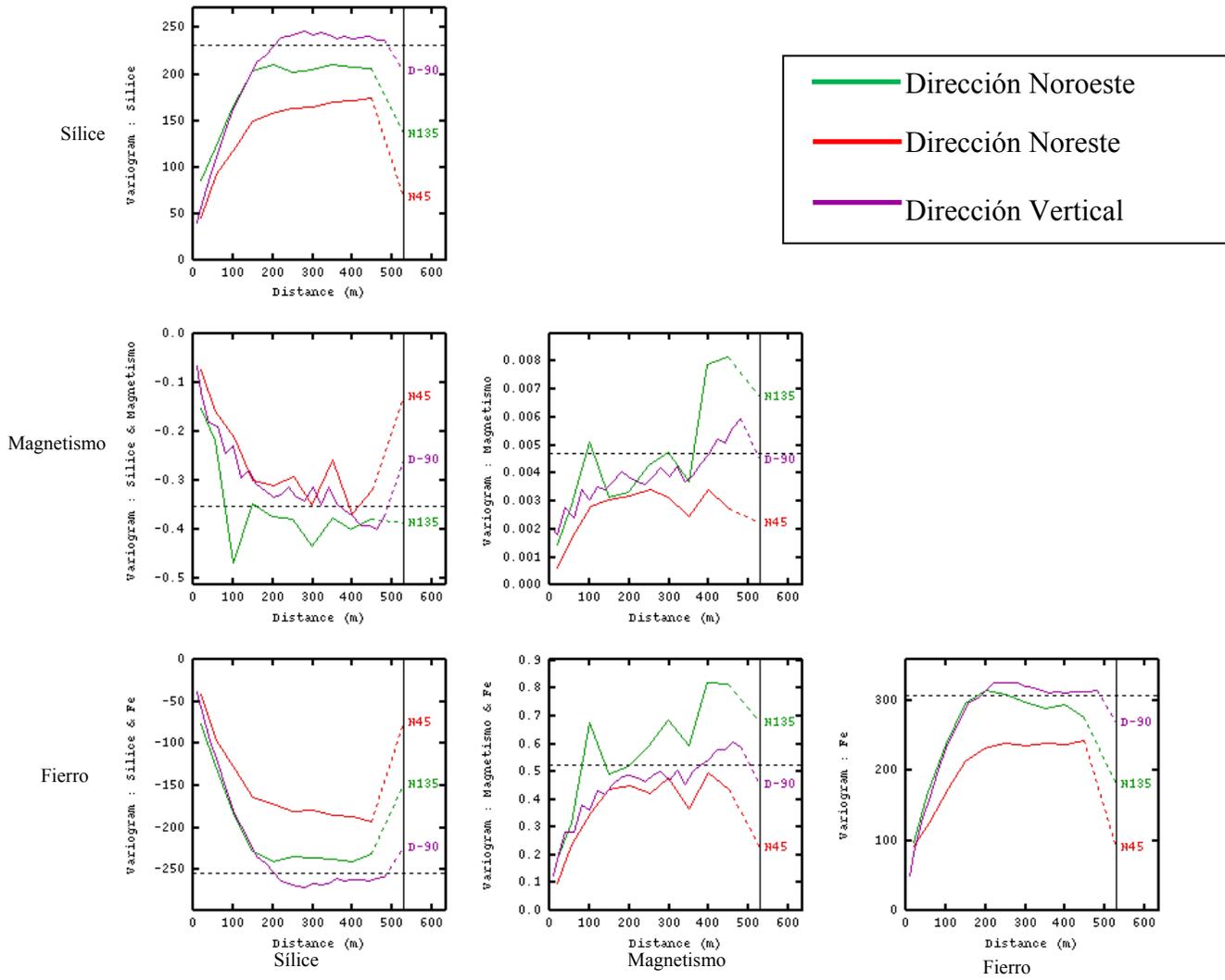


Figura 19: Variogramas simples y cruzados
 Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

Al igual que la base de datos anterior, los variogramas modelados se realizan después con las variables transformadas a gaussianas.

Casos de estudios a comparar:

- Cosimulación tradicional, todos los datos
- Cosimulación tradicional, base de datos homotópico
- Simulación vía MAF, $|h|= 10\text{m}$.
- Simulación vía MAF, $|h|= 25\text{m}$.
- Simulación vía MAF, $|h|= 50\text{m}$.

La simulación se realiza sobre un modelo de bloques de 15 x 15 x 15 metros, obteniendo un total de 403,200 bloques: 70 bloques en la dirección Este (X), 96 bloques en la dirección Norte (Y) y 60 bloques en la dirección vertical (Z).

Sólo se utilizara una porción del yacimiento, correspondiente a la parte más profunda y central, que es más relevante para el caso del fierro, de tal manera de no colapsar los programas computacionales. Esta pequeña porción consta de 32 bloques en la dirección Este (X), 44 bloques en la dirección Norte (Y) y 28 bloques en la dirección vertical (Z), correspondiente a parte baja y central del yacimiento.

En el caso de los MAF se decide utilizar las siguientes distancias: 10, 25, 50 metros, en la dirección vertical ya que presenta mayor cantidad y continuidad de datos. Las distancias fueron escogidas por las características de la malla de sondaje, que corresponde a 50 x 50 metros. Por esta razón se utiliza 50 m. Los 10 metros se escogen por la distancia de composición, la cual corresponde a 10m de largo en cada sondaje. Por último se eligió una distancia intermedia para analizar qué sucede.

Por lo tanto se hará exactamente lo mismo que la base de datos anterior, sólo que con diferentes datos y distancias para el caso de las simulaciones vía MAF. Se desplegarán los resultados más importantes, como los variogramas y las matrices de transformación para los MAF indicados anteriormente con diferentes distancias. Todo el resto será expuesto en los anexos. (anexo 10)

5.2. Caso 1: cosimulación tradicional

Se realizan los mismos pasos para cosimulación tradicional como en la base de datos anterior, correspondiente al yacimiento polimetálico compuesto por Cu, Ag, Sb y As.

5.2.1. Transformar variables originales a gaussianas:

Para los datos de ley, se tienen las siguientes medias y desviaciones:

	Media	Desv. est.
Fierro [%]	26.21	17.51
Magnetismo	0.915	0.07
Sílice [%]	31.41	15.22

Tabla 18: Estadísticas básicas de los datos originales

Luego se realiza una transformación (anamorfosis) de cada variable, de modo que las variables transformadas presentan una distribución gaussiana de media cero y varianza unitaria.

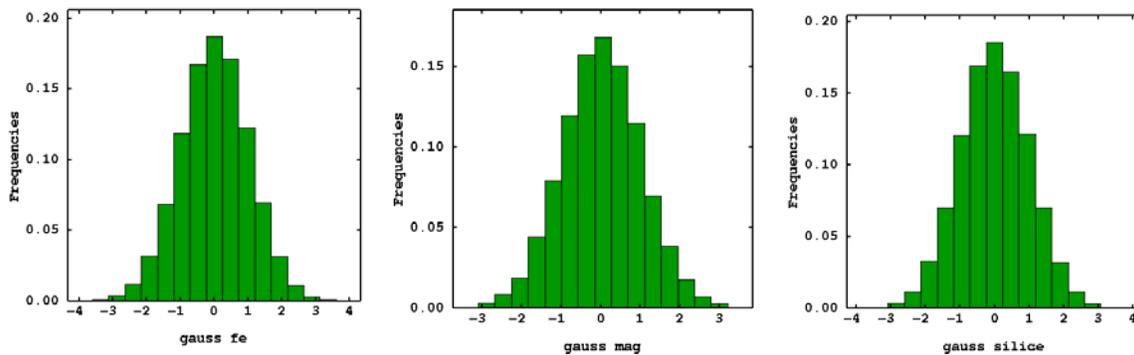


Figura 20: Histogramas para las variables gaussianas

Los variogramas experimentales de las variables gaussianas se calculan con los siguientes parámetros:

	N45°	N135°	Vertical
Tolerancia del ángulo (°)	25	25	90
Distancia del paso (m)	50	50	20
Número de pasos	10	10	25
Tolerancia en la distancia (m)	25	25	10
Altura de la banda (m)	10	10	-

Tabla 19: Parámetros de cálculo de los variogramas experimentales

El modelo de correogionalización se presenta a continuación:

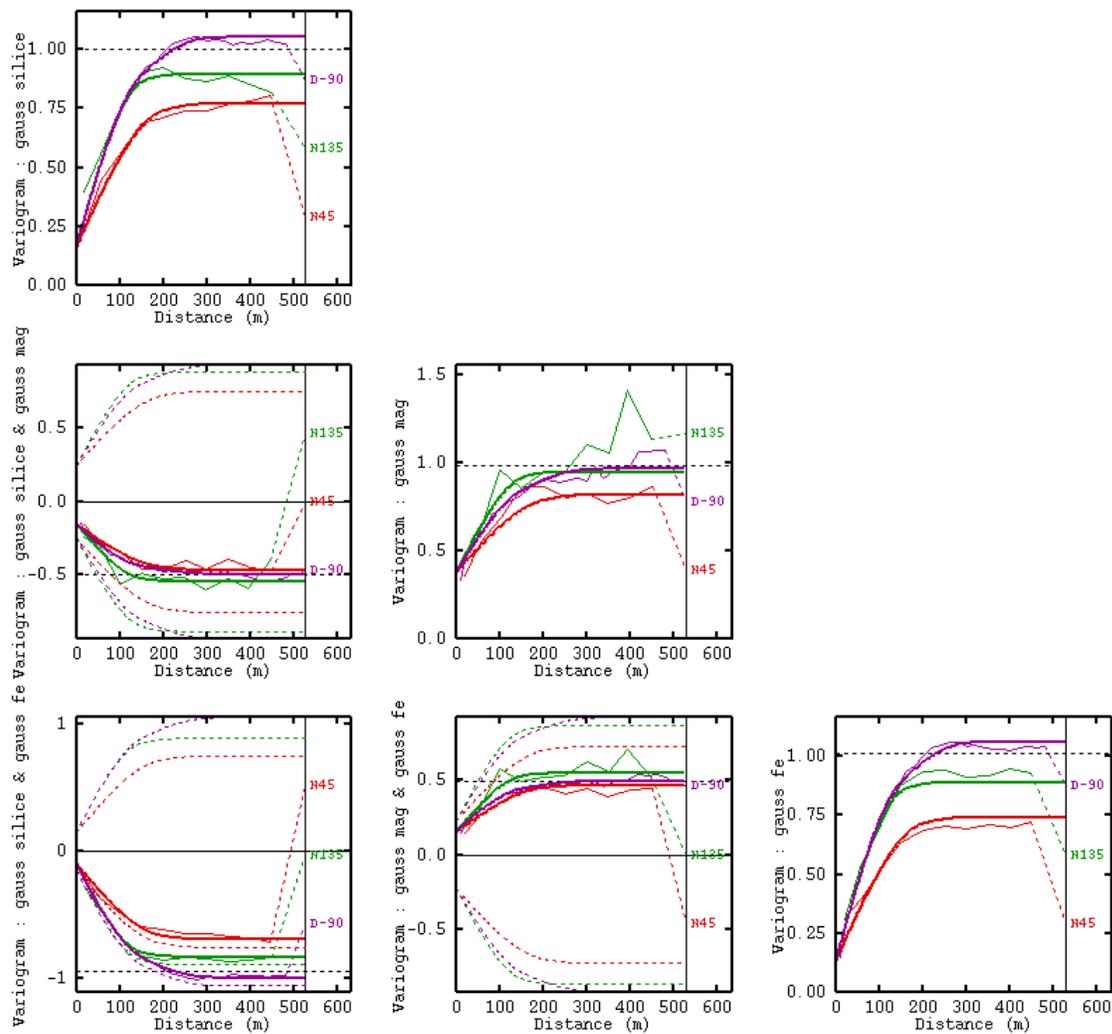


Figura 21 Variogramas experimentales y modelados
 Experimental: (línea delgada no regular) y modelado (línea gruesa),
 Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

La primera columna de la izquierda corresponde a la variable sílice al igual que la primera fila superior, luego la segunda columna corresponde a la variable magnetismo al igual que la fila intermedia, posteriormente la tercera fila y última columna corresponde a la variable Fierro. Los variogramas que están en la diagonal superior corresponden a los variogramas de las variables gaussianas por sí solas, en cambio el resto son variogramas cruzados según corresponda.

Las direcciones de cálculo corresponden a las direcciones noreste (color rojo N45), noroeste (color verde) y cota (color morado), dado que son aquellas que presentan la mayor anisotropía. Luego se procede a modelar todos los variogramas en conjunto, el cual se hace con ayuda de programas computacionales para el ajuste de automático de mesetas.

El modelo de correogionalización comprende un efecto pepita y cuatro variogramas esféricos anidados (alcances en metros a lo largo de las direcciones principales indicadas entre paréntesis):

$$\begin{aligned} \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.1358 & 0.1528 & -0.0939 \\ 0.1528 & 0.3754 & -0.1510 \\ -0.0939 & -0.1510 & 0.1619 \end{pmatrix} pepa \\ & + \begin{pmatrix} 0.4299 & 0.1942 & -0.4130 \\ 0.1942 & 0.2275 & -0.1899 \\ -0.4130 & -0.1899 & 0.4069 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 150 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0.1754 & 0.1197 & -0.1873 \\ 0.1197 & 0.2123 & -0.1274 \\ -0.1873 & -0.1274 & 0.1999 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 300 \\ 180 \\ 300 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0.1486 & 0.0835 & -0.01368 \\ 0.0835 & 0.1312 & -0.0788 \\ -0.1368 & -0.0788 & 0.1259 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} \infty \\ 250 \\ 350 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0.1722 & -0.0536 & -0.1644 \\ -0.0536 & 0.0167 & 0.0511 \\ -0.1644 & 0.0511 & 0.1568 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ 300 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.2.2. Cosimulación de las variables

Después de obtener el modelo que ajusta los variogramas experimentales, se procede a realizar la cosimulación de las variables gaussianas. Se realizan cien cosimulaciones por el método de bandas rotantes y condicionamiento por cokriging para obtener una cantidad suficiente de escenarios posibles para caracterizar las leyes del yacimiento.

Se obtienen las siguientes estadísticas básicas correspondientes al promedio de las simulaciones:

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Fierro [%]	3145700	2.61	69.61	28.35	16.14
Magnetismo	3145700	0.66	0.99	0.91	0.074
Sílice [%]	3145700	5.23	85.96	30.48	16.49

Tabla 20 : Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones

Los variogramas promedio de las cien simulaciones son los siguientes.

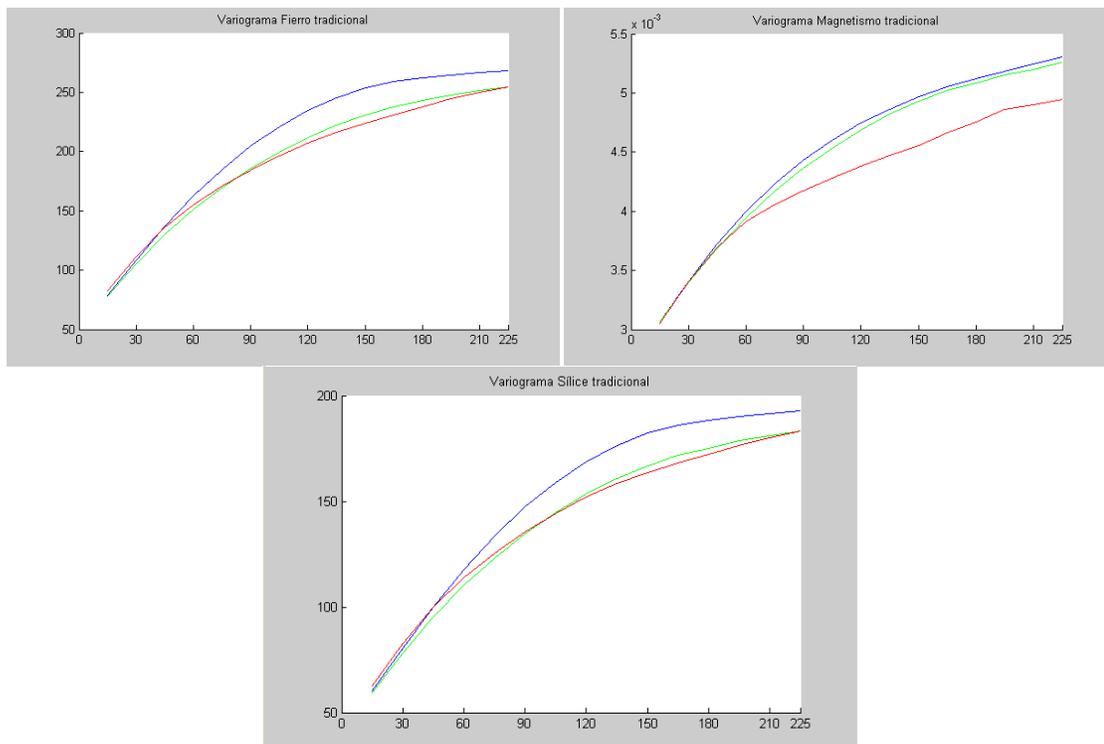


Figura 22: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. heterotópica).
Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

5.3. Caso 2: Cosimulación tradicional base homotópica

Para lograr una base homotópica es necesario filtrar los datos donde no están presentes las tres variables, por lo tanto la variable que tendrá mayor relevancia será la que tenga menos datos (en este caso, la variable magnetismo). Después de filtrar los datos se obtienen las siguientes estadísticas básicas.

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Fierro [%]	1173	4.72	68.5	36.92	12.34
Magnetismo	1173	0.28	0.99	0.915	0.07
Sílice [%]	1173	2.43	58.74	23.89	9.38

Tabla 21: Estadísticas básicas de los datos originales homotópicos

Se realizan las mismas etapas que en el caso heterotópico:

- Transformación de cada variable a una variable gaussiana
- Análisis variográfico: cálculo de variogramas experimentales simples y cruzados y ajuste de un modelo de correogionalización (se realiza un modelo omnidireccional porque se ajusta mejor).

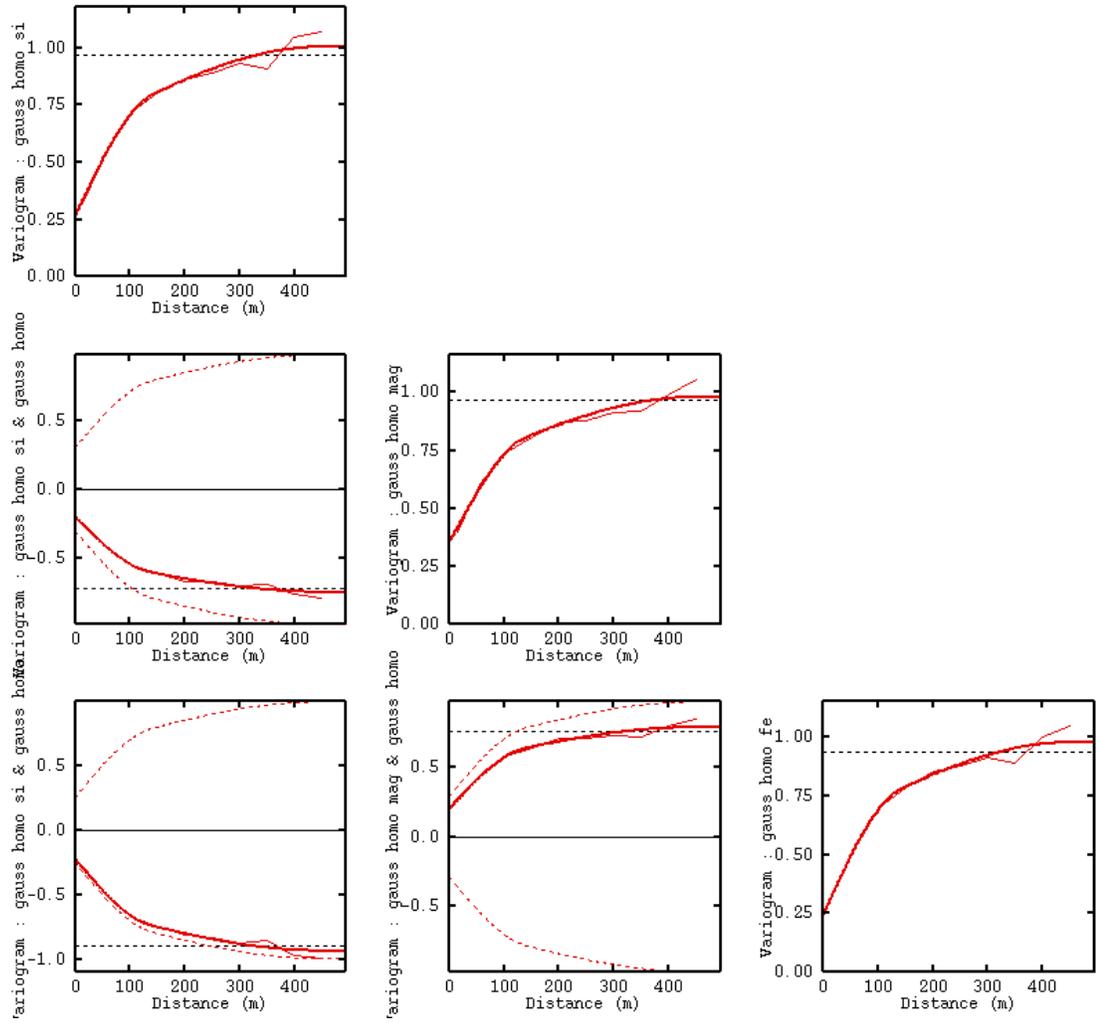


Figura 23: Variogramas experimentales y modelados para las variables homotópicas

El modelo de correionalización comprende un efecto pepita y dos variogramas esféricos anidados:

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.2398 & 0.1993 & -0.2185 \\ 0.1993 & 0.3509 & -0.1994 \\ -0.2185 & -0.1994 & 0.2613 \end{pmatrix} pepa \\
 & + \begin{pmatrix} 0.3712 & 0.3135 & -0.3599 \\ 0.3135 & 0.3110 & -0.2931 \\ -0.3599 & -0.2931 & 0.3580 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 140 \\ 140 \\ 140 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 0.3673 & 0.2731 & -0.3531 \\ 0.2731 & 0.3174 & -0.2590 \\ -0.3531 & -0.2590 & 0.3844 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 450 \\ 450 \\ 450 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Cosimulación por bandas rotantes (100 realizaciones)

- Condicionamiento por cokriging
- Transformación de vuelta a las variables originales

De esta manera se obtienen las siguientes estadísticas básicas correspondientes al promedio de las simulaciones.

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Fierro [%]	3145700	4.72	68.5	33.87	11.80
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.915	0.062
Sílice [%]	3145700	2.43	58.74	42.95	8.96

Tabla 22: Estadísticas básicas para el modelo de bloque, media de las cien simulaciones

Los variogramas promedio de las 100 realizaciones son los siguientes.

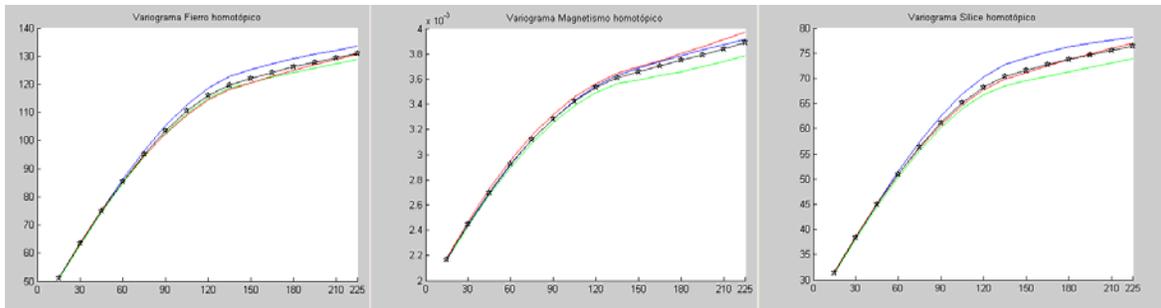


Figura 24 Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (Trad. homotópica)
 Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

Aquí se puede notar que, en realidad, un variograma omnidireccional es suficiente, el cual se ve en el gráfico con una línea negra y con asteriscos.

5.4. Caso 3: Simulación vía MAF h= 10m

Es igual que en el caso de estudio anterior por lo que sólo se mostrarán los resultados importantes, el resto será presentado en los anexos (anexo 10.4; 10.5)

Matriz de correlación de las variables gaussianas para h=0

$$\text{Corr}_{h=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0.79481 & -0.95309 \\ 0.79481 & 1 & -0.75332 \\ -0.95309 & -0.75332 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de correlación de las variables gaussianas para h = 10 metros

$$\text{Corr}_{h=10m} = \begin{pmatrix} 0.65185 & 0.46237 & -0.59085 \\ 0.46237 & 0.67238 & -0.44448 \\ -0.59085 & -0.44448 & 0.64504 \end{pmatrix}$$

El cálculo de los MAF entrega la siguiente matriz de transformación desde las variables gaussianas hacia los factores (MAF):

$$B_{10m} = \begin{pmatrix} 0.3577 & 0.2251 & 3.5564 \\ 0.3615 & 1.4137 & -0.7665 \\ -0.3417 & 1.5660 & 2.8901 \end{pmatrix}$$

La matriz de transformación inversa es la siguiente:

$$B_{10m}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.9707 & 0.9032 & -0.9549 \\ -0.1438 & 0.4130 & 0.2864 \\ 0.1927 & -0.1170 & 0.0779 \end{pmatrix}$$

Luego de las simulaciones (100 realizaciones) se obtiene la siguiente tabla que representa las medias de las simulaciones.

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Fierro [%]	3145700	0.22	69.61	23.49	16.78
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.92	0.066
Sílice [%]	3145700	1.05	85.96	33.50	15.05

Tabla 23: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, media de cien simulaciones

Los variogramas promedio de las cien realizaciones son las siguientes:

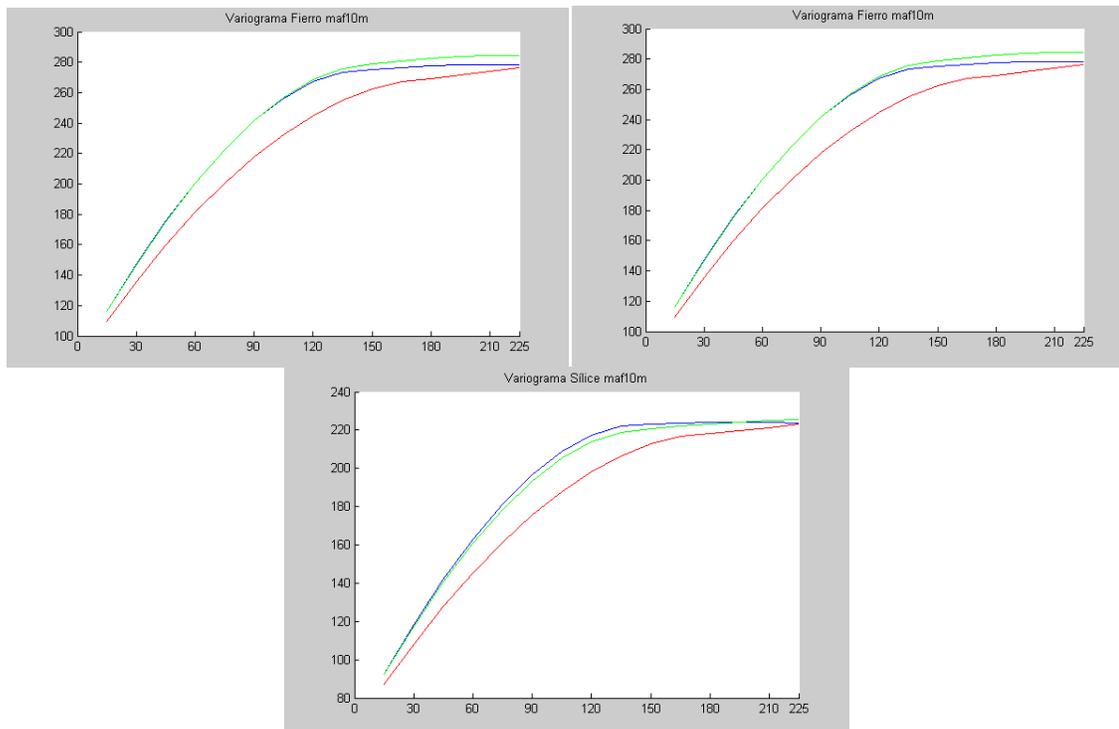


Figura 25: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=10m).
Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

5.5. Caso 4: Simulación vía MAF h= 25m y h= 50m

Se aplica la metodología anterior, cambiando la distancia para el cálculo de los MAF a h=25m y luego a h=50m. A continuación, se indica las matrices de transformación de MAF a variables gaussianas y los variogramas promedio de las leyes simuladas

$$B_{25m} = \begin{pmatrix} 0.0325 & 0.5875 & 3.5327 \\ -0.1448 & 1.3895 & -0.8747 \\ -1.0739 & 1.5180 & 2.7321 \end{pmatrix}$$

$$B_{50m} = \begin{pmatrix} -0.2633 & 1.3724 & 3.2975 \\ 0.7577 & 1.0164 & -1.0534 \\ -0.5611 & 2.4815 & 2.1092 \end{pmatrix}$$

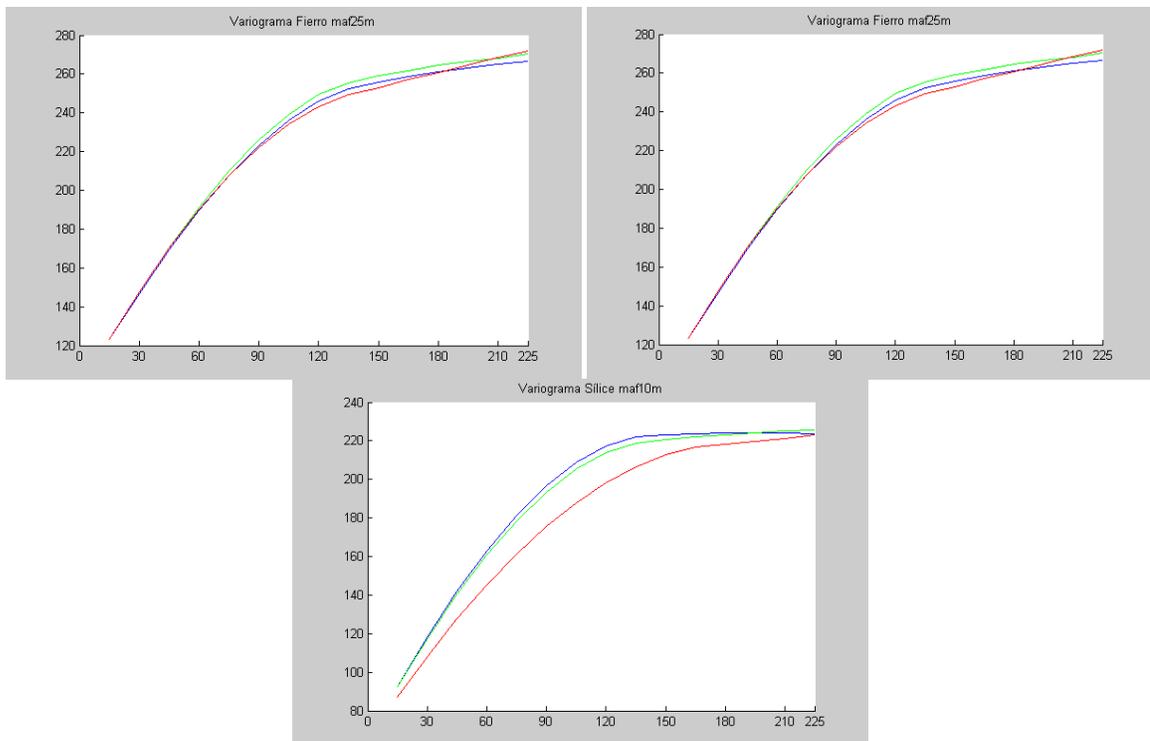


Figura 26: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=25m)
Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

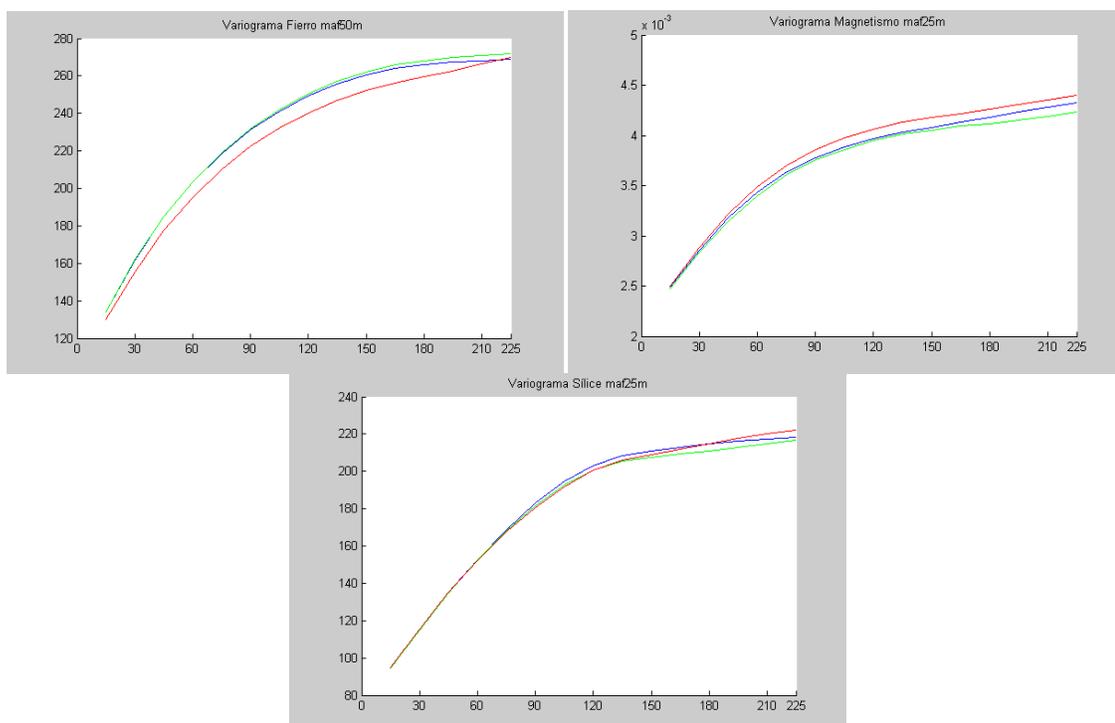


Figura 27: Promedio de variogramas experimentales de leyes simuladas (MAF h=50m).
 Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

5.6. Consideraciones de tiempo para cada (co)-simulación.

Al igual que el caso de estudio anterior, se tomaron los tiempos aproximados de simulación. La siguiente tabla muestra los tiempos demorados.

Simulación	Tiempo total (hr, min, seg)	factor 1	factor 2	factor 3
Tradicional heterotópica	4:00:00	.-	.-	.-
Tradicional homotópica	2:00:00	.-	.-	.-
Vía MAF 10m	0:46:00	0:19:00	0:17:00	0:10:00
Vía MAF 20m	0:52:00	0:17:00	0:18:00	0:17:00
Vía MAF 30m	1:04:00	0:28:00	0:19:00	0:17:00

Tabla 24: Tiempos de simulación

En este caso se observa que existe una reducción de los tiempos de simulación muy notoria al aplicar la teoría MAF, con respecto al enfoque tradicional. Por lo tanto para el yacimiento completo (las simulaciones fueron realizadas en un sector más pequeño) o yacimientos más grandes, las simulaciones que pueden demorar semanas se podrán realizar en pocos días.

6. DISCUSIÓN DE RESULTADO

Se compara el caso vía MAF con la distancia más pequeña ya que los resultados con diferentes distancias son similares entre ellos (ver anexos).

6.1. Tiempos de simulación

La cosimulación vía MAF presenta una reducción importante en los tiempos de simulación (Tabla 25). Esto se debe a que la teoría transforma un problema multivariable en sencillos casos univariados (igual número de variables). Los casos multivariables son difíciles y complejos, por lo que los computadores tardan más tiempo en realizar las simulaciones. Para yacimientos grandes y/o con muchas variables a estudiar, generalmente la simulación tradicional es muy difícil de realizar, por lo que la simulación vía MAF es una alternativa interesante.

Simulación	Tiempo total (hr, min, seg)	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
Tradicional (Cu, Ag, As, Sb)	0:27:30	.-	.-	.-	.-
Vía MAF 10m	0:18:30	0:05:22	0:03:55	0:05:17	0:03:56
Tradicional (Fe, Magn, Si)	4:00:00				
Vía MAF 10m	0:46:00	0:19:00	0:17:00	0:10:00	.-

Tabla 25: Tiempos de simulación, enfoque tradicional y vía MAF 10m

6.2. Reproducción de las distribuciones estadísticas

Las estadísticas básicas de ambos enfoques de simular presentan valores muy similares para todas las realizaciones (mínimo, máximo, media y desviación estándar) por lo que la simulación vía MAF es muy parecida a la simulación tradicional (Tabla 26). También las estadísticas son similares a los datos originales para cada yacimiento (Tabla 2 y 14).

Para el caso de los histogramas (figuras 28 y 29) presenta pequeñas diferencias para cada variable, pero la forma es similar, comparando ambos enfoques de cosimular. En la variable hierro se muestra la diferencia más notoria, no es tan similar, esto se explica que en el yacimiento de hierro los datos son más heterópicos y a la vez estos datos no representa de buena manera el yacimiento completo. Aunque para la variable magnetismo y sílice, la simulación vía MAF es similar a la forma tradicional, pero hay que tener en consideración que para yacimientos muy heterotópicos, no sería recomendable, por la pérdida de información.

En el caso de los boxplots, también son similares, presenta diferencia en los extremos y el boxplot más diferentes corresponde a la ley de hierro, que sucede lo mismo que el caso anterior, (base más heterotópica).

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Est.
Ag (g/t)	979300	0.39	855.01	34.45	58.6
Ag-maf10	979300	0.39	855.01	34.89	58.9
As (g/t)	979300	3.74	12610	2041.30	4530.5
As-maf10	979300	3.74	12610	1740.50	4005.0
Cu (%)	979300	0.01	29.9	1.60	2.4
Cu-maf10	979300	0.01	29.9	1.62	2.5
Sb (g/t)	979300	0.92	8240.1	232.02	594.3
Sb-maf10	979300	0.92	8240.1	204.16	526.6
Fe (%)	3145700	0.22	69.61	28.35	16.1
Fe-maf10	3145700	0.22	69.61	23.49	16.8
Mag	3145700	0.28	0.99	0.91	0.1
Mag-maf10	3145700	0.28	0.99	0.92	0.1
Si (%)	3145700	1.05	85.96	30.48	13.5
Si-maf10	3145700	1.05	85.96	33.50	15.0

Tabla 26: Estadísticas básicas de leyes simuladas por ambos enfoques

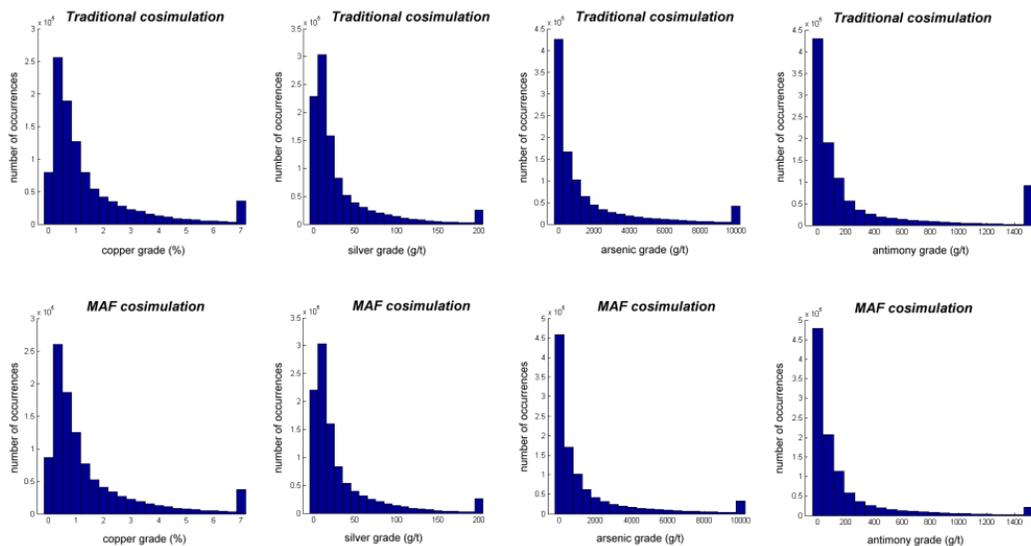


Figura 28: Histograma de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de cobre

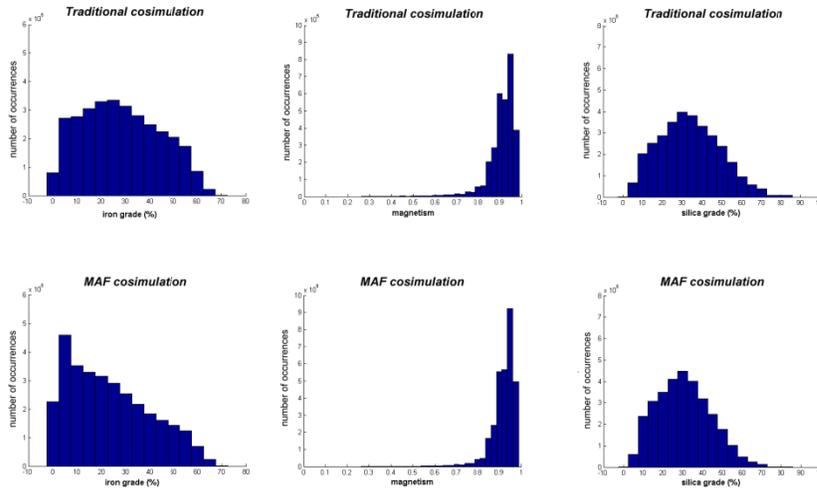


Figura 299: Histograma de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de hierro

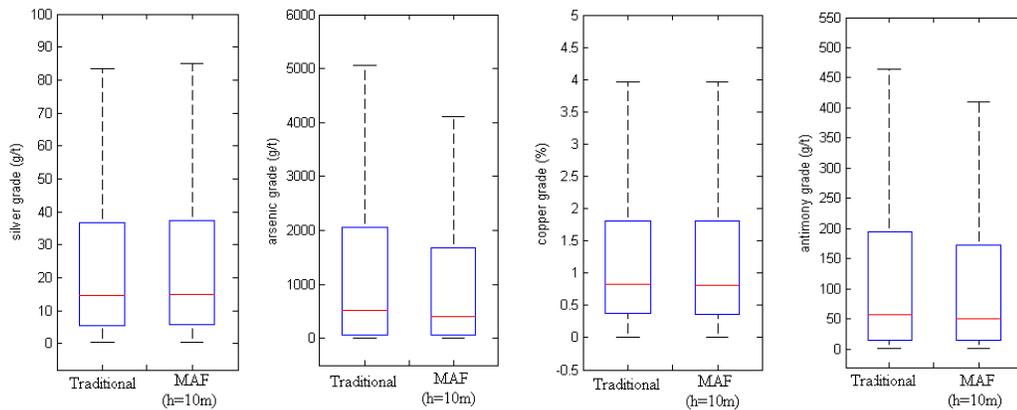


Figura 30: Boxplots de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de cobre

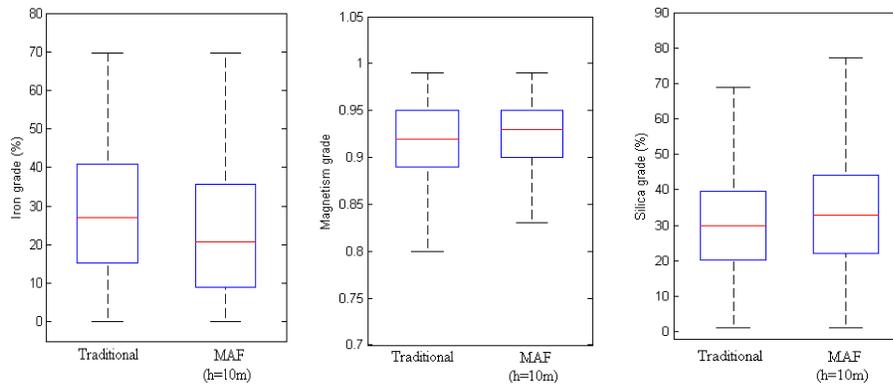


Figura 31: Boxplots de las leyes simuladas sobre 100 realizaciones, yacimiento de hierro

6.3. Reproducción de la correlación espacial (variogramas)

Para los variogramas podemos ver que presentan formas idénticas (figura 32). Los alcances y mesetas son comprobables entre sí. Por lo que la continuidad espacial de las leyes no

depende de la forma de simular, vía MAF o tradicional, son parecidas. En el caso del yacimiento de cobre (figura 32 izquierda) presentan un efecto pepita alto, esto se puede deber a que las variables presentan distribuciones con colas muy largas, es decir con valores muy extremos como se aprecian en los histogramas anteriores (figura 28.) y/o un muestreo altamente sesgado.

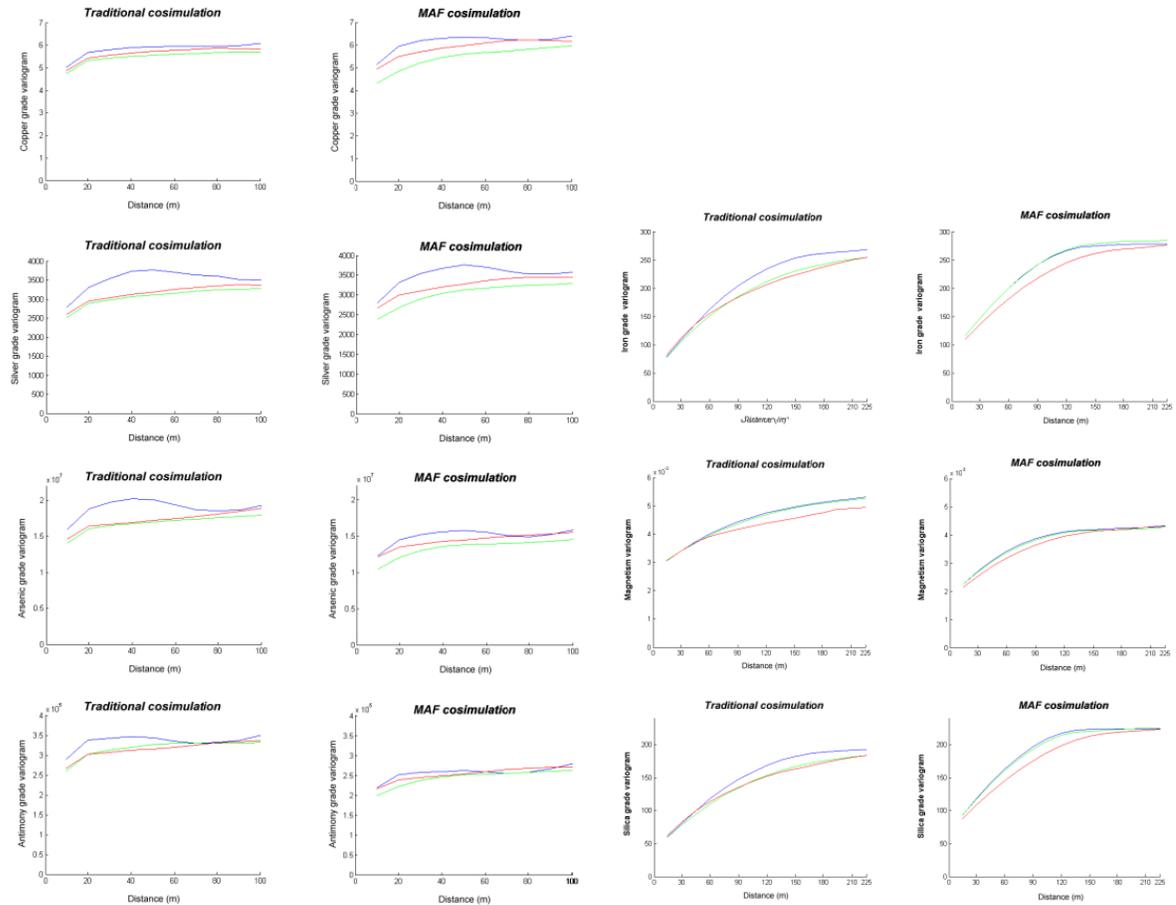


Figura 32: Promedio de variogramas experimental de leyes simuladas.
 Línea verde, dirección Noroeste; línea roja, dirección Noreste; línea morada, dirección Vertical.

6.4. Reproducción de la correlación entre las variables

Para las correlaciones entre las variables, se aprecia que para ambas enfoques de simular, los valores son parecidos. Por lo que la dependencia entre las variables no depende en la forma de simular las leyes de las variables. También estas correlaciones se asemejan bastante a las correlaciones de los datos originales en las (tabla 3 y 15)

Variable	Copper grade	Silver grade	Arsenic grade	Antimony grade
Copper grade	1	0.732	0.533	0.450
Silver grade	0.732	1	0.496	0.416
Arsenic grade	0.533	0.496	1	0.711
Antimony grade	0.450	0.416	0.711	1

Tabla 27: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque tradicional

Variable	Copper grade	Silver grade	Arsenic grade	Antimony grade
Copper grade	1	0.762	0.564	0.404
Silver grade	0.762	1	0.508	0.365
Arsenic grade	0.564	0.508	1	0.702
Antimony grade	0.404	0.365	0.702	1

Tabla 28: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque MAF h=10m

Variable	Iron grade	Magnetism	Silica grade
Iron grade	1	0.49	-0.90
Magnetism	0.49	1	-0.51
Silica grade	-0.9	-0.51	1

Tabla 29: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque tradicional

Variable	Iron grade	Magnetism	Silica grade
Iron grade	1	0.60	-0.92
Magnetism	0.60	1	-0.66
Silica grade	-0.92	-0.66	1

Tabla 30: Matriz de correlación de las leyes simuladas, enfoque MAF

6.5. Condicionamiento de los datos

La desventaja de la teoría MAF está en el condicionamiento de los datos, ya que existe una pérdida de información para yacimientos heterotópicos. Por construcción los factores de los MAF se realizan a partir de una combinación lineal de las variables originales. En los yacimiento heterotópicos existen ubicaciones donde no se muestrean todas las variables de interés, entonces para estas ubicaciones no se pueden crear los factores para el MAF. De esta manera se pierde toda la información de esa ubicación. Para las dos bases de datos en estudio, existe una variable submuestreada, como es la ley de antimonio y el magnetismo en los yacimientos de cobre y hierro respectivamente. Por lo tanto habrá sectores con poco condicionamiento a los datos originales ya que se pierde información, esto ocurre para las variables que no están submustradas, es decir, las variables ley de antimonio y magnetismo tendrán un buen condicionamiento a los datos ya que estas variables no pierden información al ser las que tienen la menor cantidad de muestras.

Este efecto se puede observar al tomar algunos bloques en sectores cercanos a los sitios más heterópicos y comparando la dispersión de las leyes simuladas mediante la desviación estándar de las leyes. Se comparan ambos enfoques, la simulación tradicional contra la simulación vía MAF como se observa en la los siguientes gráficos (figuras 30 y 31), donde las leyes que pierden información presentan una mayor desviación (mayoría de puntos sobre la línea de 45°), lo que indica una alta incerteza de las leyes.

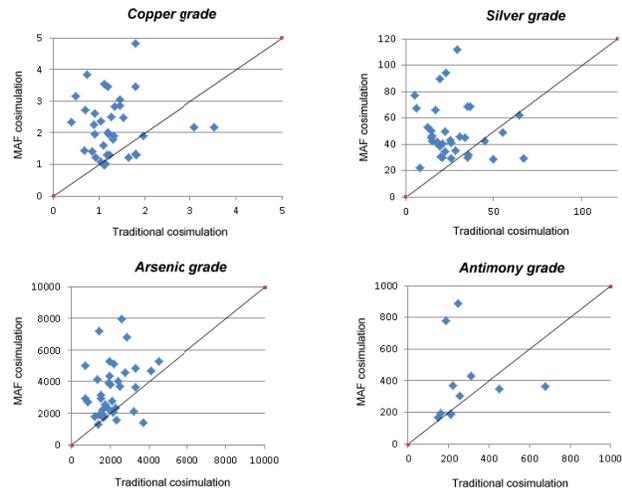


Figura 30: Desviación condicional, bloques seleccionados en yacimiento de cobre.

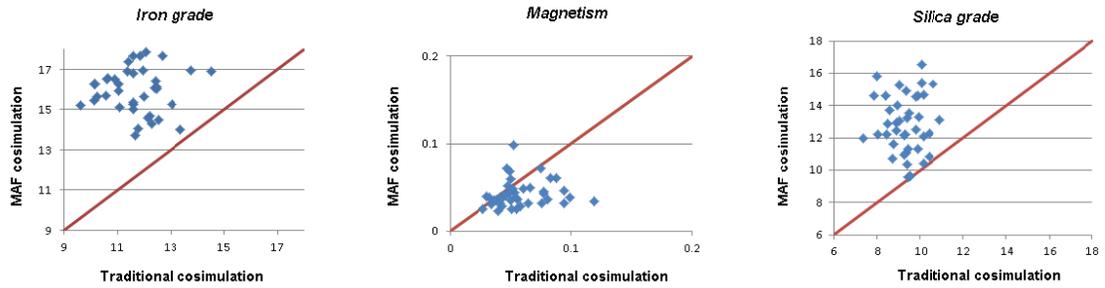


Figura 31: Desviación condicional, bloques seleccionados en yacimiento de hierro

7. CONCLUSIONES

La teoría MAF aplicada a la cosimulación de leyes presenta ventajas comparativas sobre la forma tradicional de cosimular las leyes en yacimientos mineros.

Es más simple la cosimulación vía MAF ya que transforma los problemas multivariados en simples casos univariados, esto se refleja en los problemas de modelamiento. Los modelamientos en casos multivariados requieren de ajustar un modelo de correogionalización lineal a todos los variogramas simples y cruzados, utilizando la teoría MAF sólo se ajustan los variogramas simples de los nuevos factores, por lo que reduce su complejidad. Esta simplicidad afecta notoriamente los tiempos de simulación los cuales se reducen considerablemente. De esta manera, la cosimulación en yacimientos grandes o de muchas variables, que por medio de la cosimulación tradicional que no eran factibles tienen una solución vía MAF.

Los resultados obtenidos muestran que la cosimulación vía MAF se comporta muy semejante a la forma tradicional en cuanto a las siguientes características. Las estadísticas básicas, distribución de leyes, continuidad espacial y correlación entre las variables son muy similares, presentan valores similares y gráficamente mantienen formas parecidas. Presenta una desventaja en cuanto al condicionamiento de datos para yacimientos heterotópicos ya que por construcción la teoría MAF elimina datos, si no están todas las variables muestreadas en el punto.

Se recomienda utilizar esta teoría MAF en la cosimulación de leyes para yacimientos mineros, siempre y cuando no presenten fuerte heterotopía. Para los casos de fuerte heterotopía es preferible utilizar la cosimulación tradicional ya que toma en cuenta toda la información existente. Con respecto a la distancia, se recomienda una distancia pequeña en la dirección de mayor continuidad ya que dará una mayor cantidad y calidad de información.

8. REFERENCIAS

- Armstrong, M. 1984 *Common problems seen in variograms*. Mathematical Geology, vol. 16, n°3, p. 305-313
- Boucher, A. and Dimitrakopoulos, R. 2009. *Block simulation of Multiple Correlated Variables*. Mathematical Geosciences, vo. 41, n°2, p.215-237
- Chilès J.P. and Delfiner, P. 1999. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York, p. 695
- Desbarats, A.J. and Dimitrakopoulos, R. 2000. *Geostatistical Simulation of Regionalized Pore-Size Distributions Using Min/Max autocorrelation Factors*. Mathematical Geology, vol. 32, n°. 8, p .919-942.
- Emery, X. 2008. *A turning bands program for conditional co-simulation of cross-correlated Gaussian random fields*. Computers & Geosciences, vol. 34, n°12, p. 1850-1862.
- Emery, X. 2010. *Iterative algorithms for fitting a linear model of coregionalization*. Computers & Geosciences, vol. 36, n°9, p. 1150-1160.
- Emery, X, Apuntes de clases como: Geoestadística (MI68A) y Evaluación de yacimientos (MI54A), Universidad de Chile
- Goovaerts, P. 1993 *Spatial orthogonality of the principal components computed from coregionalized variables*. Mathematical Geology, vol. 25, n°3, p. 281-302.
- Goovaerts, P. 1997. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York p. 480
- Goulard, M. & Voltz, M. 1992 *Linear coregionalization model: Tools for estimation and choice of cross variogram matrix*. Mathematical Geology, vol. 30, n°6, p. 589-615.
- Vargas-Guzman, J.A. and Dimitrakopoulos, R. 2003. *Computational properties of min/max autocorrelation factors*. Computers & Geosciences, vol. 29, p. 715-723.
- Wackernagel, H. 2003 *Multivariate Geostatistics: an Introduction with Applications*, 3rd edn., Springer, Berlin

9. ANEXO A: YACIMIENTO POLIMETÁLICO

9.1. Datos heterotópicos

Comparando las bases heterotópicas y homotópicas se puede apreciar en que ubicación del espacio no se tienen todas las variables muestreadas.

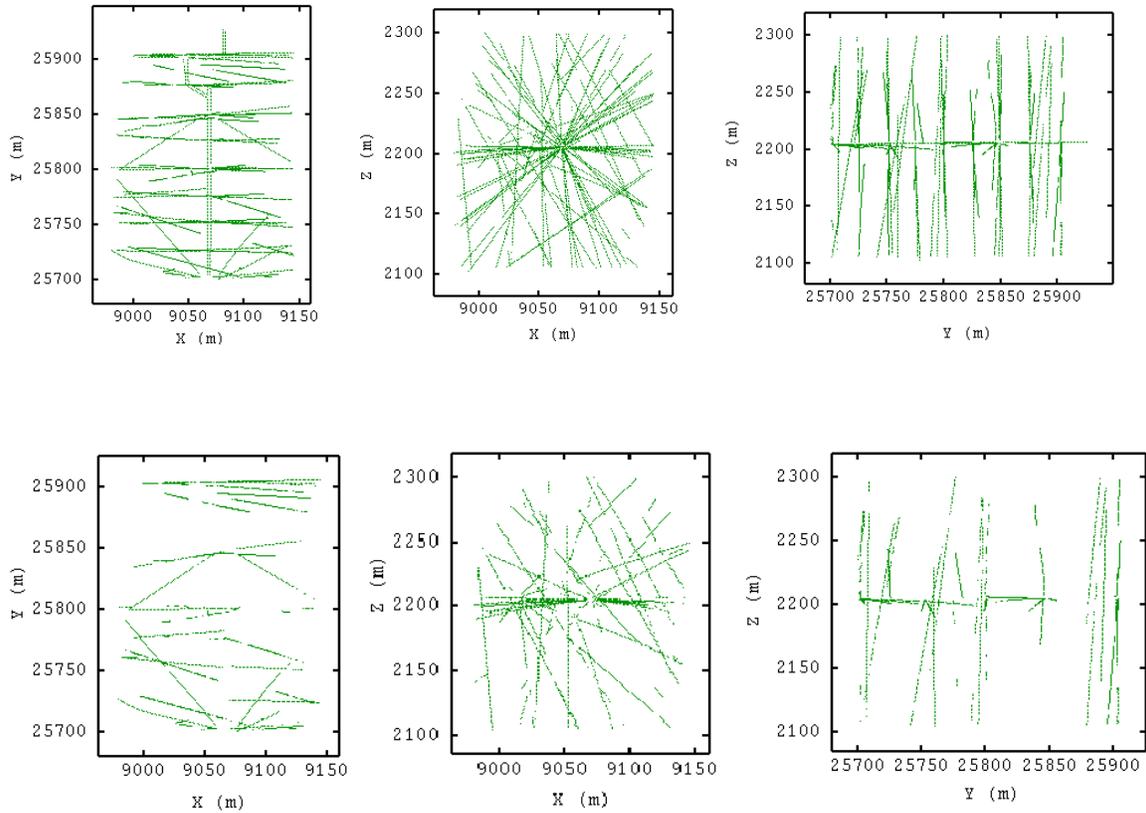


Figura 31: Representación de sondajes con datos heterotópicos (arriba) y homotópicos (abajo)

9.2. Histogramas

Los histogramas de las variables para el caso homotópico son los siguientes.

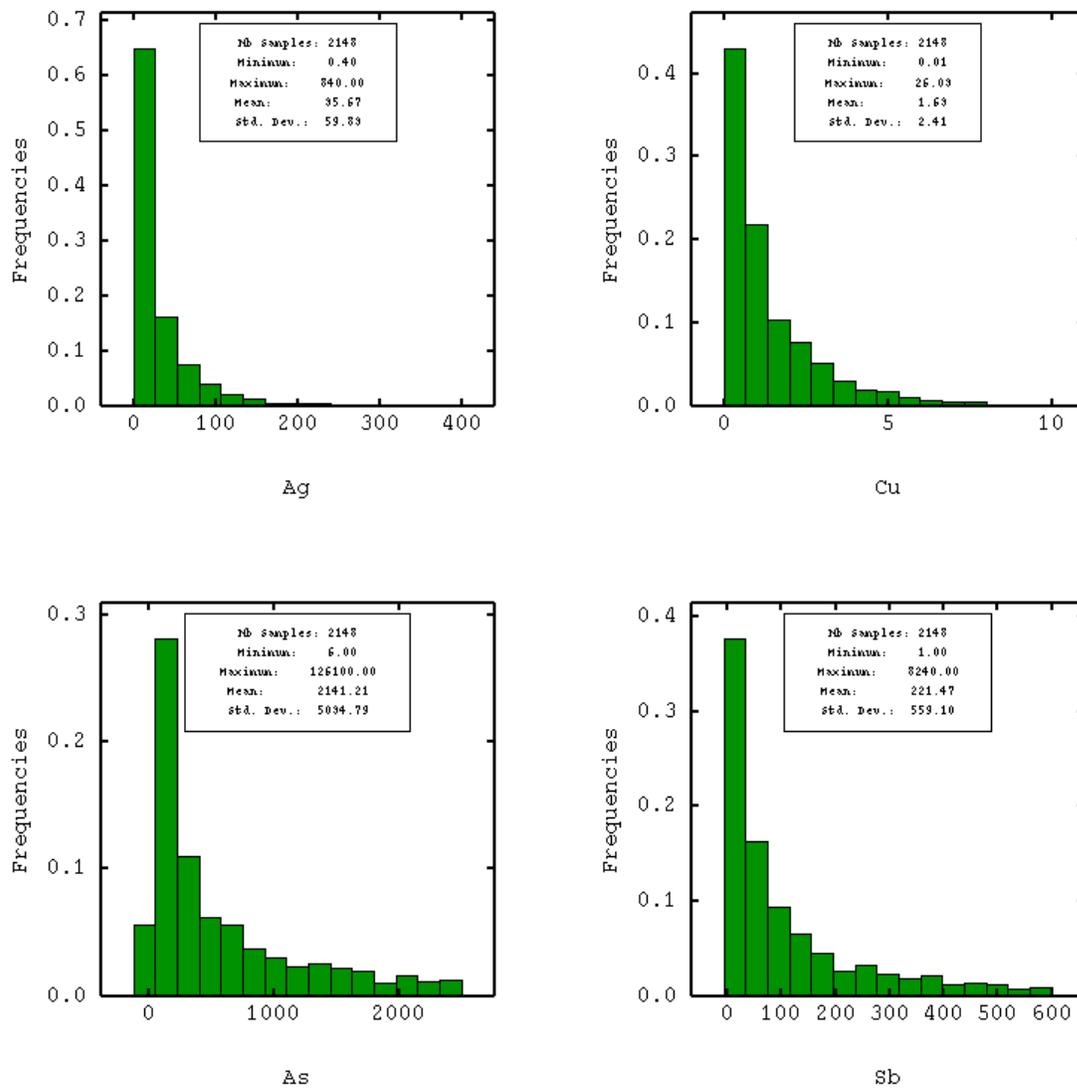
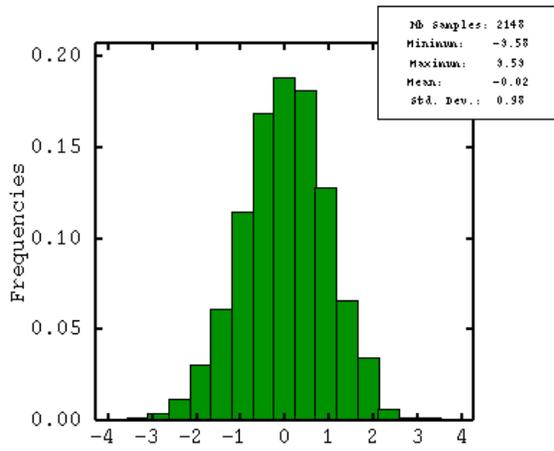
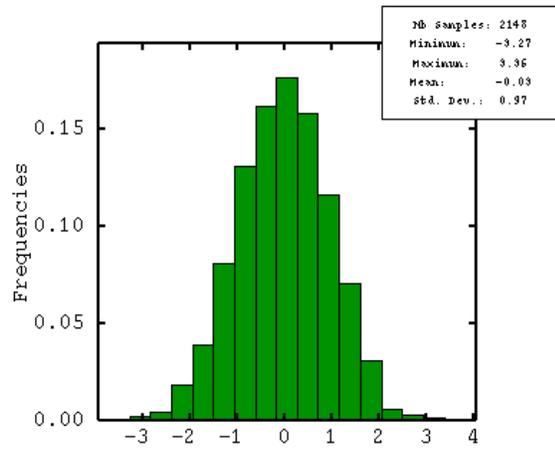


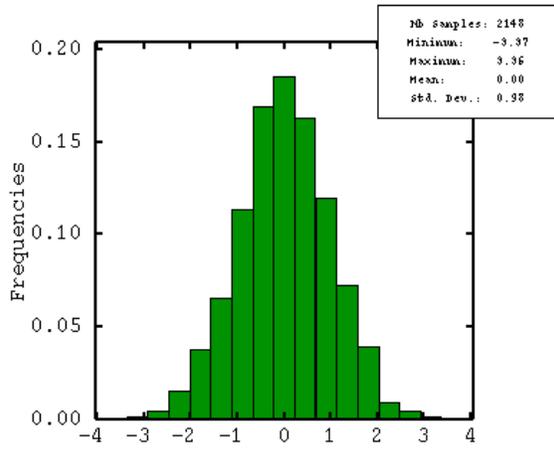
Figura 32: Histogramas de las variables originales



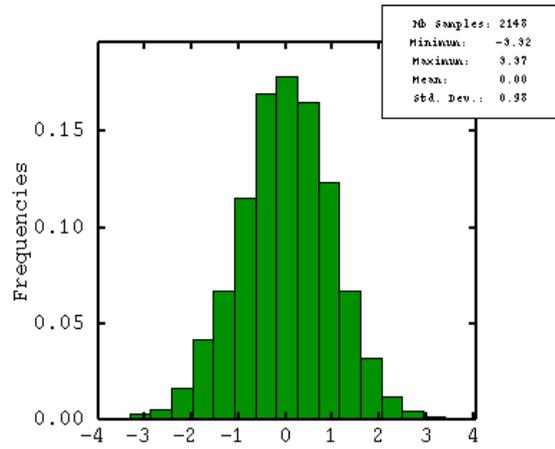
homo gauss ag



homo gauss cu



homo gauss as



homo gauss sb

Figura 33: Histogramas de las variables gaussianas

9.3. Modelo de correogionalización.

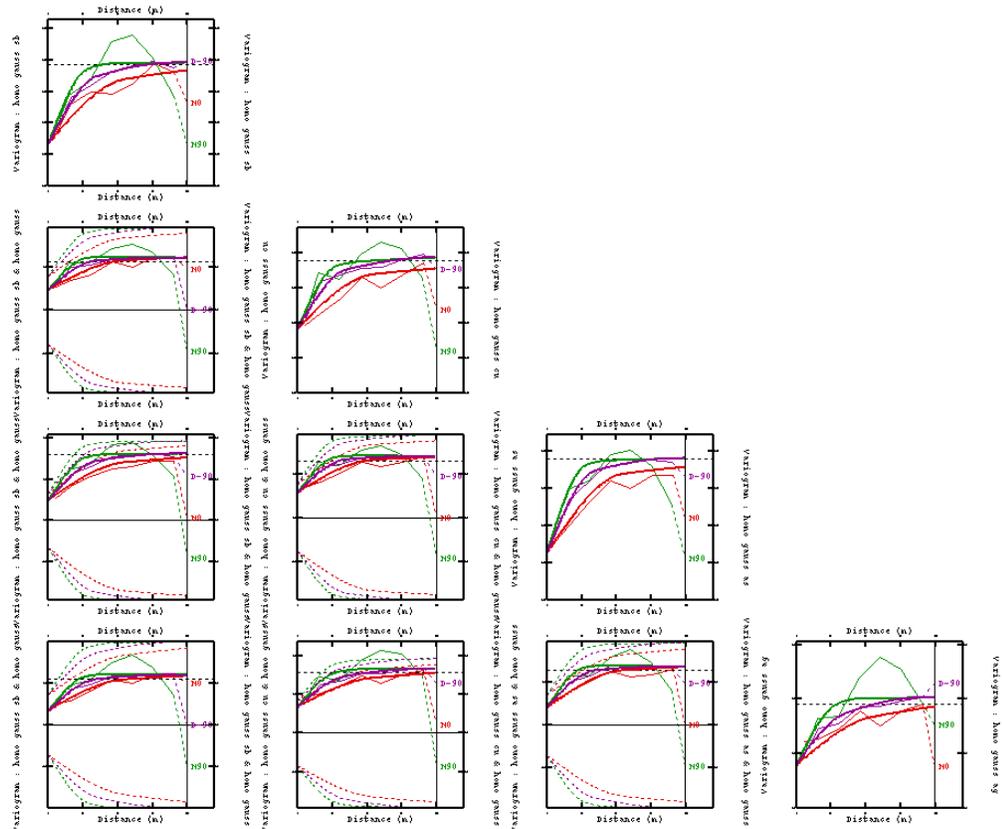


Figura 34: Variogramas experimentales y modelados para las variables homotópicas, Línea verde, dirección Este, línea roja, dirección Norte, línea morada, dirección Vertical.

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.3900 & 0.2090 & 0.3382 & 0.1675 \\ 0.2090 & 0.3198 & 0.8241 & 0.2420 \\ 0.3382 & 0.2841 & 0.4605 & 0.2346 \\ 0.1675 & 0.2420 & 0.2346 & 0.3361 \end{pmatrix} pepa \\
 + & \begin{pmatrix} 0.3980 & 0.3663 & 0.2830 & 0.3051 \\ 0.3663 & 0.4594 & 0.3255 & 0.3708 \\ 0.2830 & 0.3255 & 0.3249 & 0.2842 \\ 0.3051 & 0.3708 & 0.2842 & 0.4029 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 28 \\ 55 \\ 35 \end{pmatrix} \\
 + & \begin{pmatrix} 0.1286 & 0.1474 & 0.0971 & 0.1803 \\ 0.1906 & 0.0971 & 0.1228 & 0.1073 \\ 0.1365 & 0.1803 & 0.1073 & 0.2227 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 45 \\ 165 \\ 90 \end{pmatrix} \\
 + & \begin{pmatrix} 0.0321 & -0.0317 & 0.0258 & -0.0234 \\ -0.0317 & 0.0398 & -0.0110 & 0.0160 \\ 0.0258 & -0.0110 & 0.0782 & -0.0371 \\ -0.0234 & 0.0160 & -0.0371 & 0.0241 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 200 \\ \infty \\ 180 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

9.4. Matrices de correlación a diferentes distancias

$$\text{VarCov } h=0 \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.66707 & 0.83174 & 0.56044 \\ 0.66707 & 1.00000 & 0.69165 & 0.82927 \\ 0.83174 & 0.69165 & 1.00000 & 0.57688 \\ 0.56044 & 0.82927 & 0.57688 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=10\text{m} \begin{pmatrix} 0.88714 & 0.42016 & 0.64120 & 0.20832 \\ 0.42016 & 0.80690 & 0.59358 & 0.62025 \\ 0.64120 & 0.59358 & 0.82640 & 0.40757 \\ 0.20832 & 0.62025 & 0.40757 & 0.98685 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=20\text{m} \begin{pmatrix} 1.37925 & 0.89437 & 1.17030 & 0.53397 \\ 0.89437 & 1.18914 & 0.93004 & 0.84073 \\ 1.17030 & 0.93004 & 1.33227 & 0.60901 \\ 0.53397 & 0.84073 & 0.60901 & 1.21698 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=30\text{m} \begin{pmatrix} 1.69501 & 1.09330 & 1.44354 & 0.92694 \\ 1.09330 & 1.37946 & 1.17377 & 1.09379 \\ 1.44354 & 1.17377 & 1.61047 & 1.01944 \\ 0.92694 & 1.09379 & 1.01944 & 1.38464 \end{pmatrix}$$

Un cálculo a priori de las correlaciones de los nuevos componentes MAF, para las tres distancias a estudiar da:

$$B_{10\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{10\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.9999 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0001 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0001 & -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$B_{10\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=10) \times B_{10\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.6295 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.7712 & -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0000 & -0.0001 & 1.3819 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0001 & -0.0000 & 1.8615 \end{pmatrix}$$

$$B_{20\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{20\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.9999 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9999 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$B_{20\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=20) \times B_{20\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.9984 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 1.1345 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & 1.2330 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 2.2386 \end{pmatrix}$$

$$B_{30\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{30\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & 1.0002 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$B_{30\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=30) \times B_{30\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.8917 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.3615 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0.0000 & -0.0001 & 1.6733 & -0.0001 \\ 0.0000 & -0.0001 & -0.0001 & 1.7515 \end{pmatrix}$$

9.5. Modelos variográficos para los factores de MAF

9.5.1. Distancia $h = 20m$

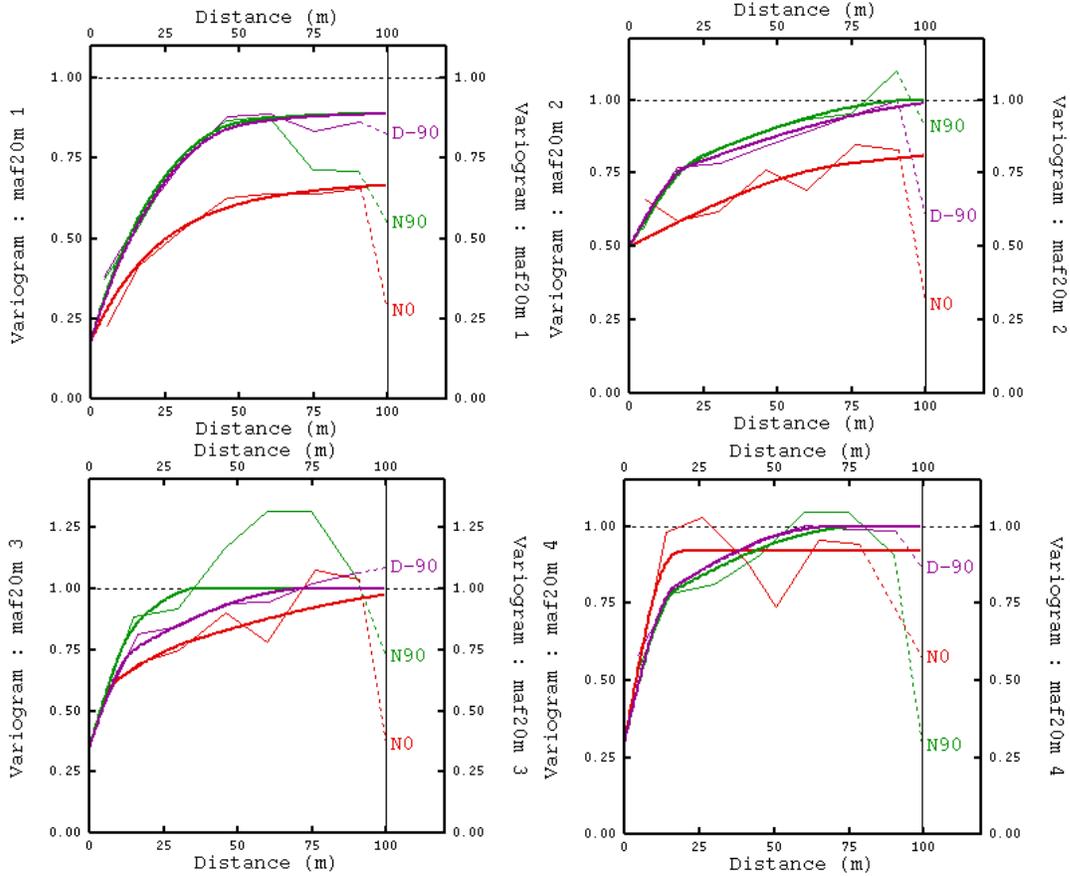


Figura 35: Variogramas de los MAF, $h=20m$

$$\gamma_{maf1}(h) = 0.18 \text{pepa} + 0.46 \text{Exp} \begin{pmatrix} 55 \\ 67 \\ 61 \end{pmatrix} + 0.25 \text{Sph} \begin{pmatrix} 50 \\ 1200 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf2}(h) = 0.5 \text{pepa} + 0.20 \text{Sph} \begin{pmatrix} 24 \\ 75 \\ 20 \end{pmatrix} + 0.3 \text{Sph} \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 120 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf3}(h) = 0.35 \text{pepa} + 0.2 \text{Sph} \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} + 0.1 \text{Sph} \begin{pmatrix} 20 \\ 34 \\ 19 \end{pmatrix} + 0.35 \text{Sph} \begin{pmatrix} 37 \\ 130 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf4}(h) = 0.3 \text{pepa} + 0.4 \text{Sph} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 16 \end{pmatrix} + 0.22 \text{Sph} \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 70 \end{pmatrix} + 0.08 \text{Sph} \begin{pmatrix} 80 \\ \infty \\ 70 \end{pmatrix}$$

9.5.2. Distancia $h = 30m$

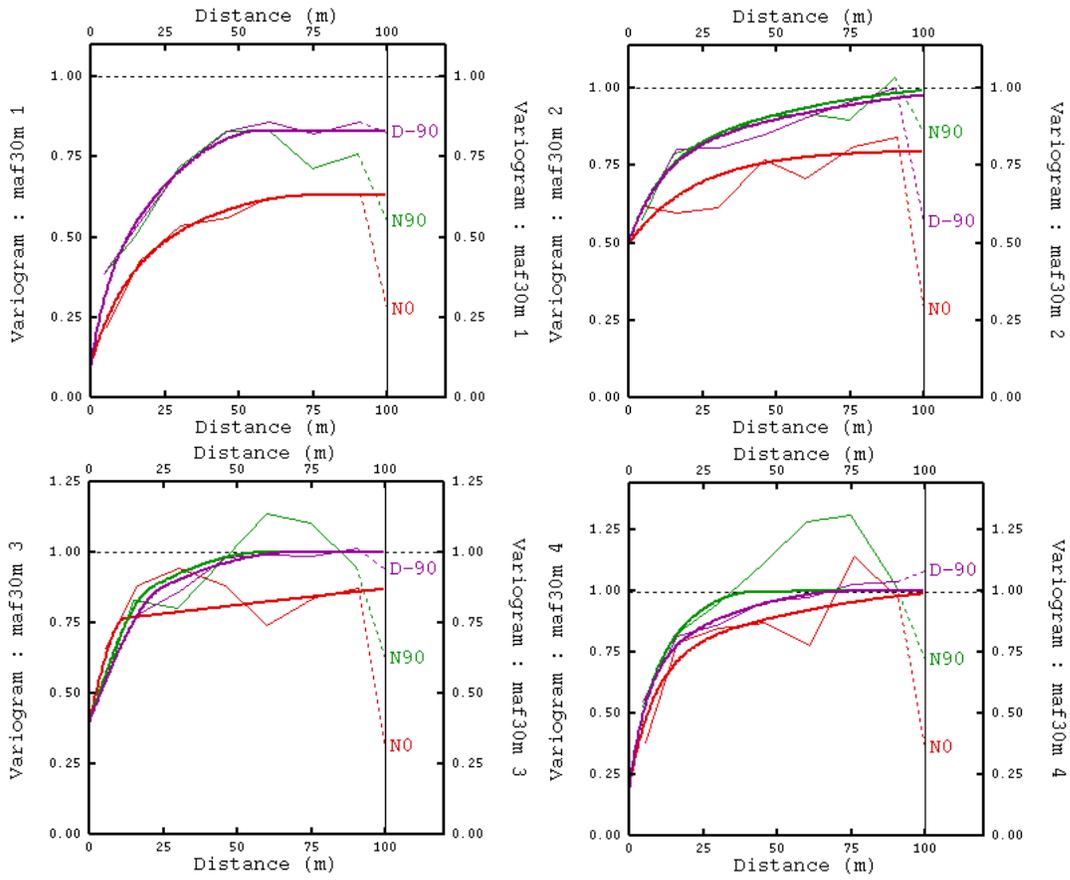


Figura 36: Variogramas de los MAF, $h=30m$

$$\gamma_{maf1}(h) = 0.1 \text{pepa} + 0.32 \text{Exp} \begin{pmatrix} 20 \\ 34 \\ 20 \end{pmatrix} + 0.21 \text{Sph} \begin{pmatrix} 58 \\ 75 \\ 58 \end{pmatrix} + 0.2 \text{Sph} \begin{pmatrix} 58 \\ \infty \\ 58 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf2}(h) = 0.5 \text{pepa} + 0.3 \text{Exp} \begin{pmatrix} 35 \\ 70 \\ 35 \end{pmatrix} + 0.2 \text{Sph} \begin{pmatrix} 120 \\ \infty \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf3}(h) = 0.4 \text{pepa} + 0.35 \text{Sph} \begin{pmatrix} 21 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix} + 0.25 \text{Sph} \begin{pmatrix} 60 \\ 300 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf4}(h) = 0.2 \text{pepa} + 0.55 \text{Sph} \begin{pmatrix} 22 \\ 26 \\ 20 \end{pmatrix} + 0.25 \text{Sph} \begin{pmatrix} 42 \\ 120 \\ 75 \end{pmatrix}$$

9.6. Boxplot

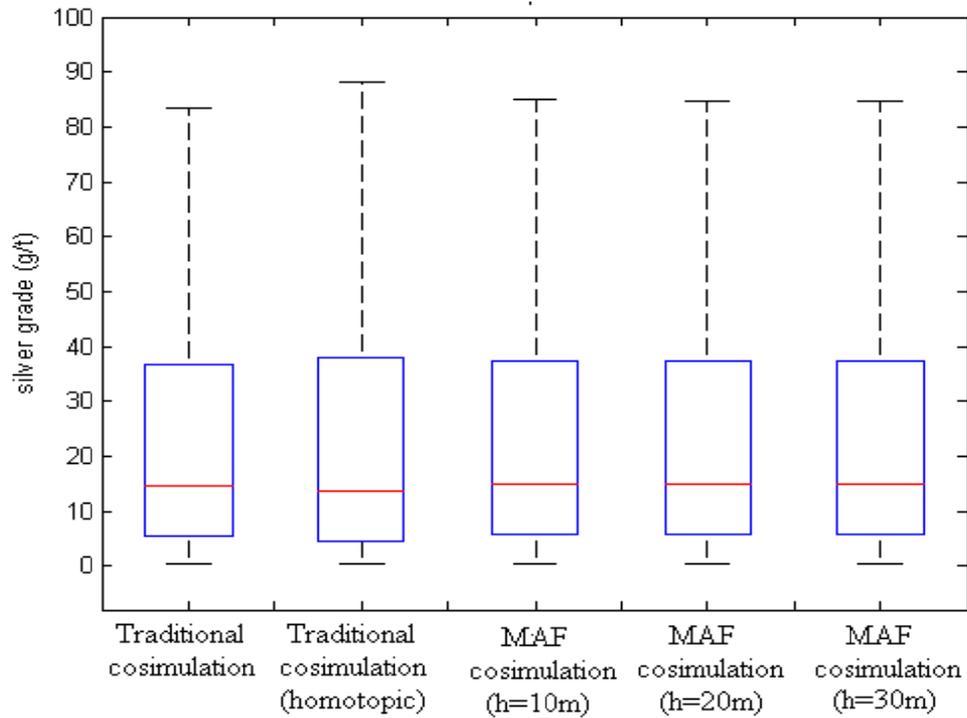


Figura 37: Boxplot de los promedios de los histogramas, Ag

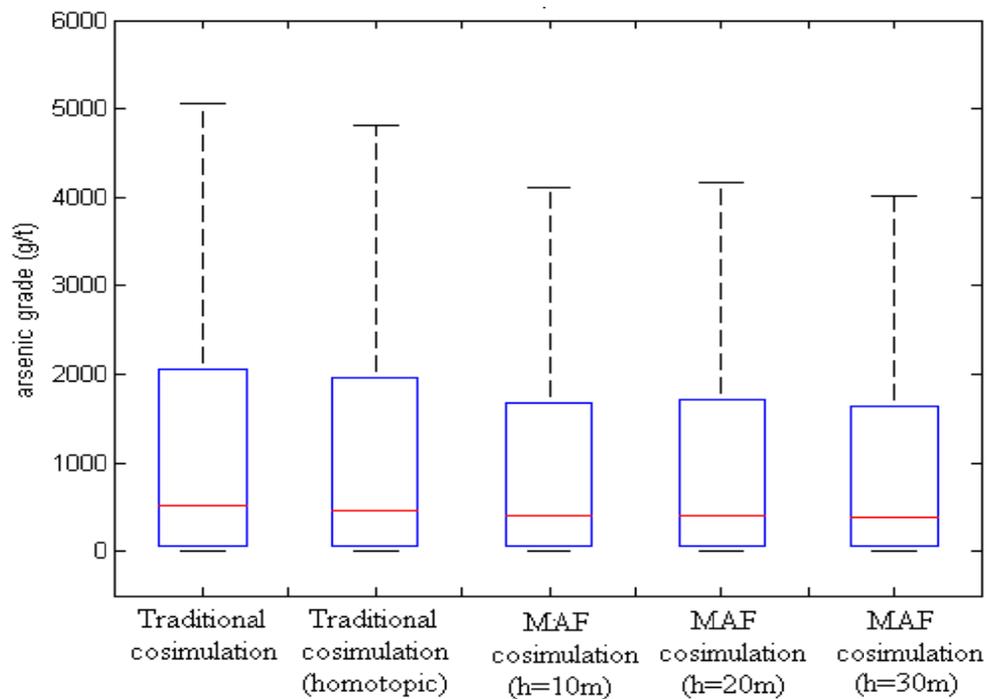


Figura 38: Boxplot de los promedios de los histogramas, As

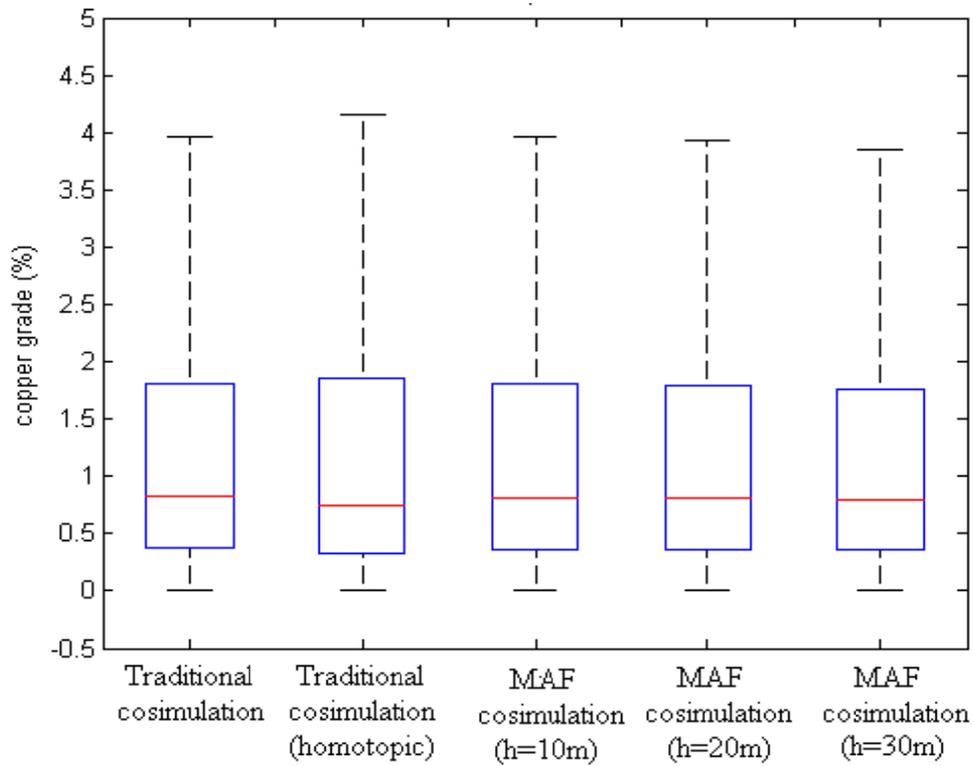


Figura 39: Boxplot de los promedios de los histogramas, Cu

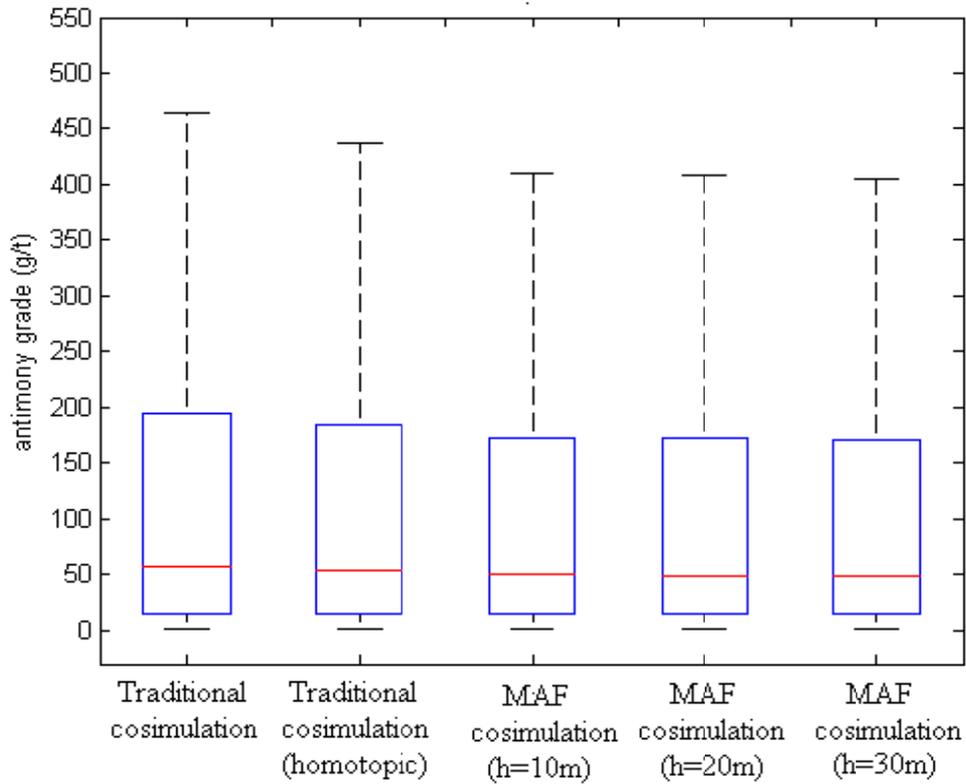


Figura 40: Boxplot de los promedios de los histogramas, Sb

9.7. Estadísticas básicas

Promedio de leyes de las 100 simulaciones obtenidas de la forma tradicional heterotópica

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [g/t]	979300	0.39	855.01	34.45	58.58
As [g/t]	979300	3.74	12610	2041.3	4530.5
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.6	2.42
Sb [g/t]	979300	0.92	8240.1	232.02	594.27

Tabla 31: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional heterotópica.

Promedio de leyes de las 100 simulaciones obtenidas de la forma tradicional homotópica

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [g/t]	979300	0.39	840.01	35.6927	65.5096
As [g/t]	979300	4.74	12610	1974.1	4640.1
Cu [%]	979300	0.01	26.03	1.6315	2.596
Sb [g/t]	979300	0.92	8240.1	219.8328	568.6916

Tabla 32: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional homotópica.

Promedio de leyes de las 100 simulaciones obtenidas vía MAF 10m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [g/t]	979300	0.39	855.01	34.8866	58.897
As [g/t]	979300	3.74	12610	1740.5	4005
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.6151	2.5007
Sb [g/t]	979300	0.92	8240.1	204.156	526.6398

Tabla 33: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=10m.

Promedio de leyes de las 100 simulaciones obtenidas vía MAF 20m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [g/t]	979300	0.39	855.01	34.7888	58.365
As [g/t]	979300	3.74	12610	1794.3	4223.3
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.6015	2.4715
Sb [g/t]	979300	0.92	8240.1	204.6569	533.9846

Tabla 34: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=20m.

Promedio de leyes de las 100 simulaciones obtenidas vía MAF 30m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Ag [g/t]	979300	0.39	855.01	34.8351	58.9581
As [g/t]	979300	3.74	12610	1743.6	4108.3
Cu [%]	979300	0.01	29.9	1.5788	2.4316
Sb [g/t]	979300	0.92	8240.1	201.509	522.5141

Tabla 35: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=30m.

9.8. Los histogramas promedio de las leyes simuladas

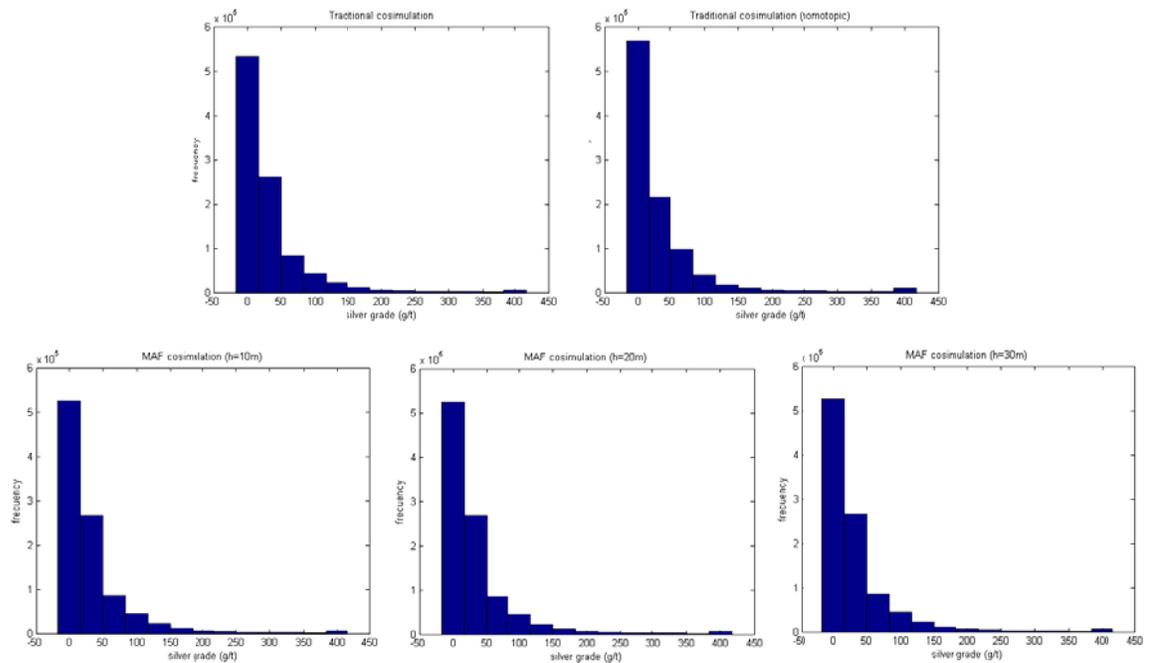


Figura 41: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Ag

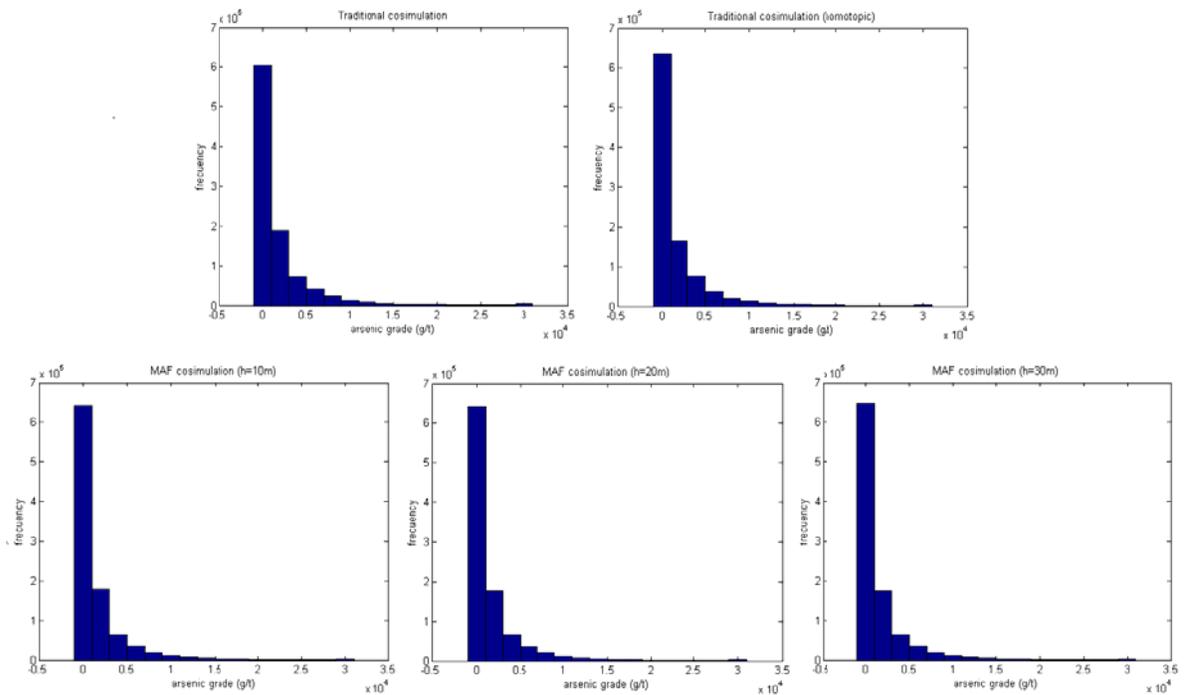


Figura 42: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, As

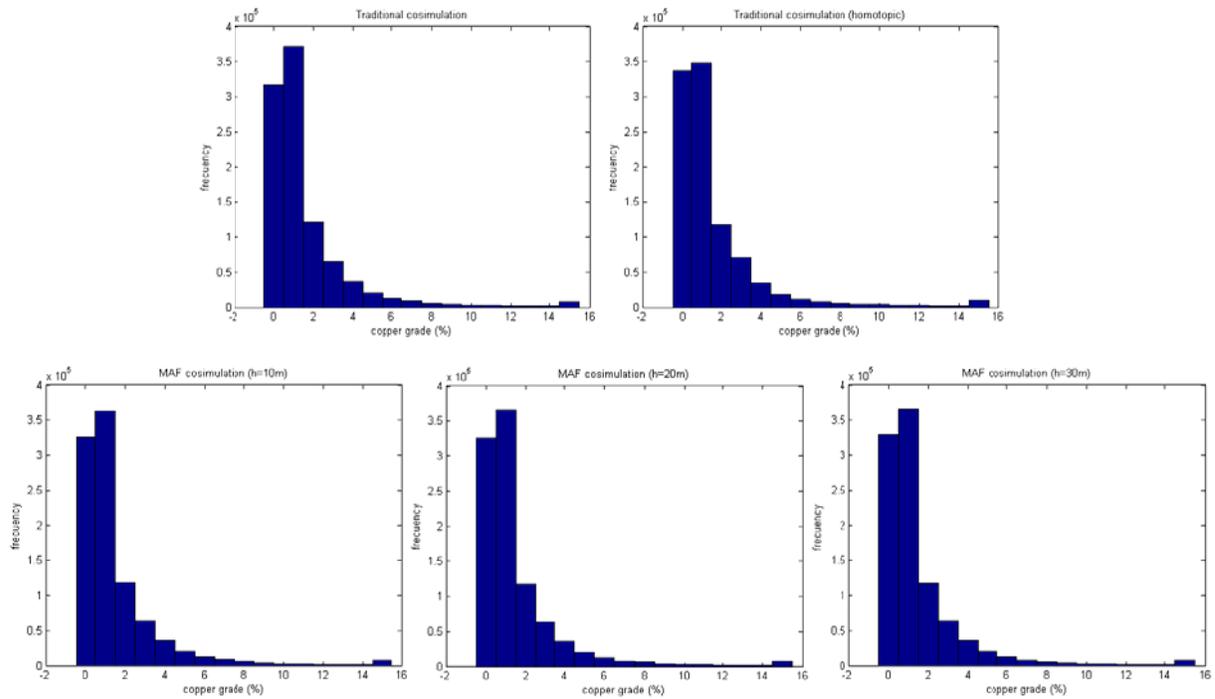


Figura 43: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Cu

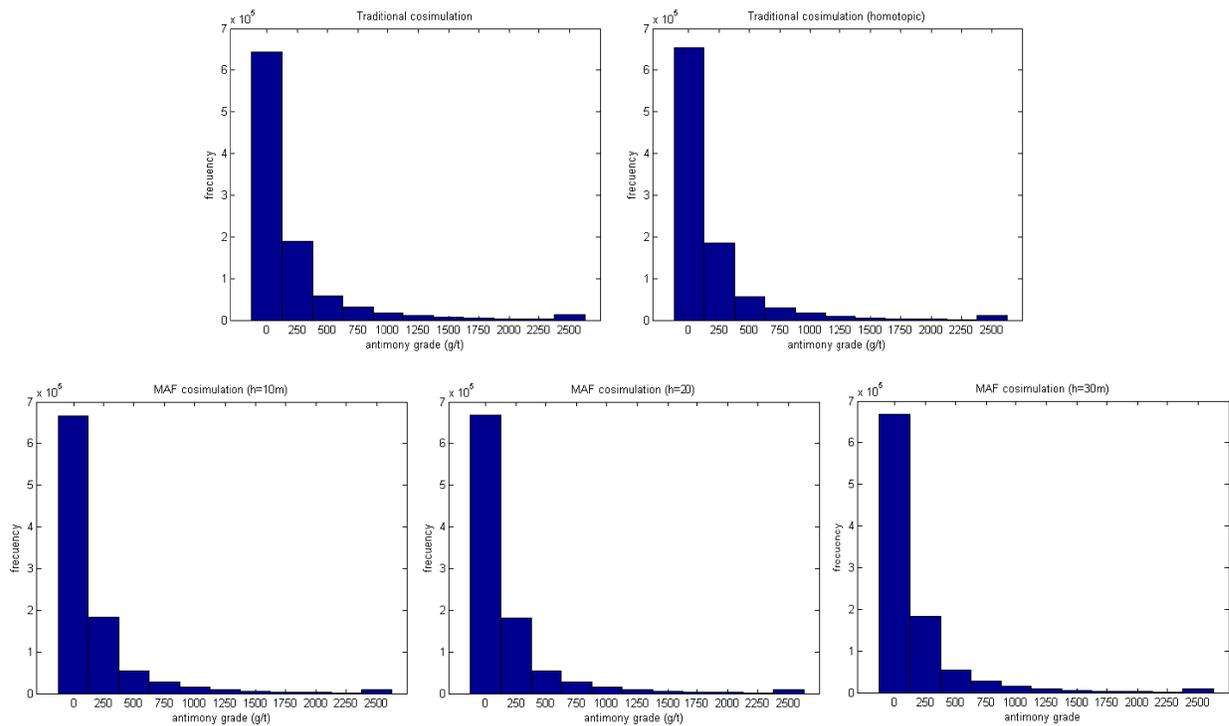


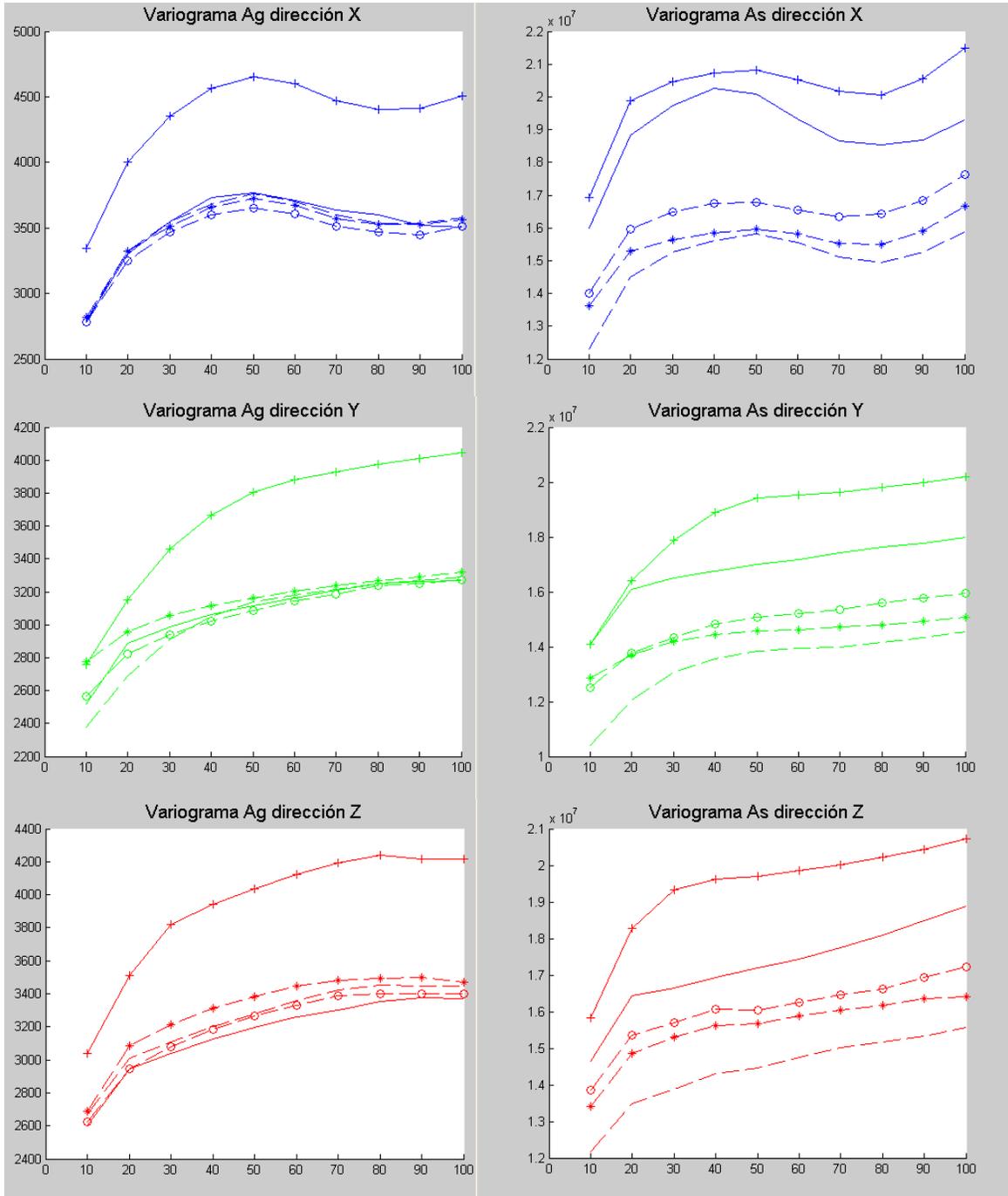
Figura 44: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Sb

9.9. Promedio de variogramas

Promedio de los variogramas sobre 100 realizaciones de las leyes en 3 direcciones: Este (x) ; Norte (y) ; elevación (z)

Ag(izquierda) ,

As(derecha)



Tradicional Homotópica MAF 10m MAF 20m MAF 30m
 ————— + + + - - - ○ ○ - ★ ★

Figura 45: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Ag y As

Promedio de los variogramas de leyes en 3 direcciones: Este (x) ; Norte (y) ; Cota (z)
 Cu(izquierda) , Sb(derecha)

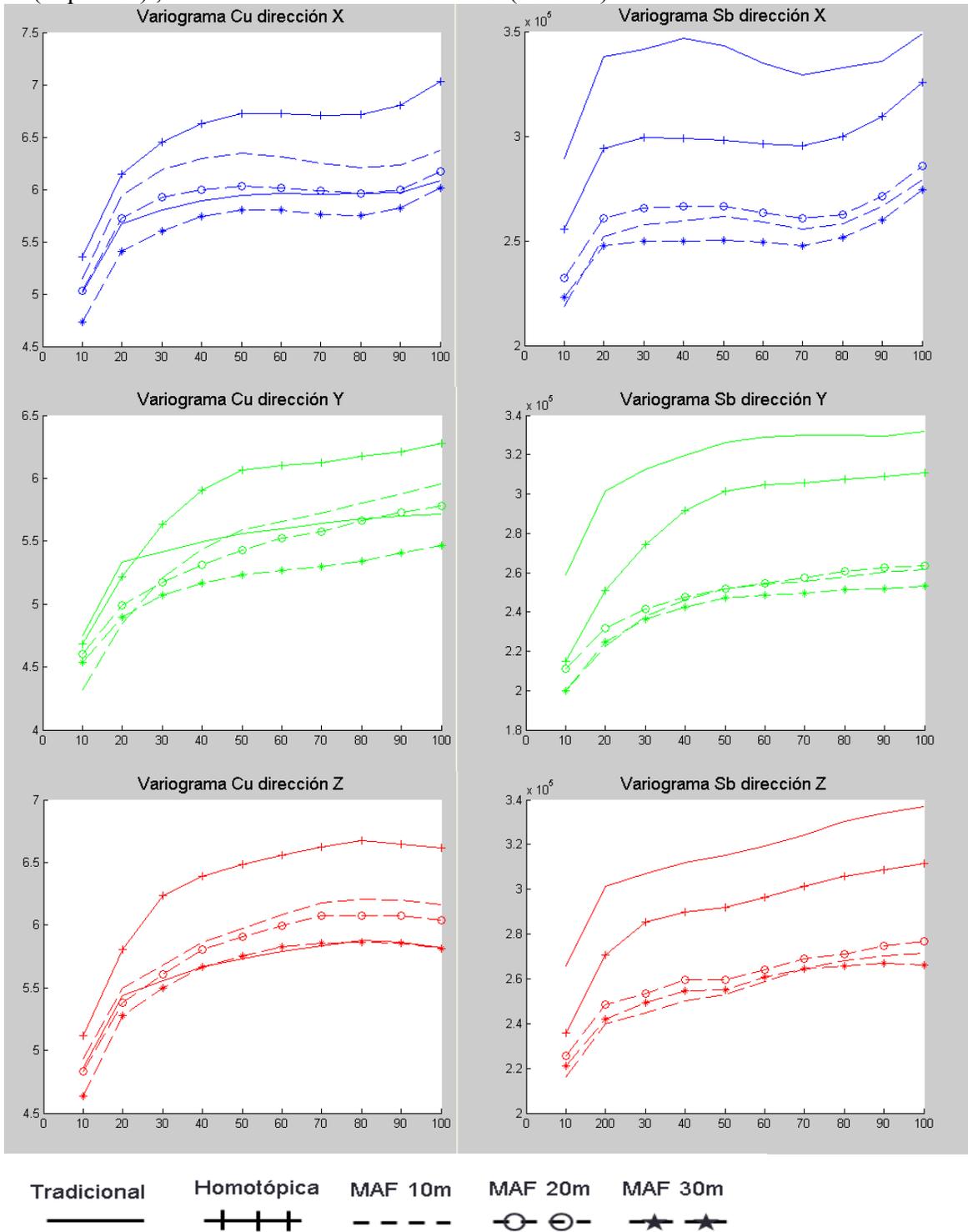


Figura 46: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Cu y Sb

9.10. Matrices de correlación

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas tradicionalmente.

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.50	0.73	0.42
As	0.50	1	0.53	0.71
Cu	0.73	0.53	1	0.45
Sb	0.42	0.71	0.45	1

Tabla 36: Matriz de correlación, tradicional heterotópica.

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas tradicionalmente de datos homotópicos.

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.51	0.76	0.38
As	0.51	1	0.54	0.70
Cu	0.76	0.54	1	0.41
Sb	0.38	0.70	0.41	1

Tabla 37 Matriz de correlación, tradicional homotópica.

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con $h = 10m$

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.51	0.76	0.36
As	0.51	1	0.56	0.70
Cu	0.76	0.56	1	0.40
Sb	0.36	0.70	0.40	1

Tabla 38: Matriz de correlación, MAF $h=10m$

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con $h = 20m$

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.51	0.77	0.37
As	0.51	1	0.56	0.70
Cu	0.77	0.56	1	0.41
Sb	0.37	0.70	0.41	1

Tabla 39: Matriz de correlación, MAF $h=20m$

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con $h = 30m$

	Ag	As	Cu	Sb
Ag	1	0.51	0.76	0.38
As	0.51	1	0.58	0.70
Cu	0.76	0.58	1	0.43
Sb	0.38	0.70	0.43	1

Tabla 40: Matriz de correlación, MAF $h=30m$

9.11. Desviación condicional

Para algunos bloques cercanos a los siguientes puntos:

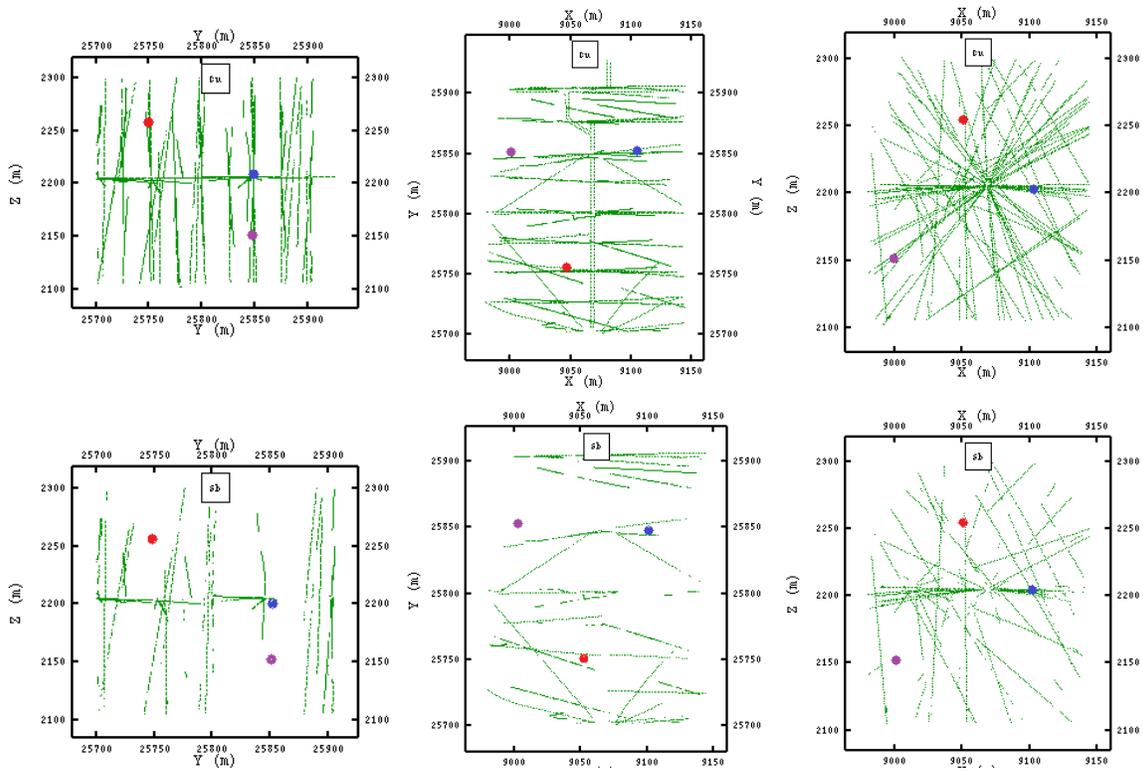


Figura 47: Ubicación de algunos bloques seleccionados en sectores con datos heterotópicos.

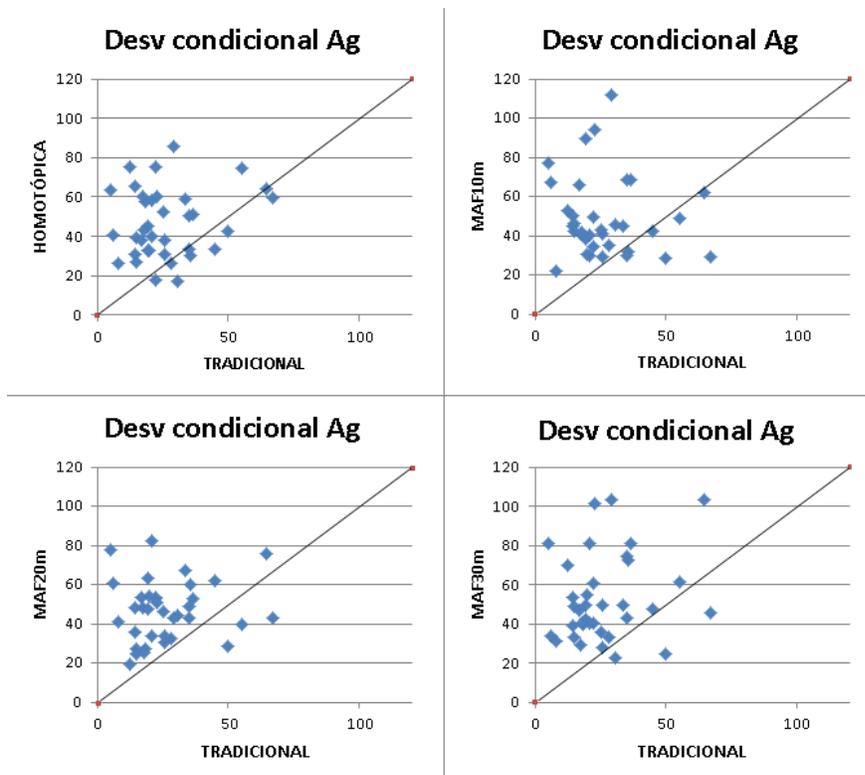


Figura 48: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Ag

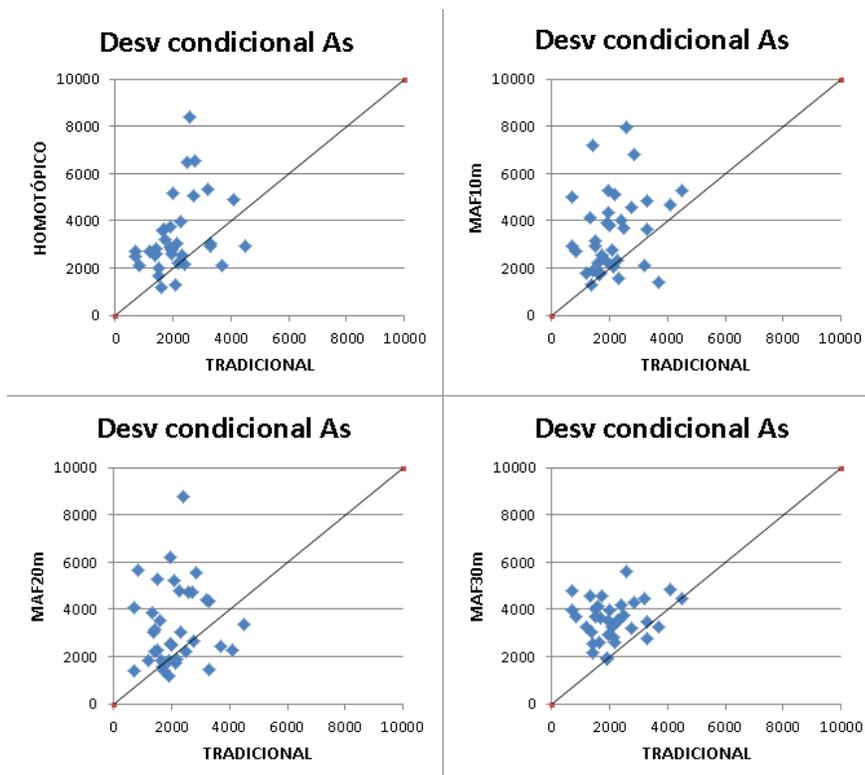


Figura 49: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, As

En caso del antimonio Sb hay menos valores, ya que varios bloques no se simularon, porque las vecindades de búsqueda no alcanzaron datos.

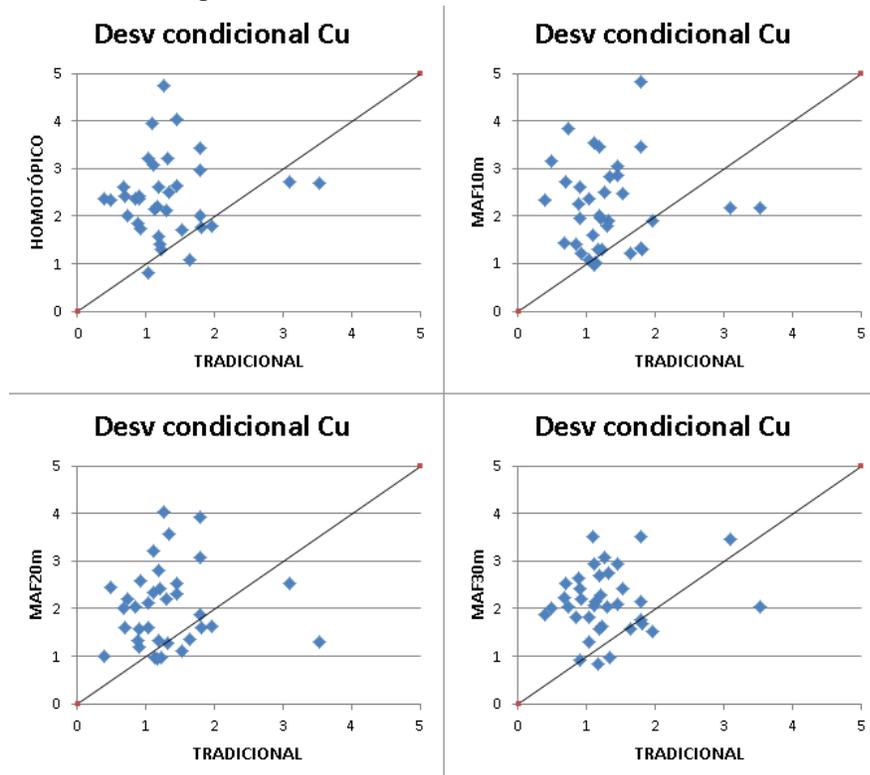


Figura 50 Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Cu

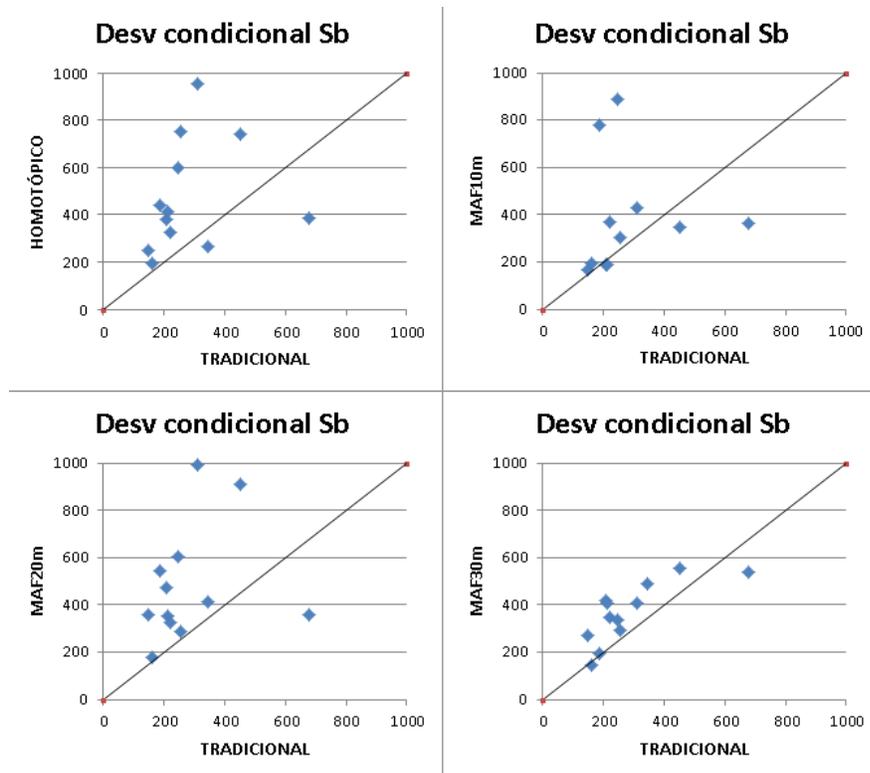


Figura 51: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Sb

De todas formas las nubes de dispersión de las desviaciones condicionales de todos los bloques se muestran a continuación.

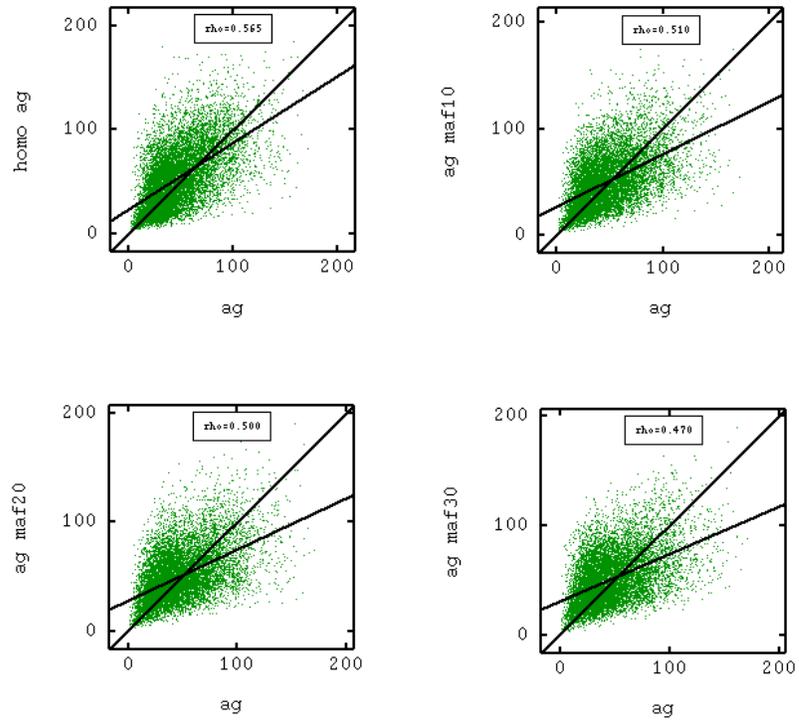


Figura 52: Desviación estándar condicional, Ag

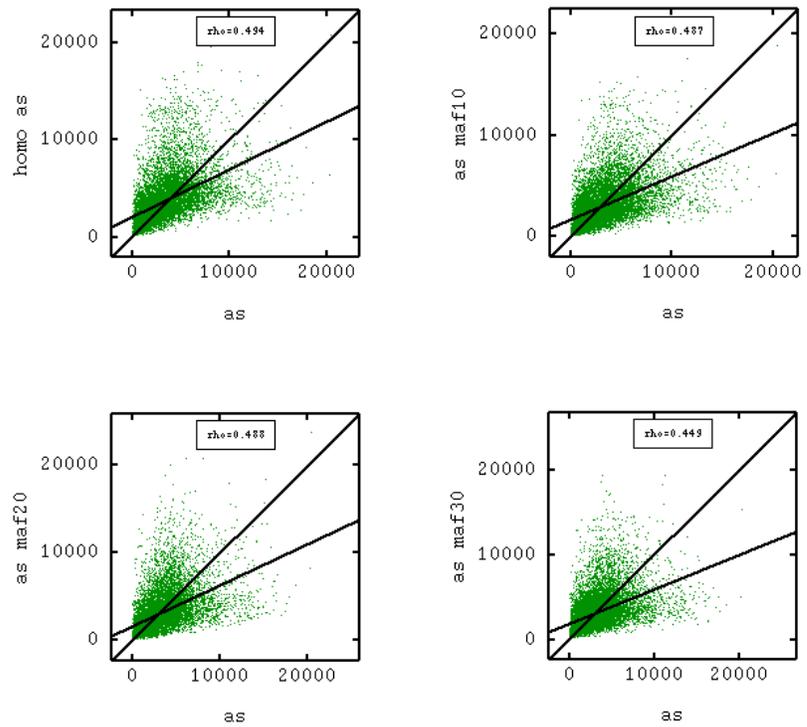


Figura 53: Desviación estándar condicional, As

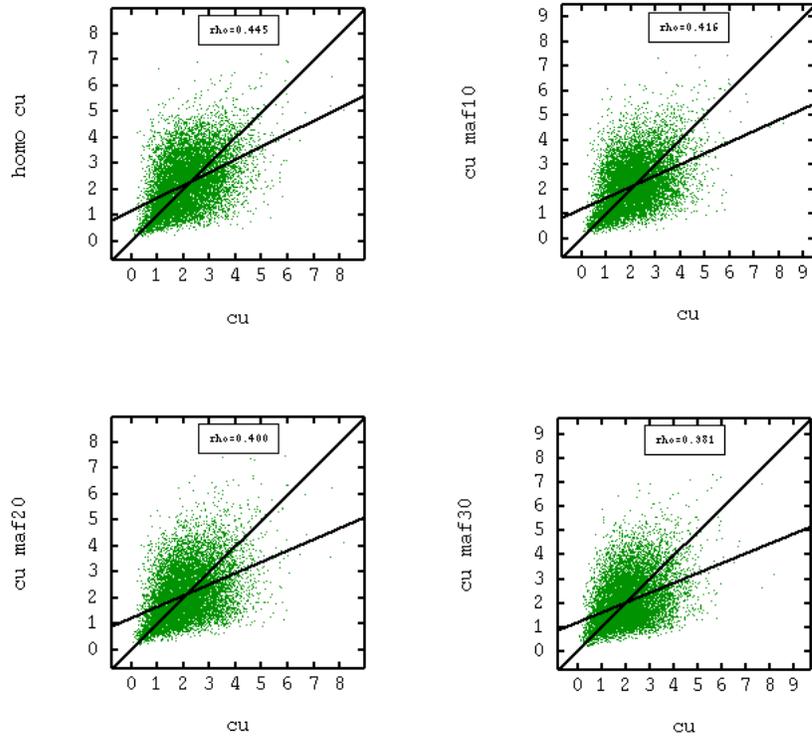


Figura 54: Desviación estándar condicional, Cu

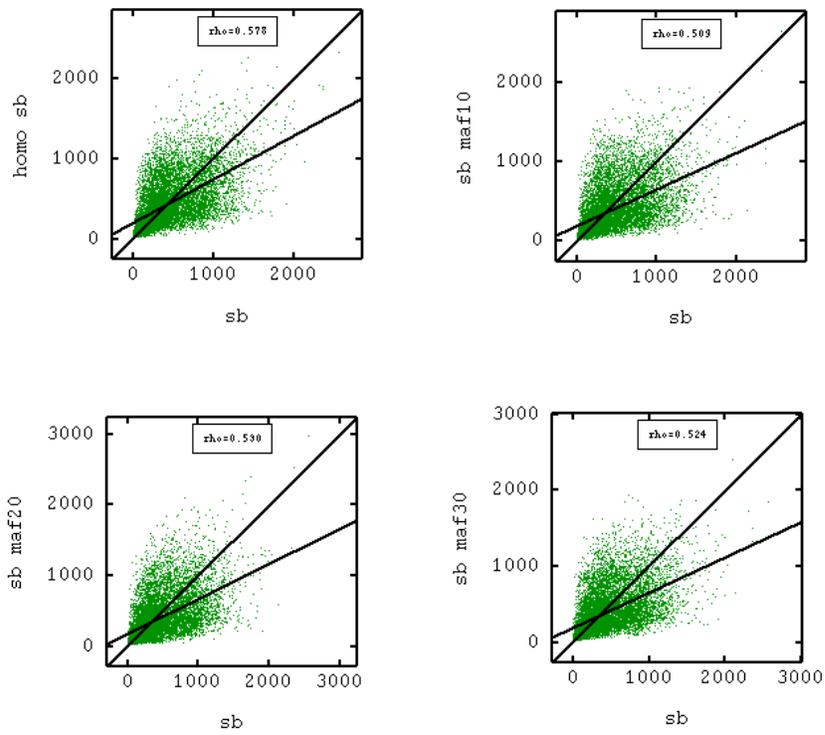


Figura 55: Desviación estándar condicional, Sb

10. ANEXO B: YACIMIENTO DE FIERRO

10.1. Datos heterotópicos

Para la base heterotópica se puede apreciar que existen ubicaciones del espacio donde no se tienen valores de algunas variables.

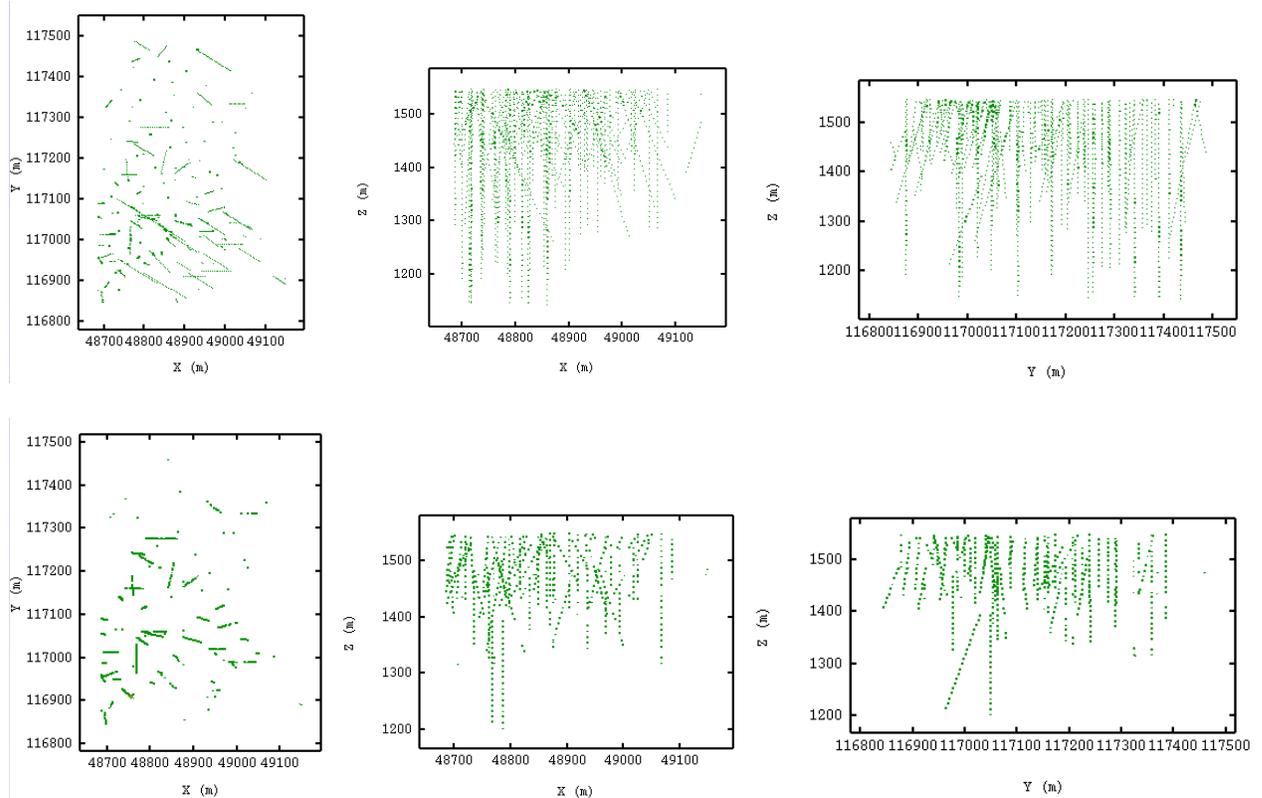


Figura 56: Representación de sondajes homotópicos

10.2. Histogramas

Los histogramas de las variables para el caso homotópico son los siguientes.

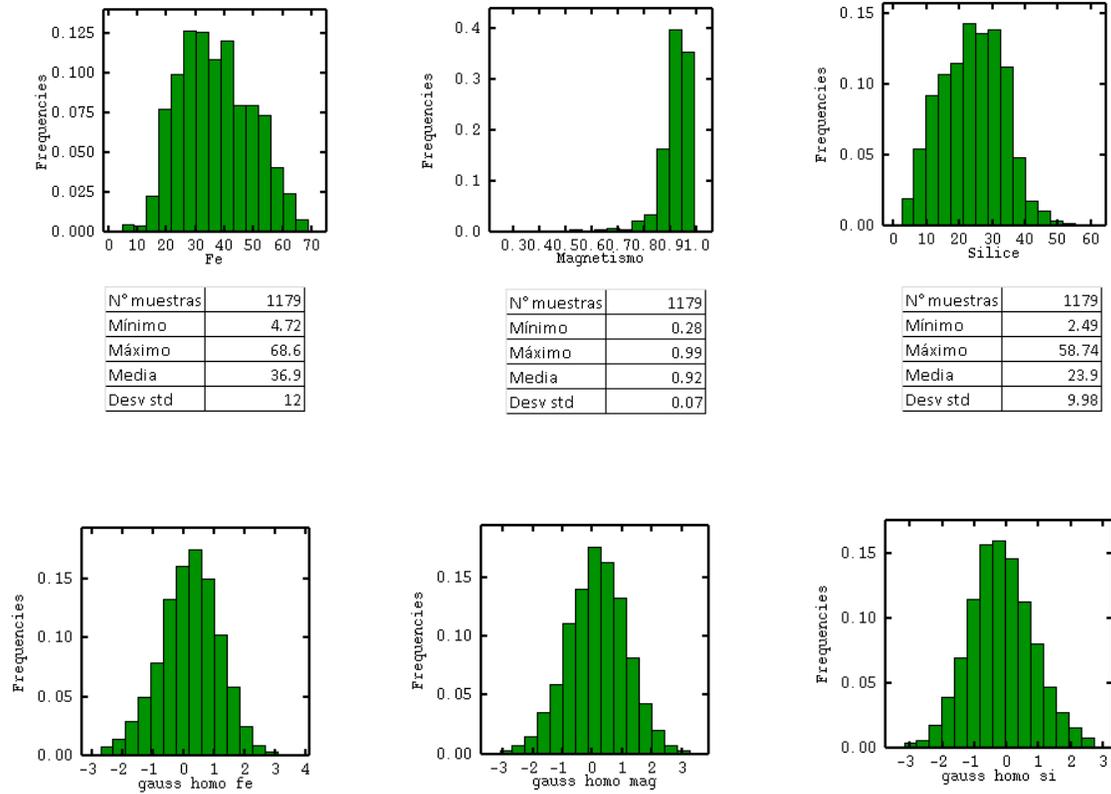


Figura 57: Histogramas de las variables originales y gaussianas

10.3. Modelo de correionalización

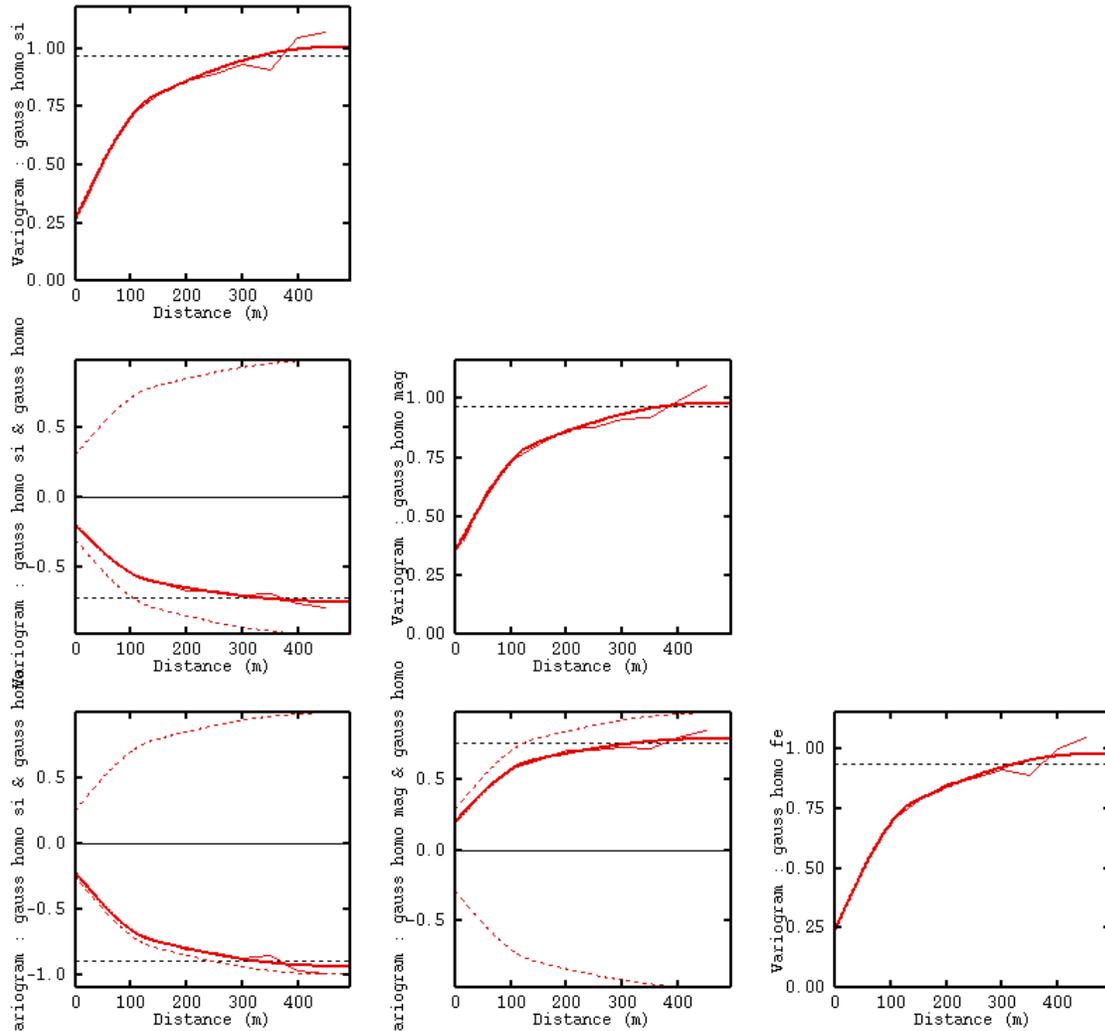


Figura 58: Variogramas experimentales y modelados para las variables gaussianas homotópicas,

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) = & \begin{pmatrix} 0.2398 & 0.1993 & -0.2185 \\ 0.1993 & 0.3509 & -0.1994 \\ -0.2185 & -0.1994 & 0.2613 \end{pmatrix} pepa \\
 & + \begin{pmatrix} 0.3712 & 0.3135 & -0.3599 \\ 0.3135 & 0.3110 & -0.2931 \\ -0.3599 & -0.2931 & 0.3580 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 140 \\ 140 \\ 140 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 0.3673 & 0.2731 & -0.3531 \\ 0.2731 & 0.3174 & -0.2590 \\ -0.3531 & -0.2590 & 0.3844 \end{pmatrix} Sph \begin{pmatrix} 450 \\ 450 \\ 450 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

10.4. Matrices de correlación a diferentes distancias

$$\text{VarCov } h=0 \begin{pmatrix} 1.00000 & 0.79481 & -0.95309 \\ 0.79481 & 1.00000 & -0.75332 \\ -0.95309 & -0.75332 & 1.00000 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=10\text{m} \begin{pmatrix} 0.65185 & 0.46237 & -0.59085 \\ 0.46237 & 0.67238 & -0.44448 \\ -0.59085 & -0.44448 & 0.64504 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=25\text{m} \begin{pmatrix} 0.96117 & 0.75249 & -0.88165 \\ 0.75249 & 1.02561 & -0.70899 \\ -0.88165 & -0.70899 & 0.92538 \end{pmatrix}$$

$$\text{VarCov } h=50\text{m} \begin{pmatrix} 1.27055 & 0.94940 & -1.19257 \\ 0.94940 & 1.21493 & -0.89272 \\ -1.19257 & -0.89272 & 1.24806 \end{pmatrix}$$

Un cálculo a priori de las correlaciones de los nuevos componentes MAF, para las tres distancias a estudiar da:

$$B_{10\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{10\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0001 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

$$B_{10\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=10) \times B_{10\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.6204 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0001 & 0.8684 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 1.4982 \end{pmatrix}$$

$$B_{25\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{25\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & -0.0001 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

$$B_{25\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=25) \times B_{25\text{m}} = \begin{pmatrix} 0.9237 & 0.0000 & -0.0001 \\ 0.0000 & 1.1094 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & 1.4068 \end{pmatrix}$$

$$B_{50\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=0) \times B_{50\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0001 & 1.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 1.0001 \end{pmatrix}$$

$$B_{50\text{m}}^T \times \text{VarCov } (h=50) \times B_{50\text{m}} = \begin{pmatrix} 1.2064 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0001 & 1.3561 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.4982 \end{pmatrix}$$

10.5. Modelos variográficos para los factores de MAF

10.5.1. Distancia $h = 10m$

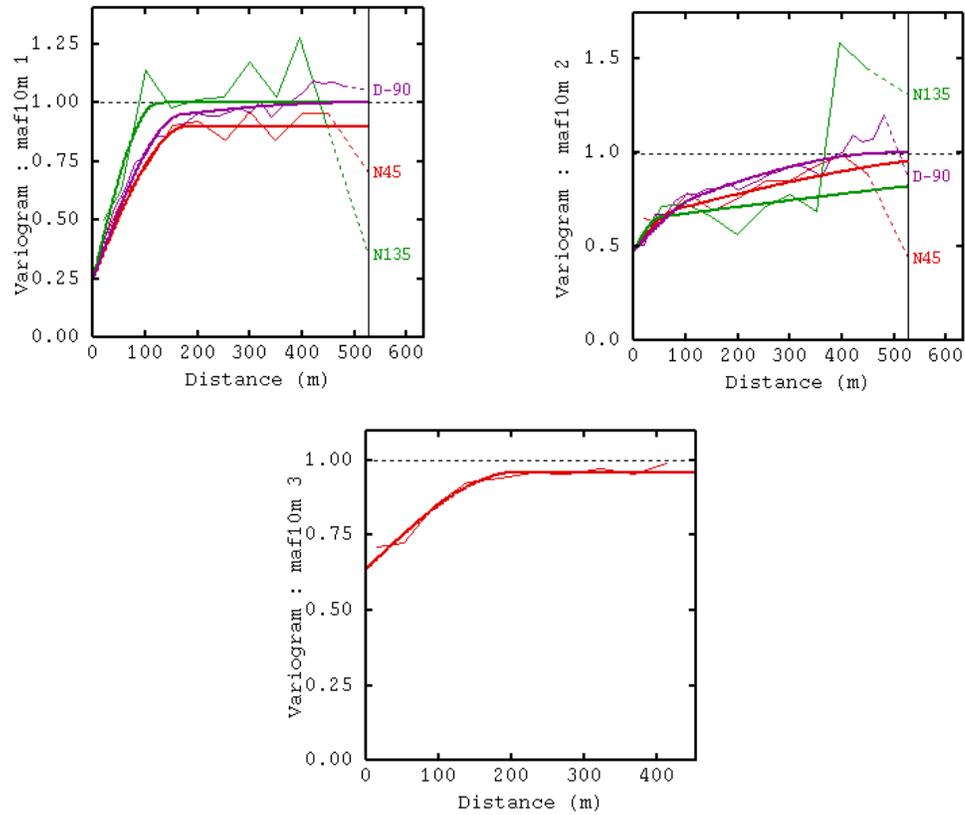


Figura 59: Variogramas de los MAF, $h=10m$

$$\gamma_{maf1}(h) = 0.25 \textit{pepa} + 0.65 \textit{Sph} \left(\begin{matrix} 180 \\ 120 \\ 170 \end{matrix} \right) + 0.1 \textit{Sph} \left(\begin{matrix} \infty \\ 150 \\ 500 \end{matrix} \right)$$

$$\gamma_{maf2}(h) = 0.48 \textit{pepa} + 0.16 \textit{Exp} \left(\begin{matrix} 80 \\ 50 \\ 125 \end{matrix} \right) + 0.36 \textit{Sph} \left(\begin{matrix} 750 \\ 1500 \\ 500 \end{matrix} \right)$$

$$\gamma_{maf3}(h) = 0.64 \textit{pepa} + 0.32 \textit{Exp} \left(\begin{matrix} 210 \\ 210 \\ 210 \end{matrix} \right)$$

10.5.2. Distancia $h = 25m$

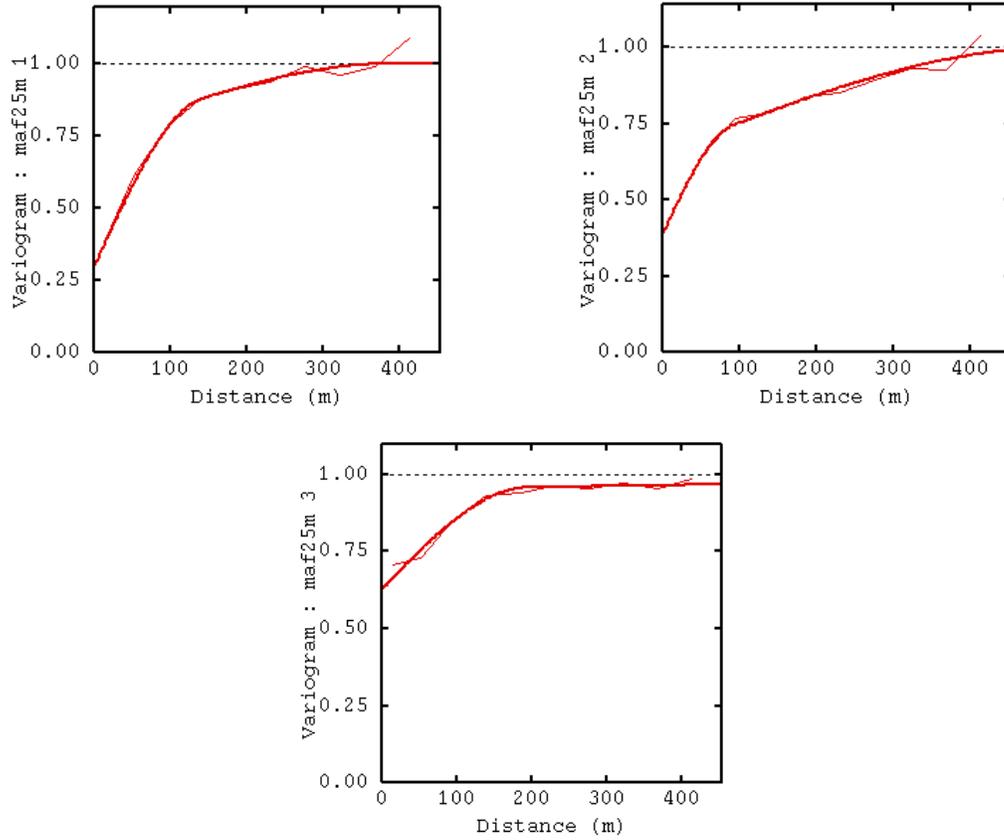


Figura 60: Variogramas de los MAF, $h=25m$

$$\gamma_{maf1}(h) = 0.3 \text{pepa} + 0.45 \text{Exp} \begin{pmatrix} 140 \\ 140 \\ 140 \end{pmatrix} + 0.25 \text{Sph} \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf2}(h) = 0.39 \text{pepa} + 0.265 \text{Exp} \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix} + 0.345 \text{Sph} \begin{pmatrix} 525 \\ 525 \\ 525 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf3}(h) = 0.63 \text{pepa} + 0.32 \text{Exp} \begin{pmatrix} 195 \\ 195 \\ 195 \end{pmatrix} + 0.05 \text{Sph} \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

10.5.3. Distancia $h = 50m$

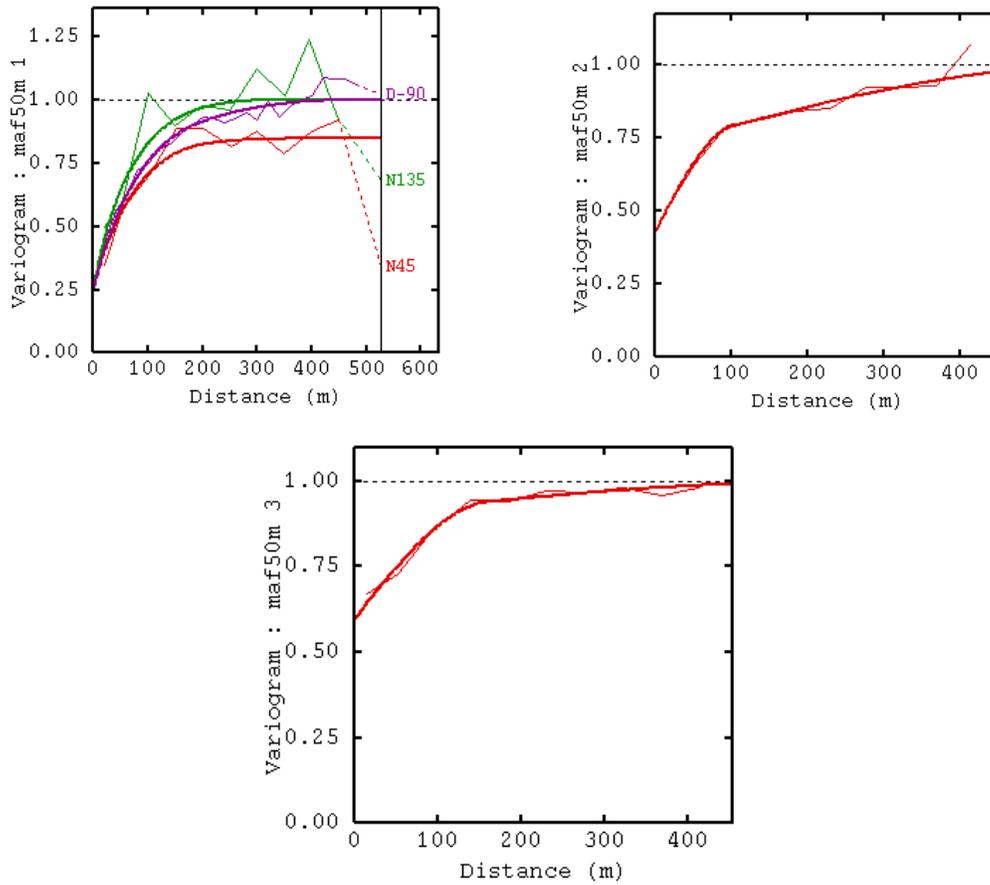


Figura 61: Variogramas de los MAF, $h=50m$

$$\gamma_{maf1}(h) = 0.25 \text{pepa} + 0.5 \text{Exp} \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 210 \end{pmatrix} + 0.1 \text{Sph} \begin{pmatrix} 200 \\ 180 \\ 170 \end{pmatrix} + 0.2 \text{Sph} \begin{pmatrix} \infty \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf2}(h) = 0.43 \text{pepa} + 0.29 \text{Exp} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + 0.28 \text{Sph} \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{maf3}(h) = 0.6 \text{pepa} + 0.3 \text{Exp} \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix} + 0.1 \text{Sph} \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

10.6. Bloxplot

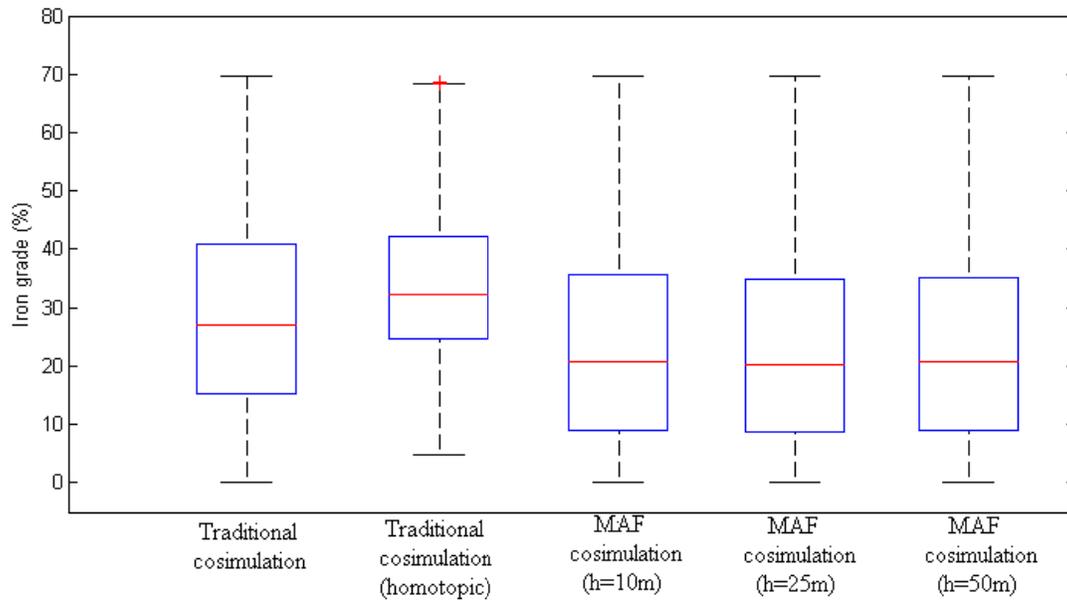


Figura 62: Boxplot de los promedios de los histogramas, Hierro

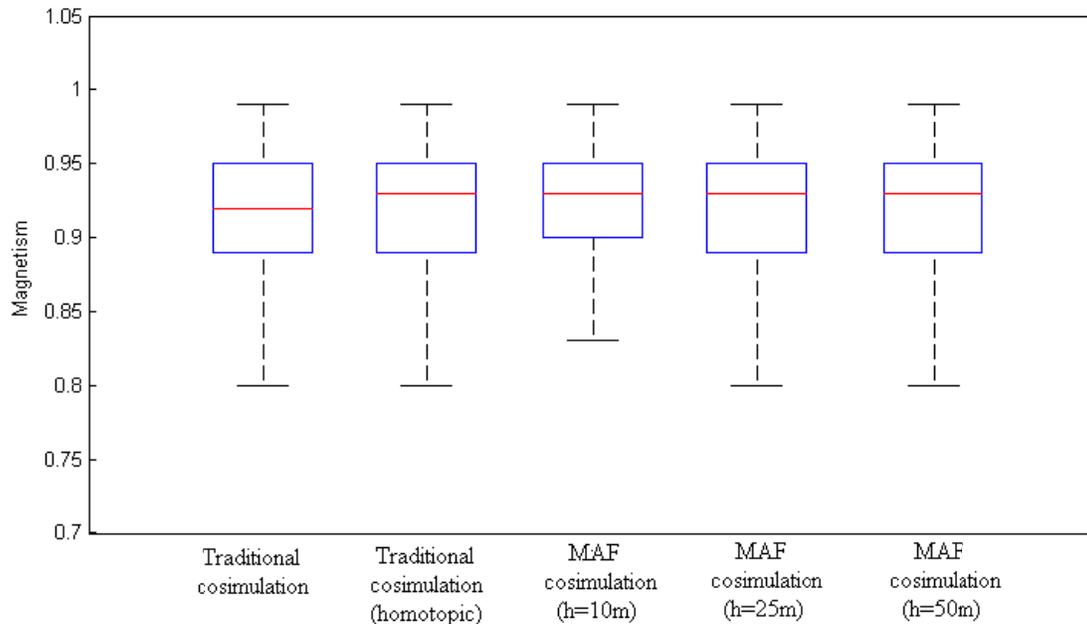


Figura 63: Boxplot de los promedios de los histogramas, Magnetismo

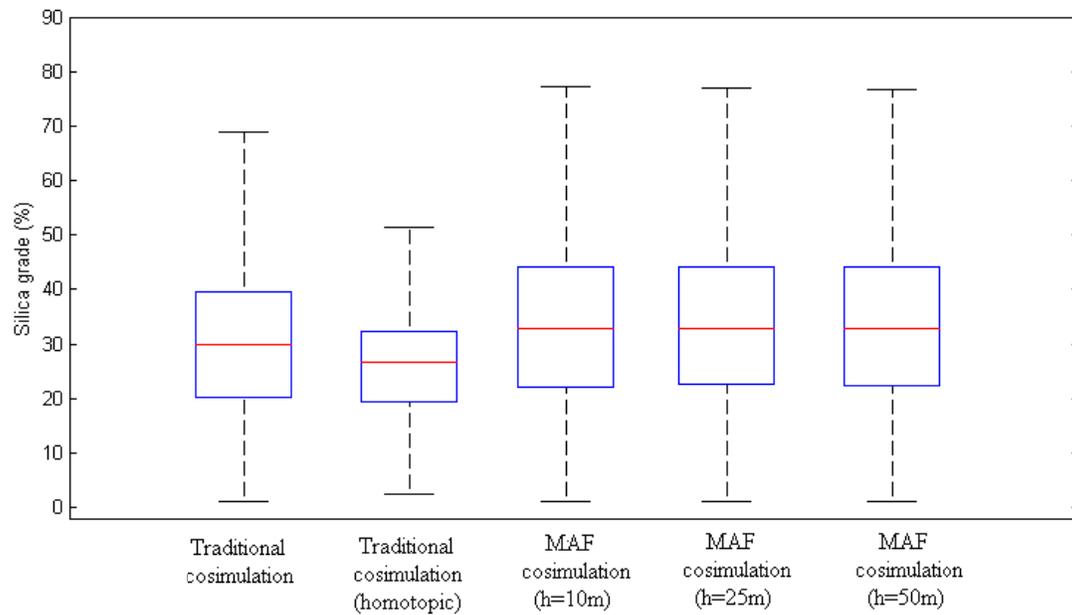


Figura 64: Boxplot de los promedios de los histogramas, Sílice

10.7. Estadísticas básicas

Promedio de 100 simulaciones obtenidas de la forma tradicional heterotópica

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est.
Fierro [%]	3145700	0.22	69.61	28.35	16.14
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.91	0.07
Sílice [%]	3145700	1.05	85.96	30.48	13.49

Tabla 41: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional heterotópica.

Promedio de 100 simulaciones obtenidas de la forma tradicional homotópica

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est
Fierro [%]	3145700	4.72	68.5	33.87	11.80
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.91	0.06
Sílice [%]	3145700	2.43	58.74	25.81	8.96

Tabla 42: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, tradicional homotópica.

Promedio de 100 simulaciones obtenidas vía MAF 10m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est
Fierro [%]	3145700	0.22	69.61	23.49	16.78
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.92	0.07
Sílice [%]	3145700	1.05	85.96	33.50	15.04

Tabla 43: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=10m.

Promedio de 100 simulaciones obtenidas vía MAF 25m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est
Fierro [%]	3145700	0.22	69.61	23.10	16.63
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.91	0.07
Sílice [%]	3145700	1.05	85.96	33.68	14.96

Tabla 44: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=25m.

Promedio de 100 simulaciones obtenidas vía MAF 50m

	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Desv. est
Fierro [%]	3145700	0.22	69.61	23.39	16.69
Magnetismo	3145700	0.28	0.99	0.91	0.07
Sílice [%]	3145700	0.28	0.99	0.91	0.06

Tabla 45: Estadísticas básicas para el modelo de bloques, MAF h=50m.

10.8. Los histogramas promedio de las leyes simuladas

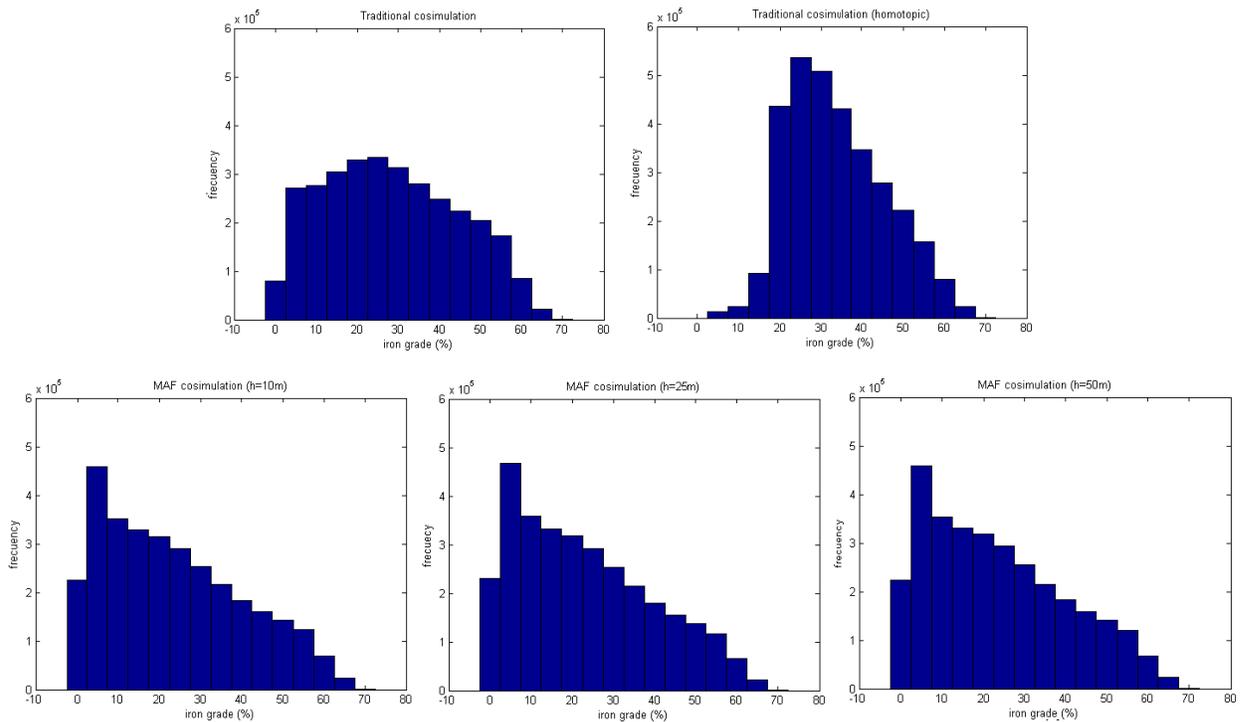


Figura 65: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Hierro

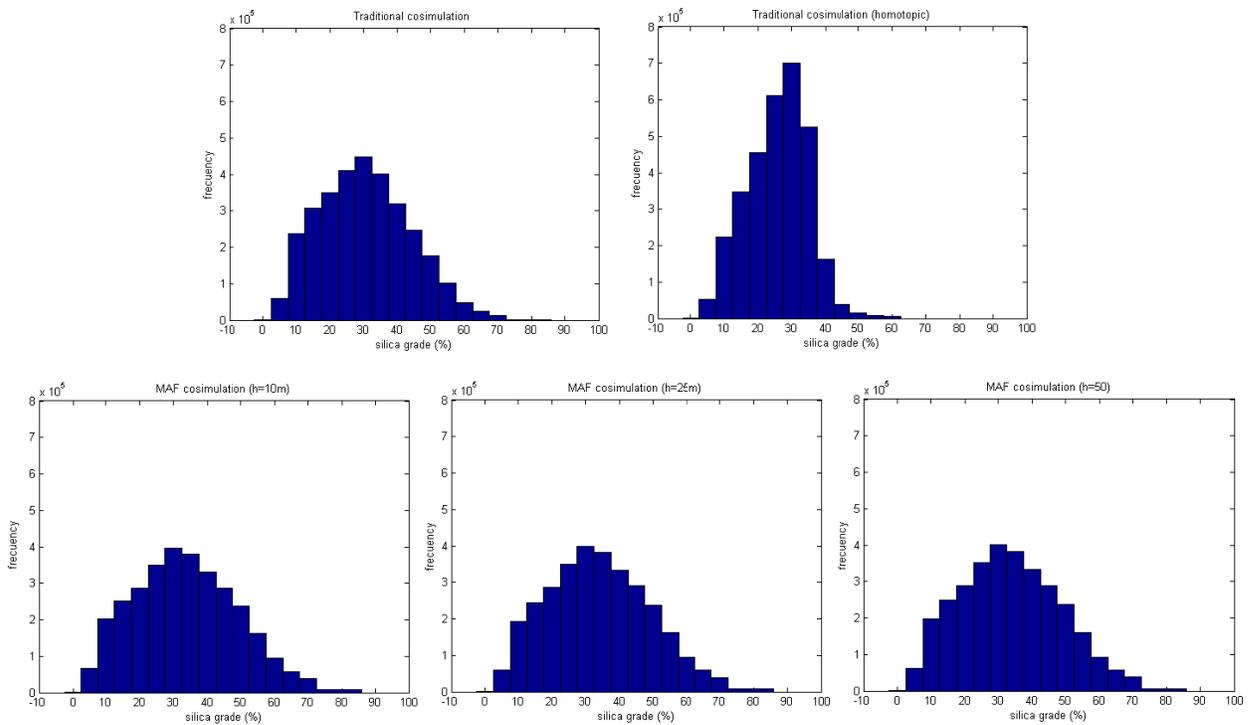


Figura 66: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Magnetismo.

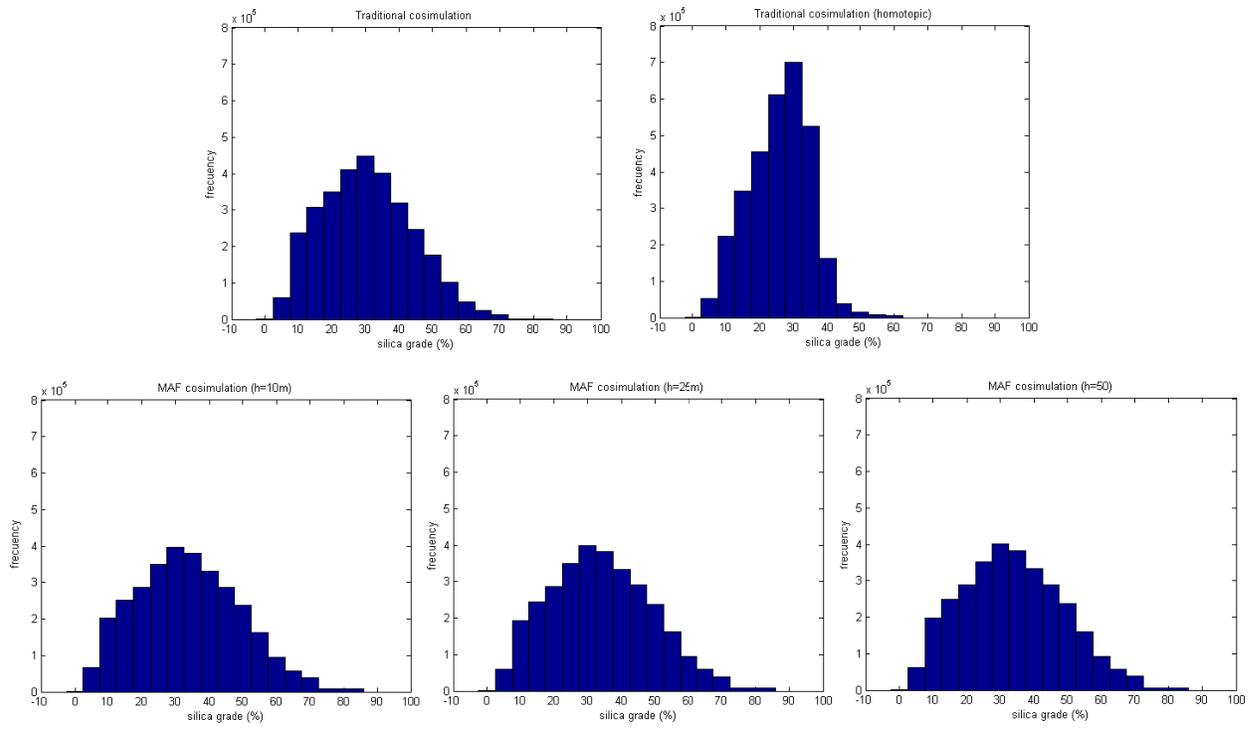


Figura 67: Comparación de histogramas del promedio de las simulaciones, Sílice

10.9. Promedio de variogramas.

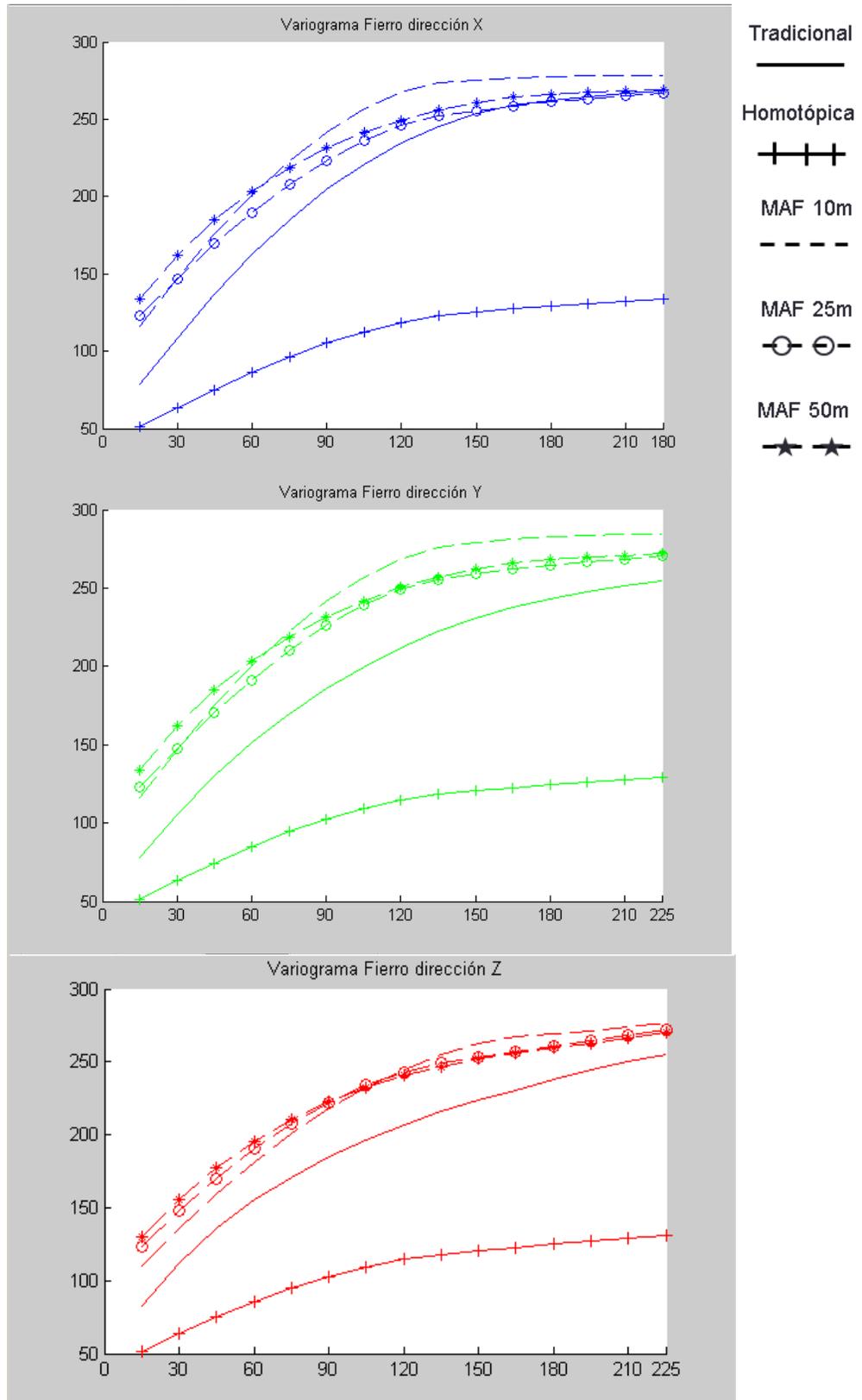


Figura 68: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Hierro

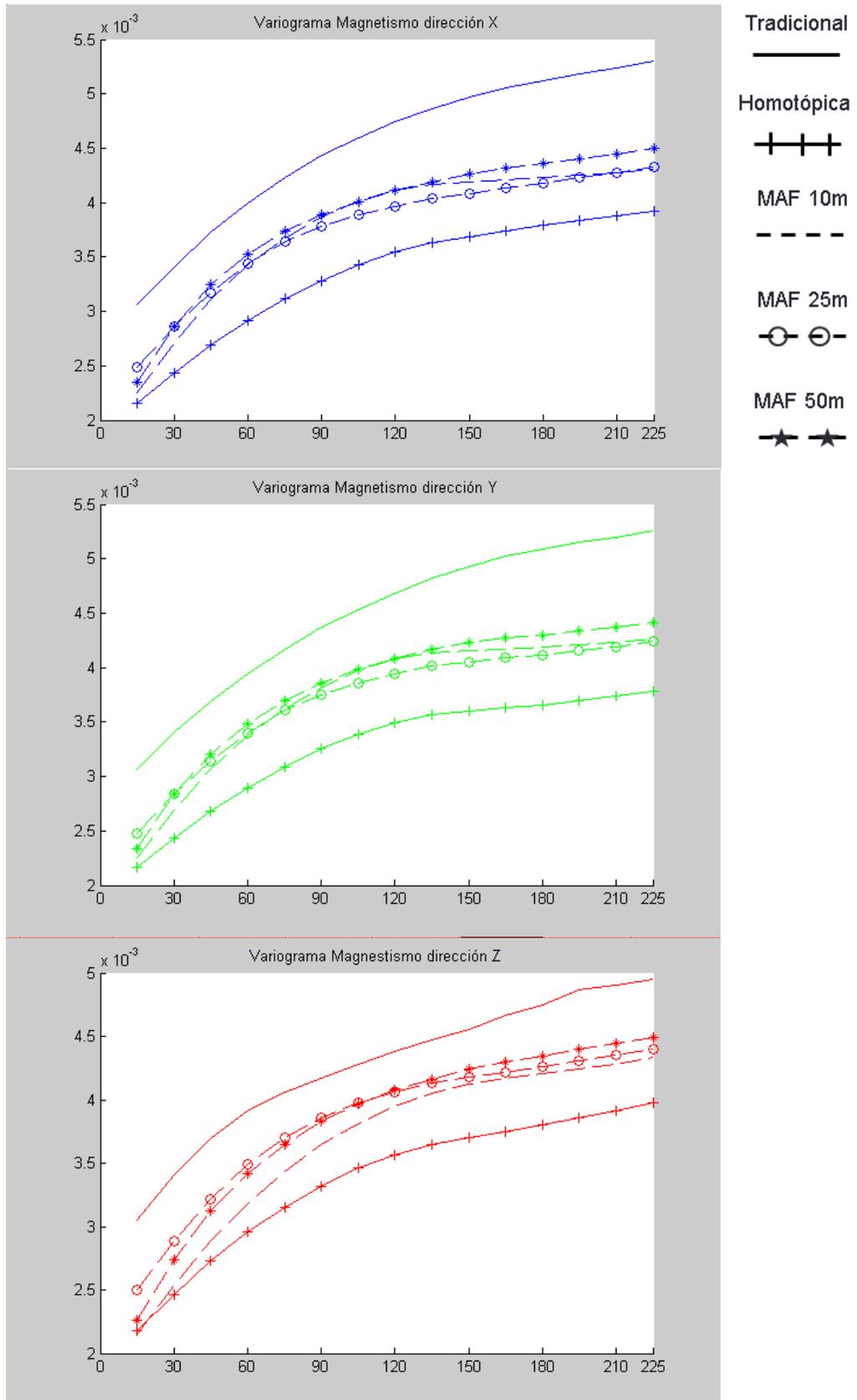


Figura 69: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Magnetismo

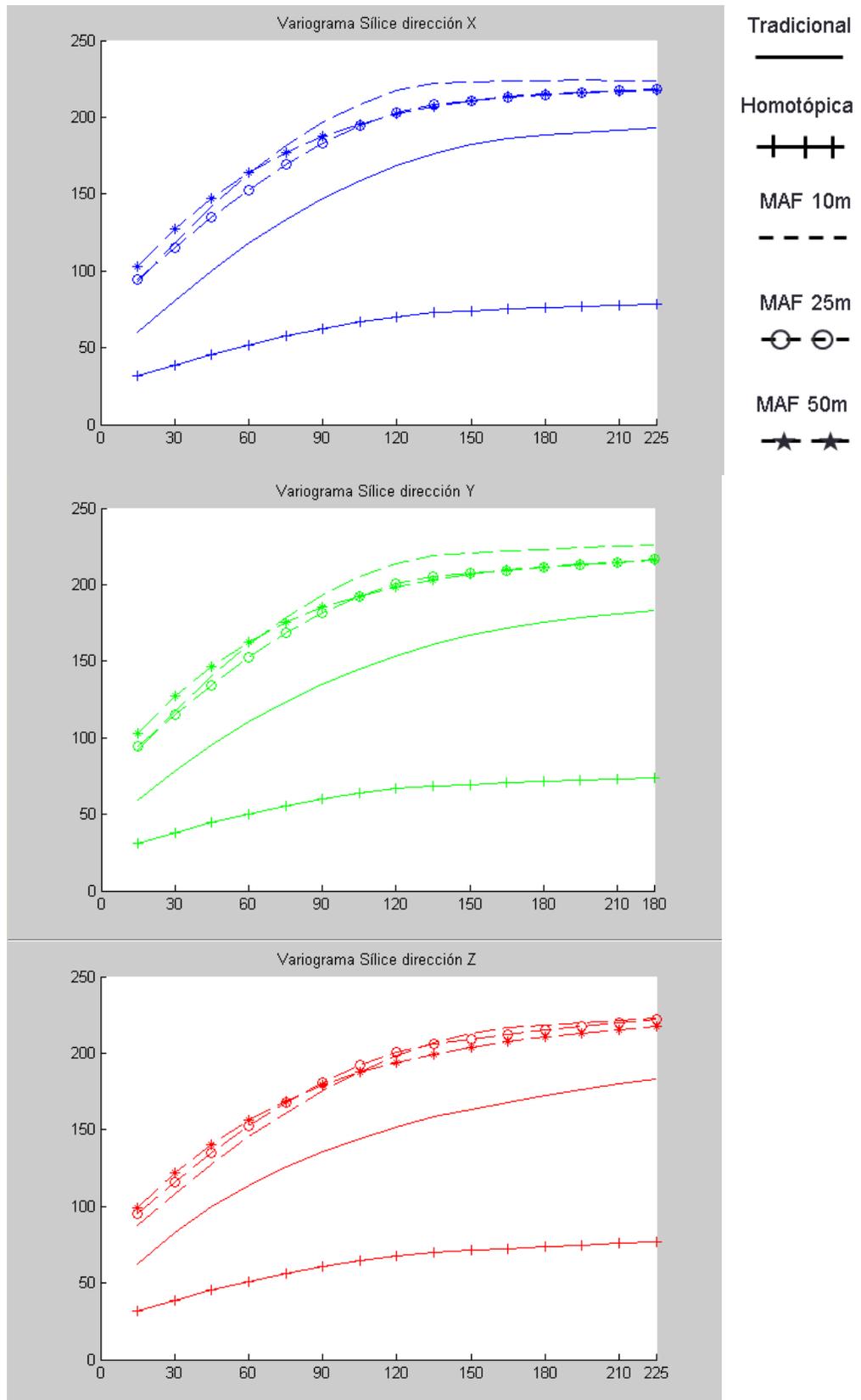


Figura 70: Comparación de los variogramas experimentales del modelo de bloques, Sílice

10.10. Matrices de correlación

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas tradicionalmente.

	Fierro	Magnetism	Sílice
Fierro	1	0.49	-0.90
Magnetism	0.49	1	-0.51
Sílice	-0.90	-0.51	1

Tabla 46: Matriz de correlación, tradicional heterotópica

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas tradicionalmente de datos homotópicos.

	Fierro	Magnetism	Sílice
Fierro	1	0.65	-0.93
Magnetism	0.65	1	-0.64
Sílice	-0.93	-0.64	1

Tabla 47: Tabla N° 2: Matriz de correlación, tradicional homotópica.

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con h = 10m

	Fierro	Magnetism	Sílice
Fierro	1	0.60	-0.92
Magnetism	0.60	1	-0.66
Sílice	-0.92	-0.66	1

Tabla 48: Matriz de correlación, vía MAF h=10

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con h = 25m

	Fierro	Magnetism	Sílice
Fierro	1	0.59	-0.92
Magnetism	0.59	1	-0.65
Sílice	-0.92	-0.65	1

Tabla 49: Matriz de correlación, vía MAF h=25m

Matriz de correlación del promedio de las variables cosimuladas vía MAF con h = 50m

	Fierro	Magnetism	Sílice
Fierro	1	0.59	-0.92
Magnetism	0.59	1	-0.64
Sílice	-0.92	-0.64	1

Tabla 50: Matriz de correlación, vía MAF h=50m

10.11. Desviación estándar condicional

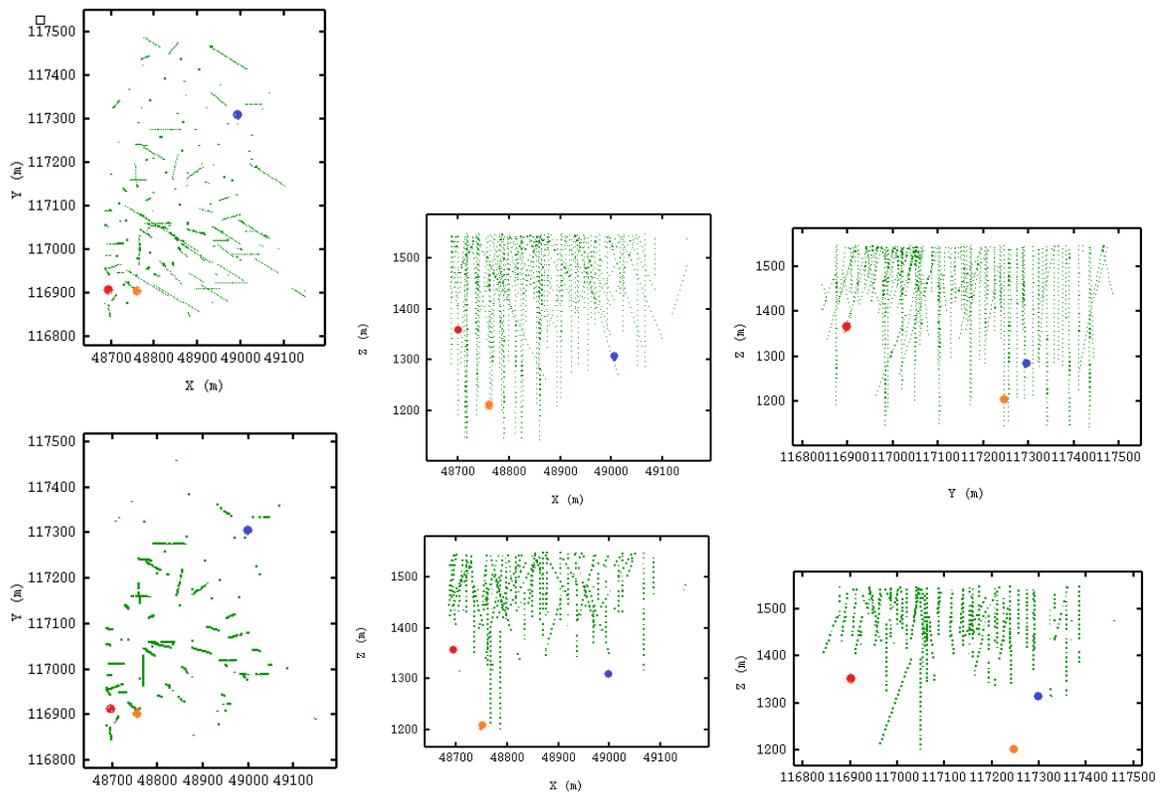


Figura 71: Ubicación de algunos bloques seleccionados cerca de datos heterotópicos.

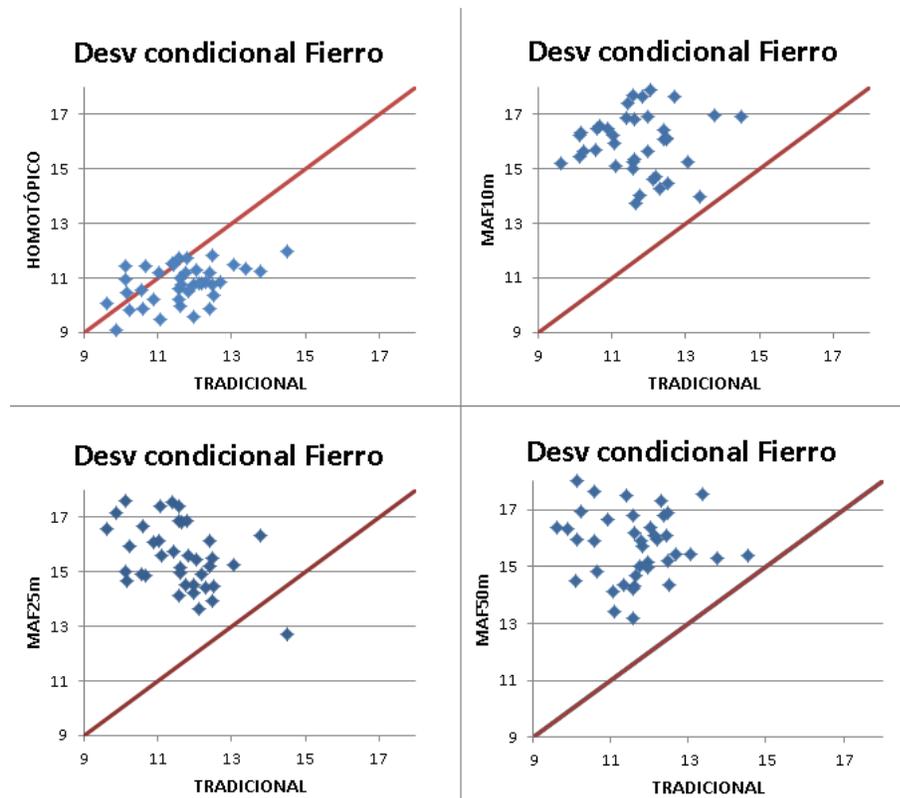


Figura 72: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Fierro

En la siguiente figura se muestra como en el caso de magnetismo hay una buena relación entre los bloques simulados por uno u otro método, ya que todos los métodos usan los mismos datos de magnetismo (variable que cuenta con la menor cantidad de información).

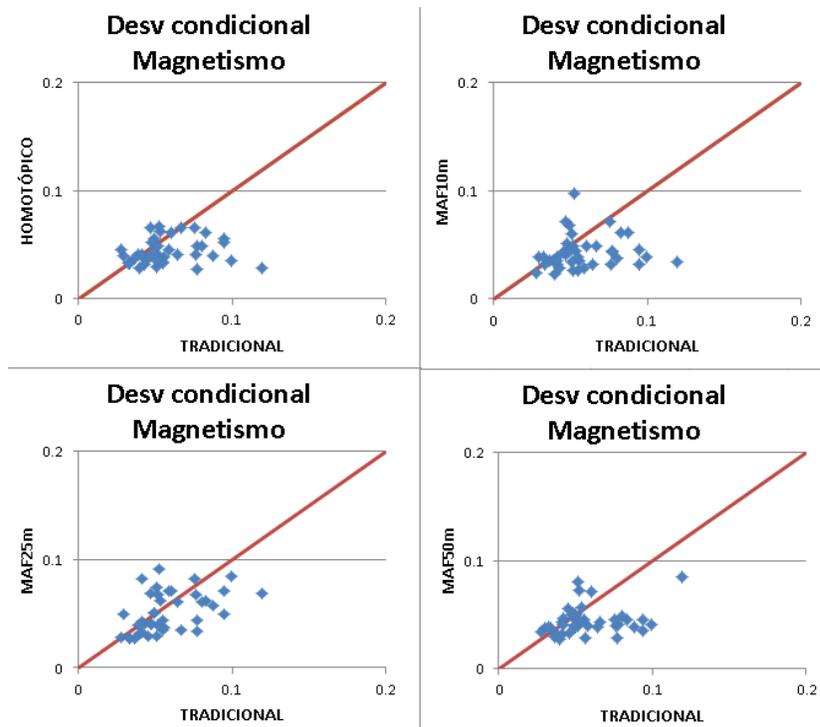


Figura 73: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Magnetismo

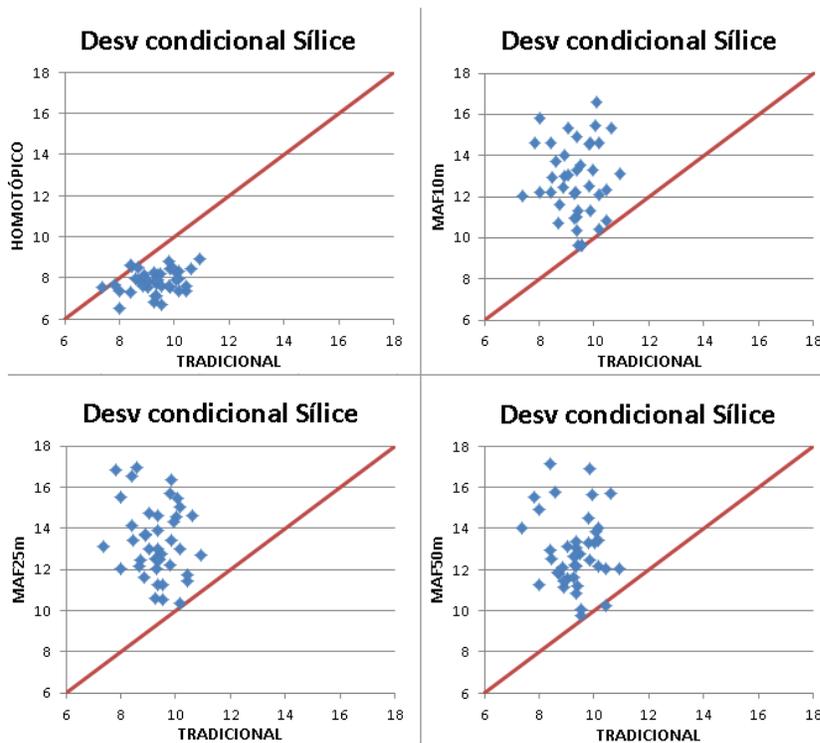


Figura 74: Desviación estándar condicional para algunos bloques heterotópicos, Sílice

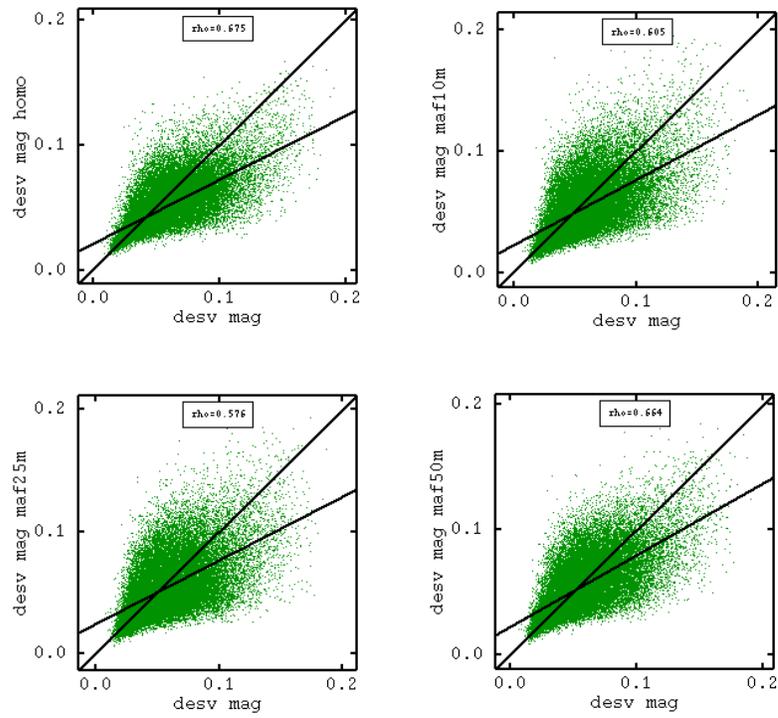


Figura 75: Desviación estándar condicional, Hierro

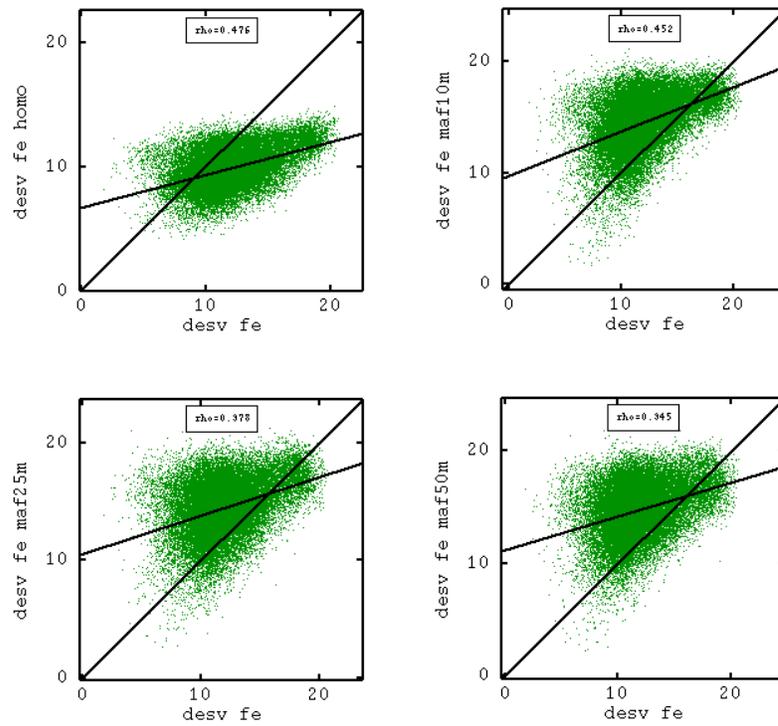


Figura 76: Desviación estándar condicional, Magnetismo

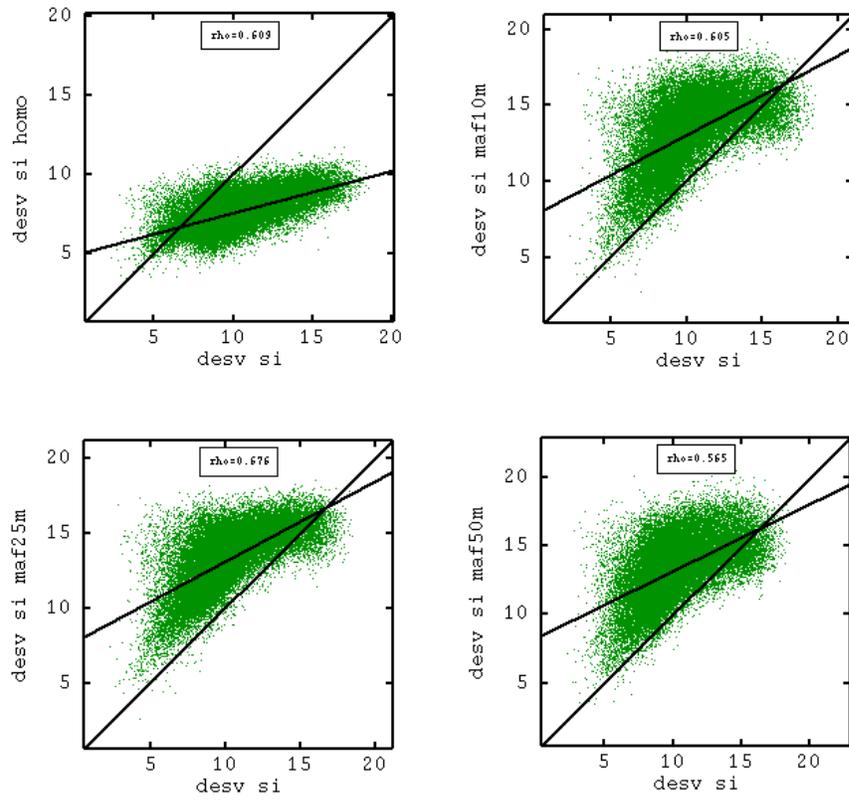


Figura 77: Desviación estándar condicional, Sílice