



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ARRASTRE INCIPIENTE DE PARTICULAS EN FLUJOS
DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

DANIELA ALEJANDRA CARRILLO PEDRERO

PROFESOR GUÍA:
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CHRISTIAN IHLE BASCUÑÁN
RODRIGO SOTO BERTRÁN

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
POR: DANIELA CARRILLO P.
FECHA: 23/12/2011
PROF. GUÍA: Sr. ALDO TAMBURRINO T.

ARRASTRE INCIPIENTE DE PARTÍCULAS EN FLUJOS DE FLUIDOS NO NEWTONIANOS

El objetivo general del presente trabajo es encontrar una relación experimental que defina la condición límite en que las partículas pertenecientes a un lecho, por sobre el cual se tiene un flujo de un fluido no newtoniano, comiencen a moverse por efecto de este flujo. La condición límite se definirá en términos de un esfuerzo de corte crítico necesario para iniciar el movimiento. Si bien hay un gran número de estudios que analizan esta condición límite para fluidos newtonianos, el estudio del transporte incipiente debido a la acción de flujos de fluidos no newtonianos es limitado, y relaciones de cálculo parecen ser más bien la excepción, pudiendo mencionarse los trabajos de Daido (1971) y Wan (1982).

En la naturaleza y en muchos procesos industriales el problema estudiado en esta memoria surge al tener mezclas de agua con partículas sólidas en un amplio rango de tamaños, de forma que el agua con las partículas más finas forman un medio que se comporta como un fluido no newtoniano, capaces de transportar a las partículas más grandes.

Para realizar este trabajo se requiere confeccionar fluidos de comportamiento no newtoniano que permitan la visualización a través de él. Para esto se utilizaron soluciones de carboximetilcelulosa en agua y de carbopol en agua, las cuales le otorgan un comportamiento pseudoplástico y plástico al fluido, respectivamente. En cuanto a las partículas que conforman el lecho, se requieren lechos de granulometría uniforme, para lo cual se utilizaron arenas de tres distintos diámetros representativos.

Para determinar la condición de arrastre incipiente se realizaron mediciones en régimen permanente para distintas condiciones definidas por un fluido de una misma reología y un tipo de sedimentos no cohesivos. Estas mediciones consisten en realizar experimentos con al menos cuatro condiciones diferentes de flujo para cada una de las cuales se realizan mediciones cuando no hay arrastre de partículas, cuando el arrastre es incipiente y cuando es generalizado. La idea es cubrir un gran rango del número de Reynolds de la partícula, el cual es definido en función de los parámetros de la ley de potencia para fluidos pseudoplásticos y de los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley para fluidos con esfuerzo de fluencia.

Los experimentos realizados cubren los regímenes de flujo subcrítico y supercrítico, además de escurrimientos tanto uniformes como gradualmente variados. Debido a la variación de la altura de escurrimiento en la dirección del flujo, se dedujeron expresiones para corregir el esfuerzo de corte sobre el fondo.

Como resultado se obtuvo que definiendo un número de Reynolds generalizado de la partícula, Re_{*P} , que incorpore los distintos parámetros que determinan una reología en particular y restando al esfuerzo de corte crítico el esfuerzo de fluencia, es posible generalizar el diagrama de Shields *et al.* (1936), encontrándose que para $Re_{*P} \geq 1$ es válida la relación original, ajustada por Rouse (1939) a los datos de Shields. En tanto, para $Re_{*P} \leq 1$, la curva propuesta por Mantz se ajusta de mejor manera a los datos experimentales que la proyección del ajuste de Rouse.

Agradecimientos

Mi principal agradecimiento va dirigido a mi profesor guía, Aldo Tamburrino, sin su ayuda y constante apoyo este trabajo no hubiera sido posible.

También quiero agradecer a Christian Ihle y Rodrigo Soto por sus correcciones.

Muchas gracias a todos mis compañeros y amigos que hicieron más llevadero este largo proceso, a mis compañeros de pecera que migraron mucho antes que yo y a los que me abandonaron para subir de nivel, otorgado por el hecho de tener oficina.

Especiales agradecimientos a todas las personas con quienes compartí durante mi estadía en el laboratorio: Manuel, Juan, Geovanni, Aarón y Nati. Las horas del té improvisadas, los almuerzos y asados eran un buen incentivo para no morir congelada en ese lugar.

Agradezo infinitamente a Jorge por acompañarme durante todo este tiempo, apoyarme y contenerme cuando las cosas no resultaban y hasta acompañarme esa noche interminable en que realicé los últimos experimentos.

Finalmente, agradecer a mis padres por la paciencia que tuvieron al ver que este trabajo no terminaba nunca.

Índice General

| | |
|---|-------------|
| Resumen | I |
| Agradecimientos | II |
| Índice de Figuras | VI |
| Índice de Tablas | VIII |
| Nomenclatura | IX |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Aspectos Generales | 1 |
| 1.2. Objetivos | 2 |
| 1.2.1. Objetivo General | 2 |
| 1.2.2. Objetivos Específicos | 2 |
| 1.3. Alcances del Trabajo | 3 |
| 1.4. Organización del Informe | 3 |
| 2. Antecedentes | 5 |
| 2.1. Clasificación de los fluidos | 5 |
| 2.2. Modelos reológicos para fluidos no newtonianos | 7 |
| 2.2.1. Ley de Potencia | 7 |
| 2.2.2. Modelo de Herschel-Bulkley | 8 |
| 2.3. Escorrimento uniforme | 9 |
| 2.3.1. Escorrimento uniforme de fluidos pseudoplásticos | 9 |
| 2.3.2. Escorrimento uniforme de fluidos plásticos | 11 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.4. | Transporte de partículas | 13 |
| 2.4.1. | Criterios de arrastre incipiente | 16 |
| 3. | Diseño Experimental y Metodología | 20 |
| 3.1. | Instalación experimental | 20 |
| 3.2. | Fluidos no newtonianos | 21 |
| 3.3. | Partículas no cohesivas | 24 |
| 3.4. | Procedimiento experimental | 25 |
| 4. | Desarrollo Teórico | 27 |
| 4.1. | Equivalencia entre régimen laminar y turbulento con pared hidrodinámicamente lisa | 27 |
| 4.2. | Escurrecimiento gradualmente variado | 29 |
| 4.2.1. | Fluidos pseudoplásticos | 29 |
| 4.2.2. | Fluidos plásticos | 30 |
| 4.3. | Arrastre incipiente en flujo de fluidos pseudoplásticos y plásticos | 31 |
| 4.3.1. | Régimen laminar de fluidos pseudoplásticos | 32 |
| 4.3.2. | Régimen laminar para fluidos plásticos | 35 |
| 5. | Presentación y Análisis de Resultados | 38 |
| 5.1. | Tipos de flujo | 38 |
| 5.1.1. | Según la variación de la altura de escurrecimiento con la distancia | 38 |
| 5.1.2. | Según la variación en el tiempo | 38 |
| 5.1.3. | Según el régimen de flujo | 39 |
| 5.1.4. | Según la velocidad de flujo respecto a la celeridad de la onda gravitacional infinitesimal | 39 |
| 5.2. | Relación experimental entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} | 40 |
| 5.2.1. | Fluidos pseudoplásticos | 40 |
| 5.2.2. | Fluidos plásticos | 44 |
| 5.3. | Diferencias entre curva de Mantz-Shields y teórica | 48 |
| 6. | Conclusiones | 52 |

| | |
|--|-----------|
| Bibliografía | 55 |
| A. Reogramas | 57 |
| A.1. Reogramas de soluciones de agua-CMC | 57 |
| A.2. Reogramas de soluciones de agua-carbopol | 60 |
| B. Determinación de propiedades de las partículas | 62 |
| B.1. Densidad | 62 |
| B.2. Ángulo de fricción interna | 63 |
| C. Relación teórica entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C}, y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} | 66 |
| C.1. Fluidos pseudoplásticos | 66 |
| C.2. Fluidos plásticos | 67 |
| D. Relación experimental entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C}, y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} | 69 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Diagrama reológico para distintos tipos de fluidos, se excluyen los dependientes del tiempo y de la historia. | 7 |
| 2.2. Fuerzas que actúan sobre una partícula sumergida en un flujo. | 14 |
| 2.3. Curva de Shields | 19 |
| 3.1. Esquema de la instalación experimental. | 21 |
| 3.2. Reómetro utilizado para la determinación de la reología de las soluciones de CMC. . | 23 |
| 3.3. Instrumento utilizado en la determinación de la densidad de las muestras. | 23 |
| 3.4. Reograma para la solución de CMC correspondiente a la condición fluido-partícula N°10 de la Tabla 3.2. | 24 |
| 3.5. Reograma para la solución de carbopol correspondiente al a condición fluido-partícula N°16 de la Tabla 3.2. | 24 |
| 4.1. Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico. | 34 |
| 4.2. Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico. | 37 |
| 5.1. Fluidos pseudoplásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$ | 41 |
| 5.2. Relación funcional entre τ_{*C} y Re_{*P} en fluidos con comportamiento pseudoplástico. Se muestran sólo algunos puntos correspondientes a seis condiciones fluido-partículas con un valor de $\tau_{*C} \geq 0,01$ | 43 |
| 5.3. Fluidos plásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$ | 45 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.4. | Relación funcional entre τ_{*C} y Re_{*P} en fluidos con comportamiento plástico. Se muestran sólo algunos puntos correspondientes a tres condiciones fluido-partículas con un valor de $\tau_{*C} \geq 0,01$ | 47 |
| 5.5. | Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico para fluidos pseudoplásticos. | 48 |
| 5.6. | Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico para fluidos plásticos. . . . | 49 |
| 5.7. | Situación real de la ubicación de una partícula en el lecho. La flecha roja corresponde a la fuerza que ejerce la partícula ubicada por delante de la analizada. | 50 |
| 5.8. | Líneas de corriente en torno a una partícula. | 51 |
| A.1. | Reograma de solución de CMC en agua obtenidos para condición fluido - partícula N°1. | 57 |
| A.2. | Reogramas de soluciones de CMC en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula. | 58 |
| A.3. | Reogramas de soluciones de CMC en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula. | 59 |
| A.4. | Reogramas de soluciones de carbopol en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula. | 60 |
| A.5. | Reogramas de soluciones de carbopol en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula. | 61 |
| B.1. | Determinación de densidad de arena tipo 1, $d_s = 1,5$ mm. | 62 |
| B.2. | Determinación de densidad de sedimentos. | 63 |
| B.3. | Determinación del ángulo de fricción interna mediante el método del cono. | 64 |
| B.4. | Determinación coeficiente de fricción de sedimentos. | 65 |
| C.1. | Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico. | 66 |
| C.2. | Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico. | 67 |
| C.3. | Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico. | 68 |
| D.1. | Fluidos pseudoplásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$ | 70 |
| D.2. | Fluidos plásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$ | 71 |

Índice de Tablas

| | |
|--|----|
| 3.1. Características de las partículas utilizadas. | 25 |
| 3.2. Reología, densidad de la solución y tipo de arena para cada condición. | 26 |
| 5.1. Rangos de Re y de Re_C obtenidos | 39 |
| 5.2. Número de experimentos realizados para las distintas condiciones de flujo de fluidos pseudoplásticos. | 39 |
| 5.3. Número de experimentos realizados para las distintas condiciones de flujo de fluidos plásticos. | 40 |

Nomenclatura

- A_n : constante para perfil logarítmico de velocidad
- B_n : constante para perfil logarítmico de velocidad
- D_h : diámetro hidráulico
- d : diámetro de la partícula
- d_s : diámetro representativo del lecho
- E : fuerza de empuje
- $Fr = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}}$: número de Froude del flujo
- $Fr_c = \frac{U_c}{\sqrt{gh}}$: número de Froude crítico del flujo
- F_D : fuerza de arrastre hidrodinámico
- F_L : fuerza de sustentación hidrodinámica
- F_R : fuerza de roce
- $f\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{u}{U}$: relación de velocidades, específicamente, entre u y U
- g : aceleración de gravedad
- h : altura de escurrimiento
- h_0 : espesor bajo la superficie libre de un flujo de un fluido plástico en que $\tau \leq \tau_f$
- K : índice de consistencia
- N : fuerza normal
- n : índice de flujo de la ley de potencia
- $R = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$: densidad específica sumergida del sedimento
- $Re = \frac{8\rho\bar{u}^2}{\tau_f + K \frac{8\bar{u}}{D_h}^n}$: número de Reynolds del flujo para fluidos pseudoplásticos ($\tau_f = 0$) y plásticos ($\tau_f \neq 0$)

- Re_C : número de Reynolds crítico
- $Re_K = \frac{\bar{u}^{2-n} h^n}{K}$: número de Reynolds modificado
- $Re_P = \frac{\rho u_f^{2-n} d^n}{\rho \alpha u_f^{2-n} d^n + K}$: número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de aproximación para fluidos pseudoplásticos ($\tau_f = 0$) y plásticos ($\tau_f \neq 0$)
- $Re_{*P} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{\rho \alpha u_*^{2-n} d^n + K}$: número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para fluidos pseudoplásticos ($\tau_f = 0$) y plásticos ($\tau_f \neq 0$)
- U : velocidad media del flujo
- u : velocidad a una distancia vertical y desde el fondo
- U_c : velocidad media crítica
- u_f : velocidad de fondo, actuando en el centro de gravedad de la partícula
- u_{max} : velocidad máxima del flujo en y
- $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$: velocidad de corte
- \bar{u} : velocidad media del flujo
- $\tilde{u} \left(\frac{y}{h} \right) = \frac{u}{u_{max}}$: relación de velocidades, específicamente, entre u y u_{max}
- W : peso
- x : eje horizontal en la dirección del flujo
- y : eje vertical, perpendicular al fondo
- $\alpha = \frac{\tau_f}{\tau_0}$: relación entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de corte sobre el fondo
- $\alpha_{nu} = \frac{\tau_f}{\tau_0}$: relación entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de corte sobre el fondo para escurrimiento gradualmente variado
- $\alpha_u = \frac{\tau_f}{\tau_{0U}}$: relación entre el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de corte sobre el fondo para escurrimiento uniforme
- β : posición relativa con respecto a d de la ubicación vertical del centro de gravedad de una partícula
- δ_V : espesor de la subcapa viscosa
- ϕ : ángulo de fricción interna del lecho
- $\dot{\gamma}$: tasa de deformación
- η : posición vertical relativa con respecto a h
- μ : coeficiente de fricción de las partículas

- μ_w : viscosidad dinámica del agua
- $\mu|_{\dot{\gamma}=100s^{-1}}$: viscosidad dinámica equivalente para $\dot{\gamma} = 100s^{-1}$
- θ : ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal
- ρ : densidad del fluido
- ρ_s : densidad de las partículas
- τ_0 : esfuerzo de corte sobre el fondo
- τ_{0U} : esfuerzo de corte sobre el fondo para escurrimiento uniforme
- τ_f : esfuerzo de fluencia
- τ_c : esfuerzo de corte sobre el fondo crítico
- $\tau_{*C} = \frac{\tau_0}{\gamma R d}$: esfuerzo de corte crítico adimensional
- $\tau_{*f} = \frac{\tau_f}{\gamma R d}$: esfuerzo de fluencia adimensional

Capítulo 1

Introducción

1.1. Aspectos Generales

Resulta importante estudiar el transporte de partículas de lechos granulares inmersas en flujos líquidos producto de las fuerzas que ejercen estos flujos. Esta importancia radica en su aplicación en problemas hidráulicos tanto ambientales como industriales, por ejemplo la socavación en torno a las pilas de un puente que pueden dejarlas al descubierto poniendo en peligro la estabilidad de éste, la depositación de sedimentos en zonas de un cauce que pueden interferir en la vida acuática presente en el río, o el transporte de relaves en canaletas.

Si se consulta la bibliografía adecuada se puede dar cuenta de que la mayoría de los trabajos que abordan problemas de transporte de sedimentos lo hacen de manera empírica o semi-empírica, debido a la dificultad que tiene el plantear de manera analítica este problema.

Dentro del área de arrastre de sedimentos hay varios campos a destacar, siendo el estudio de la geomorfología fluvial uno de ellos, el cual analiza el transporte, erosión y almacenamiento de sedimentos en distintas zonas de un cauce. La respuesta morfológica de un cauce puede estar determinada por distintos factores, como su pendiente, la granulometría presente en el lecho, los caudales de crecida, entre otros.

Otro campo importante es el arrastre incipiente, del cual trata este trabajo, cuya definición corresponde a la condición hidráulica asociada al umbral de movimiento de las partículas, es decir, cuando se inicia el movimiento. La dificultad de este problema radica en que las fuerzas involucradas en esta condición hidráulica tienen un carácter aleatorio. Por un lado, las fuerzas hidrodinámicas que tienden a mover a la partícula poseen un carácter estocástico producto de las turbulencias del flujo, mientras que las fuerzas estabilizadoras tienen esta variabilidad debido al cambio del tamaño y de la forma de las partículas. Una mayor dificultad se suma si consideramos un lecho de granulometría más extendida, en que la forma y tamaño de las partículas varía considerablemente.

También se puede ir un paso más adelante y estudiar el caso en que se supera el umbral de arrastre incipiente, es decir, cuando el flujo es capaz de producir un arrastre generalizado, el cual se puede clasificar de dos formas: transporte en suspensión y transporte de fondo, en el primero las partículas rara vez o nunca entran en contacto con el fondo, mientras que en el transporte de fondo, las partículas están la mayor parte del tiempo en contacto con el lecho.

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se estudiará la condición de arrastre incipiente. La principal motivación de este estudio es el trabajo realizado por Shields *et al.* (1936), quien trabajó con fluidos newtonianos y partículas de lignito, ámbar, barita y granito, determinando de manera empírica la condición de arrastre incipiente. En su trabajo determinó de manera gráfica una zona de inicio de movimiento, esta zona está dada por una banda que relaciona el esfuerzo de corte crítico con el número de Reynolds de la partícula. Posteriormente Rouse (1939) definió la curva que hoy se conoce como la curva de Shields. El esfuerzo de corte crítico hace referencia al esfuerzo de corte con el cual las partículas del lecho comienzan a moverse, mientras que el número de Reynolds indica la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas. Cabe destacar que este trabajo es válido para régimen laminar y turbulento.

A diferencia de lo realizado por Shields *et al.* (1936), en este trabajo se estudiará la condición de arrastre incipiente en lechos granulares no cohesivos inmersos en un flujo de un fluido no newtoniano, en el cual en vez de caracterizar su viscosidad por un parámetro como en un fluido newtoniano, ésta es caracterizada por dos, e incluso tres parámetros.

La importancia de estudiar el arrastre incipiente en un medio no newtoniano radica en su aplicabilidad en distintos escenarios en que el comportamiento del fluido ambiente se ve modificado por la presencia de sólidos en suspensión logrando cambios en la viscosidad, la cual puede variar de acuerdo a la tasa de deformación, o bien, a la magnitud del esfuerzo de corte.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Estudiar el comportamiento de partículas sólidas granulares no cohesivas sumergidas en un flujo de un fluido no newtoniano, de manera de obtener una relación empírica que indique frente a qué esfuerzo de corte crítico las partículas del lecho inician su movimiento.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Determinar qué tipo de transporte de partículas será calificado como arrastre incipiente.
- A partir de fluidos de distintas reologías y partículas de distintas propiedades, determinar cómo influyen los parámetros propios del fluido y de las partículas en el arrastre incipiente de partículas.
- Estudiar el tipo de similitudes que podrían encontrarse entre el estudio propuesto por Shields para el transporte incipiente de partículas en flujo de fluidos newtonianos y el presente estudio.

1.3. Alcances del Trabajo

En esta sección se discuten las hipótesis y alcances de la presente investigación.

- Este estudio aborda la condición de transporte incipiente de partículas no-cohesivas de distintos diámetros y materiales, de manera que no se consideran las distintas fuerzas de interacción que pueden existir entre partículas cohesivas, las cuales incidirían en la condición de estabilidad de una partícula. Por otro lado, el fondo del canal corresponde a un lecho uniforme, por lo que se dejan de lado los efectos de sobreexposición y escondimiento que podrían sobrevalorar o subestimar la condición de arrastre incipiente en un lecho de granulometría no uniforme.
- El trabajo experimental desarrollado involucra fluidos pseudoplásticos modelados mediante ley de potencia, por lo que los resultados obtenidos para ese tipo de fluidos serán expresados en término de los parámetros de este modelo.
- La reología de los fluidos plásticos es caracterizada por el modelo de Herschel - Bulkley, por lo que los resultados para este tipo de fluidos son expresados en término de los parámetros del modelo.
- Los datos obtenidos corresponden a flujos laminares, los cuales en términos del número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , para $d/h \ll 1$, donde d corresponde al diámetro representativo del lecho y h a la altura de escurrimiento, tienen un comportamiento similar a un régimen turbulento con pared hidrodinámicamente lisa. Por esto, la aplicabilidad de los resultados se remite a un rango acotado de números de Reynolds de la partícula. La definición de Re_{*P} depende de los parámetros que define cada reología, en particular para fluidos modelados con la ley de potencia se define como $Re_{*P} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{K}$ y para Herschel-Bulkley como $Re_{*P} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{\rho \alpha u_*^{2-n} d^n + K}$.

1.4. Organización del Informe

El informe se estructura en seis capítulos, los que son definidos a continuación:

- **Introducción:** se detallan los objetivos del trabajo, los cuales motivan el desarrollo de este estudio experimental.
- **Antecedentes:** a partir de lo encontrado tras realizar una revisión bibliográfica, en esta sección se entregan una serie de antecedentes relevantes para este trabajo. Se realiza una breve descripción de los tipos de fluidos no newtonianos y de los modelos más utilizados para caracterizar su comportamiento. Además se muestran una serie de ecuaciones que caracterizan el comportamiento de un escurrimiento uniforme tanto de un fluido no newtoniano sin esfuerzo de fluencia como de uno con esfuerzo de fluencia. Finalmente se muestran una serie de expresiones que definen la condición de arrastre incipiente.
- **Diseño Experimental y Metodología:** en esta sección se realiza una descripción de lo que es la instalación experimental. Además se señalan los distintos fluidos y partículas que

serán utilizados en el desarrollo de esta investigación y sus características relevantes para el presente estudio. Finalmente se detalla la metodología llevada a cabo para la realización de los experimentos y las características relevantes de cada serie de experimentos.

- **Desarrollo Teórico:** debido a la falta de expresiones analíticas que describan las condiciones experimentales obtenidas, se desarrollan nuevas expresiones que representan el comportamiento de un escurrimiento gradualmente variado de fluidos pseudoplásticos y plásticos, y su interacción con un lecho uniforme de partículas granulares no cohesivas. Cabe destacar que lo contenido en este capítulo es desarrollo propio del autor de este trabajo.
- **Presentación y Análisis de Resultados:** en este capítulo se detalla el procedimiento realizado para la obtención de los resultados experimentales. Además se contrastan los resultados experimentales de este estudio con los obtenidos en investigaciones anteriores que utilizan fluidos newtonianos. Además se realiza una comparación de los resultados experimentales con el análisis teórico, justificando las posibles diferencias.
- **Conclusiones:** se muestran los comentarios y conclusiones significativas del presente estudio.

Capítulo 2

Antecedentes

El movimiento de partículas granulares no cohesivas debido al escurrimiento de un fluido no newtoniano es posible encontrarlo tanto en flujos naturales como industriales. En el primer caso, lo más frecuente es que el medio no newtoniano se genere debido a la mezcla de agua con partículas finas de sólidos susceptibles de ser transportados por el flujo. Esta mezcla puede modelarse como un fluido no newtoniano cuya reología queda definida por las características físico-químicas y concentración de los finos así como las características del fluido, usualmente agua. En la naturaleza, ejemplos son los flujos de barro, aluviones, etc., mientras que el transporte de pulpas y relaves se encuentran entre los ejemplos más comunes en la industria chilena. El estudio del transporte incipiente debido a fluidos no newtonianos es limitado, y relaciones de cálculo parecen ser más bien la excepción, pudiendo mencionarse los trabajos de Daido (1971) y Wan (1982).

Para analizar el movimiento de partículas dentro de un medio no newtoniano se debe tener en consideración el comportamiento del fluido y cómo caracterizar esto con un modelo correcto. Por otro lado, se debe tener claridad en el tipo de transporte de los sedimentos y como influye en la condición de estabilidad el hecho de que el fluido tenga un comportamiento no newtoniano.

2.1. Clasificación de los fluidos

Fluidos newtonianos

La definición de fluidos newtonianos proviene de la ley de Newton-Navier, la que expresa que el tensor esfuerzo de corte $\underline{\underline{\tau}}$ es directamente proporcional al tensor tasa de deformación $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$, donde el coeficiente de proporcionalidad es una propiedad del fluido que se denomina coeficiente de viscosidad dinámica μ :

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}}. \quad (2.1)$$

En esta expresión el tensor tasa de deformación, $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$, tiene la siguiente forma:

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \begin{bmatrix} \frac{2\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{2\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{2\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde u , v y w corresponden a la velocidad en las direcciones x , y y z , respectivamente.

Para el caso de un escurrimiento uniforme y sólo en la dirección x , el esfuerzo de corte en la vertical se expresa como:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}. \quad (2.3)$$

Fluidos no newtonianos

Cuando la relación entre el esfuerzo de corte τ y la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ no es lineal o cuando el fluido requiere de un esfuerzo de corte mínimo para fluir, éste recibe el nombre de fluido no newtoniano.

Este grupo involucra los fluidos plásticos, pseudoplásticos y dilatantes. Los fluidos plásticos son aquellos que no fluyen hasta que son sometidos a un esfuerzo cortante límite determinado, llamado esfuerzo de deformación plástica, umbral de fluencia o límite de fluencia, τ_f . En el caso de los fluidos plásticos de Bingham, una vez que se supera el valor del umbral de fluencia, la tasa de deformación, $\dot{\gamma}$, es proporcional al esfuerzo de corte, τ , como en el caso de los fluidos newtonianos. Los fluidos pseudoplásticos no tienen una tensión de fluencia para que comiencen a deformarse, pero la viscosidad aparente medida por la pendiente de la curva $\tau = f(\dot{\gamma})$ es alta para bajas velocidades de deformación, y decrece con el incremento de $\dot{\gamma}$ hasta alcanzar un valor asintótico constante. Los fluidos dilatantes al igual que los pseudoplásticos no tienen una tensión de fluencia inicial, pero la viscosidad aparente comienza a incrementar al aumentar la tasa de deformación (Figura 2.1).

Cabe destacar que existen otro tipo de fluidos no newtonianos que son más complejos y cuya viscosidad depende no sólo de la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$, sino también del tiempo durante el cual actúa el esfuerzo de corte, τ . Estos se clasifican en tixotrópicos y reopéticos. También están los fluidos viscoelásticos los cuales presentan tanto características viscosas como elásticas, dependiendo de los esfuerzos de corte aplicados con anterioridad los que pueden desitegrar la red elástica provocando una recuperación parcial del fluido.

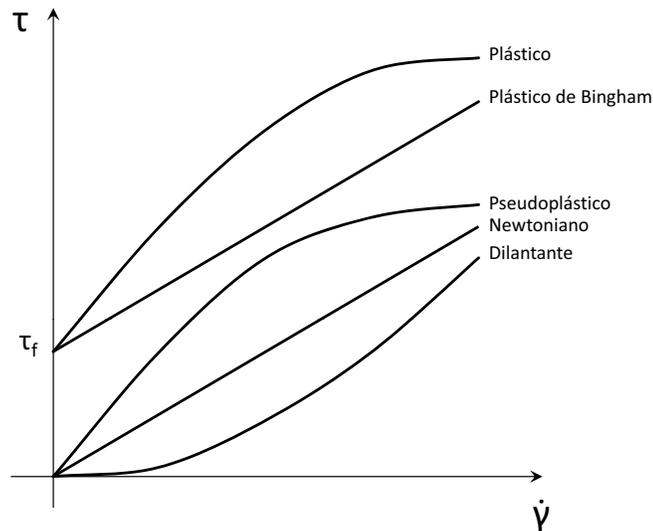


Figura 2.1: Diagrama reológico para distintos tipos de fluidos, se excluyen los dependientes del tiempo y de la historia.

Existe una enorme variedad de fluidos no newtonianos, lo cual gráficamente se traduce en una gran diversidad de curvas reológicas o reogramas. Esto conduce a formular una serie de distintos modelos matemáticos que describan los distintos comportamientos.

2.2. Modelos reológicos para fluidos no newtonianos

Para analizar el comportamiento del fluido es necesaria la realización de un estudio reológico, el cual determina a partir de diferentes técnicas de medición cómo se comporta el fluido frente a distintos esfuerzos de corte.

El comportamiento del fluido definido por el reómetro puede ser descrito mediante la implementación de distintos modelos matemáticos que relacionan el esfuerzo de corte con la viscosidad y la tasa de deformación del fluido. Entre los modelos comúnmente utilizados para caracterizar fluidos pseudoplásticos y plásticos se encuentran la ley de potencia y el modelo de Herschel-Bulkley.

2.2.1. Ley de Potencia

Esta ley sirve para modelar el comportamiento de los fluidos pseudoplásticos y dilatantes, en que la tasa de deformación, $\dot{\gamma}$, aumenta a medida que aumenta el esfuerzo de corte τ . En este modelo los componentes del tensor esfuerzo de corte, $\underline{\underline{\tau}}$, se relacionan con los componentes del tensor tasa de deformación, $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$, de acuerdo a (2.4).

$$\tau_{ij} = K\dot{\gamma}^{n-1}\dot{\gamma}_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

donde K es el índice de consistencia, n el índice de flujo y $\dot{\gamma}$ es el segundo invariante de $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$ calculado como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\dot{\gamma}_{i,j})^2}. \quad (2.5)$$

Cuando el flujo es uniforme en la dirección x , este modelo se reduce a:

$$\tau_{yx} = K \left(\frac{du}{dy} \right)^n. \quad (2.6)$$

Para $n = 1$, el modelo corresponde a un fluido newtoniano con $K = \mu$, para $0 < n < 1$ a un fluido pseudoplástico y para $n > 1$ a uno dilatante.

2.2.2. Modelo de Herschel-Bulkley

Este modelo es capaz de explicar el comportamiento de fluidos no newtonianos plásticos y se basa en el modelo de la ley de potencia. En este modelo los componentes del tensor esfuerzo de corte, $\underline{\underline{\tau}}$, se relacionan con los componentes del tensor tasa de deformación, $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$, de acuerdo a (2.7) y (2.8).

$$\tau_{ij} = \left(K\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_f}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{para } \tau \geq \tau_f \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.7)$$

y

$$\dot{\gamma}_{ij} = 0 \quad \text{para } \tau \leq \tau_f \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

donde τ_f es el esfuerzo de fluencia, K es el índice de consistencia, n el índice de flujo y τ y $\dot{\gamma}$ son los segundos invariantes de los tensores esfuerzo de corte y tasa de deformación, respectivamente.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\dot{\gamma}_{i,j})^2}, \quad (2.9)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\tau_{i,j})^2}. \quad (2.10)$$

Cuando el flujo es uniforme en la dirección x , este modelo se reduce a:

$$\tau_{yx} = \tau_f + K \left(\frac{du}{dy} \right)^n. \quad (2.11)$$

Para $n = 1$, el modelo corresponde a un plástico de Bingham y para $n < 1$ un fluido plástico que disminuye su viscosidad a medida que aumenta su deformación.

2.3. Escurrimiento uniforme

2.3.1. Escurrimiento uniforme de fluidos pseudoplásticos

La ley constitutiva de un fluido pseudoplástico que está definida por una relación de potencia entre el esfuerzo de corte, τ , y la tasa de deformación angular, $\dot{\gamma}$, está dada por (2.4).

Para el caso de un escurrimiento uniforme bidimensional, con el eje x en la dirección del flujo y el eje y perpendicular al fondo, la tasa de deformación $\dot{\gamma}$ puede escribirse como $\partial u / \partial y$, con lo que la ley constitutiva para un fluido pseudoplástico queda:

$$\tau = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n, \quad (2.12)$$

donde u es la velocidad del flujo en la dirección x .

Para un flujo permanente y uniforme, existe un equilibrio entre la fuerza motriz debido a la componente del peso en la dirección del flujo y la de resistencia de origen viscoso que actúa sobre el lecho del canal, equilibrio que para un flujo con superficie libre sobre la que no existe un esfuerzo de corte se cumple:

$$\tau_{0U} = \rho g h \sin \theta, \quad (2.13)$$

donde τ_{0U} es el esfuerzo de corte actuando en el fondo debido a un flujo uniforme de altura h de un fluido con densidad ρ que se mueve sobre un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal y g es la aceleración de gravedad.

Para un flujo laminar, el equilibrio de fuerzas actuando sobre un volumen de fluido limitado por la superficie libre y un plano paralelo a una distancia y del fondo establece que:

$$\rho g \sin \theta (h - y) = K \left(\frac{du}{dy} \right)^n. \quad (2.14)$$

Al integrar (2.14) con las condiciones de no deslizamiento en el fondo del canal ($u(y = 0) = 0$) y esfuerzo de corte nulo en la superficie libre ($\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0$), se obtiene la distribución de velocidades en régimen laminar:

$$u(y) = \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (2.15)$$

la que puede ser reescrita en términos de la velocidad de corte en el fondo, u_* , como:

$$u(y) = \frac{n}{n+1} h \left(\frac{\rho u_*^2}{K} \right)^{1/n} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (2.16)$$

La velocidad media, deducida al integrar la velocidad del flujo en la vertical, está dada por:

$$\bar{u} = \frac{n}{2n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n}, \quad (2.17)$$

de donde resulta que la ley friccional que relaciona el número de Froude del flujo con el número de Reynolds para un flujo de un fluido pseudoplástico es:

$$Fr^2 = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n Re_K \sin \theta, \quad (2.18)$$

siendo $Fr^2 = \frac{\bar{u}^2}{gh}$ y $Re_K = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} h^n}{K}$.

De (2.16) y (2.17), el perfil de velocidades en términos de la velocidad media del flujo está dado por:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (2.19)$$

Como se indicó, el uso de (2.14) demanda un régimen laminar del flujo, condición bajo la cual la distribución de velocidades (2.15) es válida. Para definir el régimen de flujo se cuenta con la relación de Haldenwang *et al.* (2010), expresada en términos de un número de Reynolds modificado, Re , según la cual el escurrimiento es laminar para $Re < Re_C$, donde

$$Re = \frac{8\rho\bar{u}^2}{K \left(\frac{8\bar{u}}{D_h} \right)^n}, \quad (2.20)$$

$$Re_C = 853,1 \left(\frac{\mu|_{\dot{\gamma}=100s^{-1}}}{\mu_w} \right)^{-0,21} Fr + 1,263 \times 10^4 \left(\frac{\mu|_{\dot{\gamma}=100s^{-1}}}{\mu_w} \right)^{-0,75}. \quad (2.21)$$

Cabe destacar que (2.20) y (2.21) fueron determinadas a partir de fluidos de diversas reologías, para variados valores de K y n .

En las ecuaciones anteriores, D_h es el diámetro hidráulico, definido como cuatro veces el área de escurrimiento sobre el perímetro mojado, $\mu|_{\dot{\gamma}=100s^{-1}}$ es la viscosidad dinámica equivalente a una tasa de deformación de 100 s^{-1} y μ_w es la viscosidad dinámica del agua.

Por otro lado, para un flujo turbulento con pared hidrodinámicamente lisa de un fluido pseudoplástico, se tiene un perfil de velocidades logarítmico, dado por Dodge & Metzner (1959)

$$\frac{u}{u_*} = A_n \log \left(\frac{y^n u_*^{2-n} \rho}{K} \right) + B_n, \quad (2.22)$$

donde A_n y B_n son constantes que dependen del índice del flujo n .

$$A_n = \frac{5,66}{n^{0,75}}, \quad (2.23)$$

$$B_n = -\frac{0,4}{n^{1,2}} + \frac{2,458}{n^{0,75}} \left[1,96 + 1,255n - 1,628n \log \left(3 + \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Este perfil es válido en la región turbulenta del flujo y debe ensamblar con el existente en la subcapa viscosa, el que queda definido por:

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{\rho u_*^{2-n} y^n}{K} \right)^{1/n}. \quad (2.25)$$

La distribución de velocidades dada por (2.25) es válida desde la pared hasta una distancia δ_V definida por $\delta_V^+ = \rho u_*^{2-n} \delta_V^n / K$, que satisface:

$$A_n \log(\delta_V^+) + B_n = (\delta_V^+)^{1/n}. \quad (2.26)$$

2.3.2. Escurrimiento uniforme de fluidos plásticos

La ley constitutiva de un fluido plástico está definida por la relación de Herschel-Bulkley en términos del esfuerzo de corte, τ , el esfuerzo de fluencia, τ_f , y la tasa de deformación angular, $\dot{\gamma}$, la cual puede escribirse como $\partial u / \partial y$ para el caso de un escurrimiento uniforme bidimensional.

$$\tau = \tau_f + K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n, \quad (2.27)$$

donde K es el coeficiente de consistencia y n es el índice de flujo.

Al igual que para un flujo de un fluido pseudoplástico, el equilibrio de fuerzas actuando sobre un volumen de fluido limitado por la superficie libre y un plano paralelo a una distancia y del fondo establece que:

$$\rho g \sin \theta (h - y) = \tau_f + K \left(\frac{du}{dy} \right)^n. \quad (2.28)$$

Al integrar (2.28) con las condiciones de no deslizamiento en el fondo del canal y esfuerzo de corte igual al esfuerzo de fluencia a una distancia h_0 de la superficie libre se obtiene la distribución de velocidades. Definiendo la razón entre el esfuerzo de fluencia y el de fondo en flujo uniforme como $\alpha = \frac{\tau_f}{\tau_0 U}$, el perfil de velocidades para un fluido plástico en régimen laminar se expresa como:

$$u(y) = \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} \left[(1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (2.29)$$

Esta expresión es válida en la zona en que el fluido sufre deformaciones, es decir, para $0 \leq y \leq h - h_0$. Para $h - h_0 \leq y \leq h$ la velocidad es uniforme y toma el valor de $u(h - h_0)$, donde $y = h - h_0$ corresponde a la distancia vertical desde el fondo. De (2.27) se obtiene que $h_0 = \frac{\tau_0}{\rho g \sin \theta}$.

Finalmente la distribución de velocidades para un flujo uniforme laminar de un fluido plástico es:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} \left[(1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & 0 \leq y \leq h - h_0 \\ \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} (1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} & h - h_0 \leq y \leq h. \end{cases} \quad (2.30)$$

La que puede ser reescrita en términos de u_* como:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} h \left(\frac{\rho u_*^2}{K} \right)^{1/n} \left[(1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & 0 \leq y \leq h - h_0 \\ \frac{n}{n+1} h \left(\frac{\rho u_*^2}{K} \right)^{1/n} (1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} & h - h_0 \leq y \leq h. \end{cases} \quad (2.31)$$

Promediando el perfil de velocidades entre $y = 0$ e $y = h$, obtenemos la velocidad media, dada por:

$$\bar{u} = \frac{n}{2n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K} \right)^{1/n} (1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n\alpha + n + 1}{n+1} \right), \quad (2.32)$$

de donde resulta que la ley friccional está dada por:

$$Fr^2 = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n Re_K \sin \theta (1-\alpha)^{n+1} \left(\frac{n\alpha + n + 1}{n+1} \right)^n, \quad (2.33)$$

siendo $Fr^2 = \frac{\bar{u}^2}{gH}$ y $Re_K = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} h^n}{K}$.

El perfil de velocidades en términos de la velocidad media del flujo está dado por:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \begin{cases} \left(\frac{2n+1}{n\alpha+n+1} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h(1-\alpha)} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & 0 \leq y \leq h - h_0 \\ \frac{2n+1}{n\alpha+n+1} & h - h_0 \leq y \leq h. \end{cases} \quad (2.34)$$

Como se indicó, (2.28) es válida para un régimen laminar del flujo, condición bajo la cual la distribución de velocidades (2.30) es válida. Para definir el régimen de flujo, al igual que para un fluido pseudoplástico, se cuenta con la relación de Haldenwang *et al.* (2010), expresada en términos de un número de Reynolds modificado, Re , según la cual el escurrimiento es laminar para $Re < Re_C$, donde

$$Re = \frac{8\rho\bar{u}^2}{\tau_f + K\left(\frac{8\bar{u}}{D_h}\right)^n}, \quad (2.35)$$

$$Re_C = 853,1 \left(\frac{\mu|\dot{\gamma}=100s^{-1}}{\mu_w} \right)^{-0,21} Fr + 1,263 \times 10^4 \left(\frac{\mu|\dot{\gamma}=100s^{-1}}{\mu_w} \right)^{-0,75}. \quad (2.36)$$

Al igual que para el caso pseudoplástico, (2.35) y (2.36) fueron determinadas a partir de fluidos de diversas reologías, para variados valores de τ_f , K y n .

En las ecuaciones anteriores, D_h es el diámetro hidráulico, definido como cuatro veces el área de escurrimiento sobre el perímetro mojado, $\mu|\dot{\gamma}=100s^{-1}$ es la viscosidad dinámica equivalente a una tasa de deformación de $100s^{-1}$ y μ_w es la viscosidad dinámica del agua.

2.4. Transporte de partículas

El transporte de sedimentos que componen un lecho sobre el cual existe un flujo puede ser en suspensión, o bien de fondo. El caso que se analizará en este estudio corresponde al arrastre de fondo, el cual puede ser definido por tres condiciones: sin arrastre de partículas, arrastre incipiente y arrastre generalizado de sedimentos.

La primera condición representa la situación en que las fuerzas que se oponen al movimiento de las partículas son mayores a las que lo impulsan. Cuando comienza el leve movimiento de una o unas pocas partículas el transporte será definido como incipiente, una vez que esta condición es superada, el movimiento de las partículas es mayor y varias de éstas comienzan a moverse sin volver a su inicial estado de reposo, el transporte será denominado como arrastre generalizado.

Cuando el arrastre es generalizado, se espera la aparición de formas de fondo como rizados, dunas o antidunas. En flujos de fluidos newtonianos los tipos de formas que se tendrán en el lecho dependen del tipo de régimen (Niño, 2005): cuando se tiene un régimen inferior del lecho, para números de Froude inferiores a la unidad, ocurren rizados y dunas, mientras que cuando se tiene un régimen superior del lecho, para números de Froude superiores a la unidad, se tendrán lechos planos o

antidunas. En cuanto a flujos de fluidos no newtonianos, no se tienen referencias sobre la formación de distintas formas de fondo dependiendo del tipo de régimen.

El arrastre incipiente de sedimentos que componen un lecho puede definirse como la condición hidráulica necesaria para que las partículas comiencen a moverse por efecto del flujo, es decir, hace referencia a la condición límite de transporte sólido. Esta condición hidráulica de arrastre incipiente puede estar dada por un valor límite de velocidad media, de velocidad de fondo, de esfuerzo de corte, etc.

La condición de arrastre incipiente se da cuando las partículas se encuentran en equilibrio debido a las fuerzas hidrodinámicas que tienden a mover a las partículas y a las fuerzas que se oponen al movimiento.

Condición de equilibrio de una partícula no cohesiva en el lecho

Una partícula sumergida en un flujo está sometida a las fuerzas de gravedad, de presión que ejerce el fluido y de fricción con el fluido. Para una partícula aislada no cohesiva, estas fuerzas corresponden al empuje, E , producto de las fuerzas de presión; al peso, W , debido a la fuerza de gravedad; las fuerzas de arrastre y de sustentación, F_D y F_L respectivamente, producto del campo de velocidades en torno a la partícula y una fuerza de roce coulombico F_R , debido al contacto de la partícula con el fondo.

Considerando un lecho con una inclinación θ con respecto a la horizontal, las fuerzas que actúan sobre la partícula se esquematizan en la Figura 2.2.

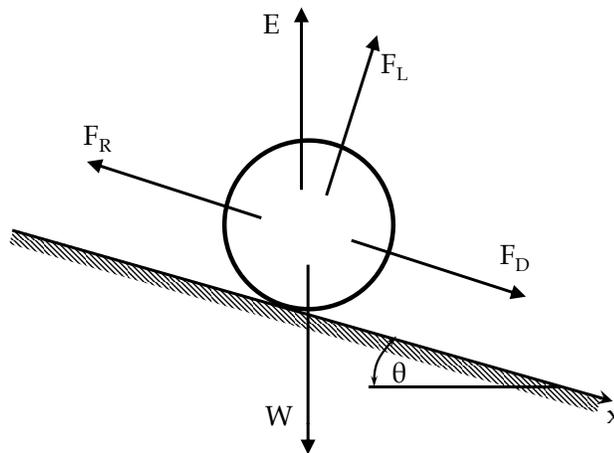


Figura 2.2: Fuerzas que actúan sobre una partícula sumergida en un flujo.

De acuerdo a la Figura 2.2, la condición de arrastre incipiente está dada por:

$$F_D + (W - E) \sin \theta = F_R. \quad (2.37)$$

Además, se cumple que:

$$F_R = \mu N = \mu (W - E) \cos \theta - F_L, \quad (2.38)$$

donde μ es el coeficiente de fricción, N es la normal y θ es la inclinación del fondo con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción puede ser expresado como $\mu = \tan \phi$, con ϕ el ángulo de fricción interna del lecho.

El peso de la partícula, suponiendo que ésta es una esfera es:

$$W = \rho_s g \frac{\pi d_s^3}{6}, \quad (2.39)$$

donde ρ_s corresponde a la densidad de las partículas, d_s a su diámetro característico y g a la aceleración de la gravedad.

El empuje corresponde al peso del volumen de fluido desplazado por la partícula, lo que equivale a:

$$E = \rho g \frac{\pi d_s^3}{6}, \quad (2.40)$$

donde ρ corresponde a la densidad del fluido.

En tanto, las fuerzas de arrastre y de sustentación se determinan a partir de:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A u_f^2, \quad (2.41)$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A u_f^2, \quad (2.42)$$

donde C_D y C_L son los coeficientes de arrastre y sustentación respectivamente, ρ es la densidad del fluido, u_f es la velocidad característica en la cercanía de la partícula y A es el área proyectada del volumen del cuerpo sobre un plano perpendicular a la dirección de la acción de la fuerza, la que puede determinarse suponiendo partículas esféricas como:

$$A = \frac{\pi d_s^2}{4}. \quad (2.43)$$

Reemplazando las expresiones de cada fuerza, (2.37) se reduce a:

$$\frac{u_f^2}{g R d_s} = \frac{4}{3} \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L}, \quad (2.44)$$

donde $R = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$ corresponde a la densidad específica sumergida del sedimento.

En (2.44) se tiene la condición crítica de movimiento de las partículas en función de una velocidad de aproximación del flujo a éstas. Esta expresión es compleja pues los coeficientes de arrastre y de

sustentación, C_D y C_L , se expresan en términos del número de Reynolds de la partícula, Re_P , el cual a su vez se expresa en función de la velocidad de aproximación u_f .

Para fluidos newtonianos, el coeficiente de arrastre se puede estimar mediante la fórmula de Yen (Niño, 2005), donde $Re_P = \frac{u_f d_s}{\nu}$, siendo ν la viscosidad cinemática.

$$C_D = \frac{24}{Re_P} \left(1 + 0,15Re_P^{1/2} + 0,017Re_P \right) - \frac{0,208}{1 + 10^4 Re_P^{-1/2}}. \quad (2.45)$$

En tanto, el coeficiente de sustentación, C_L , se estima de acuerdo a relaciones experimentales como $C_L = 0,85 C_D$.

2.4.1. Criterios de arrastre incipiente

La condición límite de arrastre incipiente dada por (2.44) es poco práctica pues se expresa en función de una velocidad de aproximación a las partículas, u_f , difícil de cuantificar. Con el objetivo de expresar la condición crítica en parámetros más globales del flujo, como el esfuerzo de corte sobre el fondo, τ_0 , o la velocidad media, \bar{u} , es que existen dos tipos de análisis para determinar la condición de arrastre incipiente, uno de velocidad media crítica y otro de esfuerzo de corte crítico.

Análisis de velocidad crítica

La idea de este análisis es determinar una relación en función del número de Froude del flujo a partir de la expresión de estabilidad de una partícula y de la velocidad de aproximación a la partícula u_f .

Para un flujo de un fluido newtoniano sobre un lecho hidrodinámicamente rugoso, la distribución de velocidades en el eje perpendicular al lecho puede ser caracterizada por una ley de potencia "1/6":

$$\frac{u(y)}{U} = K_0 \left(\frac{y}{h} \right)^{1/6}, \quad (2.46)$$

donde U corresponde a la velocidad media del flujo, K_0 a una constante y h a la altura de escumamiento (Niño, 2005).

Para ligar esta expresión con la condición de estabilidad dada por (2.44), es necesario evaluar (2.46) en $y = d_s/2$, con lo que se obtiene:

$$\frac{u_f}{U} = \frac{k_0}{2^{1/6}} \left(\frac{d_s}{h} \right)^{1/6}. \quad (2.47)$$

Cabe mencionar que el perfil de velocidad estimado a partir de una ley de potencia tiene una buena coincidencia con el perfil logarítmico de velocidades para valores de $h/d_s > 5$, considerando $K_0 = 0,95$. Reemplazando (2.47) en (2.44) se llega a la condición de velocidad crítica asociada al umbral de arrastre:

$$Fr_c = \frac{2^{1/6}}{K_0} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L} \right\}^{1/2} \sqrt{R} \left(\frac{h}{d_s} \right)^{-1/3}, \quad (2.48)$$

donde Fr_c es el número de Froude del escurrimiento asociado al umbral de arrastre, expresado como $Fr_c = \frac{U_c}{\sqrt{gh}}$.

Este problema ha sido estudiado de forma experimental en varias ocasiones (Niño, 2005), encontrando una relación empírica de la siguiente forma para flujo turbulento con pared rugosa:

$$Fr_c = k \sqrt{R} (\cos \theta)^m \left(\frac{h}{d_s} \right)^{-n}, \quad (2.49)$$

donde k , m y n son constantes que varían de 1,41 a 1,7, 0 a 0,5 y 0,33 a 0,5 respectivamente, obteniendo expresiones casi idénticas a la teórica dada por (2.48).

Análisis de esfuerzo crítico

De manera similar al análisis de velocidad crítica, se busca encontrar una relación en función del esfuerzo de corte crítico de Shields τ_{*c} . A partir del análisis de estabilidad y de la velocidad u_f .

Para un flujo de un fluido newtoniano sobre una pared hidrodinámicamente rugosa con un tamaño medio de las asperezas k_s , equivalente al diámetro medio de las partículas que componen el lecho, d_s , la distribución de velocidades en la dirección normal al fondo está dada por la ley logarítmica:

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(30 \frac{y}{d_s} \right), \quad (2.50)$$

donde al evaluar en $y = d_s/2$ se obtiene:

$$\frac{u_f}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{30}{2} \right) = 6,77. \quad (2.51)$$

Al reemplazar esta expresión en (2.44), se obtiene la condición crítica de arrastre para lecho hidrodinámicamente rugoso:

$$\frac{u_{*c}^2}{gRd_s} = \frac{1}{6,77^2} \frac{4}{3} \left\{ \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L} \right\}, \quad (2.52)$$

donde el término del lado derecho se denomina esfuerzo de corte adimensional, τ_{*C} , asociado a la condición de arrastre incipiente. Esta expresión es válida para un lecho hidrodinámicamente rugoso, es decir $Re_{*P} = \frac{u_* d_s}{\nu} > 70$.

Para un lecho hidrodinámicamente liso, es decir, cuando las partículas del sedimento se encuentran dentro de la subcapa viscosa ($d_s < \delta_V$), la distribución de velocidades está dada por:

$$\frac{u(y)}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}, \quad (2.53)$$

donde u_* es la velocidad de corte y ν es la viscosidad dinámica del fluido.

Evalutando la expresión anterior en $y = d_s/2$, se tiene:

$$\frac{u_f}{u_*} = \frac{1}{2} Re_{*P}. \quad (2.54)$$

Reemplazando en la condición crítica de arrastre (2.44), se llega a (Niño, 2005):

$$\tau_{*C} = \frac{4}{Re_{*P}^2} \frac{4}{3} \left\{ \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L} \right\}, \quad (2.55)$$

donde Re_{*P} es el número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte u_* y $\tau_{*C} = \frac{\tau_C}{\gamma R d_s}$. Esta expresión es válida en el rango en el cual el lecho se puede considerar como hidrodinámicamente liso, es decir cuando $Re_{*P} < 5$.

Uno de los trabajos más importantes en el estudio de arrastre incipiente, es el realizado por Shields *et al.* (1936), quien experimentalmente determinó una relación entre el esfuerzo de corte adimensional asociado al umbral de arrastre incipiente, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , proponiendo una banda de valores que define la condición de arrastre incipiente (Figura 2.3). La relación de Shields es válida para todo tipo de lechos, desde hidrodinámicamente lisos hasta rugosos. En su trabajo abarcó números de Reynolds de la partícula tales que $1 \leq Re_{*P} \leq 1000$.

Debido a que lo definido por Shields corresponde a una banda de valores, fue Rouse (1939) quien trazó la curva que actualmente se conoce como la curva de Shields. Por otro lado, debido a la complejidad de encontrar un valor del esfuerzo de corte asociado a la condición de arrastre incipiente para un tamaño de sedimento dado, Brownlie (1981) parametrizó esta curva en términos de un parámetro $R_p = \sqrt{g R d_s^3} / \nu$.

$$\tau_{*C} = 0,22 R_p^{-0,6} + 0,06 \exp -17,77 R_p^{-0,6} \quad (2.56)$$

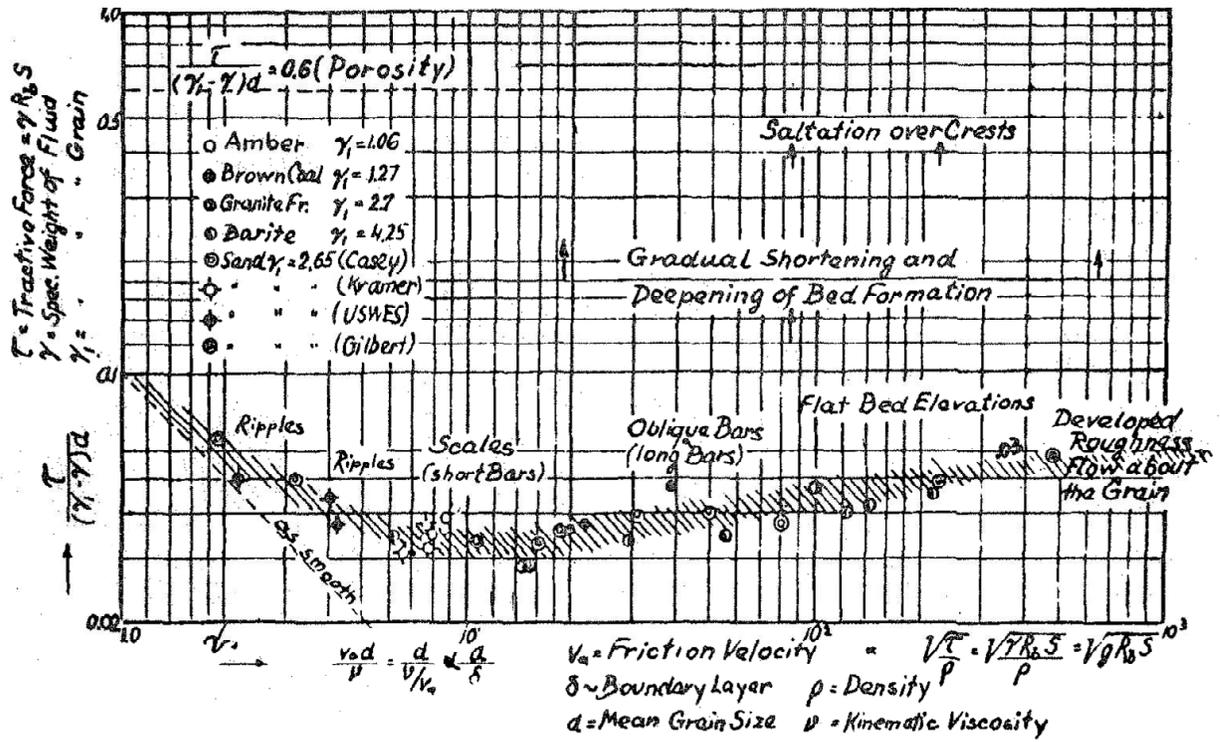


Figura 2.3: Curva de Shields

Para $Re_{*P} \leq 1$ Shields propuso una extrapolación de su relación, pero esto ha sido modificado por autores posteriores. Por ejemplo Mantz (1977) experimentalmente definió el umbral de arrastre incipiente para $0,03 \leq Re_{*P} \leq 1$ como:

$$\tau_{*C} = 0,10 Re_{*P}^{-0,30} \quad (2.57)$$

Capítulo 3

Diseño Experimental y Metodología

En este trabajo se realizan una serie de experimentos de manera de obtener una relación empírica que indique la condición crítica de arrastre incipiente.

En esta sección se detallan las características del modelo en que se realizaron los experimentos y los pasos seguidos para llevarlos a cabo. Se señalan además las características que definen cada serie de experimentos, como la reología del fluido y las características del lecho utilizado.

3.1. Instalación experimental

La instalación experimental consiste en un canal de sección rectangular y pendiente variable (Figura 3.1). El canal posee un largo de 1,5 m, un ancho de 15 cm y un alto de 12 cm. Su pendiente es controlada en la parte final del canal, tomando valores que van desde los 0° a 45° . Por otra parte, la capacidad del estanque receptor es de 200 lt. Su finalidad en este estudio es analizar el efecto de las propiedades del flujo, del fluido y del lecho sobre el transporte incipiente de partículas que componen este último. El canal está construido en acrílico, permitiendo la visualización del lecho y de la superficie libre.

El canal es alimentado por una bomba centrífuga de acero inoxidable que recircula de manera constante el fluido desde un estanque que se encuentra en el extremo aguas abajo del canal (Figura 3.1).

En experimentos preliminares se observó un calentamiento significativo del fluido luego de ser recirculado, para evitar esto se instala un intercambiador de calor de cilindros concéntricos a lo largo de la tubería que une el estanque con la bomba, al cual se le inyecta un flujo continuo de agua a menor temperatura, además se dispuso un ventilador dirigido a la caída del flujo desde el canal al estanque principal. Para controlar la variación de la temperatura, se dispuso un termómetro al inicio del canal.

El fluido proveniente de la bomba es almacenado en un pequeño estanque de carga ubicado aguas arriba del canal, el cual cuenta con un aquietador compuesto por esferas de vidrio, permitiendo una descarga al canal de forma continua y uniforme. Además, se dispuso una zona de lecho fijo, adherido al fondo del canal, de manera que el transporte de partículas no sea condicionado por el flujo rápidamente variado bajo la compuerta.

Para controlar las alturas de escurrimiento se utiliza una compuerta al inicio del canal, inmediatamente aguas abajo del aquietador, y además, al final del canal se ha instalado una clapeta que permite controlar el escurrimiento variando su inclinación. En el estanque se dispone de una malla cuyo diámetro es capaz de retener las partículas del lecho de menor diámetro transportadas por el fluido, de manera de impedir su paso al sistema de recirculación. La instalación está construida de tal manera que el sistema compuesto por el estanque, tuberías y bomba pueda ser desmontado fácilmente al momento de cambiar el fluido para permitir su lavado y posterior secado.

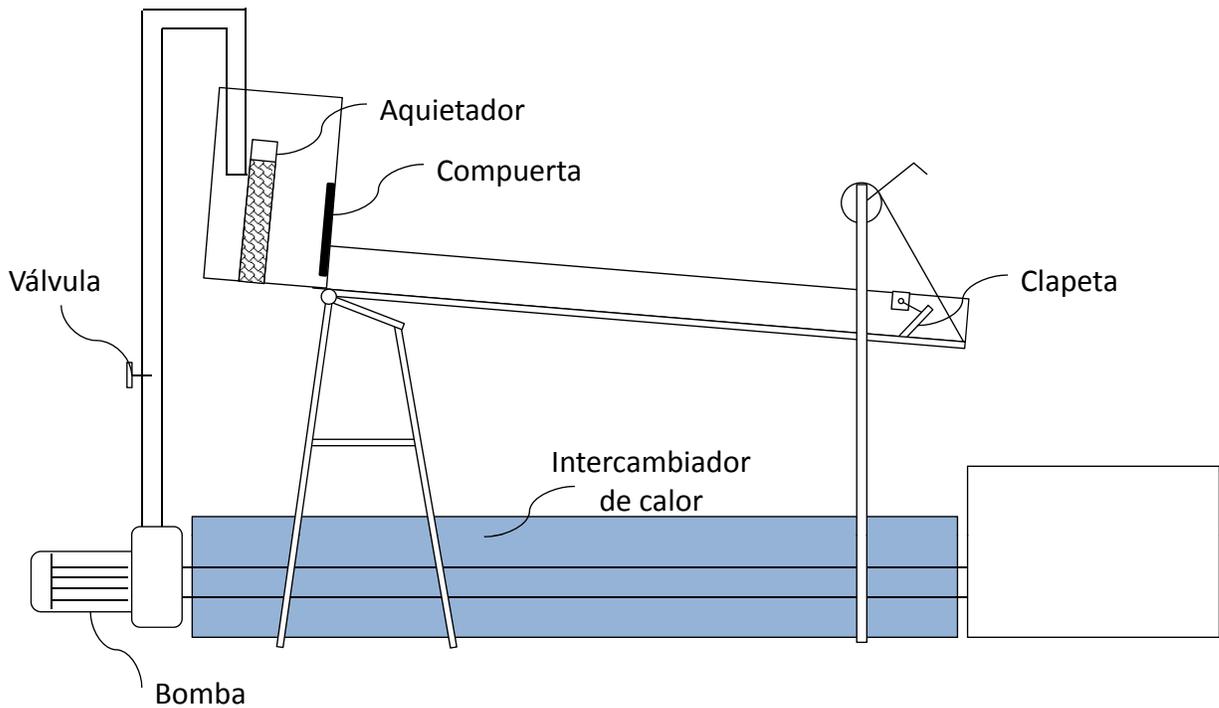


Figura 3.1: Esquema de la instalación experimental.

3.2. Fluidos no newtonianos

Para determinar qué fluidos no newtonianos utilizar en este trabajo se realizó una recopilación de investigaciones similares, a partir de las cuales se pudo determinar qué fluidos resultan convenientes, en el sentido que sean lo suficientemente transparentes para permitir la visualización de las partículas del lecho.

En estudios realizados por Chhabra & Uhlherr (1980), Chhabra (1992), Rajitha *et al.* (2006), Reynolds & Jones (1989) y Zhang *et al.* (2008) en que también se aborda la interacción entre fluidos

no newtonianos y partículas, se utilizan soluciones acuosas de carboximetilcelulosa (CMC), la que presente en bajas concentraciones en el agua es capaz de modificar significativamente la reología de ésta, sin alterar mayormente la transparencia de la solución. Por otro lado, hay estudios en que se utilizan soluciones de carbopol en agua, como es el caso de Chhabra & Uhlherr (1980) que estudiaron el movimiento de partículas esféricas en flujos de fluidos no newtonianos a altos número de Reynolds. De acuerdo a Chhabra (1992), las mezclas de CMC y agua, para un rango de concentraciones en peso de CMC de 0,6 % a 1,5 %, tasas de deformación de hasta 1300 s^{-1} y temperaturas que bordean los 30°C , el comportamiento del fluido puede ser modelado como una ley de potencia. En cambio, Zhang *et al.* (2008) determinan que para concentraciones en peso de 0,25 % a 1,0 % de CMC en agua, el comportamiento del fluido se ajusta al modelo de Carreau. Por otro lado, Rajitha *et al.* (2006) señalan que las mezclas acuosas de CMC son modeladas a partir de la ley de potencia para tasas de deformación inferiores a 200 s^{-1} . Algo similar señala Reynolds & Jones (1989), quienes determinan que la reología de estas mezclas para tasas de deformación menores a 200 s^{-1} se ajusta al modelo de ley de potencia.

Ante la evidencia presentada anteriormente, se utilizaron soluciones de agua con carboximetilcelulosa (CMC) o carbopol en distintas concentraciones. La reología de las soluciones fue caracterizada mediante un reómetro de cilindros concéntricos Rheolab QC Anton Paar (Figura 3.2). La densidad se determinó mediante un densímetro Gamma R.T.M Dr J. Ambrus, con un rango de densidad relativa entre 1,00 y 1,05 respecto a la densidad de agua destilada a 1 atm y 15°C (Figura 3.3). Las soluciones de CMC ensayadas presentan un comportamiento pseudoplástico, como se muestra en la Figura 3.4 a modo de ejemplo, mientras que las soluciones de carbopol tienen un comportamiento plástico (Figura 3.5). En las Figuras 3.4 y 3.5 los círculos de borde negro corresponden a las mediciones realizadas con el reómetro y las curvas rojas al ajuste hecho con la ley de potencia y el modelo de Herschel-Bulkley para fluidos pseudoplásticos y plásticos, respectivamente.

Para caracterizar la reología de las soluciones utilizadas en cada condición fluido-partícula (de acuerdo a la Tabla 3.2) se toman muestras antes y después de cada serie de experimentos, de manera de percibir el posible efecto de envejecimiento del fluido al ser constantemente recirculado. Este fenómeno se aprecia sólo en la solución utilizada en la condición fluido-partícula N°2 (Figura A.2a del Anexo A), en la cual a partir de las mediciones realizadas con el reómetro (círculos de borde negro) se aprecian dos curvas una correspondiente a la muestra tomada previamente a la realización de los experimentos y otra a la realizada después de los experimentos.

Los parámetros que caracterizan la reología de las soluciones utilizadas en cada experimento se muestran más adelante en la Tabla 3.2.

Con el fin de facilitar el desarrollo de posteriores estudios que requieran grandes volúmenes de fluidos de comportamiento pseudoplástico y plástico, es importante mencionar algunos detalles en la preparación de las soluciones empleadas en este estudio experimental. Con el fin de disminuir el tiempo en que se logra una mezcla homogénea, para cada condición fluido-partícula enumerada en la Tabla 3.2 se realizaron mezclas de 200 lt utilizando un mezclador mecánico. Otro aspecto importante, es que las soluciones de carbopol en agua requieren neutralizar su pH para que el carbopol efectivamente actúe como un modificador reológico, para lo cual se utilizó trietanolamina.



Figura 3.2: Reómetro utilizado para la determinación de la reología de las soluciones de CMC.



Figura 3.3: Instrumento utilizado en la determinación de la densidad de las muestras.

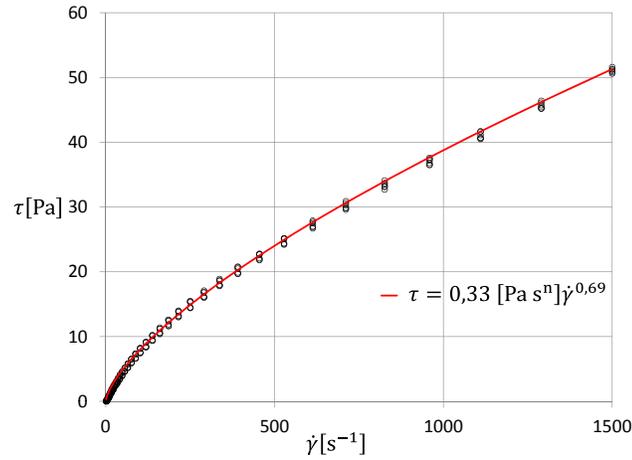


Figura 3.4: Reograma para la solución de CMC correspondiente a la condición fluido-partícula N°10 de la Tabla 3.2.

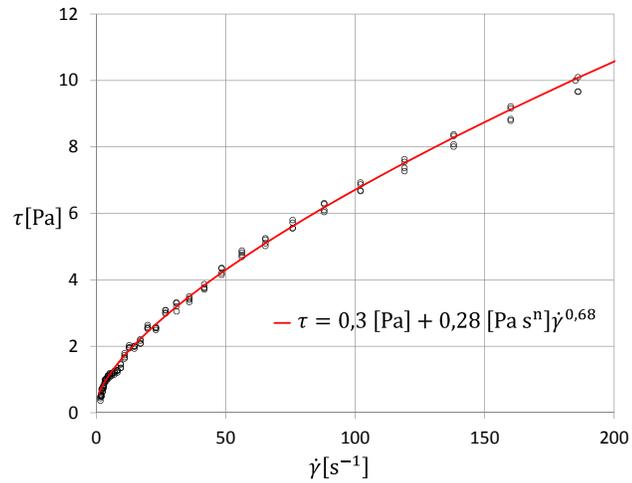


Figura 3.5: Reograma para la solución de carbopol correspondiente al a condición fluido-partícula N°16 de la Tabla 3.2.

3.3. Partículas no cohesivas

Este trabajo considera un lecho uniforme de partículas no cohesivas, es por esto que se utilizaron tres tipos de arenas de tres diámetros representativos. Aparte del diámetro representativo de las partículas, es importante conocer su densidad y el coeficiente de fricción interna.

La densidad de las partículas fue determinada mediante el principio de Arquímedes, ocupando una probeta de 1 lt con agua y una balanza electrónica, midiendo el incremento de masa al agregar distintas cantidades de partículas y el volumen de agua dentro de la probeta.

La densidad para cada tipo de partícula, designada por ρ_s , dada por la pendiente de los datos de los gráficos de las Figuras B.1 y B.2 del Anexo B, se muestra en la Tabla 3.1.

Para determinar el ángulo de reposo de cada tipo de lecho se utilizó el método del cono, para esto se ocupó un cilindro de PVC de 3 cm de diámetro y 15 cm de largo. Se formó una capa uniforme de partículas y sobre ésta se colocó el cilindro con una cantidad aleatoria de partículas, luego de esto se procedió a retirar el cilindro de manera que las partículas deslizaran entre sí formando un cono. A partir de la altura H y diámetro D del cono fue posible determinar el ángulo de reposo, ϕ , como $\phi = \arctan \frac{2H}{D}$.

Para cada uno de los tipos de lecho se utilizaron 10 conos, capturando una imagen para cada ensayo. Así se tienen dos taludes por imagen y 20 valores de $\tan \phi$ para cada tipo de partículas. Algunas de estas imágenes se adjuntan en la sección Anexo B.

El coeficiente de fricción, μ , dado por la tangente del ángulo de fricción, $\tan \phi$, obtenida a partir de la pendiente de los datos presentes en los gráficos de la Figura B.4, se muestra en la Tabla 3.1.

Finalmente las características de las arenas utilizadas en la serie de experimentos se detallan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Características de las partículas utilizadas.

| Tipo arena | d [mm] | d_s [mm] | ρ_s [kg/m ³] | μ [-] |
|------------|-----------|------------|-------------------------------|-----------|
| 1 | 1.0 - 2.0 | 1.5 | 2600 | 0.62 |
| 2 | 2.0 - 3.5 | 2.8 | 2610 | 0.66 |
| 3 | 3.0 - 5.0 | 4.0 | 2630 | 0.66 |

3.4. Procedimiento experimental

Para llevar a cabo los experimentos se prepara el fondo del canal, sobre el cual se dispone una capa uniforme de arena de un 1 cm de espesor. Posterior a esto se activa el sistema de recirculación permitiendo el aumento de caudal paulatinamente, de manera de evitar el transporte excesivo de partículas.

El procedimiento utilizado para cada solución de agua-CMC o agua-carbopol con un tipo de lecho, consistió en fijar una pendiente del canal e ir aumentando el caudal de manera de realizar mediciones en régimen permanente del eje hidráulico, temperatura y caudal para tres distintos tipos de movimiento de partículas: sin arrastre, arrastre incipiente y arrastre generalizado, es importante mencionar que el tipo de movimiento fue determinado mediante visualización. Este procedimiento se realizó al menos para 4 pendientes distintas, por lo que para cada condición fluido-partícula se tienen al menos 12 experimentos caracterizados por una pendiente y un tipo de movimiento de fondo.

En la Tabla 3.2 se muestran las características que las condiciones fluido-partículas para cada

experimento, detallándose además los parámetros que caracterizan la reología de cada una de las soluciones utilizadas.

Tabla 3.2: Reología, densidad de la solución y tipo de arena para cada condición.

| Condición fluido-partícula | Tipo de solución | τ_f [Pa] | K [Pa s ⁿ] | n [-] | ρ [kg/m ³] | Tipo arena |
|-------------------------------|---------------------|------------------|-----------------------------|------------|--------------------------------|---------------|
| 1 | CMC | 0 | 0,027 | 0,93 | 1005,8 | 1 |
| 2 | CMC | 0 | 1,300 | 0,69 | 1007,9 | 1 |
| 3 | CMC | 0 | 0,044 | 0,84 | 1003,6 | 1 |
| 4 | CMC | 0 | 0,040 | 0,85 | 1005,0 | 1 |
| 5 | CMC | 0 | 0,016 | 0,93 | 1005,0 | 2 |
| 6 | CMC | 0 | 0,018 | 0,90 | 1005,0 | 3 |
| 7 | CMC | 0 | 0,066 | 0,85 | 1007,0 | 3 |
| 8 | CMC | 0 | 0,025 | 0,93 | 1007,0 | 1 |
| 9 | CMC | 0 | 0,024 | 0,94 | 1007,0 | 2 |
| 10 | CMC | 0 | 0,330 | 0,69 | 1012,2 | 2 |
| 11 | CMC | 0 | 0,240 | 0,73 | 1012,2 | 3 |
| 12 | CMC | 0 | 0,200 | 0,71 | 1010,2 | 3 |
| 13 | CMC | 0 | 0,059 | 0,90 | 1010,0 | 2 |
| 14 | Carbopol | 0,3 | 0,240 | 0,70 | 1003,0 | 1 |
| 15 | Carbopol | 0,3 | 0,300 | 0,66 | 1003,0 | 2 |
| 16 | Carbopol | 0,3 | 0,280 | 0,68 | 1003,0 | 3 |
| 17 | Carbopol | 0,5 | 0,500 | 0,60 | 1005,0 | 3 |
| 18 | Carbopol | 0,4 | 0,440 | 0,62 | 1005,0 | 2 |
| 19 | Carbopol | 0,3 | 0,390 | 0,64 | 1005,0 | 1 |
| 20 | Carbopol | 0,4 | 0,480 | 0,60 | 1007,0 | 2 |
| 21 | Carbopol | 0,4 | 0,480 | 0,60 | 1007,0 | 1 |
| 22 | Carbopol | 0,4 | 0,480 | 0,60 | 1007,0 | 3 |

Capítulo 4

Desarrollo Teórico

Los experimentos realizados en este trabajo no necesariamente cumplen con la condición de escurrimiento uniforme, teniéndose la mayoría de las veces escurrimiento gradualmente variado. Este cambio en el flujo no es cuantificado en las ecuaciones presentadas en la sección 2.3, por lo que será necesario desarrollar las expresiones necesarias que incorporen el efecto de no uniformidad, las cuales no han sido desarrolladas previamente de acuerdo a lo presentado e investigado en la sección 2.

Por otro lado, se puede dar cuenta que todos los experimentos son en régimen laminar, por lo que hay que analizar si efectivamente la curva de Shields, deducida a partir de experimentos en régimen turbulento, es comparable con los datos obtenidos.

4.1. Equivalencia entre régimen laminar y turbulento con pared hidrodinámicamente lisa

El gráfico de Shields *et al.* (1936) fue deducido a partir de experimentos realizados en régimen turbulento con pared hidrodinámicamente lisa, transición lisa-rugosa y rugosa. Este gráfico relaciona el esfuerzo de corte adimensional crítico, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula en términos de la velocidad de corte, Re_{*P} . La pared hidrodinámicamente lisa se tiene cuando $Re_{*P} < 5$ y la rugosa cuando $Re_{*P} > 70$ aproximadamente.

En el presente estudio los fluidos no newtonianos son obtenidos a partir de soluciones de agua con algún modificador reológico, el que además actúa como un agente espesante, lo que llevaría a pensar que al aumentar la viscosidad pueda tenerse un régimen laminar. Es por esto que es necesario analizar además el caso de este tipo de régimen.

Para la región $0 \leq y \leq h - h_0$ de un flujo laminar uniforme de un fluido pseudoplástico ($\alpha = 0$ y $h_0 = 0$) o plástico ($\alpha \neq 0$ y $h_0 \neq 0$), el perfil de velocidades está dado por (2.31) y puede escribirse como:

$$\frac{u}{u_*} = \left[\frac{\rho u_*^{2-n}}{K} (1 - \alpha) \right]^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h(1-\alpha)} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] (1 - \alpha) h. \quad (4.1)$$

Definiendo:

$$F = \frac{n}{n+1} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h(1-\alpha)} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] (1 - \alpha) h, \quad (4.2)$$

y expandiéndola en series de Taylor en torno a $y/h = 0$ se obtiene:

$$F = y + \vartheta (y^2). \quad (4.3)$$

Por lo que la distribución de velocidades en la cercanía del fondo varía linealmente con y :

$$\frac{u}{u_*} = \left[\frac{\rho u_*^{2-n}}{K} (1 - \alpha_u) \right]^{1/n} y. \quad (4.4)$$

En el caso de un flujo turbulento con pared hidrodinámicamente lisa con una subcapa viscosa de espesor δ_V tal que $\delta_V/h \ll 1$, puede suponerse que el flujo dentro de la subcapa se debe a la acción del esfuerzo de corte actuando en el borde de la capa, el que se considera constante en toda la subcapa e igual al actuando en el fondo, $\tau(\delta_V) = \rho u_*^2$, o sea:

$$\rho u_*^2 = \tau_f + K \left(\frac{du}{dy} \right)^n. \quad (4.5)$$

Integrando (4.5) con la condición de borde de no deslizamiento en $y = 0$, resulta:

$$\frac{u}{u_*} = \left[\frac{\rho u_*^{2-n}}{K} (1 - \alpha_u) \right]^{1/n} y. \quad (4.6)$$

(4.4) y (4.6) indican que la dinámica del flujo dentro de la subcapa viscosa de un escurrimiento turbulento es la misma que la que se tiene en un flujo laminar cerca del fondo si se cumple que $y \ll h$ y $\delta_V \ll h$. Si existe la subcapa viscosa en un flujo turbulento, entonces $d_s \ll \delta_V$. Si se considera que la velocidad de aproximación del fluido, u_f , puede caracterizarse por la velocidad evaluada en $y = \beta d$, con $0 \leq \beta \leq 1$, entonces, tanto para el flujo laminar como dentro de una subcapa viscosa se tiene:

$$\frac{u_f}{u_*} = \left[\frac{\rho u_*^{2-n}}{K} (1 - \alpha_u) \right]^{1/n} \beta d. \quad (4.7)$$

Notar que la validez de (4.7) exige que $d \ll h$.

4.2. Escurrimiento gradualmente variado

4.2.1. Fluidos pseudoplásticos

Para un flujo en el que la altura de escurrimiento varía en la dirección del flujo, la tasa de deformación está dada por $\dot{\gamma} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. Al imponer la condición de escurrimiento gradualmente variado es posible despreciar $\frac{\partial v}{\partial x}$ frente a $\frac{\partial u}{\partial y}$, reduciéndose el esfuerzo de corte a la misma expresión que para un escurrimiento uniforme (2.12). Para evaluar el esfuerzo de corte es necesario conocer la distribución de velocidades. Para ello se considera que los perfiles de velocidad son autosimilares, de manera tal que:

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = f\left(\frac{y}{h}\right), \quad (4.8)$$

donde U es la velocidad media en una sección cualquiera, dada por

$$U = \frac{q}{h}, \quad (4.9)$$

siendo q el caudal por unidad de ancho.

Para el escurrimiento uniforme se cumple que $\bar{u} = U$ y (4.8) debe ser igual a (2.19), lo que permite considerar que la función f está dada por:

$$f = \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (4.10)$$

De este modo, es posible determinar el esfuerzo de corte actuando sobre el fondo:

$$\tau_0 = K \left[\left(\frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} \right]^n = K \frac{U^n}{h^n} \left\{ \left[\frac{df}{d\left(\frac{y}{h}\right)} \right] \Big|_{y/h=0} \right\}^n. \quad (4.11)$$

Reemplazando la función f se obtiene:

$$\tau_0 = K \frac{U^n}{h^n} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n, \quad (4.12)$$

de donde resulta la relación entre el esfuerzo de corte para el escurrimiento gradualmente variado y el correspondiente al escurrimiento uniforme ((4.12) y (2.13)):

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0U}} = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{Fr^2}{Re_K \sin \theta}, \quad (4.13)$$

donde $Fr^2 = \frac{U^2}{gh}$ y $Re_K = \frac{U^{2-n}h^n\rho}{K}$.

(4.13) permite determinar fácilmente el esfuerzo de corte actuando sobre el lecho en un escurrimiento gradualmente variado a partir de las características del flujo y del esfuerzo para el flujo uniforme con una altura igual a la altura local del escurrimiento gradualmente variado.

4.2.2. Fluidos plásticos

De la misma forma que para los fluidos pseudoplásticos, al imponer la condición de escurrimiento gradualmente variado es posible despreciar $\frac{\partial v}{\partial x}$ frente a $\frac{\partial u}{\partial y}$, reduciéndose el esfuerzo de corte a la misma expresión que para un escurrimiento uniforme (2.27).

Por otro lado, a diferencia del caso de escurrimiento en contornos abiertos de fluidos pseudoplásticos, en este caso al tener un esfuerzo de fluencia τ_f se tiene un espesor, h_0 , bajo la superficie libre en que el fluido no sufrirá deformaciones por lo que no es válido el supuesto de autosimilaridad de los perfiles de velocidad con respecto a la velocidad media representado en (4.8). Es por esto que en la región $0 \leq y \leq h - h_0$ se considerará que el perfil de velocidad es autosimilar con respecto a la velocidad máxima dada por $u(h - h_0)$, por lo que se definirá:

$$\frac{u(x, y)}{u_{max}} = \tilde{u}\left(\frac{y}{h}\right), \quad (4.14)$$

donde la velocidad $u(x, y)$ está dada por (2.30) y u_{max} resulta de evaluar esta misma expresión en $y = h - h_0$ ($u = u_{max} \forall y \in [h - h_0, h]$):

$$u_{max} = \frac{n}{n+1} h^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K}\right)^{1/n} \left[(1 - \alpha_u)^{\frac{n+1}{n}} - (\alpha_{nu} - \alpha_u)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (4.15)$$

donde el subíndice u indica la condición de flujo uniforme y nu la condición de escurrimiento gradualmente variado.

Con lo que \tilde{u} se puede expresar como:

$$\tilde{u} = \frac{u(x, y)}{u_{max}} = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{\eta}{1 - \alpha_{nu}}\right)^{\frac{n+1}{n}} & 0 \leq \eta \leq 1 - \alpha_{nu} \\ 1 & 1 - \alpha_{nu} \leq \eta \leq 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

donde $\eta = \frac{y}{h}$, $\alpha_{nu} = \frac{\tau_f}{\tau_0}$ y $\alpha_u = \frac{\tau_f}{\tau_0 U}$.

Considerando la definición de \tilde{u} , el esfuerzo de corte en el fondo se puede expresar como:

$$\tau_0 = \tau_f + K \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \Big|_{y=0} = \tau_f + K \left(\frac{u_{max}}{h} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right)^n \Big|_{\eta=0}. \quad (4.17)$$

Reemplazando la función \tilde{u} , se obtiene:

$$\tau_0 = \tau_f + K \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1}{1-\alpha_{nu}} \right)^n \left(\frac{u_{max}}{h} \right)^n. \quad (4.18)$$

Como la idea es determinar una expresión similar a (4.13), es necesario encontrar una expresión que relacione u_{max} con el número de Froude del flujo. Para esto se debe encontrar la relación que existe entre u_{max} y \bar{u} .

Recordando que la velocidad media para un flujo laminar de un fluido plástico está dada por (2.32), se obtiene:

$$u_{max} = \bar{u} \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left(\frac{n+1}{n\alpha_{nu} + n+1} \right). \quad (4.19)$$

Reemplazando esta expresión en (4.18), se obtiene:

$$\tau_0 = \tau_f + K \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1}{1-\alpha_{nu}} \right)^n \left(\frac{n+1}{n\alpha_{nu} + n+1} \right)^n \frac{\bar{u}^n}{h^n}, \quad (4.20)$$

donde h corresponde a la altura local del escurrimiento gradualmente variado y $\bar{u} = \frac{q}{h}$.

Considerando que el esfuerzo de corte sobre el fondo para un escurrimiento uniforme está dado por $\tau_0 = \rho gh \sin \theta$, se obtiene la relación entre los esfuerzos de corte en el fondo para escurrimiento gradualmente variado y uniforme:

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0U}} = \alpha_u + \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{Fr^2}{Re_K \sin \theta} \left(\frac{1}{1-\alpha_{nu}} \right)^n \left(\frac{n+1}{n\alpha_{nu} + n+1} \right)^n, \quad (4.21)$$

donde $Fr^2 = \frac{\bar{u}^2}{gh}$ y $Re_K = \frac{\bar{u}^{2-n} h^n \rho}{K}$.

Notar que si consideramos un fluido pseudoplástico, en el cual $\tau_f = 0$, se tendrá $\alpha_u = \alpha_{nu} = 0$, se recupera la relación entre el esfuerzo de corte en el fondo para un escurrimiento gradualmente variado y uno uniforme en un flujo de un fluido pseudoplástico, dada por (4.13).

4.3. Arrastre incipiente en flujo de fluidos pseudoplásticos y plásticos

De la misma forma que se abordó la condición de estabilidad de una partícula no cohesiva ubicada en el fondo de un flujo de un fluido newtoniano en la sección 2.4, para un flujo de un fluido no newtoniano se cumple que:

$$\frac{u_f^2}{gRd_s} = \frac{4}{3} \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L}, \quad (4.22)$$

donde u_f es la velocidad de aproximación a la partícula, μ es el coeficiente de roce coulombico, θ el ángulo de inclinación del fondo con respecto a la horizontal, C_D y C_L los coeficientes de arrastre y sustentación respectivamente.

La velocidad de aproximación u_f corresponde a la velocidad de aproximación a la partícula, la cual depende de si el régimen es laminar o turbulento, y si es turbulento, además de si la pared es hidrodinámicamente lisa, transición lisa-rugosa o rugosa.

En tanto, el coeficiente de arrastre C_D puede ser estimado a partir de la fórmula de Ceylan *et al.* (1999), dada por:

$$C_D = \frac{24}{Re_P} \left[3^{2n-3} \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^{3n}} \right) + \frac{4n^4}{24Re_P^{\frac{n-3}{3}}} \right], \quad (4.23)$$

donde $Re_P = \frac{u_f^{2-n} d^n \rho}{K}$.

(4.23) es válida para fluidos modelados mediante la ley de potencia, en que $10^{-3} \leq Re_P \leq 10^3$ y $0,5 \leq n \leq 1$.

4.3.1. Régimen laminar de fluidos pseudoplásticos

Escurrencimiento uniforme

En general para un fluido pseudoplástico, el perfil de velocidades en régimen laminar en términos de la velocidad de corte u_* está dado por (2.16), por lo que la velocidad de aproximación resulta de evaluar esta expresión en $y = \beta d$, donde d corresponde al diámetro representativo de las partículas que componen el lecho granular uniforme y β a la ubicación vertical relativa con respecto a d del centro de gravedad de las partículas.

$$u_f = \left(\frac{\rho u_*^2}{K} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} h \left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (4.24)$$

Reemplazando esta expresión para la velocidad de aproximación del fluido a la partícula en (4.22) e identificando el esfuerzo de corte adimensional, $\tau_{*C} = \frac{u_*^2}{gRd}$, y el número de Reynolds de la partícula, $Re_{*P} = \frac{u_*^{2-n} d^n \rho}{K}$, la condición límite de estabilidad de una partícula sumergida en un flujo de un fluido pseudoplástico se expresa como:

$$\tau_{*C} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{d}{h}\right)^2}{Re_{*P}^{2/n} \left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]^2} \left(\frac{4}{3} \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L}\right). \quad (4.25)$$

Para efectos de este análisis se considerará que la relación entre el coeficiente de sustentación y el de arrastre es la misma que la obtenida experimentalmente para fluidos newtonianos, es decir, $C_L = 0,85 C_D$.

Calculando el coeficiente de arrastre, C_D , mediante (4.23) y graficando (4.25) para distintos valores de K y n se obtienen las curvas de la Figura 4.1, las cuales se grafican junto con a la curva teórica para fluidos newtonianos para $Re_{*P} < 5$, dada por $\tau_{*C} = \frac{2,61}{Re_{*P}^2 C_D(Re_{*P})}$ (Niño, 2005) (para $\mu = 0,84$, $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx 0$ y $C_L/C_D = 0,85$).

Escurrecimiento gradualmente variado

Es razonable pensar que el escurrecimiento gradualmente variado podría arrojar un resultado distinto respecto al escurrecimiento uniforme en el término que hace referencia a la velocidad de aproximación, debido a que ésta es una función del esfuerzo de corte sobre el fondo, τ_0 .

La velocidad a una distancia y , medida en forma perpendicular desde el fondo, en régimen laminar y escurrecimiento gradualmente variado se puede expresar de acuerdo a (4.26), luego de manipular (4.8) y (4.10).

$$u(y) = \left(\frac{\bar{u}^n}{h^{n+1}}\right)^{1/n} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(h^{\frac{n+1}{n}} - (h-y)^{\frac{n+1}{n}}\right). \quad (4.26)$$

Evaluando esta expresión en $y = \beta d$ (con $\beta = 0,5$, suponiendo partículas esféricas) y manipulando los términos de manera de dejarla expresada en función del número de Froude, Fr , y del Reynolds del flujo, Re_K , se encuentra:

$$u_f = \left[\rho g h \sin \theta \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \frac{Fr^2}{Re_K \sin \theta}\right]^{1/n} \frac{h}{K^{1/n}} \frac{n}{n+1} \left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (4.27)$$

Recordando la expresión (4.13) en donde se muestra la corrección que debe hacerle al esfuerzo de corte de fondo en escurrecimiento gradualmente variado en relación al del escurrecimiento uniforme, se puede identificar en (4.27) el término correspondiente a τ_0 , con lo que se encuentra la siguiente expresión para la velocidad de aproximación u_f :

$$u_f = \left(\frac{\rho u_*^2}{K}\right)^{1/n} h \frac{n}{n+1} \left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (4.28)$$

Esta expresión es exactamente la misma que se tiene para un régimen laminar uniforme (4.24), con u_*

determinado a partir de la altura local del flujo, por lo que el análisis de estabilidad correspondiente a la condición crítica es el mismo realizado para escurrimiento uniforme.

En particular, en la Figura 4.1c que representa el caso de un fluido newtoniano, se aprecia que la curva deducida para un fluido de comportamiento pseudoplástico (con $n = 1$) no coincide con la teórica para fluidos newtonianos debido a que esta última considera una pendiente despreciable y $\mu = 0,84$.

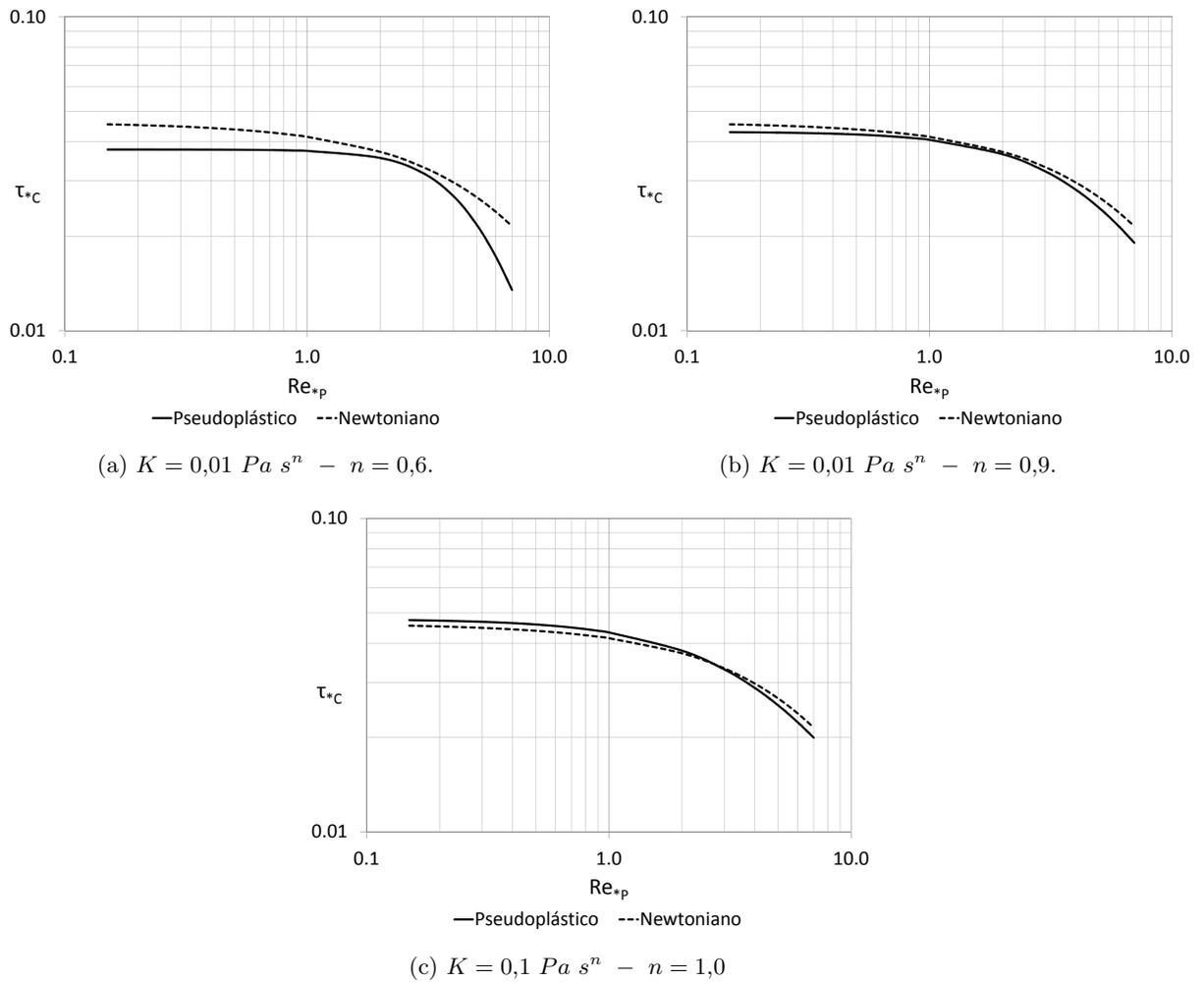


Figura 4.1: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico.

4.3.2. Régimen laminar para fluidos plásticos

Escorrimento uniforme

En un flujo laminar y uniforme de un fluido no newtoniano con esfuerzo de fluencia, la velocidad a una distancia $0 \leq y \leq h - h_0$, perpendicular al fondo ($h - h_0$ es la distancia vertical desde el fondo a la cual se alcanza la máxima velocidad) puede ser descrita de acuerdo a lo enunciado en (2.30). Identificando $\tau_0 = \rho gh \sin \theta$, se puede expresar en función del esfuerzo de corte de fondo como:

$$u(y) = \left(\frac{\tau_0}{K}\right)^{1/n} h \left[(1 - \alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{y}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \left(\frac{n}{n+1}\right). \quad (4.29)$$

Si consideramos una partícula esférica de diámetro $d \leq h - h_0$ ubicada en el fondo, la velocidad de aproximación del flujo a ésta, se obtiene de evaluar (4.29) en $y = \beta d$, con $\beta = 0,5$ (suponiendo partículas esféricas).

$$u_f = \left(\frac{\tau_0}{K}\right)^{1/n} h \left[(1 - \alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\beta d}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \left(\frac{n}{n+1}\right). \quad (4.30)$$

Recordando el caso pseudoplástico, ahí se buscaba encontrar una relación entre el esfuerzo de corte adimensional, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , para lo cual se necesitaba expresar la velocidad de aproximación en función del esfuerzo de fondo τ_0 (o u_*). Para el caso de un fluido con esfuerzo de fluencia parece razonable expresar la condición de estabilidad como una relación entre $\tau_{*C} - \tau_{*f}$ y Re_{*P} , para lo cual es necesario expresar la velocidad u_f en función de $\tau_0 - \tau_f$.

Por otro lado (4.30) se puede expresar como:

$$u_f = \left(\frac{\tau_0 - \tau_f}{K}\right)^{1/n} h \left[(1 - \alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\beta d}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{1}{1 - \alpha}\right)^{1/n}. \quad (4.31)$$

Considerando la expresión que define la condición límite de movimiento incipiente de una partícula ubicada en el fondo de un flujo, dada por (4.22), y utilizando la expresión para la velocidad de aproximación (4.31) encontramos la relación entre los parámetros adimensionales de interés, $\tau_{*C} - \tau_{*f}$ y Re_{*P} , éste último definido para fluidos con esfuerzo de fluencia, como:

$$Re_{*P} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{\rho \alpha u_*^{2-n} d^n + K}, \quad (4.32)$$

con lo que se obtiene una relación que define la condición de arrastre incipiente en un escurrimento uniforme de fluidos modelados por Herschel-Bulkley, como:

$$\tau_{*C} - \tau_{*f} = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\frac{d}{h}\right)^2 (1-\alpha)}{Re_{*P}^{2/n} \left(\frac{\rho\alpha u_*^{2-n} d^n}{K} + 1\right)^{2/n} \left[(1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\beta d}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]^2} \left(\frac{4}{3} \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{C_D + \mu C_L}\right). \quad (4.33)$$

Para efectos de este análisis se considerará válida la expresión (4.23) para calcular el coeficiente de arrastre, C_D , en flujos de fluidos con esfuerzo de fluencia, con un número de Reynolds de la partícula modificado definido como:

$$Re_P = \frac{\rho u_f^{2-n} d^n}{\rho\alpha u_f^{2-n} d^n + K}, \quad (4.34)$$

además, se considerará válida la relación experimental para fluidos newtonianos $C_D/C_L = 0,85$ (Niño, 2005).

Graficando (4.33) para distintos valores de K , n y τ_f se obtienen las curvas presentes en la Figura 4.2, las cuales se presentan junto a la curva teórica de arrastre incipiente en fluidos newtonianos.

En particular, en la Figura 4.2c que representa el caso de un fluido newtoniano, se aprecia que la curva deducida para un fluido de comportamiento plástico (con $\tau_f = 0$ y $n = 1$) no coincide con la teórica para fluidos newtonianos debido a que esta última considera una pendiente despreciable y $\mu = 0,84$.

Escurrimiento gradualmente variado

De acuerdo al análisis desarrollado en la sección 4.2.2, la velocidad a una distancia vertical $y \leq h - h_0$, medida desde el fondo en un escurrimiento gradualmente variado de un fluido con esfuerzo de fluencia, se puede expresar como:

$$u(x, y) = u_{max}(x) \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{1-\alpha}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (4.35)$$

Considerando una partícula de diámetro $d \leq h - h_0$ y expresando la velocidad máxima, u_{max} , en función de \bar{u} de acuerdo a (4.19), la velocidad de aproximación a una partícula ubicada en el fondo de un escurrimiento gradualmente variado se expresa como:

$$u_f = \left(\frac{2n+1}{n\alpha+n+1}\right)^n \bar{u}^n \left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h(1-\alpha)}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (4.36)$$

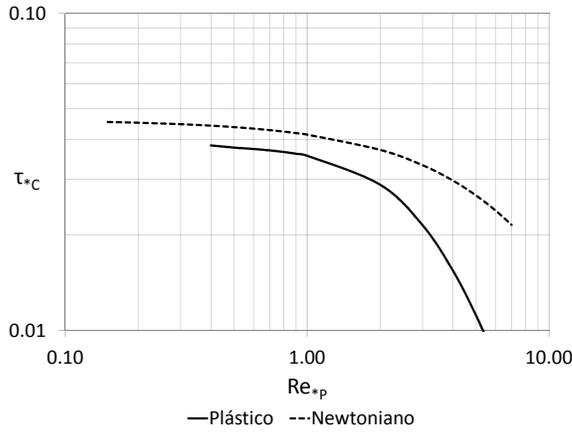
Por otro lado, el esfuerzo de corte sobre el fondo para un escurrimiento gradualmente variado está dado por (4.20). Identificando en esta ecuación la expresión anterior para u_f , se puede reescribir (4.20) como:

$$\tau_0 - \tau_f = K \frac{u_f^n}{\left[1 - \left(1 - \frac{\beta d}{h(1-\alpha)}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{h^n}. \quad (4.37)$$

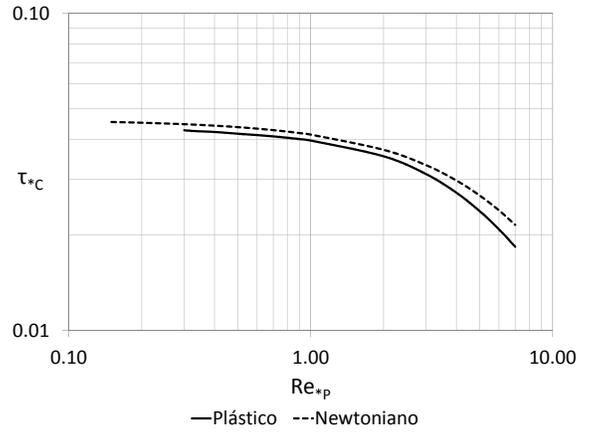
Despejando u_f , se tiene:

$$u_f = \left(\frac{\tau_0 - \tau_f}{K}\right)^{1/n} h \left[(1-\alpha)^{\frac{n+1}{n}} - \left(1 - \frac{\beta d}{h} - \alpha\right)^{\frac{n+1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1/n} \right], \quad (4.38)$$

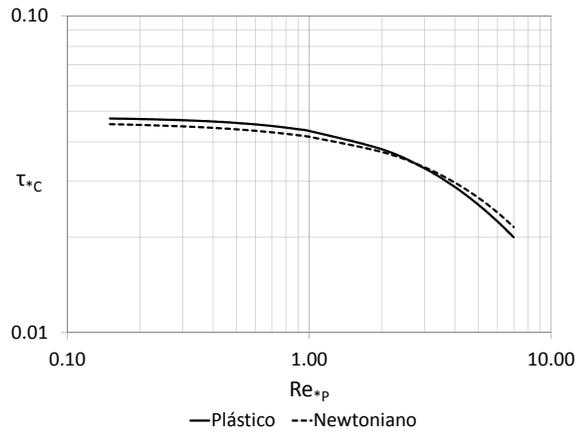
que corresponde a la misma expresión utilizada para un escurrimiento uniforme, dada por (4.31), con τ_0 y h evaluados localmente.



(a) $K = 0,3 \text{ Pa s}^n - n = 0,6 - \tau_f = 0,3 \text{ Pa}$.



(b) $K = 0,3 \text{ Pa s}^n - n = 0,9 - \tau_f = 0,5 \text{ Pa}$.



(c) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n - n = 1,0 - \tau_f = 0 \text{ Pa}$.

Figura 4.2: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico.

Capítulo 5

Presentación y Análisis de Resultados

En este capítulo se muestran los resultados y respectivos análisis obtenidos a partir de la serie de experimentos realizados, luego de utilizar las expresiones que describen las condiciones obtenidas en las experiencias.

5.1. Tipos de flujo

El flujo en canales puede ser clasificado de distintas maneras de acuerdo a su variación espacial, temporal, de flujo y de velocidad.

5.1.1. Según la variación de la altura de escurrimiento con la distancia

El flujo puede ser uniforme (o normal), en donde las líneas de corriente son paralelas, o bien, espacialmente variado ya sea gradualmente o rápidamente, en el primer caso las líneas de corriente tienen poca curvatura y puede considerarse válida la ley hidrostática, a diferencia del rápidamente variado en que las líneas de corriente tienen una gran curvatura.

En los experimentos realizados sólo se tienen escurrimientos uniformes y gradualmente variados. La corrección al esfuerzo de corte debido a la leve curvatura de las líneas de corriente se realiza de acuerdo a lo enunciado en (4.13) y (4.21) para fluidos de comportamiento pseudoplástico y plástico, respectivamente.

5.1.2. Según la variación en el tiempo

El flujo puede ser permanente o impermanente. El hecho de tener un flujo impermanente agrega una variable más al análisis. Por simplicidad y por aplicabilidad de los resultados, los experimentos son en régimen permanente.

5.1.3. Según el régimen de flujo

De acuerdo a esta clasificación, el flujo puede ser laminar, turbulento o transición laminar - turbulento. Para fluidos no newtonianos, de comportamiento pseudoplástico o plástico, el cambio desde un régimen laminar a uno de transición puede ser estimado a través de las expresiones empíricas de Haldenwang *et al.* (2010), dadas por (2.20) y (2.21) para fluidos pseudoplásticos y por (2.35) y (2.36) para fluidos plásticos. Según estos modelos, todas las mediciones corresponden a flujos en régimen laminar. En la Tabla 5.1 se muestran los rangos de Re y Re_C obtenidos tanto en los experimentos realizados con soluciones de CMC en agua como en los realizados con soluciones de carbopol en agua.

Tabla 5.1: Rangos de Re y de Re_C obtenidos

| | Fluidos pseudoplásticos | Fluidos plásticos |
|--------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Re | 2,1 - $2,1 \times 10^3$ | 0,7 - $3,7 \times 10^2$ |
| Re_C | $1,8 \times 10^2$ - $2,9 \times 10^3$ | $7,6 \times 10^2$ - $4,1 \times 10^3$ |

5.1.4. Según la velocidad de flujo respecto a la celeridad de la onda gravitacional infinitesimal

De acuerdo a esta clasificación el flujo puede ser subcrítico, $Fr < 1$; supercrítico, $Fr > 1$; o crítico, $Fr = 1$. En los experimentos en donde el fluido es una solución de CMC en agua, se tienen tanto flujos subcríticos o supercríticos. En los fluidos de comportamiento plástico, la mayoría de las mediciones corresponden a flujos subcríticos, salvo los casos con arrastre generalizado. La distribución de casos se detalla en las Tablas 5.2 y 5.3.

Tabla 5.2: Número de experimentos realizados para las distintas condiciones de flujo de fluidos pseudoplásticos.

| | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado |
|----------|--------------|---------------------|-----------------------|
| $Fr < 1$ | 52 | 32 | 24 |
| $Fr > 1$ | 0 | 22 | 29 |

Tabla 5.3: Número de experimentos realizados para las distintas condiciones de flujo de fluidos plásticos.

| | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado |
|----------|--------------|---------------------|-----------------------|
| $Fr < 1$ | 36 | 36 | 28 |
| $Fr > 1$ | 0 | 0 | 8 |

5.2. Relación experimental entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P}

5.2.1. Fluidos pseudoplásticos

En la Figura 5.1, se muestran los resultados obtenidos luego de graficar $\tau_{*C} = \frac{\tau_C}{\gamma R d}$ en función de $Re_{*P} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{K}$ para los fluidos de comportamiento pseudoplástico correspondientes a soluciones de carboximetilcelulosa (CMC) en agua y lechos uniformes no cohesivos de diámetros representativos, d_s , de 1,5 mm, 2,8 mm y 4 mm.

A pesar de abarcar un amplio rango del número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , todos los flujos fueron en régimen laminar, lo que se traduce en un rango similar de Re_{*P} al ocupado por el régimen turbulento en pared lisa. Los valores tomados por Re_{*P} van desde 0,2 hasta $1,2 \times 10^1$.

También se mencionó que en muchos de los experimentos realizados el escurrimiento obtenido era gradualmente variado, por lo que se determinó una relación para corregir el esfuerzo de corte sobre el fondo debido a la variación de la altura en la dirección del flujo. En efecto, los resultados mostrados en la Figura 5.1 presentan la corrección 4.13. En cuanto al número de Froude que define si el flujo es subcrítico o supercrítico, éste tomó valores entre 0,01 y 1,80, pero nunca se tuvo un escurrimiento crítico. Finalmente, en los resultados se pueden distinguir los tres casos de movimiento de partículas: sin arrastre, arrastre incipiente y arrastre generalizado.

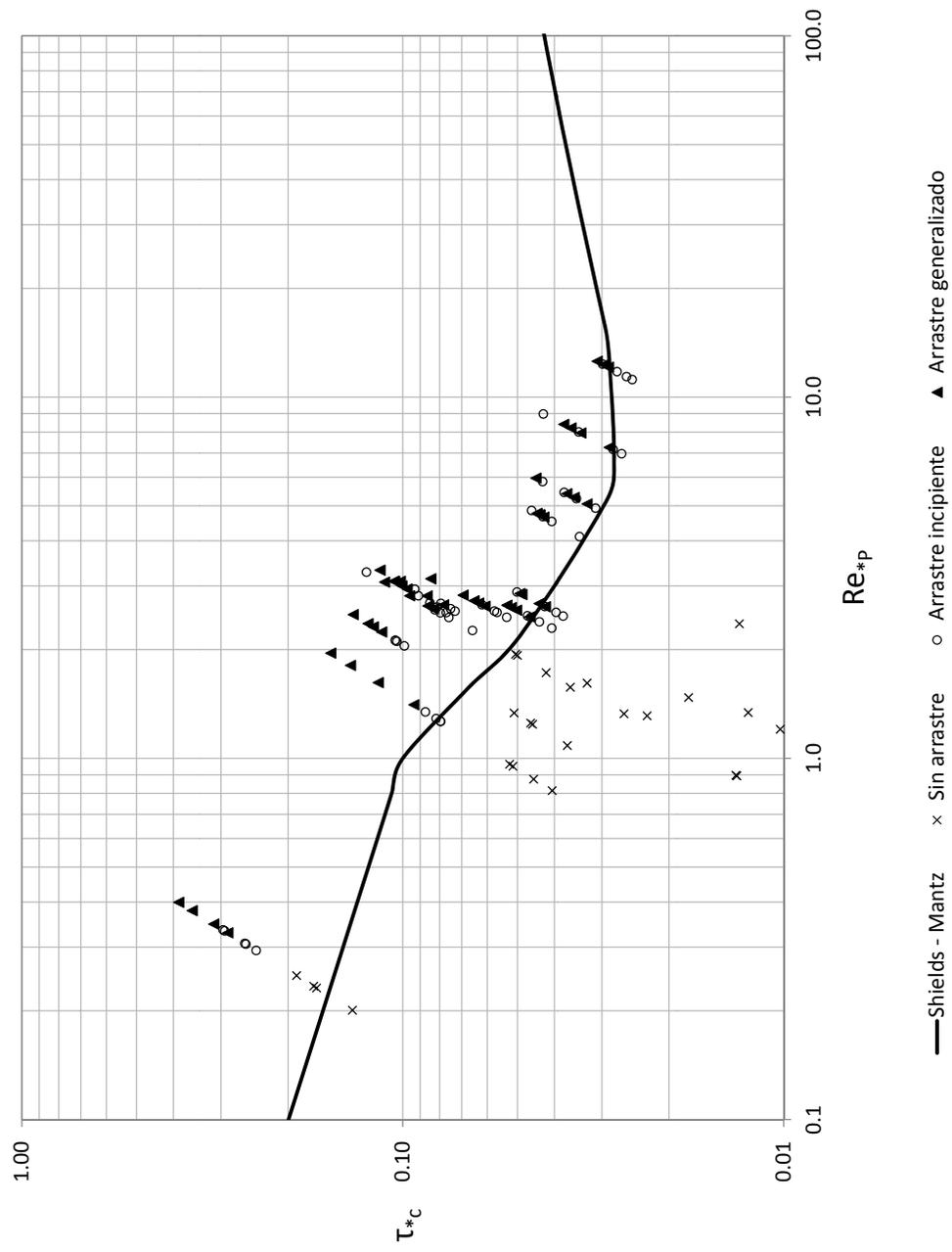


Figura 5.1: Fluidos pseudoplásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*c} \leq 0,01$.

En el gráfico de la Figura 5.1 se muestran las mediciones realizadas con soluciones de carboximetilcelulosa en agua con partículas de arena, correspondientes a las condiciones fluido-partícula N°1 a la N°13 mostradas en la Tabla 3.2. Los mediciones son diferenciadas de acuerdo al tipo de movimiento de las partículas. De este gráfico se observa que para partículas que se encuentran formando parte de un lecho sobre el cual hay un flujo laminar o que se encuentran dentro de la subcapa viscosa de un flujo turbulento, dentro del rango experimentado, el esfuerzo de corte crítico necesario para iniciar el movimiento disminuye a medida que el número de Reynolds de la partícula aumenta. Para el caso laminar, el comportamiento de la serie de datos se puede explicar por el hecho que el número de Reynolds de la partícula es proporcional al Reynolds del flujo, por lo que al aumentar Re_{*P} también lo hace Re , es decir el flujo tiende a la transición entre un flujo laminar y uno turbulento, siendo las partículas más susceptibles a percibir las fluctuaciones propias de un flujo turbulento. Estas fluctuaciones tienden a desestabilizar a la partícula, al igual que la fuerza de arrastre y de sustentación, por lo que el esfuerzo de corte necesario para desequilibrar una partícula será menor a medida que aumenta el Reynolds de la partícula. En tanto, para el caso turbulento con pared hidrodinámicamente lisa, al aumentar el número de Reynolds de la partícula, éstas se acercan a la condición en que su diámetro es similar al espesor de la subcapa viscosa. Cuando esto sucede las partículas se ven más expuestas a las fluctuaciones, beneficiando la acción desestabilizadora y requiriendo de un esfuerzo de corte menor para iniciar el movimiento de las partículas que cuando éstas tienen un tamaño significativamente inferior al del espesor de la subcapa viscosa. Esta exposición a las fluctuaciones no es completa, pues se refiere a cuando el régimen de flujo es turbulento con pared lisa pero muy cercano a la transición de pared entre lisa y rugosa.

Junto a los puntos de la Figura 5.1, que fueron separados de acuerdo al tipo de movimiento de las partículas del lecho, se muestra una curva que define la condición de arrastre incipiente para fluidos newtonianos. Cabe mencionar que el cambio repentino de la pendiente en $Re_{*P} = 1$ se debe a que para $Re_{*P} \leq 1$ esta curva corresponde a la deducida por Mantz (1977) y para $Re_{*P} \geq 1$ a la curva ajustada por Rouse (1939) a la banda de Shields.

Otra observación sobre el gráfico de la Figura 5.1 es que para $Re_{*P} \geq 1$ todos los puntos correspondientes a mediciones sin arrastre de fondo se encuentran bajo la curva de Shields, mientras que la mayoría de los puntos que describen el arrastre incipiente y el generalizado se encuentran sobre esta curva. En cuanto a la serie de datos que se encuentra a la izquierda del límite Mantz-Shields, que corresponde a la condición fluido-partícula N°2, si se considera la extrapolación de la curva de Shields los puntos correspondientes a arrastre incipiente y sin movimiento se encuentran bajo ésta, es por esto que se consideró inicialmente como una buena aproximación la curva deducida experimentalmente por Mantz, válida para $0,03 \leq Re_{*P} \leq 1$.

Por otro lado, si se deja de lado la distinción de los tipos de movimiento, se observa la disposición de líneas inclinadas, casi paralelas, que muestran los datos experimentales en el diagrama de Shields. Esto se da para partículas de las mismas características y fluidos con la misma reología, independientemente de las condiciones de flujo. En efecto, considerando la definición de Re_{*P} , despejando u_* y reemplazando esta expresión en la de τ_{*C} , se obtiene:

$$\tau_{*C} = \frac{d^{\frac{n+2}{n-2}}}{gR} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{\frac{2}{2-n}} Re_{*P}^{\frac{2}{2-n}}. \quad (5.1)$$

Esta ecuación indica que para un fluido y una partícula dada, en un gráfico log-log, los datos se

ubican a lo largo de una recta de pendiente $\frac{2}{2-n}$, que es mayor que la unidad y menor que 2 para un fluido pseudoplástico.

En la Figura 5.2 se muestran las curvas trazadas a partir de (5.1) (rectas negras discontinuas) para seis de las trece condiciones definidas por fluidos de una misma reología y partículas de un mismo diámetro, misma densidad y mismo coeficiente de roce coulombico. La curva negra continua corresponde a la trazada por Mantz y Shields, los puntos vacíos corresponden a mediciones sin arrastre de fondo, las con relleno a mediciones de arrastre incipiente y las con relleno y contorno negro a mediciones con arrastre generalizado. El color de los puntos hace referencia al tipo de partícula y junto con la forma definen una reología y un tipo de partícula.

Finalmente, es importante poner énfasis en que los resultados obtenidos son en régimen laminar y válidos para régimen turbulento cuando las partículas del lecho no destruyen la subcapa viscosa.

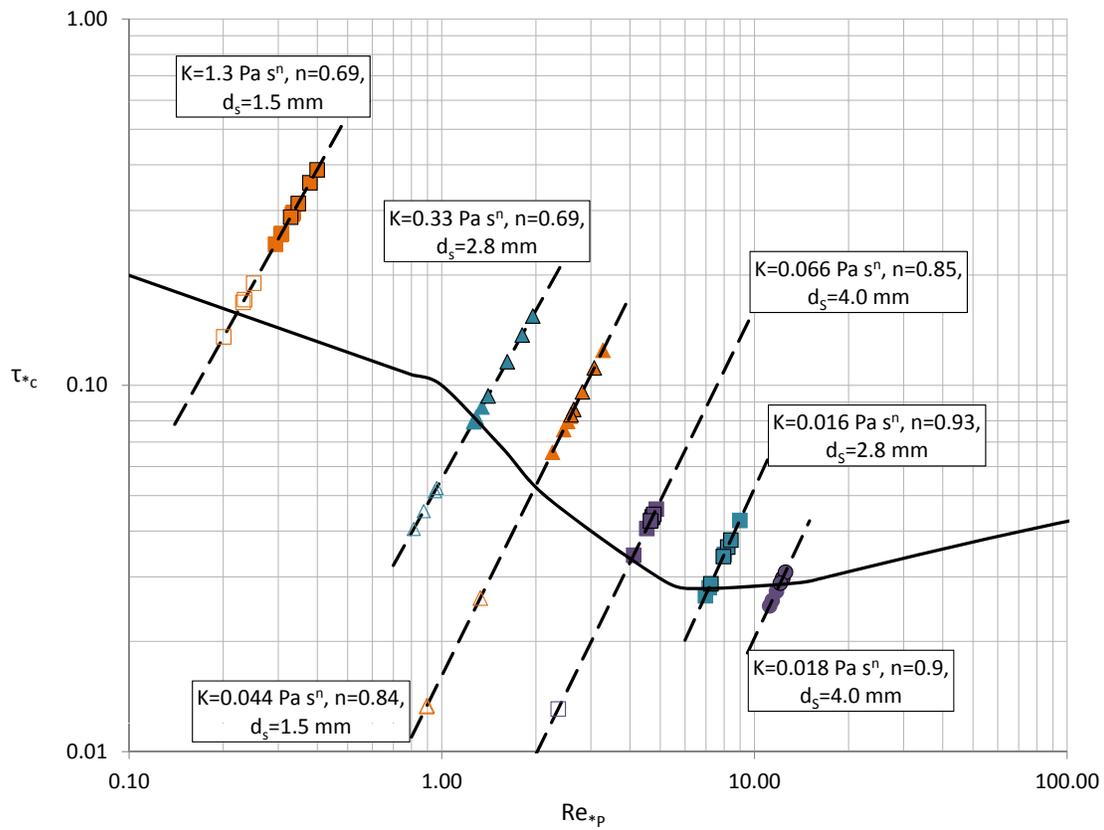


Figura 5.2: Relación funcional entre τ_{*c} y Re_{*p} en fluidos con comportamiento pseudoplástico.

Se muestran sólo algunos puntos correspondientes a seis condiciones fluido-partículas con un valor de $\tau_{*c} \geq 0,01$.

5.2.2. Fluidos plásticos

Los puntos presentados en el gráfico de la Figura 5.3 corresponden a todos los obtenidos utilizando soluciones de carbopol en agua y lechos uniformes no cohesivos de diámetros representativos, d_s , de 1,5 mm, 2,8 mm y 4 mm. El rango de número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , definido para fluidos plásticos por (4.32) es menor al abarcado en los experimentos que utilizaron soluciones de CMC en agua, tomando valores que van desde 0,27 a 2,79.

Al igual que el caso anterior, el régimen de flujo es laminar, lo cual se define a partir de un número de Reynolds del flujo, Re , menor a un número de Reynolds crítico, Re_c , relaciones definidas por (2.35) y (2.36). El número de Reynolds, Re , toma valores entre 0,73 y $3,7 \times 10^2$, mientras que el Reynolds que indica la transición entre régimen laminar y transición laminar-turbulento, Re_c varía entre $7,6 \times 10^2$ y $4,1 \times 10^3$.

Por otro lado, es importante mencionar que los resultados mostrados en la Figura 5.3 presentan la corrección al esfuerzo de corte de fondo, τ_0 , debido al tipo de escurrimiento, dada por (4.21) para fluidos modelados mediante Herschel-Bulkley. Notar que en el eje vertical se grafica el esfuerzo sobre el fondo, reducido en el esfuerzo de fluencia. Para los experimentos en que se utilizó un fluido con esfuerzo de fluencia, también se tuvieron tanto flujos subcríticos como supercríticos, en donde el número de Froude tomó valores entre 0,01 y 1,25. Es importante mencionar que todos los datos obtenidos para este tipo de fluidos son procesados considerando que $d \leq h - h_0$, es decir que la partícula se encuentra en la zona en que hay un gradiente de velocidad en la vertical. Esto se corrobora en los experimentos ya que difícilmente se apreciaba una banda bajo la superficie libre en que el fluido no sufría deformaciones y además por el bajo valor del esfuerzo de fluencia. Finalmente, en los resultados se pueden distinguir los tres casos de movimiento de partículas: sin arrastre, arrastre incipiente y arrastre generalizado.

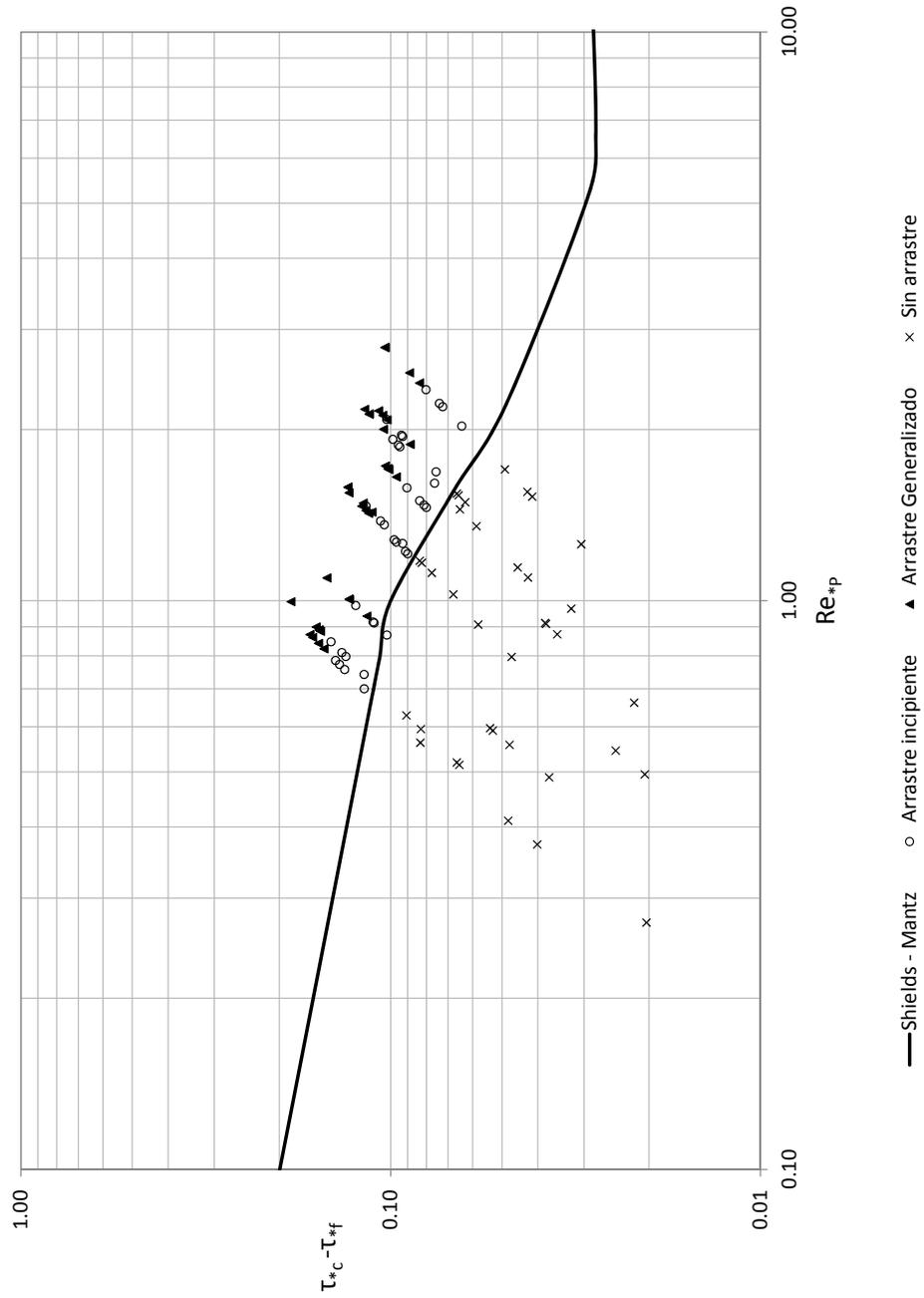


Figura 5.3: Fluidos plásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*c} \leq 0,01$.

En el gráfico mostrado en la Figura 5.3 se muestran las mediciones realizadas con fluidos compuestos por agua y carbopol, correspondientes a las condiciones fluido-partícula N°14 a la N°22 mostradas en la Tabla 3.2. Además, al igual que los resultados mostrados para la mezclas de CMC, se muestra para $Re_{*P} \leq 1$ la curva de Mantz y para $Re_{*P} \geq 1$ la curva de Shields, con el esfuerzo crítico de Shields reducido por el esfuerzo de fluencia. Este gráfico separa las condiciones de movimiento observadas en los experimentos: sin arrastre, arrastre incipiente y arrastre generalizado. En cuanto a la tendencia de los puntos de arrastre incipiente, se observa algo similar a lo encontrado para fluidos pseudoplásticos, que a medida que el número de Reynolds de la partícula aumenta, el esfuerzo de corte necesario para iniciar el transporte de fondo de las partículas desciende. Para régimen laminar, la explicación es básicamente la misma discutida en la sección 5.2.1, donde se señaló que al aumentar el número de Reynolds de un flujo laminar, éste se acerca cada vez más a un flujo en transición laminar-turbulento.

Si bien los resultados son producto de experimentos en régimen laminar, se determinó teóricamente que para efectos del estudio del esfuerzo de corte, éstos son válidos también para régimen turbulento con pared lisa cuando $d/h \ll 1$. Por lo tanto, al igual que el caso laminar, a medida que el número de Reynolds de la partícula comienza a aumentar, acercándose a la zona de transición de pared, el esfuerzo de corte necesario para iniciar el transporte de fondo de partículas desciende. Esto tendría la misma explicación analizada en la sección 5.2.1, la cual señala que el hecho de que el tamaño de la partícula tienda a parecerse al espesor de la subcapa viscosa la hace más susceptible a percibir las fluctuaciones que existen fuera de la subcapa viscosa.

En cuanto a la relación de los datos experimentales con las curvas de Mantz (1977) y Shields *et al.* (1936), del gráfico de la Figura 5.3 se observa que para $Re_{*P} \geq 1$ la totalidad de los puntos correspondientes a mediciones realizadas sin arrastre se ubican bajo la curva de Shields, mientras que los puntos que reflejan mediciones con arrastre incipiente y generalizado se ubican sobre esta curva. En lo que concierne al rango de $Re_{*P} \leq 1$, la curva de Mantz refleja lo observado y medido en los experimentos, donde los puntos correspondientes a experimentos sin arrastre se encuentran bajo la curva y los que representan movimiento de las partículas en el lecho se ubican sobre ésta, a excepción de un punto de arrastre incipiente.

En cuanto a la formación de líneas rectas observadas en el gráfico de la Figura 5.2 para fluidos de comportamiento pseudoplástico, en el gráfico de la Figura 5.3, que describe las resultados obtenidos con fluidos con esfuerzo de fluencia, se pueden apreciar líneas inclinadas con cierta curvatura, ésto debido al esfuerzo de fluencia. Al igual que para el caso anterior, cada una de estas curvas casi paralelas se da para experimentos que fueron realizados con el mismo tipo de partículas y un fluido de la misma reología. De la misma manera como se obtuvo (5.1) para fluidos modelados mediante una ley de potencia se puede encontrar una relación entre la diferencia del esfuerzo de corte adimensional con el esfuerzo de fluencia adimensional, $\tau_{*C} - \tau_{*f}$, y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , en función de los mismos parámetros correspondientes a la relación para fluidos pseudoplásticos, pero incluyendo además el efecto del esfuerzo de fluencia en el parámetro $\alpha = \frac{\tau_f}{\tau_0} = \frac{\tau_{*f}}{\tau_{*c}}$. Esta expresión corresponde a:

$$\tau_{*C} - \tau_{*f} = \frac{d^{\frac{n+2}{n-2}}}{gR} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{\frac{2}{2-n}} (1 - \alpha) \left(\frac{Re_{*P}}{1 - \alpha Re_{*P}} \right)^{\frac{2}{2-n}}. \quad (5.2)$$

De la expresión anterior podemos notar que para un fluido y un tipo de partícula dados, los datos

en un gráfico log-log se disponen en una curva que se asemeja a una recta a medida que $\alpha = \tau_f/\tau_0$ es más pequeño, es decir a medida que su comportamiento es más parecido al de un fluido modelado mediante la ley de potencia.

En la Figura 5.4 se muestran las curvas trazadas para tres condiciones definidas por un fluido de una reología y un tipo de partícula. La forma y color de los símbolos tienen el mismo significado que para el caso de las soluciones de CMC en agua.

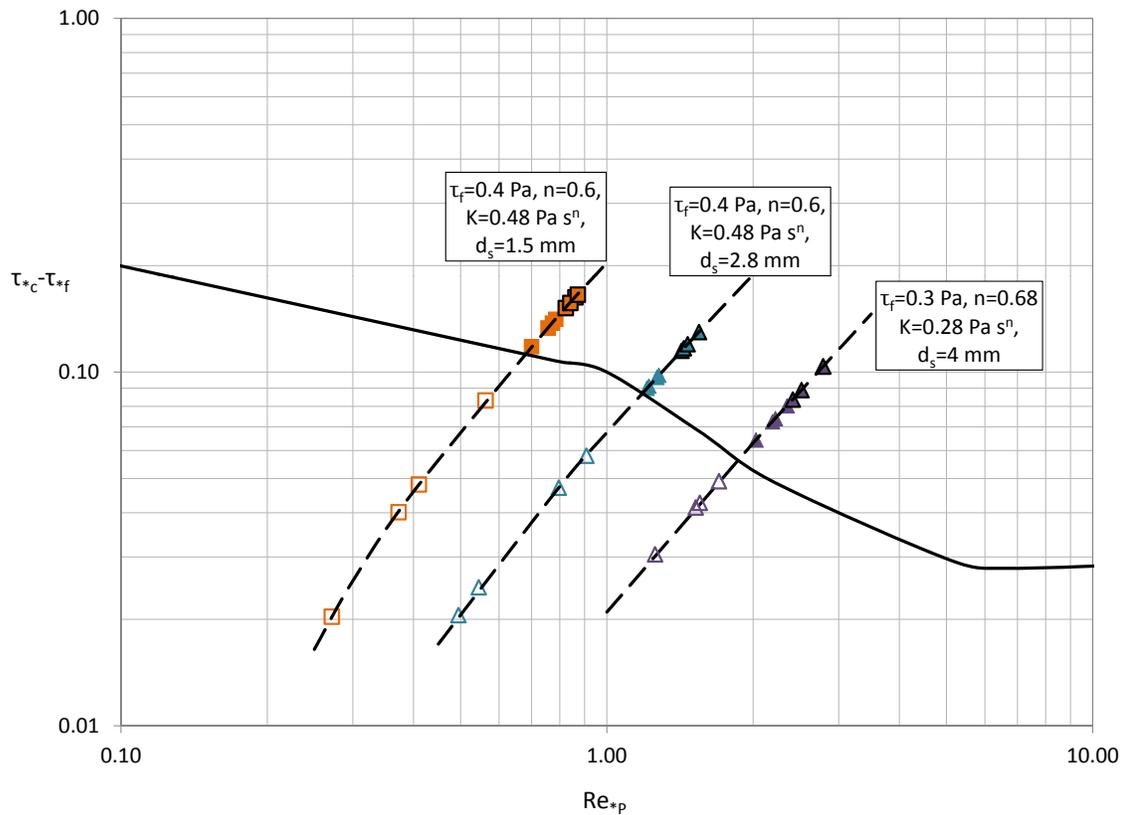


Figura 5.4: Relación funcional entre τ_{*C} y Re_{*P} en fluidos con comportamiento plástico.

Se muestran sólo algunos puntos correspondientes a tres condiciones fluido-partículas con un valor de $\tau_{*C} \geq 0,01$.

5.3. Diferencias entre curva de Mantz-Shields y teórica

En la sección 4.3 se determinaron expresiones analíticas que definen la condición crítica de arrastre, las que se muestran en las Figuras 4.1 y 4.2, donde se puede ver una comparación entre el caso de un fluido newtoniano y uno newtoniano.

De forma adicional, y debido a la similitud de los resultados experimentales con la curva de Mantz y Shields, se compararán éstas con las curvas teóricas. Esto se puede apreciar en las siguientes figuras (Figuras 5.5 y 5.6), en donde se variaron los parámetros que caracterizan el modelo de la ley de potencia y el de Herschel-Bulkley.

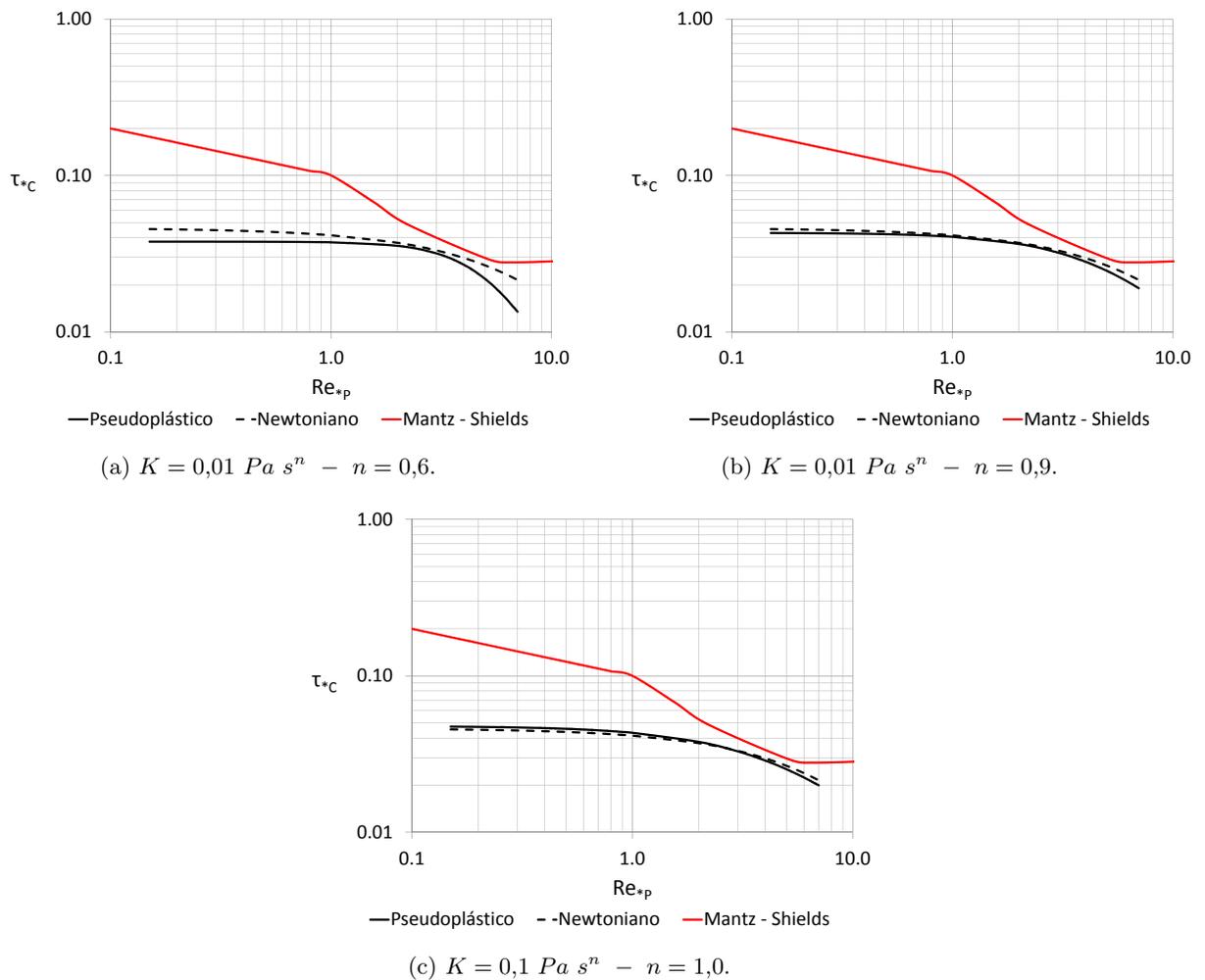


Figura 5.5: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico para fluidos pseudoplásticos.

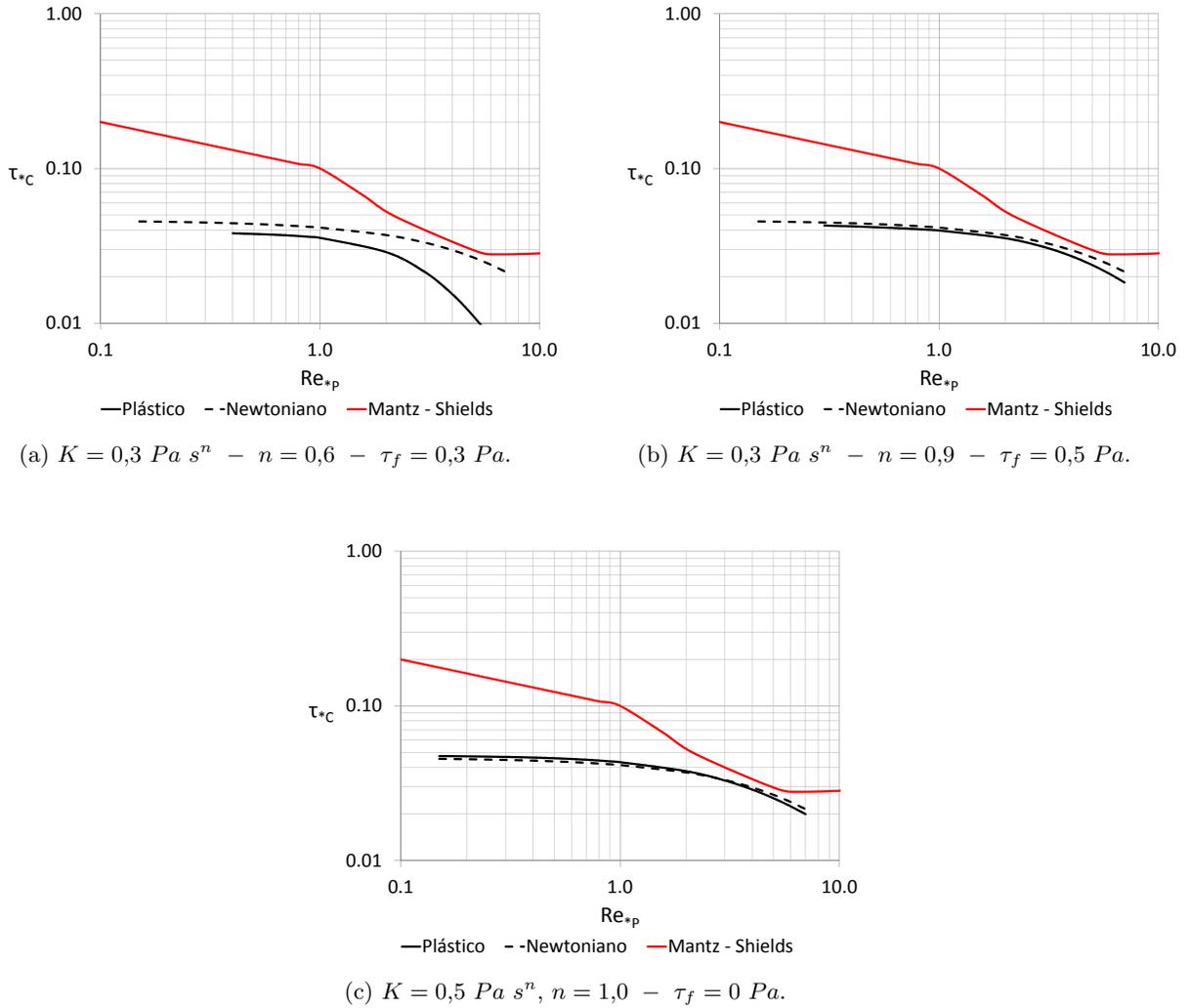


Figura 5.6: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico para fluidos plásticos.

Adicionalmente, se tienen más gráficos de este estilo en el Anexo C, donde se varían en distinto grado los parámetros K , n y τ_f .

De las figuras anteriores se observa que la curva de Mantz y Shields, que define la condición crítica, posee evidentes diferencias en cuanto al orden de magnitud y en la pendiente con respecto a la curva teórica que define la condición de estabilidad de una partícula esférica no cohesiva en flujos de fluidos newtonianos y no newtonianos. Al respecto, hay más de un argumento para explicar este desfase entre la curva teórica y la de Mantz y Shields. Una de ellas corresponde al hecho de que el análisis de estabilidad teórico considera una partícula esférica en que toda la partícula se ve enfrentada al flujo y que interactúa con las otras partículas sólo debido al coeficiente de roce coulombico, μ . Esta situación es ideal y desfavorable, ya que en la realidad las partículas tienden a ordenarse, pudiendo encontrar algunos factores que harían aumentar el esfuerzo de corte necesario para comenzar con el arrastre. Un ejemplo de un posible ordenamiento entre partículas se muestra

en la Figura 5.7. Considerando esta hipótesis de ordenamiento, uno de los factores que influiría en la diferencia entre ambas curvas corresponde al hecho de que una partícula puede encontrarse entre dos partículas y a la vez apoyada sobre estas dos, por lo que el área de la sección que efectivamente se ve enfrentada al flujo disminuye, disminuyendo también la fuerza de arrastre, que es una de las que colabora con el arrastre de fondo. Además, al considerar este caso, la partícula que se encuentra por delante ejerce una fuerza que se opone al movimiento de la partícula en estudio, por lo que la fuerza necesaria para iniciar el movimiento debería ser mayor.

En cuanto a diferencias en la pendiente entre la curva deducida analíticamente y la postulada por Mantz y Shields (Figura 5.6), observamos que para el tramo inicial se tiene la mayor diferencia en la tendencia de ambas. Vemos que para los casos newtoniano y no newtoniano el esfuerzo de corte adimensional de la curva teórica adquiere un valor casi constante para $Re_{*P} \leq 1$, contrariamente a lo deducido por Mantz Mantz (1977). Una justificación razonable corresponde al hecho que a medida que disminuye el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , el espesor de la subcapa viscosa aumenta en relación al tamaño de las partículas, por lo que las fluctuaciones presentes en la frontera de la subcapa se alejan de las partículas, dificultando el arrastre y por ende aumentando el esfuerzo de corte necesario que define la condición crítica.

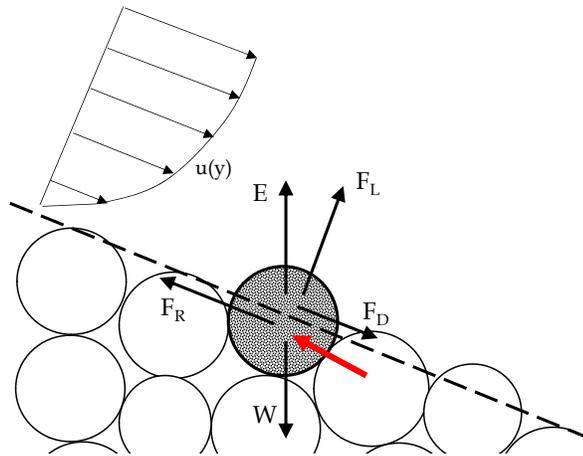
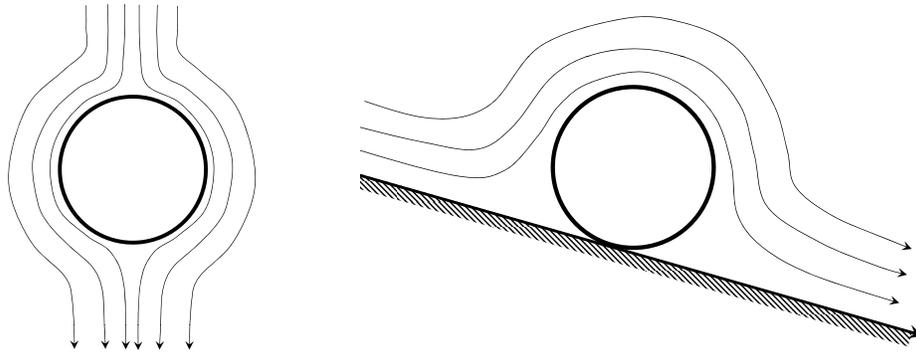
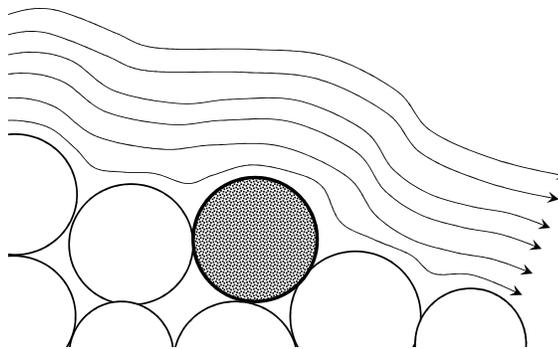


Figura 5.7: Situación real de la ubicación de una partícula en el lecho. La flecha roja corresponde a la fuerza que ejerce la partícula ubicada por delante de la analizada.

Otra consideración que explicaría la diferencia entre la curva experimental con la teórica, se relaciona con la fuerza de arrastre. Para determinarla se utilizó una expresión para el coeficiente de arrastre que considera un flujo que rodea a la partícula en todo su entorno (Figura 5.8a). Esto claramente no sucede pues las partículas se encuentran formando parte del lecho, por lo que el flujo está en contacto con la partícula en partes en donde ésta no está en contacto con otras. (Figuras 5.8b y 5.8c)



(a) Flujo que rodea completamente a la partícula. (b) Flujo que rodea parcialmente a la partícula.



(c) Situación real.

Figura 5.8: Líneas de corriente en torno a una partícula.

Finalmente, la aleatoriedad del fenómeno es un factor que está presente en el análisis experimental debido a la variabilidad en la forma y tamaño de las partículas, no así en el teórico en el cual se consideran partículas esféricas de un mismo tamaño, por lo que la diferencia entre ambas curvas también podría deberse a este factor.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente estudio se ha realizado una cantidad significativa de mediciones para determinar la condición de arrastre incipiente de partículas no cohesivas en flujos de fluidos no newtonianos de comportamiento pseudoplástico y plástico. Dentro de estas mediciones se consideraron distintas condiciones de flujo, distintos tamaños de partículas no cohesivas y fluidos de reologías variadas, observándose distintos tipos de transporte de fondo, identificándose el límite entre cuando no hay movimiento de partículas y cuando sí lo hay.

Si bien no hay mayor información sobre investigaciones de este fenómeno en fluidos no newtonianos, las dimensiones de la instalación son menores a las que por lo general se utilizan en trabajos que abordan el arrastre incipiente en flujos de fluidos newtonianos, esto debido a la limitación que significa tener volúmenes significativos de soluciones de CMC y carbopol en agua, cuyos tiempos de preparación rondan las 12 horas para volúmenes de 200 litros.

La condición de arrastre incipiente fue definida visualmente, al igual que las de sin arrastre y arrastre generalizado, pero es la de inicio de movimiento la más subjetiva pues la metodología requirió ir modificando el flujo cada cierto tiempo de manera de encontrar esta condición crítica, la cual debe darse en régimen permanente y no mientras estén presentes las variaciones debido a la modificación del flujo.

El caracterizar el régimen de flujo puede llegar a ser bastante complicado para flujos de fluidos no newtonianos en contornos abiertos. El trabajo de Haldenwang *et al.* (2010) proporcionó un medio para estimar el tipo de régimen en fluidos de comportamiento pseudoplástico y plástico, deducidas a partir de soluciones de CMC en agua y suspensiones de caolín y bentonita en agua. Por otro lado, no se posee información sobre la caracterización del perfil de velocidades en régimen turbulento para fluidos no newtonianos con esfuerzo de fluencia.

Luego del procesamiento de datos, se comprobó que todos los experimentos fueron realizados en régimen laminar, que en términos del número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , es equivalente al régimen turbulento con pared lisa de fluidos pseudoplásticos y plásticos para razones de $d/h \ll 1$.

En cuanto a la variación de la altura de escurrimiento en la dirección del flujo, los escurrimientos obtenidos corresponden al tipo uniforme y gradualmente variado. La forma de cuantificar esta variación en el tipo de escurrimiento en muchos de los experimentos fue desarrollando una expresión de la forma de un factor de corrección al esfuerzo de corte en el fondo de un escurrimiento uniforme, con una altura de escurrimiento igual a la altura local de la sección en donde se define la condición

de arrastre incipiente o generalizado. Para el caso de los fluidos pseudoplásticos se consideró autosimilaridad en los perfiles de velocidad, es decir, que la relación entre la velocidad $u(x, y)$ y la velocidad media $\bar{u}(x)$ es una función de la altura y , relativa al fondo, y de la altura de escurrimiento h . Para el caso de los fluidos plásticos este supuesto pierde validez, debido a que bajo la superficie libre hay un espesor en que el fluido no sufre deformaciones debido a que $\tau < \tau_f$, mientras que bajo este espesor el fluido se comporta como pseudoplástico. En lugar de este supuesto se consideró el principio de autosimilaridad de la velocidad, $u(x, y)$, con respecto a la velocidad máxima, $u_{max}(x)$.

En cuanto a los resultados obtenidos al graficar el esfuerzo de corte adimensional, τ_{*C} , (o $\tau_{*C} - \tau_{*f}$ para fluidos con esfuerzo de fluencia) en función del número de Reynolds de la partícula, Re_{*P} , se puede observar tanto en el gráfico de la Figura 5.1 como en el de la Figura 5.3 que los puntos correspondientes al arrastre incipiente disminuyen su esfuerzo de corte crítico necesario para iniciar el movimiento a medida que Re_{*P} aumenta. Si bien los resultados fueron obtenidos a partir de experimentos en régimen laminar, éstos son válidos para régimen turbulento con pared hidrodinámicamente lisa cuando $d/h \ll 1$.

En régimen laminar la tendencia de los puntos correspondientes a arrastre incipiente se puede explicar por el hecho de que al aumentar el número de Reynolds de la partícula, también lo hace el Reynolds del flujo, acercándose más a un flujo en transición laminar-turbulento, en donde se hacen presentes fluctuaciones en el flujo. En lo que respecta a régimen turbulento con pared lisa, este comportamiento se explicaría por el tamaño de la partícula relativo al espesor de la subcapa viscosa, pues al aumentar Re_{*P} el diámetro representativo de las partículas del lecho tiende a asemejarse al espesor de la subcapa, percibiendo un mayor efecto de las fluctuaciones que se ubican sobre la subcapa viscosa que cuando el tamaño de las partículas es significativamente menor.

Por otro lado, los resultados obtenidos para los fluidos pseudoplásticos se condicen con el resultado de Shields *et al.* (1936) para $Re_{*P} \geq 1$. Para $Re_{*P} \leq 1$ se cuenta sólo con una serie de resultados correspondientes a fluidos de una sola reología y a un tipo de partículas, cuyo comportamiento no es representado por la extrapolación de la curva de Shields. Por otro lado, si bien la curva proyectada por Mantz (1977) no representa correctamente el límite definido por las experiencias realizadas, lo hace de mejor manera que la extrapolación de la curva de Shields. Aun así, lo ideal sería realizar más experimentos para ese rango con fluidos modelados con una ley de potencia con un índice $n < 1$.

En cuanto a los resultados obtenidos con las soluciones de carbopol en agua, de comportamiento plástico, la curva de Shields sí representa la condición de arrastre incipiente para $Re_{*P} \geq 1$, no así para $Re_{*P} \leq 1$. Para este rango, la curva de Mantz se ajusta al comportamiento de los datos satisfactoriamente, los cuales corresponden a mediciones de dos series de datos, cada una definida por fluidos de una reología y un lecho compuesto por un tipo de partículas.

Considerando la correspondencia con la curva de Mantz para fluidos con esfuerzo de fluencia, y que el gráfico de la Figura 5.3 es equivalente al de la Figura 5.1 cuando $\tau_f = 0$, se puede definir la curva de Mantz como un mejor predictor del arrastre incipiente frente a flujos de fluidos pseudoplásticos que la proyección de la curva de Shields para $Re_{*P} \leq 1$. En tanto, para $Re_{*P} \geq 1$, la curva de Shields parece ser un buen predictor de la condición de arrastre incipiente en flujos de fluidos plásticos y pseudoplásticos. Así, ambas curvas representarían la condición de arrastre incipiente en distintos rangos del número de Reynolds de la partícula, siempre y cuando se considere un Re_{*P} modificado de acuerdo a los parámetros de la ley de potencia y del modelo de Herschel-Bulkley.

Sobre la influencia de las características de las partículas y del fluido en el arrastre incipiente, no es posible establecer una influencia de las partículas de forma separada del fluido, pues ambas propiedades se agrupan en el término Re_{*P} . Al contrario de lo que se podría pensar al ver el gráfico de la Figura D.2 del Anexo D, en donde los puntos correspondientes a partículas más pequeñas se ubican a la izquierda de los correspondientes a partículas más grandes, esto se debe principalmente a la poca variación de los parámetros que caracterizan la reología de los fluidos. La cierta independencia de los datos con el diámetro de las partículas se puede ver en el gráfico de la Figura D.1 del Anexo D, en donde no se sigue una relación directa con el diámetro de la partícula. Cabe mencionar que si consideramos un fluido de una misma reología con distintos tipos de partículas, las partículas más finas se ubicarán más a la izquierda del gráfico que las gruesas. De la misma forma, si consideramos un tipo de partículas y fluidos de distintos índice de consistencia, los experimentos con coeficientes de consistencia K mayores requerirán mayores esfuerzos de corte para lograr la condición umbral.

En cuanto al análisis teórico del problema, éste no representa a cabalidad la naturaleza de los experimentos, debido a factores difíciles de incluir en el análisis, como por ejemplo: área efectiva de la partícula que se ve enfrentada al flujo, trabazón en otras partículas, suposiciones en el cálculo del coeficiente de arrastre y de sustentación, a pesar de contar con una expresión empírica del coeficiente de arrastre para fluidos pseudoplásticos cuyo comportamiento se ajusta a la ley de potencia. Particularmente, para el caso de fluidos con esfuerzo de fluencia, se suma además el hecho de que la expresión utilizada para calcular el coeficiente de arrastre fue determinada de manera experimental para fluidos pseudoplásticos modelados con la ley de potencia, utilizando un número de Reynolds de la partícula modificado de acuerdo a los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley.

Para terminar con los resultados obtenidos en los gráficos de τ_{*C} o $\tau_{*C} - \tau_{*f}$ en función de Re_{*P} , es importante notar que los puntos correspondientes a experimentos realizados con un fluido de la misma reología y partículas de las mismas propiedades, en un gráfico log-log se agrupan en rectas casi paralelas para el caso de fluidos pseudoplásticos y en curvas para el caso de fluidos plásticos.

Finalmente, es importante señalar que sería interesante realizar un análisis similar a este considerando condiciones de flujo turbulentas de modo de abarcar un mayor rango de Re_{*P} y analizar la posible extensión de la curva de Shields completa a fluidos no newtonianos, considerando valores de Re_{*P} que consideren los parámetros que caracterizan la reología.

Bibliografía

- BROWNLIE, W.R. 1981 Prediction of flow depth and sediment discharge in open channels. *Report No. KH-R-43A, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA* p. 232.
- CEYLAN, K., HERDEM, S. & ABBASOV, T. 1999 A theoretical model for estimation of drag force in the flow of non-newtonian fluids around spherical solid particles. *Powder Technology* **103**, 286–291.
- CHHABRA, R.P. 1992 Settling of cylinders in power law liquids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **70**, 385–386.
- CHHABRA, R.P. & UHLHERR, P.H.T. 1980 Sphere motion through non newtonian fluids at high reynolds number. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **58**, 124–128.
- DAIDO, A. 1971 On the occurrence of mud-debris flows. *Bull. Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University* **21(2)**.
- DODGE, D.W & METZNER, A.B. 1959 Turbulent flow of non-newtonian system. *A.I.Ch.E Journal* **5(2)**, 189–204.
- HALDENWANG, R., SLATTER, P.T. & CHHABRA, R.P. 2010 An experimental study of non-newtonian fluid flow in rectangular flumes in laminar, transition and turbulent flow regimes. *Journal of the South African Institution of Civil Engineering* **52(1)**, 11–19.
- MANTZ, P.A. 1977 Incipient transport of fine grains and flakes by fluids - extended shields diagram. *ASCE, Journal of the Hydraulics Division* **103(HY6)**, 601–615.
- NIÑO, Y. 2005 *Hidráulica fluvial y transporte de sedimentos. Apuntes curso CI61F Transporte hidráulico de sólidos.*
- RAJITHA, P., CHHABRA, R.P, SABIRI, N.E & COMITI, J. 2006 Drag on non-spherical particles in power law non-newtonian media. *International Journal of Mineral Processing* **78**, 110–121.
- REYNOLDS, P.A. & JONES, T.E.R. 1989 An experimental study of the settling velocities of single particles in non-newtonian fluids. *International Journal of Mineral Processing* **25**, 47–77.
- ROUSE, H. 1939 An analysis of sediment transportation in the light of fluid turbulence. *Soil Conservation Services Report No. SCS-TP-25* .

- SHIELDS, A., OTT, W. P. & VAN UCHELEN, J. C. 1936 Application of similarity principles and turbulence research to bed-load movement (traducido de: Anwendung der aehnlichkeitsmechanik und der turbulenzforschung auf die geschiebe - bewegung). *Soil Conservation Service, Cooperative Institute of Technology, Pasadena, California, USA* .
- WAN, Z. 1982 Bed material movement in hyperconcentrated flow. *Sr. Paper 31, Inst. Hydrodyn., T.U. Denmark, Lyngby* .
- ZHANG, L., CH., YANG & MAO, Z-CH. 2008 An empirical correlation of drag coefficient for a single bubble rising in non-newtonian liquids. *Ind. Eng. Chem. Res.* **47(23)**, 9767–9772.

Anexo A

Reogramas

Los reogramas corresponden a mediciones realizadas con un reómetro de cilindros concéntricos Rheolab Anton Paar. Para cada condición fluido-partícula enunciada en la sección 3.4 se tomaron muestras desde el estanque principal antes y después de realizar la serie de experimentos, con tal de percibir posibles cambios en la reología producto de la constante recirculación a través de la bomba.

A.1. Reogramas de soluciones de agua-CMC

En esta sección se muestran los reogramas, en los cuales se grafica el esfuerzo de corte, τ , en función de la tasa de deformación, $\dot{\gamma}$, obtenidos para las soluciones conformadas por CMC y agua. A partir de los puntos entregados por el reómetro es posible determinar los parámetros que caracterizan la reología, dados por el coeficiente de consistencia, K , y el índice de flujo, n .

En las Figuras A.1, A.2 y A.3 se muestran los puntos obtenidos y la curva que se ajusta a éstos, luego de definir los parámetros K y n .

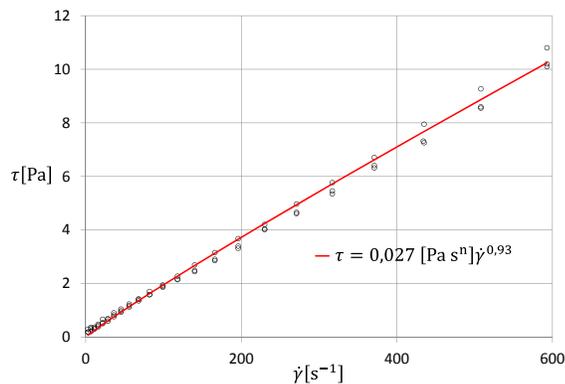
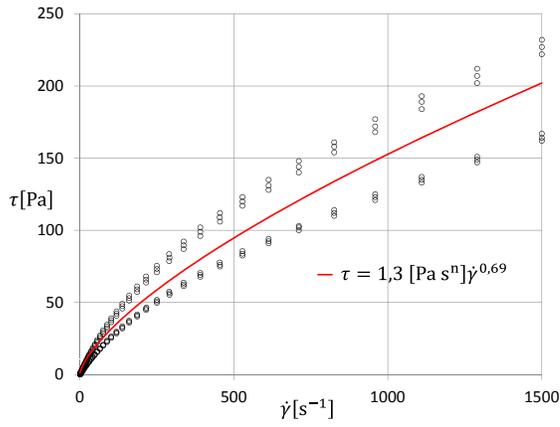
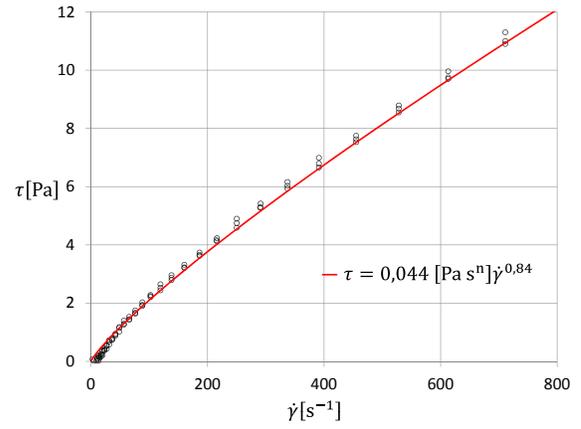


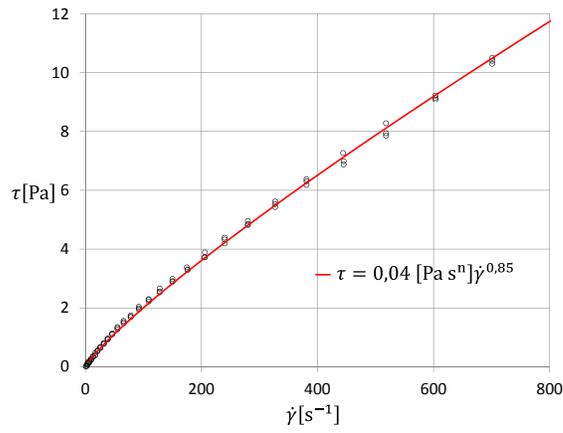
Figura A.1: Reograma de solución de CMC en agua obtenidos para condición fluido - partícula N°1.



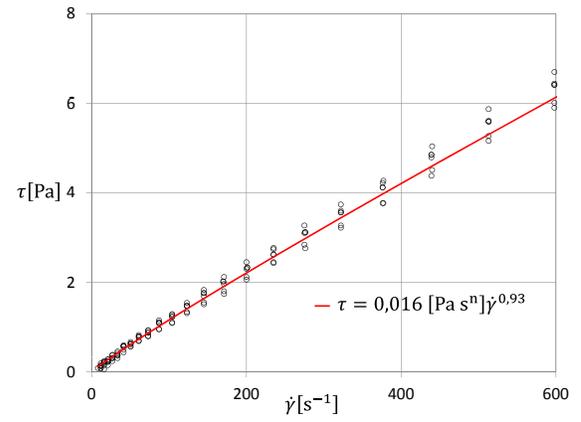
(a) Condición fluido - partícula N°2.



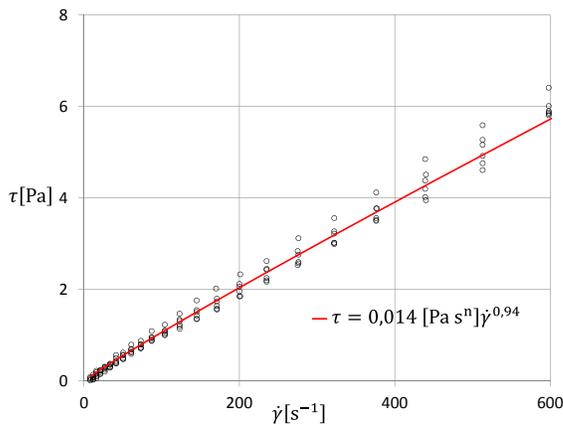
(b) Condición fluido - partícula N°3.



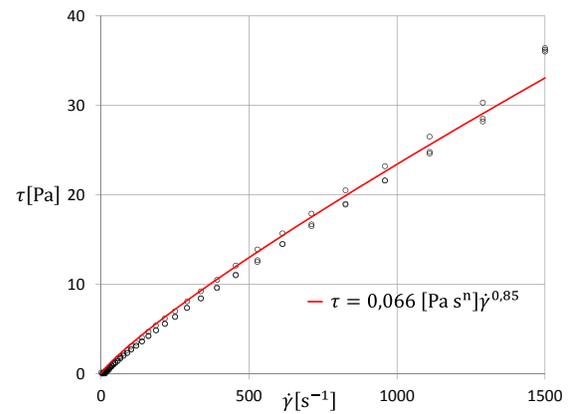
(c) Condición fluido - partícula N°4.



(d) Condición fluido - partícula N°5.

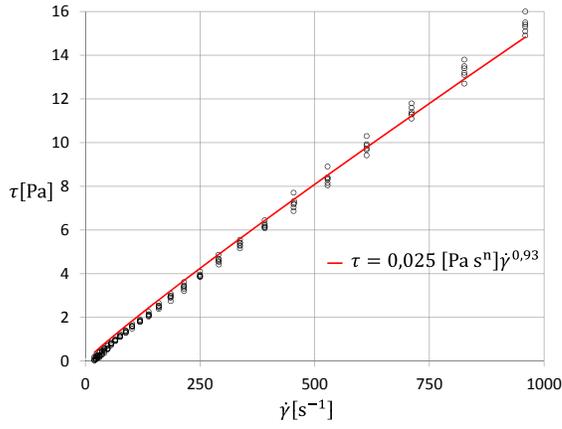


(e) Condición fluido - partícula N°6.

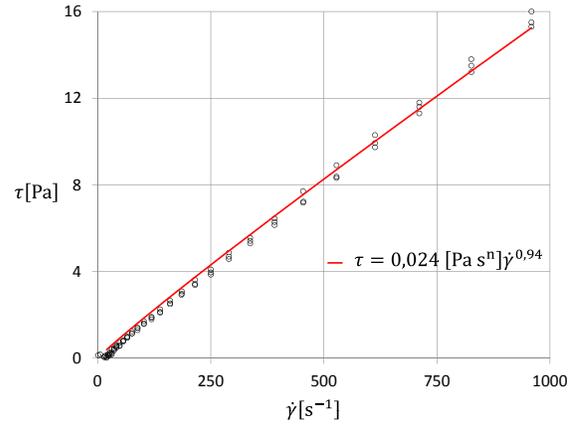


(f) Condición fluido - partícula N°7.

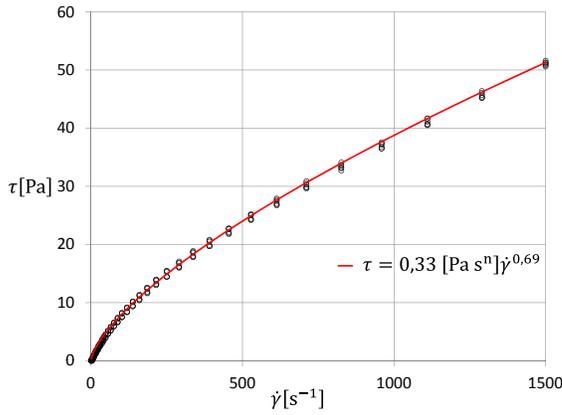
Figura A.2: Reogramas de soluciones de CMC en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula.



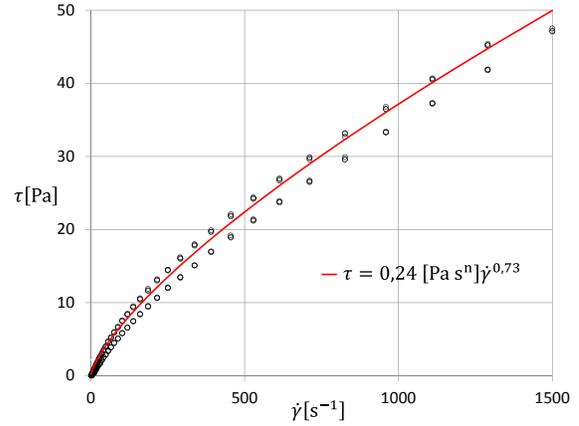
(a) Condición fluido - partícula N°8.



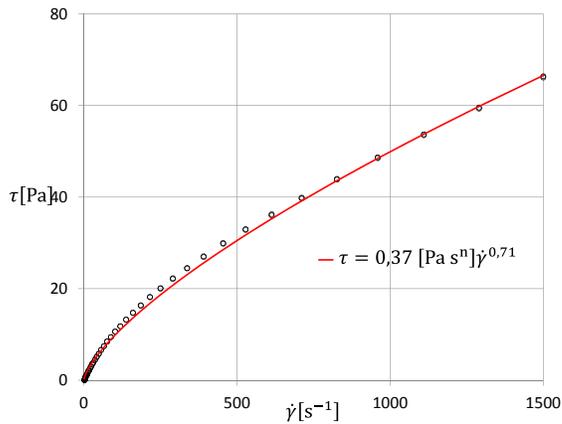
(b) Condición fluido - partícula N°9.



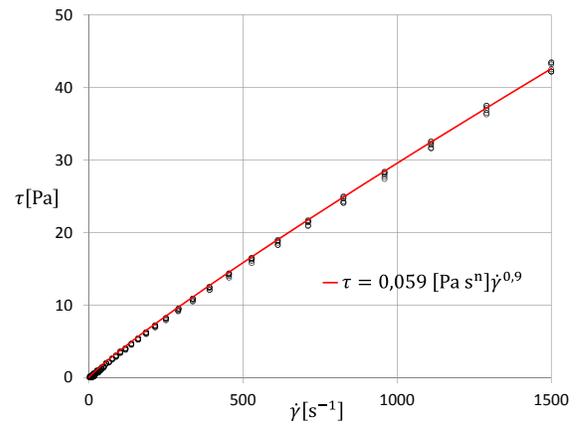
(c) Condición fluido - partícula N°10.



(d) Condición fluido - partícula N°11.



(e) Condición fluido - partícula N°12.



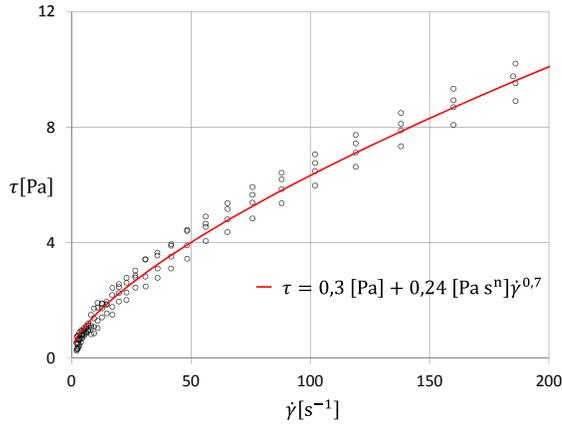
(f) Condición fluido - partícula N°13.

Figura A.3: Reogramas de soluciones de CMC en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula.

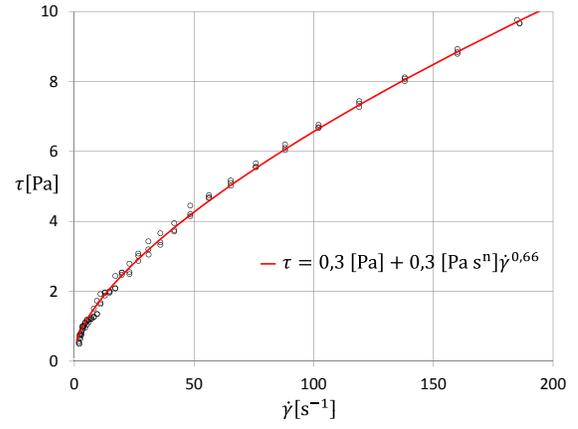
A.2. Reogramas de soluciones de agua-carbopol

En esta sección se muestran los reogramas de las soluciones de carbopol en agua, en los cuales se grafica el esfuerzo de corte, τ , en función de la tasa de deformación, $\dot{\gamma}$. A partir de los puntos entregados por el reómetro es posible determinar los parámetros que caracterizan la reología, dados por el esfuerzo de fluencia τ_f , el coeficiente de consistencia, K , y el índice del fluido, n .

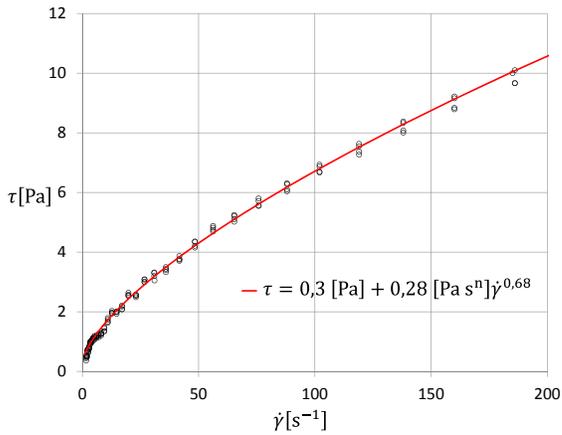
En las Figuras A.4 y A.5 se muestran los puntos obtenidos y la curva que se ajusta a éstos, luego de definir los parámetros τ_f , K y n .



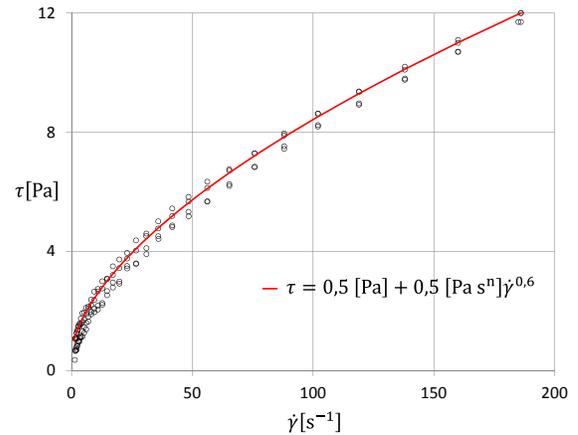
(a) Condición fluido - partícula N°14.



(b) Condición fluido - partícula N°15.

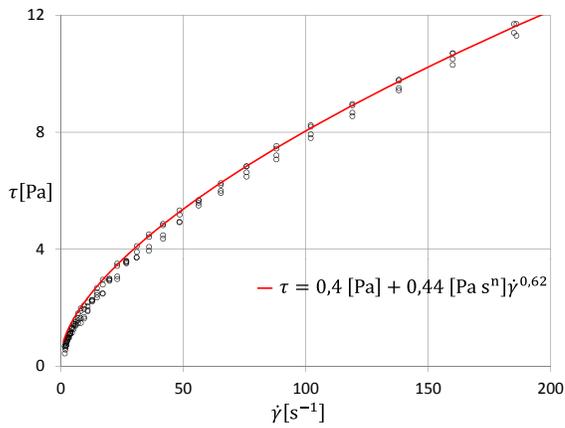


(c) Condición fluido - partícula N°16.

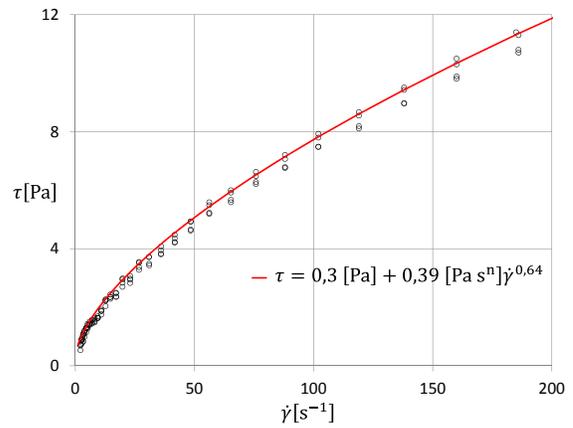


(d) Condición fluido - partícula N°17.

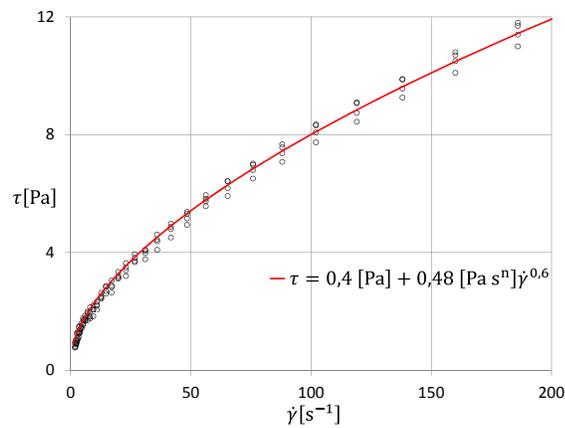
Figura A.4: Reogramas de soluciones de carbopol en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula.



(a) Condición fluido - partícula N°18.



(b) Condición fluido - partícula N°19.



(c) Condición fluido - partícula N°20, N°21 y N°22.

Figura A.5: Reogramas de soluciones de carbopol en agua obtenidos para distintas condiciones fluido - partícula.

Anexo B

Determinación de propiedades de las partículas

En esta sección se muestra parte del procesamiento empleado para determinar la densidad y ángulo de reposo de los tres tipos de partículas, cuyos valores fueron detallados en la sección 3.3.

B.1. Densidad

Como se mencionó en la sección 3.3, esta propiedad fue determinada a partir del principio de Arquímedes. En los gráficos de las Figuras B.1 y B.2 la pendiente de la recta representa la densidad de las partículas.

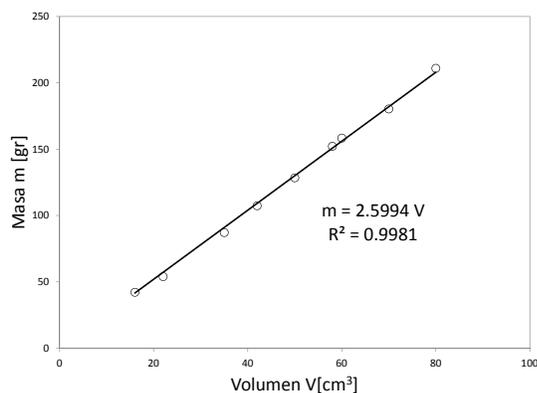
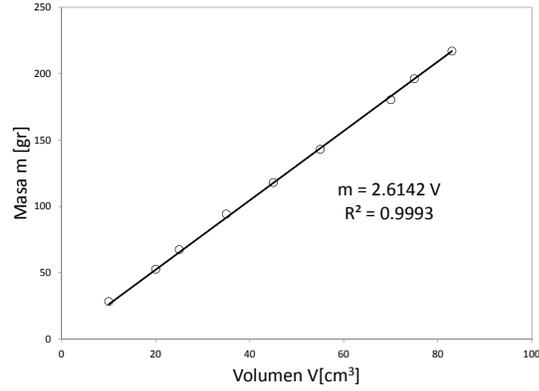
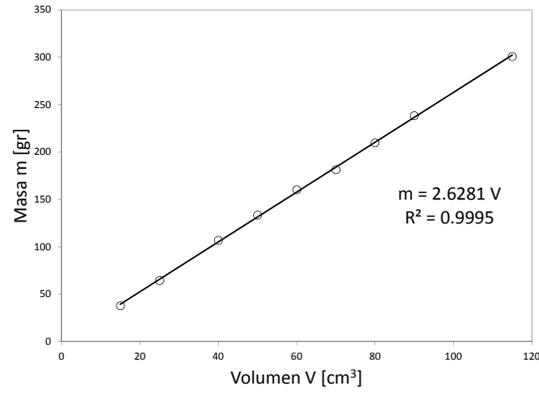


Figura B.1: Determinación de densidad de arena tipo 1, $d_s = 1,5$ mm.



a) Arena $d_s = 2,8$ mm.



b) Arena $d_s = 4,0$ mm.

Figura B.2: Determinación de densidad de sedimentos.

B.2. Ángulo de fricción interna

El ángulo de fricción interna fue determinado mediante el método del cono. Las mediciones para cada caso se detallan en las Figuras B.3 y B.4. La pendiente de los gráficos de la Figura B.4 representa la tangente del ángulo de fricción, $\tan \phi$.



(a) Imagen método del cono para $d_s = 1,5$ mm.



(b) Imagen método del cono para $d_s = 1,5$ mm.



(c) Imagen método del cono para $d_s = 2,8$ mm.



(d) Imagen método del cono para $d_s = 2,8$ mm.

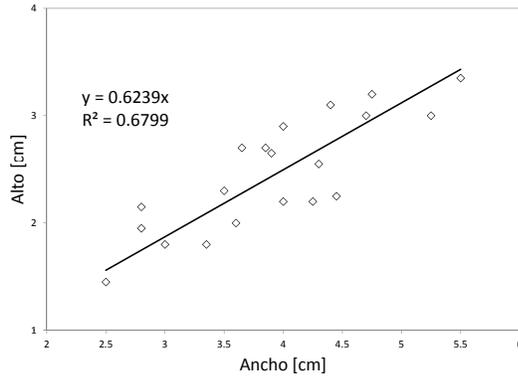


(e) Imagen método del cono para $d_s = 4$ mm.

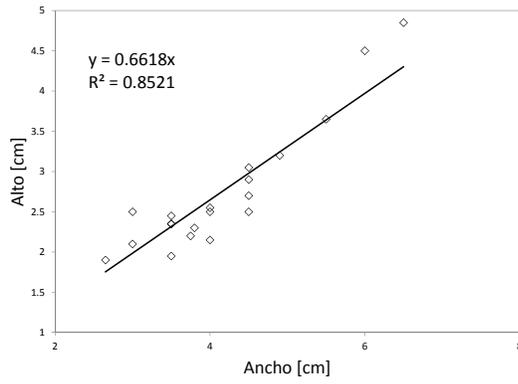


(f) Imagen método del cono para $d_s = 4$ mm.

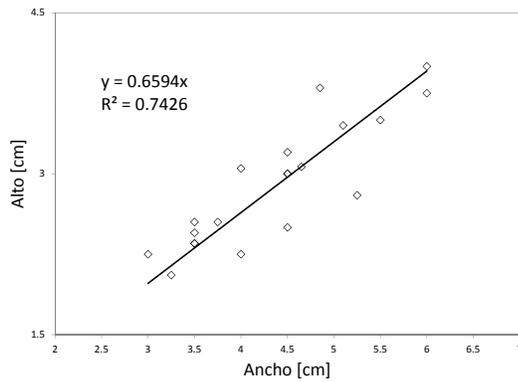
Figura B.3: Determinación del ángulo de fricción interna mediante el método del cono.



a) Arena $d_s = 1,5$ mm.



b) Arena $d_s = 2,8$ mm.



c) Arena $d_s = 4,0$ mm.

Figura B.4: Determinación coeficiente de fricción de sedimentos.

Anexo C

Relación teórica entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P}

En la sección 4.3 se determinó que la condición de arrastre incipiente teórica no se ve modificada al cambiar el escurrimiento de uniforme a gradualmente variado. En este anexo se muestran las diferencias entre las curvas teóricas de arrastre incipiente para fluidos newtonianos, no newtonianos de comportamiento pseudoplástico y plástico y la curva de Mantz y Shields.

C.1. Fluidos pseudoplásticos

En la Figura 4.1 se presentaron dos gráficos en donde se veía modificado el índice del flujo, n , y uno en donde se consideraba $n = 1$ de manera de comparar la curva con la definida por Mantz y Shields. A continuación se presentan algunos en donde se ven modificados tanto n como K .

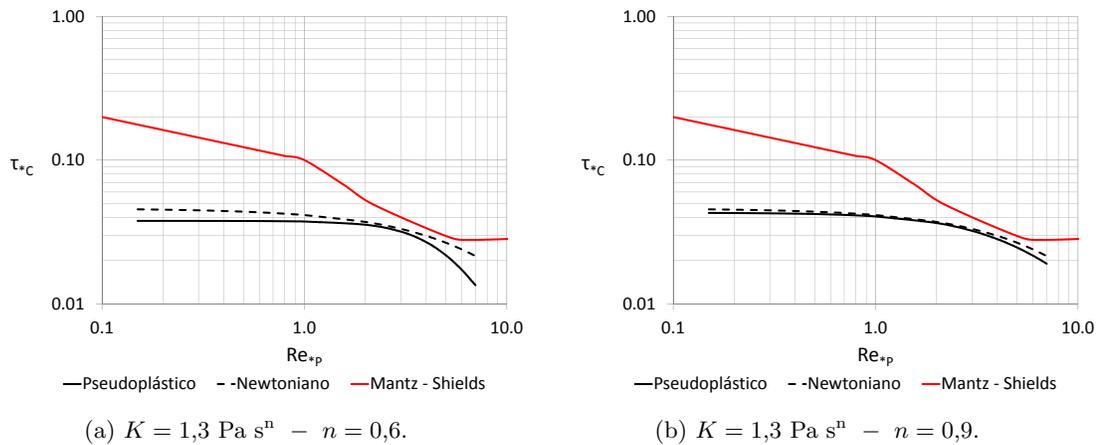
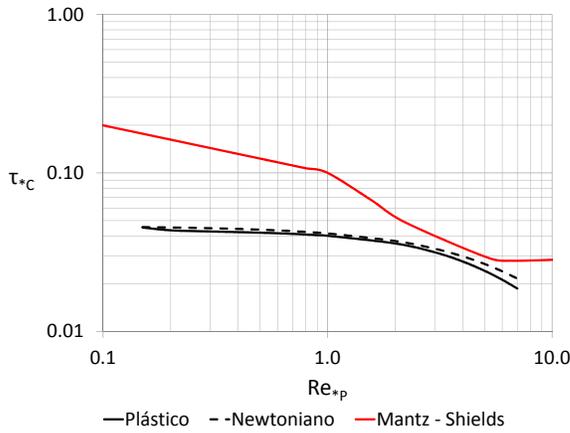


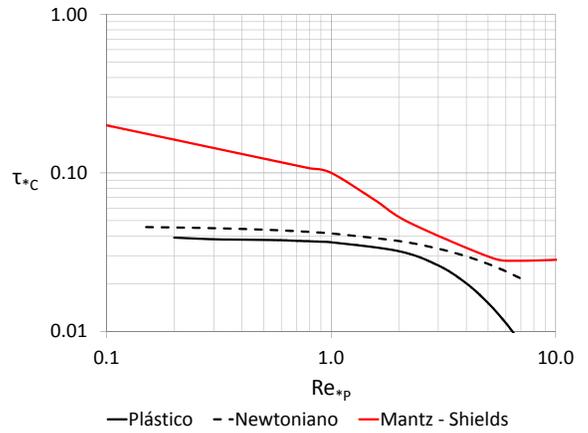
Figura C.1: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico.

C.2. Fluidos plásticos

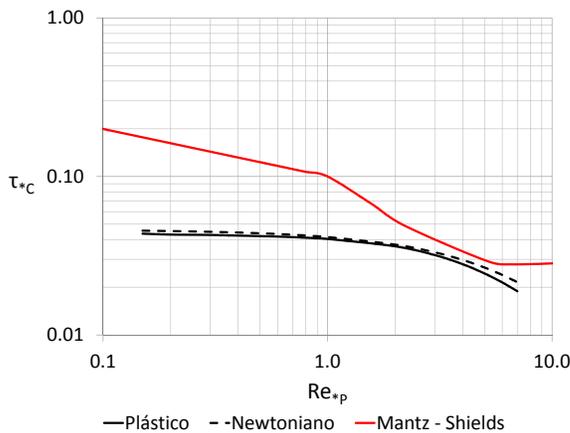
Al igual que para los fluidos pseudoplásticos, para los plásticos también se presentaron tres gráficos en donde comparan las curvas con la definida por Mantz y Shields, dos en donde se modificaba n y τ_f y uno en donde se consideraba $n = 1$ y $\tau_f = 0$ (Fig. 4.2. A continuación se presentan algunos en donde se ven modificados n , K y τ_f .



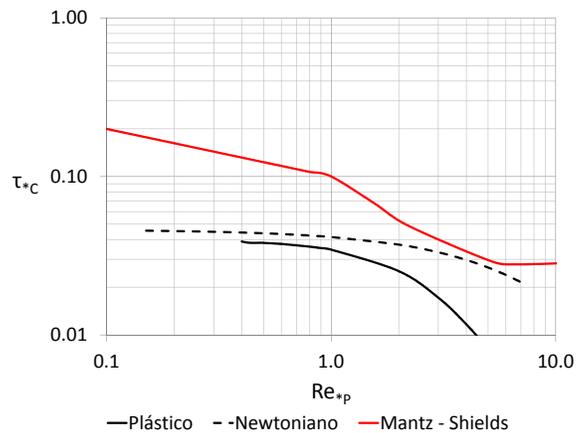
(a) $K = 0,3 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,9$ - $\tau_f = 0,3 \text{ Pa}$.



(b) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,6$ - $\tau_f = 0,3 \text{ Pa}$.

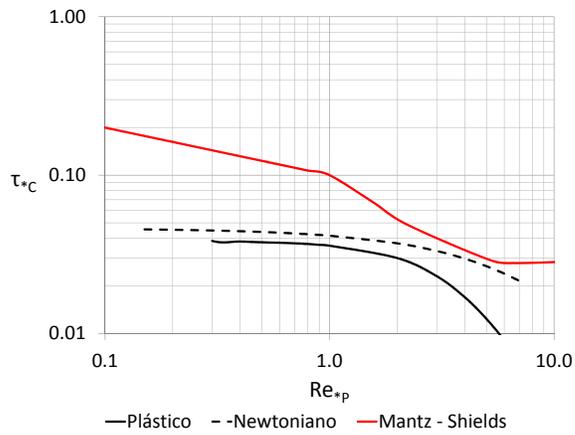


(c) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,9$ - $\tau_f = 0,3 \text{ Pa}$.

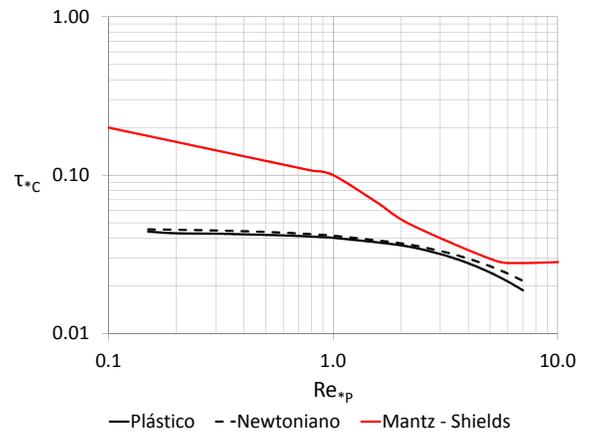


(d) $K = 0,3 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,6$ - $\tau_f = 0,5 \text{ Pa}$.

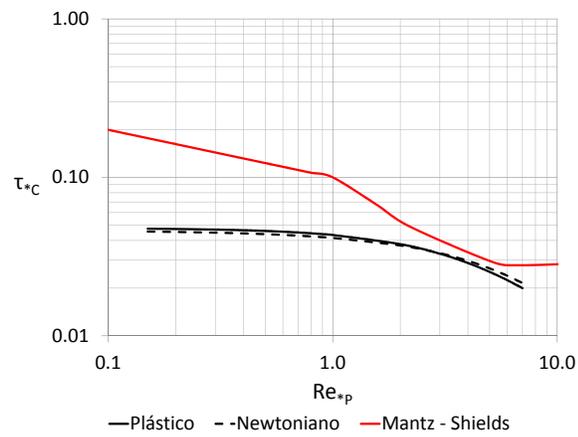
Figura C.2: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico.



(a) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,6$ - $\tau_f = 0,5 \text{ Pa}$.



(b) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n$ - $n = 0,9$ - $\tau_f = 0,5 \text{ Pa}$.



(c) $K = 0,5 \text{ Pa s}^n$ - $n = 1,0$ - $\tau_f = 0 \text{ Pa}$.

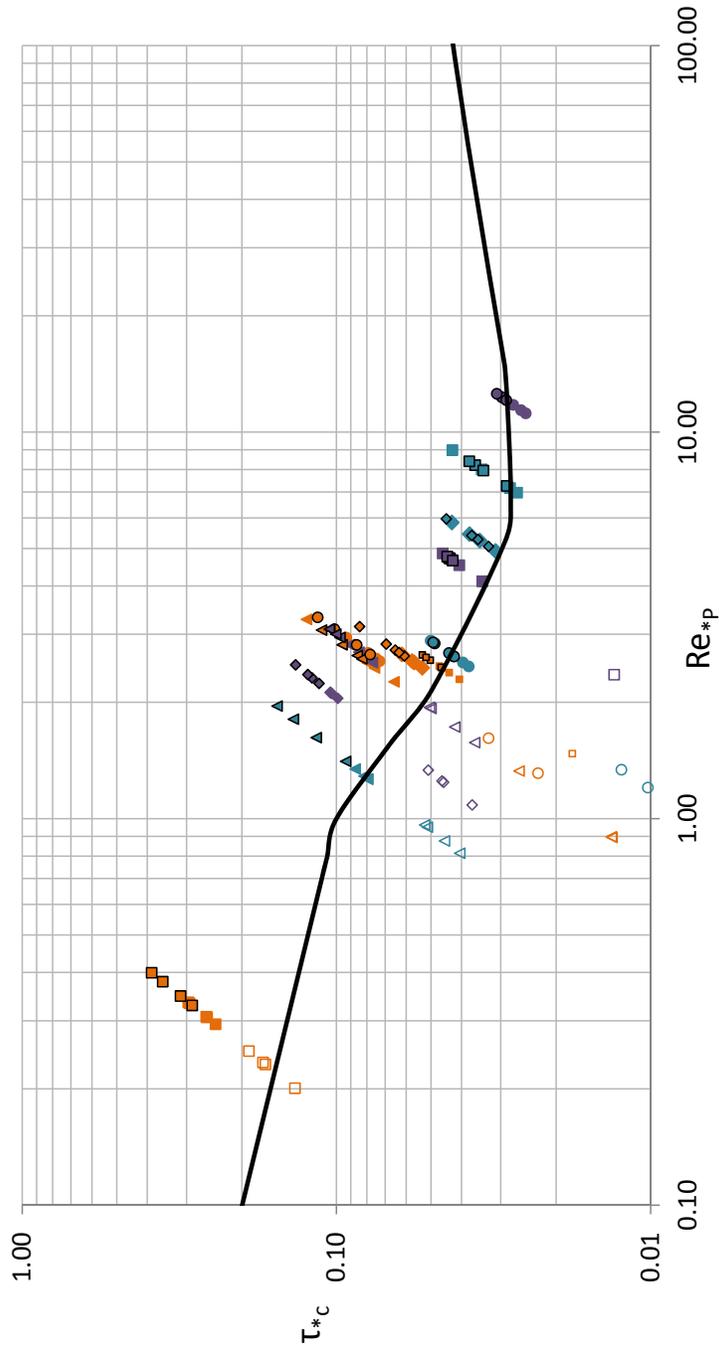
Figura C.3: Condición de arrastre incipiente mediante análisis teórico.

Anexo D

Relación experimental entre el esfuerzo de corte crítico adimensional, τ_{*C} , y el número de Reynolds de la partícula, Re_{*P}

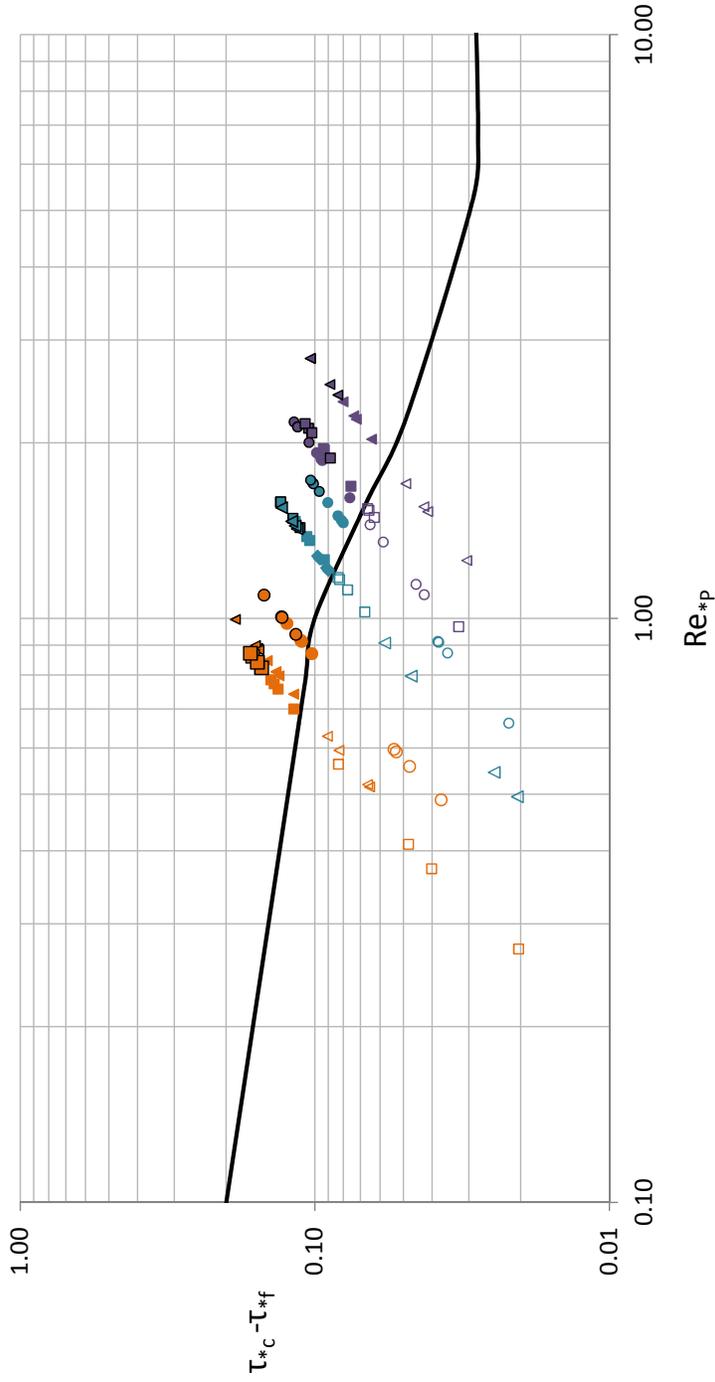
En la sección 5.2 se presentó la relación experimental que determina la condición de arrastre incipiente de partículas no cohesivas de un lecho uniforme producto de un flujo de un fluido no newtoniano con y sin esfuerzo de fluencia. Para ese caso, se presentaron dos gráficos, el primero corresponde a fluidos pseudoplásticos (Figura 5.1) y el segundo a fluidos plásticos (Figura 5.3). En ambos casos se hizo sólo la distinción entre el tipo de movimiento, ya sea sin arrastre, arrastre incipiente o arrastre generalizado.

También se explicó que los experimentos realizados con un fluido de una misma reología y un mismo tipo de partícula, forman una recta en el gráfico de las Figura 5.1 y una curva en el de la Figura 5.3. Para visualizar esto de mejor manera, a continuación se muestran los mismos gráficos pero haciendo distinción entre las diferentes condiciones fluido-partícula, las que corresponden a un tipo de reología y un tipo de partícula, por lo que cada una de estas condiciones deberían verse representadas gráficamente como una recta en el gráfico de fluidos pseudoplásticos y como curvas con una leve curvatura en el gráfico de fluidos plásticos (Figuras D.1 y D.2).



| Tipo de movimiento | | | Características | | | Tipo de movimiento | | | Características | | | Tipo de movimiento | | | Características | | |
|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------------------|---------|------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------------------|---------|------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------------------|---------|------------|
| Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | K [Pa s^7] | n [] | d_s [mm] | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | K [Pa s^7] | n [] | d_s [mm] | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | K [Pa s^7] | n [] | d_s [mm] |
| ◇ | ◆ | ◆ | 0.027 | 0.93 | 1.5 | ◇ | ◆ | ◆ | 0.024 | 0.94 | 2.8 | ◇ | ◆ | ◆ | 0.370 | 0.71 | 4.0 |
| ○ | ● | ● | 0.040 | 0.85 | 1.5 | ○ | ● | ● | 0.059 | 0.90 | 2.8 | ○ | ● | ● | 0.018 | 0.90 | 4.0 |
| □ | ■ | ■ | 1.300 | 0.69 | 1.5 | □ | ■ | ■ | 0.016 | 0.93 | 2.8 | □ | ■ | ■ | 0.066 | 0.85 | 4.0 |
| ◻ | ◼ | ◼ | 0.025 | 0.93 | 1.5 | ◻ | ◼ | ◼ | 0.330 | 0.69 | 2.8 | ◻ | ◼ | ◼ | 0.24 | 0.73 | 4.0 |
| △ | ▲ | ▲ | 0.044 | 0.84 | 1.5 | | | | | | | | | | | | |

Figura D.1: Fluidos pseudoplásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$.



| Tipo de movimiento | | | Características | | | | Tipo de movimiento | | | Características | | | | Tipo de movimiento | | | Características | | | |
|--------------------|---------------------|-----------------------|-----------------|--------------------------|---------|------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-----------------|--------------------------|---------|------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-----------------|--------------------------|---------|------------|
| Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | τ_f [Pa] | K [Pa s ⁿ] | n [] | d_p [mm] | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | τ_f [Pa] | K [Pa s ⁿ] | n [] | d_p [mm] | Sin arrastre | Arrastre incipiente | Arrastre generalizado | τ_f [Pa] | K [Pa s ⁿ] | n [] | d_p [mm] |
| ○ | ● | ● | 0.3 | 0.240 | 0.70 | 1.5 | ○ | ● | ● | 0.3 | 0.300 | 0.66 | 2.8 | ○ | ● | ● | 0.5 | 0.500 | 0.60 | 4.0 |
| □ | ■ | ■ | 0.4 | 0.480 | 0.60 | 1.5 | □ | ■ | ■ | 0.4 | 0.440 | 0.62 | 2.8 | □ | ■ | ■ | 0.4 | 0.480 | 0.60 | 4.0 |
| △ | ▲ | ▲ | 0.3 | 0.390 | 0.64 | 1.5 | △ | ▲ | ▲ | 0.4 | 0.480 | 0.60 | 2.8 | △ | ▲ | ▲ | 0.3 | 0.280 | 0.68 | 4.0 |

Figura D.2: Fluidos plásticos. Esfuerzo de corte adimensional en función del número de Reynolds de la partícula asociado a la velocidad de corte para distintas condiciones de transporte de partículas. No se presentan los datos experimentales obtenidos en la condición sin arrastre con $\tau_{*C} \leq 0,01$.