



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

TEORÍA DE VALORES EXTREMOS EMPLEADA EN LA GESTIÓN DE RIESGO FINANCIERO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

GABRIEL IGNACIO CUEVAS RODRÍGUEZ

PROFESOR GUIA:
JUAN PABLO CASTRO ANSIETA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ERCOS VALDIVIESO CONTRERAS
ARTURO CIFUENTES OVALLE

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POR: GABRIEL CUEVAS RODRÍGUEZ
FECHA: 25/01/2011
PROF. GUÍA: SR. JUAN PABLO CASTRO ANSIETA

TEORÍA DE VALORES EXTREMOS EMPLEADA EN LA GESTIÓN DE RIESGO FINANCIERO

El presente trabajo de título elabora un modelo de estimación de pérdidas en escenarios críticos basado en la teoría de valores extremos (EVT), aplicados al mercado chileno. Este trabajo se enmarca dentro del nuevo paradigma de control y gestión de riesgos, en la cual se debe pasar de los análisis tradicionales de rentabilidad asociada al mínimo riesgo, a los nuevos análisis de elección de límites conjuntos de riesgo y rentabilidad.

La teoría de valores extremos es una rama de la estadística la cual analiza las distribuciones de probabilidad con desviaciones extremas con respecto a la media. Las medidas de riesgo bajo la metodología EVT, tienen un mejor desempeño en función de un backtest, que las medidas comúnmente aplicadas, las cuales asumen retornos distribuidos de manera normal con una confiabilidad del 99%.

El objetivo general es aplicar EVT para la gestión diaria de riesgo financiero, con el fin de comparar los modelos empleados actualmente con la metodología propuesta. Las medidas de riesgo empleadas diariamente son el Valor en Riesgo (VaR), el cual busca determinar la pérdida máxima que se puede producir dado un cierto nivel de confianza y Expected Shortfall (ES), la cual busca determinar la pérdida máxima esperada dado que fue superado el VaR.

Los objetivos específicos de este trabajo, consideran la implementación de un modelo de estimación de pérdidas diarias empleando EVT. Posteriormente se busca contrastar el modelo desarrollado para datos que consisten en índices del mercado chileno. Además, la realización de una aplicación para obtener las medidas de riesgo VaR y ES. Luego, se entregan estrategias a seguir, en función de la información entregada por el backtest.

Para validar los conceptos propuestos, se estima el VaR y ES para distintos horizontes de tiempo. Son analizados índices de bonos corporativos, letras hipotecarias y el IPSA. La validación del modelo propuesto resulta satisfactoria, ya que es posible obtener las mediciones requeridas, los resultados obtenidos no sobreestiman el riesgo y el tiempo computacional necesario para el desarrollo del método es bajo.

Las estrategias propuestas son la aplicación del VaR al 99% bajo EVT como medida diaria de riesgo, para los índices de bonos corporativos e IPSA, ya que la cantidad de excepciones obtenidas en el backtest superan el límite normativo. Sin embargo, para el índice de letras hipotecarias, la cantidad de excepciones bajo el supuesto de normalidad de los retornos no justifica un cambio de modelo, pese a que EVT reduce las violaciones observadas en el backtest.

Como futuros estudios en el tema, se propone la evaluación de un portfolio bajo esta metodología y la utilización de modelos de predicción de volatilidad más sofisticados.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi madre Rudy, por haberme sabido transmitir durante todos estos años, las herramientas necesarias que han permitido que en estos momentos, y por segunda vez, logre finalizar una etapa muy importante en mi vida profesional. Muchas gracias por todo lo entregado durante estos años en los cuales me transmitiste toda tu energía permitiéndome llegar hasta aquí, de lo contrario hubiese sido imposible lograrlo.

Agradezco de forma especial a María Jesús quien ha estado a mi lado durante todo este proceso y ha tenido que aguantarme trabajando hasta tarde para poder lograr esto. Muchas gracias.

Le agradezco al profesor Juan Pablo Castro, por haberme dado la oportunidad de realizar este proyecto y ser mi guía en él. También quiero destacar el apoyo recibido por el profesor William Baeza, del cual todos sus comentarios fueron considerados para el desarrollo final.

También tengo que agradecer a Luis Felipe Vera, quien fue el artífice de esta memoria, partiendo por proponerme el tema. Junto con ayudarme en temas puntuales, me ha entregado bastantes conocimientos los cuales han favorecido el cumplimiento de este trabajo.

Una mención especial merece Ercos, mi profesor co-guía, ya que desde el momento que le propuse estar en la comisión aceptó gustoso. Muchas gracias.

Agradecimientos especiales merecen mis grandes amigos, el Club Atlético Tigres Suelos C.A.T.S., por haber sido parte de mi vida durante todos estos años en Beauchef. Les quiero agradecer a Gato, Gus, Leo, Doc, Castro, BuenCha, Saa, Sam, Colombia, Jacuna, Fuentes, Eros, Mac, Show, Godines, Chama, Lucy, Snorkel, Cabe y Reis, por haber estado en todos los mejores momentos. Simplemente, agradecer a todos los tigres por ser más que un grupo de amigos, una institución.

Finalmente quiero agradecer a todas las demás personas que han sido parte de mi vida en los últimos años, simplemente por estar ahí y por compartir nuestro tiempo.

*A mi madre,
María Jesús
y amigos...*

Índice de Contenidos

ÍNDICE DE CONTENIDOS	V
ÍNDICE DE TABLAS.....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Alcance	1
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivo general.....	3
1.3.2. Objetivos específicos	3
1.4. Estructura del trabajo y metodología.....	3
CAPÍTULO 2: GESTIÓN DE RIESGO FINANCIERO.....	5
2.1. Introducción.....	5
2.2. El Riesgo de Eventos Extremos.....	5
2.2.1. Teoría General.....	6
2.2.2. Mediciones de Riesgo Extremo	6
2.2.3. Distribución Generalizada de Pareto (GPD)	11
2.2.4. Estimación de la Distribución de Excesos	12
2.2.5. Estimación de Colas de las Distribuciones	13
2.2.6. Estimación del VaR en EVT.....	14
2.2.7. Estimación de Expected Shortfall en EVT	15
2.3. Gestión Dinámica del Riesgo	16
2.3.1. Modelos de Volatilidad Estocástica.....	17
2.4. Método de Máxima Verosimilitud	17
2.5. Gráfico Cuantil-Cuantil (Q-Q Plot).....	18
2.6. Tail Index: Estimador de Hill.....	20
2.7. Modelos Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada (GARCH).....	21
2.7.1. El Modelo GARCH Simétrico Normal.....	23
2.8. Modelos Autorregresivos de Media Móvil (ARMA).....	25

CAPÍTULO 3: DESCRIPCIÓN DEL MODELO A IMPLEMENTAR	26
3.1. Introducción.....	26
3.2. Metodología	26
3.2.1. Estimación de μ_{t+1} y σ_{t+1}	28
3.2.2. Estimación de z_α usando EVT	29
3.2.3. Backtesting	31
CAPÍTULO 4: ESTIMACIÓN DE LAS MEDICIONES DE RIESGO	32
4.1. Introducción.....	32
4.2. Modelo de Medidas de Riesgo en Matlab	32
4.3. Análisis de Índices LVA.....	33
4.3.1. Análisis de Índices LVACLC	34
4.3.2. Análisis de Índices LVACLH	50
4.4. Análisis del IPSA.....	65
4.5. Análisis y Discusión de Resultados.....	81
4.5.1. Resultados Índice LVACLC	81
4.5.2. Resultados Índice LVACLH	82
4.5.3. Resultados IPSA.....	83
4.5.4. Análisis Conjunto	84
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES	85
REFERENCIAS.....	88
ANEXOS	90
A.1. Lista de Acrónimos.....	90
A.2. La Distribución Normal	90
A.3. VaR Histórico	91
A.4. VaR Monte Carlo.....	91
A.5. IPSA	92
A.6. Ratios de Índices.....	94
A.6.1. Ratios Índice LVACLC	94
A.6.2. Resultados Índice LVACLH	96
A.6.3. Ratios IPSA	99
A.7. Código Desarrollado en Matlab.....	102

Índice de Tablas

Tabla 4.1: Excepciones del VaR y ES del Índice LVACLIC en USD.	81
Tabla 4.2: Excepciones del VaR y ES del Índice LVACLH en CLP.	82
Tabla 4.3: Excepciones del VaR y ES del IPSA.	83
Tabla A.1: Empresas que componen el IPSA.	93

Índice de Figuras

Figura 2.1: Representación Gráfica del Value at Risk.....	7
Figura 2.2: Representación Gráfica del VaR y ES.	9
Figura 2.3: Q-Q Plot distribución de Poisson.....	19
Figura 2.4: Q-Q Plot distribución Normal.....	20
Figura 2.5: Estimador de Hill para retornos del IPSA.	21
Figura 4.1: Interfaz de Matlab.....	33
Figura 4.2: Retorno Normalizado Índice LVACLCL en USD.	35
Figura 4.3: Logaritmo de los Retornos Índice LVACLCL en USD.	36
Figura 4.4: Histograma del Logaritmo de Retornos Índice LVACLCL en USD.....	37
Figura 4.5: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) Índice LVACLCL en USD.	38
Figura 4.6: Pérdidas Índice LVACLCL en USD.	39
Figura 4.7: ACF Logaritmo de Retornos Índice LVACLCL en USD.....	40
Figura 4.8: Q-Q plot para Retornos Índice LVACLCL en USD.	41
Figura 4.9: Estimador de Hill para Índice LVACLCL en USD.	42
Figura 4.10: Q-Q plot para Residuales del Índice LVACLCL en USD.	43
Figura 4.11: ACF de Residuales del Índice LVACLCL en USD.....	44
Figura 4.12: GPD Ajustada y Empírica de Residuales de Índice LVACLCL en USD.	45
Figura 4.13: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para Índice LVACLCL en USD.	46
Figura 4.14: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para Índice LVACLCL en USD.	47
Figura 4.15: Excepciones ES al 95% Índice LVACLCL en USD.	48
Figura 4.16: Excepciones VaR al 95% Índice LVACLCL en USD.....	48
Figura 4.17: Excepciones VaR al 99% Índice LVACLCL en USD.....	49
Figura 4.18: ξ Residuales Índice LVACLCL en USD.....	50
Figura 4.19: Retorno Normalizado Índice LVACLCLH en CLP.	51
Figura 4.20: Logaritmo de los Retornos Índice LVACLCLH en CLP.....	52
Figura 4.21: Histograma del Logaritmo de Retornos Índice LVACLCLH en CLP.	52
Figura 4.22: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) Índice LVACLCLH en CLP.....	53
Figura 4.23: Pérdidas Índice LVACLCLH en CLP.....	54
Figura 4.24: ACF Logaritmo de Retornos Índice LVACLCLH en CLP.	55
Figura 4.25: Q-Q plot para Retornos Índice LVACLCLH en CLP.....	56
Figura 4.26: Estimador de Hill para Índice LVACLCLH en CLP.....	57
Figura 4.27: Q-Q plot para Residuales del Índice LVACLCLH en CLP.....	58
Figura 4.28: ACF de Residuales del Índice LVACLCLH en CLP.	59
Figura 4.29: GPD Ajustada y Empírica de Residuales de Índice LVACLCLH en CLP.....	60
Figura 4.30: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para Índice LVACLCLH en CLP.....	61
Figura 4.31: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para Índice LVACLCLH en CLP.....	62
Figura 4.32: Excepciones ES al 95% Índice LVACLCLH en CLP.....	63
Figura 4.33: Excepciones VaR al 95% Índice LVACLCLH en CLP.....	63

Figura 4.34: Excepciones VaR al 99% Índice LVACLH en CLP.....	64
Figura 4.35: ξ Residuales Índice LVACLH en CLP.	64
Figura 4.36: Retorno Normalizado IPSA.	66
Figura 4.37: Logaritmo de los Retornos IPSA.	67
Figura 4.38: Histograma del Logaritmo de Retornos IPSA.....	67
Figura 4.39: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) IPSA.	68
Figura 4.40: Pérdidas IPSA.....	69
Figura 4.41: ACF Logaritmo de Retornos IPSA.....	70
Figura 4.42: Q-Q plot para Retornos IPSA.....	71
Figura 4.43: Estimador de Hill para IPSA.....	72
Figura 4.44: Q-Q plot para Residuales del IPSA.....	73
Figura 4.45: ACF de Residuales del IPSA.	74
Figura 4.46: GPD Ajustada y Empírica de Residuales del IPSA.	75
Figura 4.47: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para el IPSA.	76
Figura 4.48: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para el IPSA.	77
Figura 4.49: Excepciones ES al 95% del IPSA.	78
Figura 4.50: Excepciones ES al 99% del IPSA.	78
Figura 4.51: Excepciones VaR al 95% del IPSA.	79
Figura 4.52: Excepciones VaR al 99% del IPSA.	79
Figura 4.53: ξ Residuales IPSA.....	80
Figura A.1: Ratio ES EVT/Normal al 95% Índice LVACLIC en USD.	94
Figura A.2: Ratio ES EVT/Normal al 99% Índice LVACLIC en USD.	95
Figura A.3: Ratio VaR EVT/Normal al 95% Índice LVACLIC en USD.	95
Figura A.4: Ratio VaR EVT/Normal al 99% Índice LVACLIC en USD.	96
Figura A.5: Ratio ES EVT/Normal al 95% Índice LVACLH en CLP.....	97
Figura A.6: Ratio ES EVT/Normal al 99% Índice LVACLH en CLP.....	97
Figura A.7: Ratio VaR EVT/Normal al 95% Índice LVACLH en CLP.....	98
Figura A.8: Ratio VaR EVT/Normal al 99% Índice LVACLH en CLP.....	98
Figura A.9: Ratio ES EVT/Normal al 95% IPSA.	99
Figura A.10: Ratio ES EVT/Normal al 99% IPSA.	100
Figura A.11: Ratio VaR EVT/Normal al 95% IPSA.	100
Figura A.12: Ratio VaR EVT/Normal al 99% IPSA.....	101

Capítulo 1:

Introducción

1.1. Motivación

Este trabajo se enmarca dentro del nuevo paradigma de control y gestión de riesgos en virtud de la cual el riesgo, elemento presente en toda actividad financiera, debe ser una variable estratégica en la gestión. Lo cual implica pasar de los análisis tradicionales de rentabilidad asociada al mínimo riesgo a los nuevos análisis de elección de límites conjuntos entre riesgo y rentabilidad.

Si nos centramos en la cuantificación del riesgo, se debe tener un sistema que permita medir de forma adecuada y objetiva el riesgo al que está expuesta una entidad financiera. En este sentido, el riesgo de mercado se muestra hoy en día como la principal referencia de este nuevo paradigma. Esto debido a que actualmente al riesgo financiero se le permite emplear los modelos internos de cuantificación del riesgo, utilizados diariamente en la gestión de las entidades, a efectos de cálculos regulatorios a través de la medida conocida como Valor en Riesgo (VaR). No obstante, desde la incorporación del VaR al instrumental básico de la práctica financiera, han sido numerosas las caracterizaciones, propuestas y extensiones que los investigadores y, sobre todo, los propios profesionales del campo de las finanzas, han sugerido. A partir de esto surge la Teoría de Valores Extremos (EVT) como el instrumental con el que abordar el problema de modelar la distribución de un conjunto de valores extremos y, por lo tanto, constituye la herramienta natural para el cálculo del VaR, como también medidas adicionales de riesgo como Expected Shortfall (ES), en la cual se busca determinar la pérdida esperada cuando se supera el VaR. En definitiva, se muestra como el contexto con mayor fundamento teórico en que basar la estimación de lo poco probable.

1.2. Alcance

Esta memoria está orientada al desarrollo de medidas de riesgo financiero basadas en la teoría de valores extremos. Con el fin de realizar la validación y contrastación del modelo desarrollado se emplearán medidas de índices financieros del mercado chileno pertenecientes a la empresa LVA índices y también será empleado el índice de precios

selectivo de acciones IPSA, de los cuales se cuenta con información desde el 1 de Enero de 2008 y del 2 de Enero de 2004 respectivamente.

La base del desarrollo del modelo se encuentra en diversos estudios realizados, McNeil y Frey [1] y [2], Acerbi y Tasche [3], Cascon y Shadwick [4] y Johnson [6], los cuales se centran en un enfoque analítico, con el fin de extender su aplicabilidad a casos generales dentro del ámbito de estudio y considerando las restricciones establecidas, dentro de las cuales se considera el análisis de un índice, sin considerar dentro de este estudio la aplicación a portfolios.

El objetivo fundamental de esta memoria es aplicar la Teoría de Valores Extremos para la gestión de riesgo financiero, con el fin de comparar los modelos empleados actualmente con la metodología propuesta. La aplicación de esta metodología permite la determinación de medidas extremas de riesgo, las cuales ponderan de mayor forma escenarios menos probables.

De esta forma, las medidas fundamentales de riesgo a determinar corresponden al Valor en Riesgo (modelo actual) y Expected Shortfall (modelo propuesto), las que buscan encontrar la pérdida máxima posible dentro de un cierto grado de confiabilidad y la pérdida esperada dado que se superó este umbral, respectivamente. La obtención de estas medidas y su comparación, mediante un backtest, con los valores reales de pérdidas de índices de mercado seleccionados, permiten verificar el funcionamiento de la metodología propuesta.

El modelo empleado contiene una estimación de volatilidad, condicional a los rezagos históricos de la data considerada. Esto último, es realizado mediante un modelo GARCH, el cual estima la varianza condicionada a una ventana de rezagos de datos establecida previamente. Posterior a lo anterior, considerando la misma ventana de datos, se estima la distribución de colas pesadas basada en la teoría de valores extremos, la cual es ajustada a una distribución generalizada de Pareto (GPD).

Posterior al ajuste de parámetros de la GPD, se inicia la simulación mediante un proceso iterativo en el cual se determinan las medidas de riesgo pronosticadas para el periodo siguiente. Luego, se adiciona un nuevo parámetro a la ventana de la serie de datos, el cual corresponde al retorno real sucedido en el día predicho y a su vez, se elimina el dato más antiguo de la serie. Aquí, se inicia un nuevo proceso, determinando los parámetros del modelo de varianza GARCH, de la GPD y finalmente se realiza la medición de riesgo.

Como fue señalado previamente, el test del modelo será realizado para índices de la empresa LVA y el IPSA. A partir de lo último, el modelo teórico presentado se contrasta con índices del mercado chileno. Cabe destacar, que la utilización de índices no afecta en la validez del modelo, debido a que la utilización de estos es una práctica

comúnmente empleada, debido a que representan en gran medida, los movimientos reales que presenta el mercado.

Para obtener las mediciones de riesgo requeridas, es realizada una interfaz gráfica desarrollada en Matlab que permite la simulación de la data. Esta interfaz permite la posibilidad de simular las mediciones para cada caso en particular.

1.3. Objetivos

Los objetivos de esta memoria, tanto generales como específicos son detallados a continuación.

1.3.1. Objetivo general

- i) Aplicar la Teoría de Valores Extremos para la gestión de riesgo financiero, con el fin de comparar los modelos empleados actualmente con la metodología propuesta.

1.3.2. Objetivos específicos

- i) Implementar un modelo de estimación de pérdidas diarias empleando la Teoría de Valores Extremos.
- ii) Validación del modelo desarrollado para datos consistentes en índices representativos del mercado nacional.
- iii) Desarrollar una aplicación para la obtención de las medidas de riesgo Value-at-Risk y Expected Shortfall empleando la Teoría de Valores Extremos.
- iv) Desarrollar estrategias a seguir según la información que entreguen las medidas de riesgo determinadas.

1.4. Estructura del trabajo y metodología

Este trabajo se encuentra dividido en 5 Capítulos.

En el Capítulo 2 es descrita la base de los temas que serán abordados dentro de esta memoria, donde se incluye en siete secciones la descripción de los fundamentos teóricos y estadísticos que permiten abordar las medidas de riesgo actuales y desarrollo en base a la teoría de valores extremos.

En particular, dentro del primer segmento se realiza una descripción detallada de las medidas de riesgo extremos, en el cual se señalan las mediciones actuales que se realizan. Además se inicia la descripción de la teoría de valores extremos, mediante la caracterización de la distribución Generalizada de Pareto (GPD). Posteriormente se detalla la base teórica que permite la correcta aplicación de GPD en las mediciones de riesgo extremo. Las secciones posteriores dentro de este capítulo buscan caracterizar diversos fundamentos econométricos y estadísticos que permitirán el posterior desarrollo metodológico.

En el Capítulo 3 se desarrolla la metodología que será aplicada para el desarrollo del modelo basado en EVT. En el primer apartado se muestra la forma en que serán empleados conjuntamente los modelos AR y GARCH. En esta descripción, se hace énfasis en la aplicabilidad de la estimación mediante estos modelos, con el fin de obtener resultados que sean construidos de manera apropiada para su posterior utilización. A continuación se desarrolla la parte del método en la cual se muestra como unir las estimaciones obtenidas con un modelo de teoría de valores extremos.

Finalmente dentro de este capítulo, se muestra la forma de estimar las medidas de riesgo basadas en la teoría de valores extremos. Para ello se señalan dos expresiones analíticas que representan a las medidas de VaR y ES bajo EVT, en las cuales se concentran los diversos métodos previamente explicitados.

En el capítulo 4 son mostrados los resultados de las medidas de riesgo que permiten evaluar el desempeño de los indicadores estudiados. Inicialmente se detallan las características de la interfaz desarrollada con el fin de mostrar el procedimiento con el que lleva a cabo la estimación. En la sección siguiente se caracterizan las dos primeras series de datos analizadas, pertenecientes a la empresa LVA índices, y se realiza el desarrollo del modelo empleado. En esta parte, son analizados de manera gráfica los principales aspectos teóricos descritos en el capítulo 2, aplicados a datos reales y se muestran los resultados obtenidos para cada uno de ellos. Posteriormente se realiza el análisis a la serie de datos del IPSA, donde es replicado el proceso anterior. La última sección de este capítulo, presenta el análisis de los resultados obtenidos a partir de las simulaciones detalladas en las secciones precedentes.

Finalmente, el Capítulo 5 reúne las conclusiones de este trabajo, además de verificar el cumplimiento tanto de los objetivos generales como de los específicos.

Adicionalmente se incluye una sección de anexos donde se revisan diversos estudios complementarios a los expuestos en los capítulos previos.

Capítulo 2:

Gestión de Riesgo Financiero

2.1. Introducción

En 1952 Harry Markovitz propuso usar la variabilidad de los retornos de los activos financieros, como medida de riesgo. Así, la varianza de los retornos de los activos, se mantuvo como la medida de riesgo universalmente aceptada hasta finales de la década de los ochenta y principio de los noventa, cuando finalmente se hizo evidente que ésta es más bien una medida de incertidumbre que de riesgo. Coincidente con las grandes crisis financieras ocurridas precisamente en aquel periodo, se vio la necesidad de que la medida de riesgo, fuera expresada en términos de pérdidas potenciales, con una cierta probabilidad de ocurrencia.

2.2. El Riesgo de Eventos Extremos

El riesgo de eventos extremos está presente en todas las áreas de gestión de riesgos, tal como lo proponen McNeil y Frey [1], [2], Acerbi y Tasche [3], Cascon y Shadwick [4], Johnson [6], Danielsson [8], Sarykalin, Serraino y Uryasev [9]. Ya sea que se trate del mercado de crédito, riesgo operacional, entre otros, uno de los mayores desafíos para el gestor de riesgos es la implementación de modelos que incluyan eventos raros pero dañinos, y a su vez permitan medir sus consecuencias.

En riesgo de mercado, el interés se centra en la determinación del Valor en Riesgo (VaR) para las posibles pérdidas que incurramos en una cartera de negociación debido a fluctuaciones adversas del mercado.

Sea cual sea el tipo de riesgo que estamos considerando, nuestro enfoque a su gestión es similar. La intención es modelarlo de tal forma que un evento extremo esté considerado. Gracias a este modelo vamos a tratar de cuantificar el riesgo con una medida que proporciona información sobre los resultados extremos. En estas actividades la teoría de valores extremos (EVT), proporcionará las herramientas que necesitamos.

2.2.1. Teoría General

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias idénticamente distribuidas, con una función de distribución subyacente $F(x) = P\{X_i \leq x\}$. En este caso, estas variables aleatorias representarán las pérdidas y ganancias del portfolio (Profit and Loss o PnL). No se ha asumido independencia, debido a que el caso en estudio, correspondiente a los PnL de un instrumento, resulta irreal pensar en ello.

2.2.2. Mediciones de Riesgo Extremo

Esta sección revisa los conceptos de valoración del riesgo que serán fundamentalmente tratados en esta memoria, como es en el caso del Value at Risk (VaR) y Expected Shortfall (ES).

2.2.2.1. Value-at-Risk

El concepto de Value at Risk, o valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo, esto fue propuesto por J.P.Morgan/Reuters [12]. Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VaR con un nivel de significancia del 1%. Esto significa que solamente el 1% de las veces, o 1 de 100 veces (es decir una vez cada cinco meses con datos diarios) el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el VaR.

Si consideramos una serie de retornos históricos de un portafolio que posee un número n de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del análisis del histograma. Es común encontrar fluctuaciones de retornos en torno a un valor medio levemente diferente de cero (este concepto en estadística se denomina proceso con reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal, como se aprecia en el ejemplo de la figura 2.4, en la cual la mayor cantidad de datos se encuentra concentrada en torno a la media. Leves asimetrías (skewness) son a veces percibidas en los retornos, pero desde un punto de vista práctico es suficiente asumir simetría en la distribución. Una vez generada la distribución se debe calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja un 1% del área en su rango inferior (α). La distancia de este punto en el dominio de la distribución en relación al valor esperado de la distribución se denomina Value at Risk el cual se presenta en la figura 2.1.

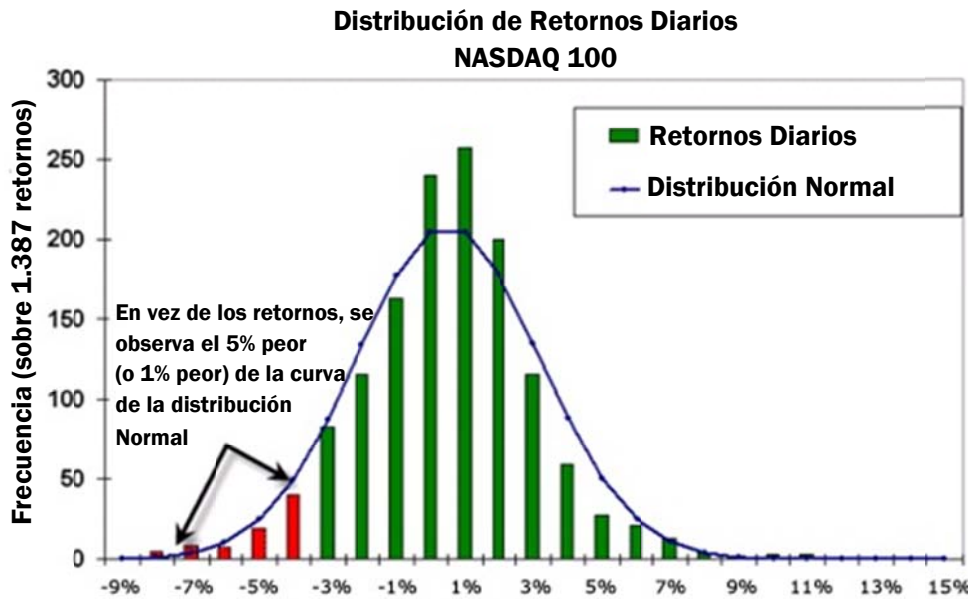


Figura 2.1: Representación Gráfica del Value at Risk.

Matemáticamente se definen las mediciones de riesgo extremo en términos de la distribución de pérdidas F . Sea α tal que $1 > \alpha \geq 0,95$. El VaR corresponde al cuantil α de la distribución F :

$$VaR_{\alpha} = F^{-1}(\alpha) \quad (2.1)$$

donde F^{-1} es la inversa de la función F .

Para variables aleatorias distribuidas de manera normal, el VaR es proporcional a la desviación estándar. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces el VaR es:

$$VaR_{\alpha} = \mu + k(\alpha)\sigma \quad (2.2)$$

donde $k(\alpha)$: nivel de confianza (número de desviaciones estándar).

Este último valor se representa por:

$$k(\alpha) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2\alpha - 1) \quad (2.3)$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy \quad (2.4)$$

Lo fácil e intuitivo del VaR se ve compensado por sus propiedades matemáticas. En función del nivel de confianza, para distribuciones discretas, $VaR_\alpha(X)$ es una función no convexa y discontinua.

2.2.2.2. Expected Shortfall

La idea que subyace bajo el concepto de Expected Shortfall (ES) es sencilla: se inicia bajo el concepto de Valor en Riesgo pero, esta vez, la pregunta no recae en la pérdida máxima que se podría incurrir en un horizonte dado con un nivel de confianza dado, sino en la pérdida potencial que, en media, se esperaría una vez superado el umbral señalado por el VaR. En resumen, se trata de una expectativa de pérdida condicionada a que se supere el nivel indicado por el VaR.

A partir de esto ES se determina mediante la siguiente expresión:

$$ES_\alpha = E[X|X > VaR_\alpha] \quad (2.5)$$

Es decir:

$$ES_\alpha(X) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF^\alpha(z) \quad (2.6)$$

donde,

$$F^\alpha(z) = \begin{cases} 0 & z < VaR_\alpha(X) \\ \frac{F(z) - \alpha}{1 - \alpha} & z \geq VaR_\alpha(X) \end{cases} \quad (2.7)$$

Tanto los conceptos del VaR como la de ES se muestran en la figura 2.2.

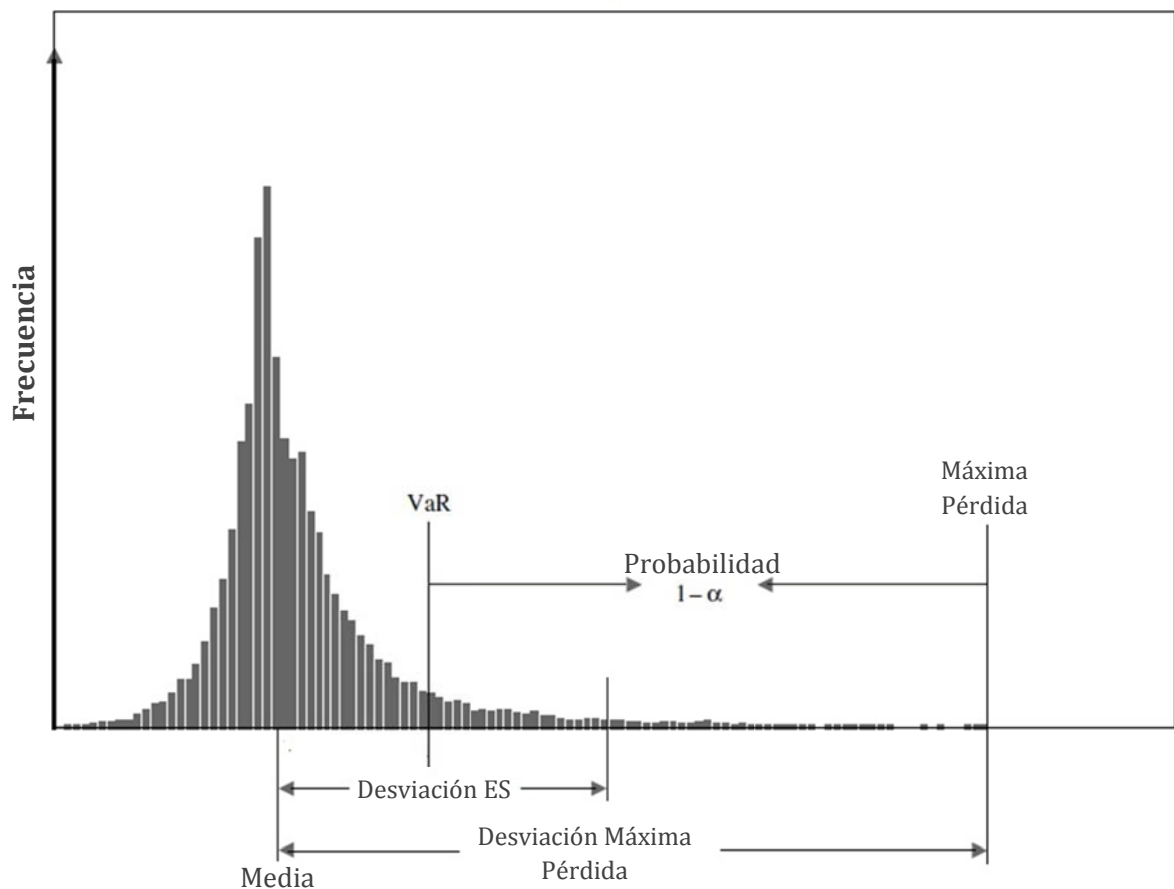


Figura 2.2: Representación Gráfica del VaR y ES.

2.2.2.3. Comparación de Value at Risk y Expected Shortfall

A continuación se señala una comparativa entre las dos principales mediciones de riesgo que se abordan en esta memoria, como lo son el Valor en Riesgo y Expected Shortfall.

Pros del VaR:

- El VaR es una medida de gestión de riesgos relativamente simple. La intuición detrás del percentil α de una distribución es fácil de entender. El VaR tiene una interpretación clara: cuanto se puede perder con determinado nivel de confianza. El VaR es un número único de medición de riesgo, definido por un cierto nivel de confianza especificado, por ejemplo, $\alpha = 0,95$. Dos distribuciones pueden ser rankeadas por la comparación de sus VaR para el mismo nivel de

confianza. Especificando el VaR para todos los niveles de confianza, se define por completo la distribución. En este sentido, el VaR es superior a la desviación estándar. A diferencia de la desviación estándar, el VaR se centra en una parte específica de la distribución definida por el nivel de confianza.

- Una de las propiedades importantes del VaR es lo estable de los procedimientos de estimación. Debido a que el VaR no tiene en cuenta la cola, no se ve afectada por las pérdidas representadas por colas muy altas, que suelen ser difíciles de medir. El VaR se estima con modelos paramétricos, por ejemplo, el basado en el supuesto de distribución normal es muy conocido en finanzas, modelos de simulación como histórica o Monte Carlo o mediante el uso de aproximaciones basadas en la expansión de Taylor de segundo orden.

Contras del VaR

- El VaR no tiene en cuenta las propiedades de la distribución más allá del nivel de confianza. Esto implica que $VaR_\alpha(X)$ puede aumentar dramáticamente con un pequeño aumento en α . Para estimar el riesgo de forma adecuada en la cola, se necesita realizar el cálculo del VaR con varios niveles de confianza diferentes. El hecho de que el VaR no tiene en cuenta la cola de la distribución puede conducir a tener de manera no intencional un alto riesgo.
- El VaR no es una medida coherente de riesgo debido a que no siempre cumple la propiedad siguiente de subaditividad¹:

$$VaR(X + Y) \leq VaR(X) + VaR(Y)$$

- Del control de riesgos mediante VaR se puede conducir a resultados indeseados para las distribuciones sesgadas. En ciertos portfolios se puede encontrar que el VaR de la cartera óptima tiene la cola alrededor del 20% más larga que el ES del portfolio óptimo, medido por la pérdida máxima de las carteras.
- El VaR es una función discontinua y no convexa para distribuciones discretas. Esto hace que la optimización de un problema de cálculo del VaR sea en términos computacionales desafiante.

¹ El VaR del portfolio total bajo ciertas condiciones puede ser mayor que la suma del VaR de los portfolios que los componen por separado.

Pros de ES

- ES tiene una interpretación clara bajo los conceptos de ingeniería. Mide los resultados que dañan a la mayoría. Por ejemplo, si L es una pérdida entonces la restricción $ES_\alpha(L) \leq \bar{L}$ asegura que el promedio de $(1 - \alpha)\%$ pérdidas mayores no exceda \bar{L} .
- Definir $ES_\alpha(X)$ para todos los niveles de confianza $\alpha \in (0,1)$ determina completamente la distribución de X . En este sentido, es superior a la desviación estándar.
- ES tiene varias propiedades matemáticas atractivas. $ES_\alpha(X)$ es continua con respecto a α . Además el ES es una medida coherente de riesgo ya que cumple:

$$ES(X + Y) \leq ES(X) + ES(Y)$$

Esto último en conjunto con las propiedades de monotoneidad, homogénea positiva e invariante a translaciones, conduce a que el ES sea una medida coherente de riesgo.

Contras de ES

- ES es más sensible que el VaR a los errores de estimación. Si no hay un buen modelo para la cola de la distribución, el valor ES puede inducir a error, la precisión de la estimación del ES está fuertemente afectada por la exactitud del modelo de la cola. Por ejemplo, los escenarios históricos a menudo no proporcionan información suficiente acerca de las colas, por lo que debemos asumir un cierto modelo de la cola para ser calibrado en datos históricos. En ausencia de un modelo correcto que refleje la cola, no se debe emplear ES.

2.2.3. Distribución Generalizada de Pareto (GPD)

Al igual que la distribución exponencial, la distribución generalizada de Pareto es a menudo utilizada para modelar las colas de otra distribución.

La distribución generalizada de Pareto entrega un rango continuo de diversas formas las cuales incluyen la distribución exponencial y la de Pareto como casos especiales. Puede utilizar cualquiera de las distribuciones para un modelo conjunto de

datos particulares de los excesos. La distribución generalizada de Pareto permite "dejar que los datos decidan" cual distribución es la adecuada.

La distribución generalizada de Pareto tiene tres formas básicas. Cada una corresponde a una distribución límite de los datos de un rebasamiento de clase diferente de las distribuciones subyacentes:

- Distribuciones cuyas colas disminuyen exponencialmente, como la normal, llevan a que el parámetro de forma de la GPD tome el valor cero.
- Distribuciones cuyas colas disminuyen de forma polinomial, como la t-Student, llevan a que el parámetro de forma de la GPD sea positivo.
- Distribuciones cuyas colas son finitas, como la beta, llevan a que el parámetro de forma de la GPD sea negativo.

La GPD es una distribución de dos parámetros cuya función de densidad de probabilidad es:

$$g_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\xi x}{\beta}\right)^{\frac{1}{\xi}-1} & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

A su vez la función de distribución es:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Donde $\beta > 0$ corresponde al parámetro de escala, $x \geq 0$ cuando $\xi \geq 0$ y $0 \leq x \leq -\beta/\xi$ cuando $\xi < 0$.

El primer caso es el más relevante para los propósitos de la gestión de riesgo debido a que la GPD presenta mayor peso en las colas cuando $\xi > 0$. Mientras que la distribución normal tiene momento de todos los órdenes, una distribución con mayor peso en las colas no posee un set completo de momentos. En el caso de la GPD, cuando $\xi > 0$ se encuentra que $E[X^k]$ es infinito para $k \geq 1/\xi$. Entonces, cuando $\xi = 1/2$, la GPD tiene una varianza infinita.

2.2.4. Estimación de la Distribución de Excesos

La distribución de las pérdidas de los excesos sobre un umbral u se define por:

$$F_u(y) = P\{X - u \leq y | X > u\} \quad (2.10)$$

Para $0 \leq y < x_0 - u$, donde $x_0 \leq \infty$ es el punto final derecho de F , que se explica a continuación. La distribución de excesos representa la probabilidad de que una pérdida superior al umbral u (a lo más en una cantidad y), entrega la información de los excesos a este umbral. Es muy útil observar que se puede escribir en términos de la función subyacente F como:

$$F_u(y) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.11)$$

Se desea asumir la función F subyacente como una distribución con un punto final infinito en la derecha, es decir, permite la posibilidad de pérdidas arbitrariamente grandes.

El siguiente teorema límite es un resultado clave en Teoría de Valores Extremos y explica la importancia de la GPD.

Teorema 1: Para una gran clase de distribuciones subyacentes podemos encontrar una función $\beta(u)$ que cumpla:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq y < x_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0$$

Es decir, para una gran clase de distribuciones subyacentes F , debido a que el umbral u es alcanzado progresivamente, la distribución de exceso F_u converge a una GPD.

Bajo el alero del teorema anterior, la GPD es el modelo natural para la distribución de excesos desconocida por encima de umbrales suficientemente altos, y este hecho fundamental es sobre el que se basa el método. El modelo, para un riesgo X_i de distribución F supone que, para cierto u , la distribución de excedentes por encima de este umbral puede ser llevado a ser exactamente GPD para ciertos parámetros ξ y β :

$$F_u(y) = G_{\xi, \beta}(y) \quad (2.12)$$

2.2.5. Estimación de Colas de las Distribuciones

Sea $x = u + y$, lo cual combinado con las expresiones (2.11) y (2.12), permite escribir el modelo:

$$F(x) = (1 - F(u)) \cdot G_{\xi, \beta}(x - u) + F(u) \quad (2.13)$$

para $x > u$. Esta fórmula puede llevarse con facilidad a una interpretación del modelo en términos de la cola de la distribución subyacente $F(x)$ para $x > u$.

Nuestro objetivo es utilizar (2.13) para construir un estimador de la cola, para lo cual el único elemento adicional que necesitamos es una estimación de $F(u)$. Para este propósito tomamos el estimador empírico

$$F(u) \approx \frac{(n - N_u)}{n} \quad (2.14)$$

donde,

n : número total de observaciones para realizar la estimación.

N_u : número de estimaciones que sobrepasan el umbral de cola u .

La expresión 2.14 corresponde a utilizar el método de simulación histórica (HS).

Una pregunta inmediata es, ¿por qué no utilizar el método HS, para estimar la cola entera de $F(x)$ (es decir, para todo $x \geq u$)? Esto se debe a que HS no es un método adecuado en la cola de la distribución donde los datos son escasos. En la obtención de un umbral u se estima que las observaciones que exceden el umbral u son suficientes para permitir una estimación histórica razonable de $F(u)$, pero para niveles más altos el método histórico sería poco confiable.

Juntando la estimación histórica de $F(u)$ y las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros de la GPD² llegamos al estimador de la cola.

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad (2.15)$$

es importante observar que este estimador es válido sólo para $x > u$. Esta estimación puede ser vista como una especie de estimación HS aumentada por EVT. Además, esto se puede realizar cuando se piensa que los datos provienen de una distribución conocida, aunque sus propiedades estadísticas se cumplen mejor cuando los datos se pueden suponer independientes o sólo débilmente dependientes.

2.2.6. Estimación del VaR en EVT

Para una probabilidad $\alpha > F(u)$ la estimación del VaR se calcula invirtiendo la fórmula de estimación de cola (2.15) para obtener:

² La estimación de máxima verosimilitud será tratada en detalle en la sección 2.4.

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\beta}{\xi} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (2.16)$$

En el lenguaje estadístico estándar, la expresión 2.16 se trata de una estimación de cuantiles, donde el cuantil es un parámetro desconocido de una distribución subyacente desconocida. Es posible dar un intervalo de confianza para \widehat{VaR}_α utilizando un método conocido como perfil de verosimilitud. Esto último produce un intervalo asintótico en la que tenemos confianza que se encuentra el VaR. El intervalo asimétrico refleja una asimetría fundamental en el problema de la estimación de un cuantil alto de datos de colas pesadas: es más fácil limitar el intervalo por debajo que por sobre.

2.2.7. Estimación de Expected Shortfall en EVT

Expected Shortfall está relacionado con el VaR por:

$$ES_\alpha = VaR_\alpha + E[X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha] \quad (2.17)$$

donde el segundo término no es más que la media de la distribución de exceso $F_{VaR_\alpha}(y)$ por encima del umbral VaR_α . El modelo para la distribución de exceso sobre el umbral u (2.12) tiene una propiedad de estabilidad beneficiosa. Si tomamos un umbral más alto por ejemplo el VaR_α para $\alpha > F(u)$, entonces la distribución del exceso sobre el umbral superior, también es GPD con el mismo parámetro de forma, pero con una escala diferente. Se demuestra fácilmente que una consecuencia del modelo (2.12) es que

$$F_{VaR_\alpha}(y) = G_{\xi, \beta + \xi(VaR_\alpha - u)}(y) \quad (2.18)$$

Lo importante de la ecuación anterior es que tenemos un modelo explícito simple para el exceso de pérdidas por encima del VaR. Con este modelo podemos calcular las características de muchas de las pérdidas por sobre el VaR. Señalando que (dado $\xi < 1$) la media de la distribución en (2.18) es $(\beta + \xi(VaR_\alpha - u))/(1 - \xi)$, podemos calcular Expected Shortfall. Encontramos que:

$$\frac{ES_\alpha}{VaR_\alpha} = \frac{1}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1 - \xi)VaR_\alpha} \quad (2.19)$$

Vale la pena examinar esta relación un poco más de cerca en caso de que la distribución subyacente sea infinita en el extremo derecho. En este caso la relación es determinada en gran medida por el factor $1/(1 - \xi)$. El segundo término en el lado derecho de (2.19) se convierte en insignificante en la medida que la probabilidad α se aproxima cada vez más a 1. Esta observación asintótica subraya la importancia del

parámetro de forma ξ en la estimación de la cola. Determina como nuestras dos medidas de riesgo difieren en las regiones extremas de la distribución de pérdidas.

Expected Shortfall se calcula reemplazando las estimaciones realizadas con los datos de todo lo que se desconoce en (2.19) para obtener:

$$ES_{\alpha} = \frac{VaR_{\alpha}}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (2.20)$$

2.3. Gestión Dinámica del Riesgo

La interpretación de las variables aleatorias empleadas bajo el concepto de riesgo de mercado es:

$$X_t = -(\log S_t - \log S_{t-1}) \approx (S_{t-1} - S_t)/S_{t-1} \quad (2.21)$$

representa la pérdida de un portfolio de activos negociados en el día t , donde S_t es el valor de cierre de la cartera en ese día. Es modificado el subíndice a t para enfatizar la indexación temporal del riesgo. Como puede observarse, la pérdida puede ser definida como un porcentaje o de manera logarítmica, las cuales dan resultados similares.

En el cálculo de las estimaciones diarias del VaR, hay un reconocimiento general de que el cálculo debe tomar en consideración la volatilidad de los instrumentos de mercado. Un valor extremo en un período de alta volatilidad parece menos extrema que el mismo valor en un periodo de baja volatilidad. Cualquier enfoque que incluya esto pasa a llamarse un procedimiento de medición de riesgo dinámico. A continuación nos centramos en cómo la medición dinámica de los riesgos de mercado puede ser mejorada con EVT además del riesgo de volatilidad.

La mayoría de las series de retornos del mercado muestra una estructura común. Esto sugiere que los modelos más sofisticados son necesarios y posibles, es decir, no es suficiente asumir que los datos son independientes e idénticamente distribuidos. Varios hechos estilizados de finanzas empíricas argumentan en contra de esto. Si bien la correlación de los rendimientos del mercado es baja, la correlación serial de rentabilidad absoluta o cuadrática es alta. Los retornos muestran agrupamiento de la volatilidad, en los cuales, la tendencia de valores altos es continuar con otros gran magnitud, aunque no necesariamente del mismo signo.

2.3.1. Modelos de Volatilidad Estocástica

Los modelos más populares de este fenómeno son los de volatilidad estocástica (SV), que adoptan la forma:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (2.22)$$

donde σ_t es la volatilidad del retorno en el día t y μ_t es el retorno esperado. Se considera que estos valores dependen de manera determinística de la historia de los retornos. La aleatoriedad en el modelo viene a través de las variables aleatorias Z_t , que son las variables de ruido o las innovaciones del proceso.

Suponemos que las variables de ruido Z_t son independientes de distribución idéntica desconocida $F_Z(z)$ ³. Aunque la estructura del modelo hace dependiente a X_t , suponemos que el modelo es tal que las v.a. X_t son idénticamente distribuidas con función de distribución desconocida $F_X(x)$. En el lenguaje de series de tiempo asumimos que X_t es un proceso estacionario.

Los modelos que concuerdan con este marco incluyen la familia ARCH/GARCH⁴.

2.4. Método de Máxima Verosimilitud

En estadística, la estimación por máxima verosimilitud (Maximum Likelihood Estimation MLE) es un método habitual para ajustar un modelo y encontrar sus parámetros, Alexander [7].

Se asume que se tiene una muestra x_1, x_2, \dots, x_n de n observaciones independientes extraídas de una función de distribución desconocida con función de probabilidad $f(\cdot)$. Se sabe, sin embargo, que $f(\cdot)$ pertenece a una familia de distribuciones $\{f(\cdot | \theta), \theta \in \Theta\}$, el cual corresponde al modelo paramétrico. Se desea encontrar el valor $\hat{\theta}$ (o estimador) que esté lo más próximo posible al verdadero valor θ . El método de máxima verosimilitud es una técnica para estimar los valores de θ dada una muestra finita de datos. Tanto x_i como θ pueden ser vectores.

La idea de este método es el de encontrar primero la función de densidad conjunta de todas las observaciones, que bajo condiciones de independencia es:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) \cdot f(x_2 | \theta) \cdots f(x_n | \theta) \quad (2.23)$$

³ Por convención se supone que esta distribución tiene media cero y varianza 1, de modo que σ_t se interpreta directamente como la volatilidad de X_t .

⁴ Estos modelos serán descritos con mayor detalle en el capítulo 2.7.

Para determinar el parámetro θ , se supone que los valores observados x_1, x_2, \dots, x_n son fijos mientras que θ puede variar libremente. Esta es la función de verosimilitud:

$$L(\theta|x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (2.24)$$

En la práctica es utilizado el logaritmo de esta función, el cual es conocido como logaritmo de verosimilitud:

$$l(\theta|x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log(f(x_i|\theta)) \quad (2.25)$$

Aquí se define:

$$\hat{l}(\theta|x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \log L(\theta|x_1, \dots, x_n) \quad (2.26)$$

\hat{l} estima la esperanza del logaritmo de la verosimilitud de una única observación en el modelo.

El método de la máxima verosimilitud estima $\hat{\theta}$ buscando el valor de θ que maximiza $\hat{l}(\theta|x_1, \dots, x_n)$. Este es el llamado estimador de máxima verosimilitud (MLE) de θ :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \hat{l}(\theta|x_1, \dots, x_n) \quad (2.27)$$

2.5. Gráfico Cuantil-Cuantil (Q-Q Plot)

Un gráfico Q-Q es un método gráfico para el diagnóstico de diferencias entre la distribución de probabilidad de una población de la que se ha extraído una muestra aleatoria y una distribución usada para la comparación. Una forma básica de gráfico surge cuando la distribución para la comparación es una distribución teórica. No obstante, puede usarse la misma idea para comparar las distribuciones inferidas directamente de dos conjuntos de observaciones, donde los tamaños de las muestras sean distintos.

Un ejemplo del tipo de diferencias que pueden comprobarse es la no-normalidad de la distribución de una variable en una población. Para una muestra de tamaño n , se dibujan n puntos con los $(n+1)$ -cuantiles de la distribución de comparación, por ejemplo, la distribución normal, en el eje horizontal el estadístico de k -ésimo orden, (para $k = 1, \dots, n$) de la muestra en el eje vertical. Si la distribución de la variable es la misma que la distribución de comparación se obtendrá, aproximadamente, una línea recta,

especialmente cerca de su centro. En el caso de que se den desviaciones sustanciales de la linealidad, los estadísticos rechazan la hipótesis nula de similitud.

En la figura 2.3 se muestra un Gráfico Q-Q de dos distribuciones de Poisson con $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 5$. En ella se puede apreciar que se cumple la hipótesis de similitud.

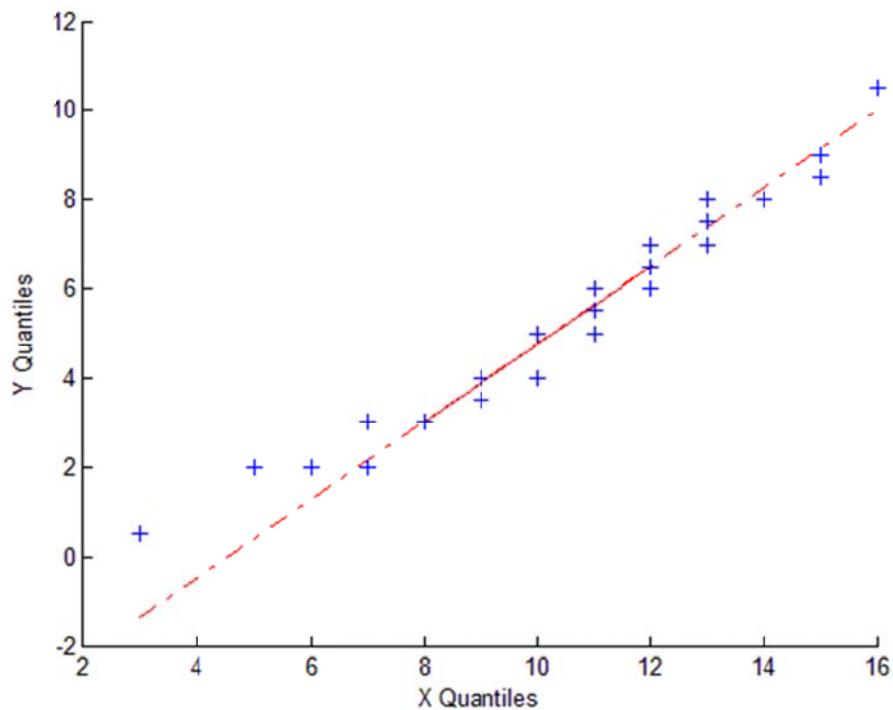


Figura 2.3: Q-Q Plot distribución de Poisson.

En figura 2.2 se muestra un Gráfico Q-Q de una distribución normal de parámetros $\mu = 3$ y $\sigma = 2$ frente a una distribución normal estándar. Nuevamente en este caso, se puede concluir que se cumple la hipótesis de similitud.

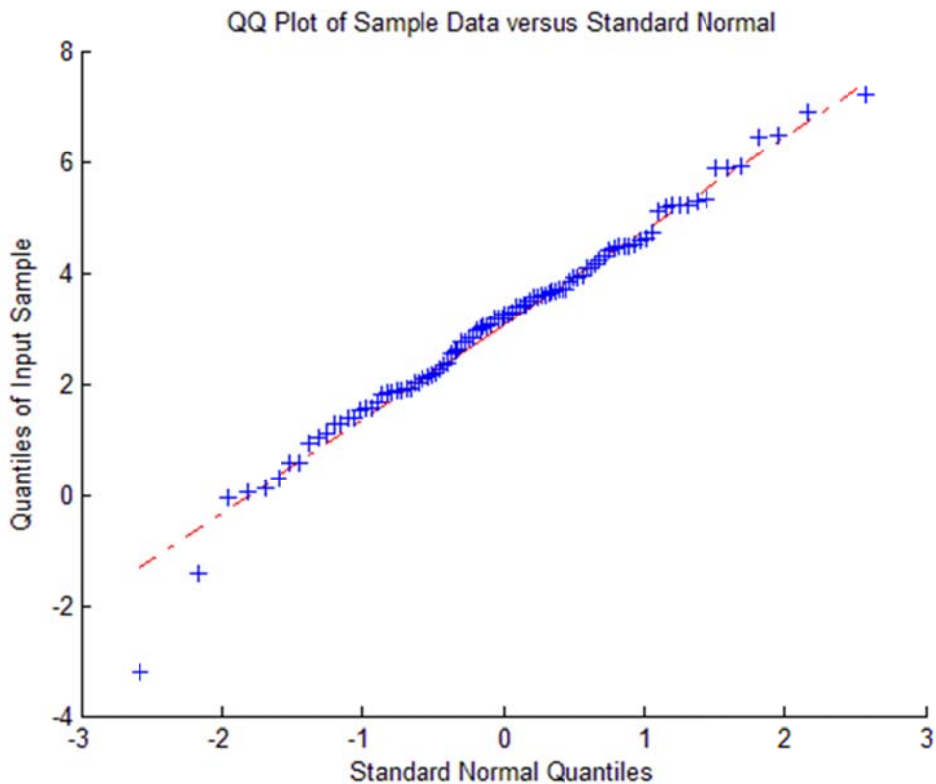


Figura 2.4: Q-Q Plot distribución Normal.

Esta herramienta será empleada con el fin de verificar que la data, en las colas, pierde similitud con la distribución normal y es requerida una distribución que simule de mejor manera colas pesadas.

2.6. Tail Index: Estimador de Hill

El parámetro que resume las características (grosor) de la cola de una distribución es el Tail Index (Índice de Cola), y existen diversos estimadores para este estadístico. Hill [5] y Johnson [6], proponen que el Tail Index se defina por:

$$\hat{\alpha}_H = \left[\frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \log x_i - \log x_{M+1} \right]^{-1} \quad (2.28)$$

Donde $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_M \geq \dots \geq x_n$ son los estadísticos de orden y M es el índice de umbral, según el cual los $x_i \geq x_M$ son utilizados en la estimación del Tail Index. No existe una forma analítica que resuelva el problema de cómo escoger M óptimamente,

sin embargo existe una alternativa que sigue un procedimiento heurístico, y que consiste en computar un conjunto de $\hat{\alpha}_H$ para diferentes índices de umbral, proponiendo escoger M de la región sobre la cual el parámetro $\hat{\alpha}_H$ presenta relativa estabilidad.

La figura 2.3 presenta el estimador de Hill $\hat{\alpha}_H$ aplicado a una serie de retornos accionarios (Índice Selectivo de Precio de Acciones de Chile IPSA) con datos diarios considerados desde el 10 de Enero de 2003.

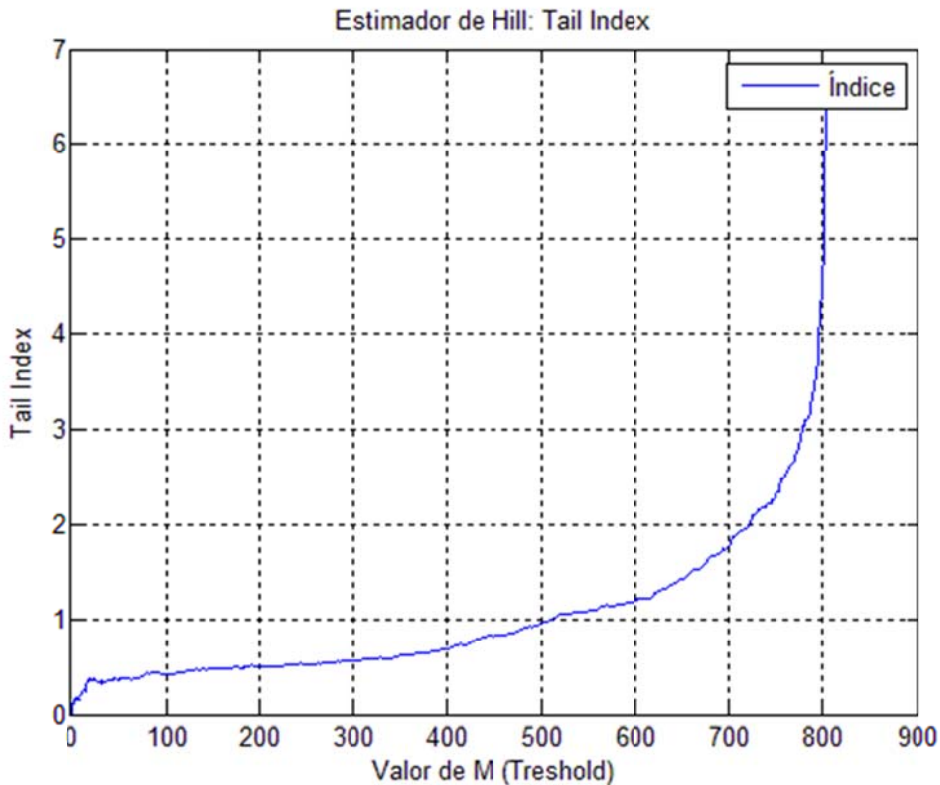


Figura 2.5: Estimador de Hill para retornos del IPSA.

En este ejemplo se escogió un $M = 300$, debido a que en aquel orden el estimador es relativamente constante. El coeficiente de Hill para $M = 300$ es $\hat{\alpha}_H = 0,5553$.

2.7. Modelos Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada (GARCH)

Los modelos de media móvil se basan en el supuesto de que los retornos son independientes e idénticamente distribuidos (I.i.d.), Alexander [7]. Así que los supuestos

de la volatilidad y correlación que se hacen de estos modelos son simplemente iguales a las estimaciones actuales. Es de conocimiento general que una distribución de datos i.i.d. es un supuesto muy poco realista. La volatilidad de los retornos de los activos cambia con el tiempo, con períodos en que la volatilidad es excepcionalmente alta, intercalados con etapas en que la volatilidad es inusualmente baja. Este comportamiento de la volatilidad del conjunto dependerá de la frecuencia de los datos, difícilmente podría ocurrir en los datos anuales y no es muy evidente en los datos mensuales, lo cual normalmente es muy presente en los datos diarios e incluso más evidente en los intradiarios.

Los modelos GARCH fueron introducidos por Engle (1982) y Bollerslev (1986). Están diseñados específicamente para capturar la volatilidad del conjunto de retornos. La particularidad que presentan es que la volatilidad puede ser mayor o menor que el promedio en el corto plazo, sin embargo en la medida que el horizonte de proyección aumenta, los pronósticos convergen a la volatilidad a largo plazo. Dicho de otra manera, el modelo GARCH captura el clúster de volatilidad.

¿Por qué damos a estos modelos el nombre de Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada?

- La palabra generalizada proviene del hecho de que el enfoque se basa en la generalización realizada por Bollerslev (1986) al modelo ARCH de Engle (1982).
- El enfoque es autorregresivo porque GARCH es un modelo de series de tiempo con una forma autorregresiva (regresión en sí mismo).
- Se habla de heteroscedasticidad condicionada porque la variación temporal en la varianza condicionada es adoptada en el modelo.

Es evidente que, para entender un modelo GARCH hay que aclarar la distinción entre la varianza incondicional y la varianza condicional de una serie temporal de retornos. La varianza incondicional es la varianza de la distribución de retornos no condicionados, la cual se supone constante durante el período completo de datos considerado. Se puede considerar como la variación media de largo plazo en el período en cuestión.

La varianza condicional, por el contrario, va a cambiar en cada momento, ya que depende de la historia de los retornos hasta ese momento. Es decir, representan las propiedades dinámicas de los retornos por sobre su distribución en cualquier punto en el tiempo como condición de toda la información hasta ese momento. La distribución de un retorno en el instante t incluye toda la información hasta $t - 1$ considerándola determinística. Denotamos por conjunto de información, a la serie que contiene todas las rentabilidades pasadas hasta el instante $t - 1$, mediante I_{t-1} .

Se denota por σ_t^2 la varianza condicional en el instante t . Esta es la varianza en el instante t , condicionada a la información establecida. Es decir, asumimos que todo en

el conjunto de información no es al azar, porque se tienen observaciones. Cuando las distribuciones condicionales de los rendimientos en cada momento del tiempo son normales escribimos:

$$r_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (2.29)$$

2.7.1. El Modelo GARCH Simétrico Normal

El modelo $GARCH(1,1)$ simétrico normal es la versión plain vanilla⁵ de un modelo GARCH general. Se supone que el comportamiento dinámico de la varianza condicional viene dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.30)$$

donde $\epsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$.

La volatilidad condicionada GARCH se define como la raíz cuadrada de la varianza anualizada. La varianza y volatilidad condicional están condicionadas al set de información. La varianza condicional en diferentes puntos en el tiempo está relacionada con el proceso, por lo que no es idénticamente distribuida y tampoco independiente. Esto porque los momentos condicionales de segundo orden, es decir, las varianzas condicionales, en diferentes puntos en el tiempo están relacionados.

Una versión más generalizada de estos modelos corresponde al modelo $GARCH(p, q)$ en el cual se incluyen p y q rezagos para los shocks y varianzas respectivamente:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \quad (2.31)$$

2.7.1.1. La Ecuación de la Media Condicional

En la definición (2.30), ϵ_t denota el shock de mercado o el retorno inesperado y se asume que sigue un proceso normal condicional con valor esperado cero y con varianza condicional que varía con el tiempo. El shock de mercado se toma comúnmente como la desviación de la media ($r_t - \bar{r}$) donde r_t es el retorno en el instante t y $\bar{r} = T^{-1} \sum_{t=1}^T r_t$ es la media de la muestra. De manera más general, el shock de mercado es el error de una regresión lineal simple.

⁵ Plain Vanilla es un término empleado en finanzas para indicar que corresponde a la versión más básica y estándar dentro de las posibles variantes que existen.

De hecho, un modelo GARCH consta sólo de dos ecuaciones: una ecuación de varianza condicional, tal como (2.30) y una ecuación de media condicional, que especifica el comportamiento de los retornos. El error GARCH ϵ_t , es el proceso de error en la ecuación de media condicional. Si no se especifica la ecuación de la media condicional en el modelo, esto implica que se debe asumir que es la ecuación condicional de la media de los retornos, es decir,

$$r_t = c + \epsilon_t \quad (2.32)$$

donde c es una constante.

2.7.1.2. Volatilidad de Largo Plazo

En ausencia de los shocks de mercado la varianza determinada mediante GARCH finalmente se seteará en un valor de estado estacionario. Este es el valor $\bar{\sigma}^2$ tal que $\sigma_t^2 = \bar{\sigma}^2$ para todo t . Llamamos $\bar{\sigma}^2$ a la varianza no condicionada del modelo GARCH. Esta corresponde a un valor promedio de largo plazo de la varianza condicional. El valor teórico de la varianza GARCH de largo plazo o incondicional no es lo mismo que la varianza incondicional en un modelo de volatilidad de media móvil. El movimiento promedio de la varianza incondicional se llama varianza i.i.d., ya que se basa en asumir los retornos i.i.d. El valor teórico de la varianza no condicional en un modelo GARCH no se basa en el supuesto de retornos i.i.d. De hecho, la varianza GARCH incondicional varía en función del modelo GARCH.

La varianza de largo plazo o no condicionada se encuentra sustituyendo $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ dentro de la ecuación de varianza condicional bajo modelo GARCH. Por ejemplo, en los modelos GARCH simétrico normales usamos el hecho de que $E[\epsilon_{t-1}^2] = \sigma_{t-1}^2$ y luego reemplazando $\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^2 = \bar{\sigma}^2$ en (2.30):

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)} \quad (2.33)$$

La volatilidad no condicionada (también llamada volatilidad a largo plazo) del modelo simétrico GARCH es la raíz cuadrada anualizada de la última expresión (2.33).

Es evidente que las condiciones $\omega > 0$ y $\alpha + \beta < 1$ son necesarias para asegurar que la varianza no condicionada sea finita y positiva.

2.8. Modelos Autorregresivos de Media Móvil (ARMA)

Los procesos estacionarios pueden construirse utilizando variables independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) como bloques de construcción, Alexander [7]. El siguiente modelo corresponde a una aproximación básica para un proceso estacionario autorregresivo de primer orden, el cual se denota $AR(1)$ y se especifica por:

$$X_t = \alpha + QX_{t-1} + \epsilon_t \quad (2.34)$$

donde $\epsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$ y $|Q| < 1$. Aquí Q es llamado el coeficiente de autocorrelación de primer orden.

Un modelo más general para un proceso estacionario es una generalización del $AR(1)$ el cual corresponde a un modelo autorregresivo para el p -ésimo orden, donde $p \geq 1$. Esto se logra mediante la adición de más rezagos de X_t , de la siguiente manera:

$$X_t = \alpha + Q_1X_{t-1} + Q_2X_{t-2} + \dots + Q_pX_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.35)$$

donde $\epsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$.

Un modelo de media móvil es un modelo de series de tiempo en que el proceso puede ser representado como una suma de diferentes rezagos de un proceso i.i.d. Por ejemplo, el modelo de primer orden de media móvil, se denota modelo $MA(1)$, y está representado por:

$$X_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} \quad (2.36)$$

donde $\epsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$. Este proceso será estacionario, dado que ϕ siempre es finito.

Los modelos más generales de series de tiempo estacionarias combinan un proceso de media móvil del error con una representación autorregresiva estacionaria, los cuales se conocen como modelo autorregresivo de media móvil (ARMA), representando una serie estacionaria. El modelo ARMA de series de tiempo con p términos autorregresivos y q términos de media móvil se denota $ARMA(p, q)$, y se escribe:

$$X_t = \alpha + Q_1X_{t-1} + \dots + Q_pX_{t-p} + \epsilon_t + \phi_1\epsilon_{t-1} + \dots + \phi_q\epsilon_{t-q} \quad (2.37)$$

donde $\epsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$.

Capítulo 3:

Descripción del Modelo a Implementar

3.1. Introducción

A continuación será descrita en detalle la metodología que será implementada para desarrollar el modelo basado en la teoría de valores extremos con el fin de determinar las medidas de riesgo Value-at-Risk y Expected Shortfall.

La base teórica a la cual se hace referencia en este apartado, es detallada en el Capítulo 2: Gestión de Riesgo Financiero.

3.2. Metodología

Sea $(X_t, t \in Z)$ una serie de tiempo estrictamente estacionaria que representa el logaritmo negativo de las observaciones diarias de los retornos de cierto activo financiero. Se supone que la dinámica de X_t viene dada por:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (3.1)$$

donde las innovaciones Z_t son un proceso estricto de ruido blanco (es decir, independientes e idénticamente distribuidos) con media cero, varianza unitaria y función de distribución marginal $F_Z(z)$. Suponemos que μ_t y σ_t son medibles con respecto a I_{t-1} , la información disponible de los retornos hasta $t - 1$.

$F_X(x)$ denota la distribución marginal de X_t y $F_{X_{t+1}+\dots+X_{t+k}|I_t}(x)$ es la distribución predictiva de los retornos durante los k días siguientes, dados los retornos conocidos hasta t . Estamos interesados en la estimación de los cuantiles de las colas de estas distribuciones. Para $0 < \alpha < 1$, un cuantil incondicional es un cuantil de la distribución marginal definido por:

$$x_\alpha = \inf\{x \in R: F_X(x) \geq \alpha\} \quad (3.2)$$

y un cuantil condicional es un cuantil de la distribución predictiva de retornos sobre los siguientes k días denotado por:

$$x_\alpha^t(k) = \inf\{x \in R: F_{X_{t+1}+\dots+X_{t+k}|I_t}(x) \geq \alpha\} \quad (3.3)$$

También consideramos la medida de riesgo Expected Shortfall para la cola de una distribución. Expected Shortfall incondicional se define:

$$ES_{\alpha} = E[X|X > x_{\alpha}] \quad (3.4)$$

y ES condicional es:

$$ES_{\alpha}^t(k) = E \left[\sum_{j=1}^k X_{t+j} \mid \sum_{j=1}^k X_{t+j} > x_{\alpha}^t(k), I_t \right] \quad (3.5)$$

Nuestro interés radica en determinar los cuantiles y ES para la predicción de un paso de la distribución, que se denotan, respectivamente, por $x_{\alpha}^t(k)$ y $ES_{\alpha}^t(k)$. Donde.

$$F_{X_{t+1}|I_t}(x) = P\{\sigma_{t+1}Z_{t+1} + \mu_{t+1} \leq x | I_t\} = F_Z((x - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}) \quad (3.5)$$

Esta última medida se simplifica, con el fin de obtener el cuantil deseado, que se expresa como:

$$x_{\alpha}^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_{\alpha} \quad (3.6)$$

A la expresión 3.6, se determina ES lo cual nos entrega:

$$ES_{\alpha}^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}E[Z|Z > z_{\alpha}] \quad (3.7)$$

donde z_{α} es el cuantil α -ésimo superior de la distribución marginal de Z_t , que bajo nuestros supuestos no depende de t .

Para llevar a cabo un procedimiento de estimación de estas medidas hay que elegir un proceso específico para la determinación de los parámetros de (3.1), es decir, un modelo particular para la dinámica de la media y volatilidad condicional. Existen diversos modelos para la dinámica de la volatilidad que se han propuesto en la literatura econométrica incluidos los modelos de la familia ARCH/GARCH, procesos HARARCH y los modelos de volatilidad estocástica. En este trabajo se utiliza el modelo GARCH (1,1) para la volatilidad y un AR (1) para modelar la dinámica de la media condicional. Se aplican estos modelos debido a que resultan simples de implementar, reduciendo en gran medida el costo computacional. El enfoque que es propuesto se extiende fácilmente a modelos más complejos, los cuales no son aplicados debido a que no presentan una mejoría sustancial en el método, además de que la estimación de la cola de la distribución concentra el enfoque este trabajo.

En la estimación de x_{α}^t con los modelos tipo GARCH, se suele suponer que la distribución de la innovación es una normal estándar, de modo que un cuantil de la distribución de la innovación es simplemente $z_{\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha)$, donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una normal estándar. Un modelo tipo GARCH con innovaciones normales puede ser ajustado por el método de máxima verosimilitud (ML). Por otro lado, μ_{t+1} y σ_{t+1} pueden estimarse utilizando el pronóstico de un paso, de modo que una

estimación de x_α^t se construye fácilmente con (3.6). Esto es similar a lo propuesto por Risk Metrics [12], sin embargo, la evidencia empírica muestra que bajo este enfoque a menudo se subestima el cuantil condicional para $\alpha > 0,95$. En efecto, la distribución de las innovaciones en general, parece ser más pesada en las colas o más leptocúrtica⁶ que la normal.

El método propuesto hace un mínimo de supuestos acerca de la distribución subyacente de innovación y se centra en modelar la cola usando la Teoría de Valores Extremos. El enfoque implementado se resume en las siguientes dos etapas:

1. Ajustar el modelo GARCH a los datos de los retornos sin hacer ninguna suposición sobre $F_Z(z)$ y haciendo uso de un método de pseudo máxima verosimilitud (PML)⁷. Se estima μ_{t+1} y σ_{t+1} mediante el modelo GARCH ajustado y se calculan los residuos del modelo implícito.
2. Considerar los residuos como una realización de un proceso estricto de ruido blanco y utilizar la teoría de valores extremos para modelar la cola de $F_Z(z)$. Se emplea el modelo EVT para estimar z_α con $\alpha > 0,95$.

En las siguientes secciones será descrito con más detalle esta metodología.

3.2.1. Estimación de μ_{t+1} y σ_{t+1}

Con el fin de predecir los parámetros, se fija un número n constante de rezagos, de modo que en el día t nuestros datos consisten en los n últimos logaritmos negativos de los retornos $(x_{t-n+1}, \dots, x_{t-1}, x_t)$. Consideramos que estas son realizaciones de un proceso AR(1)-GARCH(1,1). Por lo tanto, la varianza condicional de la serie ajustada a la media $\epsilon_t = X_t - \mu_t$ está dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (3.8)$$

donde $\omega > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. La media condicional es:

$$\mu_t = \phi x_{t-1} \quad (3.9)$$

La serie ajustada a la media (ϵ_t) es estrictamente estacionaria si:

⁶ Una curva leptocúrtica presenta una distribución más apuntada, con una elevación superior a la curva normal.

⁷ Se llama Pseudo Máxima Verosimilitud debido a que se asumen que se cumplen las condiciones de independencia de las variables aleatorias.

$$\alpha + \beta < 1 \quad (3.10)$$

Lo cual representa la condición (2.33). Esto además asegura que la distribución marginal $F_X(x)$ tiene un segundo momento finito.

Este modelo es ajustado usando el método de Pseudo Máxima Verosimilitud. Esto significa que la verosimilitud de un modelo GARCH (1,1) con innovaciones normales se maximiza para obtener estimaciones de los parámetros $\hat{\theta} = (\hat{\phi}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})^T$. Esto equivale a ajustar un modelo con una hipótesis de distribución que no necesariamente se cumple, el método de PML ofrece estimaciones razonables de los parámetros.

Las estimaciones de la serie de media condicional y desviación estándar $(\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t)$ y $(\hat{\sigma}_{t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_t)$ pueden ser calculadas de forma recursiva a partir de (3.8) y (3.9) después de sustituir valores razonables de partida.

Los residuales se calculan tanto para comprobar que los modelos GARCH se adecúan como para utilizar en la segunda etapa del método. Estos se calculan como:

$$(z_{t-n+1}, \dots, z_t) = \left(\frac{x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \quad (3.11)$$

Los residuales deberían ser i.i.d. de manera que el modelo sea sostenible.

Si estamos satisfechos con el modelo ajustado, terminamos la etapa 1 mediante el cálculo de las estimaciones de la media y varianza condicionales para el día $t + 1$, que corresponden a las predicciones de un paso:

$$\hat{\mu}_{t+1} = \hat{\phi} x_t \quad (3.12)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} \hat{\epsilon}_t^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_t^2 \quad (3.13)$$

donde $\hat{\epsilon}_t = x_t - \hat{\mu}_t$.

3.2.2. Estimación de z_α usando EVT

La segunda etapa del proceso busca determinar z_α . Para ello se realiza un gráfico cuantil-cuantil de los residuales contra la distribución normal, de manera de confirmar que el supuesto de normalidad condicional no es realista, y que el proceso de innovación tiene colas pesadas o leptocúrtica.

A continuación se fija u que corresponde al umbral y suponemos que el exceso de los residuales por sobre este umbral tiene una distribución generalizada de Pareto con función de distribución:

$$G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Asumimos que la cola de la distribución subyacente comienza en el umbral u . De la muestra de n puntos un número aleatorio $N_u > 0$, superará este umbral. Si suponemos que los excesos N_u por encima del umbral son i.i.d. con distribución GPD, tendremos que las estimaciones de máxima verosimilitud $\hat{\xi}_{N_u}$ y $\hat{\beta}_{N_u}$ de los parámetros ξ y β son consistentes y asintóticamente normales en la medida que $N_u \rightarrow \infty$, y dado que $\xi > -1/2$. En términos prácticos, esto significa que nuestro mejor estimador de la distribución de exceso se obtiene mediante un trade-off entre sesgo y varianza. Elegimos u alto para reducir la posibilidad de sesgo, mientras que se mantiene N_u grande (es decir, u baja) para controlar la varianza de la estimación de parámetros.

El estimador de Máxima Verosimilitud para los parámetros ξ y β , se muestra en la siguiente ecuación:

$$\hat{l}(\xi, \beta | x) = \sum_{i=1}^{N_u} \log(g_{\xi, \beta}(x_i)) = -N_u \log \beta + (\xi^{-1} - 1) \sum_{i=1}^{N_u} \log(1 - \xi x_i / \beta) \quad (3.15)$$

de aquí se obtienen los parámetros de la GPD $\hat{\xi}_{N_u}$ y $\hat{\beta}_{N_u}$.

En la práctica, el procedimiento se modificará ligeramente, donde el número de datos en la cola será fijo, digamos $k = N_u$, donde $k \ll n$. Esto efectivamente nos da un límite aleatorio en el $(k+1)$ -ésimo orden del estadístico. Sean $z_{(1)} \geq z_{(2)} \geq \dots \geq z_{(n)}$, que representan los residuales ordenados. Los parámetros de la distribución generalizada de Pareto ξ y β son ajustados a los datos $(z_{(1)} - z_{(k+1)}, \dots, z_{(k)} - z_{(k+1)})$, que corresponden a los excesos por encima del umbral para todos los residuales que superan u . La forma del estimador de cola para $F_Z(z)$ es entonces:

$$\hat{F}_Z(z) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \hat{\xi}_k \frac{z - z_{(k+1)}}{\hat{\beta}_k} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_k}} \quad (3.16)$$

Para $\alpha > 1 - k/n$ podemos invertir esta fórmula de la cola para obtener:

$$\hat{z}_\alpha = z_{(k+1)} + \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\xi}_k} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}_k} - 1 \right) \quad (3.17)$$

A partir de la expresión (3.6), realizamos el cálculo del VaR e introducimos la ecuación (3.17) para obtener:

$$\widehat{VaR}_\alpha^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \left(z_{(k+1)} + \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\xi}_k} \left(\left(\frac{1-\alpha}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}_k} - 1 \right) \right) \quad (3.18)$$

Para la obtención de Expected Shortfall unimos las ecuaciones (2.20) y (3.18) para obtener:

$$\widehat{ES}_\alpha^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \hat{z}_\alpha \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}_k} + \frac{\hat{\beta}_k - \hat{\xi}_k z_{(k+1)}}{(1-\hat{\xi}_k) \hat{z}_\alpha} \right) \quad (3.19)$$

Estas dos últimas expresiones (3.18) y (3.19) nos permitirán realizar las estimaciones de VaR y ES empleando la teoría de valores extremos para un horizonte diario.

Para la estimación mediante el modelo Normal las expresiones del VaR y ES son, Fera y Oliver [11]:

$$\widehat{VaR}_\alpha^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} N^{-1}(\alpha) \quad (3.20)$$

$$\widehat{ES}_\alpha^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \cdot \frac{\exp\left(\frac{(N^{-1}(1-\alpha))^2}{2}\right)}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \quad (3.21)$$

donde $N^{-1}(\alpha)$, corresponde al α percentil de una distribución normal estándar $N(0,1)$.

3.2.3. Backtesting

Para realizar un Backtest del método en una serie histórica x_1, \dots, x_m , donde $m \gg n$, calculamos \hat{x}_α^t para los días t pertenecientes al conjunto $T = \{n, \dots, m-1\}$ utilizando una ventana de tiempo de n días cada vez. En cada día $t \in T$ debemos ajustar un nuevo AR(1)-GARCH(1,1) y determinar una nueva estimación de la GPD.

Posterior a esto, se realiza la comparación \hat{x}_α^t con x_{t+1} para $\alpha \in \{0.95, 0.99\}$. Una excepción se dice que ocurre cada vez que $\hat{x}_\alpha^t < x_{t+1}$.

Capítulo 4:

Estimación de las Mediciones de Riesgo

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de las mediciones de riesgo con datos reales, lo cual tiene por objetivo entregar un cuadro cualitativo y cuantitativo del comportamiento del modelo desarrollado con el fin de verificar la posible aplicación de este.

En primer lugar se explicita la interfaz desarrollada en Matlab, la cual será empleada para realizar la cuantificación del modelo propuesto. A partir del programa, se pueden obtener las mediciones de riesgo deseadas en conjunto con estadísticos que permiten realizar un análisis tanto de la data ingresada como de los resultados obtenidos. En las secciones posteriores de este capítulo, se muestran los resultados del modelo implementado. Para ello, se detalla la representatividad que busca incluir la data elegida, con el fin de señalar bajo qué ámbitos es testeado el desarrollo. Finalmente dentro del proceso de análisis, se realiza un Backtest del modelo para verificar que cumpla con lo propuesto.

4.2. Modelo de Medidas de Riesgo en Matlab

La interfaz final que realizará la estimación fue desarrollada a partir de la plataforma Matlab. La selección de Matlab se debe a que presenta ciertas facilidades de programación en conjunto con una gran cantidad de herramientas que permiten un desarrollo más simple.

A partir de esto, se ha podido realizar una interfaz lo suficientemente genérica, de tal forma que los parámetros requeridos son la serie de datos característica del índice, sin ningún tipo de pre-proceso, es decir, se debe entregar el precio del índice elegido para cada día y las fechas respectivas de cada valor. Además la interfaz solicitará el ingreso del tamaño de la ventana con la que será calibrado el modelo (n), la cantidad de datos pertenecientes a la cola que serán modelados mediante la teoría de valores extremos (M), el nivel de confianza que se busca de la estimación (α) y el número de días que se desea predecir (m).

Dentro de los resultados que entrega la interfaz destacan las gráficas de los retornos, la correlación entre los datos, los diagramas cuantil cuantil que señalan la desviación en

las colas respecto de una distribución normal junto con el estimador de Hill. Finalmente muestra el desarrollo de las medidas de riesgo involucradas en el análisis junto con los retornos de manera de apreciar el comportamiento dinámico de las predicciones de pérdidas.

En la figura 4.1 se muestra la interfaz de usuario desplegada en Matlab.

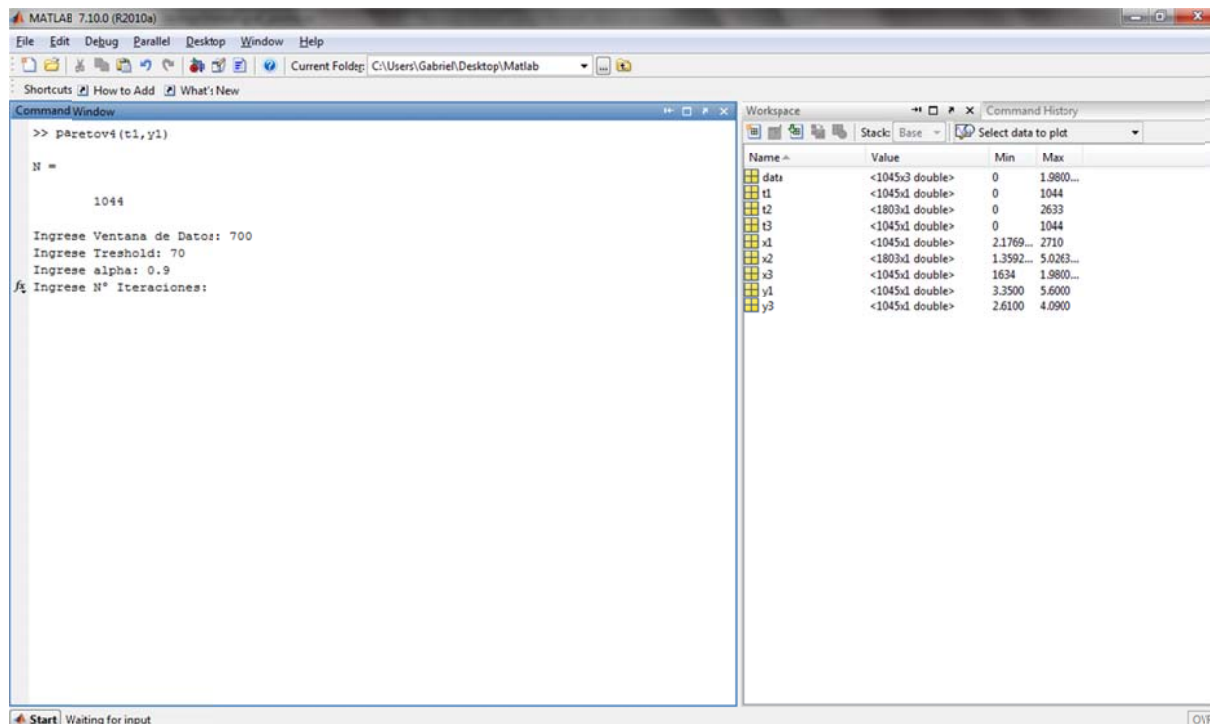


Figura 4.1: Interfaz de Matlab.

4.3. Análisis de Índices LVA

Los datos seleccionados para realizar este desarrollo corresponden a índices entregados por LVA Índices⁸. Esta empresa se dedica a la emisión de diversos índices financieros del mercado chileno. Los beneficios de contar con un índice que describa cabalmente el mercado de deuda chileno son evidentes para todos los partícipes de éste.

En mercados desarrollados la utilización de un índice como benchmark, es reconocida como indispensable por parte de los administradores de carteras de inversión en instrumentos de deuda.

⁸Más información disponible en <https://www.lvaindices.com/home.asp>

Los índices LVA se construyen en torno a dos principios fundamentales: son índices replicables y de mercado.

Como garantía de objetividad, es fundamental que los cálculos de un índice sean reproducibles por un tercero. Esto tiene varias implicancias, entre ellas:

- Las fórmulas utilizadas deben ser publicadas.
- Todos los criterios para la inclusión o exclusión de instrumentos deben ser objetivos, sin ningún tipo de discrecionalidad, y deben ser públicos.
- Las fuentes de datos deben ser accesibles a terceros (bien sean públicas o pagadas.)
- No hacer ningún tipo de aproximación en los cálculos tanto de los índices como de sus estadísticos (duración, convexidad, etc.)

Los índices LVA buscan cubrir el universo de todos los instrumentos de renta fija emitidos localmente en Chile, lo que excluye todas las emisiones gubernamentales o corporativas hechas en bolsas extranjeras, pero no aquellas emisiones locales que son denominadas en moneda extranjera.

Las nuevas emisiones son incorporadas al índice (y todos aquellos subíndices en que corresponda) a la fecha del primer rebalanceo posterior a su emisión.

Los principios de construcción y todas estas decisiones estructurales apuntan a hacer de estos índices una herramienta rigurosa mediante la cual sea posible estudiar el comportamiento del mercado chileno de deuda, y a su vez busca permitir su replicación por parte de administradores de cartera.

En particular, han sido seleccionados los índices:

- **LVACL**, el cual agrupa todos los bonos corporativos (empresas, bancarios, subordinados bancarios, securitizados) con clasificación de riesgo local BBB- o superior. La selección se ha realizado en base a que entrega una representatividad buscada del mercado.
- **LVACLH**: agrupa todas las letras hipotecarias en custodia en el DCV (Depósito Central de Valores).

4.3.1. Análisis de Índices LVACL

La serie obtenida de índices de bonos corporativos cuenta con datos desde el 31 de Diciembre de 2007 al 09 de Noviembre de 2010. Ellos se encuentran registrados de manera diaria sin importar si es día hábil o no. La idea central es escoger una ventana de datos los cuales servirán como calibración del modelo y los restantes serán

empleados como Backtest. Los datos utilizados para calibración serán los comprendidos entre el 1 de Enero de 2008 y el 8 de Noviembre de 2009. Esta última elección se realiza en base a que los datos restantes de la muestra corresponden a un año comprendido entre el 9 de Noviembre de 2009 y el 8 de Noviembre de 2010. Esto último nos facilita la aplicación de las metodologías de Backtest estándar. A su vez para este índice será realizado un análisis en dólares (USD), dejando de lado los valores en pesos (CLP) y UF (CLF) ya que la volatilidad de estos índices es baja impidiendo un modelamiento para el cual sea necesaria la aplicación de la teoría de valores extremos. La distribución de retornos normalizados se muestra en la figura 4.2:

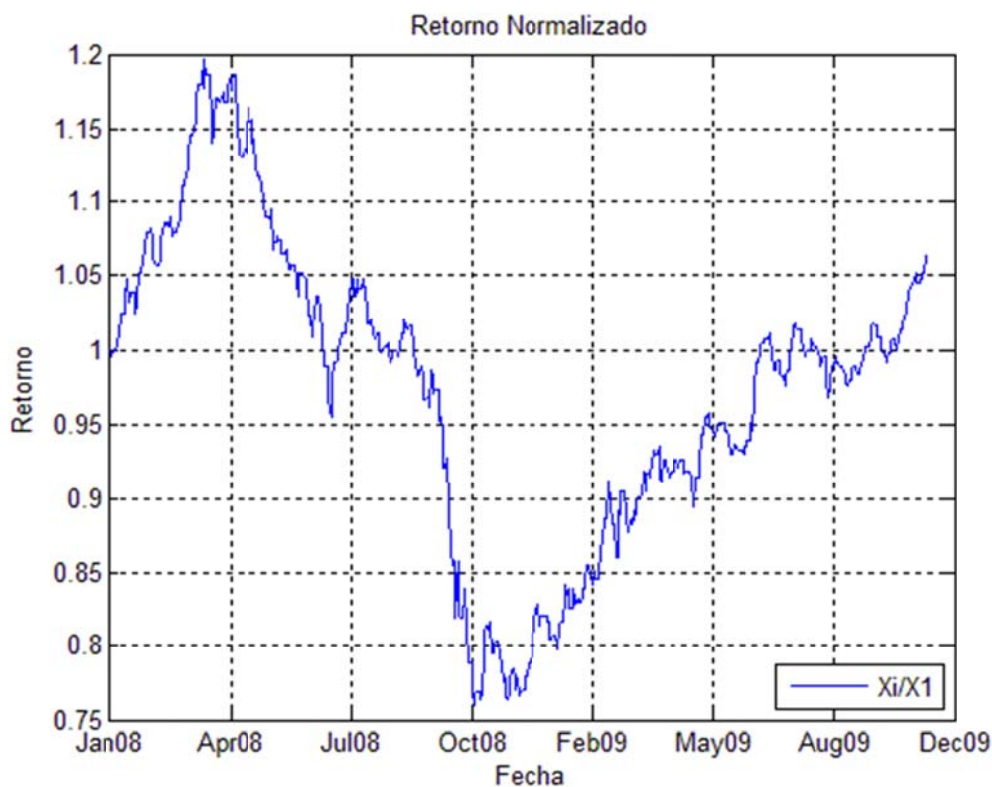


Figura 4.2: Retorno Normalizado Índice LVACL en USD.

A continuación, con el fin de desarrollar el modelo, se procede a convertir los precios de cierre al logaritmo de los retornos, es decir, se determina el PnL de la serie. Esto último se muestra en la figura 4.3.

Además en la figura 4.4 se muestra el histograma del Logaritmo de los Retornos con el fin de visualizar los eventos aislados de pérdidas dentro de la distribución. A partir de esto, se observa que pérdidas de mayor volumen son posibles.

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,1078 \cdot x_t$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = 1,5154 \cdot 10^{-6} + 0,0613 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,9162 \cdot \hat{\sigma}_t^2$$

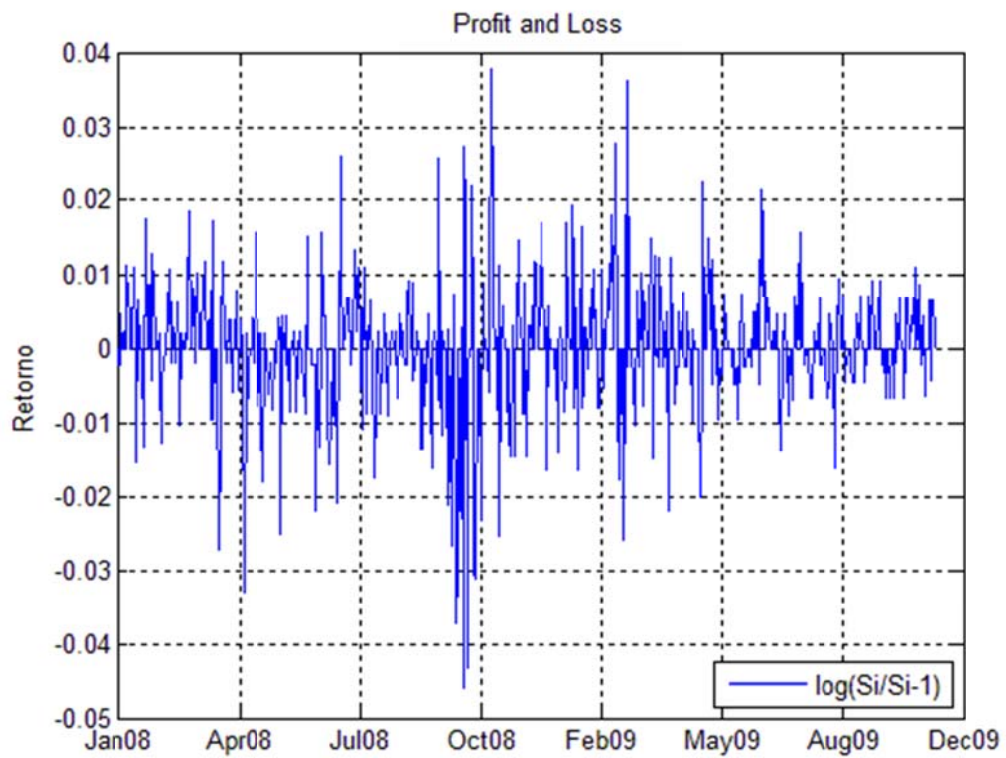


Figura 4.3: Logaritmo de los Retornos Índice LVACL en USD.

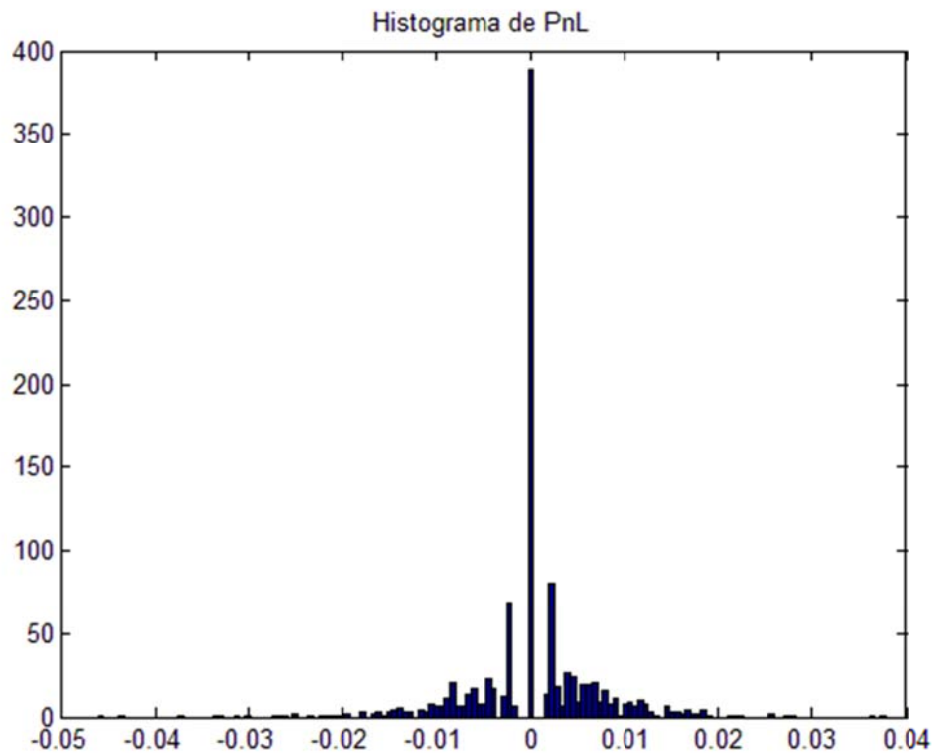


Figura 4.4: Histograma del Logaritmo de Retornos Índice LVACL en USD.

Se inicia el procedimiento determinando el modelo AR(1)-GARCH(1,1) de los retornos de la muestra. En la figura 4.5 se muestra gráficamente la volatilidad obtenida bajo estos modelos comparándola con la serie de los logaritmos de los retornos.

Además, el modelo AR(1)-GARCH(1,1) obtenido es:

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,1078 \cdot x_t \quad (4.1)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = 1,5154 \cdot 10^{-6} + 0,0613 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,9162 \cdot \hat{\sigma}_t^2 \quad (4.2)$$

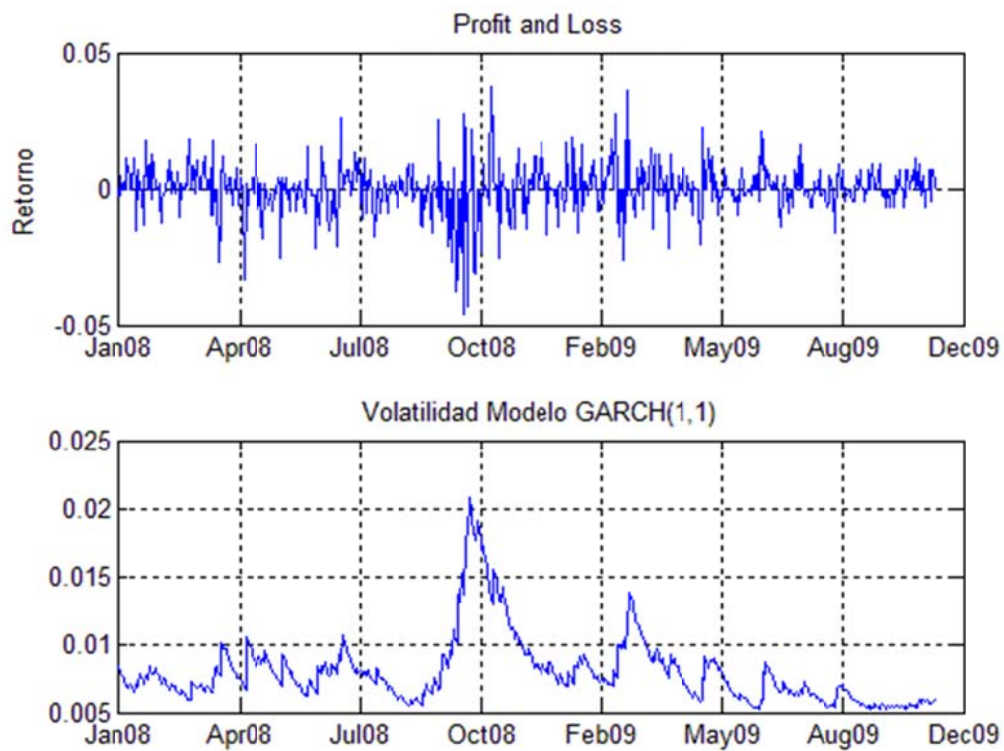


Figura 4.5: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) Índice LVACL en USD.

En la figura 4.5 se observa que el modelamiento para el Índice LVACL en USD a través de un modelo GARCH(1,1), realiza el seguimiento de la volatilidad mostrándose un aumento considerable de ésta en los periodos de volatilidad más alta, que corresponden a la crisis del 2008.

En la figura 4.6 se pueden apreciar las pérdidas dentro del periodo de calibración.

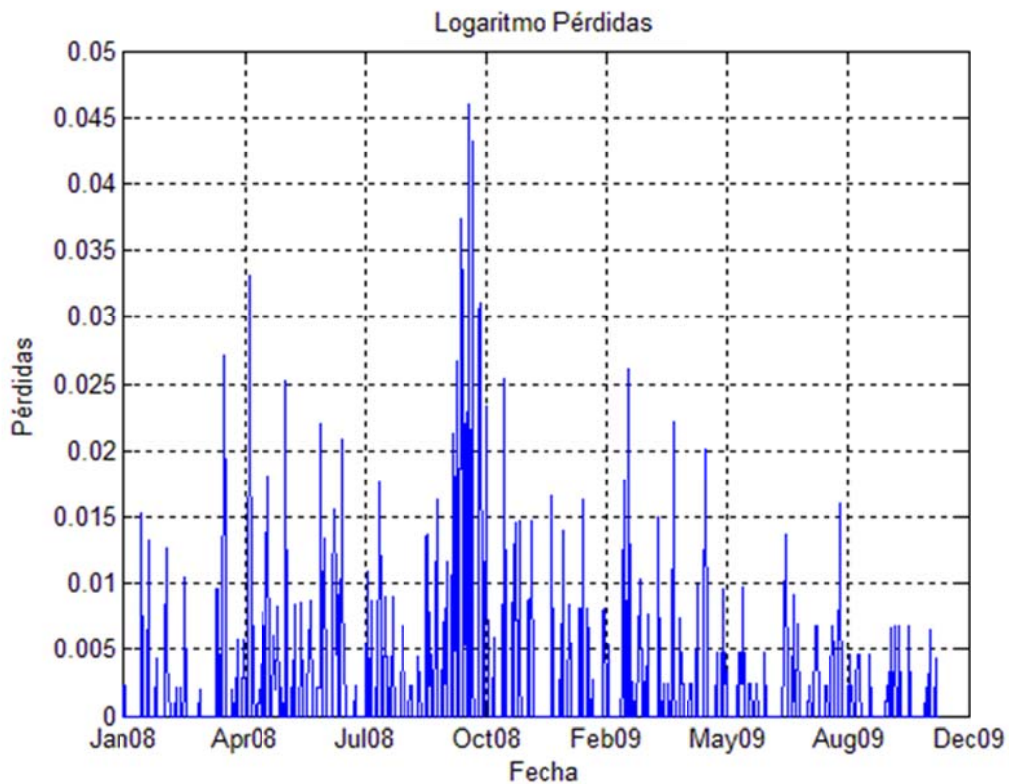


Figura 4.6: Pérdidas Índice LVACLIC en USD.

Para modelar las colas de la distribución empleando la GPD, se requiere que las observaciones sean i.i.d. Sin embargo la mayor parte de los retornos financieros posee cierto grado de correlación y heteroscedasticidad. A continuación, en la figura 4.7, se muestra la función de autocorrelación (ACF) del logaritmo de los retornos y del valor absoluto del logaritmo de los retornos. Para el primer caso, se puede notar que pese a que la correlación está bajo el umbral que indica una correlación considerable, se encuentra presente de manera persistente. Sin embargo, para el valor absoluto del log de los retornos, la correlación aumenta de manera significativa independiente de los rezagos considerados.

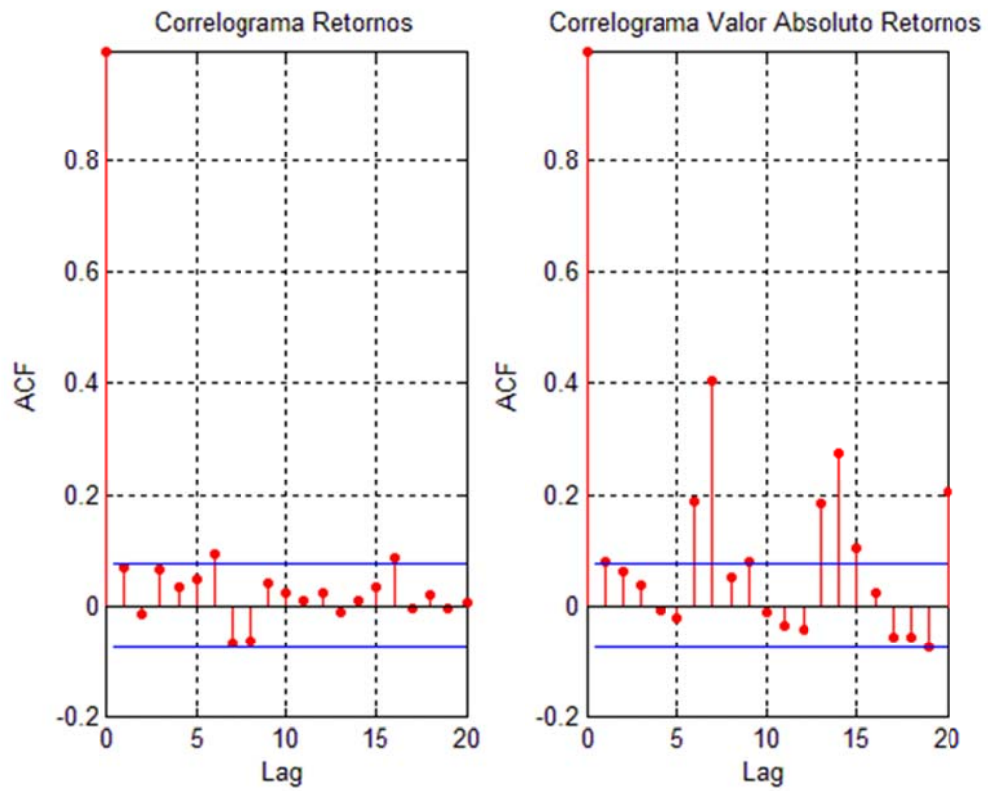


Figura 4.7: ACF Logaritmo de Retornos Índice LVACLIC en USD.

Para corroborar que estamos ante una distribución de retornos que posee colas pesadas, se realiza el gráfico cuantil-cuantil, de manera de observar que en los extremos la distribución deja de ser normal. Esto último se muestra en la figura 4.8:

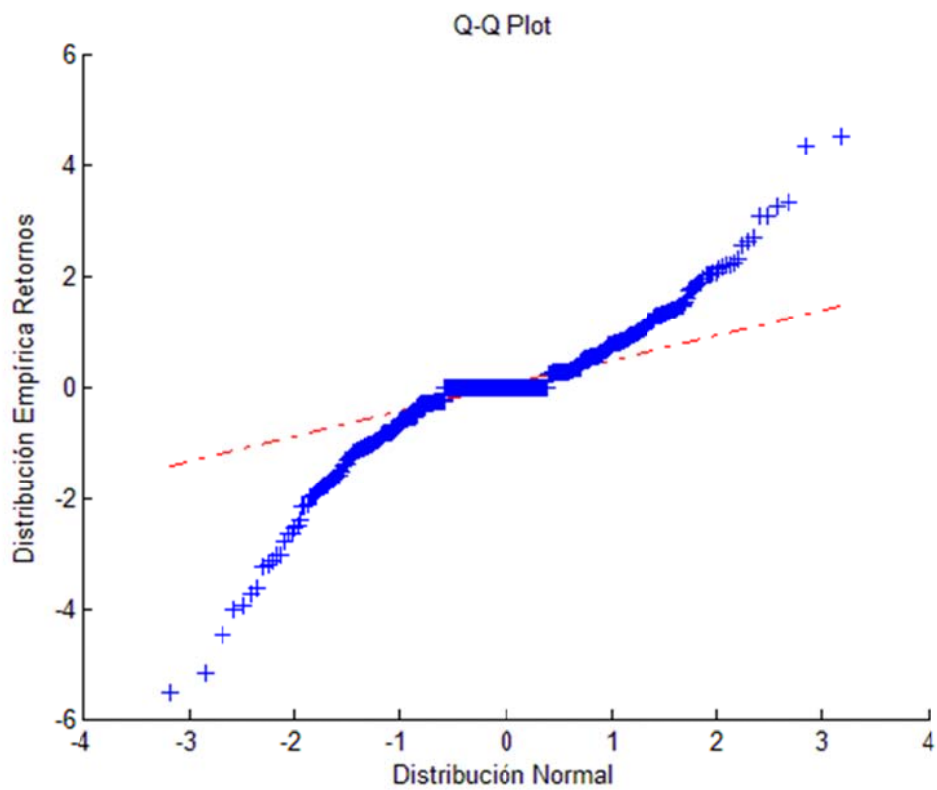


Figura 4.8: Q-Q plot para Retornos Índice LVACL en USD.

La siguiente etapa del método consiste en encontrar el umbral a partir del cual modelar las colas de la distribución. Para ello se realiza el método gráfico del estimador de Hill, el cual se muestra en la figura 4.9.

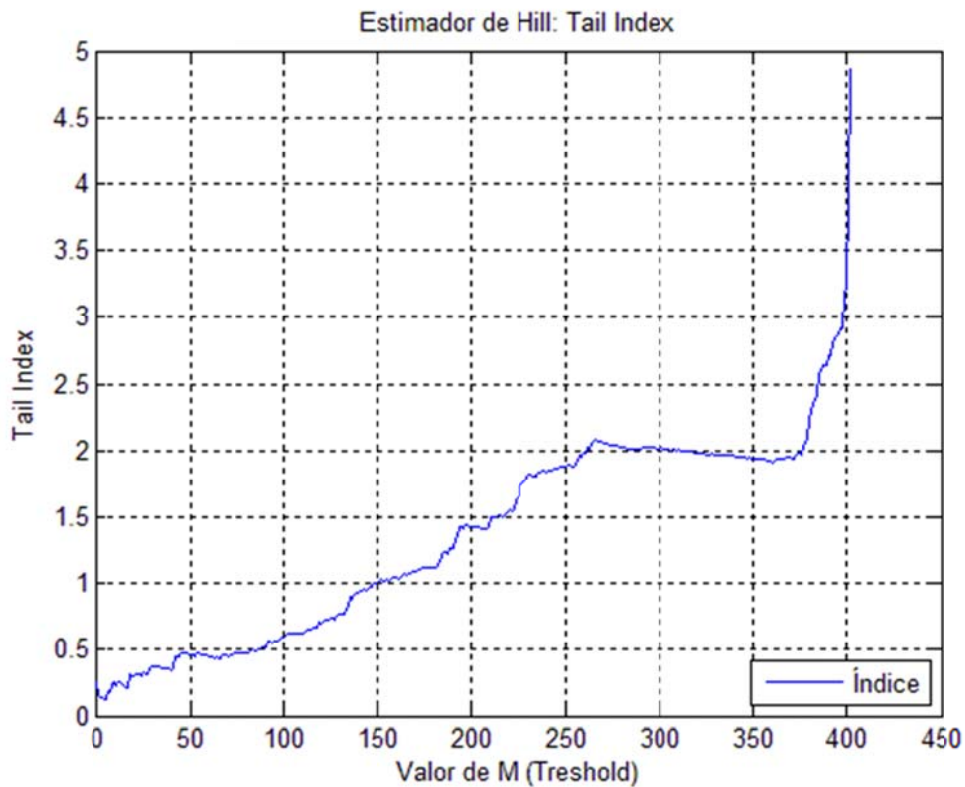


Figura 4.9: Estimador de Hill para Índice LVACLIC en USD.

A partir de la figura 4.9, podemos notar que el primer tramo que resulta aproximadamente constante se encuentra entre los valores 50 y 90 de índice. Debido a la falta de precisión en la estimación, se utiliza esta medida de manera de corroborar el intervalo en el cual se encuentra el umbral. Una forma de obtención del índice propuesta en McNeil y Frey [1], [2], es elegir un porcentaje de la ventana de calibración, el cual corresponde al 10%. Para este caso particular, el umbral estaría en el índice 67 y como se puede ver en el gráfico, este número se encuentra dentro del intervalo de estabilidad propuesto por la heurística, por lo cual se asume como válido.

A partir de la ecuación 3.11 se estiman los residuales. Luego se comprueba que no hayan perdido la condición de poseer colas pesadas. Esto se puede apreciar realizando un gráfico cuantil-cuantil nuevamente, el cual se muestra en la figura 4.10.

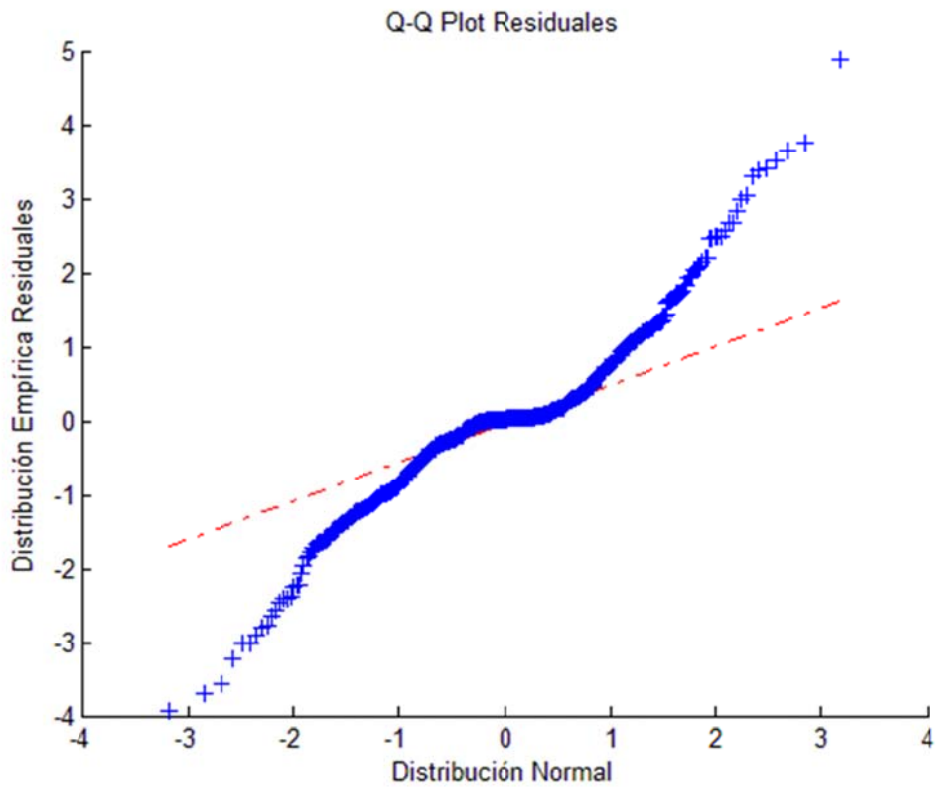


Figura 4.10: Q-Q plot para Residuales del Índice LVACLIC en USD.

Podemos ver en la figura 4.10, que los residuales, mantienen la distribución de colas pesadas. A partir de estos últimos valores procedemos a calcular la función de autocorrelación, con el fin de verificar que la data ahora es i.i.d. La función de autocorrelación de los residuales y del valor absoluto de éstos se muestra en la figura 4.11.

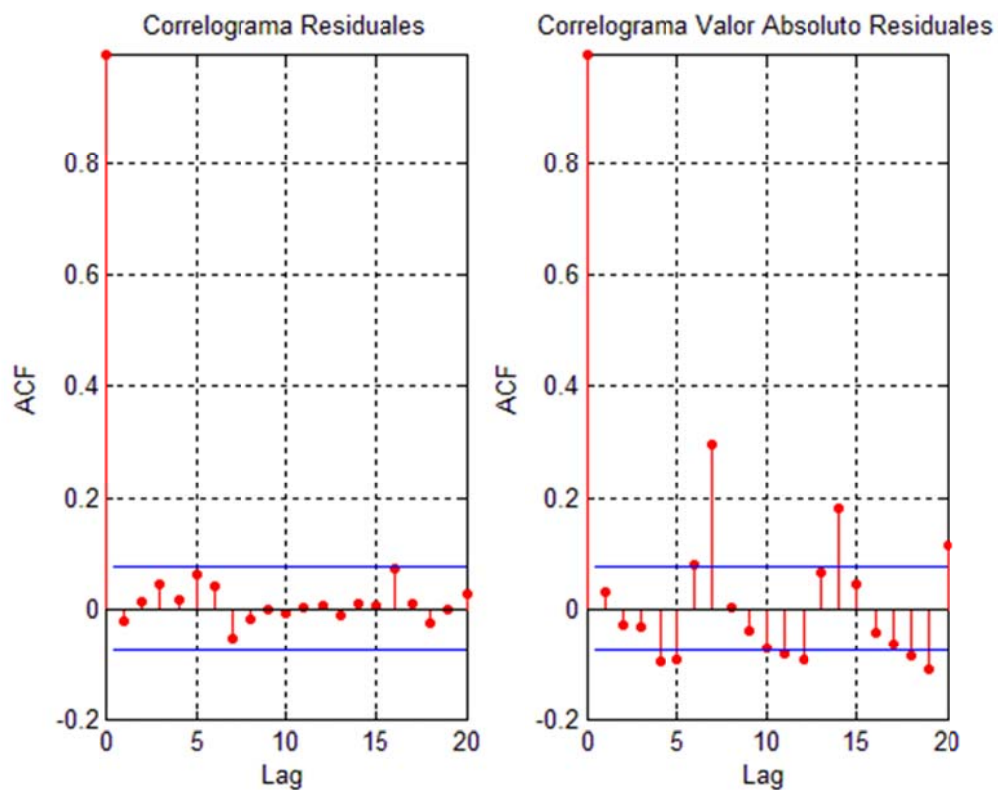


Figura 4.11: ACF de Residuales del Índice LVACLC en USD.

En la figura 4.11, se aprecia que pese a que la ACF para el valor absoluto de los residuales muestra señales de autocorrelación, para el caso en que se toman los residuales puros, se observa que son i.i.d. Gracias a esto último, podemos ajustar la distribución generalizada de Pareto a los residuales, a partir de la ecuación 3.15, la cual entrega los estimadores de los parámetros $\hat{\xi}_{67} = 0,0152$ y $\hat{\beta}_{67} = 0,7625$. El ajuste de la GPD en base a estos parámetros en conjunto con la distribución acumulada empírica de los residuales, se muestra en la figura 4.12.

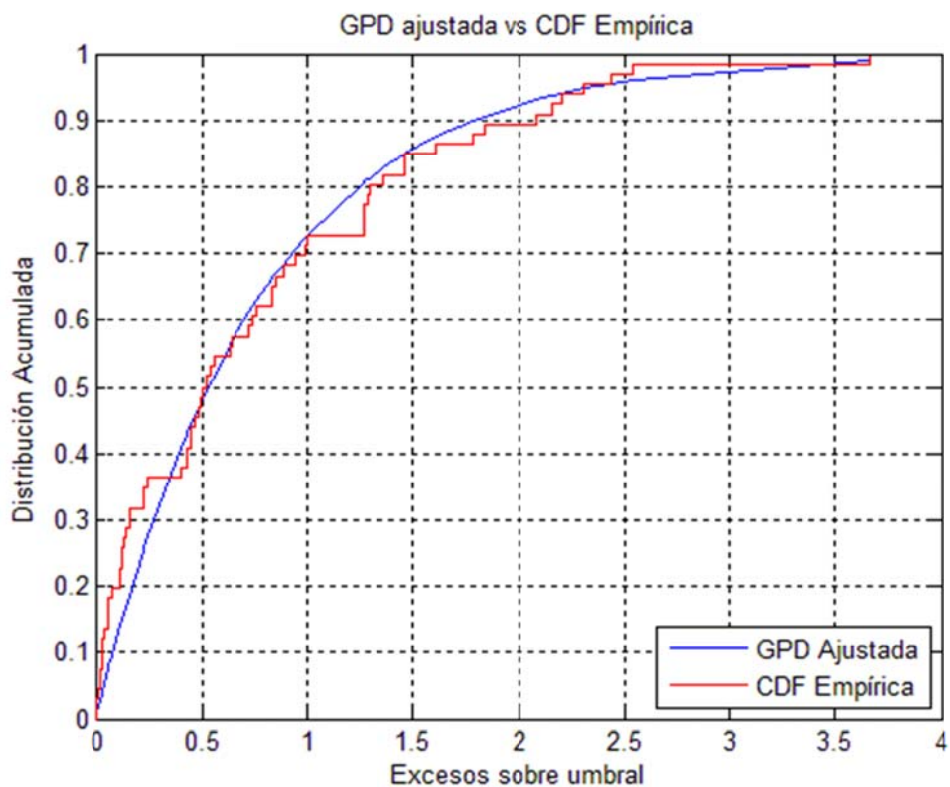


Figura 4.12: GPD Ajustada y Empírica de Residuales de Índice LVACLIC en USD.

El siguiente paso corresponde a realizar las estimaciones de VaR y EVT bajo el modelo que asume distribución normal de los retornos y el modelo EVT, de manera de contrastarlos. En las figuras 4.13 y 4.14 se muestran la distribución del PnL y medidas de riesgo al 95% y 99% de confiabilidad respectivamente, para el horizonte de prueba comprendido entre el 9 de Noviembre de 2009 y el 8 de Noviembre de 2010.

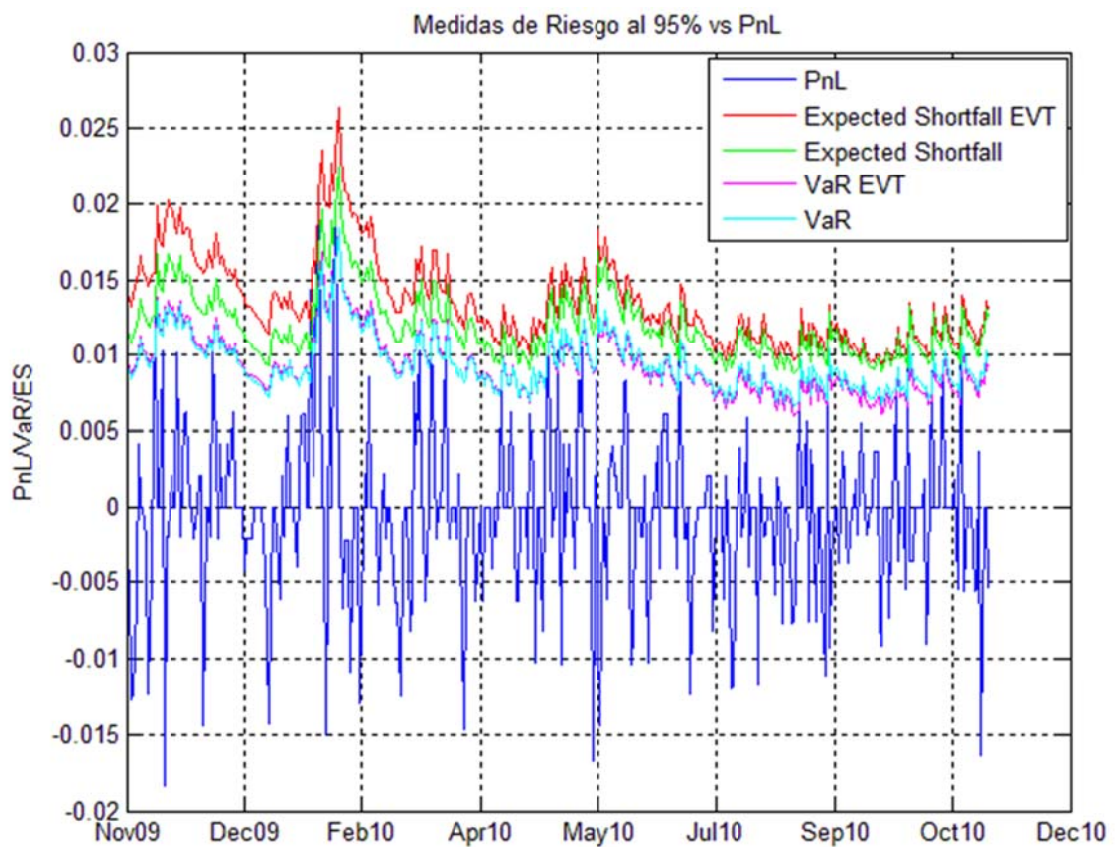


Figura 4.13: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para Índice LVACL en USD.

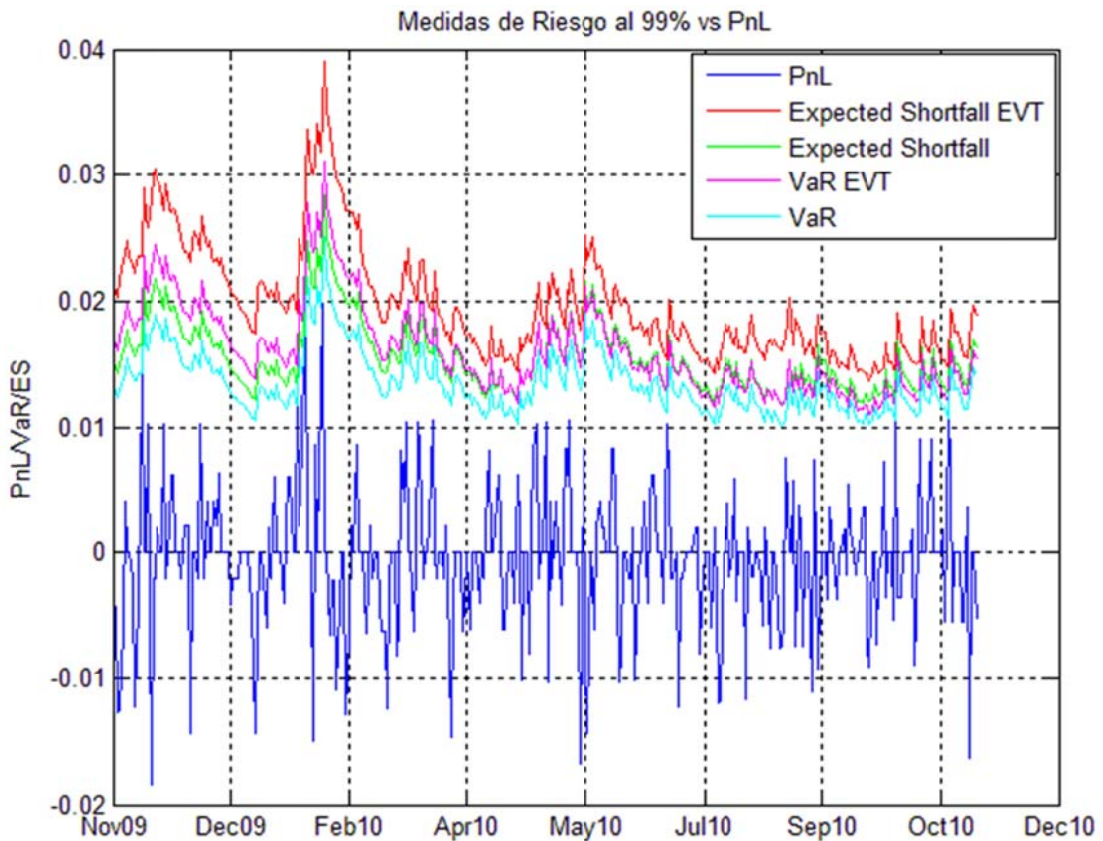


Figura 4.14: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para Índice LVACL en USD.

Para apreciar el desempeño del modelo de Expected Shortfall tanto para estimaciones que asumen normalidad en retornos como también las estimadas mediante EVT, son graficadas las excepciones al modelo. En particular son mostradas las excepciones al 95% solamente, ya que al 99% el modelo EVT no presenta y el Normal posee únicamente una. Para el caso del VaR se realiza el mismo análisis, sin embargo, para el caso en que se estima al 99%, si presenta un número significativo de excepciones por lo que se hace necesario ilustrarlo. El gráfico de excepciones para ES al 95% se muestra en la figura 4.15. Para el caso del VaR se muestran en la figura 4.16 y 4.17 para una confiabilidad del 95% y 99% respectivamente.

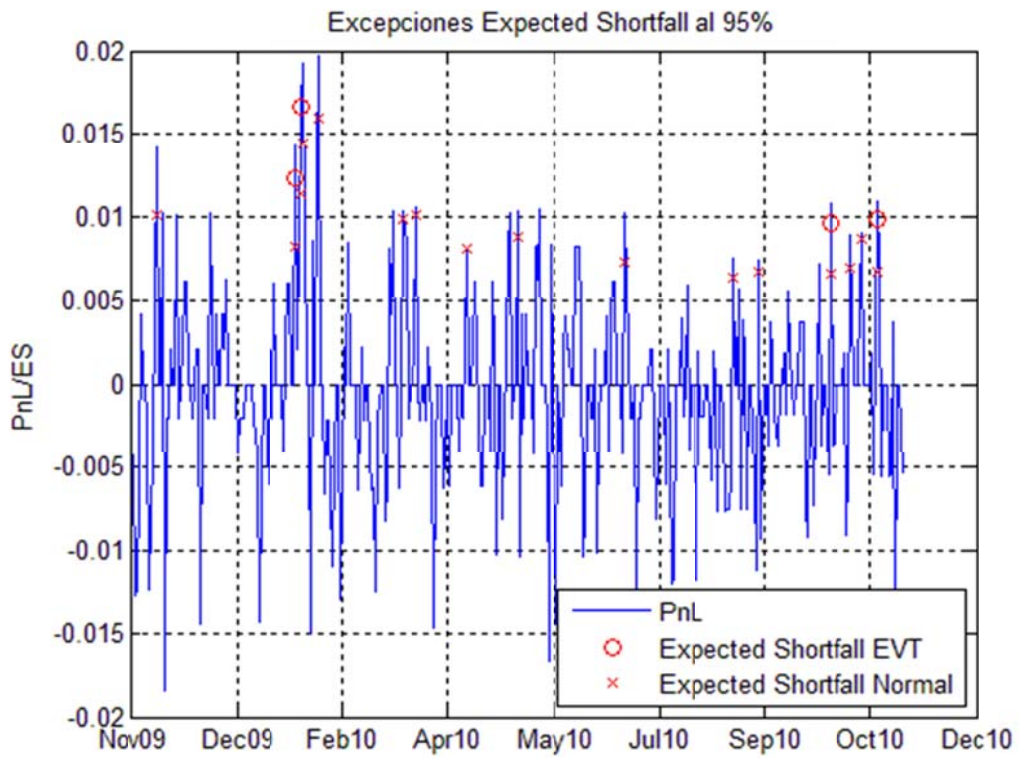


Figura 4.15: Excepciones ES al 95% Índice LVACL en USD.

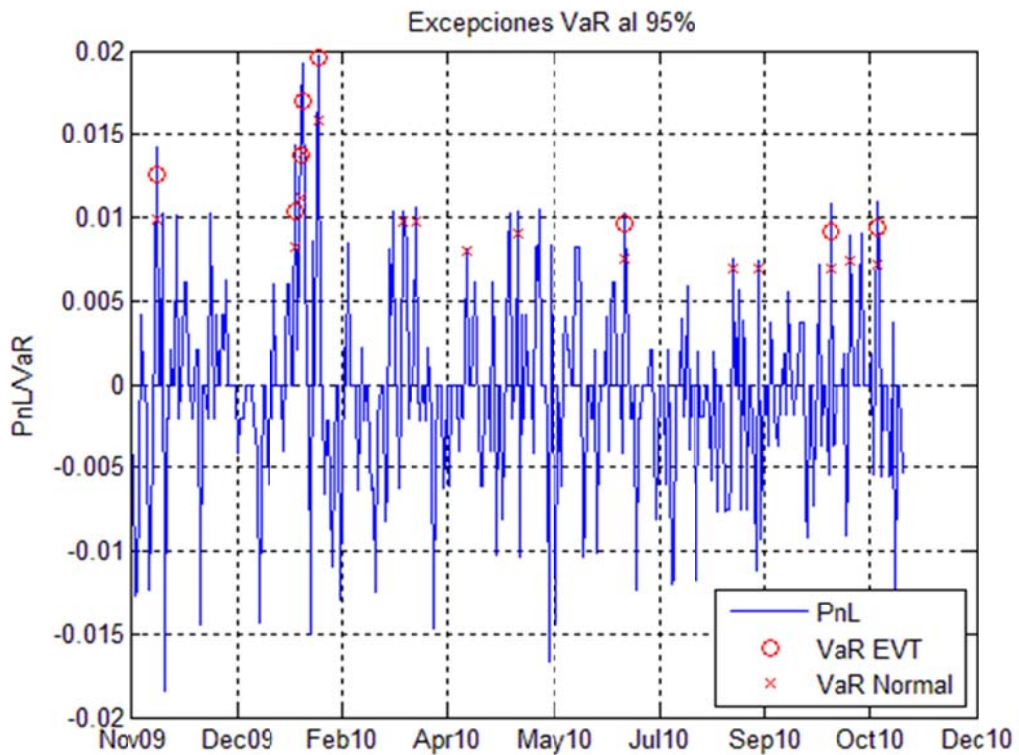


Figura 4.16: Excepciones VaR al 95% Índice LVACL en USD.

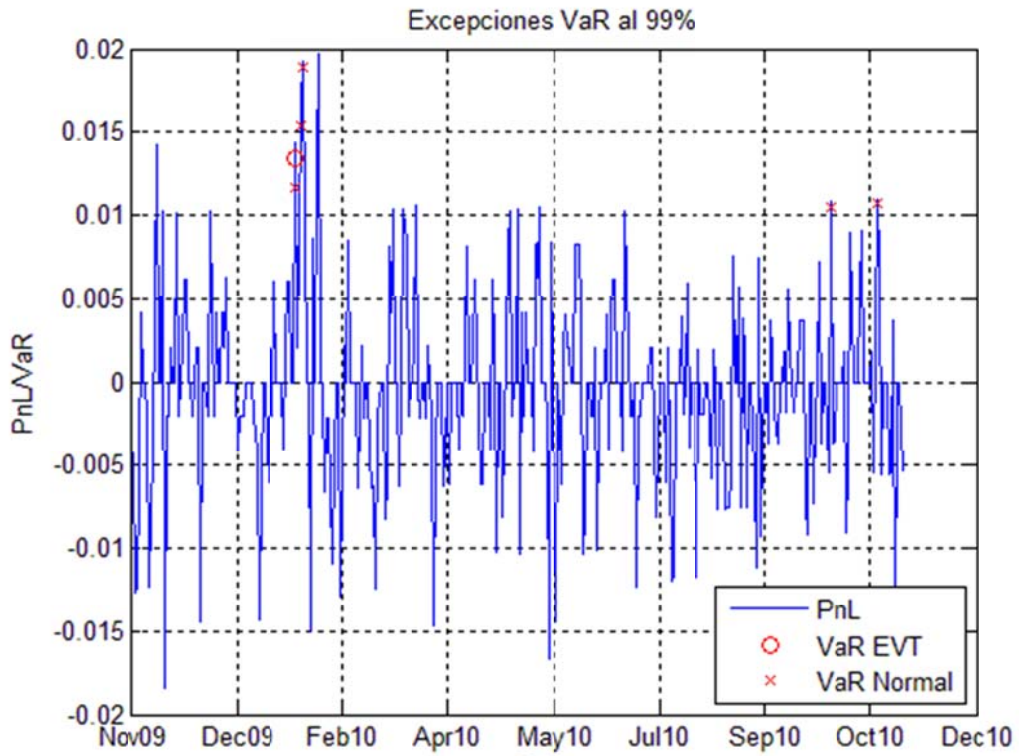


Figura 4.17: Excepciones VaR al 99% Índice LVACLIC en USD.

A continuación se muestra el parámetro de forma ξ de la GDP. Cabe destacar que este parámetro es indistinto, ya sea al 95% o 99%. Los valores obtenidos de ξ para la serie de índices se muestran en la figura 4.18.



Figura 4.18: ξ Residuales Índice LVACL en USD.

A partir de la figura 4.18, se muestra que la distribución GPD estimada presenta ciclos en que los retornos no presentan colas pesadas. Esto se puede ver en la medida que se obtienen valores negativos de ξ . Cabe destacar que esta predicción es correcta en la medida que en los periodos que decae ξ bajo cero de manera prolongada, corresponden a los tramos en que se presentan menores pérdidas y a su vez menor volatilidad. Esto último implica que las mediciones de riesgo dinámicas en base a EVT, son consistentes con la distribución de los retornos diarios.

4.3.2. Análisis de Índices LVACLH

La serie obtenida de índices de letras hipotecarias cuenta con datos desde el 31 de Diciembre de 2007 al 09 de Noviembre de 2010, sin importar si es día hábil o no (al igual que el caso anterior). Los datos comprendidos entre el 1 de Enero de 2008 y el 8 de Noviembre de 2009 serán para calibración y los restantes de test. A su vez para este índice será realizado un análisis en pesos (CLP), con el fin de reflejar otra moneda diferente al dólar⁹. La distribución de retornos normalizados se muestra en la figura 4.19.

⁹ Una moneda extranjera presenta un riesgo adicional de tipo de cambio.

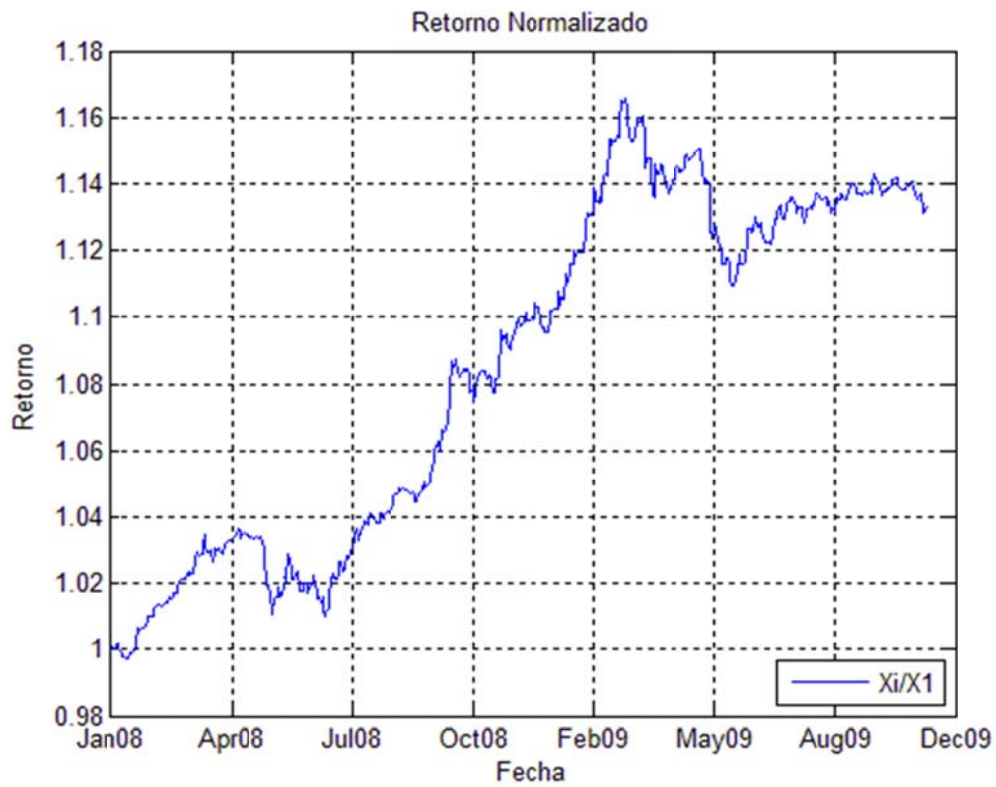


Figura 4.19: Retorno Normalizado Índice LVACLH en CLP.

Se determina el PnL a partir del logaritmo de los retornos, lo cual es mostrado en la figura 4.20.

En la figura 4.21 se muestra el histograma del Logaritmo de los Retornos. Se aprecia que los valores se concentran en la media, sin embargo, existen valores extremos no aislados.

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,2009 \cdot x_t$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = -2,0 \cdot 10^{-7} + 0,1408 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,8168 \cdot \hat{\sigma}_t^2$$

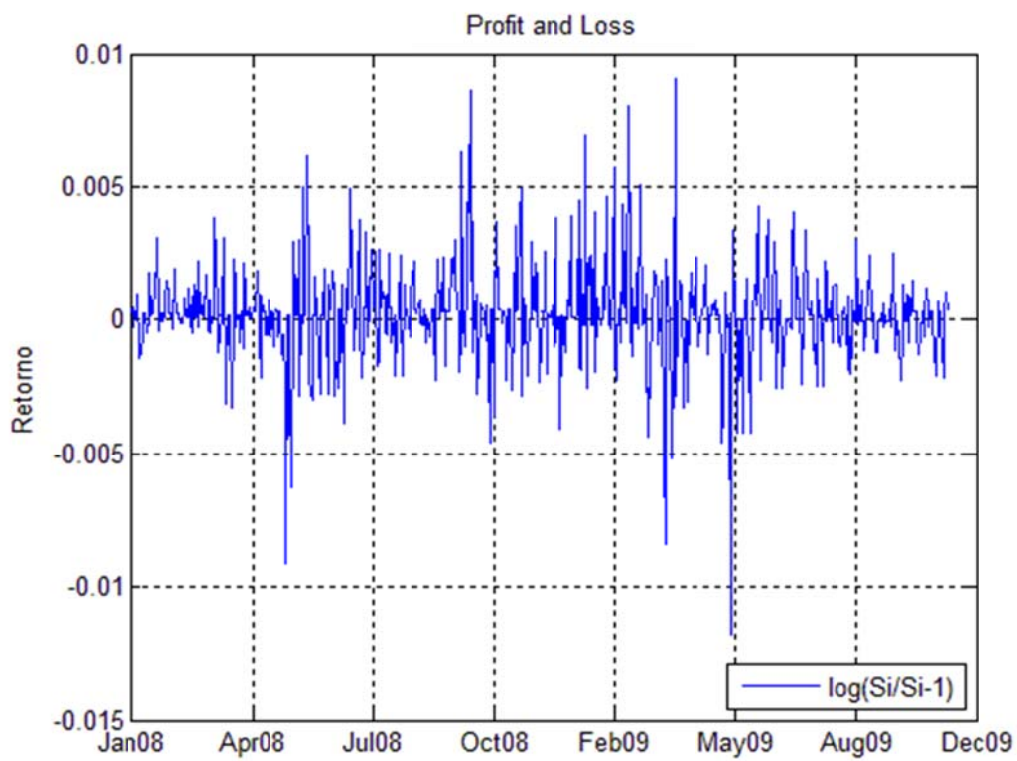


Figura 4.20: Logaritmo de los Retornos Índice LVACLH en CLP.

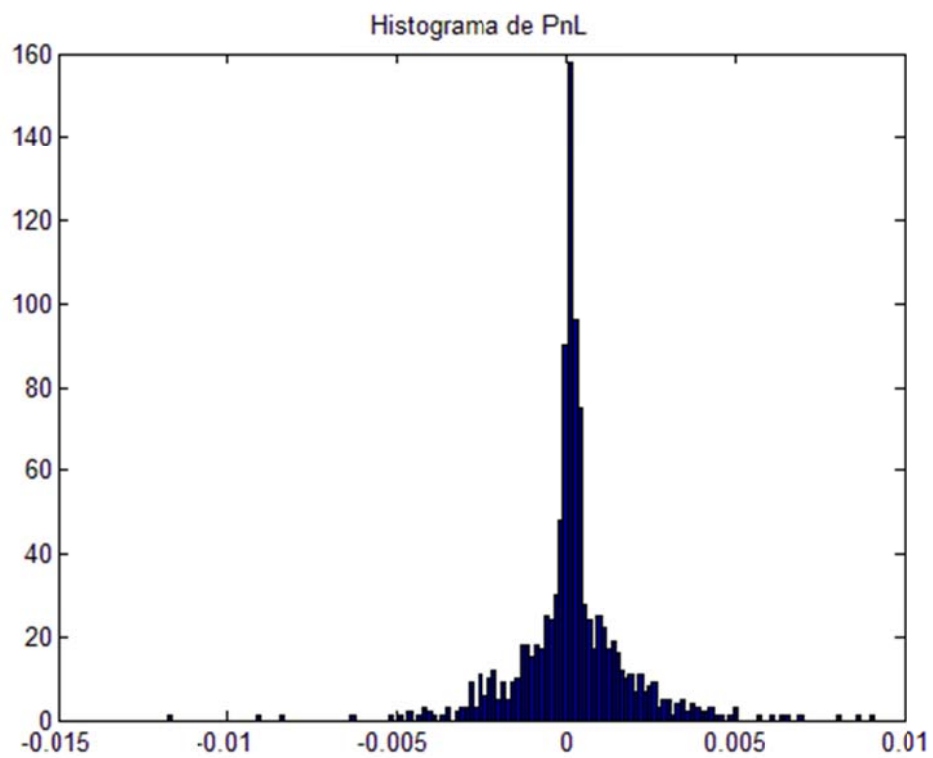


Figura 4.21: Histograma del Logaritmo de Retornos Índice LVACLH en CLP.

Los parámetros del modelo AR(1)-GARCH(1,1) obtenidos son:

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,2009 \cdot x_t \quad (4.3)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = -2,0 \cdot 10^{-7} + 0,1408 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,8168 \cdot \hat{\sigma}_t^2 \quad (4.4)$$

En la figura 4.22 se muestra gráficamente la volatilidad obtenida bajo estos modelos comparándola con la serie de los logaritmos de los retornos.

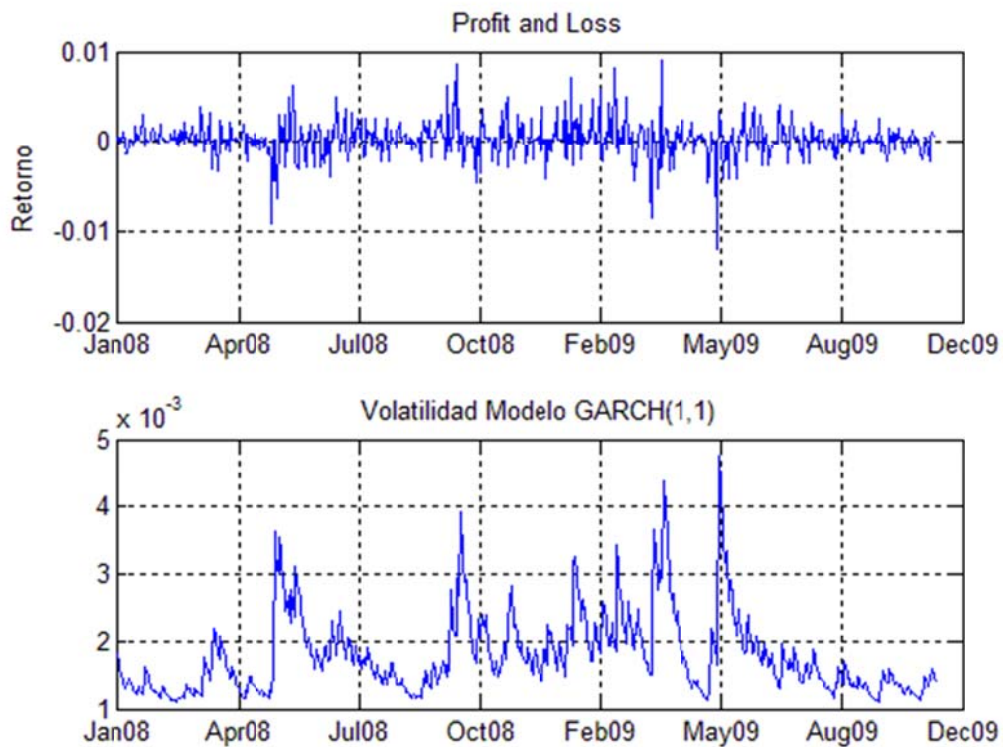


Figura 4.22: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) Índice LVACLH en CLP.

En la figura 4.22 se observa que al modelar la volatilidad para el Índice LVACLH, los peaks detectados bajo el modelo concuerdan gráficamente con la curva de retornos. Sin embargo, para este índice, se detectan valores de volatilidad mucho menores que para el caso de los bonos corporativos, correspondiendo a un décimo de éstos. En la figura 4.23 se pueden apreciar las pérdidas dentro del periodo de calibración.

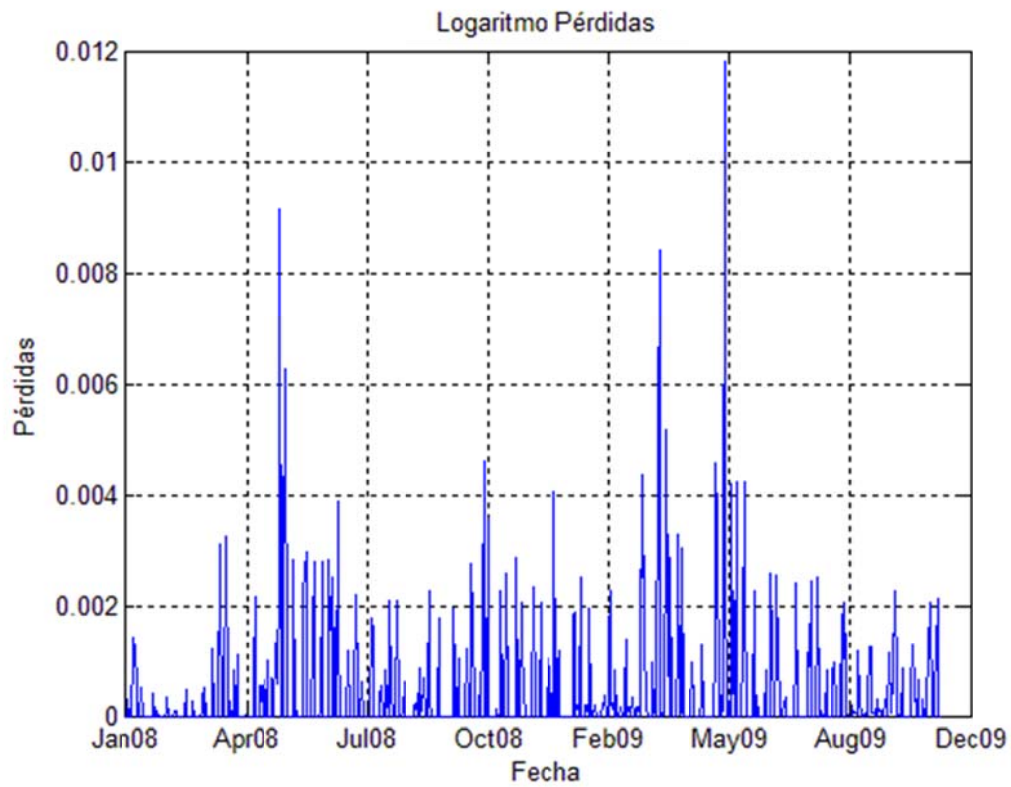


Figura 4.23: Pérdidas Índice LVACLH en CLP.

Se verifica la independencia de la data mediante la función de autocorrelación. En la figura 4.24, se muestra la ACF del logaritmo de los retornos y del valor absoluto del logaritmo de los retornos. Se observa que la mayor correlación está presente para un retardo de un periodo en el log de los retornos.

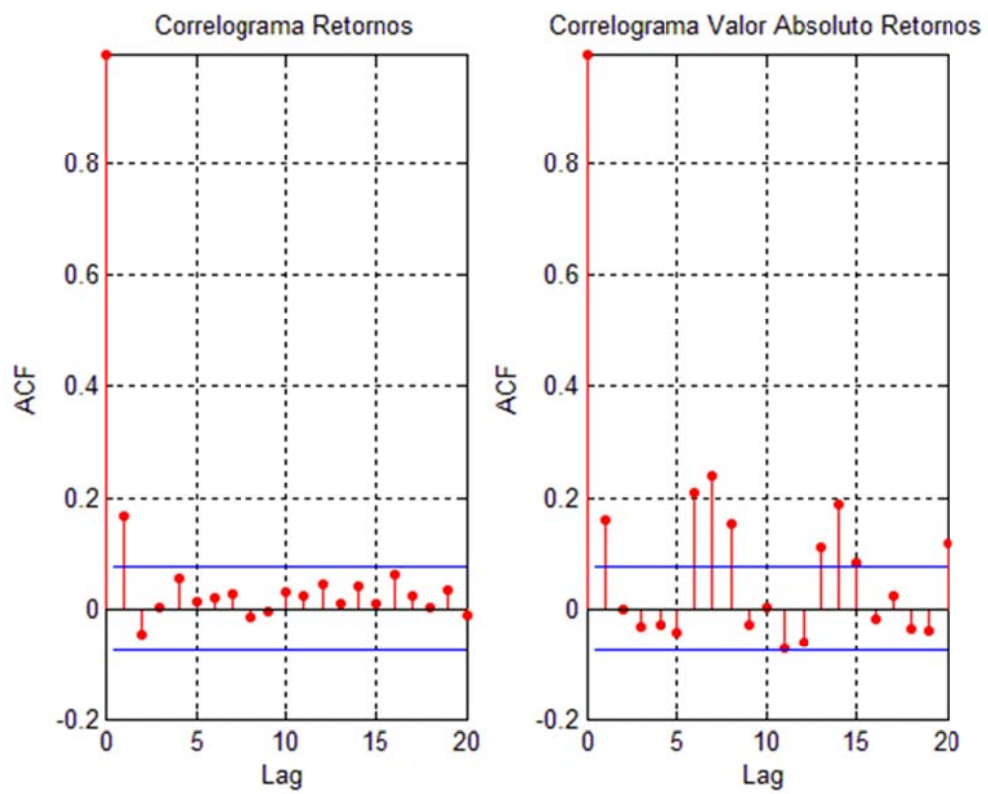


Figura 4.24: ACF Logaritmo de Retornos Índice LVACLH en CLP.

Realizamos el gráfico cuantil-cuantil de los retornos para verificar las colas pesadas. Esto se muestra en la figura 4.25.

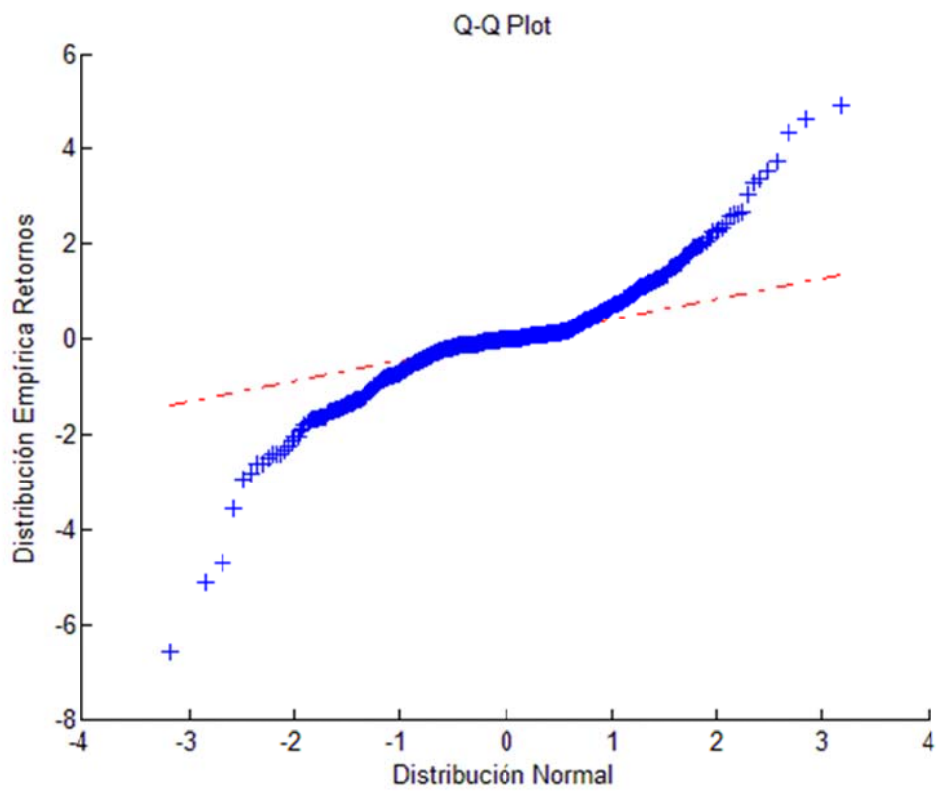


Figura 4.25: Q-Q plot para Retornos Índice LVACLH en CLP.

En la figura 4.26 se ilustra el estimador de Hill de las pérdidas.

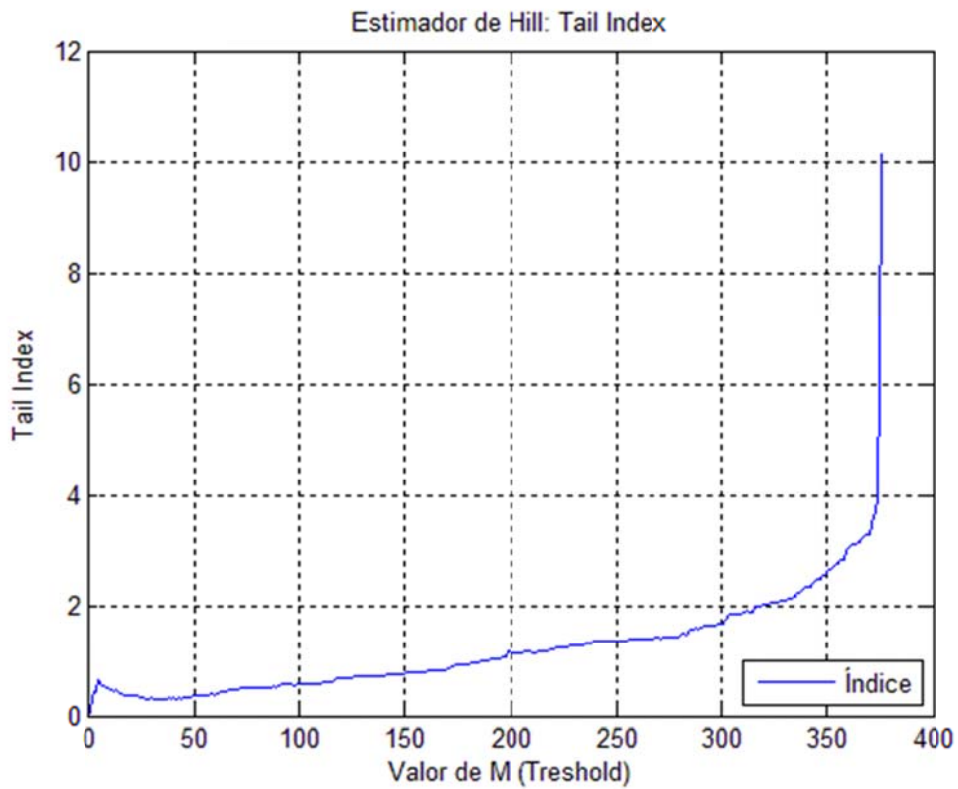


Figura 4.26: Estimador de Hill para Índice LVACLH en CLP.

Se observa en la figura 4.26 que en el tramo [50,100] el estimador es relativamente constante. El umbral nuevamente se fija en el índice 67 correspondiente al 10%, el cual se encuentra en el intervalo señalado.

A partir de la ecuación 3.11 se estiman los residuales y se realiza el Q-Q plot, el cual se muestra en la figura 4.27:

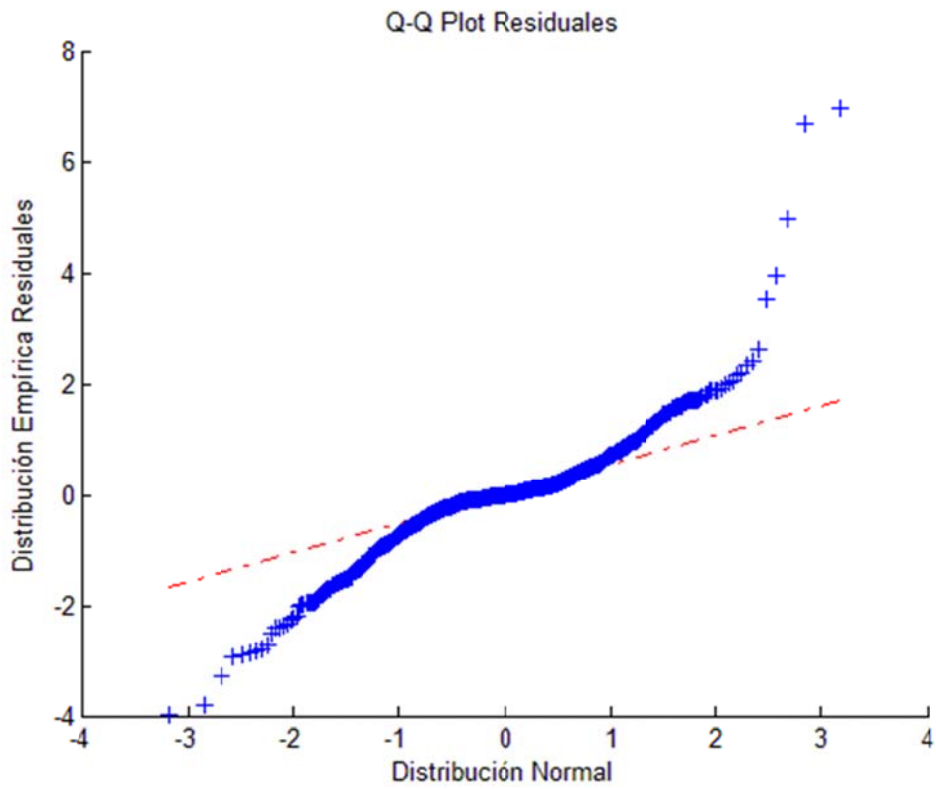


Figura 4.27: Q-Q plot para Residuales del Índice LVACLH en CLP.

Nuevamente se observa que la distribución de residuales posee colas pesadas. La función de autocorrelación de los residuales y del valor absoluto de éstos se muestra en la figura 4.28.

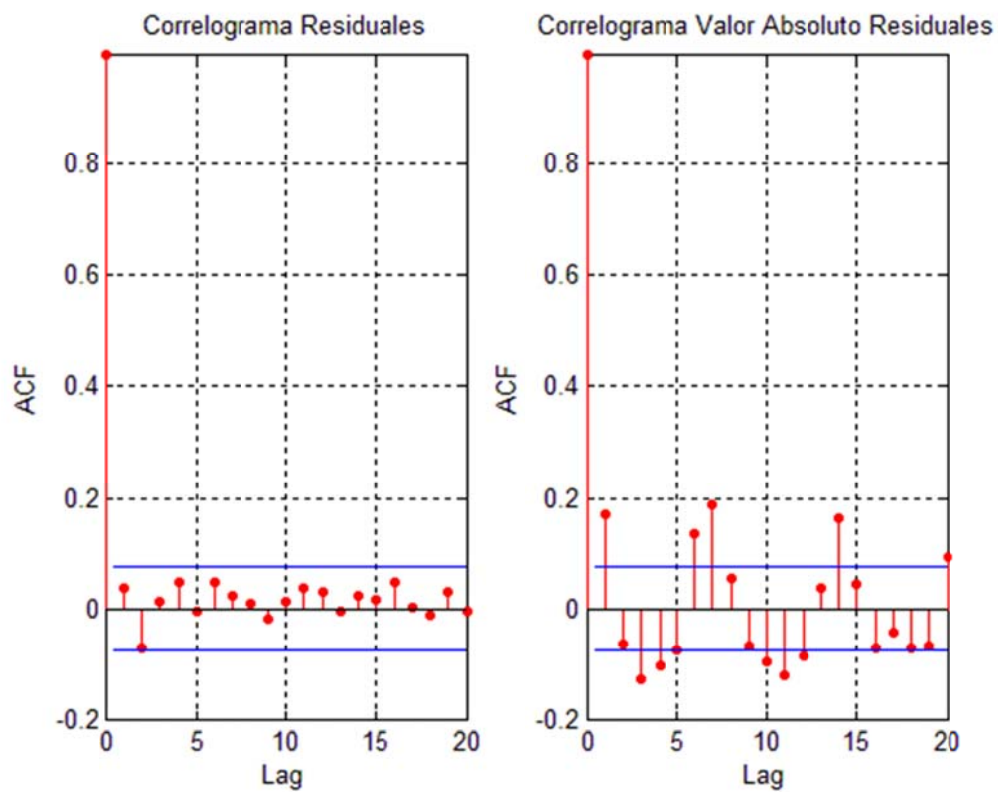


Figura 4.28: ACF de Residuales del Índice LVACLH en CLP.

La figura 4.28, muestra que los residuales pierden la autocorrelación al transformarlos desde retornos, por lo que se tiene una distribución i.i.d. Empleando la ecuación 3.15, los estimadores de los parámetros de la GPD son $\hat{\xi}_{67} = 0,2264$ y $\hat{\beta}_{67} = 0,5986$. La GPD ajustada y la distribución empírica se ilustran en la figura 4.29.

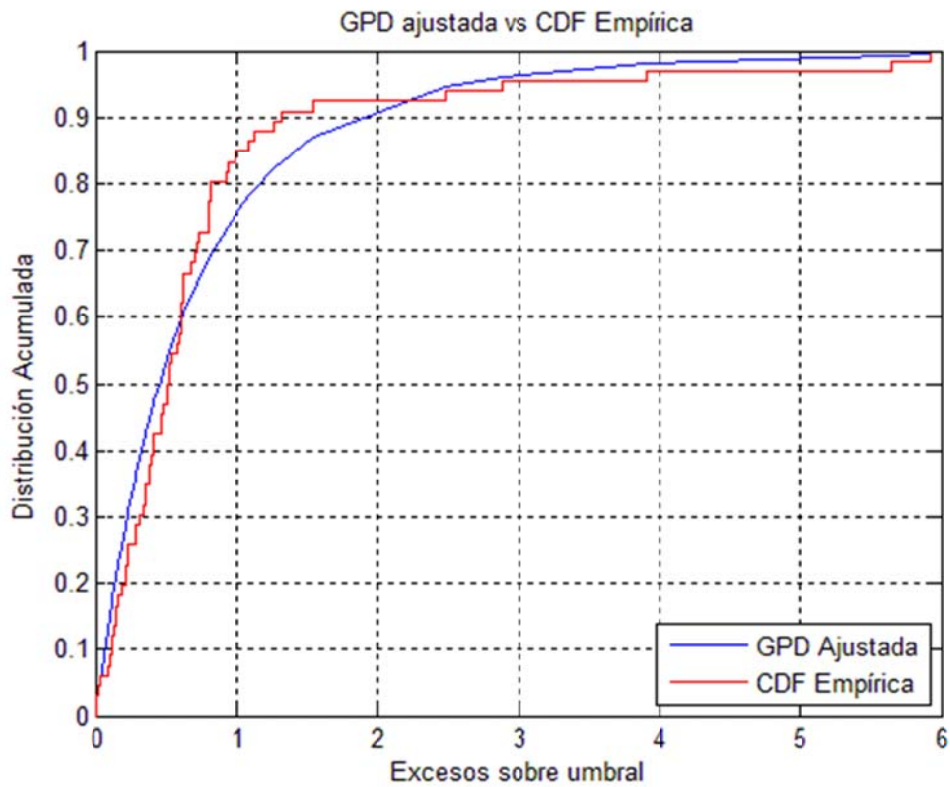


Figura 4.29: GPD Ajustada y Empírica de Residuales de Índice LVACLH en CLP.

Posteriormente se realizan las estimaciones de VaR y EVT para los modelos normal y EVT. En las figuras 4.30 y 4.31 se muestran la distribución del PnL y medidas de riesgo al 95% y 99% de confiabilidad respectivamente, para el horizonte de prueba comprendido entre el 9 de Noviembre de 2009 y el 8 de Noviembre de 2010.

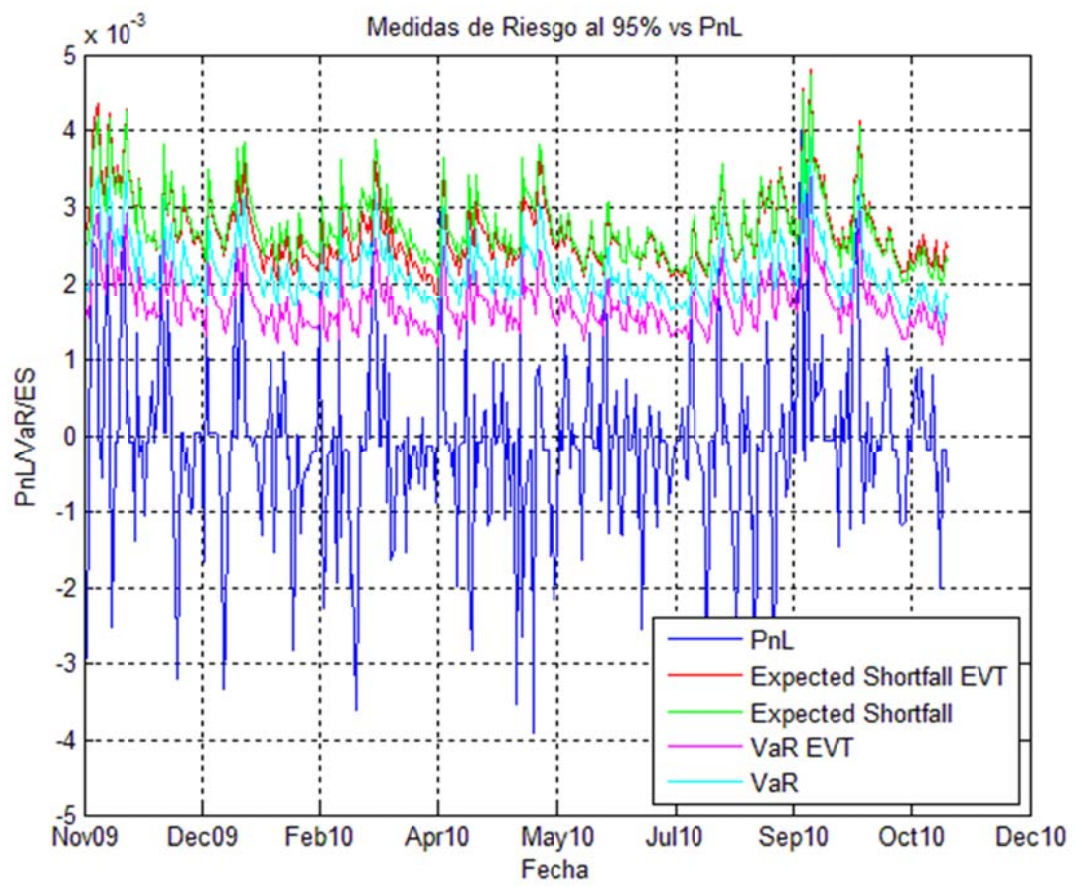


Figura 4.30: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para Índice LVACLH en CLP.

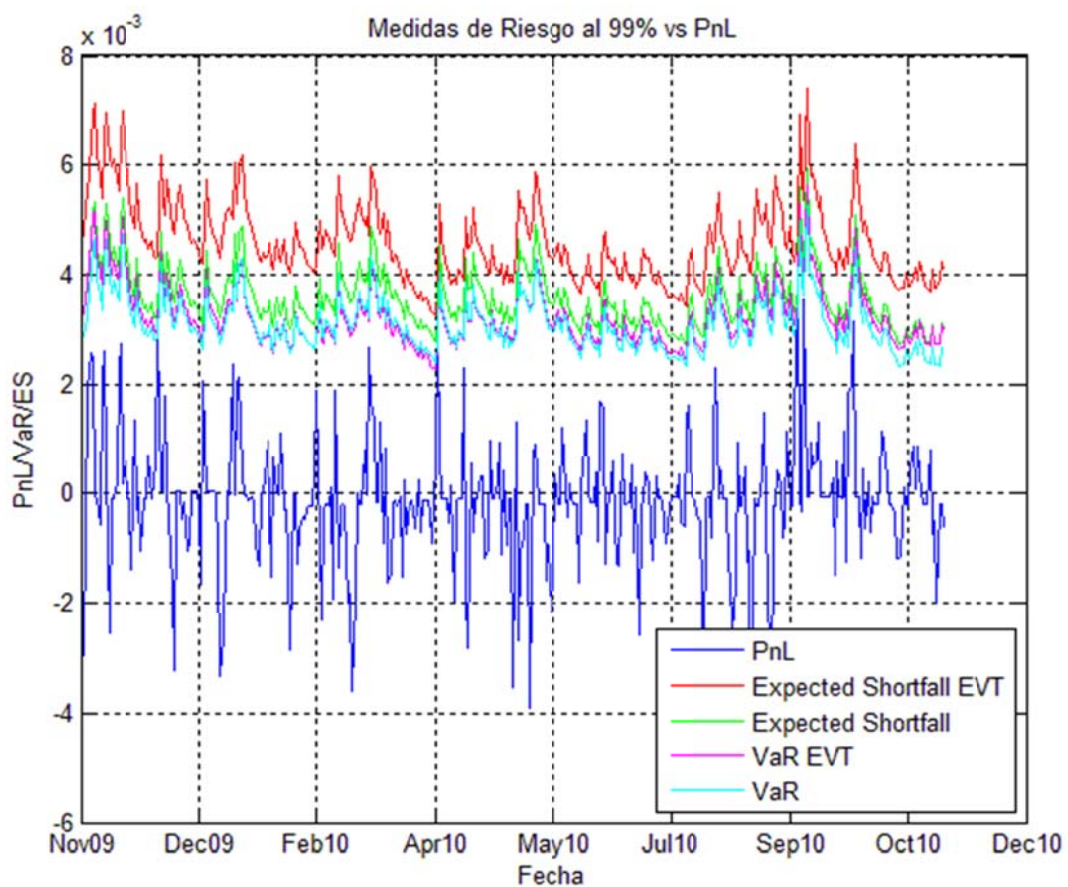


Figura 4.31: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para Índice LVACLH en CLP.

En las siguientes figuras se grafican las excepciones del VaR y ES para cada uno de los modelos. La medida ES al 99% nuevamente no presenta excepciones bajo EVT y posee una bajo Normalidad de retornos, por lo anterior no será graficada. El gráfico de excepciones para ES al 95% se muestra en la figura 4.32. Para el caso del VaR se muestran en la figura 4.33 y 4.34 para una confiabilidad del 95% y 99% respectivamente. Los valores obtenidos de ξ para la serie de índices se muestran en la figura 4.35.

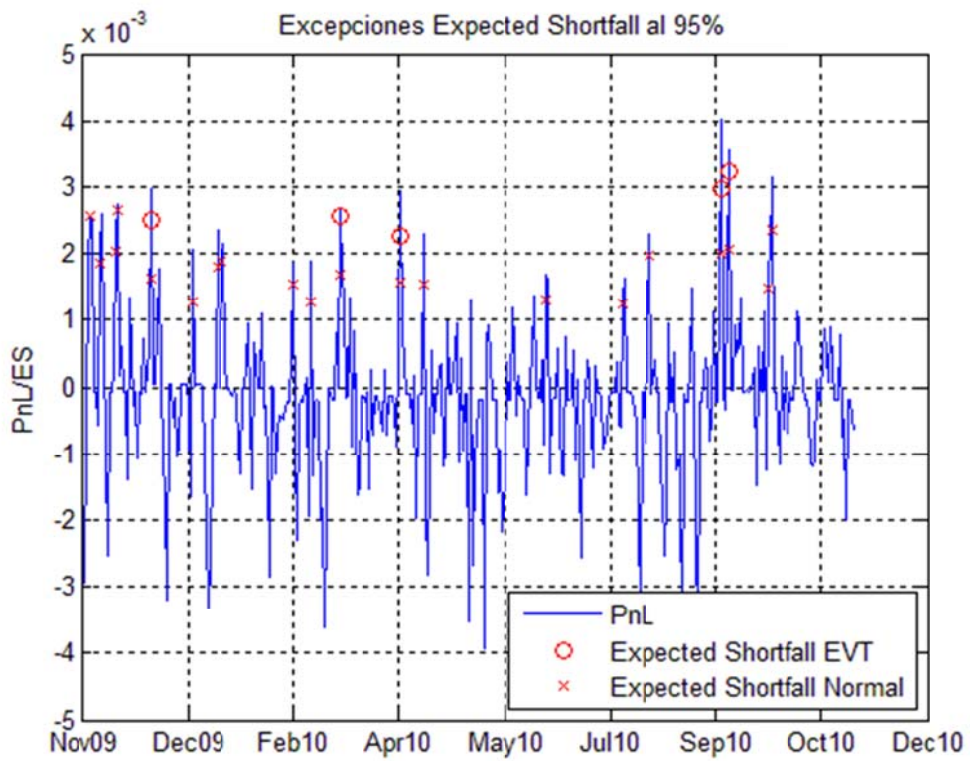


Figura 4.32: Excepciones ES al 95% Índice LVACLH en CLP.

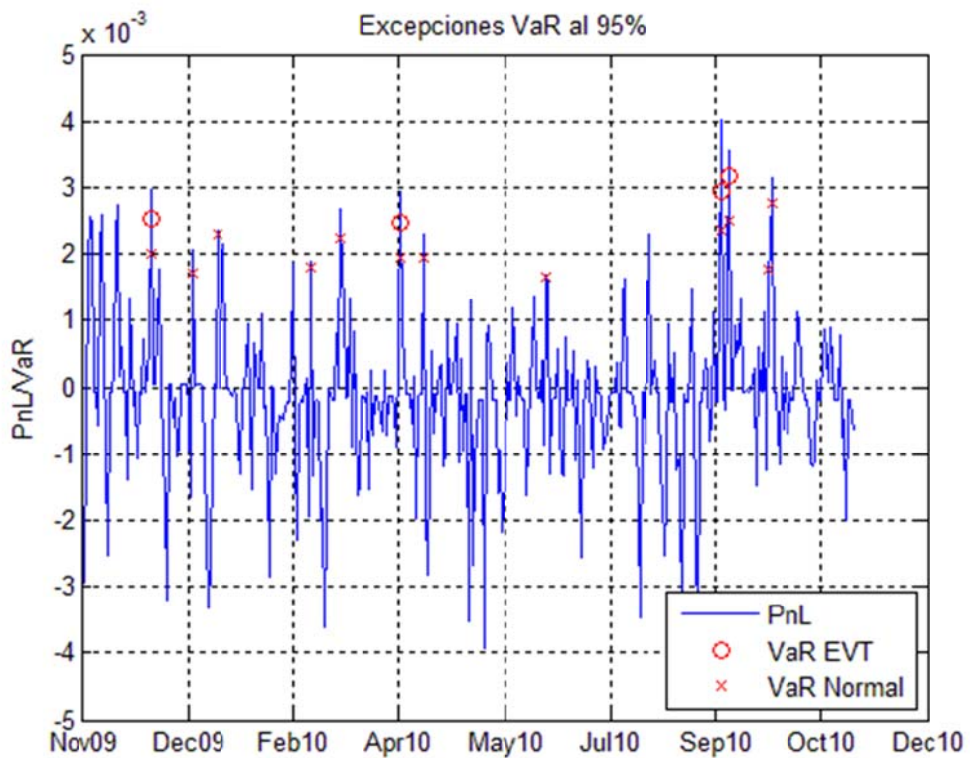


Figura 4.33: Excepciones VaR al 95% Índice LVACLH en CLP.

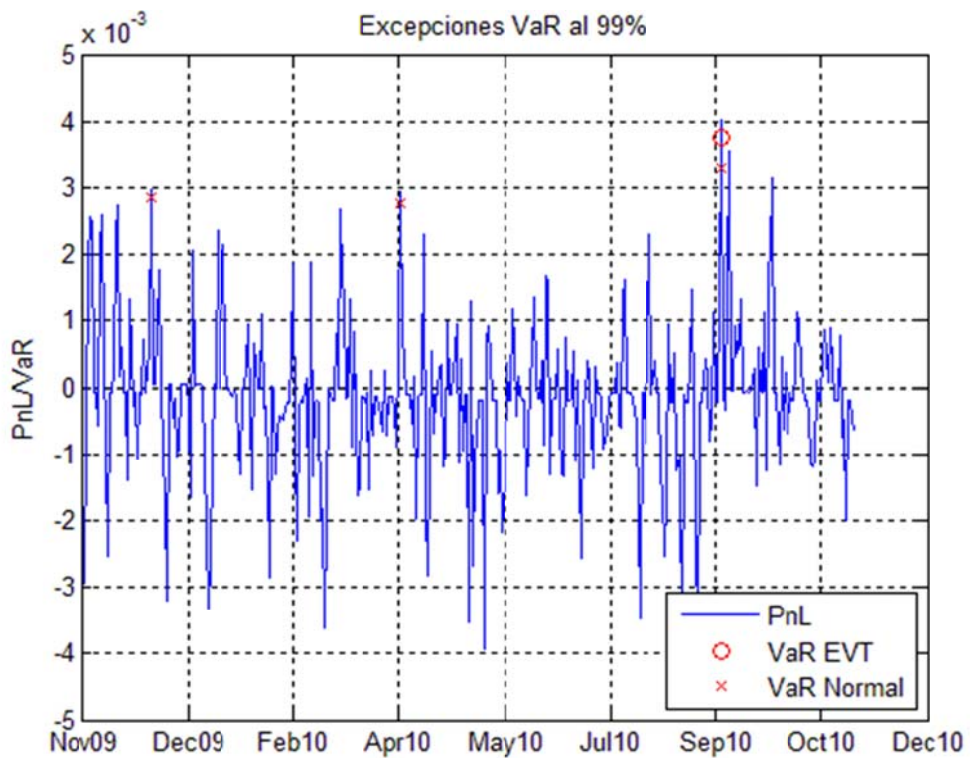


Figura 4.34: Excepciones VaR al 99% Índice LVACLH en CLP.



Figura 4.35: ξ Residuales Índice LVACLH en CLP.

A partir de la figura 4.35, se muestra que la distribución GPD estimada no posee ciclos en que los retornos no presenten colas pesadas. Esto último implica que las mediciones de riesgo dinámicas en base a EVT, son consistentes con la distribución de los retornos diarios los cuales permanentemente poseen elementos alejados de la media.

4.4. Análisis del IPSA

En esta sección los datos seleccionados para realizar este desarrollo corresponden al IPSA obtenido de Yahoo finanzas¹⁰. El IPSA (Índice de Precio Selectivo de Acciones) es el principal índice bursátil de Chile, elaborado por la Bolsa de Comercio de Santiago. Corresponde a un indicador de rentabilidad de las 40 acciones con mayor presencia bursátil, siendo dicha lista revisada anualmente. Este índice es revisado con mayor detalle en anexos.

La serie obtenida del IPSA cuenta con datos desde el 30 de Diciembre de 2003 al 9 de Diciembre de 2010. Ellos se encuentran registrados sólo para los días hábiles. Los datos utilizados para calibración serán los comprendidos entre el 2 de Enero de 2004 y el 29 de Diciembre de 2006. De esta manera se emplean 3 años de data para calibración y se realiza un backtest de aproximadamente 4 años. La data para el test comprende desde el 2 de Enero de 2007 al 9 de Diciembre de 2010. La distribución de retornos normalizados se muestra en la figura 4.36.

¹⁰ Mas información disponible en <http://es.finance.yahoo.com/>



Figura 4.36: Retorno Normalizado IPSA.

En la figura 4.37 se muestra el logaritmo de los retornos (PnL) del IPSA en la ventana de calibración. En la figura 4.38 se ilustra el histograma del PnL con el fin de visualizar los eventos aislados de pérdidas dentro de la distribución.

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,1487 \cdot x_t$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = 2,6115 \cdot 10^{-6} + 0,1417 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,8176 \cdot \hat{\sigma}_t^2$$

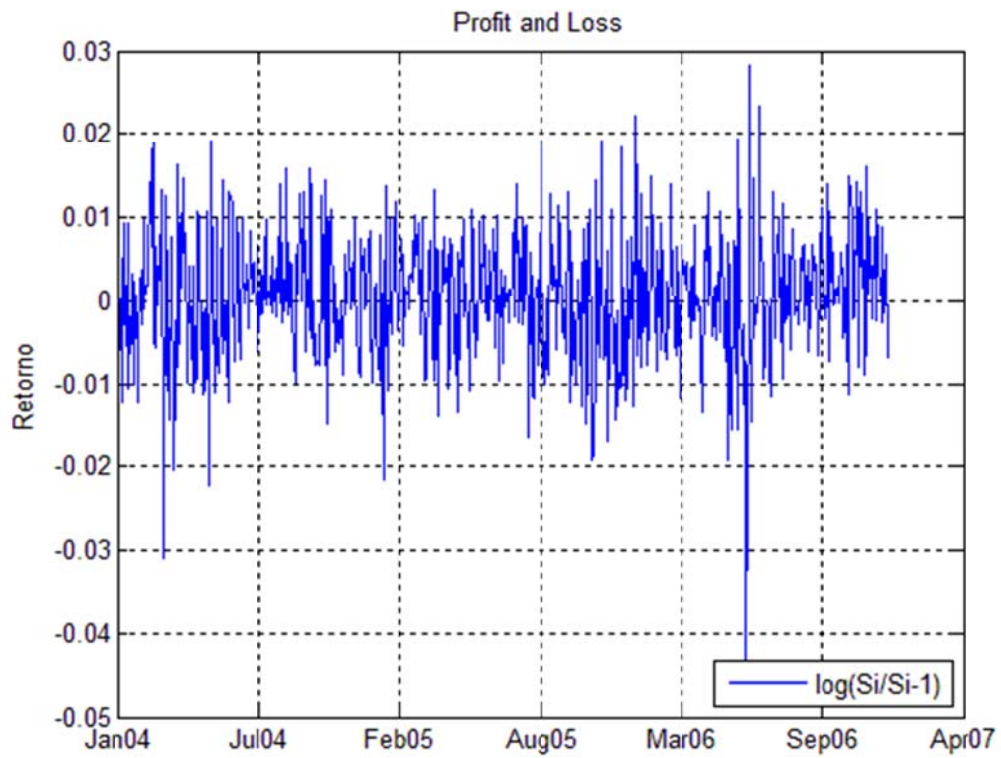


Figura 4.37: Logaritmo de los Retornos IPSA.

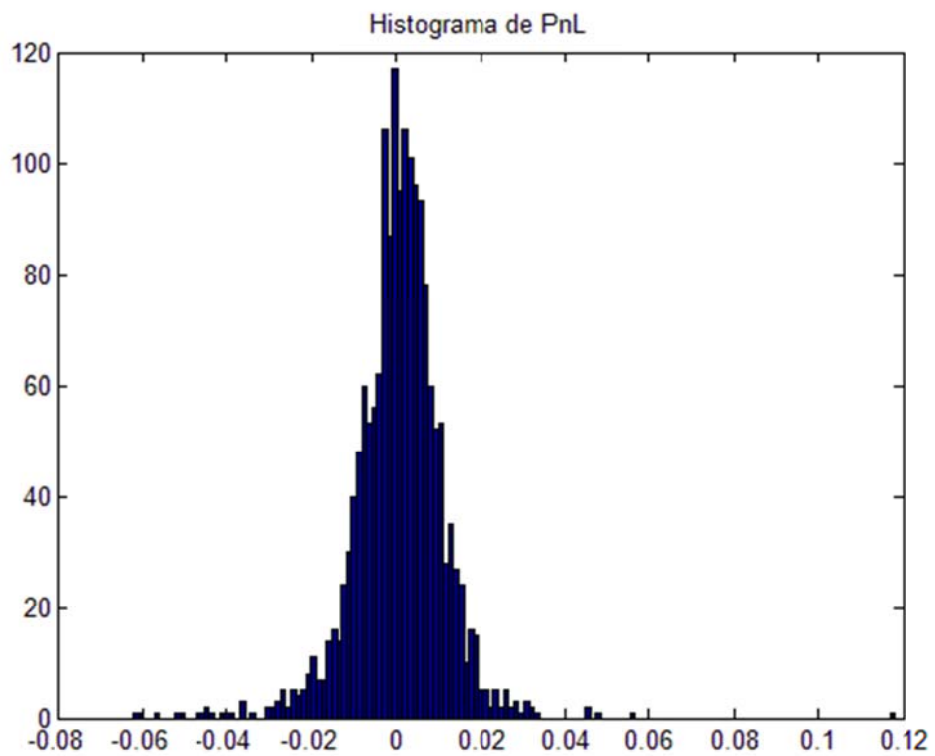


Figura 4.38: Histograma del Logaritmo de Retornos IPSA.

En la figura 4.39 es graficado el PnL y la volatilidad obtenida bajo el modelo AR(1)-GARCH(1,1) obtenido, el cual corresponde a:

$$\hat{\mu}_{t+1} = 0,1487 \cdot x_t \quad (4.5)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = 2,6115 \cdot 10^{-6} + 0,1417 \cdot \hat{\epsilon}_t^2 + 0,8176 \cdot \hat{\sigma}_t^2 \quad (4.6)$$

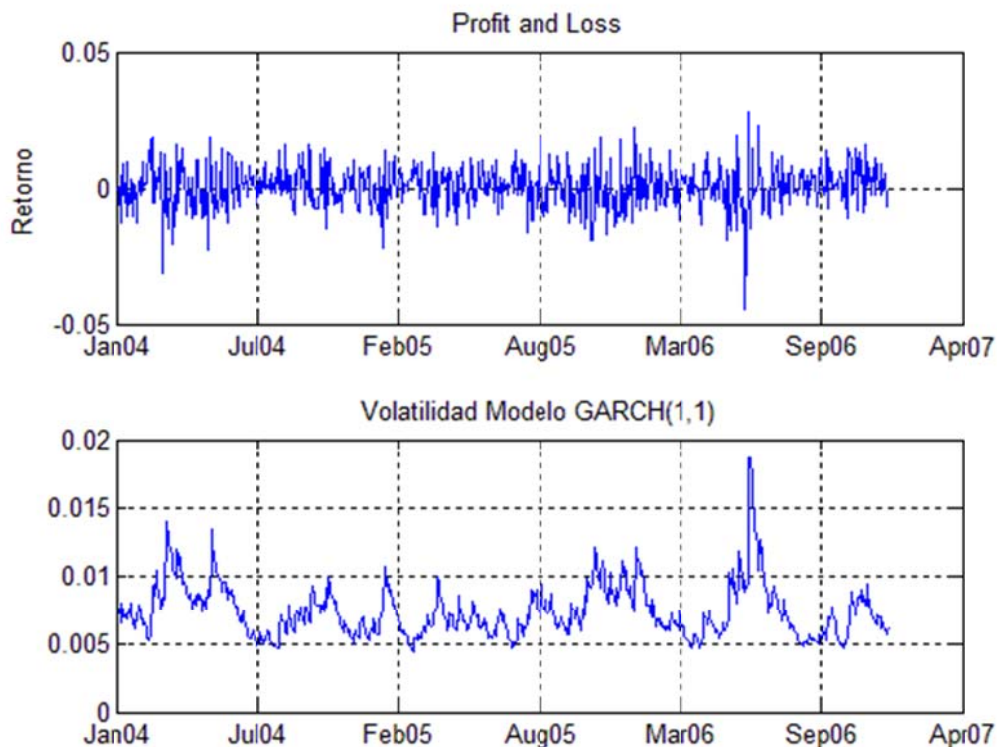


Figura 4.39: PnL y Volatilidad GARCH(1,1) IPSA.

En la figura 4.39 se observa que el modelamiento de la volatilidad hace un seguimiento a los peaks presentes en la data. Además se aprecia que el orden de magnitud de la volatilidad es acorde a lo observado en el índice de bonos corporativos. En la figura 4.40 se pueden apreciar las pérdidas dentro del periodo de calibración.

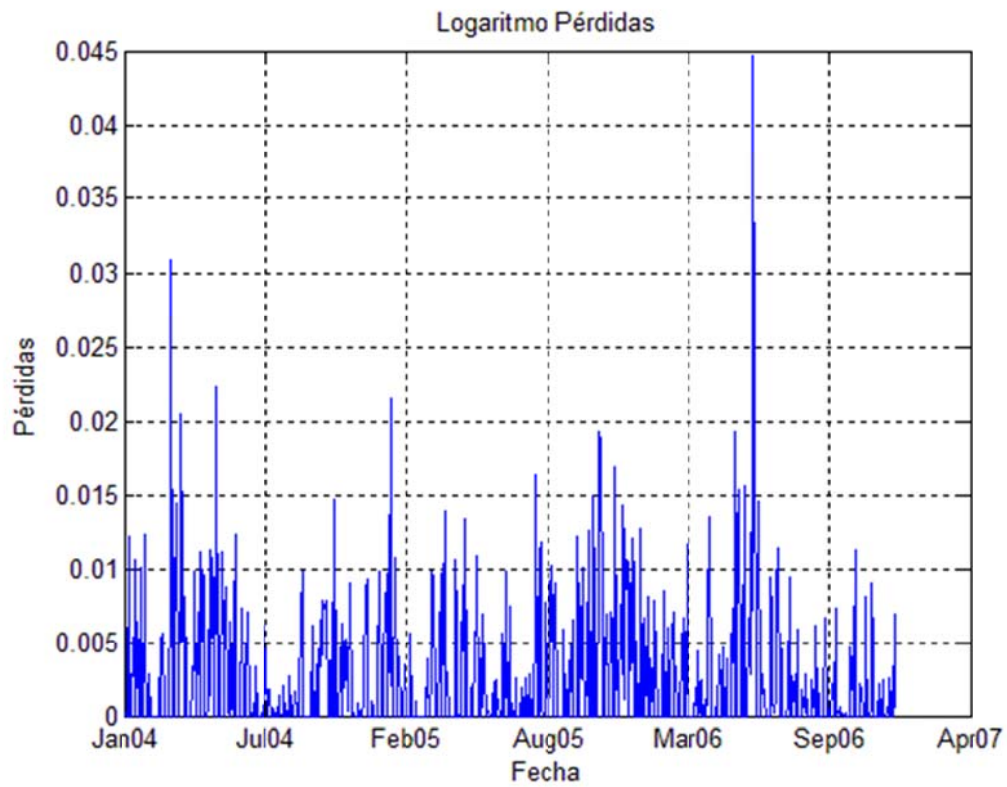


Figura 4.40: Pérdidas IPSA.

En la figura 4.41, se muestra la función de autocorrelación (ACF) del logaritmo de los retornos y del valor absoluto del logaritmo de los retornos. Para el primer caso, se observa que la correlación es alta, principalmente con respecto a los primeros rezagos. Para el valor absoluto del log de los retornos, la correlación es alta para un mayor número de rezagos manteniéndose relativamente estable independiente del lag.

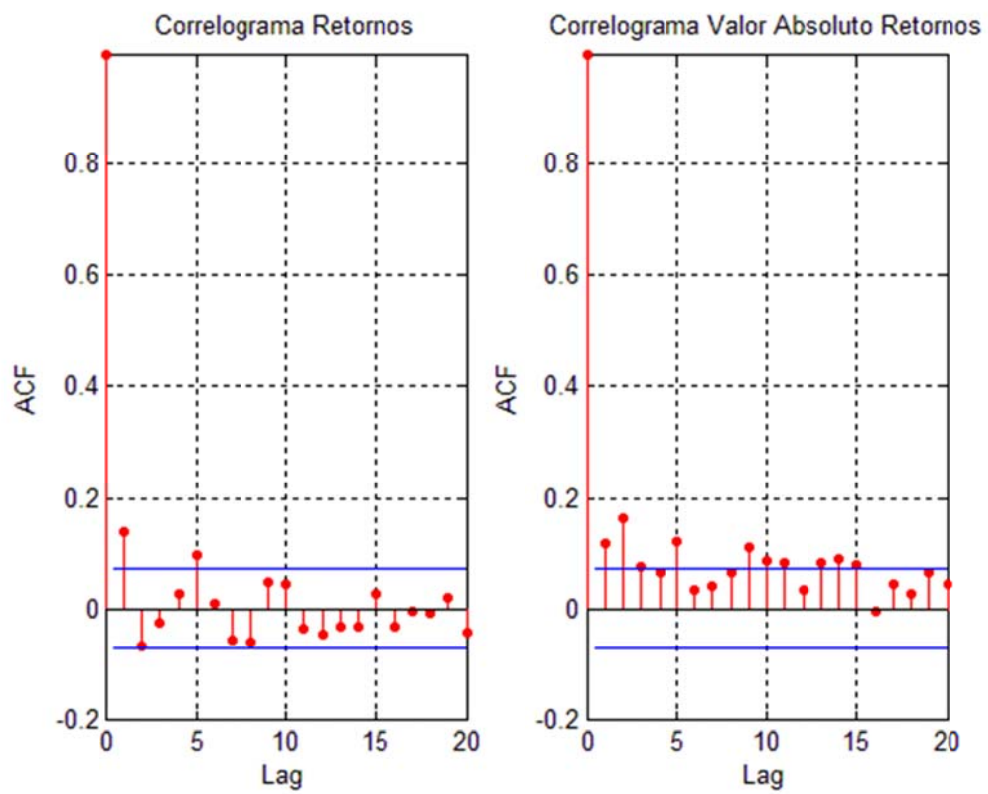


Figura 4.41: ACF Logaritmo de Retornos IPSA.

El gráfico cuantil-cuantil del PnL se muestra en la figura 4.42.

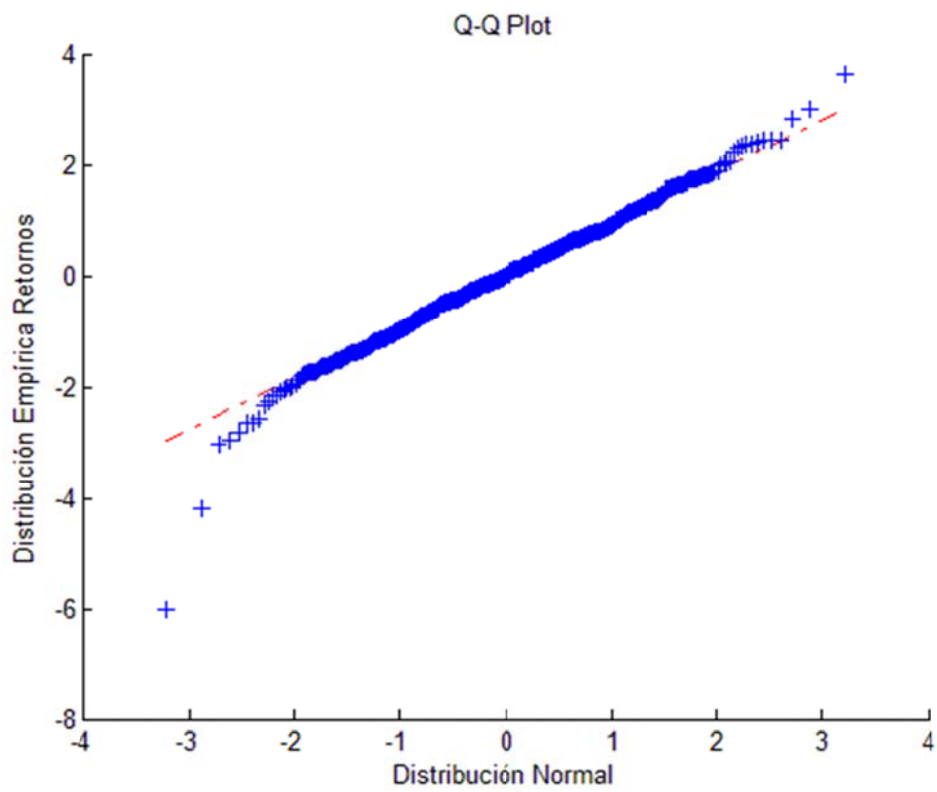


Figura 4.42: Q-Q plot para Retornos IPSA.

Para modelar las colas de la GPD se realiza el método gráfico del estimador de Hill, el cual se muestra en la figura 4.43.

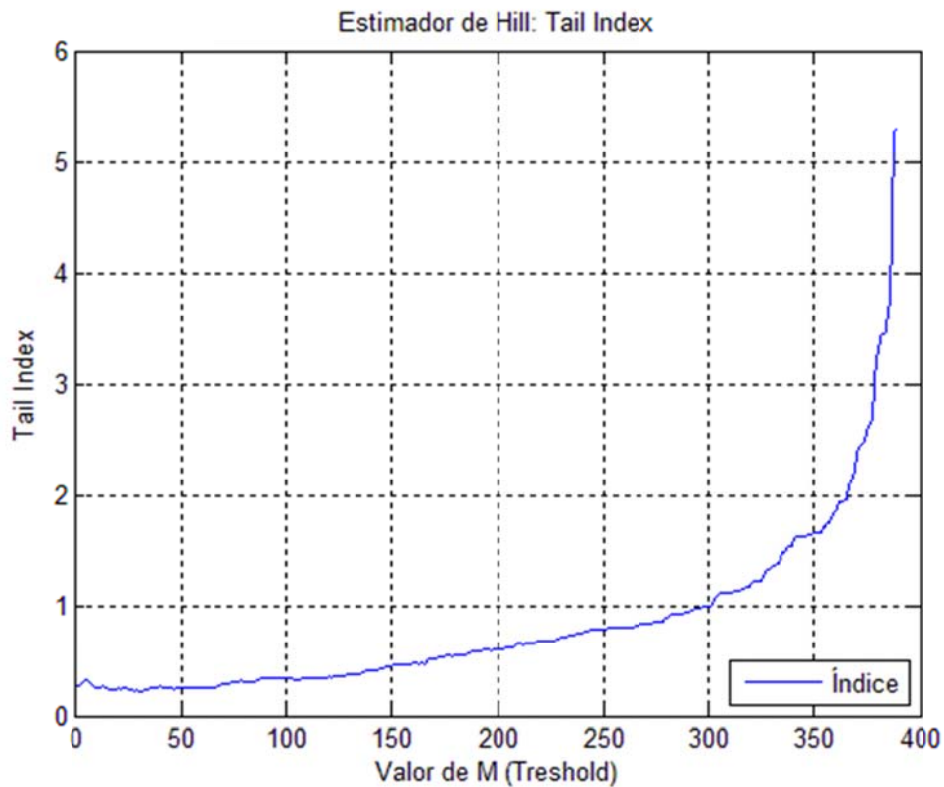


Figura 4.43: Estimador de Hill para IPSA.

Para el IPSA, se emplea el mismo concepto señalado en los casos de análisis anterior que corresponde a fijar el umbral en el 10% de la ventana analizada. Vemos que para este caso corresponde al 75 datos, el cual se encuentra dentro del tramo estable que se observa en la figura, cuyo intervalo aproximado es [20,90].

A partir de la ecuación 3.11 se estiman los residuales. Luego se comprueba que no hayan perdido la condición de poseer colas pesadas. Esto se puede apreciar realizando un gráfico cuantil-cuantil nuevamente, el cual se muestra en la figura 4.44.

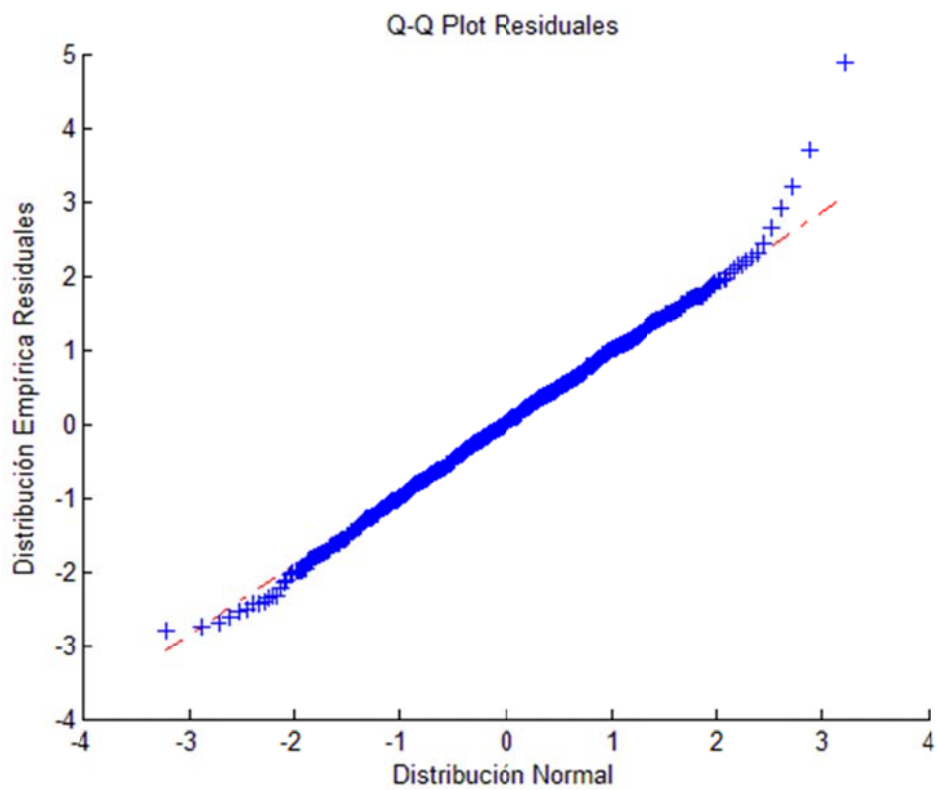


Figura 4.44: Q-Q plot para Residuales del IPSA.

Se observa en la figura 4.44 que las colas de los residuales siguen alejándose de la distribución normal. Así, se calcula la función de autocorrelación de los residuales y del valor absoluto de éstos, para verificar que sean i.i.d., lo que se muestra en la figura 4.45.

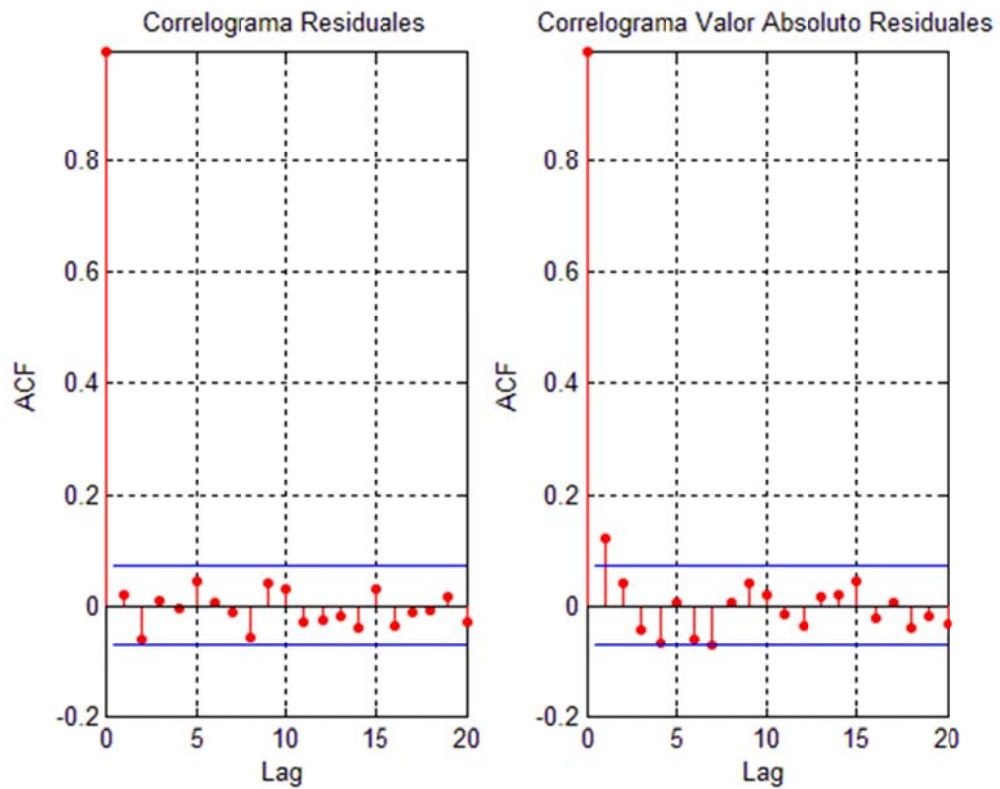


Figura 4.45: ACF de Residuales del IPSA.

En la figura 4.45, se aprecia que los residuales son i.i.d. por lo que se realiza la estimación de los parámetros de la GPD mediante máxima verosimilitud. Los parámetros estimados son $\hat{\xi}_{75} = 0,0833$ y $\hat{\beta}_{75} = 0,4721$. El ajuste de la GPD en base a estos parámetros en conjunto con la distribución acumulada empírica de los residuales, se muestra en la figura 4.46.

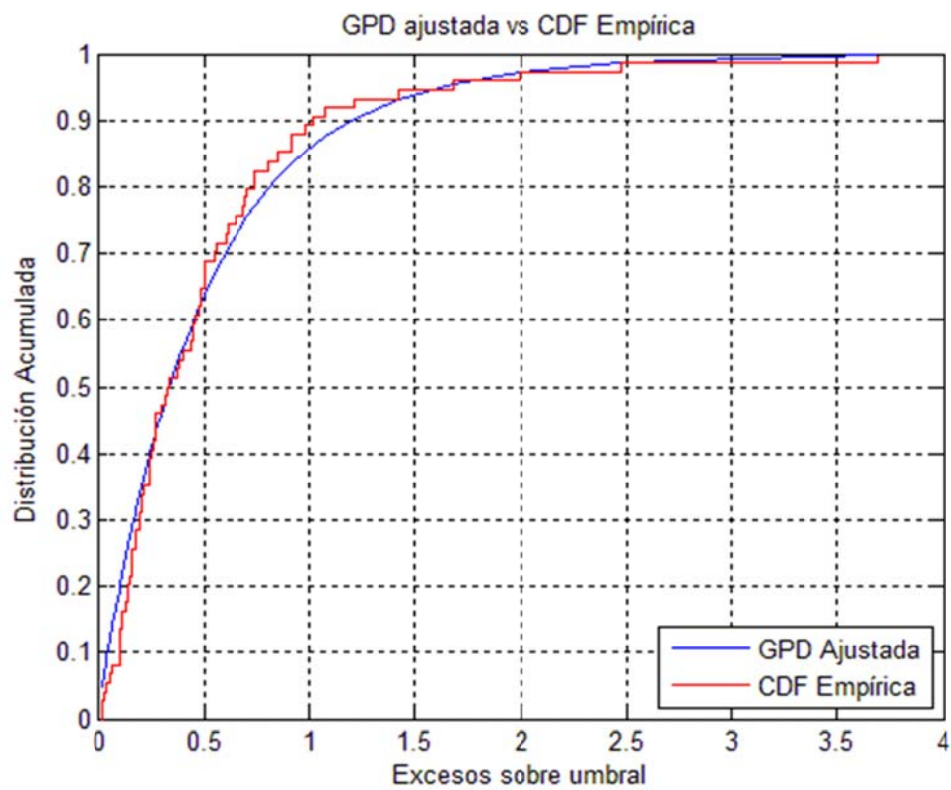


Figura 4.46: GPD Ajustada y Empírica de Residuales del IPSA.

El siguiente paso corresponde a realizar las estimaciones de VaR y EVT bajo el modelo que asume distribución normal de los retornos y el modelo EVT. En las figuras 4.47 y 4.48 se muestran la distribución del PnL y medidas de riesgo al 95% y 99% de confiabilidad respectivamente, para el horizonte de prueba comprendido entre el 2 de Enero de 2007 y el 9 de Diciembre de 2010.

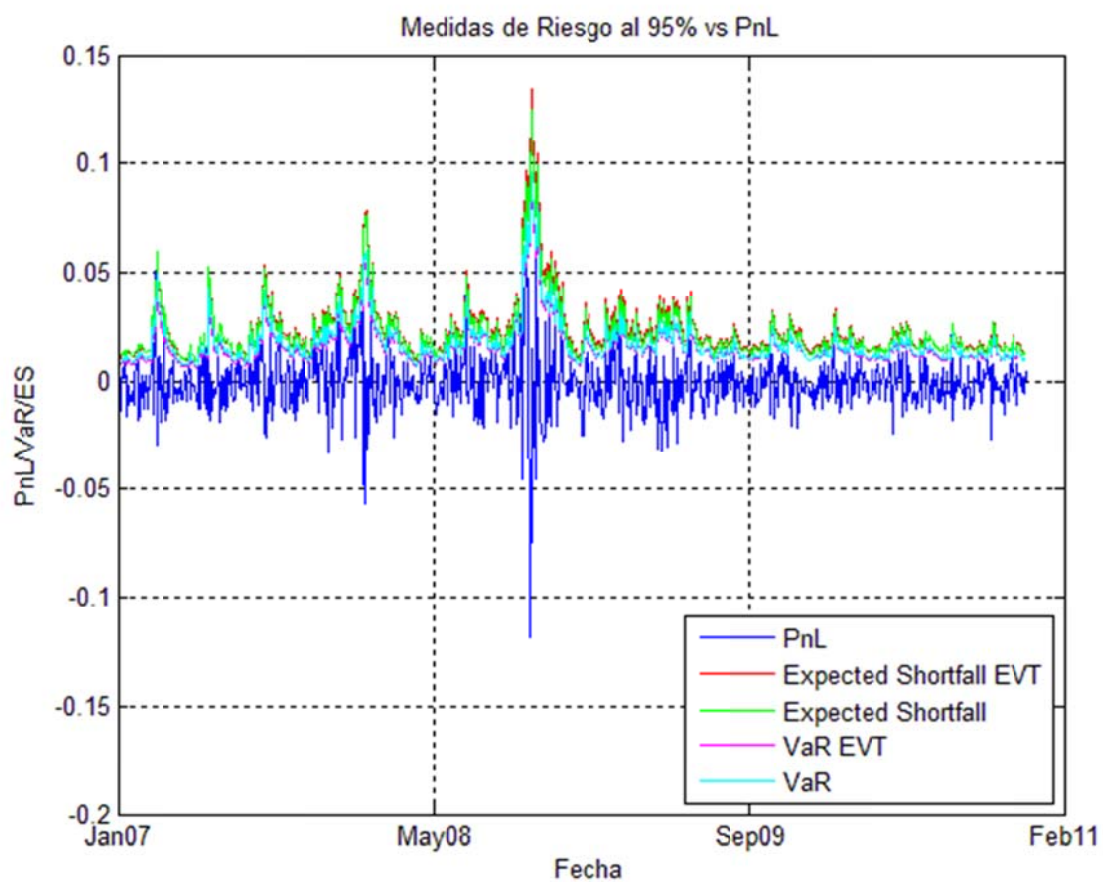


Figura 4.47: PnL y Medidas de Riesgo al 95% para el IPSA.

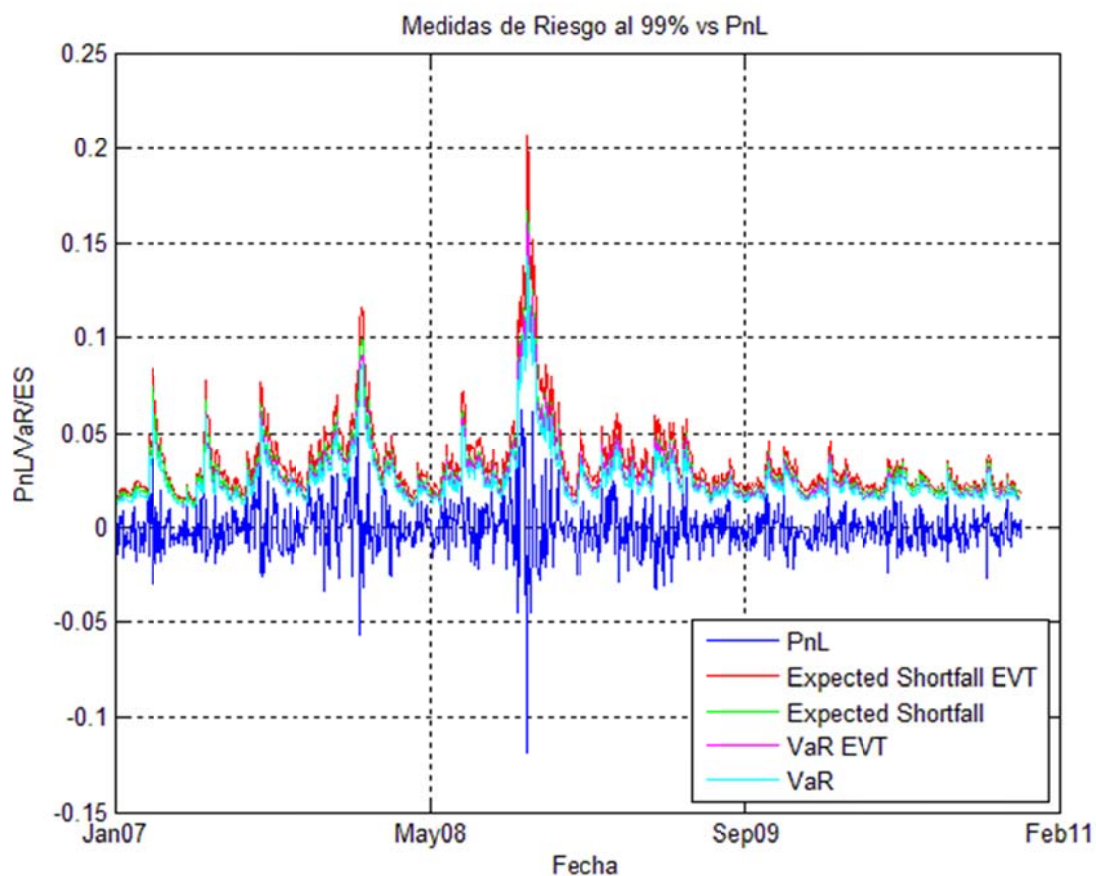


Figura 4.48: PnL y Medidas de Riesgo al 99% para el IPSA.

Para apreciar el desempeño del modelo de Expected Shortfall tanto para estimaciones que asumen normalidad en retornos como también las estimadas mediante EVT, son graficadas las excepciones al modelo. Los gráficos de excepciones para ES al 95% y 99% se muestran en las figuras 4.49 y 4.50. Para el caso del VaR se muestran en las figuras 4.51 y 4.52 para una confiabilidad del 95% y 99% respectivamente.

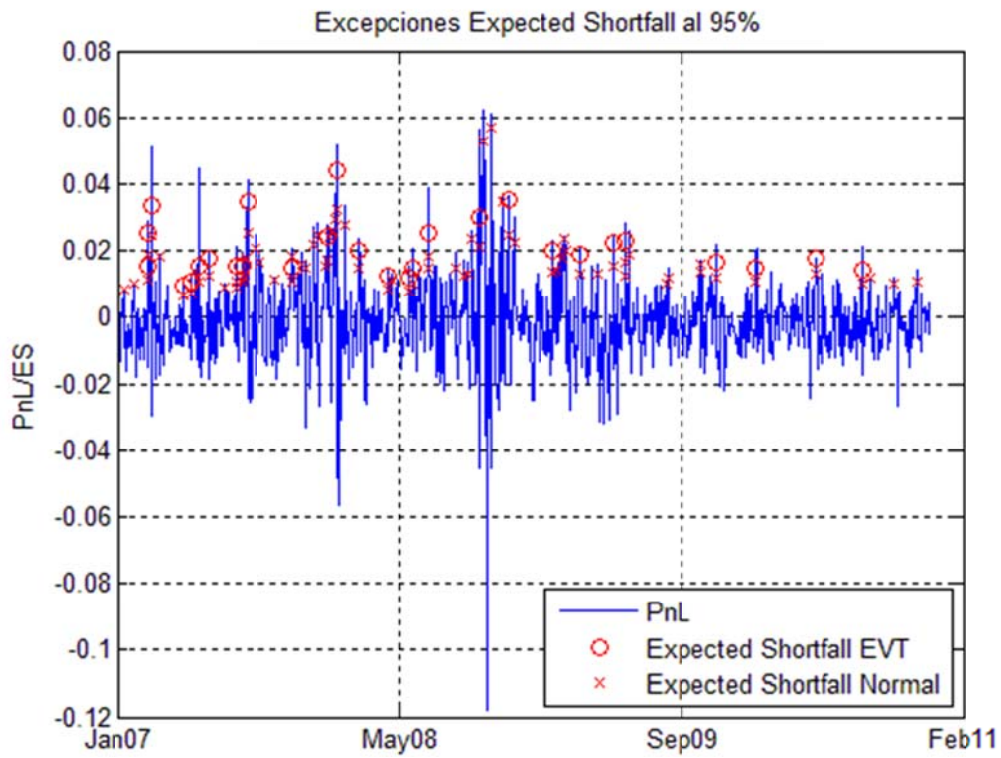


Figura 4.49: Excepciones ES al 95% del IPSA.

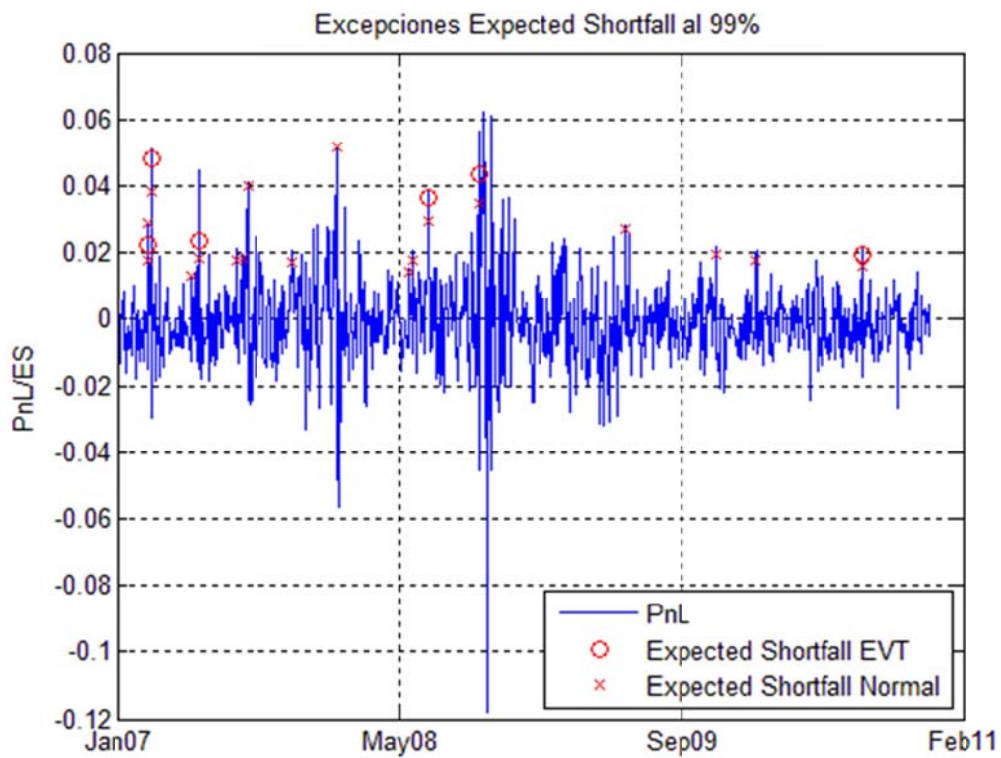


Figura 4.50: Excepciones ES al 99% del IPSA.

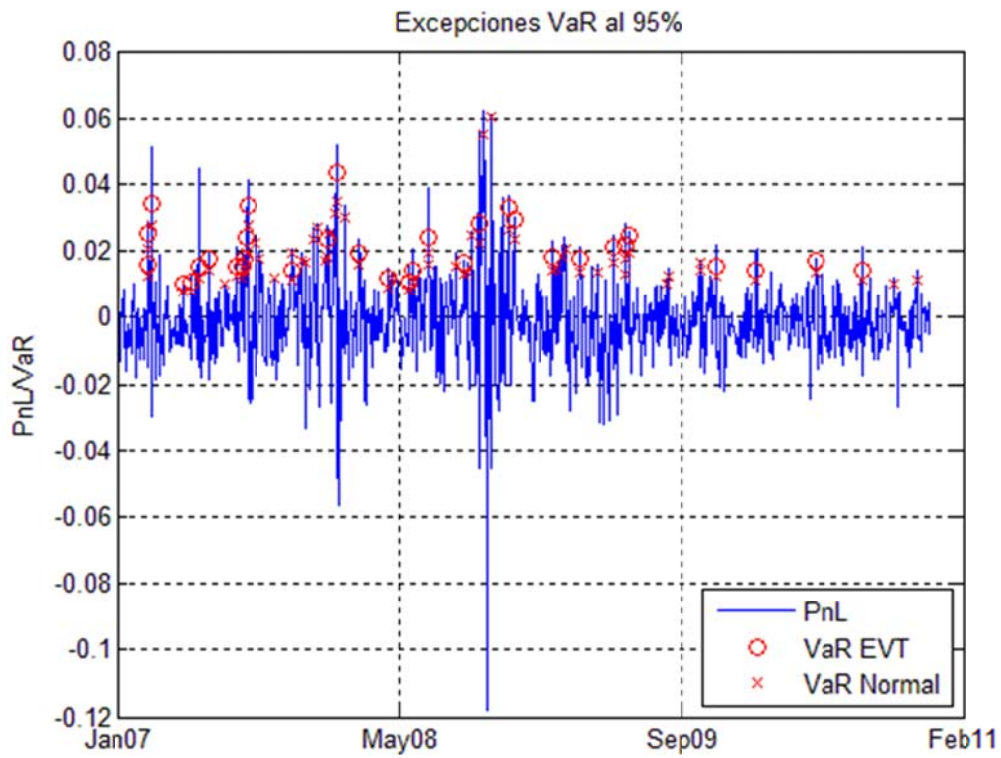


Figura 4.51: Excepciones VaR al 95% del IPSA.

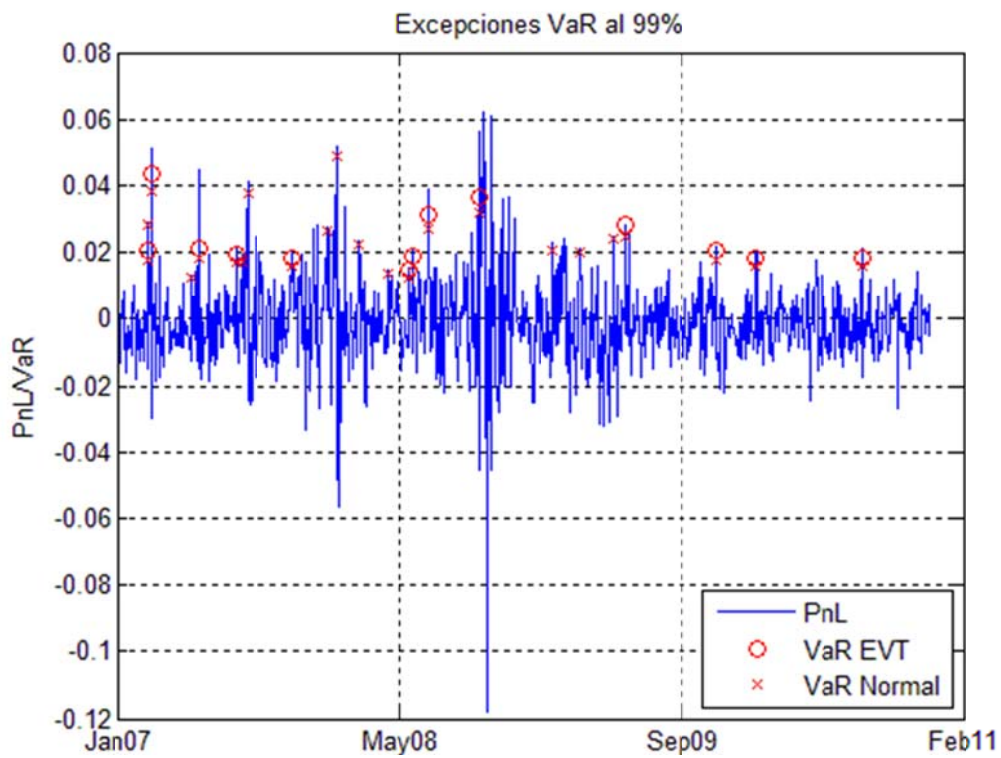


Figura 4.52: Excepciones VaR al 99% del IPSA.

A continuación se muestra el parámetro de forma ξ de la GDP. Los valores obtenidos de ξ para la serie de índices se muestran en la figura 4.53.

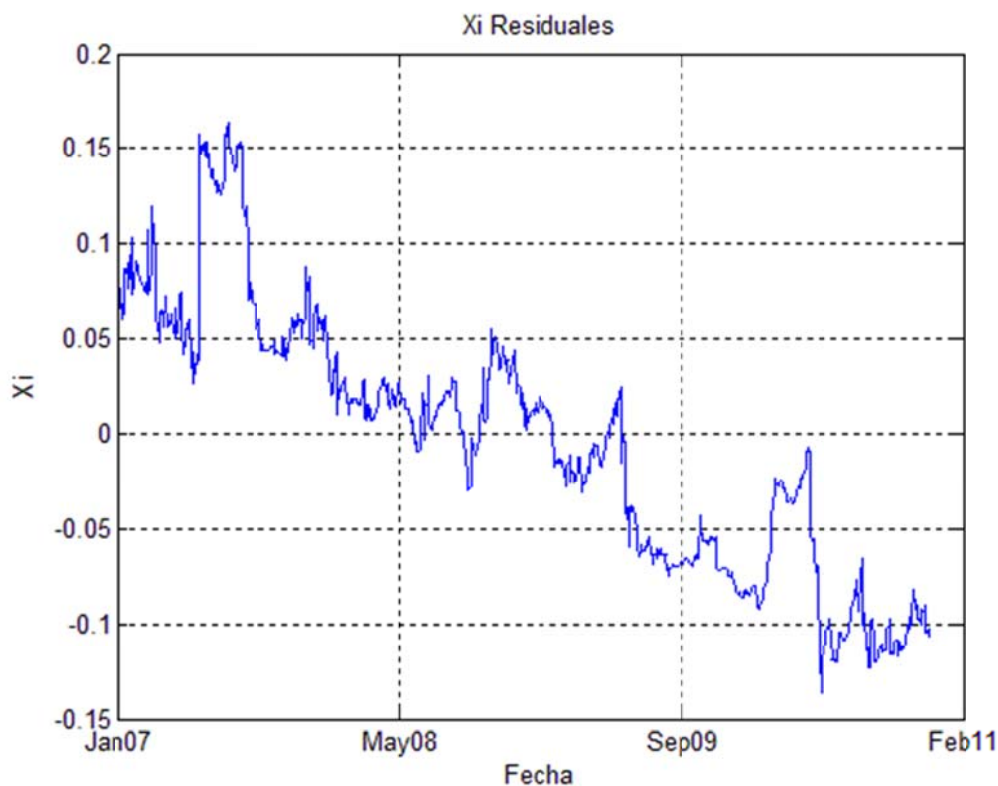


Figura 4.53: ξ Residuales IPSA.

En la figura 4.53, se observa que la distribución GDP estimada presenta ciclos en que los retornos no presentan colas pesadas. Cabe destacar que esta predicción es correcta en la medida que en los periodos que decae ξ bajo cero de manera prolongada, corresponden a los tramos en que se presentan menores pérdidas y a su vez menor volatilidad. Esto último implica que las mediciones de riesgo dinámicas en base a EVT, son consistentes con la distribución de los retornos diarios.

4.5. Análisis y Discusión de Resultados

A continuación se presenta un análisis y discusión de resultados para las simulaciones de medidas de riesgo. En primer lugar se analizan los bonos corporativos, luego las letras hipotecarias y finalmente el IPSA.

4.5.1. Resultados Índice LVACLCL

Los resultados para el índice LVACLCL se enmarcan en lo obtenido a través del backtest de las medidas de riesgo para este índice.

El número de excepciones dentro del año para el índice LVACLCL se muestran en la tabla 4.1. En ella se incluye las medidas tanto para el horizonte diario como para el de diez días. La forma de extrapolar las medidas de riesgo a un horizonte de t días es multiplicando por \sqrt{t} el índice requerido.

Medida de Riesgo	Normal 95%	Normal 99%	EVT 95%	EVT 99%
VaR 1 día	15	5	16	0
VaR 10 días	16	10	16	7
ES 1 día	8	1	4	0
ES 10 días	11	8	9	3

Tabla 4.1: Excepciones del VaR y ES del Índice LVACLCL en USD.

En la tabla anterior se observa que el performance de las medidas de riesgo realizadas mediante EVT es superior al modelo Normal en cuanto a la cantidad de excepciones se refiere. Esto se debe a que el número de excepciones obtenidas bajo el modelo EVT para todas las comparaciones realizadas, en el peor de los casos, fue igual al obtenido en la metodología normal.

A su vez, la medida regulatoria actual que emplea como indicador al VaR a 10 días, nos indica que para el modelo paramétrico, se han obtenido 10 violaciones. Bajo la regulación actual, esto produce que el modelo paramétrico aplicado para esta estimación deba ser modificado (son aceptadas hasta 9 violaciones). Así, una estrategia posible es la modificación del modelo, empleando EVT como estándar el cual no presenta complicaciones en cuanto al número de excepciones observadas.

En la sección de anexos A.6.1. se cuantifica el ratio de las medidas de riesgo a 1 día, el cual grafica la proporción que tienen las medidas evaluadas mediante EVT con respecto a la estimación normal respectiva.

4.5.2. Resultados Índice LVACLH

Los resultados para el índice LVACLH se enmarcan en lo obtenido a través del backtest de las medidas de riesgo para este índice.

El número de excepciones dentro del año en que se enmarca el análisis se muestra en la tabla 4.2.

Medida de Riesgo	Normal 95%	Normal 99%	EVT 95%	EVT 99%
VaR 1 día	12	3	20	2
VaR 10 días	13	4	31	1
ES 1 día	4	1	5	0
ES 10 días	6	0	5	0

Tabla 4.2: Excepciones del VaR y ES del Índice LVACLH en CLP.

En la tabla anterior se observa que el número de excepciones del modelo EVT es superior al Normal sólo en el caso de la estimación al 95%, que para efectos regulatorios no es la métrica fundamental.

Observando con mayor detención el VaR a 10 días, nos indica que para el modelo paramétrico, se han obtenido 4 violaciones y con EVT ha sido 1. Así, el número de excepciones es consistente con los valores obtenidos (VaR al 99% para 365 datos permite 4 excepciones). Según lo anterior, el modelo actual tiene un buen comportamiento y no hace necesarias mayores revisiones.

En la sección de anexos A.6.2. se cuantifica el ratio de las medidas de riesgo a 1 día, el cual grafica la proporción que tienen las medidas evaluadas mediante EVT con respecto a la estimación normal respectiva.

4.5.3. Resultados IPSA

Los resultados para el IPSA se enmarcan en lo obtenido a través del backtest de las medidas de riesgo para este índice.

El número de excepciones dentro del año en que se enmarca el análisis se muestra en la tabla 4.3.

Medida de Riesgo	Normal 95%	Normal 99%	EVT 95%	EVT 99%
VaR 1 día	64	24	73	18
VaR 10 días	81	42	91	35
ES 1 día	33	13	28	6
ES 10 días	55	30	47	18

Tabla 4.3: Excepciones del VaR y ES del IPSA.

En la tabla anterior se observa que el número de excepciones del modelo EVT es superior al Normal sólo en el caso de la estimación al 95% del VaR, que para efectos regulatorios no es la métrica fundamental.

El VaR a 10 días, nos indica que para el modelo paramétrico, se han obtenido 42 violaciones con un promedio anual de 11 y con EVT han sido 35 con un promedio anual de 9. Bajo la regulación actual, esto produce que el modelo paramétrico aplicado para esta estimación deba ser modificado y una estrategia posible es la modificación del modelo, empleando EVT como estándar el cual no presenta complicaciones en cuanto al número de excepciones observadas en promedio. Cabe destacar que la naturaleza de renta variable de este índice, con respecto a los anteriores que corresponden a renta fija, es consistente con los resultados obtenidos. Esto último debido a que a priori, se esperarían tener un mayor número de excepciones para este caso, debido a que el IPSA tiene mayor volatilidad que los índices de bonos.

En la sección de anexos A.6.3. se cuantifica el ratio de las medidas de riesgo a 1 día, el cual grafica la proporción que tienen las medidas evaluadas mediante EVT con respecto a la estimación normal respectiva.

4.5.4. Análisis Conjunto

Los resultados obtenidos para los tres índices entregan diferencias importantes, las cuales se pueden asociar a la composición de ellos.

Para los dos primeros índices analizados, correspondientes a bonos corporativos y letras hipotecarias, se obtuvo un menor número de excepciones que para el análisis del IPSA. Esto último es atribuible a la naturaleza propiamente tal de los índices, debido a que los dos primeros corresponden a renta fija y el IPSA a renta variable, la cual tiene una respuesta mayor a los movimientos del mercado.

A su vez, la comparación entre los dos primeros, también muestra diferencias importantes, pese a que se trata de bonos para ambos casos. Así, para el índice de bonos corporativos, se obtuvo un mayor número de excepciones respecto al de letras hipotecarias. Esto último, es atribuible a la volatilidad de cada uno de los mercados. Mientras que para el índice de bonos corporativos se aprecia una volatilidad comparable en orden de magnitud al IPSA, para las letras hipotecarias se observa una volatilidad diez veces menor. La diferencia que se puede extraer de esto, radica en la estructura de cada uno de los índices de bonos. Mientras que los bonos corporativos basan principalmente su valor en la clasificación de la contraparte (la empresa que lo otorga), las letras hipotecarias en cambio, están ligadas a una prenda que en caso de no pago es cobrada en compensación (la vivienda). El escenario más relevante corresponde al incumplimiento en el pago (default), ya que la probabilidad de recupero es mayor para una letra hipotecaria, debido a la garantía existente, pese a que la clasificación de un bono corporativo puede ser incluso mayor que la de una letra hipotecaria.

Esto último, entrega una noción tanto del comportamiento de la volatilidad de cada uno de los índices, como el del modelo para cada uno de los casos.

Capítulo 5:

Conclusiones

En esta memoria fue realizado un estudio de aplicación de la teoría de valores extremos a las medidas de riesgo financiero, dentro de las cuales se incluye el Valor en Riesgo y Expected Shortfall. El trabajo destacó el uso de la teoría estadística, aplicándose en diversos modelos específicos, con el fin de entregar un cuadro real de las mediciones de riesgo. Esto último, en conjunto con el desarrollo de una interfaz computacional de estimación de medidas de riesgo, permitieron simular los escenarios de posibles pérdidas para diversos índices pertenecientes al mercado nacional.

En este trabajo se planteó como objetivo general la aplicación de la Teoría de Valores Extremos para la gestión de riesgo financiero, con el fin de comparar los modelos empleados actualmente con la metodología propuesta. En relación a este objetivo se puede concluir que:

- La Teoría de Valores Extremos fue descrita de manera teórica con el fin de enmarcar conceptualmente su trasfondo analítico, de manera de permitir desarrollos avalados en hechos concretos que permitan obtener medidas de riesgo fehacientes para su posterior aplicación en el mercado nacional.
- Fueron determinadas las mediciones de VaR y ES, que corresponden a los principales indicadores de riesgo financieros empleados actualmente, basados en el modelo de la teoría de Valores Extremos. A partir de la aplicación de esta teoría, pudieron ser diferenciados los escenarios particulares en los que aumenta el riesgo a partir del comportamiento de la volatilidad de éstos.
- Las medidas de riesgo obtenidas presentan la virtud que son aplicables de manera general y no se circunscriben a los índices con los cuales fue testeado el método.

Como objetivos específicos fueron planteados la implementación de un modelo de estimación de pérdidas diarias empleando la Teoría de Valores Extremos, la validación del modelo desarrollado para datos consistentes en índices representativos del mercado nacional, desarrollar una aplicación para la obtención de las medidas de riesgo Value-at-Risk y Expected Shortfall empleando la Teoría de Valores Extremos y

generar estrategias a seguir según la información que entreguen las medidas de riesgo determinadas.

En relación a estos objetivos, se puede concluir que:

- Fue implementado un modelo de estimación de pérdidas diarias utilizando EVT. Así se pudieron realizar las estimaciones de las medidas de riesgo para el horizonte diario en conjunto con su posterior validación, mediante un backtest, para determinar las excepciones que se produjeron en los periodos analizados.
- El modelo fue testeado para el IPSA e índices pertenecientes a la empresa LVA, los cuales representan el benchmark de bonos corporativos, letras hipotecarias y las 40 acciones con mayor presencia bursátil. El desempeño de éstos es acorde a lo esperado, en la medida que se disminuye el número de fallas comparativamente con los modelos actualmente utilizados, sin sobreestimar el riesgo.
- La aplicación para generar las medidas de riesgo VaR y ES fue desarrollada en la plataforma Matlab. La interfaz recibe parámetros de precios diarios y entrega las medidas de riesgo realizando las simulaciones a partir de los parámetros que desee el usuario (confiabilidad, ventana de análisis, entre otros). Los tiempos computacionales son relativamente bajos, tomando como ejemplo la serie del IPSA, en la cual la simulación se calibra con una serie de datos de 3 años y se determinan 4 años de medidas de riesgo, tomando un tiempo aproximado de 5 minutos para realizarlo.
- Los resultados obtenidos, en el ámbito de los índices analizados, permiten concluir que la modelación de medidas de riesgo al 99% de confiabilidad mediante la teoría de Valores Extremos, son satisfactorias ya que presentan un mejor desempeño en los backtest, ya que se reduce el número de excepciones.

Se propone, con el fin de permitir un cumplimiento normativo, que las medidas de VaR empleando EVT para los bonos corporativos e IPSA sean aplicadas. Esto debido a que el modelo actual que asume normalidad en los retornos presenta un número mayor de excepciones que lo permitido. Para el caso de las letras hipotecarias, el modelo paramétrico actual tiene un comportamiento acorde a la normativa, por lo que resulta una medida de riesgo satisfactoria. Los casos analizados muestran que en escenarios de mayor volatilidad los resultados obtenidos mediante EVT, generan un menor número de excepciones que al asumir normalidad de retornos.

La validez de los resultados encontrados no se limita a los índices estudiados. Esto debido a que la generalidad del modelo estudiado en conjunto con la aplicación desarrollada, que entrega al usuario la posibilidad de modificar los parámetros, permiten que las medidas de riesgo VaR y ES puedan ser aplicables a diversos casos específicos.

Este estudio espera servir como referencia o herramienta en la gestión del riesgo financiero basado en medidas extremas compuestas por el VaR y ES, aplicando la teoría de Valores Extremos.

Como futuros trabajos en el tema, resultaría interesante aplicar modelos más avanzados de volatilidad condicionada en la estimación de las medidas de riesgo. Como punto de partida, es recomendado analizar modelos GARCH asimétricos, con el fin de separar correctamente la forma de la distribución de las ganancias y pérdidas. Además, se propone realizar el estudio para la aplicación de estas medidas a un portfolio y no sólo instrumentos aislados. Para este caso, las medidas fundamentales a desarrollar corresponden a las correlaciones que componen la cartera en estudio.

Referencias

- [1] McNeil A., 1999. Extreme Value Theory for Risk Managers. Suiza, ETH Zentrum. 22p.
- [2] McNeil A. & Frey R., 2000. Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach. Suiza, ETH Zentrum. 28p.
- [3] Acerbi C. y Tasche D., 2001. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk. 9p.
- [4] Cascon A. & Shadwick W., 2009. Going to Extremes to Control Risk. 31p.
- [5] Hill B., 1975. A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. 12p.
- [6] Johnson C., 2000. Métodos de Evaluación del Riesgo para Portafolios de Inversión. Chile, Banco Central de Chile. 41p.
- [7] Alexander C., 2008. Market Risk Analysis Volume II: Practical Financial Econometrics. John Wiley & Sons. 430p.
- [8] Danielsson J., 2007. The Value-at-Risk Reference. Risk Books. 539p.
- [9] Sarykalin S., Serraino G. & Uryasev S., 2008. Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization. 25p.
- [10] Ngai Hang Chan y Hoy Ying Wong, 2006. Simulation Techniques in Financial Risk Management. John Wiley & Sons. 230p.
- [11] Fera J. y Oliver M., 2006. Más allá del valor en riesgo (VeR): el VeR condicional. España. 10p.
- [12] J.P.Morgan/Reuters, 1996. RiskMetrics™—Technical Document. New York. 296p.
- [13] Juárez S., 2003. Robust and Efficient Estimation for the Generalized Pareto Distribution. Southern Methodist University. 161p.
- [14] Hull J. Options, Futures and Other Derivatives. 5ª ed. Prentice Hall. 756p.
- [15] Fernández V., 2003. Extreme Value Theory and Value at Risk. Revista de Análisis Económico, Vol. 18, N°1, pp. 57-85. 29p.

- [16] Yahoo Finanzas [en línea] <http://es.finance.yahoo.com/> [consulta 11 de Diciembre de 2010].
- [17] LVA Índices [en línea] <https://www.lvaindices.com/home.asp> [consulta 11 de Diciembre de 2010]

Anexos

A.1. Lista de Acrónimos

ACF:	Función de Autocorrelación
AR:	Modelos Autorregresivos
ARMA:	Modelos Autorregresivos de Media Móvil
EVT:	Teoría de Valores Extremos
ES:	Expected Shortfall
GARCH:	Modelos Generalizados Autorregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada
GPD:	Distribución Generalizada de Pareto
LVACLK:	Índices LVA de Bonos Corporativos
LVACLH:	Índices LVA de Letras Hipotecarias
MA:	Media Móvil
VaR:	Value-at-Risk

A.2. La Distribución Normal

Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.

La función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{A.1})$$

donde μ es la media y σ^2 la varianza.

La distribución normal queda definida por dos parámetros, su media y su desviación típica y se representa de la siguiente forma:

$$N(\mu, \sigma) \quad (\text{A.2})$$

A.3. VaR Histórico

Este método no supone ninguna función de distribución para las pérdidas y ganancias, y se apoya únicamente en el comportamiento histórico observado.

Supongamos que se cuenta con información diaria y que se define un precio representativo de cada día (por ejemplo, el precio de cierre). A continuación, se calculan los retornos diarios de la muestra seleccionada.

Con una muestra de N observaciones de precios, se tiene $N - 1$ retornos, R_1, R_2, \dots, R_{N-1} . La posición actual tiene un valor de mercado V . Sea L_t la rentabilidad, medida en dinero, sobre V en la fecha t :

$$L_t = V \cdot R_t \quad (\text{A.3})$$

A continuación, ordenamos los valores calculados de menor a mayor:

$$L_{1:N-1}, L_{2:N-1}, \dots, L_{j:N-1}, \dots, L_{N-1:N-1} \quad (\text{A.4})$$

donde $L_{1:N-1}$ es la pérdida mayor observada en la muestra de tamaño $N - 1$, $L_{2:N-1}$ es la segunda mayor pérdida, y así sucesivamente.

Un estimador del VaR por simulación histórica (SH), para un nivel de confianza α , viene dado por:

$$VaR_{SH}(\alpha) = -L_{i:N-1} \quad (\text{A.5})$$

donde i es el número entero que satisface $\frac{i-1}{N-1} < \alpha \leq \frac{i}{N-1}$.

A.4. VaR Monte Carlo

Una metodología más sofisticada e intensiva en el uso computacional [6], es la de simulaciones de Monte Carlo. Esta consiste en la generación de múltiples realizaciones para los retornos de un activo (o activos) con un horizonte predefinido, como por ejemplo una semana o un mes. Estas realizaciones deben ser generadas a partir de una función de distribución de probabilidades que represente al proceso estocástico simulado.

Una vez simuladas las diversas trayectorias (usualmente este número es grande, i.e., 5.000 o 10.000 realizaciones) se obtienen los valores del retorno para el horizonte de inversión o análisis preestablecido (1 día, 10 días o un mes). Con estos 5.000 o 10.000 valores se procede a calcular la desviación estándar del retorno del activo, de manera de generar su VaR.

El procedimiento es bastante directo si el portafolio consiste en un activo. Sin embargo, si la cartera de inversiones está compuesta por n activos, entonces se debe simular una secuencia de 10.000 realizaciones para cada uno de esos n activos. Si los instrumentos no están correlacionados entre sí, el ejercicio sería simplemente repetir n veces (una vez por instrumento), el mismo procedimiento que se siguió para el portafolio de un activo. Sin embargo, si las correlaciones entre los instrumentos no son nulas, la simulación de los retornos debe considerar tal covarianza, lo cual complica el procedimiento de generación de procesos estocásticos. Esta extensión metodológica se revisará en una sección posterior.

La generación de procesos estocásticos a través de simulaciones de Monte Carlo es un avance necesario en la medida que se tienen portafolios con instrumentos asimétricos, como por ejemplo Opciones. Si la cartera contiene solamente instrumentos lineales, los resultados del proceso de simulación de Monte Carlo serán equivalentes al resultado del análisis de simulación histórica, o paramétrica si no consideramos la volatilidad implícita en las opciones.

A.5. IPSA

El IPSA (Índice de Precio Selectivo de Acciones) es el principal índice bursátil de Chile, elaborado por la Bolsa de Comercio de Santiago. Corresponde a un indicador de rentabilidad de las 40 acciones con mayor presencia bursátil, siendo dicha lista revisada anualmente. En su cálculo el índice considera todas las variaciones de capital de cada acción incluida en el índice, ponderada por el peso relativo de cada una de ellas, siendo dicho peso calculado a partir de una fórmula que considera, tanto la capitalización bursátil, como el número de transacciones y el free float.

El IPSA es calculado desde el año 1977, estando en un primer momento (hasta 1980) separado en dos índices, uno de acciones con alta presencia (mayor a 75%) y aquellas de baja presencia (entre 30% y 75%).

Hasta el año 2002 el IPSA se calculaba utilizando como base (100) el nivel del índice a principios de cada año, siendo modificadas las empresas que lo componían de manera trimestral. A partir del año 2003, las acciones componentes del IPSA son establecidas el 31 de diciembre de cada año y se utiliza como base (1.000) dicho día.

El índice ofrece bastante seguridad a los inversionistas, especialmente en las empresas de servicios públicos básicos como el agua, electricidad y comunicaciones. Muchas de estas empresas se encuentran con mayor ponderación en el índice.

Actualmente las empresas que componen el IPSA son:

Nemotécnico	Empresa
ALMENDRAL	Almendral
ANDINA-B	Embotelladora Andina
ANTARCHILE	AntarChile
BANMEDICA	Banmedica
BCI	Banco de Crédito e Inversiones
BSANTANDER	Banco Santander Chile
CALICHERAA	Sociedad de Inversiones Pampa Calichera
CAP	CAP
CENCOSUD	Cencosud
CCU	CCU
CGE	Compañía General de Electricidad
CHILE	Banco de Chile
CMPC	Empresas CMPC
COLBUN	Colbún
CONCHATORO	Viña Concha y Toro
COPEC	Copec
CORPBANCA	CorpBanca
EDELNOR	Empresa Eléctrica del Norte Grande
ENDESA	Empresa Nacional de Electricidad
ENERSIS	Enersis
ENTEL	Entel Chile
FALABELLA	S.A.C.I. Falabella
GENER	AES Gener
IAM	Inversiones Aguas Metropolitanas
LA POLAR	La Polar
LAN	LAN Airlines
MADECO	Madeco
MASISA	Masisa
MINERA	Minera Valparaíso
ORO BLANCO	Sociedad de Inversiones Oro Blanco
PARAUCO	Parque Arauco S.A.
PROVIDA	Provida
RIPLEY	Ripley Corp. S.A.
SALFACORP	Salfacorp
SK	Sigdo Koppers
SM-CHILE B	Banco de Chile
SOCOVESA	Socovesa
SONDA	Sonda
SQM-B	Sociedad Química y Minera de Chile
VAPORES	Compañía Sudamericana de Vapores

Tabla A.1: Empresas que componen el IPSA.

A.6. Ratios de Índices

A.6.1. Ratios Índice LVACL

A continuación se cuantifica el ratio de las medidas de riesgo a 1 día, el cual grafica la proporción que tienen las medidas evaluadas mediante EVT con respecto a la estimación normal respectiva. En las figuras A.1 y A.2 se muestra el ratio para las mediciones de ES al 95% y 99% respectivamente, a su vez, las figuras A.3 y A.4 grafican el ratio para el VaR al 95% y 99% respectivamente.

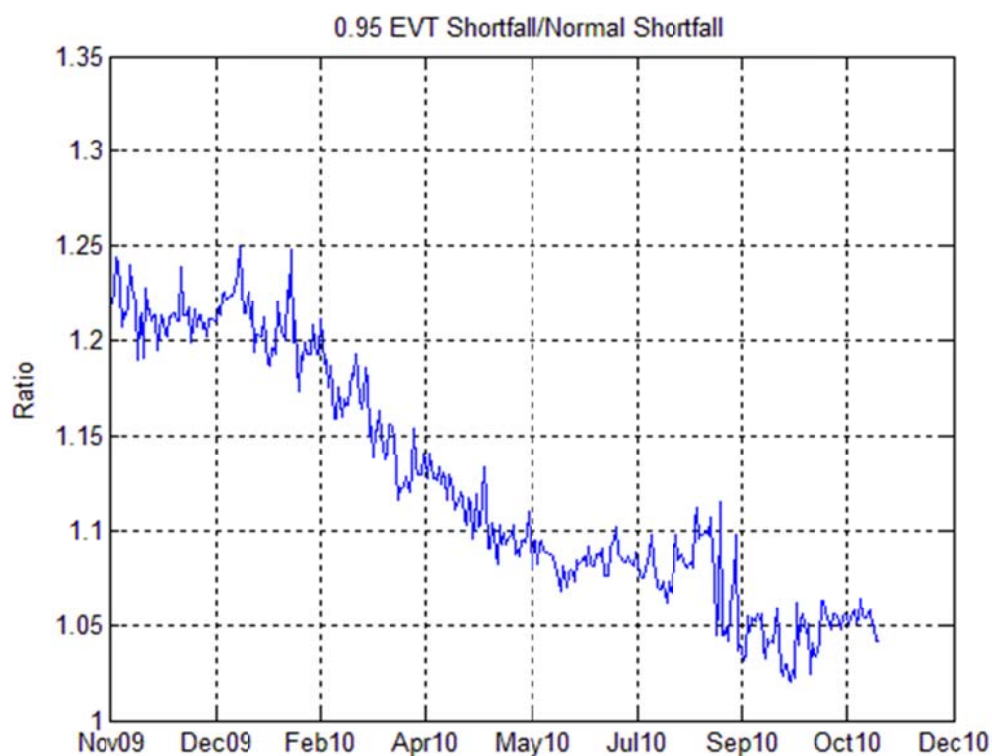


Figura A.1: Ratio ES EVT/Normal al 95% Índice LVACL en USD.

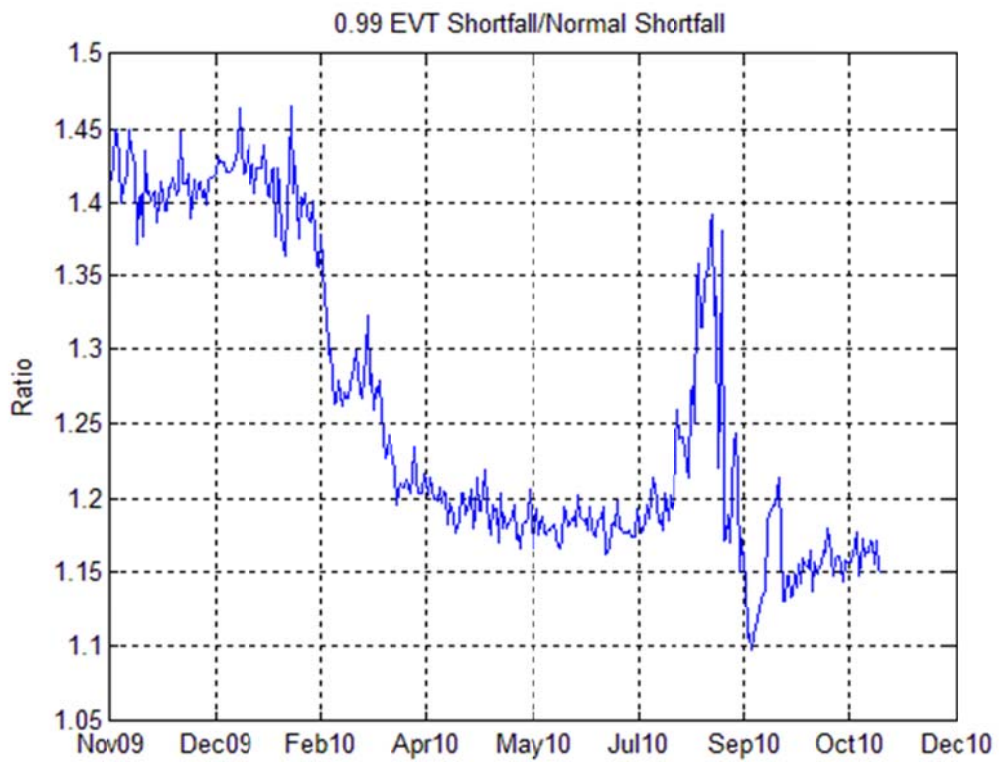


Figura A.2: Ratio ES EVT/Normal al 99% Índice LVACL en USD.

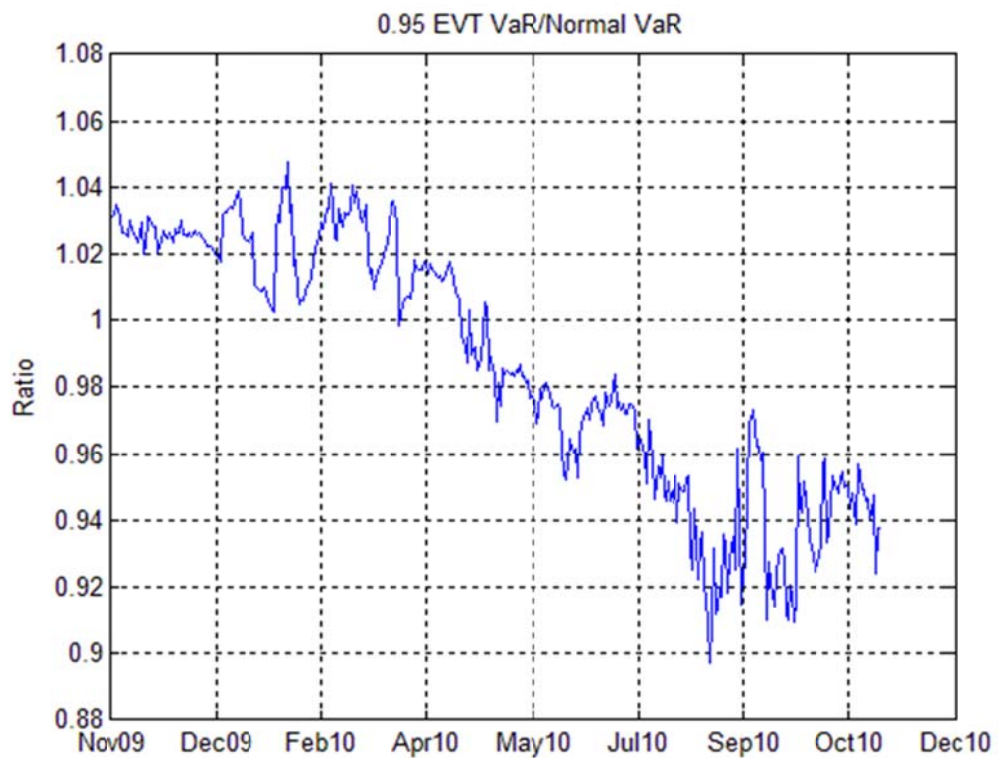


Figura A.3: Ratio VaR EVT/Normal al 95% Índice LVACL en USD.

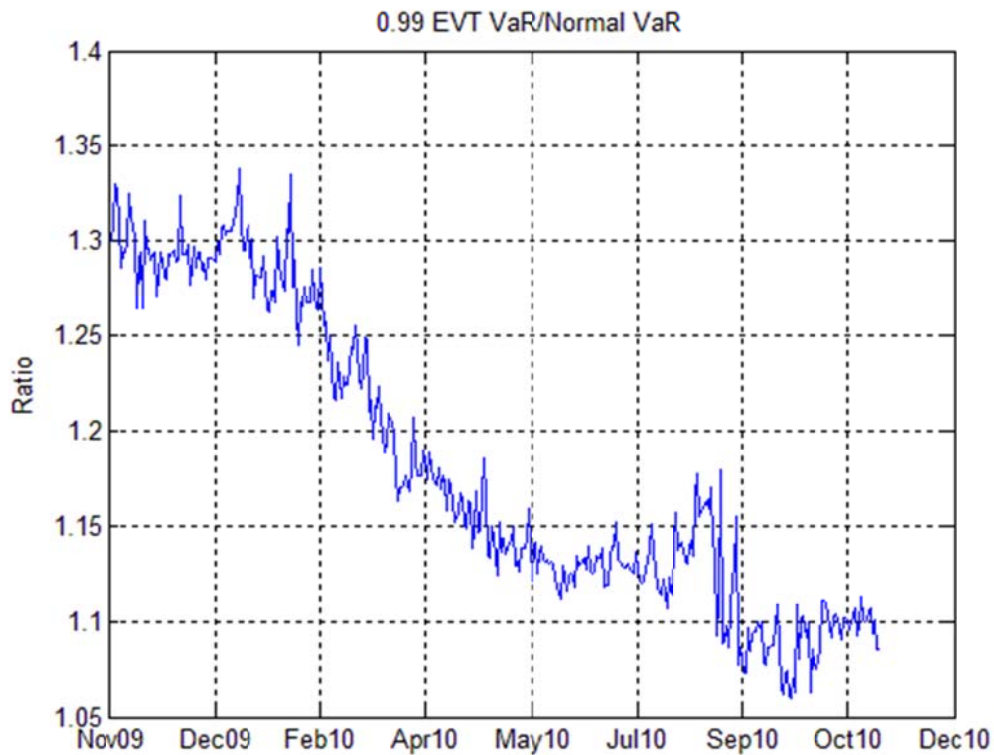


Figura A.4: Ratio VaR EVT/Normal al 99% Índice LVACLK en USD.

El ratio de índices presentado en las figuras A.1 a A.4, muestra un valor mayor que uno de manera estricta para los índices ES 95% y 99% y VaR al 99%. Sin embargo en el caso del VaR al 95% esta tendencia no se cumple, por lo que existen valores de VaR, bajo la metodología EVT, que son menores que la evaluación Normal. Este último efecto, no implica un deterioro de la estimación con una ventana de 10 días, ya que la predicción mantiene su número de fallas, a diferencia de la metodología normal, que aumenta en una lo cual equipara el resultado con EVT.

A.6.2.Resultados Índice LVACLH

Es cuantificado el ratio de las medidas de riesgo a 1 día. En las figuras A.5 y A.6 se muestra el ratio para las mediciones de ES al 95% y 99% respectivamente, a su vez, las figuras A.7 y A.8 grafican el ratio para el VaR al 95% y 99% respectivamente.

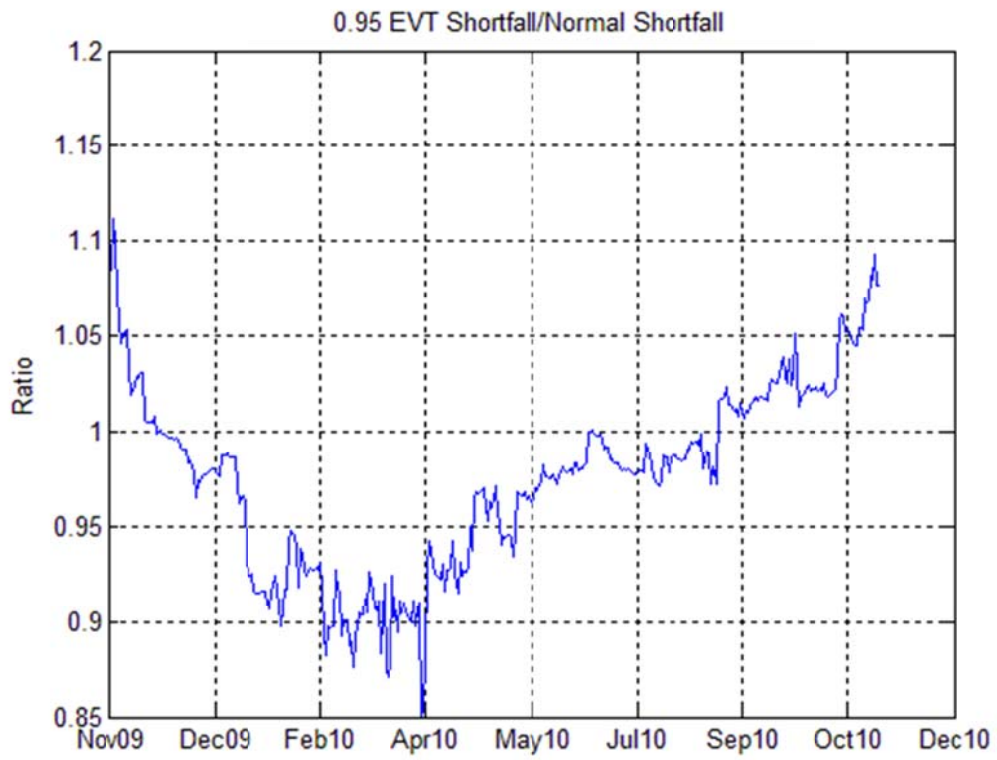


Figura A.5: Ratio ES EVT/Normal al 95% Índice LVACLH en CLP.

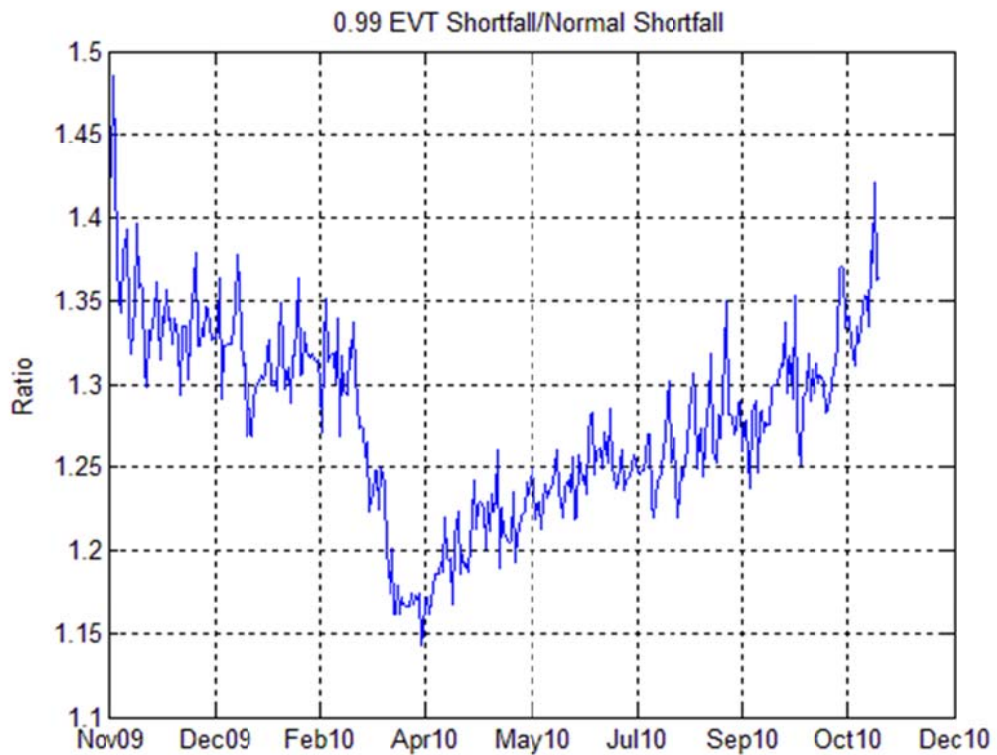


Figura A.6: Ratio ES EVT/Normal al 99% Índice LVACLH en CLP.

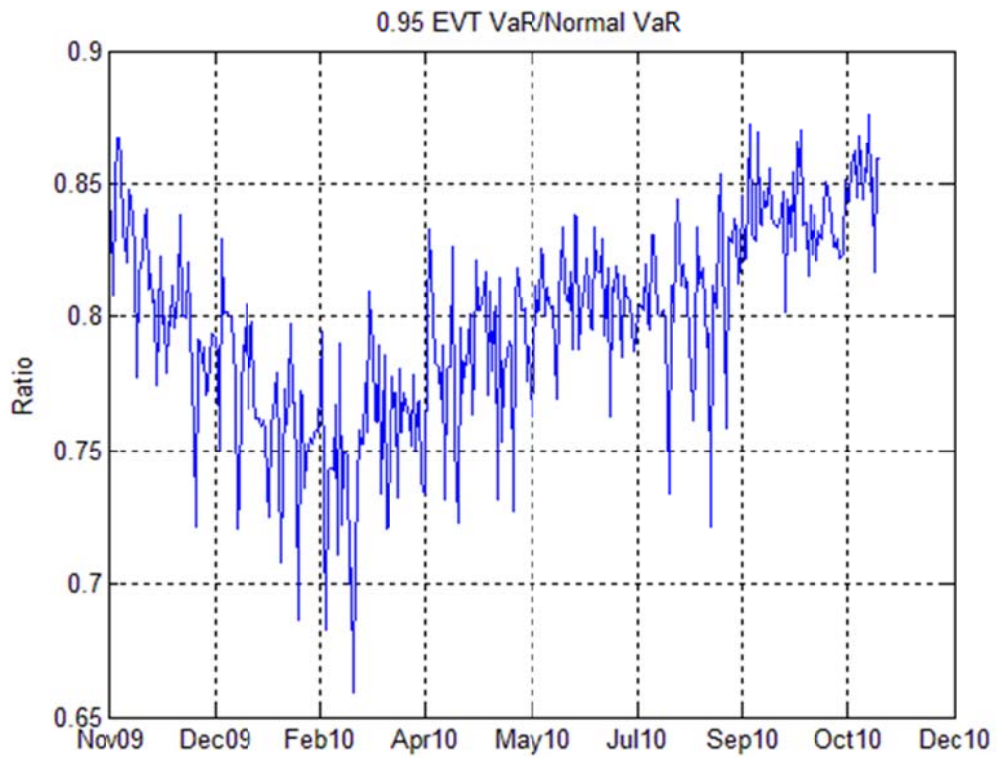


Figura A.7: Ratio VaR EVT/Normal al 95% Índice LVACLH en CLP.



Figura A.8: Ratio VaR EVT/Normal al 99% Índice LVACLH en CLP.

A diferencia del índice LVA de bonos corporativos, para el caso de los hipotecarios se observa que el único ratio que es estrictamente mayor que 1 corresponde a ES al 99%. En los demás casos tenemos un ratio agrupados por ciclos (clúster de volatilidad), en los cuales para periodos de alta volatilidad el ratio tiende a aumentar. Este último efecto, para este caso si implica un deterioro notorio de la estimación del VaR al 95% con una ventana de 10 días, debido a que la predicción aumenta considerablemente el número de errores impidiendo que este modelo sea considerado válido.

A.6.3. Ratios IPSA

Ahora, se procede a cuantificar el ratio de las medidas de riesgo a 1 día. En las figuras A.9 y A.10 se muestra el ratio para las mediciones de ES al 95% y 99% respectivamente, a su vez, las figuras A.11 y A.12 grafican el ratio para el VaR al 95% y 99% respectivamente.

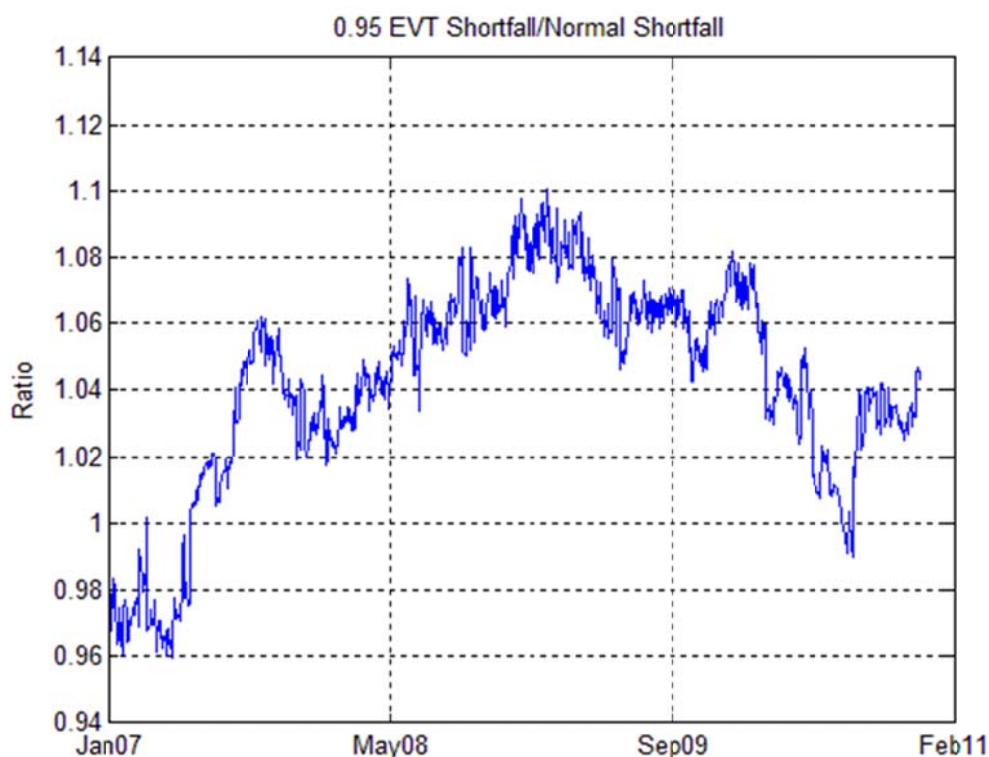


Figura A.9: Ratio ES EVT/Normal al 95% IPSA.

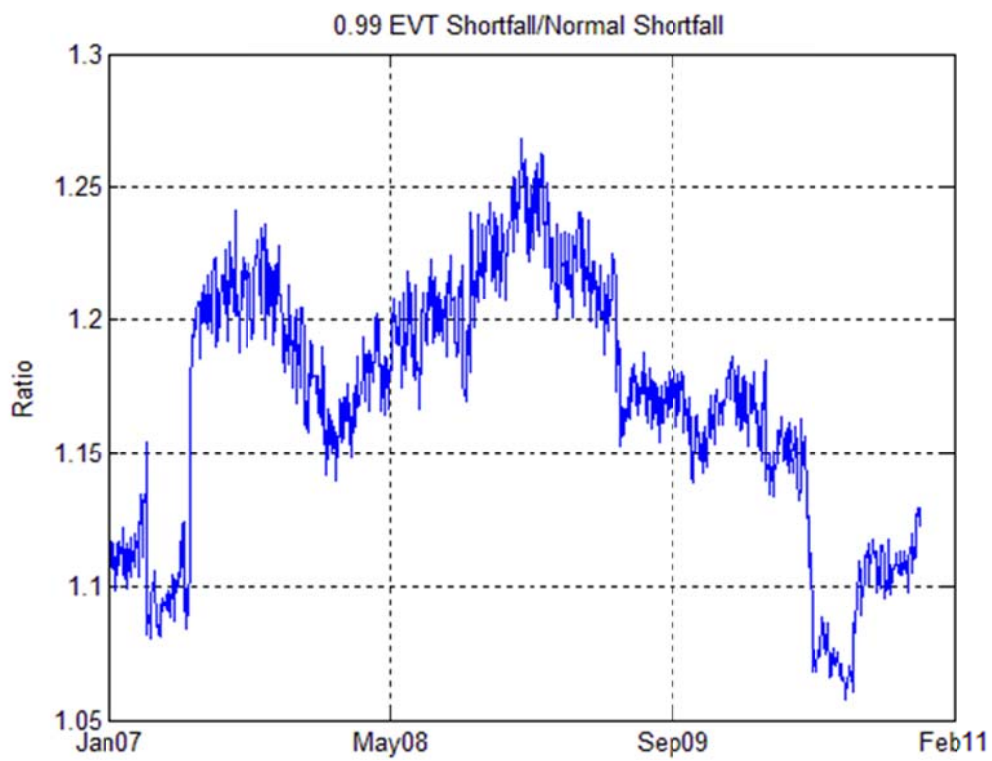


Figura A.10: Ratio ES EVT/Normal al 99% IPSA.

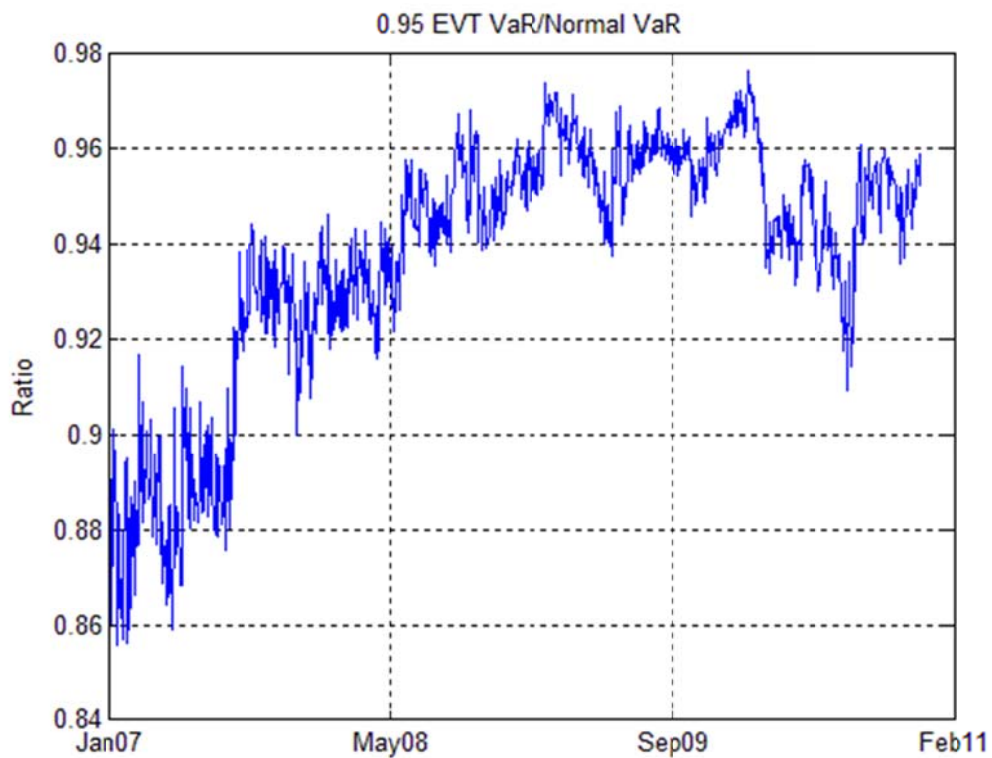


Figura A.11: Ratio VaR EVT/Normal al 95% IPSA.

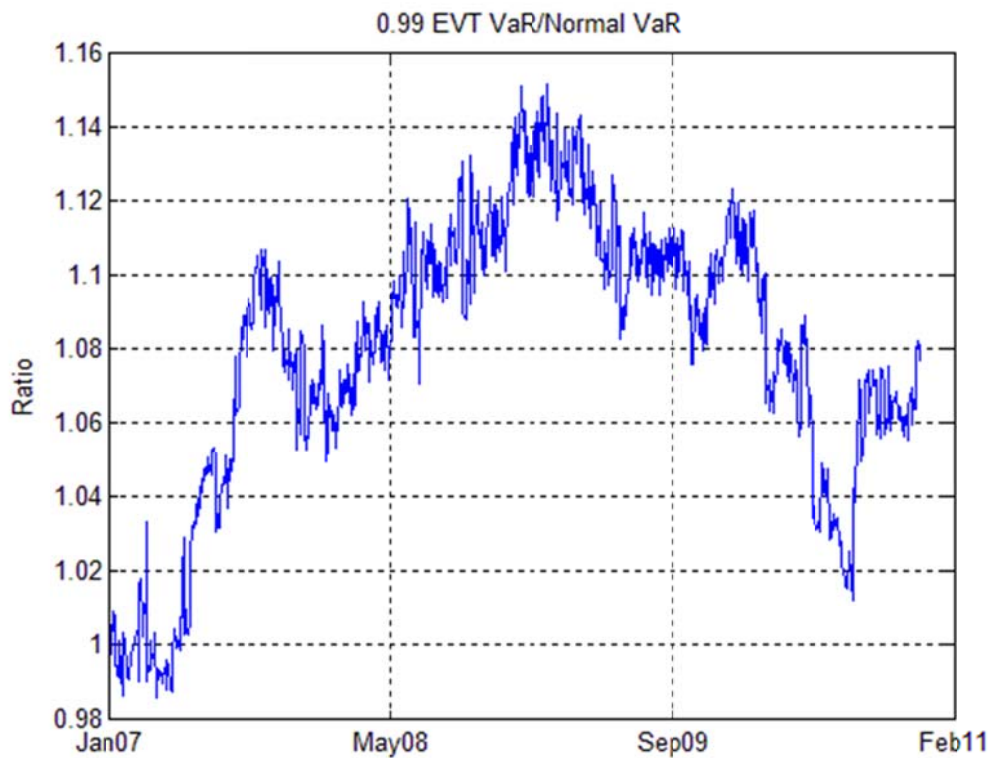


Figura A.12: Ratio VaR EVT/Normal al 99% IPSA.

El ratio de índices presentado en las figuras A.9 a A.12, muestra un valor mayor que uno de manera estricta para los al 99%. Sin embargo en el caso del VaR al 95% esta tendencia no se cumple y permanentemente los valores de VaR EVT son menores que la estimación normal. Este último efecto, implica un deterioro de la estimación debido al aumento de excepciones debido a esta diferencia.

A.7. Código Desarrollado en Matlab

El código se divide en 4 funciones que son:

- Código principal: pareto.
- Función de gráficos: graf_pareto
- Función de estimador de Hill: est_hill
- Función para realizar el backtest: backtest

Cada uno de estos códigos se detalla a continuación:

Pareto:

```
function g=pareto(t,z)

X=price2ret(z);
N=length(X)
ventana=input('Ingreso Ventana de Datos: ');
M=input('Ingreso Treshold: ');
alpha=input('Ingreso alpha: ');
stop=input('Ingreso Nº Iteraciones: ');

fecha1=datestr(x2mdate(t(2,1)-1462,1));
fecha2=datestr(x2mdate(t(ventana+2,1)-1462,1));
t=t-t(1,1);
Y=-X;
Price_norm=z(2:N+1,1)/z(2,1);           %Vector normalizado del índice
graf_pareto(t,z,ventana,M,fecha1,fecha2);
close

ES_GPD=zeros(stop,1);
VaR_GPD=zeros(stop,1);
ES_Norm=zeros(stop,1);
VaR_Norm=zeros(stop,1);
Z_q=zeros(stop,1);
Z_i=zeros(ventana, stop);
Mu_Y=zeros(ventana, stop);
XI=zeros(stop,1);
BETA=zeros(stop,1);

for i=1:stop

    spec = garchset('R', 1,'P',1,'Q',1,'Display', 'off');
    [Coeff,Errors,LLF,Innovations,Sigmas,Summary]=garchfit(spec,Y(i:ventana-
1+i,1));
    AR = garchget(Coeff, 'AR');
    if i==1
        Mu_Y(1,1)=AR*Y(1,1);
        Mu_Y(2:ventana,1)=AR*Y(1:ventana-1,1);
    else Mu_Y(:,i)=AR*Y(i-1:ventana-2+i,1);
    end
```

```

Z_i(:,i)=sort((Y(i:ventana-1+i,1)-Mu_Y(:,i))./Sigmas, 'descend');
[sFcast, yFcast] = garchpred(Coeff,Y(i:ventana-1+i,1),1);

xi_beta=gpfit(Z_i(1:M-1,i)-Z_i(M,i));           %K=xi, sigma=beta
XI(i,1)=xi_beta(1,1);
BETA(i,1)=xi_beta(1,2);

Z_q(i,1)=Z_i(M,1)+BETA(i,1)/XI(i,1)*(((1-alpha)/((M-1)/ventana))^( -
XI(i,1))-1);
ES_GPD(i,1)=yFcast+sFcast*Z_q(i,1)*(1/(1-XI(i,1))+(BETA(i,1)-
XI(i,1)*Z_i(M,i))/((1-XI(i,1))*Z_q(i,1)));
VaR_Norm(i,1)=yFcast+sFcast*norminv(alpha,0,1);
ES_Norm(i,1)=yFcast+sFcast*exp(-norminv(1-alpha,0,1)^2/2)/((1-
alpha)*sqrt(2*pi));
VaR_GPD(i,1)=yFcast+sFcast*Z_q(i,1);
end

t1=t(ventana+2:ventana+stop+1)-t(ventana+1,1);

plot(t1,Y(ventana+1:ventana+stop,1), 'b');
hold on;
plot(t1,ES_GPD, 'r');
hold on;
plot(t1,ES_Norm, 'g');
hold on;
plot(t1,VaR_GPD, 'm');
hold on;
plot(t1,VaR_Norm, 'c');
hold off;
xlabel('Fecha'); ylabel('PnL/VaR/ES');
grid on;
title(['Medidas de Riesgo al ',num2str(alpha*100),'% vs PnL']);
dateaxis('x', 12, fecha2);
legend('PnL','Expected Shortfall EVT','Expected Shortfall','VaR
EVT','VaR','location','southeast');
pause

backtest(Y(ventana+1:ventana+stop,1),ES_GPD,ES_Norm,VaR_GPD,VaR_Norm,stop,fech
a2,t1,alpha)

plot(t1,ES_GPD./ES_Norm);
xlabel('Fecha'); ylabel('Ratio');
grid on;
title([num2str(alpha),' EVT Shortfall/Normal Shortfall']);
dateaxis('x', 12, fecha2);
pause

plot(t1,VaR_GPD./VaR_Norm);
xlabel('Fecha'); ylabel('Ratio');
grid on;
title([num2str(alpha),' EVT VaR/Normal VaR']);
dateaxis('x', 12, fecha2);
pause

```



```

plot(t1,XI);
xlabel('Fecha'); ylabel('Xi');
grid on;
title('Xi Residuales');
dateaxis('x', 12, fecha2);
pause

close

```

Gráficos:

```
function g=graf_pareto(t,z,ventana,M,fecha1,fecha2)
```

```

X=price2ret(z);
N=length(X);
Y=-X;
Z_i=zeros(ventana, 1);
Z_ord=zeros(ventana-1, 1);
Mu_Y=zeros(ventana, 1);

spec = garchset('R', 1,'P',1,'Q',1,'Display', 'off');      %Se especifica un
AR(1)-GARCH(1,1)
[Coeff,Errors,LLF,Innovations,Sigmas,Summary]=garchfit(spec,Y(1:ventana,1));
%Se obtienen los parámetros del AR(1)-GARCH(1,1)
Coeff
AR = garchget(Coeff, 'AR');
C = garchget(Coeff, 'C');
Mu_Y(1,1)=0;
Mu_Y(2:ventana,1)=AR*Y(1:ventana-1,1)+C;
Z_i(2:ventana,1)=(Y(2:ventana,1)-Mu_Y(2:ventana,1))./Sigmas(1:ventana-1,1);
Z_ord=sort((Y(2:ventana,1)-Mu_Y(2:ventana,1))./Sigmas(1:ventana-
1,1),'descend');
xi_beta=gpfit(Z_ord(1:M-1,1)-Z_ord(M,1))      %K=xi, sigma=beta
XI=xi_beta(1,1);
BETA=xi_beta(1,2);

%Gráfico Índice Normalizado ventana
Price_norm=z(2:N+1,1)/z(2,1);      %Vector normalizado del índice
plot(t(2:ventana+1,1),Price_norm(1:ventana,1)); xlabel('Fecha');
ylabel('Retorno');
grid on; legend('Xi/X1','location','southeast'); title('Retorno Normalizado');
dateaxis('x', 12, fecha1)
pause

%Gráfico PnL ventana
plot(t(1:ventana,1),X(1:ventana,1)); xlabel('Fecha'); ylabel('Retorno');
grid on; legend('log(Si/Si-1)','location','southeast'); title('Profit and
Loss'); dateaxis('x', 12, fecha1);
pause

%Histograma de Retornos ventana
hist(X(1:N,1),150); title('Histograma de PnL');
pause

%Gráfico PnL ventana y Volatilidad

```

```

subplot(2,1,1);
plot(t(1:ventana,1),X(1:ventana,1)); ylabel('Retorno');
grid on; title('Profit and Loss'); dateaxis('x', 12, fecha1);
subplot(2,1,2); plot(t(2:ventana+1,1),Sigmas)
grid on; title('Volatilidad Modelo GARCH(1,1)'); dateaxis('x', 12, fecha1)
pause

subplot(1,1,1);      %Volvemos a un gráfico por Pantalla

%Gráfico Pérdidas
perdidas=zeros(ventana,1);
for j=1:ventana
    if X(j,1)<0
        perdidas(j,1)=-X(j,1);
        j=j+1;
    else
        j=j+1;
    end
end
plot(t(1:ventana,1),perdidas(1:ventana,1)); xlabel('Fecha');
ylabel('Pérdidas');
grid on; title('Logaritmo Pérdidas'); dateaxis('x', 12, fecha1);
pause

%Correlograma
subplot(1,2,1);
autocorr(Y(1:ventana,1)); ylabel('ACF'); title('Correlograma Retornos');
%Autocorrelación ventana
subplot(1,2,2);
Y_abs=abs(Y);
autocorr(Y_abs(1:ventana,1)); ylabel('ACF'); title('Correlograma Valor
Absoluto Retornos');      %Autocorrelación absoluta ventana
pause

subplot(1,1,1);      %Volvemos a un gráfico por Pantalla

%QQ Plot ventana
QQ_X=(X(1:ventana,1)-mean(X(1:ventana,1)))/std(X(1:ventana,1)); qqplot(QQ_X);
xlabel('Distribución Normal');
ylabel('Distribución Empírica Retornos'); title('Q-Q Plot');
pause

%QQ Plot residuales
QQ_X=(Z_i(1:ventana,1)-mean(Z_i(1:ventana,1)))/std(Z_i(1:ventana,1));
qqplot(QQ_X); xlabel('Distribución Normal');
ylabel('Distribución Empírica Residuales'); title('Q-Q Plot Residuales');
pause

%Autocorrelación residuales
subplot(1,2,1);
autocorr(Z_i(1:ventana,1)); ylabel('ACF'); title('Correlograma Residuales');
subplot(1,2,2);
autocorr(abs(Z_i(1:ventana,1))); ylabel('ACF'); title('Correlograma Valor
Absoluto Residuales');
pause

```

```

subplot(1,1,1);      %Volvemos a un gráfico por Pantalla

%Estimador Hill
est_hill(Z_ord,ventana-1);

subplot(1,1,1);      %Volvemos a un gráfico por Pantalla

%Graficamos la GPD ajustada

[F,yi] = ecdf(Z_ord(1:M-1,1)-Z_ord(M,1));
plot(yi,gpcdf(yi,XI,BETA),'-');
hold on; stairs(yi,F,'r'); grid on; hold off;
legend('GPD Ajustada','CDF Empírica','location','southeast');
xlabel('Excesos sobre umbral'); ylabel('Distribución Acumulada'); title('GPD
ajustada vs CDF Empírica');
pause

```

Estimador de Hill:

```

%Tail Index: estimador de Hill

function est_hill(x,ventana)      %Se deben ingresar las pérdidas con signo
    positivo
    n=0;
    for i=1:ventana
        if x(i,1)>0
            n=n+1;
            i=i+1;
        else
            i=i+1;
        end
    end
    ord=sort(x,'descend'); %Pérdidas Ordenadas
    hill_1=zeros(n-1,1); %Estimador de Hill
    for i=1:n-1 %Calcula el estimador de Hill
        for k=1:i
            hill_1(i,1)=hill_1(i,1)+(log(ord(k,1))-log(ord(i+1,1)))/i;
        end
    end
    indice=1:1:n-1; %Indexa el estimador de Hill

%Gráfico estimador de Hill

subplot(1,1,1);

plot(indice,hill_1);
xlabel('Valor de M (Treshold)'); ylabel('Tail Index');
grid on;
legend('Índice','location','southeast');
title('Estimador de Hill: Tail Index');
pause

```

Backtest:

```
function backtest(x,EG,EN,VG,VN,stop,fecha2,t,alpha)
%Test 1 día
MR=[EG EN VG VN];
EMR=[EG EN VG VN];
BT1=zeros(4,1);
BT10=zeros(4,1);
for j=1:4
    for i=1:stop
        if x(i,1)>MR(i,j)
            BT1(j,1)=BT1(j,1)+1;
        else
            EMR(i,j)=NaN;
        end
        i=i+1;
    end
    j=j+1;
end
BT1
for j=1:4
    for i=1:stop-9
        if sum(x(i:i+9,1))>sqrt(10)*MR(i,j)
            BT10(j,1)=BT10(j,1)+1;
        end
        i=i+1;
    end
    j=j+1;
end
BT10
plot(t,x); hold on;
plot(t,EMR(:,1), 'ro'); hold on;
plot(t,EMR(:,3), 'rx'); hold off;
xlabel('Fecha'); ylabel('PnL/ES');
grid on;
title(['Excepciones Expected Shortfall al ',num2str(alpha*100),'%']);
dateaxis('x', 12, fecha2);
legend('PnL', 'Expected Shortfall EVT', 'Expected Shortfall
Normal', 'location', 'southeast');
pause

plot(t,x);
hold on;
plot(t,EMR(:,2), 'ro');
hold on;
plot(t,EMR(:,4), 'rx');
hold off;
xlabel('Fecha'); ylabel('PnL/VaR');
grid on;
title(['Excepciones VaR al ',num2str(alpha*100),'%']);
dateaxis('x', 12, fecha2);
legend('PnL', 'VaR EVT', 'VaR Normal', 'location', 'southeast');

pause
```