



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

RANDOMIZACIÓN DE MEDIDAS DE PROBABILIDAD POR AUTÓMATAS  
CELULARES DE TIPO PERMUTATIVO NO ALGEBRAICO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ITALO UMBERTO CIPRIANO JARA

PROFESOR GUÍA:  
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA  
MICHAEL SCHRAUDNER

SANTIAGO DE CHILE  
AGOSTO 2011

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: ITALO CIPRIANO JARA  
FECHA: 22 Agosto 2011  
PROF. Alejandro Maass

## RANDOMIZACIÓN DE MEDIDAS DE PROBABILIDAD POR AUTÓMATAS CELULARES DE TIPO PERMUTATIVO NO ALGEBRAICO

El objetivo de esta memoria es estudiar la randomización asintótica de medidas de probabilidad por autómatas celulares. Esto es, estudiar el límite de la familia de medidas de probabilidad  $(F_\mu^n)_{n \in \mathbb{N}}$  cuando  $\mu$  es una medida de probabilidad sobre un espacio de shift y  $F$  es una función continua que conmuta con el shift. Lind [Lin84] demostró que la media de Cesàro de la iteración de medidas de Bernoulli en  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  por el autómata celular  $F = \sigma + \sigma^{-1}$ , con  $\sigma$  el shift, converge a la medida producto uniforme. En [FMMN00], Ferrari, Maass, Martínez y Ney, demuestran lo mismo para una clase mucho más general de medidas iniciales. Pivato y Yassawi en [PY02, PY04], generalizan los resultados a autómatas afines sobre cualquier full-shift multidimensional, lo que se extiende a espacios de shift en [MMPY06a, MMPY06b, MSS06]. En [HMS03], Host, Maass y Martínez, demuestran la existencia de la media de Cesàro de la iteración de medidas de probabilidad por autómatas con regla local algebraica. Por otra parte, Blanchard y Tisseur, prueban en [BT00], que la media de Cesàro de la iteración de medidas shift ergódicas por autómatas celulares con palabras bloqueantes en alguna dirección, siempre existe.

En esta memoria, se busca evidencia de randomización de medidas de probabilidad por autómatas celulares no algebraicos que no tienen palabras bloqueantes en ninguna dirección. Para esto, se propone una clasificación de los autómatas positivamente expansivos no bipermutativos. En la familia de autómatas considerada, se demuestra que casi ninguno tiene regla local  $N$ -scaling y ninguno tiene regla local  $\psi$ -asociativa. Además, se prueba que los autómatas permutativos a la derecha solo pueden tener palabras bloqueantes en la dirección  $-1$ . Usando este resultado, se encuentran autómatas en la familia explorada que tienen palabras bloqueantes en alguna dirección, en cuyo caso, la media de Cesàro de la iteración de medidas shift ergódicas sí existe. Para aquellos autómatas en que no pudieron encontrarse palabras bloqueantes, se simula la convergencia de la media de Cesàro de la iteración de medidas iniciales de Bernoulli. Las simulaciones sugieren que los autómatas considerados randomizan asintóticamente estas medidas iniciales. De lo anterior, se conjetura la media de Cesàro de la iteración de medidas iniciales de Bernoulli por autómatas permutativos a la derecha, siempre existe, y que en el caso en que no hay palabras bloqueantes en la dirección  $-1$ , la medida inicial es randomizada asintóticamente. En el Capítulo 5, se le asocia a cada autómata actuando sobre  $Z_p^{\mathbb{N}}$  con  $p$  primo, una familia de polinomios, permitiendo generalizar el concepto de randomización a familias de polinomios no necesariamente asociados a autómatas celulares. En el Capítulo 6 se muestra una construcción de autómatas celulares positivamente expansivos no permutativos. Además, se demuestra que para estos autómatas, la media de Cesàro de la iteración de medidas iniciales de Bernoulli sí existe.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer el valioso aporte que mi profesor guía, Alejandro Maass y Dr. Michael Schraudner han hecho a este trabajo. También quisiera agradecer a mis padres, por su constante preocupación.

# Índice general

<b>1. Introducción, Preliminares y Problema</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Preliminares . . . . .	4
1.3. Problema . . . . .	12
1.3.1. Resultados elementales . . . . .	12
1.3.2. Resultados conocidos . . . . .	15
1.3.3. Alcances del trabajo . . . . .	24
<b>2. Autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad <math>(l, r) = (0, 1)</math></b>	<b>25</b>
2.1. Una clasificación de autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ . . . . .	25
2.2. Autómatas celulares positivamente expansivos con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_3$ . . . . .	30
2.3. Una familia de autómatas celulares no positivamente expansiva con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_3$ . . . . .	33
2.4. Descripción de una familia de autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_m$ para $m \in \{2, 3, \dots\}$ . . . . .	34
2.5. Generalización de familias anteriores a cualquier alfabeto $\mathcal{A}$ . . . . .	36
2.6. Conclusiones . . . . .	43
<b>3. Dinámica de autómatas celulares no positivamente expansivos y no algebraicos con vecindad <math>(l, r) = (0, 1)</math></b>	<b>44</b>
3.1. Resultados para autómatas celulares de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ . . . . .	44
3.2. Una familia de autómatas celulares ni $\psi$ -asociativa ni $N$ -scaling . . . . .	45
3.3. Palabras bloqueantes en una familia de autómatas celulares no positivamente expansivos . . . . .	47
3.4. Ejemplos de iteración de medidas de Bernoulli por autómatas celulares permutativos de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ . . . . .	51
3.5. Observaciones con respecto a las direcciones de equicontinuidad . . . . .	53
3.6. Conclusiones . . . . .	54
<b>4. Simulaciones y Evidencia</b>	<b>55</b>
4.1. Métodos . . . . .	55
4.1.1. Cálculo explícito de la medida iterada . . . . .	56
4.1.2. Imagen de iteraciones por autómatas celulares con una distribución inicial . . . . .	57
4.1.3. Estimación de la medida iterada . . . . .	59

4.2. Simulaciones . . . . .	61
4.3. Conclusiones . . . . .	67
4.3.1. Interpretaciones de resultados . . . . .	67
4.3.2. Discusión de resultados . . . . .	68
<b>5. Randomización</b>	<b>70</b>
5.1. Notación y definiciones . . . . .	70
5.2. Motivación y ejemplos . . . . .	71
5.3. Resultados . . . . .	72
5.4. Conclusiones . . . . .	76
<b>6. Autómatas Celulares positivamente expansivos</b>	<b>77</b>
6.1. Construcción . . . . .	77
6.1.1. Ejemplos . . . . .	78
6.1.2. Formalización de la construcción . . . . .	81
6.1.3. Generalizaciones de la construcción . . . . .	83
6.2. Propiedades dinámicas y de iteración de medidas por los autómatas celulares construídos . . . . .	90
6.3. Conclusiones . . . . .	91
<b>7. Conclusiones y Preguntas Abiertas</b>	<b>92</b>
<b>A. Evolución ACs en <math>ESQ_3</math> y <math>\sigma^{-1}ESQ_3</math></b>	<b>94</b>
<b>B. Iteración medida de Bernoulli por ACs en <math>ESQ_3^0</math></b>	<b>109</b>
<b>C. Iteración medida de Bernoulli por ACs en <math>\sigma^{-1} - ESQ_3^1</math></b>	<b>126</b>
<b>D. Demostraciones usando SAGE</b>	<b>145</b>
<b>E. Evidencia de Randomización en <math>RANDOMES</math></b>	<b>150</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>170</b>

# Capítulo 1

## Introducción, Preliminares y Problema

La randomización de medidas de probabilidad por autómatas celulares de tipo permutativo no algebraico es mucho más que la comprensión de su dinámica, es el completo conocimiento del comportamiento asintótico en casi cualquier configuración inicial. Comenzaremos con una introducción que guía al lector hacia el problema fundamental que esta memoria plantea. Luego, se establecen las definiciones y se muestran los resultados básicos. Al final, se muestran los resultados más importantes conocidos, y se resume el alcance de este trabajo.

### 1.1. Introducción

En la naturaleza ocurren interacciones entre sus distintos entes. En muchos casos, parece razonable asumir que estas interacciones ocurren de manera local y son constantes en el tiempo. A su vez, la naturaleza no es estática, sino por el contrario, está en constante evolución. Luego, una manera muy simplificada de modelar estos fenómenos está dada por una secuencia de estados (que representan lo que realmente existe en cada época) gobernados por la reiteración de determinadas reglas fijas en el tiempo actuando sobre el estado inmediatamente precedente.

Una formalización clásica de lo anterior, es la de autómatas celulares. Cada modelo de autómatas celulares va a estar definido por dos ideas básicas, la de conjunto de estados existentes en la “naturaleza” considerada, y la idea de regla local, que corresponde a las “leyes naturales” de interacción entre estos entes en la naturaleza. Sobre un mismo conjunto de estados pueden considerarse distintas reglas locales, las que van a definir distintos autómatas celulares.

Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, un problema fundamental es como depende la evolución de un autómatas celulares del estado inicial. A su vez, este problema se puede plantear desde dos puntos de vista. Primero, puede estudiarse la evolución cuando la configuración inicial tiene algunos patrones particulares (i.e. cuando el estado inicial tiene propiedades que dependen de la “forma” o de la “organización espacial” de la naturaleza). Segundo, puede estudiarse la evolución cuando la configuración inicial tiene determinadas proporciones de cada tipo de ente en relación al total (i.e. cuando el estado inicial presenta propiedades que dependen de la relación entre las distintas “concentraciones” iniciales,

independientemente de la “organización espacial”). Veamos un ejemplo del segundo caso, que tiene particular importancia en este trabajo.

Supongamos que hay tres tipos distintos de bacterias A, B y C en un sistema. Estas bacterias se encuentran alineadas, una detrás de la otra, formando una fila infinita sin origen ni fin, además hay un observador que puede ver desde su lugar una parte de esta fila. Cada segundo, toda la fila de bacterias se ve modificada por las reglas de la naturaleza. La ley natural hace que cada bacteria de especie A y B se transforme en una bacteria de especie igual a la ubicada inmediatamente detrás en la fila. Por otra parte, cada bacteria de especie C se transforma en la especie B, C, A si tiene una bacteria de especie A, B, C, respectivamente, ubicada inmediatamente detrás en la fila. Si el observador supiera las proporciones de cada especie al inicio (i.e antes de comenzar a contar el tiempo).

- ¿Podría predecir lo que observará después de “mucho” tiempo?
- ¿Podría predecirlo sólo sabiendo que las proporciones iniciales de cada especie es distinta de 0?
- ¿Existe alguna proporción inicial que sea invariante en el tiempo?

Veremos que las preguntas anteriores aún no pueden responderse de manera satisfactoria. Sin embargo, sí pueden responderse cuando las reglas de la naturaleza son distintas. Por ejemplo, cuando cada bacteria de especie A, B, C se transforma en una bacteria de especie igual a la ubicada inmediatamente detrás en la fila. Es sorprendente que para ciertas reglas locales, problemas como el anterior, sean fáciles de resolver, mientras que para otras, sean problemas aún abiertos.

Para formalizar el ejemplo, puede hacerse lo siguiente. Consideremos que la naturaleza está compuesta por secuencias infinitas de letras A, B y C. Cada secuencia infinita es un estado de la naturaleza. Las transiciones entre estos estados están dados por la regla local que describimos mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},$$

indexada por A, B y C; donde la coordenada (X,Y) de la matriz representa la especie que tendrá en el siguiente segundo una bacteria X que se encuentra delante de una bacteria Y. El concepto de proporción lo podemos formular mediante el de distribución de Bernoulli, que básicamente dice que hay tres números reales positivos que suman 1,  $p_A$ ,  $p_B$  y  $p_C$ , asociados a la especie A, B y C, respectivamente. Estos números son tales que en cualquier posición de la fila, independientemente de la especie de bacteria en esta posición, la probabilidad de que la bacteria inmediatamente detrás sea A, B o C es  $p_A$ ,  $p_B$  o  $p_C$ , respectivamente. En estos términos, se introduce el concepto de medida iterada, que corresponde a la distribución de las bacterias en el segundo 1, si éstas partieron con una distribución inicial de Bernoulli  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$ . Para cada segundo sucesivo, aparecen nuevas distribuciones. En este contexto las preguntas son.

- ¿Si se comienza con una distribución de Bernoulli  $p_A$ ,  $p_B$  y  $p_C$ , existe el límite de la medida iterada?

- ¿Es suficiente saber que  $p_A > 0$ ,  $p_B > 0$  y  $p_C > 0$  para determinar el límite?
- ¿Existe  $p_A$ ,  $p_B$  y  $p_C$ , tales que si comienza con una distribución inicial de Bernoulli  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$ , entonces cada medida iterada sigue teniendo la misma distribución?

Para generalizar, el ejemplo anterior se utilizan espacios de shift  $X$ , y se definen medidas de probabilidad  $\mu$  sobre estos espacios. Se definen los autómatas celulares mediante funciones  $F : X \rightarrow X$  continuas que conmutan con el shift y se estudia la convergencia de las medidas  $\{\mu(F^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Considerando  $\lambda_X$  la medida de máxima entropía para el shift en  $X$ , se dice que el autómata celular randomiza asintóticamente la medida  $\mu$ , si la sucesión de medidas  $\{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(F^{-n})\}_{N \in \{1, 2, \dots\}}$  converge  $*$ -débil a  $\lambda_X$ .

Veamos otro ejemplo, propuesto por Lind (ver [Lin84]), considerado el primer resultado de randomización de medidas de probabilidad por autómatas celulares. Sobre el espacio de shift  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , el autómata celular  $F = \sigma^{-1} + \sigma$ , donde  $\sigma$  es el shift en  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , randomiza asintóticamente una medida inicial de Bernoulli. Este ejemplo responde de manera satisfactoria las preguntas mencionadas antes, ya que en este caso el observador sabría que si la distribución inicial fue de Bernoulli, entonces después de “mucho” tiempo, “casi siempre” vería en cada posición fija un 0 o un 1 con la misma probabilidad.

El segundo ejemplo dió origen a importantes generalizaciones del mismo fenómeno de randomización. En [FMMN00] el resultado se generalizó a autómatas celulares  $\phi$  en  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ , con  $p$  un número primo y  $n$  un entero positivo, tales que  $(\phi x)_n = \mu x_n + \nu x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , para hipótesis mucho más generales para la medida. Luego, el resultado se extendió en [PY02] y [HMS03] a autómatas celulares afines en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , para  $\mathcal{A}$  un grupo abeliano compacto. En los resultados anteriores se obtiene que los autómatas celulares randomizan asintóticamente una medida inicial de Bernoulli (en el sentido que “transcurrido mucho tiempo casi siempre se ve” la distribución uniforme). Por otra parte, de una manera completamente distinta, en [BT00] se demuestra la convergencia de la media de Cesàro por autómatas celulares no necesariamente afines, pero con propiedades dinámicas de equicontinuidad o de sensibilidad a las condiciones iniciales en alguna dirección.

La observación de Lind y los resultados posteriores antes mencionados, muestran un fenómeno de rigidez muy general en el contexto de los autómatas celulares algebraicos y parece poder ser extendido al contexto de autómatas celulares positivamente expansivos o expansivos. El problema planteado en esta memoria consiste en estudiar la extensión de los resultados actuales a autómatas celulares positivamente expansivos y en encontrar evidencia de randomización asintótica en alguna clase de autómatas celulares no algebraicos.

Este informe está organizado de la manera siguiente.

En el Capítulo 1, primero, en la Sección 1.2, se muestran los conceptos básicos que serán usados de Dinámica Topológica, Dinámica Simbólica, Teoría Ergódica y Autómatas Celulares. Además se explica el concepto de la iteración de medidas por autómatas celulares. En la Sección 1.3 se enuncia el problema, se muestran los resultados conocidos, se exhibe el estado actual del problema y al final se muestran los alcances de esta memoria.

En el Capítulo 2 se esquematiza una manera para clasificar los autómatas celulares positivamente expansivos de radio 1 en  $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ , para esto se proponen tres clases distintas.

En el Capítulo 3 se estudia la dinámica de los autómatas celulares en las clases propuestas en el Capítulo 2. Este estudio permite una nueva clasificación de los autómatas celulares expansivos en  $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$  de acuerdo a la capacidad de randomización asintótica de medidas de Bernoulli no uniformes.

En el Capítulo 4, primero se proponen métodos de simulación, y segundo, se muestran los resultados de simulaciones hechas con distintos autómatas celulares positivamente expansivos y no afines. El objetivo de estas simulaciones es mostrar evidencia de randomización asintótica para distribuciones iniciales de Bernoulli por autómatas celulares no algebraicos.

En el Capítulo 5 se muestra una manera alternativa de abordar el problema desde el punto de vista de los polinomios a coeficientes en cuerpos finitos. También se reescriben en este contexto los resultados conocidos para autómatas celulares y se plantea adecuadamente una conjetura que correspondería al contexto donde buscar una solución definitiva al problema planteado.

En el Capítulo 6 se muestra una nueva manera de construir autómatas celulares positivamente expansivos.

En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones de la memoria.

## 1.2. Preliminares

A continuación, se mencionan las definiciones básicas, notaciones y resultados importantes que serán usados, al final, se exhibe el problema planteado. El orden escogido para presentar las definiciones y resultados tiene por objeto motivar el problema.

### Notación

Consideraremos que  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ ,  $-\mathbb{N} = \{0, -1, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ ,  $-\mathbb{N}^* = \{-1, -2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{N}^* \cup -\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales,  $\mathbb{R}_0^+$  es el conjunto de números reales no negativos,  $\mathbb{C}$  es el conjunto de números complejos y  $\mathbb{S}^1 = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}$ . Para  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z|$  es el módulo complejo. Para  $n \in \{2, 3, \dots\}$  definimos  $\mathbb{Z}_n$  el grupo de los enteros módulo  $n$ , y por  $\mathbb{Z}_n^*$  al conjunto  $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ . Denotaremos para  $n \in \mathbb{N}^*$  por  $[n]$  al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , para  $z \in \mathbb{Z}$   $|z|$  es igual a  $z$  si  $z \geq 0$  y  $-z$  si  $z < 0$ . Para  $r \in \mathbb{R}$  denotaremos  $[[r]] = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$  a la función parte entera;  $p$  siempre denotará a un número primo. Para  $A$  un conjunto finito denotaremos su cardinal por  $\#A$ .

## Dinámica simbólica

$\mathcal{A}$  denota un conjunto finito llamado alfabeto, por  $\mathcal{A}^*$  denotamos al conjunto de secuencias finitas o palabras  $v = v_0 \dots v_{n-1}$  con letras en  $\mathcal{A}$ . Por  $|v|$  denotaremos el largo de  $v \in \mathcal{A}^*$ . Sea  $K = \mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ . Se define el espacio  $\mathcal{A}^K$  como el conjunto de secuencias  $x = (x_j)_{j \in K}$  (bi-infinitas en el caso  $K = \mathbb{Z}$  e infinitas en el caso  $K = \mathbb{N}$ ) y puede usarse la métrica  $d(u, v) = 2^{-\min_{j \in K} \{|j| : u_j \neq v_j\}}$ . Se define un cilindro empezando en la coordenada  $i$  con palabra  $v$  como  $[v]_i = \{x \in \mathcal{A}^K : x_{[i, i+|v|-1]} = v\}$ , donde para  $x \in \mathcal{A}^K$  y  $i \leq j$  en  $K$  se define  $x_{[i, j]} = x_i \dots x_j$ . Dadas dos palabras  $v_1, v_2 \in \mathcal{A}^*$  escribimos  $v = v_1 v_2$  para denotar la palabra  $v \in \mathcal{A}^*$  tal que  $v_{[0, |v_1|-1]} = v_1$  y  $v_{[|v_1|, |v_1|+|v_2|-1]} = v_2$ .

## Dinámica topológica (Basado en [LM95])

Recordemos que  $K = \mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ . Desde el punto de vista topológico el espacio  $(\mathcal{A}^K, d)$  es espacio métrico, compacto, completo, totalmente acotado, sin puntos aislados, donde los cilindros son una base clopen (i.e. de conjuntos abiertos y cerrados) para la topología inducida por  $d$  (i.e. es cero dimensional) y totalmente desconexo (luego es un conjunto de Cantor). La función shift  $\sigma : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathcal{A}^K$ ,  $\sigma(x) = (x_{i+1})_{i \in K}$  es continua y es un homeomorfismo cuando  $K = \mathbb{Z}$ . Un espacio de shift es un subconjunto cerrado shift-invariante  $S$  de  $\mathcal{A}^K$ . Se define un shift  $\sigma_S$  (que usualmente se denota simplemente por  $\sigma$ ) sobre el espacio  $S \subset \mathcal{A}^K$ , mediante la restricción de la función  $\sigma$  a  $S$ . Un subshift  $S \subset \mathcal{A}^K$  para  $K = \mathbb{N}$  se dice unilateral, cuando  $K = \mathbb{Z}$ , se le llama bilateral. Para un subshift  $S$  (o espacio del shift) se tiene que existe un lenguaje asociado  $L(S) = \{v \in \mathcal{A}^* \mid \exists s \in S, s_{[0, |v|-1]} = v\}$ . Un espacio de shift  $S$  se dice irreducible si  $\forall u, v \in L(S) \exists w, w' \in L(S)$ , tales que  $uwv, vw'u \in L(S)$ . Un subshift  $S \subset \mathcal{A}^K$  se dice de tipo finito (STF) si existe un  $N \in \mathbb{N}$  y una colección  $L$  de palabras de largo  $N$ , tal que  $x \in S$  si y solo si  $x_{[i, i+N-1]} \in L$  para todo  $i \in K$ . Si  $A$  es una matriz de  $m \times m$  con entradas en  $\{0, \dots, m\}$ , sea  $G_A$  el grafo dirigido con conjunto de vértices  $V = \{0, \dots, m-1\}$  y  $A_{(i, j)}$  arcos desde  $i$  a  $j$ . Sea  $E_A$  el conjunto de arcos en  $G_A$ . Sea  $\Sigma_A$  el subconjunto de  $(E_A)^\mathbb{Z}$  obtenido por los caminos bi-infinitos en  $G_A$ , i.e. el conjunto

$$\{x \in E_A^\mathbb{Z} : \forall i \text{ el vértice de partida del arco } x_{i+1} \text{ es el vértice de llegada del arco } x_i\}.$$

Sea  $\sigma_A = \sigma_{\Sigma_A}$ . El sistema  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  se llama shift de arcos, y es un STF bilateral. Considerando solamente los caminos infinitos en una dirección obtenemos un STF unilateral. Para  $S \subset \mathcal{A}^K$  un espacio de shift, mediante el par ordenado  $(S, G)$  denotaremos a una función continua  $G : S \rightarrow S$ , y lo llamaremos sistema dinámico topológico (s.d.t.). Se dice que  $(G_1, S_1)$  y  $(G_2, S_2)$  son s.d.t.'s conjugados si existe un homeomorfismo  $\phi : S_2 \rightarrow S_1$  tal que  $G_1 \circ \phi = \phi \circ G_2$ . Este concepto es vital para estudiar propiedades topológicas de s.d.t.'s distintos, ya que muchas propiedades importantes que se verán en el contexto de autómatas celulares se preservan bajo conjugación, por lo que cualquier clasificación bajo estas propiedades se podrá hacer salvo conjugación. Y más aún, en el sentido inverso, muchas propiedades de autómatas celulares van a ser importantes precisamente por ser invariantes bajo conjugación, ya que permitirá clasificarlos. Todo STF bilateral es conjugado a un shift de arcos, de hecho un STF  $S \subset \mathcal{A}^\mathbb{Z}$  está determinado por un conjunto de palabras  $L$  de largo  $N+1$ , luego podemos considerar el grafo cuyo conjunto de vértices  $V$  son las palabras en  $\mathcal{A}^N$  y el conjunto de arcos  $E \subset \mathcal{A}^{N+1}$  es tal que  $e = e_0 \dots e_{N+1} \in E$  es el arco que vá del vértice  $e_0 \dots e_N$  al vértice  $e_1 \dots e_{N+1}$  si y solo si  $e \in L$ . Lo anterior

nos dice que todo STF bilateral se puede representar mediante un shift de arcos en un alfabeto más grande (como se vió, si para un STF  $S$  con alfabeto  $\mathcal{A}$  se tiene que

$\#L(S) = N + 1$ , entonces la representación en shift de arcos es en realidad la representación de un espacio de shift conjugado  $S'$  sobre el alfabeto  $\mathcal{A}^N$  en que  $\#L(S') = 1$ ), claramente esto se extiende a STF's unilaterales, ya que podemos extenderlo al conjunto de secuencias bi-infinitas en el mismo alfabeto con las mismas palabras prohibidas, el que sí podemos representar mediante un shift de arcos, luego este mismo representa al STF inicial considerando los caminos infinitos en una dirección. Notar además, que la construcción anterior entrega un grafo con matriz de incidencia a entradas en  $\{0, 1\}$ , este shift de arcos en el alfabeto  $\mathcal{A}^N$  se le llama representación en shift de vértices del espacio de shift  $S$  sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$ . De este modo un STF  $S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  se representa por un shift de vértice si existe una matriz cuadrada  $M$  a coeficientes en  $\{0, 1\}$  tal que

$$S = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : M_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Para ser rigurosos, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que en cada representación por shift de arcos o de vértices de un STF, el grafo considerado es tal que de cada vértice sale y entra al menos un arco, este tipo de grafo se llama esencial. Se tiene que un STF es irreducible si y solo si en la representación por shift de arcos (automáticamente se tiene lo mismo para shift de vértices) existe un camino dirigido entre cualquier par de vértices.

Se dice que una matriz cuadrada de  $m \times m$  a coeficientes en  $\mathbb{R}_0^+$  es irreducible si para todo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $M_{i,j}^{(n)} > 0$ . Se tiene que un shift de arcos tiene asociada una matriz de adyacencia  $M$  irreducible si y solo el STF asociado es irreducible. La razón de que los STF's se comprendan mucho mejor que los espacios de shift generales, radica en el hecho que la representación mediante shift de arcos o shift de vértices, permite asociarles una matriz de adyacencia, a la que se puede aplicar herramientas de álgebra lineal y así obtener propiedades para los STF's.

### Teoría de la Medida en $\mathcal{A}^K$ (Basado en [DG76])

Desde el punto de vista de la Teoría de la Medida, la colección de los cilindros  $\mathcal{S}(\mathcal{A}^K) = \{[v]_j : v \in \mathcal{A}^*, j \in K\}$  es una semi-álgebra, i.e.  $\emptyset \in \mathcal{S}$ ,  $(A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S})$  y  $(A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A = \cup_{i=1}^n E_i)$  donde  $E_1, \dots, E_n$  son elementos de  $\mathcal{S}$  disjuntos de a pares. Sea  $\mathcal{B}(\mathcal{A}^K)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{S}(\mathcal{A}^K)$ , i.e.  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \{A : A \subset \mathcal{A}^K\}$  es el conjunto más chico en el sentido de la inclusión que satisface  $X \in \mathcal{B}$ ,  $(B \in \mathcal{B} \Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{B})$  y  $(B_n \in \mathcal{B}, \forall n > 1 \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B})$ . Un conjunto de medidas de probabilidad adecuado para trabajar en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es el conjunto de medidas de probabilidad shift-invariantes  $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}^K)$ , i.e. el conjunto de medidas  $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{A}^K) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tales que  $\mu = \mu(\sigma^{-1})$ . Gracias a un corolario del teorema de consistencia de Kolmogorov el conjunto  $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}^K)$  se identifica uno a uno con el conjunto de funciones  $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{A}^K) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tales que:  $\sum_{a \in \mathcal{A}} \mu([a]_0) = 1$ , y para toda palabra  $v \in \mathcal{A}^*$  y todo  $n \in K$  se tiene que  $\mu([v]_n) \geq 0$ ,  $\mu([v]_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu([va]_n)$  y  $\mu([v]_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu([av]_n)$ . Se define un vector de probabilidad  $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{\#\mathcal{A}-1})$  donde  $\pi_i \geq 0$  y  $\sum \pi_i = 1$ . Una familia importante de medidas en  $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}^K)$  son las medidas de Bernoulli  $\mu_{\pi}$ , que sobre  $\mathcal{S}(\mathcal{A}^K)$  se definen por  $\mu_{\pi}([v_{[i,j]}]_i) = \prod_{k=i}^j \pi_{v_k}$ . Llamemos  $\mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  al conjunto de medidas de probabilidad  $\{\mu : \mathcal{B}(\mathcal{A}^K) \rightarrow \mathbb{R}_0^+\}$ . Una medida que será de particular interés será la medida de Bernoulli uniforme  $\lambda = \mu_{\pi}$  para  $\pi = (\frac{1}{\#\mathcal{A}}, \dots, \frac{1}{\#\mathcal{A}})$ , que llamaremos medida uniforme.

### Convergencia de medidas en $\mathcal{A}^K$ (Basado en [Wal82, DG76, Shi95])

Diremos que una sucesión de medidas  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  converge a  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  si  $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$ , i.e. para toda función continua  $g : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathbb{C}$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\mu_n = \int g d\mu$ . En nuestro caso se tiene que  $\mu_n \rightharpoonup^* \mu$  es equivalente a  $\mu_n([v]_k) \rightarrow \mu([v]_k)$  para todo  $v \in \mathcal{A}^*$  y todo  $k \in K$ .

La convergencia  $*$ -débil se puede escribir de un modo más conveniente usando análisis armónico en el caso que  $\mathcal{A}$  tenga estructura de grupo, nos restringiremos en este trabajo al caso en que  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , el grupo de los enteros módulo  $p$ . En este caso se define  $w \doteq e^{2\pi i/p}$  y

$$\chi(\mathbb{Z}_p^K) \doteq \{\chi_{[\xi]_k} : \mathbb{Z}_p^K \rightarrow S^1 \mid \xi \in (\mathbb{Z}_p)^*, k \in K, x \in \mathbb{Z}_p^K \mapsto \chi_{[\xi]_k}(x) = w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i x_{i+k}}\}, \quad (1.1)$$

donde  $\xi_i x_{i+k} = x_{i+k} + \dots + x_{i+k}$  con  $x_{i+k}$  sumado un número  $\xi_i \in \{0, \dots, p-1\}$  de veces (la suma es en  $\mathbb{Z}_p$ ). Para una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^K)$  y  $\chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$  podemos definir su transformada de Fourier  $\hat{\mu}$  evaluada en  $\chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$  por

$$\hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) \doteq \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^K} \mu(x) w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i x_{i+k}} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^{|\xi|}} \mu([x]_k) w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i x_i} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p^{|\xi|}} \mu([x]_k) w^{\xi^T x},$$

donde  $\xi^T x \doteq \sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i x_i$ .

**Nota 1.2.1.** Se puede definir una integral en  $\mathbb{Z}_p^K$ . Para  $\chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$ , definimos

$$\int_{\mathbb{Z}_p^K} \chi_{[\xi]_k} d\mu \doteq \hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}).$$

De la fórmula de inversión para la transformada de Fourier se tiene que para  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{Z}_p^n$  y  $k \in K$

$$\mu([x]_k) = \frac{1}{p^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_p^n} \hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) w^{\xi^T x},$$

lo que significa que  $\{\hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k})\}_{\xi \in \mathbb{Z}_p^n}$  determina completamente la medida  $\mu$  sobre los cilindros de largo  $n$  con primera coordenada fija  $k$ . De lo anterior, más el Teorema de Hahn de extensión única de una medida definida en una semi-álgebra, se concluye que  $\mu = \nu$  si y solo si  $\hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) = \hat{\nu}(\chi_{[\xi]_k})$  para todo  $\chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$ . Además, se deduce que para una sucesión de medidas  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  y  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^K)$

$$\mu_n \rightharpoonup^* \mu \Leftrightarrow \hat{\mu}_n(\chi_{[\xi]_k}) \rightarrow \hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) \text{ para todo } \chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K).$$

Hay todavía otra manera de interpretar estos resultados (podríamos decir que la primera interpretación viene del análisis, la segunda del análisis armónico y ésta última de las probabilidades). Sea  $(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{A}^K), \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad,  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  una sucesión de medidas de probabilidad,  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$ , y sean  $X_0, X_1, \dots$  una sucesión de variables aleatorias en este espacio tales que  $\mathbb{P}(X_i \in [v]_k) = \mu_i([v]_k)$  para todo  $v \in \mathcal{A}^*$  y todo  $k \in K$ . Además sea  $X_\infty$  una variable aleatoria en este espacio tal que

$\mathbb{P}(X_\infty \in [v]_k) = \mu([v]_k)$  para todo  $v \in \mathcal{A}^*$  y todo  $k \in K$ . Notemos que cada variable aleatoria  $X_i$  (de nuevo por Hahn) está determinada únicamente por su distribución  $\{\mu_i([v]_k)\}_{v \in \mathcal{A}^*, k \in K}$ . En este caso tenemos que

$$\mu_n \rightharpoonup^* \mu \Leftrightarrow X_i \rightarrow^d X_\infty$$

donde  $\rightarrow^d$  se llama convergencia en distribución, y la equivalencia se tiene de la definición, ya que se define precisamente igual que  $\rightharpoonup^*$ .

Hay una noción más débil de convergencia de medidas que será importante. Se dirá que un conjunto  $D \subset \mathbb{N}^*$  tiene densidad 1 si tiene densidad de Cesàro 1, i.e. si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \in [N] \cap D} 1 = 1.$$

Dada una sucesión de medidas de probabilidad  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  se dirá que su media de Cesàro converge si existe un conjunto  $D$  de densidad 1 tal que la sucesión de medidas  $\{\mu_n\}_{n \in D}$  converge. Notemos del análisis real que como para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq \mu_n([v]_k) \leq 1$  para todo  $v \in \mathcal{A}^*$  y todo  $k \in K$ , entonces que la media de Cesàro de la sucesión de medidas  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converja a  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  es equivalente a cada una de las siguientes proposiciones

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} \mu_n([v]_k) = \mu([v]_k) \text{ para todo } v \in \mathcal{A}^* \text{ y todo } k \in K,$$

en el caso  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$  es equivalente a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} \hat{\mu}_n(\chi_{[\xi]_k}) = \hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) \text{ para todo } \chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K),$$

y en el caso probabilista, equivalente a

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} X_n \rightarrow^d X_\infty.$$

Notar que cuando  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$  y  $v \in \mathcal{A}^*$ ,  $k \in K$ , en la notación  $\mu([v]_k)$  se puede omitir el índice  $k$ , pues  $\mu([v]_k) = \mu([v]_{k'})$  para todo  $k' \in K$ . Como en este trabajo consideraremos solamente medidas  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$ , nos daremos la libertad de escribir  $\mu(v)$  para  $v \in \mathcal{A}^*$ . Para la medida uniforme  $\lambda$ , cuando  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , se tiene que  $\hat{\lambda}(\chi_{[\xi]_k}) = 0$  para todo  $\xi \in \mathcal{A}^*$ ,  $k \in K$  y claramente es la única, ya que como mencionamos, una medida  $\mu$  queda únicamente determinada por los coeficientes  $\{\hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k})\}_{\xi \in \mathcal{A}^*, k \in K}$ . Para una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$ , el conjunto de puntos  $x \in \mathcal{A}^K$  con la propiedad que  $\mu(U) > 0$  para todo abierto  $U \ni x$  se llama el soporte de  $\mu$ , y se denota por  $\text{Sop}\mu$ . Sea  $H : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathcal{A}^K$  una función continua, como es medible con respecto a  $\mathcal{B}$ , tiene sentido la siguiente definición. Sea una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  definimos la iteración de la medida  $\mu$  por  $H$  como la medida  $H_\mu \doteq \mu(H^{-1})$  y definimos por  $\mathcal{M}_H(\mathcal{A}^K)$  el conjunto de medidas  $H$ -invariantes en  $\mathcal{A}^K$ , i.e. el conjunto de las medidas  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  tales que  $H_\mu = \mu$ . Se tiene que  $\mathcal{M}_H(\mathcal{A}^K) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  es convexo y cerrado en la topología  $*$ -débil, además por Teorema de Krylov-Bogoliulov (K-B) es no vacío. Si una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  es  $G$ -invariante y  $(\mathcal{A}^K, G)$  s.d.t. entonces decimos

que el sistema dinámico métrico (s.d.m.)  $(\mathcal{A}^K, \mu, G)$  tiene soporte en el s.d.t.  $(\mathcal{A}^K, G)$ , claramente todo s.d.t. tiene al menos un s.d.m. con soporte en él (por K-B), en particular cuando  $K = \mathbb{Z}$ ,  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}), \sigma)$  tiene soporte en el s.d.t.  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ . Por definición de subshift (lo mismo que un espacio de shift) se tiene que para toda medida  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$  el soporte  $\text{Sup}\mu$  es de hecho un espacio de shift.

### **Autómatas Celulares (Basado en [Kur03])**

Un autómatata celular (AC)  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  es una función  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  definida por

$$(Fx)_i = f(x_{i+l(f)}, \dots, x_{i+r(f)}), x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, i \in \mathbb{Z},$$

donde  $f : \mathcal{A}^{r(f)-l(f)+1} \rightarrow \mathcal{A}$  es una regla local (una función). Los enteros  $l(f), r(f), l(f) \leq r(f)$ , radio izquierdo y derecho respectivamente, son denotados  $l, r$  respectivamente. Cuando  $l \geq 0$ , puede verse al AC como una función  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , ya que la función  $F$  proyectada a  $\mathbb{N}$ ,  $\tilde{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tal que

$$(\tilde{F}x)_i = f(x_i, \dots, x_{i+r}), x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, i \in \mathbb{N},$$

está bien definida. Cada vez que escribamos  $F$  estaremos haciendo referencia a un AC, e implícitamente a su regla local  $f$ . Cuando  $r < 0$ , puede verse al AC como una función  $F : \mathcal{A}^{-\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}$ , y sin pérdida de generalidad puede considerarse  $\tilde{F} : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  con la regla local  $\tilde{f}(x_{i+l}, \dots, x_{i+r}) = f(x_{i+r}, \dots, x_{i+l})$ . De este modo, cuando  $r = 0$  también puede verse al AC como una función  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Gracias a la observación anterior podemos definir ACs  $(\mathcal{A}^K, F)$ , además notar que no se pierde generalidad en definir un AC con  $l = 0$  o  $r = 0$  sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  en vez de sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , sin embargo, las propiedades topológicas del AC pueden ser muy distintas (más adelante, por ejemplo, veremos que todo AC con  $l = 0$  que es positivamente expansivo sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  deja de serlo si se le define sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ). Un teorema importante de Hedlund relaciona los ACs con  $\sigma$  y la topología de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , éste dice que una función  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un AC si y solo si  $F$  es continua y  $\sigma \circ F = F \circ \sigma$ . Si para  $S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  un subshift, definimos una función  $F : S \rightarrow S$  continua tal que  $\sigma \circ F = F \circ \sigma$ , del Teorema de Hedlund, se tiene la existencia de la regla local, de hecho dado  $a \in \mathcal{A} \cap L(S)$  se tiene que existe una cantidad finita de cilindros  $\{C_i\}$  tales que  $F^{-1}a = \cup_{i=1}^n C_i$ , luego para todo  $a \in \mathcal{A} \cap L(S)$  existe un natural fijo  $n$  y  $f : \mathcal{A}^n \cap L(S) \rightarrow \mathcal{A} \cap L(S)$  tal que  $x \in S \Rightarrow F(x)_0 = f(x_{[0, n-1]})$ , como  $S$  es subshift entonces  $s \in S \Rightarrow \sigma^k s \in S$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\forall k \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $\sigma^k F(x), \sigma^k x \in S$  y  $F(x)_k = (\sigma^k F(x))_0 = F(\sigma^k x)_0 = f(x_{[k, n+k-1]})$ , el recíproco se tiene fácilmente. Esto último nos permite extender la definición de ACs a espacios del shift.

### **Iteración de medidas por ACs en $\mathcal{A}^K$ (Basado en [DG76])**

Del punto de vista de los sistemas dinámicos interesa conocer medidas invariantes, en el caso particular de los ACs, estamos interesados en conocer las medidas  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$  (veremos más adelante cual es la motivación y explicaremos porque siempre podemos considerar las medidas definidas sobre  $K = \mathbb{Z}$ , aún cuando el AC actúe sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ) que son  $F$ -invariantes para  $(\mathcal{A}^K, F)$  un AC (notemos que la continuidad de los ACs permite hablar de la medida iterada). Hay teoremas de existencia que mencionaremos más adelante, también veremos que hay ACs para los que el hecho de que cierta medida sea  $F$ -invariante

se deduce de algo puramente combinatorial, sin embargo, cuando uno trabaja con ACs espera algo más de las medidas  $F$ -invariantes, uno esperaría al menos poder describir explícitamente algunas, obviamente sería ideal poder clasificarlas todas, pero, estamos aún lejos de una clasificación completa y hay varios pasos importantes que dar antes de conseguir un objetivo tan ambicioso. Una idea es buscar entre los puntos de acumulación de  $\{F_\mu^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Notar que la existencia de estos puntos de acumulación es un hecho simplemente del análisis real, ya que por Teorema de Hahn la sucesión de sucesiones en  $\mathbb{R}$ ,  $\{\{F_{\mu_n}^n([v]_k)\}_{v \in \mathcal{A}^*, k \in K}\}_{n \in \mathbb{N}}$  caracteriza completamente a la sucesión  $\{F_\mu^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , y por un argumento diagonal de Cantor se tiene que existe una subsucesión que caracteriza completamente a una medida  $\nu$  en  $\mathcal{A}^K$  que es un punto de acumulación de  $\{F_\mu^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (K-B en sistemas dinámicos o Banach-Alaoglu-Bourbaki en análisis). En general, demostraciones como estas no son un gran aporte en problemas de clasificación, donde se pretende encontrar elementos de manera explícita, y será una de las razones del enfoque específico de este trabajo. Una manera clásica para buscar medidas en  $\mathcal{M}_F(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$  es restringirse a medidas en el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión  $\{\frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} F_\mu^n\}_{N \in \mathbb{N}^*}$ , que es un conjunto cerrado y no vacío contenido en  $\mathcal{M}_F(\mathcal{A}^K)$ ; dada la importancia de este conjunto anotaremos  $\overline{F_\mu^N} \doteq \frac{1}{N} \sum_{n \in [N]} F_\mu^n$ . En particular, si para una subsucesión  $\{N_k\} \subset \mathbb{N}^*$  la sucesión  $\{\overline{F_\mu^{N_k}}\}$  converge, entonces  $\{N_k\} \subset \mathbb{N}^*$ , tiene una densidad de Cesàro asociada. Particular importancia van a tener las medidas  $\mu$  tales que existe una subsucesión como la anterior con densidad de Cesàro 1, en tal caso al límite lo denotamos  $\mathcal{C}_\mu(F)$  y se llama media de Cesàro. De hecho es un problema abierto dado un AC identificar las medidas de probabilidad tales que exista esa subsucesión con densidad 1 (claramente hay casos triviales, como cuando el AC es epiyectivo y la medida es la uniforme), se conjetura que para los ACs “interesantes” (digamos epiyectivos) hay un conjunto “grande” de medidas para lo que ésto ocurre (al menos casi tan “grande” para contener las medidas de Bernoulli), la evidencia que permite tal conjetura está basada en resultados de Lind, Ferrari, Maass, Martínez, Ney, Pivato, Yassawi, F.Blanchard y Tisseur, entre otros, de un modo que explicaremos. Estos trabajos consideran medidas de probabilidad en  $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$ , una de las principales motivaciones debiera ser la siguiente: basado en el Teorema de Hedlund, si se quieren iterar medidas de probabilidad en  $\mathcal{A}^K$  por un AC  $F$ , si  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$ , entonces para todo  $x \in \text{Sop}\mu$ ,  $\forall k \in K$ ,  $\sigma^{-k}x \in \text{Sop}\mu$ ; luego uno puede estudiar el AC  $(F(\text{Sop}\mu) \cap \text{Sop}\mu, F)$  que está bien definido. Pero hay otras motivaciones, por ejemplo, para medidas  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$  el espacio  $(\mathcal{A}^K, \mu, \sigma)$  es un sistema dinámico métrico (s.d.m.) por lo que se puede aplicar la teoría de sistemas dinámicos (ver 1.2).

### Generalización de resultados anteriores a espacios de shift $S \subset \mathcal{A}^K$

Así como las medidas de Bernoulli son al espacio  $\mathcal{A}^K$ , las medidas de Markov son a los espacios STF's  $S \subset \mathcal{A}^K$ . Lo anterior, en el sentido que son las medidas  $\sigma$ -invariantes más naturales. Una manera de construir medidas de Markov en un STF es la siguiente. Dado un STF  $S \subset \mathcal{A}^K$ , consideramos la representación por shift de vértices con matriz de adyacencia  $M$ , conjunto de vértices  $V$  y conjunto de arcos  $E$ . A cada vértice  $v_i$  le asociamos un real  $p_i \in (0, 1]$ , tal que  $\sum_{i=1}^{\#V} p_i = 1$ . A cada entrada  $M_{i,j} = 1$  de la matriz de adyacencia le asociamos un real  $P_{i,j} \in (0, 1]$ , tal que  $\sum_{j=1}^{\#V} P_{i,j} = 1$  para todo  $i = 1, \dots, \#V$ . Lo anterior permite construir una matriz de Markov  $P$  y un vector estacionario  $p$ . Finalmente definimos la medida sobre cada cilindro  $v_{[i,j]_i}$  por  $\mu_{(p,P)}([v_{[i,j]_i}]) = p_{v_i} P_{v_i, v_{i+1}} \cdots P_{v_{j-1}, v_j}$ .

Notar que usando la misma idea se pueden construir medidas de Markov sobre STF usando las matrices de adyacencia del shift de arcos.

En los espacios de shift la teoría de medida aplica de la misma manera, ya que son espacios medibles compactos, se sigue considerando la convergencia débil de las medidas. La definición de AC se extiende a estos espacios de shift  $S$ , de modo que se puede estudiar de la misma manera la convergencia de las medidas iteradas por ACs. En este caso, el conjunto de medidas estudiadas es el conjunto  $\mathcal{M}_\sigma(S)$ .

### Espacios de shift multidimensionales

Reordemos que  $K = \mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ . Los espacios de shift multidimensionales son acciones sobre  $K^d$  para  $d \geq 2$  que generalizan las acciones sobre  $K$  que constituyen los espacios de shift. Dado un alfabeto finito  $\mathcal{A}$  y un entero  $d \geq 2$ , se define el full-shift sobre el espacio producto  $\mathcal{A}^{K^d}$  por el par ordenado  $(\mathcal{A}^{K^d}, \{\sigma_i\}_{i \in K^d})$ , donde para cada  $i = (i_1, \dots, i_d) \in K^d$ , se define la función  $\sigma_i : \mathcal{A}^{K^d} \rightarrow \mathcal{A}^{K^d}$ , tal que a  $x \in \mathcal{A}^{K^d}$  y  $j = (j_1, \dots, j_d) \in K^d$  le asocia  $\sigma_i(x)_j = x_{i+j}$ , donde la suma del subíndice es componente a componente, i.e.  $i + j = (i_1 + j_1, \dots, i_d + j_d)$ . Considerando la topología discreta en  $\mathcal{A}$ , usualmente se utiliza la topología producto en  $\mathcal{A}^{K^d}$ , con ésta el espacio  $\mathcal{A}^{K^d}$  es espacio métrico compacto, totalmente desconexo. Un conjunto  $X \subset \mathcal{A}^{K^d}$  cerrado y  $\sigma$ -invariante, i.e. tal que  $\forall i \in K^d \sigma_i(X) = X$ , se llama espacio de shift en  $K^d$ , o  $K^d$ -subshift. Definimos los patrones finitos de dimensión  $d$  mediante el conjunto  $\mathcal{A}^{*,d} \doteq \cup_{F \subset K^d, F \text{ finito}} \mathcal{A}^F$ , donde  $\mathcal{A}^F = \{\phi : F \rightarrow \mathcal{A}\}$  es el conjunto de funciones de  $F$  a  $\mathcal{A}$ . Cada  $K^d$ -subshift  $X \subset \mathcal{A}^{K^d}$  está definido por la asociación de una familia  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}^{*,d}$  de patrones tales que  $X = \{x \in \mathcal{A}^{K^d} : \forall F \subset K^d, x|_F \notin \mathcal{F}\}$ , donde  $x|_F$  son los elementos de  $x$  en las coordenadas en  $F$ . Cuando el conjunto  $\mathcal{F}$  es finito se dice que es un  $K^d$ -STF. En  $K^d$  definimos  $\Lambda_N \doteq \{\sum_{i=1}^d a_i e_i : |a_i| < N, a_i \in K\}$ , donde  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  y el 1 aparece en la coordenada  $i$ . Notar que existe una gran diferencia entre  $K$ -STF y  $K^d$ -STF para  $d \geq 2$ , ya que los patrones localmente admisibles en el caso  $K^d$ , a diferencia del caso  $K$ , no son necesariamente globalmente admisibles, i.e. en general, dado  $X \subset \mathcal{A}^{K^d}$   $K^d$ -STF, no existe un  $N \in \mathbb{N}$  fijo, tal que dada una configuración  $x \in \mathcal{A}^{K^d}$ , se pueda determinar si  $x \in X$  conociendo  $x|_{i+\Lambda_N} \forall i \in K^d$  ( $x|_{i+\Lambda_N}$  es la restricción de  $x$  a  $i + \Lambda_N$ , en que se considera para  $i = (i_1, \dots, i_d)$  que  $i + \Lambda_N \doteq \{(g_1 + i_1, \dots, g_d + i_d) : g = (g_1, \dots, g_d) \in \Lambda_N\}$ ).

### Teoría de Entropía de STF (Basado en [Wal82, DG76])

Recordemos que  $K = \mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ . El teorema más importante de la teoría de entropías de  $K$ -STF's (manera de denotar a los espacios de shift sobre  $K$ ) dice que para un STF  $S \subset \mathcal{A}^K$  irreducible, el número  $\log(v_A) \in \mathbb{R}_0^+$ , para  $v_A$  el mayor valor propio de la matriz de incidencia del shift de arcos asociados a  $S$ , corresponde a la entropía topológica. Cuando hay una medida de Markov  $\mu_{(p,P)}$  asociada a un shift de vértices con matriz de incidencia  $M$  de  $m \times m$  (dá lo mismo si consideramos el shift unilateral asociado o el bilateral), la entropía de medida con respecto a  $\mu_{(p,P)}$  está dada por la fórmula  $-\sum_{i,j=1}^m p_i P_{i,j} \log P_{i,j}$ . Con respecto a las medidas de máxima entropía. En [DG76], Teorema 17.14, página 128, aparece la demostración que para los STF's irreducibles existe una medida de entropía máxima, la demostración construye tal medida. En [DG76], Teorema 19.14, página 157, aparece la demostración que los STF's irreducibles son intrínsecamente ergódicos, i.e. que existe una única medida ergódica de entropía máxima. Para el caso de los  $K^d$ -STF's con

$d \geq 2$  no se conoce una fórmula para calcular exactamente la entropía topológica, sin embargo, en algunos casos particulares, sí se conoce la entropía (ver ejemplos en [Sch95]).

## 1.3. Problema

El problema de estudiar la randomización asintótica de medidas de probabilidad por ACs es un problema muy extenso que esta memoria no pretende abarcar en su totalidad. En esta subsección motivaremos las bases del enfoque específico de este trabajo. Para esto, primero mostraremos las propiedades básicas, luego, los resultados más importantes relacionados con el problema, para los cuales enunciaremos la notación, y en algunos casos, mostraremos los argumentos claves de sus demostraciones. Finalmente, describiremos el alcance de esta memoria en relación al problema planteado.

### 1.3.1. Resultados elementales

En esta subsección se muestran los resultados y definiciones elementales en relación a las medidas iteradas por ACs.

#### Motivación de porqué considerar ACs unilaterales

Dado un AC  $(\mathcal{A}^K, F)$ , donde recordemos  $K = \mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ , y una medida  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$ , como  $\mu$  es shift-invariante, entonces para todo  $k' \in K$ , para todo cilindro  $[v]_k$  con  $v \in \mathcal{A}^*$ ,  $k \in K$  se tiene que  $F_\mu([v]_k) = F_\mu([v]_{k+k'})$ , i.e.  $\mu(F^{-1}[v]_k) = \mu(F^{-1} \circ \sigma^{k'}[v]_k) = \mu((F \circ \sigma^{-k'})^{-1}[v]_k)$ , luego para  $F' = F \circ \sigma^{-k'}$  se tiene  $F_\mu([v]_k) = F'_\mu([v]_k)$ , y luego  $F_\mu = F'_\mu$ . Lo anterior nos dice que dado un AC  $F$  y una medida shift-invariante, la medida se itera de manera idéntica por cualquier otro AC  $F'$  que se escriba como  $\sigma^{k'} \circ F = F'$  para algún  $k' \in K$ . También nos dice que cuando estudiemos medidas iteradas por ACs  $(\mathcal{A}^K, F)$  no se pierde generalidad en suponer que  $K = \mathbb{N}$ , ya que de no serlo, se tendría  $l(f) \leq 0$  luego bastaría tomar el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F \circ \sigma^{-l(f)})$  y la medida iterada sería la misma, además del punto de vista de las medidas, si la medida inicial estaba definida en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , basta considerar su proyección a  $\mathbb{N}$  que sigue siendo medida de probabilidad, por esta razón no es de extrañar iterar medidas de probabilidad definidas en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  por ACs definidos en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , y más aún, será más natural de hecho definir las medidas de probabilidad en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . La medida uniforme juega un rol primordial, una de las primeras propiedades que la relaciona con los ACs es el hecho que Hedlund demostró que para todo AC  $(\mathcal{A}^K, F)$  con regla local  $f : \mathcal{A}^{r-l+1} \rightarrow \mathcal{A}$  se tiene que el AC es sobreyectivo si y solo si para todo  $v \in \mathcal{A}^*$   $\#f^{-1}(v) = (\#\mathcal{A})^{r-l}$ , luego la medida uniforme se preserva por un AC si y solo si este es epiyectivo, o en otras palabras  $\lambda \in \mathcal{M}_F(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$  si y solo si el AC  $F$  es epiyectivo. Como veremos, es suficientemente interesante el problema en el caso de ACs para aquellos en los cuales lo anterior sí ocurre, por eso nos restringiremos al estudio de los ACs epiyectivos. Notemos que cuando el AC no es epiyectivo no tiene medidas shift invariantes con soporte completo (i.e. medidas en que el soporte es  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ) ya que el conjunto límite  $W(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F) \doteq \bigcap_{i \geq 0} F^i(x) \subsetneq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  y entonces  $\mu \in \mathcal{M}_F(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \Rightarrow \text{Supp} \mu \subset W(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F) \subsetneq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ .

Motivados por la discusión anterior, en el estudio de medidas iteradas por ACs, en general, se consideran ACs epiyectivos  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  y medidas de probabilidad en  $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ .

### Definiciones y resultados topológicos relacionados con la iteración de medidas por ACs (Basado en [Kur03, BK99])

Las definiciones para ACs sobre subshift bilaterales se extienden a los ACs sobre subshift unilaterales, ya que se pueden aplicar sobre ACs con  $l = 0$  y restringir el dominio a  $\mathbb{N}$ .

Un AC  $(S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  se dice:

1. *equicontinuo* si todo punto  $x \in S$  es punto de equicontinuidad, donde  $x \in S$  se dice *punto de equicontinuidad* si

$$(\forall N > 0)(\exists M > 0) \left[ y \in S, y_{[-M, M]} = x_{[-M, M]} \Rightarrow F^n x_{[-N, N]} = F^n y_{[-N, N]} \forall n \in \mathbb{Z} \right];$$

2. *sensitivo a las condiciones iniciales* si

$$\exists N > 0 \text{ tal que } (\forall x \in S)(\forall M > 0) \left[ \exists y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \exists n \in \mathbb{N} : x_{[-M, M]} = y_{[-M, M]}, F^n x_{[-N, N]} \neq F^n y_{[-N, N]} \right];$$

3. *positivamente expansivo* si

$$\exists N > 0 \text{ tal que } \forall x \neq y \in S, \exists n \in \mathbb{N}, F^n x_{[-N, N]} \neq F^n y_{[-N, N]};$$

4. *expansivo* si  $F$  es biyección y

$$\exists N > 0 \text{ tal que } \forall x \neq y \in S, \exists n \in \mathbb{Z}, F^n x_{[-N, N]} \neq F^n y_{[-N, N]}.$$

**Nota 1.3.1.** Las definiciones anteriores siguen siendo válidas para shifts unilaterales considerando los intervalos  $[0, N]$  y  $[0, M]$ , en lugar de los intervalos  $[-N, N]$  y  $[-M, M]$ , respectivamente.

Notar que la extensión natural a  $\mathbb{Z}$  de un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo, no preserva la positiva expansividad, ya que para cualquier  $N \in \mathbb{Z}$  pueden considerarse  $x \neq x'$  tal que  $x_{[N, \infty)} = x'_{[N, \infty)}$ , luego  $F^n(x)_{[N, \infty)} = F^n(x')_{[N, \infty)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Existen dos tipos de ACs sobre STF's irreducibles. Si existe una cota uniforme del número de preimágenes de cada punto se dice que es finito-a-uno. Si tal cota uniforme no existe se dice que es infinito-a-uno.

Un AC  $(S, F)$  sobre un espacio de shift  $S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , se dice cerrado a la derecha si no colapsa dos puntos asintóticos a la izquierda, i.e. si  $F(x) = F(x')$  y para algún  $I \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $x_i = x'_i$  para todo  $-\infty < i \leq I$ , entonces  $x = x'$ .

Una propiedad importante de los ACs cerrados a la derecha es que son siempre finito-a-uno. Un AC sobre un STF irreducible es epiyectivo si y solo si es finito-a-uno, luego todo AC cerrado es epiyectivo.

Si un AC  $(S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es cerrado a la derecha con  $S$  STF irreducible, entonces para todo  $N$  suficientemente grande la función  $\sigma^N F$  es positivamente expansiva (Lema 4.2 en [BK99]). Desde el punto de vista de la iteración de medidas de probabilidad en  $\mathcal{M}_\sigma(S)$ , en base al resultado anterior puede decirse lo siguiente. Dado un AC  $(S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  (consideramos el caso  $K = \mathbb{Z}$  ya que cuando  $K = \mathbb{N}$  se deduce inmediatamente de éste) cerrado

a la derecha con  $S$  STF irreducible, y una medida  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$ , entonces para  $G = \sigma^{-l} \circ F$  el AC  $(\tilde{S} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, G)$ , donde  $\tilde{S}$  es el STF representado por el mismo shift de vértices que  $S$ , pero considerando solamente los caminos en una dirección, es tal que  $F_\mu = G_\mu$ , además existe un  $N$  tal que para  $G' = \sigma^N \circ G$  el AC  $(\tilde{S}, G')$  es positivamente expansivo. Luego, como  $F_\mu = G'_\mu$ , estudiar la iteración de medidas de probabilidad  $\sigma$ -invariantes por ACs positivamente expansivos sobre STF's irreducibles unidireccionales es equivalente a estudiar estas iteraciones por ACs cerrados a la derecha sobre STF's irreducible bidireccionales. Finalmente, como la positiva expansividad es un invariante bajo conjugación topológica, y todo AC  $(S \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es conjugado a un AC  $(\tilde{S} \subset \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}, \tilde{F})$  con vecindad local  $(l, r) = (0, 1)$ , entonces estudiar las iteraciones de medidas por ACs cerrados se reduce al estudio de las iteraciones por ACs positivamente expansivos en que la regla local  $f$  depende de dos parámetros. En el caso particular en que se tiene un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con vecindad local  $(l, r) = (0, 1)$ , la regla local queda determinada por una matriz  $M$  de  $(\#A) \times (\#A)$  a coeficientes en  $\mathcal{A}$  tal que  $f(x, y) = M_{x,y}$  para todo  $x, y \in \mathcal{A}$ . Diremos que  $M$  es la matriz asociada al AC  $F$ . Esta idea, sigue la usada en el estudio de los STF's, donde se buscan propiedades dinámicas a partir de la representación en shift de arcos (o vértices).

Decimos que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  con vecindad local dada por enteros  $r, l$  es permutativo a la derecha si para todo  $v \in \mathcal{A}^{r-l}$  la función  $f(v, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  definida por  $a \in \mathcal{A} \mapsto f(va)$  es inyectiva. Notar que cuando  $l = 0$  (o  $r = 0$  ver comentario en subsección 1.2) considerando la restricción del AC a  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , ser permutativo a la derecha implica positiva expansividad, veremos en Sección 2 que la condición también es suficiente cuando la cardinalidad del alfabeto  $\mathcal{A}$  es prima.

Dado un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  con vecindad local dada por enteros  $r, l$ . Una palabra  $v \in \mathcal{A}^{r-l+1}$  se dice palabra bloqueante, si existe una secuencia infinita de palabras  $\{v_n\}_n$ ,  $|v_n| = i - j + 1 \leq r - l + 1$ , para  $j, i$  constantes tales que  $[j, i] \subset [l, r]$ , tal que para todo  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  con  $x_{[l,r]} = v$  se tiene que  $F^n(x)_{[-i,i]} = v_n$  para  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Para extender la definición a AC's  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , considerar  $l = 0$  en la definición anterior, y reemplazar  $F^n(x)_{[-i,i]} = v_n$  para  $n \in \mathbb{Z}^*$  por  $F^n(x)_{[0,i]} = v_n$  para  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Un resultado clásico de medidas iteradas por ACs

El Teorema 6.12 en [Wal82] es ligeramente más general que lo siguiente. Dada una transformación continua  $T : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathcal{A}^K$  y  $\mu \in \mathcal{M}_T(\mathcal{A}^K)$ . Entonces  $\mu$  es ergódica si y solo si para toda medida  $\nu \in \mathcal{M}_T(\mathcal{A}^K)$  tal que  $\nu \ll \mu$  se tiene que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T_\nu^n \rightarrow \mu.$$

La demostración de la condición necesaria es la siguiente. Para  $f : \mathcal{A}^K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mu$  ergódica y  $\nu \ll \mu$ , del Teorema de Radon-Nikodym se tiene que  $\exists g = d\nu/d\mu \in L^1$ , luego

$$\int f d\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T_\nu^n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f \circ T^n d\nu = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f(T^n x) g(x) d\mu(x),$$

y de la ergodicidad de  $\mu$  se concluye que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f(T^n x) g(x) d\mu(x) \rightarrow \int f d\mu \int g d\mu = \int f d\mu \int d\nu = \int f d\nu,$$

lo que prueba  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T_\nu^n \rightarrow \mu$ , ya que lo anterior puede hacerse para toda función  $f$  como antes. Notemos que el teorema anterior aplica sobre ACs positivamente expansivos en que la medida  $\mu = \lambda$  la medida uniforme. De hecho los ACs son funciones continuas de  $\mathcal{A}^K$  en  $\mathcal{A}^K$  y para los ACs positivamente expansivos la medida uniforme  $\lambda$  es la única medida de entropía máxima (ver [BM97]), luego de observación en página 193 en [Wal82] se deduce que  $\lambda$  es ergódica, y entonces para toda medida  $\nu \ll \lambda$  y  $F$ -invariante, la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\nu(F) = \lambda$ . Sin embargo, este teorema no nos dice nada de la convergencia de iteración de medidas  $\nu$  singulares con respecto a la medida uniforme. Por esta razón no es útil este resultado para estudiar iteraciones de medidas de Bernoulli no uniformes, pues son singulares con respecto a la medida uniforme. De hecho, usando este mismo teorema puede probarse una medida  $\mu$   $\sigma$ -ergódica es tal que para toda medida  $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^K)$ ,  $\nu \ll \mu$  se tiene que  $\nu = \mu$ . Que básicamente dice que no existen medidas  $\sigma$ -invariantes que son a su vez distintas de una medida  $\sigma$ -ergódica con respecto a la cual son absolutamente continuas. En particular, se deduce el hecho obvio que las medidas de Bernoulli son singulares entre sí y que las medidas que no son de Bernoulli absolutamente continuas con respecto a una medida de Bernoulli no son  $\sigma$ -invariantes.

### 1.3.2. Resultados conocidos

En esta subsección se presentan las definiciones y los resultados que esta memoria considera más importantes en relación al estudio de medidas iteradas por ACs.

#### Resultados para ACs positivamente expansivos

En [BM97] se prueba que todo AC  $(\mathcal{A}^N, F)$  positivamente expansivo es topológicamente conjugado a un STF de orden  $N$ , i.e. un STF donde las palabras prohibidas son de largo  $N$ . Si el AC además tiene vecindad  $(l, r) = (0, r)$ , se prueba que existe una constante  $k_1$  que satisface que para cualquier  $b_1, \dots, b_{N-1} \in \mathcal{A}^r$

$$k_1 = \#\{a_0 \in \mathcal{A}^r : \exists x, y \in \mathcal{A}^N, F(a_0 \cdot x) = b_1 \cdots b_{N-1} \cdot y\},$$

con  $\cdot$  la concatenación. Además, Maass y Blanchard en [BM97], prueban que  $k_1$  divide al número  $(\#\mathcal{A})^r$  y que  $h_\lambda(F) = \log(k_1) = h_{\text{top}}(F)$ , para  $\lambda$  la medida uniforme en  $\mathcal{A}^N$ .

#### Randomización asintóticas de medidas de probabilidad con decaimiento sumable y conexión completa por ACs $(\mathcal{A}^N, F)$ lineales de vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto de cardinalidad $p^r$ para $p$ un número primo

El estudio de medidas iteradas por ACs tiene su origen en un trabajo de Lind [Lin84], en que demuestra que la media de Cesàro de una medida de Bernoulli en  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  iterada por el autómata celular  $F = \sigma^{-1} + \sigma$  en  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , para  $\sigma$  el shift, converge a la medida uniforme  $\lambda$ . Como generalización a este hecho y en un contexto en relación a las medidas iniciales mucho más general, Ferrari, Maass, Martínez y Ney demuestran el siguiente teorema en [FMMN00].

**Teorema 1.3.2** (Ferrari, Maass, Martínez y Ney). *Sea  $(G, +)$  un grupo abeliano finito con  $\#G = p^r$  y  $p$  un primo. Sea  $\mathbb{P}$  una medida de probabilidad shift-invariante en  $G^{\mathbb{Z}}$  con*

conexión completa y decaimiento sumable. Sea  $\varphi : G^{\mathbb{N}} \rightarrow G^{\mathbb{N}}$  un AC dado por  $(\varphi x)_n = ax_n + bx_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $a, b$  son coprimos con  $p^r$ . Entonces para todo  $\underline{v} \in G^{-\mathbb{N}^*}$  la distribución de la media de Cesàro  $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_{\underline{v}}}(F)$  existe y es igual a la medida uniforme.

Se consideran las siguientes definiciones.

- Primero, se define para una distribución inicial  $\mathbb{P}$  en  $G^{\mathbb{Z}}$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{P}} \doteq \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{P} \circ \varphi^{-m}.$$

- Segundo, para una medida  $\mathbb{P}$  shift-invariante en  $G^{\mathbb{Z}}$ ,  $\underline{v} \in G^{-\mathbb{N}^*}$ . Se define para todo  $m \geq 0$  y  $g_0, \dots, g_m \in G$ ,

$$\mathbb{P}_{\underline{v}}\{x_0 = g_0, \dots, x_m = g_m\} \doteq \mathbb{P}\{x_0 = g_0, \dots, x_m = g_m \mid x_i = w_i, i < 0\}.$$

- Tercero, se dice que  $\mathbb{P}$  tiene conexión completa si satisface

$$\forall g_0 \in G, \forall \underline{v}' \in G^{-\mathbb{N}^*}, \mathbb{P}_{\underline{v}'}\{x_0 = g_0\} > 0.$$

- Cuarto, para  $m \geq 0$  se define

$$\gamma_m \doteq \sup \left\{ \left| \frac{\mathbb{P}_{\underline{v}'}\{x_0 = g_0\}}{\mathbb{P}_{\underline{v}}\{x_0 = g_0\}} - 1 \right| : g \in G, \underline{v}', \underline{v} \in G^{-\mathbb{N}^*}, v_i = w_i, i \in [-m, -1] \right\}.$$

Se dice que  $\mathbb{P}$  tiene decaimiento sumable si

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m < \infty.$$

Las hipótesis sobre la medida se deben a que la demostración está basada en un lema de renovación que las necesita. Entraremos en el detalle de este lema más adelante ( $\diamond$ ). La demostración tiene tres elementos fundamentales. Para demostrar el resultado las ideas son una generalización notacionalmente un poco enredada, pero en esencia iguales, a la demostración para el caso de cilindros con una sola letra, por esta razón mostraremos los argumentos en el caso de cilindro de este tipo.

El primer argumento es un lema (Lema 4.1 en 1.3.2), que dice que para una medida  $\mathbb{P}_{\underline{w}}$  como en el Teorema 1.3.2 existe  $\epsilon : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión decreciente a 0, tal que para toda sucesión  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \subset G$ , para  $G$  un grupo abeliano finito con  $\#G = p^r$  y  $p$  un primo,

$$\left| \mathbb{P}_{\underline{w}} \left\{ \sum_{i \in [n]} a_i x_i = g \right\} - \frac{1}{\#G} \right| \leq \epsilon(\#\{a_i : i \in [n], a_i \neq 0 \pmod{p}\}), \forall g \in G. \quad (1.2)$$

El segundo argumento usa la hipótesis sobre el cardinal del grupo  $G$  y la linealidad del AC  $\varphi$ , lo que permite concluir que

$$(\varphi^m x)_i = \sum_{k \leq m} \binom{m}{k} \mu^{m-k} \nu^k x_{k+i}. \quad (1.3)$$

El tercer argumento relaciona los dos argumentos anteriores para extraer el resultado. También se usa el Teorema de Lucas, que dice que para dos enteros no negativos  $m, k$ ; y  $p$  un número primo tal que los desarrollos de  $m$  y  $k$  en base  $p$  están dados por  $m = \sum_{i=0}^n m_i p^i$  y  $k = \sum_{i=0}^n k_i p^i$  se tiene

$$\left[ \binom{m}{k} \right]_p = \left[ \prod_{i=0}^n \binom{m_i}{k_i} \right]_p.$$

El Teorema de Lucas se usa para demostrar que para  $\alpha \in (0, 1)$  y  $M \in \mathbb{N}^*$  si

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i p^i \leq M \text{ y } \#\{m_i : m_i \neq 0\} \geq \alpha \log \log M,$$

entonces

$$\left| \left\{ k \leq m : \left[ \binom{m}{k} \right]_p \neq 0 \right\} \right| \geq 2^{\alpha \log \log M}.$$

Finalmente se demuestra que el conjunto

$$\{m \leq M : m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i p^i \text{ y } \#\{m_i : m_i \neq 0\} \geq \alpha \log \log M\}_{M \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \quad (1.4)$$

tiene densidad de Cesàro 1, luego usando el argumento primero y segundo se concluye que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbb{P}_w \{(\varphi^m x)_i = g\} = \frac{1}{\#G}, \forall g \in G, \quad (1.5)$$

lo que finaliza la demostración.

Veamos el detalle de  $(\diamond)$ . Cuando se tienen las hipótesis de  $\sigma$ -invarianza, conexión completa y decaimiento sumable de la medida  $\mathbb{P}$  en  $G^{\mathbb{Z}}$  se tienen los Lemas 2.8 y 3.1 en [FMMN00]. El Lema 2.8 permite construir variables aleatorias  $(x_{T_i} : i \geq 0)$  i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) uniformemente distribuidas en  $G$ . El Lema 3.1 demuestra que  $N(A) \doteq \sum_{i \geq 1} 1_{T_i \in A}$  para  $A \subset \mathbb{N}$  es tal que  $\mathbb{P}\{N(A) = 0\} \leq \epsilon(|A|)$  para  $\epsilon : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión decreciente a 0. Introduciremos la idea de “propagación aleatoria” que está implícita en el Lema 4.1, y es el argumento clave para demostrar la randomización.

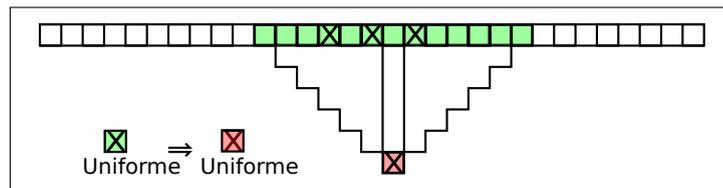


Figura 1.1: Propagación aleatoria.

La idea de “propagación aleatoria” dice lo siguiente. Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  con  $l = 1, r = 1$ , algún  $m \in \mathbb{N}^*$  y  $k > k'$  para un  $k' \in \mathbb{N}^*$  fijo, tal que independientemente de las coordenadas  $j_i \in [-k, k]$  para  $i = 1, \dots, m$  se tiene que: si  $x_{j_i}$  son variables i.i.d. con distribución uniforme, entonces para  $y$  tal que  $y_{j_i} = x_{j_i}$  y para  $j \neq j_i$ ,  $y_j \sim$  alguna

distribución de probabilidad, la variable aleatoria  $F^k(y)_0$  tiene distribución uniforme. La idea de “propagación aleatoria” se usa para demostrar (1.2), el primer argumento clave de la demostración de randomización en [FMMN00]. En el Capítulo 5 formalizaremos este concepto y demostraremos que es suficiente para demostrar que se tiene randomización en un sentido un poco más general que definiremos.

**Nota 1.3.3.** *En el caso de ACs no lineales no es directo aplicar un argumento como el ( $\diamond$ ), además no se dispone necesariamente de una fórmula sencilla como (1.3).*

### Randomización asintóticas de medidas de probabilidad armónicamente mezcladoras por ACs $(\mathcal{A}^{\mathbb{M}}, F)$ difusivos en densidad

Motivados en los resultados obtenidos en [FMMN00], Pivato y Yassawi demuestran en [PY02] el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $\mathcal{A}$  un grupo abeliano finito,  $\mathbb{M}$  un monoide (por ejemplo,  $\mathbb{N}^E$ ,  $\mathbb{Z}^D$ ,  $\mathbb{Z}^D \times \mathbb{N}^E$ ). Si  $F : \mathcal{A}^{\mathbb{M}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{M}}$  es un AC lineal y  $\mu$  una medida armónicamente mezcladora en  $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$ , entonces la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe y es igual a la medida uniforme.*

Una versión ligeramente menos general del teorema anterior, pero con demostración completamente análoga, es el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.5** (Pivato y Yassawi). *Sea  $n \in \{2, 3, \dots\}$  y  $F : \mathbb{Z}_n^K \rightarrow \mathbb{Z}_n^K$  un AC lineal difusivo y  $\mu$  una medida armónicamente mezcladora en  $\mathbb{Z}_n^K$ , entonces la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe y es igual a la medida uniforme.*

Donde se consideran las siguientes definiciones.

- Primero consideremos una definición más general de cilindros, digamos el álgebra generada por los cilindros, i.e. para el espacio  $\mathcal{A}^K$  consideramos el conjunto de los elementos  $[v]_{\vec{k}}$  para  $v \in \mathcal{A}^*$  y  $\vec{k} \in K^{|\vec{v}|}$  tal que  $[v]_{\vec{k}} = \{x \in \mathcal{A}^K : x_{k_i} = v_i \text{ para } i = 0, \dots, |\vec{v}| - 1\}$ .
- Segundo consideremos una definición un poco más general de (1.1), para  $n \in \{2, 3, \dots\}$  se define  $w \doteq e^{2\pi i/n}$ , y el conjunto

$$\chi(\mathbb{Z}_n^K) \doteq \{\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} : \mathbb{Z}_n^K \rightarrow S^1 \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^*, \vec{k} \in K^{|\xi|}, x \in \mathbb{Z}_n^K \mapsto \chi_{[\xi]_{\vec{k}}}(x) = w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i x_{i+k_i}}\}.$$

Para un elemento  $\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \in \chi(\mathbb{Z}_n^K)$  se define el rango de  $\chi_{[\xi]_{\vec{k}}}$ , denotado  $rank(\chi_{[\xi]_{\vec{k}}})$ , como  $|\xi|$  (el largo de la palabra  $\xi$ ). Diremos que una medida  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}^K)$  es armónicamente mezcladora en  $\mathbb{Z}_n^K$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que para todo  $\xi \in (\mathbb{Z}_n)^*$  con  $|\xi| > R$ , para todo  $k \in K$ , se tiene que

$$\left| \sum_{v \in \mathbb{Z}_n^{|\xi|}} \mu([v]_{\vec{k}}) w^{\sum_{i=0}^{|\xi|-1} \xi_i v_{i+k}} \right| < \epsilon.$$

- Tercero, decimos que un AC  $(\mathbb{Z}_n^K, F)$  es lineal si la regla local

$$f(x_0, \dots, x_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i x_i, \quad (1.6)$$

donde  $f_i \in \mathbb{Z}_n$  para todo  $i = 0, \dots, m-1$  (notar que  $f_i$  puede tomar el valor 0). Consideremos que para  $j \in K$  y  $x \in \mathbb{Z}_n^K$ ,  $F(x)_j = f(x_{j+l}, \dots, x_{j+r})$  para  $l \leq r \in K$  fijos tales que  $l+r+1 = m$ .

- Cuarto, para un AC  $(\mathbb{Z}_n^K, F)$  lineal con regla local definida como en (1.6) y  $\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \in \chi(\mathbb{Z}_n^K)$ , consideremos  $\vec{k}_{\min} = \min\{k_i\}$  y  $\vec{k}_{\max} = \max\{k_i\}$  y definimos para  $y \in \mathbb{Z}_n^K$

$$\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \circ F(y) \doteq w \sum_{i=\vec{k}_{\min}+l}^{\vec{k}_{\max}+r} f(x_i^{\vec{k}}, \dots, x_{i+l+r}^{\vec{k}}) y_{i-l},$$

con  $x_i^{\vec{k}} = 0$  si  $i \notin \vec{k}$  y  $x_i^{\vec{k}} = \xi_i$  si  $i \in \vec{k}$ , i.e.  $\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \circ F$  es un elemento  $\chi_{[\tau]_{\vec{\tau}}}$  donde  $\tau_0 = f(x_{i_0}^{\vec{k}}, \dots, x_{i_0+l+r}^{\vec{k}})$  tal que  $f(x_i^{\vec{k}}, \dots, x_{i+l+r}^{\vec{k}}) = 0$  para todo  $i < i_0$ ,  $\tau_1 = f(x_{i_1}^{\vec{k}}, \dots, x_{i_1+l+r}^{\vec{k}})$  tal que para todo  $i_0 < i < i_1$   $f(x_i^{\vec{k}}, \dots, x_{i+l+r}^{\vec{k}}) = 0$ , y así sucesivamente, luego claramente  $|\tau| = \#\{i : f(x_i^{\vec{k}}, \dots, x_{i+l+r}^{\vec{k}}) \neq 0\}$ .

- Quinto, se dice que un AC  $(\mathbb{Z}_n^K, F)$  lineal es difusivo si para todo  $\xi \in \mathbb{Z}_n^*$ ,  $k \in K$  con  $|\xi| > 0$  se tiene que  $\text{rank}(\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \circ F^n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Mostraremos las ideas fundamentales en la demostración del Teorema 1.3.5. Hay básicamente tres argumentos.

El primer argumento es de gran similitud con la demostración del Teorema 6.12 en [Wal82]. Usaremos la notación en la Nota 1.2.1. Se tiene que para  $(\mathbb{Z}_p^K, F)$  un AC lineal,  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z}_p^K)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $\chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$ ,

$$\hat{F}_\mu^m(\chi_{[\xi]_k}) = \int_{\mathbb{Z}_p^K} \chi dF_\mu^m = \int_{\mathbb{Z}_p^K} \chi_{[\xi]_k} \circ F^m d\mu.$$

Del hecho que  $F$  es lineal se tiene que  $\chi_{[\xi]_k} \circ F^m = \chi' \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$ , luego

$$\hat{F}_\mu^m(\chi_{[\xi]_k}) = \int_{\mathbb{Z}_p^K} \chi_{[\xi]_k} dF_\mu^m = \int_{\mathbb{Z}_p^K} \chi' d\mu = \hat{\mu}(\chi').$$

Para demostrar la convergencia

$$F_\mu^m \rightarrow \lambda \text{ cuando } m \rightarrow \infty,$$

se propone demostrar que

$$\hat{F}_\mu^m(\chi_{[\xi]_k}) \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty, \text{ para todo } \chi_{[\xi]_k}.$$

Para demostrar esto último se propone el concepto de medida amónicamente mezcladora que dice que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$\text{rank}(\chi_{[\xi]_k}) > R \Rightarrow \hat{\mu}(\chi_{[\xi]_k}) \leq \epsilon,$$

y el concepto de AC difusivo que dice que

$$\text{rank}(\chi_{[\xi]_k} \circ F^m) \rightarrow \infty \text{ cuando } m \rightarrow \infty, \text{ para todo } \chi_{[\xi]_k}.$$

El segundo argumento de la demostración, es que las medidas de Bernoulli son armónicamente mezcladoras, y el tercer argumento, es que los ACs lineales son difusivos, para esto se utiliza el Teorema de Lucas. No entraremos en el detalle de estas demostraciones.

Pivato y Yassawi demuestran en [PY02] que toda medida de Bernoulli es armónicamente mezcladora y que todo AC lineal  $(\mathbb{Z}_p^K, F)$ , para  $p$  primo, es difusivo en densidad. Esto significa que existe un conjunto  $D \subset \mathbb{N}^*$  de densidad de Cesàro 1 tal que  $(\forall \chi_{[\xi]_{\vec{k}}}) \lim_{n \rightarrow \infty, n \in D} \text{rank}(\chi_{[\xi]_{\vec{k}}} \circ F^n) = \infty$ , con lo que concluyen para todo AC lineal  $(\mathbb{Z}_p^K, F)$ , la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe, para  $\mu$  cualquier medida de Bernoulli (si la medida inicial tiene soporte completo). En [PY04] los mismos autores generalizaron los resultados obtenidos para el caso  $\mathbb{Z}_n^K$ , para  $n > 1$  no necesariamente primo.

**Nota 1.3.6.** Cuando el AC  $(\mathbb{Z}_p^K, F)$  no es afín, no es cierto que  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall \chi_{[\xi]_k} \in \chi(\mathbb{Z}_p^K), \chi_{[\xi]_k} \circ F^m \in \chi(\mathbb{Z}_p^K)$ . Esto restringe el concepto de difusividad solamente a ACs afines.

### Existencia de la media de Cesàro para la iteración medidas de probabilidad shift invariantes y shift ergódicas por ACs definidos sobre espacios de shift con palabras bloqueantes en alguna dirección

Blanchard y Tisseur en [BT00] demuestran que ACs definidos sobre espacios del shift  $S$ , que tienen direcciones con palabras bloqueantes, son tales que la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe para medidas  $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(S)$  que son  $\sigma$ -ergódicas. La gracia de este resultado es que resuelve el problema de la existencia de la media de Cesàro para una familia “grande” de ACs, dejando el problema abierto sólo en el caso de ACs que en ninguna dirección tienen palabras bloqueantes.

**Teorema 1.3.7** (Blanchard y Tisseur). Sea  $(S, F)$  un AC y  $\mu$  una medida  $\sigma$ -ergódica tal que existe una palabra bloqueante  $B \in L(S)$  tal que  $\mu([B]_0) > 0$ . Entonces existe la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  y se tiene que para todo  $u \in L(S)$

$$\mathcal{C}_\mu(F)([u]_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p(k, m)} \sum_{i=0}^{p(k, m)-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-(i+\bar{p}(k, m))}([u]_0)).$$

Con respecto a las hipótesis. La hipótesis sobre el AC  $(S, F)$  que permite obtener el resultado en un espacio de shift  $S$  generaliza el hecho que el resultado sea válido solamente para ACs  $(\mathcal{A}^K, F)$ , pero en realidad este hecho pasa desapercibido en la demostración. En el sentido estándar, la  $\sigma$ -ergodicidad de la medida  $\mu$  se usa solamente para poder deducir que  $\mu$ -casi seguramente (c.s.) en cada  $x \in S$  aparece  $B$  infinitas veces en cualquier dirección, por lo que no habría problemas en cambiar la hipótesis “ $\mu$  una medida  $\sigma$ -ergódica tal que existe una palabra bloqueante  $B \in L(S)$  tal que  $\mu([B]_0) > 0$ ” por “sea  $B \in S$  una palabra bloqueante y sea  $\mu$  una medida tal que  $\mu$ -c.s. en cada  $x \in S$  ocurre  $B$  infinitas veces en cualquier dirección.  $R(k, m)$  es el conjunto de puntos en  $S$  tales que tienen al menos una ocurrencia de  $B$  en  $[-m-k, -k]$  y otra en  $[k, m+k]$ , luego  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(R(k, m)) = 1$ . Y dado que esta es la única parte donde se usa la ergodicidad de la medida inicial, podrían relajarse las hipótesis sobre la medida  $\mu$  de modo de solamente pedir que sea shift invariante y que se tenga esta convergencia. Con respecto a la demostración, hay dos argumentos claves.

El primer argumento es que se pueden intercambiar los límites

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-i}([u]_0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-i}([u]_0)). \quad (1.7)$$

Y el segundo argumento es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-i}([u]_0)) = \frac{1}{p(k, m)} \sum_{i=0}^{p(k, m)-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-(i+\bar{p}(k, m))}([u]_0)). \quad (1.8)$$

Para el primer argumento se demuestra que considerando la sucesión acotada

$$x_{n, m} \doteq \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \mu(R(k, m) \cap F^{-i}([u]_0)),$$

para cada  $m$  fijo el límite de  $x_{n, m}$  existe, y que  $x_{n, m}$  converge uniformemente en  $n$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Para el segundo argumento, notar que para  $k, m \in \mathbb{N}^*$  fijos,  $x \in R(k, m)$  y  $x_{[0, |u|-1]} = u \in L(S)$  donde  $|u| < k$ , la sucesión  $\{F^n(x)_{[0, |u|-1]}\}_{n \in \mathbb{N}}$  depende solamente de  $x_{[-k-m, k+m]}$ . De la combinatoria acotada se deduce el resultado, ya que  $\{F^n(x)_{[0, |u|-1]}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene que tener un preperíodo  $p'(k, m, x)$  y un período  $p(k, m, x)$  y definiendo

$$p(k, m) \doteq mcm(\{p(k, m, n) : x \in R(k, m)\})$$

y  $p'(k, m)$  el correspondiente preperíodo, donde  $mcm$  es el mínimo común múltiplo, se obtiene que para toda palabra  $u \in \mathcal{A}^s$  para  $s < k$ , y todo  $i, j \in \mathbb{N}$

$$R(k, m) \cap F^{-(ip(k, m)+j+p'(k, m))}([u]_0) = R(k, m) \cap F^{-(p'(k, m)+j)}([u]_0),$$

de donde se concluye el resultado.

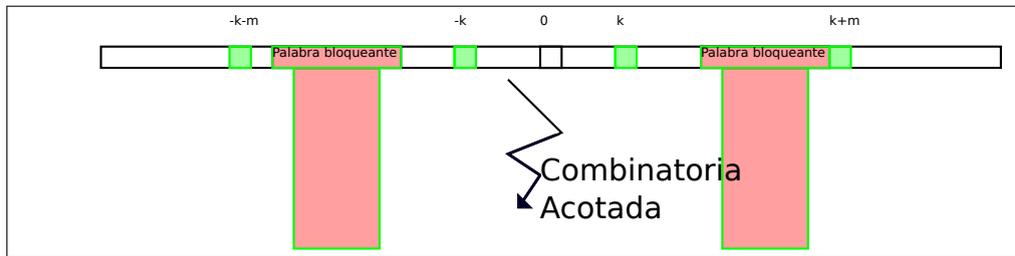


Figura 1.2: Iteración de  $x \in R(k, m)$ .

**Randomización asintótica de medidas de Markov en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  compatibles con una matriz  $M$  irreducible por el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  lineal y  $\mathcal{A}$  con propiedades algebraicas**

En [MMPY06b], Maass, Martínez, Pivato y Yassawy, extiende los resultados en [Lin84, FMMN00, PY02, PY04]. En [MMPY06b] se considera el mismo problema de estudiar la convergencia de la iteración de medidas por ACs lineales, pero definidos sobre subgrupos de Markov. Dado un alfabeto fijo  $\mathcal{A}$ , los subgrupos de Markov son STF's definidos por un

shift de vértices tales que son subgrupo de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Se puede probar que para los subgrupos de Markov la matriz  $M$  es tal que en todas sus filas aparece el mismo número de 1's que denotamos  $\mathcal{F}$ , de lo que se deduce que existe una única medida de máxima entropía  $\nu$  de Markov, determinada por la matriz estocástica  $\mathbb{P}$  y el vector de probabilidad estacionario  $p$ , definidos por  $\mathbb{P}_{i,j} \doteq \frac{1}{\mathcal{F}}$  si  $M_{i,j} = 1$  y 0 si no, y  $p = \frac{1}{\#\mathcal{A}}(1, \dots, 1)$ . Se prueba el siguiente teorema. Dada una matriz  $M$  irreducible, se dice que una medida de Markov  $\nu$  definida por  $(\mathbb{P}, p)$  es compatible con  $M$  si  $\mathbb{P}_{i,j} > 0 \Leftrightarrow M_{i,j} = 1$ , i.e. si la medida  $\nu$  tiene soporte  $Sop(\nu) = S$ , donde  $S$  es el STF definido por la matriz  $M$ . Recordemos que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  lineal tiene la forma  $F = \sum_{i=l}^r a_i \sigma^i$  para  $a_i \in \mathcal{A}$  y  $\sigma$  el shift.

**Teorema 1.3.8** (Maass, Martínez, Pivato y Yassawy). *Asumiendo que  $\mu$  es una medida de probabilidad de Markov en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  compatible con una matriz cuadrada irreducible  $M$ . Asumiendo además que  $\mathcal{A}$  es un grupo abeliano de  $p^s$ -torsión para algún número primo  $p$  y  $s \geq 1$ . Entonces la media de Cesàro de  $\mu$  bajo la acción de un AC  $\Phi$  lineal converge a la medida  $\nu$ .*

La demostración sigue ideas de [FMMN00], primero se construye un proceso de renovación, luego se explotan propiedades del triangulo de Pascal para estudiar las iteraciones del AC, y finalmente se usa lo anterior para demostrar la convergencia. El Teorema 1.3.8 se generaliza en [MMPY06a], donde los mismo autores obtienen resultados de randomización asintótica de medidas de Markov con soporte completo en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^D}$  por ACs lineales.

### Randomización asintótica de medidas de Markov por ACs afines

En [MSS06], Maass, Martínez y Sobottka, demuestran el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.9** (Maass, Martínez, Sobottka). *Si  $G$  es de  $p^s$  torsión con  $p$  un primo y  $\mathcal{G} \subset G^{\mathbb{Z}}$  es un shift irreducible y subgrupo. Si  $\Phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  es un AC afín de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y  $\mu$  una medida de probabilidad  $\sigma$ -invariante con conexión completa y decaimiento sumable compatible con  $\mathcal{G}$ . Entonces la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(\Phi)$  converge a la medida de máxima entropía para  $(\mathcal{G}, \sigma)$ .*

Este resultado es una extensión del resultado de randomización asintótica de una medida con decaimiento sumable y conexión completa en [FMMN00] por AC lineales de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ .

### Iteración de medidas de Bernoulli por ACs permutativos con reglas locales algebraicas

Host, Maass y Martínez prueban en [HMS03] que toda medida shift-invariante en  $\mathcal{A}_n^K$  para  $n \in \mathbb{N}^*$  con conexión completa y decaimiento sumable es armónicamente mezcladora, dando una interpretación probabilista al concepto introducido por Pivato y Yassawi. En [HMS03] los autores también prueban la existencia de la media de Cesàro para ACs no necesariamente lineales, pero con propiedades algebraicas. Después de mostrar algunas definiciones de ACs presentaremos los resultados.

**Definición 1.3.10.** Decimos que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativo a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  tiene una regla local  $\psi$ -asociativa si para alguna función  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  se tiene que

$$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \psi(f(f(a, b), c)) = f(a, f(b, c)).$$

**Definición 1.3.11.** Decimos que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativo a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  es  $N$ -scaling si existe un entero  $N \geq 2$  tal que

$$(F^N x)_0 = f(x_0, x_N) \text{ para todo } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

**Definición 1.3.12.** Dado un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativo a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  se define la relación de equivalencia  $a \sim b \Leftrightarrow f(a, \cdot) = f(b, \cdot)$ , y se define  $\tilde{\mathcal{A}} \doteq \mathcal{A} / \sim$ .

Se prueban los siguientes teoremas.

**Teorema 1.3.13** (Host, Maass y Martínez). *Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  un AC con regla local  $\psi$ -asociativa tal que  $\tilde{\mathcal{A}}$  es abeliano. Si  $\mu$  es una medida de probabilidad shift-invariante con conexión completa y decaimiento sumable, entonces la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe.*

**Teorema 1.3.14** (Host, Maass y Martínez). *Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  un AC  $N$ -scaling. Si  $\mu$  es una medida de probabilidad shift-invariante con conexión completa y decaimiento sumable, entonces la media de Cesàro  $\mathcal{C}_\mu(F)$  existe.*

Para ACs afines se prueba el resultado siguiente.

**Teorema 1.3.15** (Host, Maass y Martínez). *Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  un AC afín con  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima, entonces la única medida  $\mu$ ,  $F$ -invariante con  $h_\mu(F) > 0$  y  $\sigma$ -ergódica, es la medida uniforme.*

### Iteración de medidas por ACs bipermutativos

En [Piv05], Pivato propone estudiar la iteración de medidas de probabilidad en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  por ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  bipermutativos con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . Lo anterior permite caracterizar las medidas  $F$ -invariantes, y a la vez obtener resultados análogos a aquellos para ACs afines en [HMS03]. Notar que la matriz  $M$  asociada a estos ACs bipermutativos se caracteriza por tener exactamente una ocurrencia de cada  $a \in \mathcal{A}$  en cada fila y cada columna (a matrices con esta propiedad se les denomina cuadrado latino).

Supongamos que  $(\mathcal{A}, \cdot)$  es un grupo finito y  $\Phi : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  es un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y regla local  $f(a, b) = a \cdot b$ . Sea  $\mu$  una medida sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Se define para cada  $a \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$  la medida  $\mu_a$  sobre  $\mathcal{A}$  por

$$\mu_a(b) \doteq \mu(\{x_0 = b : x|_{\mathbb{N}^*} = a\}),$$

donde  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  es una secuencia  $\mu$ -aleatoria. Sea  $\tilde{\mu}$  la proyección de  $\mu$  en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ . Se tiene que

$$\mu = \int_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} (\mu_a \times \delta_a) d\tilde{\mu}(a).$$

Para  $\mathcal{C}$  un subgrupo de  $\mathcal{A}$ , se dice que  $\mu$  es una  $\mathcal{C}$ -medida si  $\tilde{\mu} - c.s.$  para todo  $a \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ ,  $Sop(\mu_a)$  es una clase lateral derecha de  $\mathcal{C}$  en  $G$ , y  $\mu_a$  está uniformemente distribuida en esta clase.

**Teorema 1.3.16** (Pivato). *Si  $\mu$  es  $\Phi$ -ergódica y  $\sigma$ -invariante, entonces  $\mu$  es una  $\mathcal{C}$ -medida para algún subgrupo  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ .*

Cuando  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \Phi)$  es un AC bipermutativo con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.17** (Pivato). *Si  $\mu$  es  $\Phi$ -invariante y  $\sigma$ -ergódica, entonces existe  $k \in [\#\mathcal{A}]$  tal que  $h_\mu(\Phi) = \log(k)$  y  $\phi$  es  $\mu$ -c.s.  $k$  a 1.*

### 1.3.3. Alcances del trabajo

Hay tres preguntas fundamentales con respecto a las medidas iteradas por ACs:

1. ¿Cuales son las medidas que se preservan?
2. ¿Cuándo la media de Cesàro existe?
3. ¿Cuándo un AC randomiza asintóticamente una medida inicial?

Como resumen de los teoremas antes mencionados, las respuestas más importantes que se han dado a cada una de estas preguntas son las siguientes.

1. Para los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  afines con  $\#\mathcal{A} = p$  primo, la única medida  $\mu$ ,  $\sigma$ -ergódica y  $F$ -invariante con  $h_{\mu} > 0$ , es la medida uniforme en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ .
2.
  - La media de Cesàro existe cuando el AC tiene direcciones con palabras bloqueantes y la medida inicial es  $\sigma$ -ergódica.
  - La media de Cesàro existe cuando el AC cumple condiciones algebraicas de regla local  $\psi$ -asociativa y  $N$ -scaling.
3. Un AC afín sobre STF's y con condiciones algebraicas sobre el alfabeto, randomiza asintóticamente una medida inicial con conexión completa y decaimiento sumable.

Esta memoria pretende explorar la randomización asintótica de medidas de Bernoulli en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  por ACs positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que no cumplen condiciones algebraicas de regla local  $\psi$ -asociativa ni  $N$ -scaling, no son afines, ni tampoco bipermutativos. En particular, la investigación se centra en la familia de ACs positivamente expansivos sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  con  $\#\mathcal{A} = 3$ . Esta familia de ACs no ha sido explorada en detalle.

# Capítulo 2

## Autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$

Los ACs son sensibles o tienen puntos de equicontinuidad (ver [Kur03], Capítulo 5). El último caso fue estudiado por Blanchard y Tisseur en [BT00], y prueban que las medias de Cesàro existen. El caso sensible es más complejo. Ahí viven los ACs positivamente expansivos y expansivos, además los algebraicos con esa propiedad. Por otro lado si un AC es cerrado a la derecha (o izquierda), por un resultado de Boyle y Kitchens (ver [BK99]), su composición con alguna potencia del shift es positivamente expansivo. Luego lo que falta es explorar esta clase y partir desde los expansivos no algebraicos parece interesante. Ahí solo se conocen algunos ejemplos como los N-scaling, etc.

Es difícil describir los ACs positivamente expansivos de manera general. La clase de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivos con  $\#\mathcal{A}$  primo y vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , es fácil de describir y no ha sido explorada en detalle. En este capítulo se clasificaran los ACs en esta clase en tres familias distintas de acuerdo a si la regla local tiene vecindad  $l = r = 1$ , es afín, o si tiene vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y no es afín. Además se propone una familia de ACs positivamente expansivos con vecindad local  $(l, r) = (0, 1)$ , que según se verá en el Capítulo 4 parece randomizar asintóticamente una medida inicial de Bernoulli.

### 2.1. Una clasificación de autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$

Se considerarán los ACs con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  positivamente expansivos en  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$  para  $p$  primo y más en general los permutativos a la derecha sobre cualquier alfabeto. Primero se prueba una propiedad que es corolario directo del trabajo de Blanchard y Maass en [BM97], que dice que los ACs positivamente expansivos sobre alfabetos de cardinalidad prima de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  son los permutativos a la derecha. Después, se propone una clasificación de los ACs permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  en tres clases: los triviales (parecidos al shift), los afines, y los especiales, que son el complemento de las dos primeras clases. También se da un algoritmo para determinar la clasificación salvo conjugación uno-bloque.

**Proposición 2.1.1.** *Si  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  positivamente expansivo, con matriz asociada  $M$ , i.e. la matriz de  $(\#\mathcal{A}) \times (\#\mathcal{A})$  a coeficientes en  $\mathcal{A}$  tal*

que para  $f$ , la regla local de  $F$ , se tiene que  $f(x, y) = M_{x,y}$  para todo  $x, y \in \mathcal{A}$ . Entonces existen constantes  $k_1, k_2$  con  $\#\mathcal{A} = k_1 k_2$ , tales que cada letra  $a \in \mathcal{A}$  aparece exactamente en  $k_1$  filas distintas de  $M$ , y en cada fila en que aparece lo hace exactamente  $k_2$  veces, i.e.  $\forall c \in \mathcal{A} \#\{a : \exists b, M_{a,b} = c\} = k_1$  y  $\#\{b : M_{a,b} = c\} > 0 \Rightarrow \#\{b : M_{a,b} = c\} = k_2$ .

**Demostración.** Dado un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con regla local de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  positivamente expansivo. De Proposición 3.6 en [BM97] se tiene que existen constantes  $k_1, k_2$  tales que  $\#\mathcal{A} = k_1 k_2$ , además, de Lema 3.5 en el mismo artículo, se tiene que independientemente de  $a, b \in \mathcal{A}$  si  $\exists c : f(a, c) = b$ , entonces  $k_2 = \#\{w \in \mathcal{A} : f(a, w) = b\}$ . Lo anterior, demuestra que en la matriz  $M$  si aparece la letra  $b \in \mathcal{A}$  en una fila  $a$ , entonces aparece  $k_2$  veces. En [BM97] se concluye a partir de Lema 3.4 que independientemente de  $c \in \mathcal{A}$ ,  $\#\{a \in \mathcal{A} : \exists b, f(a, b) = c\} = k_1$ , de lo que se deduce que cada letra  $c \in \mathcal{A}$  aparece en  $k_1$  filas de  $M$ .  $\square$

**Corolario 2.1.2.** Si  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es un AC con regla local de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  positivamente expansivo y la cardinalidad de  $\mathcal{A}$  es prima. Entonces  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es un AC permutativo a la derecha. En particular, para cada fila  $a \in \mathcal{A}$  de  $M$ , la matriz asociada al AC  $F$ , existe una permutación  $\rho_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $M_{a,b} = \rho_a(b)$  para todo  $b \in \mathcal{A}$ .

**Demostración.** Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  como en el enunciado, y  $p$  un primo tal que  $\#\mathcal{A} = p$ . De la Proposición 2.1.1, se obtiene que existen constantes  $k_1, k_2$  tales que  $\#\mathcal{A} = p = k_1 k_2$ , si  $k_1 = 1$  y  $k_2 = p$ , entonces el AC es la identidad, que no es positivamente expansivo, luego  $k_1 = p$  y  $k_2 = 1$ , lo que demuestra que en cada fila de  $M$  aparecen todas las letras de  $\mathcal{A}$ , y entonces que para cada  $a \in \mathcal{A}$  existe una permutación  $\rho_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $M_{a,b} = \rho_a(b)$  para todo  $b \in \mathcal{A}$ .  $\square$

El Corolario 2.1.2 permite concluir que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con  $\#\mathcal{A}$  primo y vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  cumple la condición siguiente:  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es positivamente expansivos si y solo si en cada fila de la matriz asociada  $M$  aparece exactamente una vez cada letra  $a \in \mathcal{A}$ . Notar que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con  $\#\mathcal{A} = m$ , positivamente expansivo y de vecindad  $(l, r) = (0, r')$  con  $r' > 1$ , es topológicamente conjugados a un AC positivamente expansivo de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con alfabeto  $\mathcal{A}'$  y  $\#\mathcal{A}' = m^{r'}$ . Luego son “pocos” los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con  $\#\mathcal{A}$  primo.

A continuación, particionaremos el conjunto de ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . La idea de particionar tiene por objeto distinguir aquellos ACs para los que se conoce la convergencia de la medida iterada. La generalidad en la naturaleza del alfabeto  $\mathcal{A}$  permite obtener resultados en cierto sentido independientes de la posible algebraicidad de éste. La primera definición está basada en los trabajos de medidas iteradas por ACs afines en [FMMN00, HMS03, PY02, PY04]. El objetivo es identificar los ACs permutativos a la derecha no afines. La segunda definición está motivada en el trabajo de Pivato en [Piv05], donde se estudian propiedades de la medida iterada por ACs bipermutativos, los lemas a continuación de la segunda definición permiten relacionarla con la primera.

**Definición 2.1.3.** Denotamos a la familia de ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  por  $PE$ . Para denotar a la subfamilia de ACs sobre alfabetos de cardinalidad  $m \in \{2, \dots\}$ , anotamos  $PE_m$ , y cuando además se considera que los ACs se definen sobre un mismo alfabeto  $\mathcal{A}$ , anotamos  $PE_{\#\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ . Para  $m \in \{2, 3, \dots\}$  y considerando  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow$

$\mathcal{A}$  una biyección, definimos las subclases  $AL_m(\mathcal{A}, \gamma), TR_m(\mathcal{A}, \gamma), ES_m(\mathcal{A}, \gamma) \subset PE_m(\mathcal{A})$  de la siguiente manera.

- $Sm \doteq \{\rho\}$  el grupo simétrico de orden  $m$ , i.e. el grupo de todas las permutaciones de  $m$  símbolos.
- $Sm' \subset Sm$  tal que  $\forall \rho \in Sp'$  existe  $(b, c) \in \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$  tal que cumple

$$\rho(i) = bi + c \quad \forall i \in \mathbb{Z}_m.$$

- $Sm'' \subset Sm$  tal que  $\forall \rho \in Sm''$  existe  $a \in \mathbb{Z}_m^*$  tal que cumple

$$\rho(i) = i + a \quad \forall i \in \mathbb{Z}_m.$$

- Dada una permutación  $\rho \in Sm$ , definimos  $\rho_{\mathcal{A}, \gamma} = (a_0, \dots, a_{m-1})$  para  $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathcal{A}$  tales que  $\rho(i) = \gamma^{-1}(a_i)$ . Definimos  $S(\mathcal{A}, \gamma) \doteq \{\rho_{\mathcal{A}, \gamma}\}$  el grupo de permutaciones en  $\mathcal{A}$ ,  $S'(\mathcal{A}, \gamma) \doteq \{\rho_{\mathcal{A}, \gamma} : \rho \in Sm'\}$ , y  $S''(\mathcal{A}, \gamma) \doteq \{\rho_{\mathcal{A}, \gamma} : \rho \in Sm''\}$
- Definimos  $AL_m(\mathcal{A}, \gamma)$  como la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in PE_m(\mathcal{A})$  tales que para  $M$ , la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , se tiene que existen dos permutaciones  $\rho_{\mathcal{A}, \gamma} \in S''(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\rho'_{\mathcal{A}, \gamma} \in S'(\mathcal{A}, \gamma)$  fijas con  $M_{a,\cdot} = \rho_{\mathcal{A}, \gamma}^a \rho'_{\mathcal{A}, \gamma}$  para cada fila  $a \in \mathcal{A}$ ; donde definimos para  $\rho_{\mathcal{A}, \gamma} \in S(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\rho_{\mathcal{A}, \gamma}^a \doteq \rho''_{\mathcal{A}, \gamma}$  donde  $\rho'' = \rho^{\gamma^{-1}a}$ , la composición  $\rho \circ \dots \circ \rho \gamma^{-1}a$  veces.
- Definimos  $TR_m(\mathcal{A})$  como la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in PE_m(\mathcal{A})$  tales que para  $M$ , la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , se tiene que existe una permutación  $\rho_{\mathcal{A}, \gamma} \in S(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $M_{a,\cdot} = \rho_{\mathcal{A}, \gamma}$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ .
- Definimos  $ES_m(\mathcal{A}, \gamma)$  como la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in PE_m(\mathcal{A}) \cap AL_m(\mathcal{A}, \gamma)^c \cap TR_m(\mathcal{A}, \gamma)^c$ .

Sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$ ,  $S_{\mathcal{A}}$  denotará una conjugación uno-bloque de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  en el mismo, i.e.  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, S_{\mathcal{A}})$  será un AC con regla local de vecindad  $l = r = 0$ , tal que la regla local  $s_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es biyectiva. Para un alfabeto  $\mathcal{A}$  se define la relación de equivalencia  $\sim_{\mathcal{A}}$  sobre el conjunto de ACs sobre el alfabeto  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

$$F \sim_{\mathcal{A}} G \Leftrightarrow \text{existe una conjugación uno-bloque } S \text{ tal que } F = S^{-1} \circ G \circ S.$$

Para cada  $m \in \{2, 3, \dots\}$  y cada alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$  y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección, definimos las clases de equivalencia

$$AL_m(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathcal{A}}, TR_m(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathcal{A}} \text{ y } ES_m(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathcal{A}}.$$

**Lema 2.1.4.** Para  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A}$  un alfabeto con  $\#\mathcal{A} = m$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección, la definición de  $TR_m(\mathcal{A}, \gamma)$  no depende de  $\gamma$ .

**Demostración.** Sea  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A}$  un alfabeto con  $\#\mathcal{A} = m$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección. Luego  $TR_m(\mathcal{A}, \gamma)$  corresponde a la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in PE_m(\mathcal{A})$  tales que en  $M$ , la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , aparece solo una letra en cada columna, i.e.  $\forall a \in \mathcal{A} \exists ! b \in \mathcal{A} M_{\cdot, b} = (a, \dots, a)^T$  donde  $(a, \dots, a)^T$  representa un vector columna donde aparece  $\#\mathcal{A}$  veces la letra  $a$ . Luego la definición es independiente de  $\gamma$ .  $\square$

**Lema 2.1.5.** Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A}$  un alfabeto con  $\#\mathcal{A} = p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección, la definición de  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  no depende de  $\gamma$ .

**Demostración.** Sea  $p = 3$  y  $\mathcal{A}$  un alfabeto con  $\#\mathcal{A} = p$  y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección. Se tiene que  $\#Sp = 6 = 3 \cdot 2 = \#Sp'$ . Luego  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  es la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in PE_p(\mathcal{A})$  tales que  $M$ , la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , es un cuadrado latino, i.e. una matriz donde en cada fila y en cada columna aparecen todas las letras  $a \in \mathcal{A}$ , luego  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  no depende de  $\gamma$ . Como por Lema 2.1.4  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  no depende de  $\gamma$  y se demostró que  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tampoco, entonces de la definición de  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  se concluye el resultado.  $\square$

**Proposición 2.1.6.** Para  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_m$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad, se tiene que  $AL_m(\mathcal{A}, \gamma)$  corresponde a la familia de ACs sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  con regla local dada por  $f(x, y) = ax + by + c$  con  $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$ ,  $c \in \mathbb{Z}_m$ . Además se tiene que  $|AL_m(\mathcal{A}, \gamma)| = m(m-1)^2$ ,  $|TR_m(\mathcal{A}, \gamma)| = m!$  y  $|ES_m(\mathcal{A}, \gamma)| = (m!)^m - m! - m(m-1)^2$ .

**Demostración.** Sea  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_m$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad, denotada por  $Id$ . Dado un AC en  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F) \in AL_m(\mathcal{A}, \gamma)$ , de la definición, para  $M$ , la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ , se tiene que existen dos permutaciones  $\rho_{\mathbb{Z}_m, Id}(i) = i + a$  para  $a \in \mathbb{Z}_m^*$  y  $\rho'_{\mathbb{Z}_m, Id}(i) = bi + c$  para  $(b, c) \in \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_m$ , tales que  $M_{i, \cdot} = \rho_{\mathbb{Z}_m, Id}^i \rho'_{\mathbb{Z}_m, Id}$  para cada fila  $i \in \mathbb{Z}_m$ . Luego, para cada  $i, j \in \mathbb{Z}_m$   $M_{i, j} = \rho_{\mathbb{Z}_m, Id}^i(\rho'_{\mathbb{Z}_m, Id}(j)) = \rho_{\mathbb{Z}_m, Id}^i(bj + c) = ai + bj + c$  para  $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$  y  $c \in \mathbb{Z}_m$ , recordando que  $M$  es tal que para todo  $x, y \in \mathbb{Z}_m$   $f(x, y) = M_{x, y}$  se concluye la primera parte del Lema. Para demostrar las cardinalidades, notar que la cardinalidad de  $ES_m(\mathcal{A}, \gamma)$  se deduce directamente de su definición de la cardinalidad de los otros dos conjuntos. La cardinalidad de  $TR_m(\mathcal{A}, \gamma)$  se deduce de la demostración del Lema 2.1.4, ya que para cada AC en esta familia, se tiene que en la primera fila de su matriz asociada  $M$ , puede aparecer cualquier permutación de  $\mathbb{Z}_m$ , pero una vez escogida ésta, la matriz  $M$  queda únicamente determinada (de hecho todas las filas son iguales). Finalmente, para demostrar la cardinalidad del conjunto  $AL_m(\mathcal{A}, \gamma)$ , notar que como la regla local está dada por  $f(x, y) = ax + by + c$  con  $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$ ,  $c \in \mathbb{Z}_m$ , y cada elección de  $a, b, c$  dá una regla distinta, como hay  $(m-1)$  maneras de escoger  $a$ , el mismo número de maneras de escoger  $b$  y  $m$  maneras de escoger  $c$ , entonces el cardinal es  $m(m-1)^2$ .  $\square$

**Definición 2.1.7.** Para cada  $m \in \{2, 3, \dots\}$  y  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$ , definimos las subclases  $BIP_m(\mathcal{A})$  y  $No-BIP_m(\mathcal{A})$  de la siguiente manera.  $BIP_m(\mathcal{A})$  es la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  en  $PE_m(\mathcal{A})$  tal que la matriz  $M$  asociada al AC es un cuadrado latino, i.e. en cada fila y en cada columna aparecen todas las letras de  $\mathcal{A}$ . Definimos  $No-BIP_m(\mathcal{A}) \doteq PE_m(\mathcal{A}) \setminus BIP_m(\mathcal{A})$ .

Notemos que para cada  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad  $m$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  se tiene que  $TR_m(\mathcal{A}), AL_m(\mathcal{A}, \gamma) \subset BIP_m(\mathcal{A})$ .

**Lema 2.1.8.** Cuando  $p = 3$  y  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad  $p$ ,  $AL_p(\mathcal{A}) = BIP_p(\mathcal{A})$ . Cuando  $m > 3$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathcal{A}$  una biyección,  $TR_m(\mathcal{A}) \cup AL_m(\mathcal{A}, \gamma) \subsetneq BIP_m(\mathcal{A})$ .

**Demostración.** Cuando  $p = 3$  y  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad  $p$ , demostramos en Lema 2.1.5 que la matriz  $M$  asociada al AC es un cuadrado latino, luego la igualdad. En el caso  $m > 3$ , del Lema 2.1.6 se tiene que  $|AL_m(\mathcal{A}, \gamma)| = m(m-1)^2 < m!$  pues como  $(m-3)^2 > 2$ , se tiene que  $m^2 - 5m + 6 > m-1$ , y de esto se deduce que  $(m-2)(m-3) > m-1$  y finalmente que  $m! > m(m-1)^2$ . Como  $|BIP_m(\mathcal{A})| = m!(m-1)!(m-2)! \cdots 1 > 2m! > m(m-1)^2 + m!$  se concluye el resultado.  $\square$

La siguiente propiedad permite caracterizar  $\sim_{\mathbb{Z}_m}$ , cuando  $m \in \{2, 3, \dots\}$ .

**Definición 2.1.9.** Definamos  $M^m \doteq \{M_\rho\}_{\rho \in Sm}$  el conjunto de matrices de permutación, donde para cada  $\rho \in Sm$ ,  $M_\rho$  es su matriz de permutación asociada. Recordar que  $M_\rho$  se obtiene a partir de  $\rho = (x_1, \dots, x_m)$  de la siguiente manera; para  $i = 1, \dots, m$  la columna  $i$  de  $M_\rho$  tiene en todas las coordenadas 0's salvo en la posición  $x_i$  que tiene un 1. Además recordar que dada una matriz  $M$  de  $m \times m$ , entonces  $M \cdot M_\rho$ , para  $\cdot$  la multiplicación matricial, corresponde a la permutación de filas de la matriz  $M$  de acuerdo a  $\rho$ , luego  $M_\rho^T \cdot M$  corresponde a la permutación de columnas de la matriz  $M$  de acuerdo a  $\rho$ . Definamos el conjunto  $MPE_m(\mathbb{Z}_m)$  de matrices asociadas a ACs en  $PE_m(\mathbb{Z}_m)$ . Para cada permutación  $\rho \in Sm$  definimos la función  $C_\rho : MEP_m(\mathbb{Z}_m) \rightarrow MEP_m(\mathbb{Z}_m)$  tal que  $C_\rho(M)$  corresponde a la matriz  $M$  reemplazando los elementos en cada coordenada de acuerdo a la permutación  $\rho$ .

**Proposición 2.1.10.** Para  $m \in \{2, 3, \dots\}$  y  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_m$ , se tiene que para dos ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $PE_m(\mathcal{A})$ , y  $M, M'$  sus respectivas matrices asociadas (recordar que para un AC  $F$  con regla local  $f$ , en la coordenada  $x, y$  de su matriz asociada  $M$  se ve  $f(x, y)$ )

$$F \sim_{\mathbb{Z}_m} F' \Leftrightarrow \exists \rho \in Sm : M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_\rho(M) \cdot M_{\rho^{-1}} = M'. \quad (2.1)$$

**Demostración.** Sea  $m \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_m$ . Deducimos de la definición de  $\sim_{\mathbb{Z}_m}$  que dados dos ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $PE_m(\mathcal{A})$ , con  $f, f'$  sus respectivas reglas locales, y  $M, M'$  sus respectivas matrices asociadas, entonces  $F \sim_{\mathbb{Z}_m} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sm$  tal que para todo  $x, y \in \mathbb{Z}_m$   $\rho^{-1}f(\rho(x), \rho(y)) = f'(x, y)$ . De las notas hechas en la Definición 2.1.9, y considerando

$$\begin{matrix} & \rho_2 \\ \rho_1 & (M) \end{matrix},$$

la matriz  $M$  con filas indexadas por  $\rho_1$  y columnas indexadas por  $\rho_2$ , obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & id & C_\rho(\cdot) & \rho & \\ id & \left( \begin{matrix} M \end{matrix} \right) & \mapsto & \left( \begin{matrix} C_\rho(M) \end{matrix} \right) & \\ & & & \downarrow & \cdot M_{\rho^{-1}} \\ & id & M_{\rho^{-1}}^T \cdot & \rho & \\ id & \left( \begin{matrix} M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_\rho(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \end{matrix} \right) & \leftarrow & id \left( \begin{matrix} C_\rho(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \end{matrix} \right) & \end{array}$$

De lo anterior se deduce el resultado. □

**Corolario 2.1.11.** Para  $p = 3$  y  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ . Se define  $Sp \doteq \{012, 102, 021, 210, 120, 201\}$ . Consideremos el conjunto de matrices de permutación

$$M_p = \{M_{012}, M_{102}, M_{021}, M_{210}, M_{120}, M_{201}\}.$$

Se tiene que para dos ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ ,  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $PE_p(\mathcal{A})$ , y  $M, M'$  sus respectivas matrices asociadas,  $F \sim_{\mathbb{Z}_p} F'$  si y solo si existe una permutación  $xyz \in \{012, 102, 021, 210\}$  tal que  $M_{xyz}^T C(M) M_{xyz} = M'$  o  $(xyz = 120$  y  $M_{201}^T C_{120}(M) M_{201} = M')$  o  $(xyz = 201$  y  $M_{120}^T C_{201}(M) M_{120} = M')$ .

**Demostración.** Basta notar que  $012^{-1} = 012$ ,  $102^{-1} = 102$ ,  $021^{-1} = 021$ ,  $210^{-1} = 210$ ,  $120^{-1} = 201$ ,  $201^{-1} = 120$  y aplicar la Proposición 2.1.10.  $\square$

El lema a continuación es una generalización directa de Proposición 1 en [Wil75].

**Lema 2.1.12.** *Todo AC actuando sobre  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$  para  $p$  primo, está definido por una regla local algebraica (en el sentido que la regla local es un polinomio). El caso  $p$  no primo no es necesariamente cierto.*

**Demostración.** Todo AC tiene asociada una regla local de un cierto diámetro  $k$ , llamando  $h$  a tal regla local,  $h : \mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{Z}_p$ , se demostrará que existe un polinomio  $q \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_k]$ , tal que  $q(x_1, \dots, x_k) = h(x_1, \dots, x_k) \forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}_p^k$ . Se definen los conjuntos  $A_i = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) : h(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = i\}$  para  $i = 1, \dots, p-1$ . Ahora notemos que existe una función  $1_{(\cdot, \cdot)} : \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $1_{(x,y)} = 1_{x=y}$ . Se pueden definir funciones  $f_i : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  que valen 0 en todo punto salvo en  $i \in \mathbb{Z}_p$  donde vale 1,  $f_i(x) = c_i \prod_{j \neq i} (x - j)$  con  $c_i = (\prod_{j \neq i} (i - j))^{-1}$ . Luego se define  $1_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(x) f_i(y)$ . Extendiendo esta demostración, podemos definir  $f_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{j=1}^k \sum_{i=0}^{p-1} f_i(\epsilon_j) f_i(x_j)$ . Finalmente

$$h(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in A_i} i f_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)}(x_1, \dots, x_k).$$

Demostraremos más adelante que el caso  $p$  no primo no es necesariamente cierto.  $\square$

## 2.2. Autómatas celulares positivamente expansivos con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_3$

El objetivo de esta sección es identificar las clases de ACs

$$AL_p(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathbb{Z}_p}, TR_p(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathbb{Z}_p} \text{ y } ES_p(\mathcal{A}, \gamma) / \sim_{\mathbb{Z}_p}$$

para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Recordar que este caso,  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  son los ACs con regla local dada por una función afín, i.e. en que la regla local  $f(x, y) = ax + by + c$  para  $a, b \neq 0$ ,  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs tales que la regla local  $f(x, y) = \rho(y)$  para  $\rho$  una permutación de  $\mathbb{Z}_p$  y  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que no están ni en  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  ni en  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ .

**Definición 2.2.1.** Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Definimos dos conjuntos disjuntos  $ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  cuya unión es  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$ .  $ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  se define como la colección de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tales que la matriz asociada a su regla local  $M$  está definida por dos permutaciones distintas, i.e. existen dos permutaciones distintas  $\rho_1, \rho_2 \in S_p$  y un elemento  $i \in \mathbb{Z}_p$  tal que  $M_{i, \cdot} = \rho_1$  y para todo  $j \neq i$   $M_{j, \cdot} = \rho_2$ . Definimos  $ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma) \doteq ES_p(\mathcal{A}, \gamma) \setminus ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$ .

**Definición 2.2.2.** Definimos cuatro familias de matrices de  $3 \times 3$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_3$ , denotadas por  $TRQ_3, ALQ_3, ESQ_3^0, ESQ_3^1$  de la siguiente manera.

$$TRQ_3 \doteq \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 ALQ_3 &\doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \\
 ESQ_3^0 &\doteq \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}. \\
 ESQ_3^1 &\doteq \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

**Proposición 2.2.3.** *Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Se tiene lo siguiente.*

1. *Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in TRQ_3$ .*
2. *Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in ALQ_3$ .*
3. *Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $ESQ_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in ESQ_3^0$ .*
4. *Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $ESQ_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in ESQ_3^1$ .*

**Demostración.** Sea  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Para demostrar esta propiedad conviene considerar a  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  como el conjunto de ACs en que la matriz asociada a la regla local tiene la misma permutación en cada fila y  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  como el conjunto de ACs en que la matriz asociada a la regla local es un cuadrado latino. Consideremos el conjunto  $L$  de matrices de  $3 \times 3$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_3$  tal que cada fila es una permutación, i.e.  $L = \{M : \exists \rho_0, \rho_1, \rho_2 \in Sp, M_{i,\cdot} = \rho_i\}$ . Denotemos la operación  $M \mapsto M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_\rho(M) \cdot M_{\rho^{-1}}$  de Proposición 2.1.10 por  $C(\rho, M)$ , y definamos  $L - C(\rho, M) \doteq L \setminus \{C(\rho, M)\}$ . Aplicamos el siguiente algoritmo, que tiene por entrada  $L$ , el conjunto  $PE_p(\mathcal{A})$ , y por salidas dos conjuntos  $TRQ, ALQ \subset L$  y  $L \setminus (TRQ \cup ALQ)$ , y

```

En el input L: %L se representa por una lista
Definir TRQ=[], ALQ=[] % Listas vacias
    Mientras exista M en L tal que las tres filas sean igual:
        Escoger M en L tal que las tres filas sean igual
        Agregar M a la lista TRQ
        Para cada rho en Sp
            Definir L = L-C(rho, M)
    Mientras existe M en L tal que M sea cuadrado latino:
        Escoger M en L tal que M sea cuadrado latino
        Agregar M a la lista ALQ
        Para cada rho en Sp
            Definir L = L-C(rho, M)
Retornar L, TRQ, ALQ

```

El algoritmo anterior permite obtener la familia de ACs  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$ . Consideremos el siguiente algoritmo con entrada  $L$ , la salida del algoritmo anterior, y con salida dos conjuntos  $ESQ0, ESQ1 \subset L$ .

```

En el input L: %L se representa por una lista
Definir ESQ0=[], ESQ1=[] % Listas vacias
    Mientras exista M en L tal con dos filas iguales:
        Escoger M en L con dos filas iguales
        Agregar M a la lista ESQ0
        Para cada rho en Sp
            Definir L = L-C(rho, M)
    Mientras L sea distinta de []:
        Agregar M a la lista ESQ1
        Para cada rho en Sp
            Definir L = L-C(rho, M)
Retornar ESQ0, ESQ1

```

Podemos considerar  $L$  dado por una lista ordenada  $L = [L_1, L_2, \dots]$ . Y en cada uno de los algoritmos anteriores escoger la matriz  $M = L_i$  con  $i$  el menor índice tal que  $L_i$  cumple la hipótesis solicitada para  $M$  en el algoritmo respectivo. De la Proposición 2.1.10, considerando el comentario anterior, escogiendo un orden específico para  $L$ , y definiendo  $TRQ_3 = TRQ$ ,  $ALQ_3 = ALQ$ ,  $ESQ_3^0 = ESQ0$  y  $ESQ_3^1 = ESQ1$ , se obtiene el resultado.  $\square$

## 2.3. Una familia de autómatas celulares no positivamente expansiva con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_3$

Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Consideremos las familias de ACs  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$ . Recordar que este caso,  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  son los ACs con regla local dada por una función afín, i.e. en que la regla local  $f(x, y) = ax + by + c$  para  $a, b \neq 0$ ,  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs tales que la regla local  $f(x, y) = \rho(y)$  para  $\rho$  una permutación de  $\mathbb{Z}_p$  y  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que no están ni en  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  ni en  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ .  $ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs en  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tales que su matriz  $M$  asociada a la regla local tiene dos permutaciones distintas en las filas, y  $ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  es el conjunto de ACs en  $ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tales que en su matriz  $M$  asociada a la regla local, cada fila es una permutación distinta. Definiremos cuatro familias  $\sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\sigma^{-1}ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $\sigma^{-1}ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  de ACs no positivamente expansivos con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathbb{Z}_3$ . Estas familias de ACs serán estudiadas en el capítulo siguiente.

**Definición 2.3.1.** Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Definimos la familia  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  de los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con regla local  $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$  tales que el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  con regla local  $f'(x, y) = f(y, x)$  pertenece a  $PE_p(\mathcal{A})$ . De manera análoga definimos  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\sigma^{-1}ES_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$ ,  $\sigma^{-1}ES_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  y  $\sigma^{-1}ES_p(\mathcal{A}, \gamma)$ .

**Definición 2.3.2.** Definimos cuatro familias de matrices de  $3 \times 3$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_3$  de la siguiente manera.  $\sigma^{-1}TRQ_3 \doteq \{M^T : M \in TRQ_3\}$ ,  $\sigma^{-1}ALQ_3 \doteq \{M^T : M \in ALQ_3\}$ ,  $\sigma^{-1}ESQ_3^0 \doteq \{M^T : M \in ESQ_3^0\}$  y  $\sigma^{-1}ESQ_3^1 \doteq \{M^T : M \in ESQ_3^1\}$ .

**Proposición 2.3.3.** Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Se tiene lo siguiente.

1. Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}TRQ_3$ .
2. Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}ALQ_3$ .
3. Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}ESQ_p^0(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}ESQ_3^0$ .
4. Para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}ESQ_p^1(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}ESQ_3^1$ .

**Demostración.** Sea  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Basta demostrar que para un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$  si y solo si existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}TRQ_3$ , ya que las otras demostraciones son análogas.

Supongamos un  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  con regla local asociada a una matriz  $M$ , y un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ , con matriz asociada  $M'$ , tal que  $F \sim_{\mathcal{A}} F'$ . Aplicando Corolario 2.1.2, obtenemos que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} = M'$ . Como  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F') \in \sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$ , entonces la regla local  $f'$  del AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  es tal que existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F'')$  en  $TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  con regla local  $f''$  y  $f'(x, y) = f''(y, x)$ . Luego para  $M''$  la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F'')$  y  $M'$  la matriz asociada al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  se tiene que  $(M'')^T = M'$ . Usando Propiedad 2.2.3, lo anterior demuestra que existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}TRQ_3$ . Para el recíproco, supongamos que tenemos un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $\sigma^{-1}TR_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que existe una permutación  $\rho \in Sp$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} \in \sigma^{-1}TRQ_3$ . Luego existe una matriz  $M' \in \sigma^{-1}TRQ_3$  tal que  $M_{\rho^{-1}}^T \cdot C_{\rho}(M) \cdot M_{\rho^{-1}} = M'$ , luego para  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  el AC asociado a la matriz  $M'$  se tiene que pertenece a  $\sigma^{-1}TRQ_3$ , finalmente aplicando la condición suficiente en Corolario 2.1.2 se concluye que  $F \sim_{\mathbb{Z}_p} F'$ .  $\square$

Recordemos que la familia  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$  corresponde a los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con regla local  $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$  tales que el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  con regla local  $f'(x, y) = f(y, x)$  pertenece a  $PE_p(\mathcal{A})$ .

**Lema 2.3.4.** *Para  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Todo AC en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A}) \setminus \sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  no es positivamente expansivo.*

**Demostración.** Sea  $p = 3$ ,  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ , y  $\gamma : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathcal{A}$  la identidad. Dado un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A}) \setminus \sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  con matriz asociada  $M$ , de la definición de los elementos del conjunto  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A})$ , debe existir una matriz  $M'$  asociada a un AC en  $PE_p(\mathcal{A}) \setminus AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tal que  $M^T = M'$ . Como las matrices asociadas a los ACs  $AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  son las matrices que son cuadrado latino (con todos elemento de  $\mathcal{A}$  en cada fila y cada columna), entonces las matrices asociadas a los ACs en  $PE_p(\mathcal{A}) \setminus AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  tienen necesariamente dos letras iguales en alguna columna, luego su traspuesta tiene necesariamente dos letras iguales en una fila, i.e. no todas las filas son permutaciones de  $Sp$ . Del Corolario 2.1.2 se concluye que como los ACs en  $\sigma^{-1}PE_p(\mathcal{A}) \setminus \sigma^{-1}AL_p(\mathcal{A}, \gamma)$  no son permutativos a la derecha y la cardinalidad del alfabeto es prima, entonces no pueden ser positivamente expansivos.  $\square$

## 2.4. Descripción de una familia de autómatas celulares permutativos a la derecha con vecindad $(l, r) = (0, 1)$ y alfabeto $\mathbb{Z}_m$ para $m \in \{2, 3, \dots\}$

Se define una familia de ACs permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathbb{Z}_m$  para  $m \in \{2, 3, \dots\}$ . Esta familia será llama *RANDOMES*. En el Capítulo 4 se verá que ACs en esta familia parecen randomizar asintóticamente una medida inicial de Bernoulli. Recordar que la matriz  $M$  asociada a la regla local  $f$  de un AC es tal que  $M_{x,y} = f(x, y)$ .

**Definición 2.4.1.** La familia de ACs *RANDOMES*  $\doteq \{(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m)\}_{m \geq 2}$  es la colección de ACs  $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m)$ , tales que la regla local está asociada a una matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & m-1 \\ 1 & 2 & \dots & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposición 2.4.2.** *Para  $F_m \in \text{RANDOMES}$  se tienen los siguientes casos:*

1. si  $m = 2 \Rightarrow F = id + \sigma$  es lineal con regla local  $f(x, y) = x + y$ ;
2. si  $m > 2$  y par, entonces el AC no es algebraico en el sentido que no existe un polinomio  $p \in \mathbb{Z}_m[x, y]$  tal que  $p(x, y)$  sea la regla local;
3. si  $m > 2$  y primo, entonces el AC es algebraico en el sentido que tal polinomio existe (no afín).

**Demostración.** Para cada caso se tiene:

1. Se vé directamente en la matriz  $M$ .
2. Para  $m$  par fijo, supongamos existe tal polinomio  $p(x, y)$ . Notar que el polinomio  $p'(x, y) = p(x, 0) + y$  define la misma regla local, pues  $p'(x, y) = y$  si  $x \neq m - 1$  y  $p'(x, y) = y + 1$  si  $x = m - 1$ . Luego, basta demostrar que no existe un polinomio  $q$  en  $\mathbb{Z}_m[x]$  tal que  $q(x) = 0$  si  $x \neq m - 1$  y  $q(x) = 1$  si  $x = m - 1$ . Notar que tal polinomio  $q$ , no puede escribirse de la forma  $x^{a_0}(x - 1)^{a_1} \dots (x - (m - 2))^{a_{m-2}}$  para  $a_i \in \{1, 2, \dots\} \forall i$ , ya que evaluando en  $m - 1$  queda  $c_a(m - 1)!$  para  $c_a \in \mathbb{Z}_m$  constante, pero  $(m - 1)! \equiv_m 0$  si  $m > 4$ , luego la contradicción. Para el caso  $m = 4$ ,  $q(3) = c_a 3! = c_a 2 \neq_m 1$ .

Para demostrar ésto notemos que  $q$  debe escribirse  $q(x) = \sum_{i=0}^{\phi(m)} a_i x^i$ , con  $\phi$  la función de Euler. Como  $q(0) = 0$ , entonces  $a_0 \equiv_m 0$ , luego encontrar  $q$  se reduce a encontrar coeficientes  $(a_1, \dots, a_{\phi(m)})$  tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{\phi(m)-1} & 2^{\phi(m)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ m-1 & (m-1)^2 & \dots & (m-1)^{\phi(m)-1} & (m-1)^{\phi(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\phi(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $(m - 1)^2 = 1$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{\phi(m)-1} & 2^{\phi(m)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ m-1 & 1 & \dots & m-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\phi(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Restándole a la última fila la primera, se obtiene,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^{\phi(m)-1} & 2^{\phi(m)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ m-2 & 0 & \dots & m-2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\phi(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pero  $(m - 2) \sum_{i=1}^{\frac{\phi(m)}{2}} a_{2i-1} = 1$ . Llamando  $x = \sum_{i=1}^{\frac{\phi(m)}{2}} a_{2i-1}$  (se usa que  $\phi(m)$  es par para  $m > 3$ ), implica que existe  $k$  tal que  $(m - 2)x = mk + 1$ , pero el lado izquierdo es par y el derecho impar, luego la contradicción.

3. Para  $F_m$  se puede considerar la regla local

$$p(x, y) = y + ((m - 1)!)^{-1}(x - (m - 2))(x - (m - 3)) \cdots (x - 1)x.$$

En particular para el caso  $m = 3$ , se tiene que  $p(x, y) = y + 2!x(x - 1) = y + 2x^2 - 2x = x + y + 2x^2$ .

□

La proposición anterior demuestra que en el caso  $p$  no primo la regla local a veces no puede ser representada mediante un polinomio, que finaliza la demostración de Lema 2.1.12.

## 2.5. Generalización de familias anteriores a cualquier alfabeto $\mathcal{A}$

La definición de la familia de ACs no positivamente expansiva con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathbb{Z}_3$  dada en Sección 2.3 y la definición de la familia de ACs permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathbb{Z}_m$  para  $m \in \{2, 3, \dots\}$  dada en Sección 2.4 pueden generalizarse a cualquier alfabeto.

**Definición 2.5.1.** Sea una matriz cuadrada  $M$  de  $m \times m$  a coeficientes en un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$ . Llamamos a una matriz  $N$  submatriz de  $M$ , si existen dos conjuntos  $\mathcal{A}_{N\text{fila}} \subset \mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_{N\text{columna}} \subset \mathcal{A}$  tales que  $N = (M_{a,b})_{a \in \mathcal{A}_{N\text{fila}}, b \in \mathcal{A}_{N\text{columna}}}$ . Decimos que  $M$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa” si existe una submatriz  $N$  cuadrada de  $p \times p$  para  $p$  un primo, tal que  $\mathcal{A}_N \doteq \mathcal{A}_{N\text{fila}} = \mathcal{A}_{N\text{columna}}$ ,  $\{N_{a,b}\}_{a,b \in \mathcal{A}_N} = \mathcal{A}_N$  y la matriz  $N$  no es cuadrado latino.

**Lema 2.5.2.** Para  $p$  un primo y  $\#\mathcal{A} = p$ . Toda matriz  $M$  asociada a la regla local de un AC en  $No - BIP_p(\mathcal{A})$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa”.

**Demostración.** Sea  $p$  un primo,  $\#\mathcal{A} = p$  y  $M$  una matriz asociada a la regla local de un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $No - BIP_p(\mathcal{A})$ .  $M$  no es un cuadrado latino y  $M$  es de  $p \times p$ . Como  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es permutativo a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , entonces de Proposición 2.1.1 se concluye que en cada fila de  $M$  aparecen todos los elementos de  $\mathcal{A}$ , pero como no es cuadrado latino, necesariamente tiene que existir cuatro letras  $c, a_1, a_2, b \in \mathcal{A}_N$  con  $a_1 \neq a_2$  tales que  $N_{a_1,b} = N_{a_2,b} = c$ . Considerando  $N = M$  se deduce que  $M$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa”. □

**Lema 2.5.3.** Dado un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$  y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC positivamente expansivo en  $No - BIP_m(\mathcal{A})$  tal que su matriz asociada a la regla local  $M$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa”. Entonces el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  con matriz asociada  $M^T$  no es positivamente expansivo.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$  un alfabeto,  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC positivamente expansivo en  $No - BIP_m(\mathcal{A})$  tal que su matriz asociada a la regla local  $M$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa” para una submatriz  $N$ . Además sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  el AC con matriz asociada a la regla local igual a  $M' \doteq M^T$ . Consideremos la submatriz  $N' \doteq N^T$  de  $N'$ . Como el AC es  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC positivamente expansivo, entonces la

matriz  $N$  tiene en cada fila una permutación de  $\mathcal{A}_N$ , ya que si no, el AC  $(\mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}, F|_{\mathcal{A}_N})$  para  $F|_{\mathcal{A}_N}$  la restricción de  $F$  a  $\mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}$  con regla local asociada a la matriz  $N$  no es positivamente expansivo ya que por Proposición 2.1.1 sería un AC sobre un alfabeto de cardinalidad prima no permutativo a la derecha, luego el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  no podría ser positivamente expansivo, ya que como  $(\mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}, F|_{\mathcal{A}_N})$  no es positivamente expansivo, entonces no existe una cota uniforme  $N$  tal que para  $x \neq y \in \mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}$   $F|_{\mathcal{A}_N}^n(x)_{[0,N]} \neq F|_{\mathcal{A}_N}^n(y)_{[0,N]}$  para  $n \in \mathbb{N}^*$ , luego no existe una cota uniforme  $N$  tal que para  $x \neq y \in \mathcal{A}_N^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$   $F_{[0,N]}^n(x) \neq F_{[0,N]}^n(y)$  para  $n \in \mathbb{N}^*$ , y entonces el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  no sería positivamente expansivo lo que es una contradicción. Luego, en cada fila de la matriz  $N$  aparece una permutación de  $\mathcal{A}_N$ , como no es cuadrado latino, pero aparecen solo letras en  $\mathcal{A}_N$ , entonces deben existir cuatro letras  $c, a_1, a_2, b \in \mathcal{A}_N$  con  $a_1 \neq a_2$  tales que  $N_{a_1,b} = N_{a_2,b} = c$ , luego en la matriz  $N^T$ ,  $N_{b,a_1}^T = N_{b,a_2}^T = c$  y entonces el AC  $(\mathcal{A}_{N^T}^{\mathbb{N}}, F'|_{\mathcal{A}_N})$  para  $F'|_{\mathcal{A}_N}$  la restricción de  $F'$  a  $\mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}$  con regla local asociada a la matriz  $N^T$  no es positivamente expansivo. Para demostrar esto último se usa un argumento igual al usado anteriormente para probar que  $(\mathcal{A}_N^{\mathbb{N}}, F|_{\mathcal{A}_N})$  tiene que ser positivamente expansivo.  $\square$

Finalmente, en base a los lemas demostrados, la familia natural de ACs que generaliza a cualquier alfabeto las familias dadas en las Secciones 2.3 y 2.4 es la siguiente.

**Definición 2.5.4.** Definimos una familia de ACs no positivamente expansivos con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $m$ , dada por los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $No-BIP_m(\mathcal{A})$  tales que su matriz asociada  $M$  cumple la condición de “submatriz prima no bipermutativa” y el AC asociado a la matriz  $M' = M^T$  es positivamente expansivo.

**Lema 2.5.5.** Para un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima  $p$ , todo satisfaciendo la Definición 2.5.4 es epiyectivo.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad prima  $p$ , y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC cumpliendo Definición 2.5.4. El AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es epiyectivo, de hecho considerando su extensión natural a  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , de la Definición 2.5.4, se tiene que el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma \circ F)$  es positivamente expansivo, y como los ACs positivamente expansivos son epiyectivos (ver [BM97]) y el shift  $\sigma$  es un homeomorfismo en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , entonces  $\sigma^{-1}$  es epiyección y el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma^{-1} \circ \sigma \circ F) = (\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  es epiyectivo, como la regla local de  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  tiene vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , entonces la restricción natural de este AC es  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  y se preserva la epiyectividad.  $\square$

Los ACs en la familia definida son epiyectivos, pero no son positivamente expansivos, gracias al Lema 2.5.3. Estudiaremos otras propiedades dinámicas de esta familia en el capítulo siguiente.

Veamos algunos ejemplos de ACs cumpliendo la definición anterior.

### Ejemplo 2.5.6.

1. El shift  $\sigma$  sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , para  $\mathcal{A}$  un alfabeto cualquiera.
2. Para  $m = 2, \dots$ , los ACs  $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m)$  con matriz asociada  $M$  tal que  $M^T = M'$  para  $M'$  la matriz asociada al AC  $(\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}, F_m) \in \text{RANDOMES}$ .
3. Todo AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  asociado a una matriz  $M \in \sigma^{-1}ESQ_3^0 \cup \sigma^{-1}ESQ_3^1$ .

4. En el alfabeto  $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$  el AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  asociado a la matriz  $M$  con submatriz  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} A & A & B \\ B & B & C \\ C & C & A \end{pmatrix}.$$

5. En el alfabeto  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$  el AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  asociado a la matriz  $M$  con submatriz  $M$ .

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A & A & B \\ B & B & B & B & C \\ C & C & C & C & D \\ D & D & D & D & E \\ E & E & E & E & A \end{pmatrix}.$$

6. En el alfabeto  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F\}$  el AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  asociado a la matriz  $M$  con submatriz  $N$ .

$$M = \begin{pmatrix} A & A & F & E & F & F \\ B & B & B & C & A & B \\ C & C & C & B & B & A \\ D & D & D & D & C & C \\ E & F & E & A & D & E \\ F & E & A & F & E & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} B & B & C \\ C & C & B \\ D & D & D \end{pmatrix}.$$

7. En el alfabeto  $\mathcal{A} = \{A, B, C, E\}$  el AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  asociado a la matriz  $M$  con submatriz  $N$ .

$$M = \begin{pmatrix} A & A & A & B \\ B & B & B & C \\ C & C & C & E \\ E & E & E & A \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} A & A & A \\ B & B & B \\ C & C & C \end{pmatrix}.$$

Dado dos conjuntos finitos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , definimos  $\alpha_1 \vee \alpha_2 \doteq \{A \cap B : A \in \alpha_1, B \in \alpha_2\}$ .

**Lema 2.5.7.** *Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC que satisface la Definición 2.5.4 y además su matriz asociada  $M$  es tal que en cada fila aparecen al menos dos letras distintas. Entonces para la partición  $\alpha = \{[a^1]_0\}_{a^1 \in \mathcal{A}}$  se tiene que  $\alpha \vee F^{-1}\alpha = \{[a, b]_0 : a, b \in \mathcal{A}\}$ . Sin embargo, lo anterior no es suficiente para demostrar que el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  no tiene palabras bloqueantes.*

**Demostración.** Consideremos la partición  $\alpha = \{[a^1]_0\}_{a^1 \in \mathcal{A}}$ . Definamos el conjunto de cilindros de largo 2 con primera coordenada en 0  $\{[a_1^2, a_2^2]_0\}_{(a_1^2, a_2^2) \in \mathcal{A}^2}$ , y así para  $n \in \{3, \dots\}$  definimos  $\{[a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n]_0\}_{(a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n) \in \mathcal{A}^n}$  el conjunto de cilindros de largo  $n$  con primera coordenada en 0. Para cada  $a^1 \in \mathcal{A}$  tenemos que

$$F^{-1}([a^1]_0) = \{[b_1, a^1(b_1)]_0, [b_2, a^1(b_2)]_0, \dots, [b_n, a^1(b_n)]_0\},$$

donde  $b_i, a^1(b_i) \in \mathcal{A}$  son tales que  $a^1(b_i) \neq a^1(b_j)$  si  $i \neq j$  y ya que en cada fila de  $M$  aparecen al menos dos letras distintas se tiene que existen  $i_1, i_2$  tales que  $b_{i_1} \neq b_{i_2}$ , entonces para todo  $a \in \mathcal{A}$   $F^{-1}([a^1]_0) \neq [a]_0$ .

$$\begin{aligned}
& \alpha \vee F^{-1}\alpha = \alpha \vee \{F^{-1}([a^1]_0) \mid a^1 \in \mathcal{A}\} \\
& = \{[a]_0 \cap \{[b_1, a^1(b_1)]_0, [b_2, a^1(b_2)]_0, \dots, [b_n, a^1(b_n)]_0\} \mid a \in \mathcal{A}, F(b_i, a^1(b_i)) = F(b_j, a^1(b_j)) \forall i, j\} \\
& = \bigcup_{(F(b_i, a^1(b_i))=F(b_j, a^1(b_j)) \forall i, j)} \bigcup_{a \in \mathcal{A}} [a]_0 \cap \{[b_1, a^1(b_1)]_0, [b_2, a^1(b_2)]_0, \dots, [b_n, a^1(b_n)]_0\} \\
& = \bigcup_{F(b_i, a^1(b_i))=F(b_j, a^1(b_j)) \forall i, j} \{[b_1, a^1(b_1)]_0, [b_2, a^1(b_2)]_0, \dots, [b_n, a^1(b_n)]_0\} = \{[a, b]_0 : a, b \in \mathcal{A}\}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que  $\alpha \vee F^{-1}\alpha = \{[a, b]_0 : a, b \in \mathcal{A}\}$ . Esto no es suficiente para demostrar que para todo  $N \in \mathbb{N}^*$   $\bigvee_{n=0}^{N-1} F^{-n}\alpha = \{[a_1, \dots, a_N]_0 : a_i \in \mathcal{A}\}$ . Por ejemplo, considerar el AC asociado a la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\square$

### El grafo de preimagen

Definiremos un grafo asociado a cada AC en la familia de ACs que cumplen con la Definición 2.5.4. Motivaremos la definición con un ejemplo.

**Ejemplo 2.5.8.** Consideremos el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  asociado a la matriz

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \sigma^{-1}ESQ_3^0.$$

Sea  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  el AC asociado a la matriz  $M = M'^T$ . Supongamos se desea determinar  $F^{-1}([0]_0)$ ; entonces en la matriz  $M$  buscamos en cuales coordenadas se ve un 0, como  $M_{0,0} = M_{1,0} = M_{2,2} = 0$ , podemos determinar que  $F^{-1}([0]_0) = \{[0, 0]_0, [1, 0]_0, [2, 2]_0, \}$ . Anotemos lo anterior por

$$\begin{array}{c}
0 \ 0 \\
1 \ 0 \\
2 \ 2 \\
0
\end{array}$$

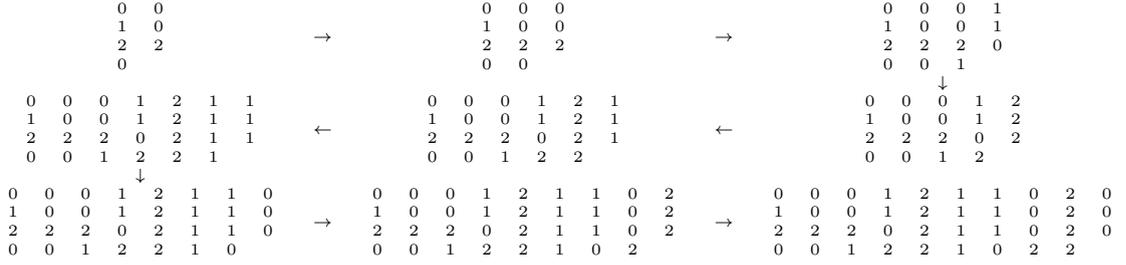
Supongamos ahora que queremos determinar  $F^{-1}([0, 0]_0)$ . Veremos que para determinar este conjunto nos sirve conocer  $F^{-1}([0]_0)$ . Del hecho que el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  es epiyectivo (ver Lema 2.5.5) sabemos que encontrar 3 preimagenes es equivalente a encontrarlas todas. Como  $F^{-1}([0]_0) = \{[0, 0]_0, [1, 0]_0, [2, 2]_0\}$  determina todas las preimagenes de  $[0]_0$ , entonces las preimagenes de  $[0, 0]_0$  deben tener prefijo en el conjunto  $F^{-1}([0]_0)$ . Entonces el problema se reduce a encontrar  $a_1, a_2, a_3$  tales que  $[0, a_i]_0, [0, a_i]_0, [2, a_i]_0 \in F^{-1}([0]_0)$ . En este caso encontramos que  $[0, 0]_0, [0, 0]_0, [2, 2]_0 \in F^{-1}([0]_0)$ , luego

$$F^{-1}([0]_0) = \{[0, 0, 0]_0, [1, 0, 0]_0, [2, 2, 2]_0\}.$$

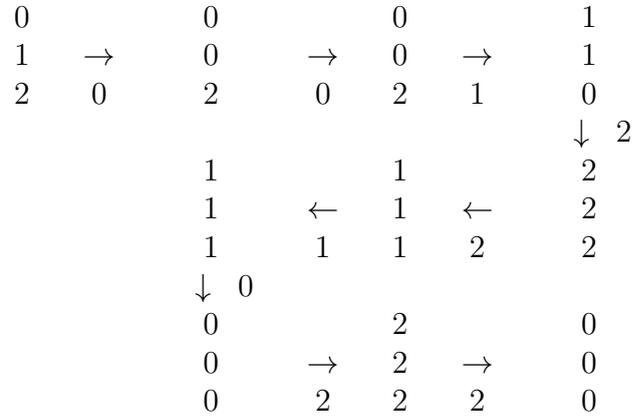
Anotemos lo anterior por

$$\begin{array}{c}
0 \ 0 \ 0 \\
1 \ 0 \ 0 \\
2 \ 2 \ 2 \\
0 \ 0
\end{array}$$

Así podemos continuar con este proceso. A continuación se muestra el proceso de encontrar las preimágenes de los cilindros  $[0]_0$ ,  $[0, 0]_0$ ,  $[0, 0, 1]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2, 2]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2, 2, 1]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2, 2, 1, 0]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 2]_0$ ,  $[0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 2, 2]_0$ .



Notemos que lo anterior puede describirse de la siguiente manera.



El diagrama motiva ver a los vectores  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  como nodos de un grafo, y considerar una transición por  $a \in \mathbb{Z}_p$  del nodo  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$  al nodo  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$  si  $M_{x_1, x_2} = M_{y_1, y_2} = M_{z_1, z_2} = a$ .

Como hay una cantidad finita de vectores de  $3 \times 3$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_3$  y cada palabra tiene 3 preimágenes, puede construirse un grafo asociado. Mostramos el grafo encontrado en Figura 2.1.

Veamos un ejemplo de uso de este grafo. Para encontrar el conjunto preimagen de  $[1, 0, 1, 2]_0$  basta comenzar en  $(0, 1, 2)^T$  y pegar los vértices visitado al leer en los arcos la palabra 1, 0, 1, 2. Los vértices visitados son  $(0, 1, 2)^T$ ,  $(1, 1, 0)^T$ ,  $(0, 0, 0)^T$ ,  $(1, 1, 1)^T$ ,  $(2, 2, 2)^T$ . Luego  $F^{-1}([1, 0, 1, 2]_0) = \{[0, 1, 0, 1, 2]_0, [1, 1, 0, 1, 2]_0, [2, 0, 0, 1, 2]_0\}$ . Otros ejemplos son:

1.  $F^{-1}([0, 0, 0]_0) = \{[0, 0, 0, 0]_0, [1, 0, 0, 0]_0, [2, 0, 0, 2]_0\}$ .
2.  $F^{-1}([0, 0, 0, 2]_0) = \{[0, 0, 0, 0, 2]_0, [1, 0, 0, 0, 2]_0, [2, 0, 0, 2, 1]_0\}$ .
3.  $F^{-1}([0, 0, 0, 2, 2]_0) = \{[0, 0, 0, 0, 2, 1]_0, [1, 0, 0, 0, 2, 1]_0, [2, 0, 0, 2, 1, 2]_0\}$ .
4.  $F^{-1}([0, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 2]_0) = \{[0, 0, 0, 0, 2, 1, 2, 2, 0, 1]_0, [1, 0, 0, 0, 2, 1, 2, 2, 0, 1]_0, [2, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 1]_0\}$ .

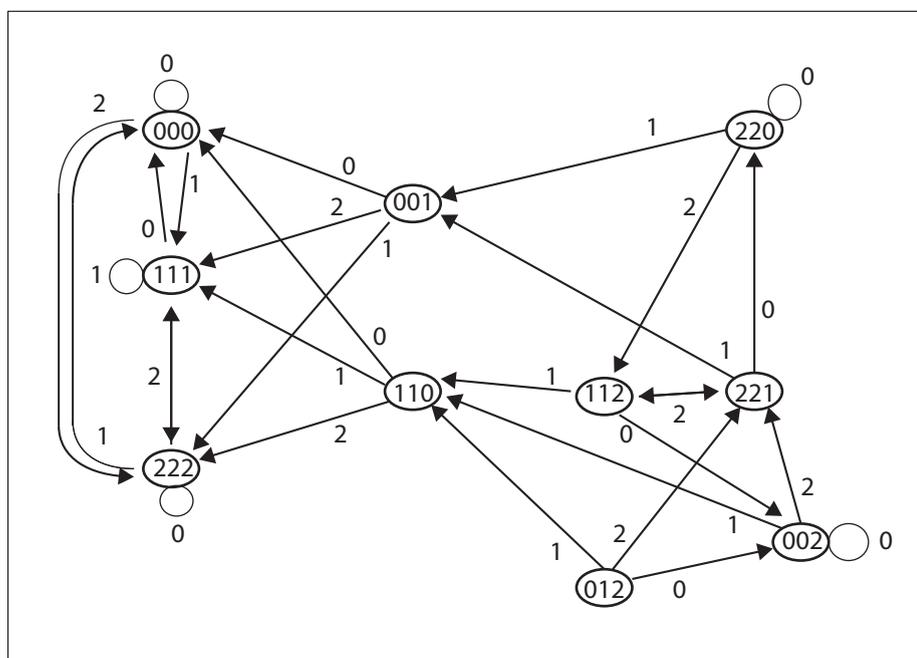


Figura 2.1: Grafo asociado al AC con matriz asociada  $M = M(012, 012, 120)$ .

Al AC original  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  le podemos asociar el mismo grafo de preimagen, pero que lee al revés. Vemos los siguientes ejemplos.

1.  $F'^{-1}([0, 0, 0]_0) = \{[0, 0, 0, 0]_0, [0, 0, 0, 1]_0, [2, 0, 0, 2]_0\}$ .
2.  $F'^{-1}([0, 0, 0, 2]_0) = \{[2, 0, 0, 0, 0, 0]_0, [2, 0, 0, 0, 1]_0, [1, 2, 0, 0, 2]_0\}$ .
3.  $F'^{-1}([0, 0, 0, 2, 2]_0) = \{[1, 2, 0, 0, 0, 0]_0, [1, 2, 0, 0, 0, 1]_0, [2, 1, 2, 0, 0, 2]_0\}$ .
4.  $F'^{-1}([0, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 1, 2]_0) = \{[1, 0, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 0]_0, [1, 0, 2, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 1]_0, [1, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 0, 0, 2]_0\}$ .

**Ejemplo 2.5.9.** Consideremos el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  asociado a la matriz

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \sigma^{-1}ESQ_3^0.$$

Sea  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  el AC asociado a la matriz  $M = (M')^T$ . El grafo asociado a los ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  y  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  es el siguiente. De cada nodo tienen que salir arcos con 0, 1 y 2, en la figura hay nodos en que salen solamente arcos con dos números distintos, en estos casos es debido a que el arco que no aparece es un arco que apunta hacia el mismo nodo, i.e. un loop hacia el mismo vértice con el número que no aparece.

Algunos ejemplos de su uso para encontrar preimagenes de los ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  y  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$ .

1.  $F^{-1}([0, 1, 2]_0) = \{[0, 0, 1, 1]_0, [1, 0, 1, 1]_0, [2, 0, 1, 1]_0\}$ .
2.  $F^{-1}([0, 1, 2, 0, 0, 2]_0) = \{[0, 0, 1, 1, 0, 0, 2]_0, [1, 0, 1, 1, 0, 0, 2]_0, [2, 0, 1, 1, 0, 0, 2]_0\}$ .
3.  $F^{-1}([0, 1, 2]_0) = \{[0, 2, 2, 0]_0, [0, 2, 2, 1]_0, [0, 1, 1, 2]_0\}$ .

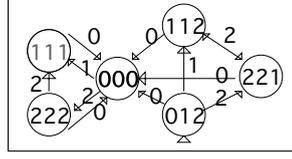


Figura 2.2: Grafo asociado al AC con matriz asociada  $M = M(012, 012, 021)$ .

$$4. F'^{-1}([0, 2, 1, 1]_0) = \{[0, 2, 1, 1, 0]_0, [0, 2, 1, 1, 1]_0, [0, 1, 2, 2, 2]_0\}.$$

**Ejemplo 2.5.10.** Consideremos el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  asociado a la matriz

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \sigma^{-1}ESQ_3^1.$$

Sea  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  el AC asociado a la matriz  $M = (M')^T$ . El grafo asociado a los ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  y  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  es el siguiente. De cada nodo tienen que salir arcos con 0, 1 y 2, en la figura hay nodos en que salen solamente arcos con dos números distintos, en estos casos es debido a que el arco que no aparece es un arco que apunta hacia el mismo nodo, i.e. un loop hacia el mismo vértice con el número que no aparece.

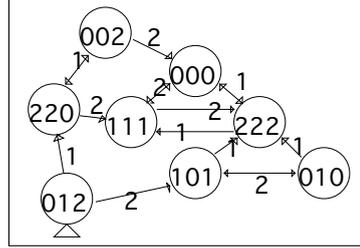


Figura 2.3: Grafo asociado al AC con matriz asociada  $M = M(021, 201, 120)$ .

Demostraremos que siempre podemos construir un grafo como los mostrados en los ejemplos. Estudiaremos propiedades dinámicas de un AC a partir de propiedades del grafo asociado. La definición formal del grafo de preimágenes no tiene mucho interés. De hecho es mejor tomar por definición la construcción en la demostración del siguiente lema.

**Lema 2.5.11.** *A cada AC en la familia de ACs no positivamente expansivos con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima, dada por los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  tales que para su matriz asociada a la regla local  $M'$  existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  positivamente expansivo asociado a una matriz  $M = (M')^T$  le podemos asociar un grafo de preimágenes. El mismo grafo se le puede asociar al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ .*

**Demostración.** Dado un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima, un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  tal que para su matriz asociada a la regla local  $M'$  existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  positivamente expansivo asociado a una matriz  $M = (M')^T$ . En cada fila de la matriz  $M$  aparece una permutación de  $\mathcal{A}$  por Corolario 2.1.2. Construiremos el grafo asociado al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ . Dado que el grupo de permutaciones es independiente del alfabeto  $\mathcal{A}$  y la matriz  $M$  se puede definir mediante permutaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el alfabeto es  $\mathbb{Z}_p$ . Para construir el grafo aplicaremos el siguiente algoritmo.

```

En el input M:
Definir r=(0,1,2,...,p-1) % denominado nodo raiz
Definir E=[], V=[r]
    Mientras exista v en V tal que no existen arcos saliendo de v:
        i=0
        Mientras i<p :
            j=0
            Mientras j<p
                Buscamos w(j) en Z_p tal que M(v(j),w(j))=i
                j=j+1
            Definimos w y lo agregamos a V
            Definimos e(v,w,i) y lo agregamos a E
            i=i+1
Retornar E, V

```

Sea  $r = (0, 1, \dots, p-1)^T$  el nodo raíz. Como el alfabeto es de cardinalidad prima y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es positivamente expansivo, entonces en cada fila de la matriz  $M$  aparece una permutación, luego la primera iteración del algoritmo puede hacerse, ya para cada  $i \in \mathbb{Z}_p$ ,  $j \in \mathbb{Z}_p$  existe un único  $w(j) \in \mathbb{Z}_p$  para el cual  $M_{j,w(j)} = i$ , luego existe el vértice  $w^i$  tal que  $w_j^i = w(j)$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_p$ , como lo anterior puede hacerse para todo  $i$ , entonces pueden construirse los vértices  $w_i$  (pueden no ser todos distintos), luego para cada  $w^i$  el arco de  $v$  a  $w^i$  con etiqueta  $i$  queda bien definido. Notando que para cada vértice en  $v \in V$  que no tiene arcos saliendo y cada letra  $a \in \mathbb{Z}_p$  existe una única manera de encontrar una palabra  $w \in \mathbb{Z}_p^p$  tal que  $M_{v_j, w_j} = a$  para todo  $j \in \mathbb{Z}_p$ , entonces el proceso en cada iteración está bien definido. Además, el algoritmo termina, ya que existe un número finito de palabras en  $\mathbb{Z}_p^p$ . Esto demuestra que el grafo siempre puede construirse.  $\square$

## 2.6. Conclusiones

La clasificación de los ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = m$  en la Definición 2.1.3, permite obtener la clase de ACs  $ES_m(\mathcal{A})$  que es “grande” comparada con la clase de ACs afines (Propiedad 2.1.6). Esta clase de ACs es una familia de ACs positivamente expansivos para los que no se conocen en general propiedades de existencia de la media de Cesàro, salvo en el caso en que alguno de estos ACs tiene direcciones con palabras bloqueantes, gracias a [BT00]. La Proposición 2.1.10 permite hacer la clasificación salvo conjugación uno-bloque lo que facilita la exploración de la clase entera. La Sección 2.3 muestra un caso bien particular de ACs en la clase  $ES_3(\mathcal{A})$ , de ACs positivamente expansivos no bipermutativos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . La Sección 2.4 obtiene una familia de ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que no son bipermutativos. El estudio de la iteración de medidas de Bernoulli en las clases anteriores es la principal motivación de esta memoria; el estudio de su dinámica será llevado a cabo en el capítulo siguiente y se simulará la media de Cesàro de medidas de Bernoulli iteradas por estos ACs en el Capítulo 4. Los resultados finales en la Sección 2.5 permiten extender las familias anteriores, obteniendo clases de ACs positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que no son bipermutativos y tales que compuestos con  $\sigma^{-1}$  dejan de ser positivamente expansivos. No se conocen resultados generales para la iteración de medidas en estas clases.

# Capítulo 3

## Dinámica de autómatas celulares no positivamente expansivos y no algebraicos con vecindad $(l, r) = (0, 1)$

### 3.1. Resultados para autómatas celulares de vecindad $(l, r) = (0, 1)$

Denotamos a la familia de ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathcal{A}$  por  $PE_{\#A}(\mathcal{A})$ .

**Proposición 3.1.1** (Palabras Bloqueantes). *Para  $\mathcal{A}$  un alfabeto, ningún AC en  $PE_{\#A}(\mathcal{A})$  tiene palabras bloqueantes en direcciones distintas de  $-1$ . Luego, estos ACs son sensitivos en todas las direcciones, salvo en la dirección  $-1$ , en la que no son necesariamente sensitivos.*

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto. Definamos la familia de ACs  $\mathbb{Z}PE_{\#A}(\mathcal{A})$  como la extensión natural de la clase  $PE_{\#A}(\mathcal{A})$  a  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , i.e.  $\mathbb{Z}PE_{\#A}(\mathcal{A})$  es la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativos a la derecha con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y alfabeto  $\mathcal{A}$ . Denotamos por  $S\#A \doteq \{\rho\}$  al grupo simétrico de orden  $\#A$ , i.e. el grupo de todas las permutaciones de  $\#A$  símbolos.

Para un AC  $F$  con regla local  $f$  en  $\mathbb{Z}PE_{\#A}(\mathcal{A})$  se tiene que para cada  $i \in \mathbb{Z}$

$$(F^n(x)_{i-n})_{n \in \mathbb{N}} = (\rho_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}},$$

donde  $\rho_n \in S\#A$  depende de  $x_{[i-1-n, i-1]}$ . Definiendo  $\rho_F : \mathcal{A}^+ \rightarrow S\#A$  tal que  $w \in \mathcal{A}^n \mapsto \rho_F(w) = f(F^{n-1}(y)_{0, \cdot})$  para  $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  con  $y_{[0, n-1]} = w$ , se tiene que

$$F^n(x)_{i-n} = \rho_F(x_{[i-1-n, i-1]})(x_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, se tiene que para cada dirección  $k \in \mathbb{Z}$

$$(F \circ \sigma^k(x))_0^n = F^n(x)_{kn} = \rho_F(x_{[kn-1, kn+n-1]})(x_{kn+n}).$$

Si hubiera una palabra bloqueante  $w \in \mathcal{A}^{2m+1}$  escogiendo  $n$  tal que  $|kn + n| > m$  (lo que no puede hacerse en el caso  $k = -1$ ), se tiene que para  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  con  $x_{[-m, m]} =$

$y_{[-m,m]} = w$ ,  $x_i = y_i (\forall i < kn+n)$ ,  $x_{kn+n} \neq y_{kn+n}$ , se tiene que  $\rho_F(x_{[kn-1, kn+n-1]})(x_{kn+n}) \neq \rho_F(y_{[kn-1, kn+n-1]})(y_{kn+n})$ . Luego  $(F \circ \sigma^k(x))_0^n \neq (F \circ \sigma^k(y))_0^n$ , lo que es una contradicción con el hecho que  $w$  sea palabra bloqueante.  $\square$

**Corolario 3.1.2.** *Para  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad prima, ningún AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  positivamente expansivo con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  tiene palabras bloqueantes en direcciones distintas de  $-1$ . Luego, estos ACs son sensitivos en todas las direcciones, salvo en la dirección  $-1$ , en la que no son necesariamente sensitivos.*

**Demostración.** Recordando Corolario 2.1.2, obtenemos que todo AC positivamente expansivo con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  es permutativo a la derecha, luego de la Proposición 3.1.1 se deduce el resultado.  $\square$

Recordemos del Capítulo 2 que cada AC en la familia de ACs no positivamente expansivos con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima, dada por los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  tales que para su matriz asociada a la regla local  $M'$  existe un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  en  $No - BIP(\mathcal{A})$  positivamente expansivo asociado a una matriz  $M = (M')^T$  le podemos asociar un grafo de preimágenes. Denotemos a esta familia : familia de ACs con grafo de preimágenes asociado. Recordemos también, que en un grafo etiquetado  $G$  con etiquetas en un alfabeto  $\mathcal{A}$ , una palabra  $s \in \mathcal{A}^*$  que se lee en caminos de  $G$  se llama palabra sincronizante si al leer  $s$  en cualquier camino que se considere uno puede estar seguro del vértice de  $G$  en el que se encuentra.

*Observación 3.1.3.* Para cada alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad prima, la familia de ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  no positivamente expansivos con grafo de preimagen asociado y entropía positiva con respecto a la medida uniforme no tienen palabras bloqueantes en ninguna dirección.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto de cardinalidad prima  $p$  y  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  un AC que tiene grafo de preimágenes asociado. En Proposición 5.2 en [Tis00], se demuestra que, si existe una palabra bloqueante  $w \in \mathcal{A}^+$  y una medida  $\mu$   $F'$ -invariante y  $\sigma$ -ergódica tal que  $\mu([w]_0) > 0$ , entonces la entropía con respecto a la medida  $\mu$  es igual a 0. Como  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  es epiyectivo, la medida uniforme  $\lambda$  en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es  $F'$ -invariante y  $\sigma$ -ergódica, de la hipótesis se tiene que  $h_\lambda(F) = \log(p) > 0$ , entonces toda palabra  $w \in \mathcal{A}^+$  tal que  $\lambda([w]_0) > 0$  no es bloqueante, pero como para cualquier palabra  $u \in \mathcal{A}^+$   $\lambda([u]_0) = \frac{1}{\#\mathcal{A}^{|u|}} > 0$ , se concluye que no pueden haber palabras bloqueantes. Para demostrar que no hay palabras bloqueantes en ninguna otra dirección notar que si consideramos la extensión natural a  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  del AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  al AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F')$ , entonces el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma \circ F')$  es positivamente expansivo de cardinalidad prima, entonces es permutativo a la derecha, y entonces podemos aplicar la Proposición 3.1.1 y obtener que no tiene palabras bloqueantes en ninguna dirección, salvo en la dirección  $-1$ , pero como en la dirección  $-1$  se recupera el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F')$  que no tiene palabras bloqueantes por lo anteriormente demostrado, entonces se concluye el resultado.  $\square$

## 3.2. Una familia de autómatas celulares ni $\psi$ -asociativa ni $N$ -scaling

Consideraremos la familia de ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  asociados a una matriz  $M \in ESQ_3^0 \cup ESQ_3^1$ , definida en el Capítulo 2. Recordemos que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativo a la derecha con

vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  tiene una regla local  $\psi$ -asociativa si para alguna función  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  se tiene que  $\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \psi(f(f(a, b), c)) = f(a, f(b, c))$ , y que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  permutativo a la derecha con  $l = 0, r = 1$  es  $N$ -scaling si existe un entero  $N \geq 2$  tal que  $(F^N x)_0 = f(x_0, x_N)$  para todo  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Notar que las propiedades de ser  $N$ -scaling y tener regla local  $\phi$ -asociativa es invariante bajo conjugación 1-bloque. Demostraremos que ningún AC en la familia de ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  asociados a una matriz  $M \in ESQ_3^0 \cup ESQ_3^1$  tiene regla local  $\phi$ -asociativa y que “casi ninguno” con matriz asociada en  $ESQ_3^0$  es  $N$ -scaling, con esto concluiremos (gracias a que éstos son todos los ACs positivamente expansivos no bipermutativos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  un alfabeto  $\mathcal{A}$  con  $\#\mathcal{A} = 3$  salvo conjugación uno bloque) que ningún AC sobre un alfabeto de cardinalidad 3 positivamente expansivo con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y no bipermutativo, tiene regla local  $\phi$ -asociativa y que “casi ninguno” es  $N$ -scaling.

**Proposición 3.2.1** (Regla  $\psi$ -Asociativa). *Ningún AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  asociados a una matriz  $M \in ESQ_3$  tiene regla local  $\psi$ -asociativa.*

**Demostración.** Para demostrar que un AC en  $\mathbb{Z}_3$  no es  $\psi$ -asociativo basta encontrar seis elementos  $a, b, c, x, y, z$  en  $\mathbb{Z}_3$  tal que  $f(f(a, b), c) = m, f(a, f(b, c)) = s_1$  y  $f(f(x, y), z) = m$ . Se tiene que  $f(x, f(y, z)) = s_2$  con  $s_1 \neq s_2$ , ya que de ser así se tendría que  $\psi(m) = s_1$  y  $\psi(m) = s_2$ , lo que es una contradicción.

Para cada AC asociado a una matriz  $M$  en  $ESQ_3^0, ESQ_3^1$  se muestran los  $a, b, c, x, y, z$  encontrados. Considerar las matrices  $M$  en  $ESQ_3^0$  numeradas de 1 a 16, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo en la definición. Considerar también, las matrices  $M$  en  $ESQ_3^1$ , numeradas de 1 a 20, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo en la definición.

$ESQ_3^0$	$(m, s_1, (a, b, c))$	$(m, s_2, (x, y, z))$	$ESQ_3^0$	$(m, s_1, (a, b, c))$	$(m, s_2, (x, y, z))$
1	(1, 1, (1, 2, 2))	(1, 2, (2, 0, 1))	9	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (0, 1, 1))
2	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 0, 0))	10	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (0, 1, 2))
3	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 0, 0))	11	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 0, 2))
4	(2, 2, (0, 0, 2))	(2, 1, (1, 1, 1))	12	(2, 1, (0, 0, 1))	(2, 2, (0, 2, 1))
5	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 2, 1))	13	(1, 0, (0, 0, 0))	(1, 2, (2, 0, 0))
6	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 1, 2))	14	(1, 0, (0, 0, 0))	(1, 2, (2, 0, 0))
7	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 2, 1))	15	(2, 0, (0, 0, 0))	(2, 2, (0, 2, 0))
8	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 0, 0))	16	(1, 2, (0, 0, 0))	(1, 1, (2, 2, 0))

$ESQ_3^1$	$(m, s_1, (a, b, c))$	$(m, s_2, (x, y, z))$	$ESQ_3^1$	$(m, s_1, (a, b, c))$	$(m, s_2, (x, y, z))$
1	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 1, 1))	11	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (0, 2, 1))
2	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 1, 2))	12	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (2, 2, 1))
3	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 1, 1))	13	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (2, 2, 1))
4	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 1, 2))	14	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 0, 2))
5	(0, 0, (0, 0, 0))	0, 2, (2, 0, 1))	15	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (2, 1, 2))
6	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 2, 1))	16	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 1, 2))
7	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 2, 2))	17	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (2, 0, 1))
8	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 2, (1, 2, 0))	18	(1, 0, (0, 0, 0))	(1, 2, (1, 0, 0))
9	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 1, 0))	19	(1, 0, (0, 0, 0))	(1, 2, (1, 0, 0))
10	(0, 0, (0, 0, 0))	(0, 1, (1, 0, 1))	20	(2, 0, (0, 0, 0))	(2, 2, (0, 2, 1))

□

**Proposición 3.2.2** (*N*-scaling en  $ESQ_3^0$ ). Ningún AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  asociados a una matriz  $M \in ESQ_3^0$ , salvo los asociados a las matrices  $M(012, 012, 102)$ ,  $M(012, 021, 021)$ ,  $M(021, 021, 120)$  y  $M(102, 201, 201)$ , es *N*-scaling (independiente del *N*).

**Demostración.** Para demostrar que un AC  $F$  epiyectivo sobre  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  con regla local  $f$  no es *N*-scaling para  $N > 1$  es suficiente encontrar  $q = q_1 \dots q_m \in \mathcal{A}^+$  tal que para  $a, b, c \in \mathcal{A}$  con  $b \neq c$  y  $f(b, x) = f(c, x) \forall x \in \mathcal{A}$  (esto se tiene ya que se está en  $ESQ_3^0$ ) se tenga que

$$\begin{aligned} e_1 &\doteq f(a, b) \neq f(a, c) \doteq s_1 \\ e_2 &\doteq f(e_1, q_1) \neq f(s_1, q_1) \doteq s_2 \\ &\vdots \\ e_m &\doteq f(e_{m-1}, q_{m-1}) \neq f(s_{m-1}, q_{m-1}) \doteq s_m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

tal que

$$e_m = e_k, s_m = s_k \text{ y } q_m = q_k \text{ para algún } k < m. \tag{3.2}$$

Esto es suficiente, ya que considerando  $w \in \mathcal{A}^m$  tal que  $F^n(bw)_0 = F^n(cw)_0 = q_n$  para  $n \leq m$ , se tiene que para todo  $1 < N \leq m$  el AC no es *N*-scaling, pues  $\forall n \leq m$   $f^n(abw) \neq f^n(acw)$  pero la primera letra y última letra de  $abw$  y  $acw$  coinciden. Para el caso  $N > m$  gracias a (3.2) se tiene que para  $p, q$  tales que  $N = pm + q$  con  $q < m$  basta considerar las palabras  $abw^p w_{[1,q]}$  y  $acw^p w_{[1,q]}$ . Considerar las matrices  $M$  en  $ESQ_3^0$  numeradas de 1 a 16, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo en la definición. Usando la idea mostrada se demostró que los siguientes ACs no son *N*-scaling.

$ES_3^0$	$a$	$b, c$	$q$	$w$	$ES_3^0$	$a$	$b, c$	$q$	$w$
1	2	0,1	1	1	9	0	0,1	0	0
2	-	-	-	-	10	0	0,1	0	0
3	1	0,1	1	1	11	0	1,2	0	0
4	-	-	-	-	12	0	1,2	0	0
5	1	1,2	0	0	13	1	0,1	1	1
6	1	1,2	0	0	14	0	1,2	1	1
7	2	0,1	1	0	15	-	-	-	-
8	-	-	-	-	16	0	0,1	0	0

□

### 3.3. Palabras bloqueantes en una familia de autómatas celulares no positivamente expansivos

Consideraremos la familia de ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  asociados a una matriz  $M \in \sigma^{-1}ESQ_3^0 \cup \sigma^{-1}ESQ_3^1$ , definida en el Capítulo 2. Esta familia es salvo conjugación uno- bloque la familia de ACs no positivamente expansiva de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con matriz asociada  $M'$  tal que existe un AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo y no bipermutativo de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con matriz asociada  $M = (M')^T$ .

**Proposición 3.3.1.** ACs con matriz asociada  $M$  en  $\sigma^{-1}ESQ_3^0$  con palabra bloqueante.

$\sigma^{-1}ESQ_3^0$	Palabra bloqueante
$M(000, 112, 221)$	0
$M(001, 110, 222)$	2
$M(000, 122, 211)$	0
$M(011, 100, 222)$	2
$M(001, 222, 110)$	12
$M(002, 220, 111)$	22

**Demostración.** Demostración de casos no triviales.

- 12 es palabra bloqueante para  $M(001, 222, 110)$ : Si no fuera palabra bloqueante, entonces para alguna iteración se llega a la configuración

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & ? \\ 2 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array},$$

donde ? son elementos a determinar de  $\mathbb{Z}_3$ . Pero notar que si se llega a esta configuración puede deducirse el valor para los elementos ? de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & ? \\ 2 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & ? \\ 2 & ? & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & ? \\ 2 & 0 & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & ? \\ 2 & 2 & ? \end{array},$$

lo que es una contradicción, pues  $(2, ?) \mapsto \{0, 1\}$ .

- 22 es palabra bloqueante para  $M(002, 220, 111)$ : Supongamos se parte con la configuración

$$\begin{array}{c} 2 & 2 \\ 1 & ? \\ 2 & ? \\ 1 & ? \\ \vdots & \vdots \end{array},$$

Si 22 no fuera palabra bloqueante en algún momento se llegaría por primera vez a

$$\begin{array}{c} \vdots & \vdots \\ 1 & ? \\ 2 & ? \\ 1 & 2 \\ 0 & \end{array},$$

Las configuraciones

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & ? & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & , & 2 & 1 & , & 2 & 0 & 2 & , \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & & 0 & & 0 & \end{array},$$

están descartadas, y la configuración

$$\begin{array}{cc}
 \vdots & \vdots \\
 ? & ? \\
 2 & 1 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & 0 \\
 2 & 0 \\
 1 & 2 \\
 0 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{cc}
 \vdots & \vdots \\
 0 & 2 \\
 2 & 1 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & 0 \\
 2 & 0 \\
 1 & 2 \\
 0 & 0
 \end{array},$$

también, pues no habría sido la primera vez que se llega a una configuración con un 0 en vez de un 2. Por último, sólo queda el caso en que se llega a

$$\begin{array}{cc}
 \vdots & \vdots \\
 ? & ? \\
 1 & 1 \\
 2 & 0 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & 0 \\
 2 & 0 \\
 1 & 2 \\
 0 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 2 & 2 & & \\
 1 & 1 & 2 & \\
 2 & 0 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & 0 & 0 & 2 \\
 2 & 0 & 2 & \\
 1 & 2 & 2 & \\
 0 & 0 & & 
 \end{array},$$

lo que es imposible, pues ? tendría que ser 1 y 2 a la vez.

□

**Proposición 3.3.2.** *ACs asociados a matrices en  $\sigma^{-1}ESQ_3^1$  con palabra bloqueante.*

$\sigma^{-1}ESQ_3^1$	Palabra bloqueante
$M(012, 101, 220)$	21
$M(021, 110, 202)$	22
$M(012, 220, 101)$	11
$M(021, 202, 110)$	21

**Demostración.** Ningún caso es trivial.

1. 21 es palabra bloqueante para  $M(012, 101, 220)$ : Si no fuera palabra bloqueante se tendría

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 1 & & 2 & 1 & ? & & 2 & 1 & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\
 2 & ? & & 2 & ? & ? & & 2 & ? & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\
 2 & ? & \Rightarrow & 2 & ? & ? & \Rightarrow & 2 & ? & ? & ? & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & 2 & 0 & 0 & 0 & \vdots & & \\
 2 & ? & & 2 & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 2 & & & & 2 & 0 & 0 & 2 & & & \\
 2 & ? & & 2 & 0 & 2 & & 2 & 0 & 2 & & & & & 2 & 0 & 2 & & & & \\
 2 & 2 & & 2 & 2 & & & 2 & 2 & & & & & & 2 & 2 & & & & & \\
 0 & & & 0 & & & & 0 & & & & & & & 0 & & & & & & 
 \end{array},$$

lo que es una contradicción con haber partido con una configuración iniciando con la palabra 21.

2. 22 es palabra bloqueante para  $M(012, 110, 202)$ : Si no lo fuera se tendría

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & 2 & & 2 & 2 & ? & & 2 & 2 & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 2 & ? & & 2 & ? & ? & & 2 & ? & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\
 2 & ? & \Rightarrow & 2 & ? & ? & \Rightarrow & 2 & ? & ? & ? & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & & \\
 2 & ? & & 2 & ? & ? & & 2 & 0 & 0 & 1 & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 2 & ? & & 2 & 0 & 2 & & 2 & 0 & 2 & & & & & 2 & 0 & 2 & & & & \\
 2 & ? & & 2 & 1 & & & 2 & 1 & & & & & & 2 & 1 & & & & & \\
 0 & & & 0 & & & & 0 & & & & & & & 0 & & & & & & 
 \end{array},$$

lo que es una contradicción con haber partido con una configuración iniciando con la palabra 22.

3. 11 es palabra bloqueante para  $M(012, 220, 101)$ : Si no lo fuera se tendría uno de los dos casos siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 1 & ? & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & 1 & ? & & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\
 2 & ? & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & \vee & 1 & ? & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 1 & ? & & 1 & 0 & 0 & 2 & & & & & 2 & ? & & 2 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 2 & ? & & 2 & 0 & 2 & & & & & & 1 & ? & & 1 & 0 & 1 & & & & \\
 1 & 2 & & 1 & 2 & & & & & & & 2 & 1 & & 2 & 1 & & & & & \\
 0 & & & 0 & & & & & & & & 0 & & & 0 & & & & & & 
 \end{array},$$

y los dos casos son contradictorios con haber comenzado con la palabra 11.

4. La demostración de que 21 es palabra bloqueante para  $M(021, 202, 110)$  es análoga al caso anterior.

□

### 3.4. Ejemplos de iteración de medidas de Bernoulli por autómatas celulares permutativos de vecindad $(l, r) = (0, 1)$

En la familia de ACs  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F')$  asociados a una matriz  $M \in \sigma^{-1}ESQ_3^0 \cup \sigma^{-1}ESQ_3^1$ , definida en el Capítulo 2, mostraremos dos ejemplos de iteración de medidas de Bernoulli. El primer ejemplo muestra un AC no algebraico y permutativo que no preserva ninguna medida de Bernoulli. El segundo es un ejemplo de aplicación del resultado de Blanchard y Tisseur en [BT00], en que se encuentra un AC positivamente expansivo con una palabra bloqueante en el soporte, y luego puede concluirse que la media de Cesàro existe.

**Ejemplo 3.4.1.** El AC asociado a la matriz  $M(012, 012, 120)$  en  $ESQ_3^0$  no preserva ninguna medida de Bernoulli, salvo la uniforme.

*Demostración.* Supongamos hay una medida de Bernoulli  $(\pi_0, \pi_1, \pi_2)$  que se preserva. Del grafo de preimágenes asociado (ver Figura 2.1), se deduce que:

$$\begin{aligned} F^{-1}([1]_0) &= \{[0, 1]_0, [1, 1]_0, [2, 0]_0\}, \\ F^{-1}([1, 1]_0) &= \{[0, 1, 1]_0, [1, 1, 1]_0, [2, 0, 1]_0\}. \end{aligned}$$

En el grafo de preimagen asociado el nodo  $(1, 1, 1)$  tiene un loop con etiqueta 1, luego

$$F^{-1}([1^n]_0) = \{[01^n]_0, [1^{n+1}]_0, [201^{n-1}]_0\},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , donde consideramos  $1^n$  la concatenación de  $n$  1's. De lo anterior y de suponer que la medida se preserva se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0(1 - \pi_0) + \pi_1^2 \\ \pi_1^2 &= \pi_0\pi_1(1 - \pi_0) + \pi_1^3 \\ &\vdots \\ \pi_1^i &= \pi_0\pi_1^{i-1}(1 - \pi_0) + \pi_1^{1+i}, \end{aligned}$$

luego, se tiene que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\pi_1 = \pi_0(1 - \pi_0) \sum_{i=0}^n \pi_1^i + \pi_1^{n+2},$$

y tomando límite en  $n$  se obtiene que

$$\pi_1(1 - \pi_1) = \pi_0(1 - \pi_0). \quad (3.3)$$

Ahora consideremos el cilindro  $C = [1220]_0$ , las preimágenes son  $[01200]_0, [11200]_0, [20200]_0$ , luego utilizando la ecuación (3.3) se deduce que  $\pi_0\pi_1\pi_2^2 = \pi_0^2\pi_1\pi_2$ , de donde  $\pi_0 = \pi_2$ , y utilizando nuevamente la ecuación (3.3) se concluye que  $\pi_0 = \frac{1}{3}$ , de donde se obtiene que la única medida de Bernoulli que se preserva es la uniforme  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .  $\square$

**Ejemplo 3.4.2.** Para el AC asociado a la matriz  $M(012, 012, 102) \in ESQ_3^0$  con una distribución de Bernoulli inicial  $(p_0, p_1, p_2)$ , se tiene que la medida iterada o se preserva y por tanto converge, o no se preserva y no converge, pero en cualquier caso la media de Cesàro existe. Además, en el caso en el que la distribución de Bernoulli inicial no se preserva, la medida iterada un número par de veces siempre es la distribución de Bernoulli original, pero un número impar ni siquiera es una distribución de Bernoulli.

**Demostración.** Se tiene que para una distribución inicial de Bernoulli  $(p_0, p_1, p_2)$ , para  $m = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$  la medida  $F_\mu^m$  sobre cilindros con una coordenada fija es

$$\mu(F^{-m}[2]_0) = p_2, \mu(F^{-m}[0]_0) = (1 - p_2)p_0 + p_2p_1, \mu(F^{-m}[1]_0) = (1 - p_2)p_1 + p_2p_0.$$

Cuando hay dos coordenadas fijas, en particular se tiene

$$\mu(F^{-m}[20]_0) = p_2p_1.$$

Entonces si  $F_\mu^m$  fuera de Bernoulli se tendría que tener que  $F_\mu^m([20]_2) = \mu(F^{-m}[20]_2) = F_\mu^m([2]_0)F_\mu^m([0]_0)$ , pero en este caso  $p_1 = (1 - p_2)p_0 + p_2p_1$ , luego  $p_1 = p_0$ , pero la medida de Bernoulli  $(p_0, p_0, p_2)$  se preserva por el AC, luego si la medida inicial no se preserva  $F_\mu^m$  no es distribución de Bernoulli. Para ver que una medida de Bernoulli  $(p_0, p_0, p_2)$  se preserva basta notar que en este caso la medida no distingue a 0 de 1, luego la medida se itera de la misma manera en que se itera una medida de Bernoulli  $(2p_0, p_2)$  por el AC sobre el alfabeto  $\{0, 2\}$  asociado a la matriz  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Como el AC con matriz  $M' = M^T$  itera una medida de probabilidad  $\sigma$ -invariante de la misma manera que el AC asociado a  $M$ , y la matriz  $M'$  es la matriz que representa al AC identidad, entonces se tiene que en este caso la medida inicial se preserva. Veamos que un resultado análogo se tiene para las iteraciones pares. Sea  $m = 2n, n \in \mathbb{N}$ . Entonces para  $w \in (\mathbb{Z}_3)^*$

$$F^{-m}([w]_0) = [w]_m$$

luego como las medidas de Bernoulli son  $\sigma$ -invariantes se concluye que la medida es la misma que la medida original. Lo anterior demuestra que en el caso de que la medida no se preserve la medida iterada no converge. Sin embargo, podemos demostrar que la media de Cesàro sí existe, de hecho es directo de [BT00], ya que se demuestra que para todo AC con una palabra bloqueante en el soporte de una medida  $\mu$ , la media de Cesàro de  $\mu$  iterada por el AC existe. En este ejemplo, la existencia de la media de Cesàro se puede demostrar de manera directa. Como la medida iterada en las iteraciones pares es siempre la misma y en las iteraciones impares ocurre lo mismo, entonces podemos encontrar la media de Cesàro sobre cada cilindro, de la siguiente manera. Denotemos por  $\mathcal{C}_\mu(F)(\cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_\mu^n(\cdot)$ , a la media Cesàro. Tenemos que sobre cada cilindro  $[w]_k$  con  $w \in \mathbb{Z}_3^*, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{C}_\mu(F)([w]_k) = \frac{\mu([w]_k)}{2} + \frac{F_\mu([w]_k)}{2}.$$

Lo anterior demuestra que la media de Cesàro existe, y permite obtenerla explícitamente sobre cada cilindro.  $\square$

La misma idea en la demostración del ejemplo anterior puede usarse para demostrar que para los ACs asociados a las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en  $ESQ_3^0$ ; y a las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en  $ESQ_3^1$ , la media de Cesàro de una medida de Bernoulli iterada existe, pero depende de la medida inicial, luego estos ACs no randomizan asintóticamente una medida inicial. Este hecho constituye un ejemplo de aplicación de los resultados de existencia de la media de Cesàro para ACs con palabras bloqueantes en alguna dirección contenidas en el soporte de una medida inicial  $\sigma$ -ergódica. Notar además que la idea usada para demostrar que la medida  $(p, p, q)$  se preserva en el ejemplo anterior puede ser usada para demostrar un resultado análogo en otros ACs asociados a matrices en  $ESQ_3^0$ .

**Ejemplo 3.4.3.** Los ACs asociados a las matrices  $M(012, 012, 021)$  y  $M(012, 021, 021)$  en  $ESQ_3^0$  preservan cualquier medida de Bernoulli de la forma  $(p, q, q)$ . Lo mismo pasa para los ACs asociados a las matrices  $M(012, 012, 102)$  y  $M(012, 102, 102)$  en  $ESQ_3^0$  para una medida de Bernoulli  $(p, p, q)$ .

*Observación 3.4.4.* Se deduce de [Sab07] que para todo AC  $F$  en  $ESQ_3$  que preserve una medida de Bernoulli  $\mu = \mu_{p,q,r}$  la entropía con respecto a ésta satisface  $h_\mu(F) = -p \log(p) - q \log(q) - r \log(r)$ .

## 3.5. Observaciones con respecto a las direcciones de equicontinuidad

Veremos algunos resultados elementales de la dinámica de un AC que permiten concluir que no hay direcciones de equicontinuidad.

**Lema 3.5.1.** *Dado un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  permutativo a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , con matriz asociada  $M$ . sea  $D_M$  el grafo dirigido con vértices  $V = \mathcal{A}$  y arcos  $E = \{(e, v) : M_{(e,e)} = v\}$ . Si en  $D_M$  existe un vértice sin arcos incidentes, entonces  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  no tiene direcciones de equicontinuidad.*

**Demostración.** Se tiene que un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, F)$  es equicontinuo y sobreyectivo si y solo si  $\exists p' > 0$  tal que cualquier  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es  $F$ -periódico de período  $p'$  (ver demostración en [BT00]). En particular los ACs permutativos a la derecha son epiyectivos, luego  $F_k \doteq F \circ \sigma^k$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$  también (notar que cuando  $k \in -\mathbb{N}$  sin pérdida de generalidad se puede considerar la extensión del AC a  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ). Si  $F_k$  fuera equicontinuo se tendría entonces que todo  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  sería periódico de período  $p'$ , para algún  $p'$ . Sin embargo, para  $v \in \mathcal{A}$  el vértice sin arcos incidentes, considerando  $x$  tal que  $x_i = v (\forall i \in \mathbb{Z})$  se tiene que  $F_k^n(x) \neq x$  para todo  $n > 0$ , luego no es periódico para ningún  $p' > 0$ .  $\square$

**Corolario 3.5.2.** *Los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , con matriz asociada  $M$  que en la diagonal no aparecen todas las letras  $a \in \mathcal{A}$ , no tienen direcciones de equicontinuidad, son epiyectivos y no son inyectivos.*

Con respecto a la relación entre el grafo de preimágenes y las palabras bloqueantes en la dirección  $-1$  notar lo siguiente.

*Observación 3.5.3.* Coincidentemente cuando  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_3$ , los ACs  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F')$  no positivamente expansivos en la familia de ACs con grafo de preimagen asociado y palabra bloqueante  $s \in \mathcal{A}^*$  son tales que en el grafo de preimagen la palabra  $s$  es sincronizante.

## 3.6. Conclusiones

La Proposición 3.1.1 demuestra que los ACs permutativos a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  no tienen palabras bloqueantes en ninguna dirección salvo la dirección  $-1$  en la que sí pueden tener palabras bloqueantes. En el caso de tener palabras bloqueantes la existencia de la media de Cesàro se tiene de [BT00], los ACs afines con regla local de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  son casos particulares de ACs permutativos a la derecha sin palabras bloqueantes en la dirección  $-1$ , y se sabe que asintóticamente randomizan una medida inicial con conexión completa y decaimiento sumable. En este capítulo además se demostró que los ACs en la clase  $ES_3(\mathbb{Z}_3)$  construída en la Sección 2.3 no tiene propiedades para las que se conozca la existencia de la media de Cesàro. En el capítulo siguiente simularemos la iteración de medidas de Bernoulli por estos ACs.

# Capítulo 4

## Simulaciones y Evidencia

El Capítulo 2 estuvo dedicado a la clasificación de los ACs expansivos de radio 1 en  $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ . Esta clasificación permitió obtener una familia precisa de ACs donde buscar randomización asintótica por ACs no algebraicos (aquellos asociados a matrices en  $ESQ_3^0$  y en  $ESQ_3^0$ ). También se definió una clase de ACs en  $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{N}}$  para  $m = 2, 3, 4, 5 \dots$  los cuales en el caso  $m > 2$  no son lineales ni tienen propiedades para los que se conoce la media de Cesàro (Capítulo 3). Se quiere saber si los ACs en las clases anteriores randomizan asintóticamente una medida de Bernoulli inicial. Las simulaciones hechas en este capítulo constituyen evidencia de que para algunos ACs con matriz asociada en  $ESQ_3^0$  y en  $RANDOMES$ , tal randomización debería tenerse.

El capítulo está organizado como sigue. Primero, en la Sección 4.1, se plantean distintos métodos de simulaciones que permiten sugerir que existe randomización asintótica de una medida de Bernoulli inicial, segundo, en la Sección 4.2, se muestran los resultados de las simulaciones, y tercero, en la Sección 4.3, se discuten los resultados obtenidos.

### 4.1. Métodos

Demostrar que ACs randomizan asintóticamente una medida inicial puede ser muy complicado. La dificultad está en que para un AC  $F$  en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ,  $F^n$  no es necesariamente fácil de entender. Lo que hace que, tampoco sean fáciles de describir las particiones de  $\mathcal{A}^{n+1}$  por  $\{F^{-n}(a)\}_{a \in \mathcal{A}}$ . Y por último, lo anterior complica calcular la iteración  $n$ -ésima de una medida  $\mu$  por el AC  $F$ ,  $F_\mu^n$ . En el caso expansivo, el AC es epiyectivo, y por tanto se tiene que  $\#F^{-m}(a) = \#\mathcal{A}^m \forall a \in \mathcal{A}, m \in \mathbb{N}$ . Este crecimiento exponencial del número de preimágenes hace que la simulación que explícitamente encuentra la medida iterada sea infactible para  $m$  “grande”. Es por lo tanto necesario disponer de una simulación viable para “estimar” la medida iterada “muchas veces” por un AC. Lo anterior es el objetivo principal de esta sección, la que está organizada de la siguiente forma. Primero, se muestran los métodos más naturales, cálculo explícito de las medidas iteradas e imagen de las iteraciones sobre una configuración inicial con una distribución de Bernoulli dada, luego se muestra un método que permite hacer simulaciones de la medida iterada “muchas veces”.

### 4.1.1. Cálculo explícito de la medida iterada

Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ . Definamos para cada  $a \in \mathcal{A}$  las funciones  $D_a : \mathcal{A}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  tal que a una palabra  $x \in \mathcal{A}^+$  le asigna  $D_a(x)$  el número de veces que aparece  $a$  en  $x$ , i.e.  $D_a(x) = \sum_{i=0}^{|x|-1} 1_{x_i=a}$ , para  $1_{x_i=a} = 1$  si  $x_i = a$  y 0 si no. Consideremos una medida de Bernoulli en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$   $\mu_\pi$ , para  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ . Denotemos a los cilindros  $[c]_k$  para  $c \in \mathcal{A}^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , simplemente por  $c$ . Para un cilindro  $c$  y  $m \in \mathbb{N}$  anotamos  $F^{-m}c \doteq \{x \in \mathcal{A}^{m+|x|} : \exists y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} F^m(xy)_{[0, |c|-1]} = c\}$ . Dado un cilindro  $c \in \mathcal{A}^+$ , se tiene que  $\#F^{-m}c = 3^m$  y  $F^{-m}c \subset \mathbb{Z}_3^{m+|c|}$ , para cada entero  $m > 0$ . Con la notación anterior, tenemos que, para cada entero  $n > 0$

$$F_\mu^n(c) = \sum_{x \in F^{-n}c} p^{D_0(x)} q^{D_1(x)} r^{D_2(x)}.$$

Luego conocer la medida  $F^n \mu$  sobre cilindros de largo  $m$  se reduce a conocer el conjunto  $\{F^{-n}c\}_{c \in \mathbb{Z}_3^m}$ . En particular conocer  $F^n \mu(a)$  para  $a \in \mathbb{Z}_3$  se reduce a conocer  $F^{-n}0$ ,  $F^{-n}1$ ,  $F^{-n}2$ . Así una evidencia de randomización asintótica es que

$$\mu_{\pi_0, \pi_1, \pi_2}(F^{-n}0) \approx \mu_{\pi_0, \pi_1, \pi_2}(F^{-n}1) \approx \mu_{\pi_0, \pi_1, \pi_2}(F^{-n}2), \quad (4.1)$$

para  $(\pi_0 \geq \pi_1 \geq \pi_2)$ ,  $(\pi_0 \geq \pi_2 \geq \pi_1)$ ,  $(\pi_1 \geq \pi_0 \geq \pi_2)$ ,  $(\pi_1 \geq \pi_2 \geq \pi_0)$ ,  $(\pi_2 \geq \pi_0 \geq \pi_1)$  y  $(\pi_2 \geq \pi_1 \geq \pi_0)$ , omitiendo el caso  $\pi_0 = \pi_1 = \pi_2$  donde se tiene igualdad en (4.1) del hecho que los ACs con matriz asociada en  $ESQ_3$  son epiyectivos, y  $n \in M \subset \mathbb{N}$  con  $M$  de densidad 1, i.e. tal que  $\frac{1}{N} |M \cap \{0, 1, \dots, N\}| \rightarrow 1$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Mediante un programa en Matlab es fácil obtener los conjuntos  $F^{-n}0$ ,  $F^{-n}1$ ,  $F^{-n}2$  para  $n$  muy pequeño. La dificultad no está en el cálculo de  $F^n(x_0, \dots, x_m)$  para  $m > 1$  entero, sino que en el hecho que  $\#F^{-n}a = 3^n$ , para  $a \in \mathbb{Z}_3$ . Sin embargo, si existiera una manera recursiva de hacerlo podría aproximarse la medida iterada eficientemente. Lamentablemente tal recursividad también es complicada de comprender. Aún así, puede usarse esta idea para calcular explícitamente la media de Cesàro iterada partiendo de ciertas distribuciones de Bernoulli de un modo distinto, que sería útil en el caso de que tal recurrencia sí existiera. Veamos un ejemplo en que se aplica esta idea alternativa sobre una medida de Bernoulli con distribución  $(p, p, r)$ .

**Ejemplo 4.1.1.** Sea  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  un AC de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ . Para cada  $a \in \mathcal{A}$ ,  $c \in \mathcal{A}^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \{0, \dots, i + |c|\}$  definamos

$$Q_{i,c,m}^a \doteq \{x \in \mathcal{A}^{|c|+i} \text{ tales que } F^i(x) = c \text{ y } D_a(x) = m\},$$

y

$$q_{i,c,m}^a \doteq \#Q_{i,c,m}^a.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos  $a = 2$ . Usando las definiciones anteriores tenemos que para una medida de Bernoulli en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mu_\pi$  con  $\pi = (p, p, 1 - 2p)$ ,

$$\overline{F_\mu^N}(c) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{|c|+i} q_{i,c,m}^a (1 - 2p)^m p^{|c|+i-m}.$$

Si se escoge  $a = 0$ , lo mismo es válido para la medida  $\mu_\pi$  con  $\pi = (1 - 2p, p, p)$ , y lo mismo vale para  $a = 1$  y la medida  $\mu_\pi$  con  $\pi = (p, 1 - 2p, p)$ . Consideremos el caso particular en

que  $c \in A$  está fijo, y estudiemos los  $q_{i,c,m}^a$ . En el caso de que el AC sea sobreyectivo se tiene que  $q_{i,c,m}^a$  debe satisfacer:

$$\sum_{m=0}^{1+i} q_{i,c,m}^a = 3^i, \forall i \in \mathbb{N},$$

$$0 \leq q_{i,c,m}^a \leq \binom{i+1}{m} 2^{1+i-m}, \forall 0 \leq m \leq i+1, i \in \mathbb{N}.$$

Evidencia de la convergencia de la media de Cesàro a la distribución uniforme está dada por la siguiente convergencia:

$$\left| q_{i,c,m}^a - \binom{i+|c|}{m} \frac{2^{i+|c|-m}}{3^{|c|}} \right| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \quad (4.2)$$

Ya que

$$\begin{aligned} F_{\mu}^i([c]_0) &= \sum_{m=0}^{i+|c|} \mu(Q_{i,c,m}^a) = \\ &= \sum_{m=0}^{i+|c|} q_{i,c,m}^a (1-2p)^m p^{i+|c|-m} \approx \sum_{m=0}^{i+|c|} \binom{i+|c|}{m} \frac{2^{i+|c|-m}}{3^{|c|}} (1-2p)^m p^{i+|c|-m} = \\ &= \frac{1}{3^{|c|}} \sum_{m=0}^{i+|c|} \binom{i+|c|}{m} (2p)^{i+|c|-m} (1-2p)^m = \frac{1}{3^{|c|}}. \end{aligned}$$

**Nota 4.1.2.** Ver simulaciones usando lo anterior en la Figura 4.5.

### 4.1.2. Imagen de iteraciones por autómatas celulares con una distribución inicial

Este método sólo entrega una imagen que sirve como heurística del hecho de randomización asintótica de una medida por un AC. La idea es generar una secuencia de “outputs” (instancias) de variables aleatorias i.i.d. con distribución de Bernoulli e iterar el AC sobre esta secuencia. El resultado es una imagen con las iteraciones.

Supongamos se tiene una manera de generar variables aleatorias con distribución uniforme en  $(0, 1)$ ,  $U(0, 1)$ . En general, estos generadores pseudorandom están implementados en los softwares matemáticos. En Matlab, por ejemplo, esto está implementado en la función *rand*. Luego, para simular una variable aleatoria  $X$  de Bernoulli con distribución  $(p, q, r)$  a valores en  $\mathbb{Z}_3$  con  $\mathbb{P}(X = 0) = p$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = r$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = r$ , se puede hacer lo siguiente:

1. Generar  $U \sim U(0, 1)$ .
2. Retornar

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } U \in [0, p) \\ 1 & \text{si } U \in [p, p+q) \\ 2 & \text{si } U \in [p+q, 1) \end{cases}.$$

Con lo anterior digamos que tenemos una manera de simular variables aleatorias con distribución de Bernoulli  $(p, q, r)$ , que denotaremos  $B(p, q, r)$ .

Sea  $F$  un AC con matriz asociada en  $ESQ_3$  y regla local  $f$ , simularemos las medidas iteradas  $F^n \mu_{p,q,r}$  mediante la simulación de la variable aleatoria  $F^n(X_0, \dots, X_n)$  para  $X_i$  i.i.d tal que  $X_i \sim B(p, q, r)$ . Para esto, sea  $n > 0$  un entero fijo

1. Generar  $X_0, \dots, X_n \sim B(p, q, r)$ .
2. Retornar  $Y_n = F^n(X_0, \dots, X_n)$ .

Lo anterior es una manera de generar variables aleatorias con distribución  $F^n \mu_{p,q,r}$ . Cuando se desee hacer explícito el AC  $F$  y la distribución  $\pi = (p, q, r)$  de los que depende  $Y_n$ , escribiremos  $Y_n^{F,\pi}$ .

Notar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n \doteq Y \sim B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (4.3)$$

sugiere convergencia de la medida iterada a la medida de Bernoulli uniforme. Y que,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \doteq \bar{Y} \sim B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad (4.4)$$

sugiere randomización asintótica de la medida iterada.

En base a la construcción para generar variables aleatorias con distribución  $F^n \mu_{p,q,r}$ , se puede hacer lo siguiente. Para cada  $n, m_A, m_L > 0$  enteros tales que  $m_L \leq n + 1 - m_A$  y  $X_0, \dots, X_n$  variables aleatorias i.i.d. con distribución  $B(p, q, r)$ , podemos generar variables aleatorias  $T_{n,m_A,m_L}^F : \Omega^{n+1} \rightarrow \mathcal{M}_{m_A,m_L}(\mathbb{Z}_3)$ ,  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{0,j} = X_j(w_j)$  y para  $i > 0$ ,  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{i,j} = f(T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{i-1,j}, T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{i-1,j+1})$  donde

$$\mathcal{M}_{m_A,m_L}(\mathbb{Z}_3) = \{w_{i,j} \in \mathbb{Z}_3\}_{0 \leq i \leq m_A-1, 0 \leq j \leq m_L-1},$$

es el espacio de las matrices de  $m_A \times m_L$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_3$  (indexadas desde 0) y  $\Omega$  un espacio de muestreo sin importancia.

La simulación que se hace consiste en generar instancias de la variable aleatoria  $T_{n,m_A,m_L}^F$ , que depende de una distribución inicial  $B(p, q, r)$  (cuya dependencia en notación de la variable aleatoria se omite), del AC  $F$  con matriz asociada en  $ESQ_3$  y de tres enteros  $n, m_A, m_L > 0$  tales que  $m_L \leq n + 1 - m_A$ . Lo que se obtiene de la simulación es  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)$  para una instancia  $w \in \Omega^n$ . Una manera de visualizar  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)$  es reemplazando los números 0, 1, 2 en la matriz por tres colores distintos, que corresponde a la imagen que entrega la simulación.

**Nota 4.1.3.** *Lo que usualmente se hace para evitar tener que almacenar mucha información es lo siguiente. Se escoge  $n$  “grande” (en las simulaciones  $n = 35000$ ),  $m_A$  “chico” (en las simulaciones  $m_A = 5000$ ), y  $m_L$  “lo más grande posible” (en las simulaciones  $m_L = 30000$ ). Para una instancia se almacena solamente  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{[0,m_A],[0,m_A]}$  y  $T_{n,m_A,m_L}^F(w)_{[m_L-m_A,m_L],[0,m_A]}$ , donde para una matriz  $M = \{m_{i,j}\}$  se representa por  $M_{[a,b],[c,d]}$  la submatriz  $\{m_{i,j}\}_{(i,j) \in [a,b] \times [c,d]}$ .*

**Nota 4.1.4.** Ver simulaciones usando lo anterior en las Figuras 4.3 y 4.4.

### 4.1.3. Estimación de la medida iterada

Dado un AC  $F$  y una distribución de Bernoulli  $\pi = (p, q, r)$ , sea  $Y_n^{F,\pi}$  como antes y definamos

$$\bar{Y}_n^{F,\pi} \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n^{F,\pi},$$

para  $Y_0^{F,\pi} = X \sim B(p, q, r)$ . Como se discutió antes, el estudio de (4.3) y (4.4) sirve para sugerir convergencia a la medida uniforme. Notemos, que agregando una condición adicional podemos obtener evidencia más precisa de tal randomización.

Dado un AC  $F$  y una distribución de Bernoulli  $\pi = (p, q, r)$ , para cada  $n > 0$  entero simulemos una variable aleatoria  $(Y_n^L, Y_n^R)$  como sigue:

1. Generar  $X_0, \dots, X_n, X_{n+1} \sim B(p, q, r)$ .
2. Retornar  $(Y_n^L = F^n(X_0, \dots, X_n), Y_n^R = F^n(X_1, \dots, X_{n+1}))$ .

Si la medida iterada converge a una medida de Bernoulli uniforme  $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , entonces las variables aleatorias  $Y_n^L$  y  $Y_n^R$  tienen que tender a ser independientes. Sea  $G : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  definida por  $(0, 0) \mapsto 0$ ,  $(0, 1) \mapsto 1$ ,  $(0, 2) \mapsto 2$ ,  $(1, 0) \mapsto 3$ ,  $(1, 1) \mapsto 4$ ,  $(1, 2) \mapsto 5$ ,  $(2, 0) \mapsto 6$ ,  $(2, 1) \mapsto 7$ ,  $(2, 2) \mapsto 8$ . Simularemos una variable aleatoria  $Z_n$  para  $n > 0$  entero, como sigue:

1. Generar  $X_0, \dots, X_n, X_{n+1} \sim B(p, q, r)$ .
2. Retornar  $Z_n = G(Y_n^L = F^n(X_0, \dots, X_n), Y_n^R = F^n(X_1, \dots, X_{n+1}))$ .

Notemos que la condición que  $Y_n^L$  y  $Y_n^R$  sean variables aleatorias independientes y que  $Y_n^L$  y  $Y_n^R$  tengan distribución de Bernoulli uniforme es equivalente a que la variable aleatoria  $Z_n$  tenga distribución de Bernoulli uniforme  $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ . Como antes, anotemos  $Z_n^{F,\pi}$  cuando se quiera hacer explícita la dependencia en  $F$  y en  $\pi$  de  $Z_n$ . Notemos que por simetría en la construcción del AC, las condiciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \doteq Z \sim B\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right) \quad (4.5)$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_n \doteq \bar{Z} \sim B\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right) \quad (4.6)$$

constituyen evidencia más precisa de randomización de la medida inicial.

A continuación se muestra como estimar la medida iterada y una manera de testear si se tiene (4.5) y (4.6). Supongamos en lo siguiente que  $F$  es un AC con matriz asociada en  $ESQ_3$  y  $\mu \doteq \mu_\pi$  una medida de Bernoulli  $\pi = (p, q, r)$ , y sea  $n > 0$  un entero.

- Simulación de la medida iterada:  $F_\mu^n(a)$  para  $a \in \mathbb{Z}_3$  se simula por

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M 1_{Y_n^{F,\pi}(w_i)=a},$$

para  $M > 0$  un entero.

- Simulación de la media de Cesàro:  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_\mu^n(a)$  para  $a \in \mathbb{Z}_3$  se simula por

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M 1_{\overline{Y}_N^{F,\pi}(w_i)=a},$$

para  $M > 0$  un entero.

- Testear (4.5): Test de Hipótesis: Hipótesis nula

$$H_0 : \pi = \left( \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right),$$

y para un entero  $n > 0$  “grande” se considera como muestra un número  $m$  de instancias de  $Z_n$ .

- Testear (4.6): Se hace lo mismo que antes considerando  $\overline{Z}_n$ , en vez de  $Z_n$ .

**Nota 4.1.5.** Usando adecuadamente  $T_{n,m_A,m_L}^F$  en lugar de  $Y_n^F$  puede simularse  $F_\mu^n(c)$  para  $c$  un cilindro cualquiera. El procedimiento es análogo.

Denotemos las simulaciones de las medidas iteradas  $\{F_\mu^n\}_n$  y de la media de Cesàro  $\{\overline{F}_\mu^N\}_N$ , por  $\{S_n^M\}_n$  y  $\{\overline{S}_N^M\}_N$ , respectivamente. Donde  $M > 0$  es el entero que aparece en la simulación. Además para  $c$  un cilindro fijo denotaremos las simulaciones de las medidas  $\{F_\mu^n c\}_n$  y  $\{\overline{F}_\mu^N c\}_N$  por  $\{S_n^M c\}_n$  y  $\{\overline{S}_N^M c\}_N$ , respectivamente.

Para enteros  $n, N, M > 0$  y un cilindro  $c$  se estudia lo siguiente:

- Instancias de la variable aleatoria  $S_{M,n}c \doteq (S_1^M c, \dots, S_1^M c)$ .
- Instancias de la variable aleatoria  $\overline{S}_{M,N}c \doteq (\overline{S}_1^M c, \dots, \overline{S}_N^M c)$ .

Cuando en  $S_{M,n}c$  y  $\overline{S}_{M,N}c$  se quiera hacer referencia explícita al AC  $F$  y la media inicial  $\mu = \mu_\pi$ , se anotará  $S_{M,n}^{F,\pi}c$  y  $\overline{S}_{M,N}^{F,\pi}c$ , respectivamente.

Para estudiar si un AC  $F$  con matriz asociada en  $ESQ_3$  está randomizando o randomizando asintóticamente una medida inicial de Bernoulli con distribución  $\pi$  en  $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}$ , se hace lo siguiente:

1. Se escogen enteros  $n, N, M > 0$  fijos.
2. Para distintos cilindros  $c$  se obtiene una instancia de  $S_{M,n}^{F,\pi}c$  y  $\overline{S}_{M,N}^{F,\pi}c$ .
3. Se retorna las instancias obtenidas para cada cilindro  $c$ .

**Nota 4.1.6.** Ver simulaciones en la Figura 4.1.

## 4.2. Simulaciones

Se muestran las simulaciones hechas con los ACs  $F_4, F_5 \in \text{RANDOMES}$ . Éstas, se separan en tres tipos. Primero, se simula la convergencia de la media de Cesàro del AC  $F_3$  con respecto a una medida de Bernoulli con distribución fija. El objetivo es evidenciar randomización asintótica del AC respecto a esta medida inicial. Segundo, se usa la heurística de imágenes de iteraciones por los ACs  $F_4, F_5$  con distintas medidas de Bernoulli iniciales con el objeto de evidenciar randomización asintótica de cualquier medida de Bernoulli inicial por estos ACs. Y tercero, se usa el método en el Ejemplo 4.1.1 para evidenciar randomización asintótica del AC  $F_3$  con respecto a una medida de Bernoulli inicial particular.

Las especificaciones de las simulaciones hechas se muestran a continuación.

1. Figura 4.1: Convergencia de la media de Cesàro del AC  $F_3$  con respecto a una medida de Bernoulli  $(0,01; 0,01; 0,98)$ . Para  $n = 2 * 10^4$ ,  $M = 1$ ,  $\pi = (0,01; 0,01; 0,98)$  fijos, y cada cilindro  $c=[0]_0, [11]_0, [02]_0, [111]_0, [120]_0, [2010]_0$ , se simula una instancia de  $\{S_{M,N}^{F_3, \pi} c\}_{N=1}^n$ . En los gráficos el punto rojo indica la medida del cilindro para la distribución uniforme.

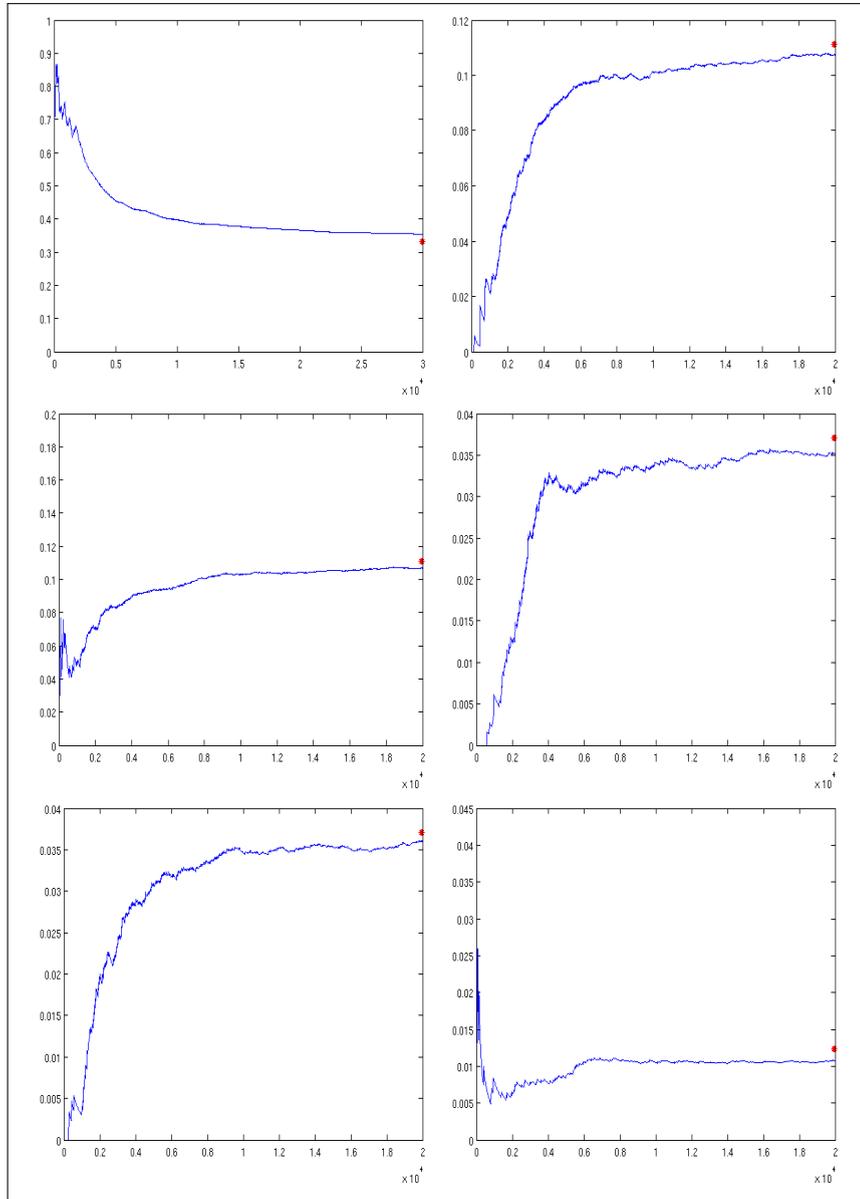


Figura 4.1: Simulaciones de la convergencia de la media de Cesàro del AC  $F_3$ .

2. Figura 4.2: Error entre la distribución uniforme y  $\{\overline{S_{M,N}^{F_3,\pi}c}\}_{N=1}^n$  en función de  $n$ , cuando  $\pi = (0,01; 0,01; 0,98)$ ,  $N = 1, \dots, 2 \cdot 10^4$ ,  $M = 1$  y se consideran los cilindros  $c=[0]_0, [11]_0, [02]_0, [111]_0, [120]_0, [2010]_0$ . El error para cada cilindro  $c$  se calcula en función de  $N$  por la fórmula

$$\left| \overline{S_{M,N}^{F_3,\pi}c} - \frac{1}{3|c|} \right|^2.$$

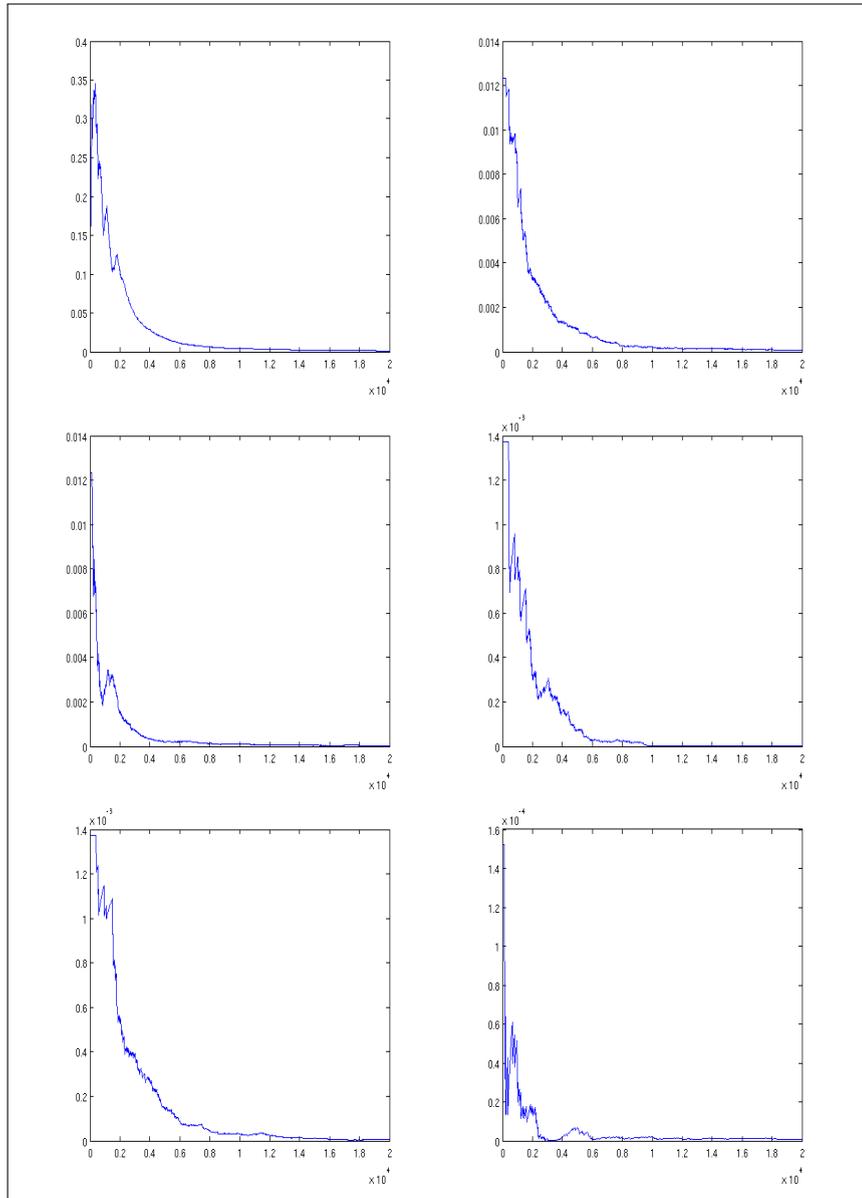


Figura 4.2: Simulaciones de los errores de convergencia para las simulaciones de la media de Cesàro del AC  $F_3$ .

## 3. Hay dos simulaciones

- a) Figura 4.3: Imágenes de iteraciones por AC  $F_4$ . Se considera  $n = 35000$ ,  $m_A = 5000$ ,  $M_L = 30000$ . Basándose en Nota 4.1.3 se consideran las instancias

$$T_{n,m_A,m_L}^{F_4}(w)_{[0,m_A],[0,m_A]} \text{ (lado izquierdo de la imagen) y}$$

$$T_{n,m_A,m_L}^{F_4}(w)_{[m_L-m_A,m_L],[0,m_A]} \text{ (lado derecho de la imagen),}$$

para tres distribuciones de Bernoulli distintas

$$(0,01; 0,01; 0,01; 0,97), (0,01; 0,01; 0,97; 0,01) \text{ y } (0,97; 0,01; 0,01; 0,01).$$

En la imagen los resultados para cada distribución aparecen en orden descendente.

- b) Figura 4.4: Imágenes de iteraciones por AC  $F_5$ . Se considera  $n = 35000$ ,  $m_A = 5000$ ,  $M_L = 30000$ . Basándose en Nota 4.1.3 se consideran las instancias

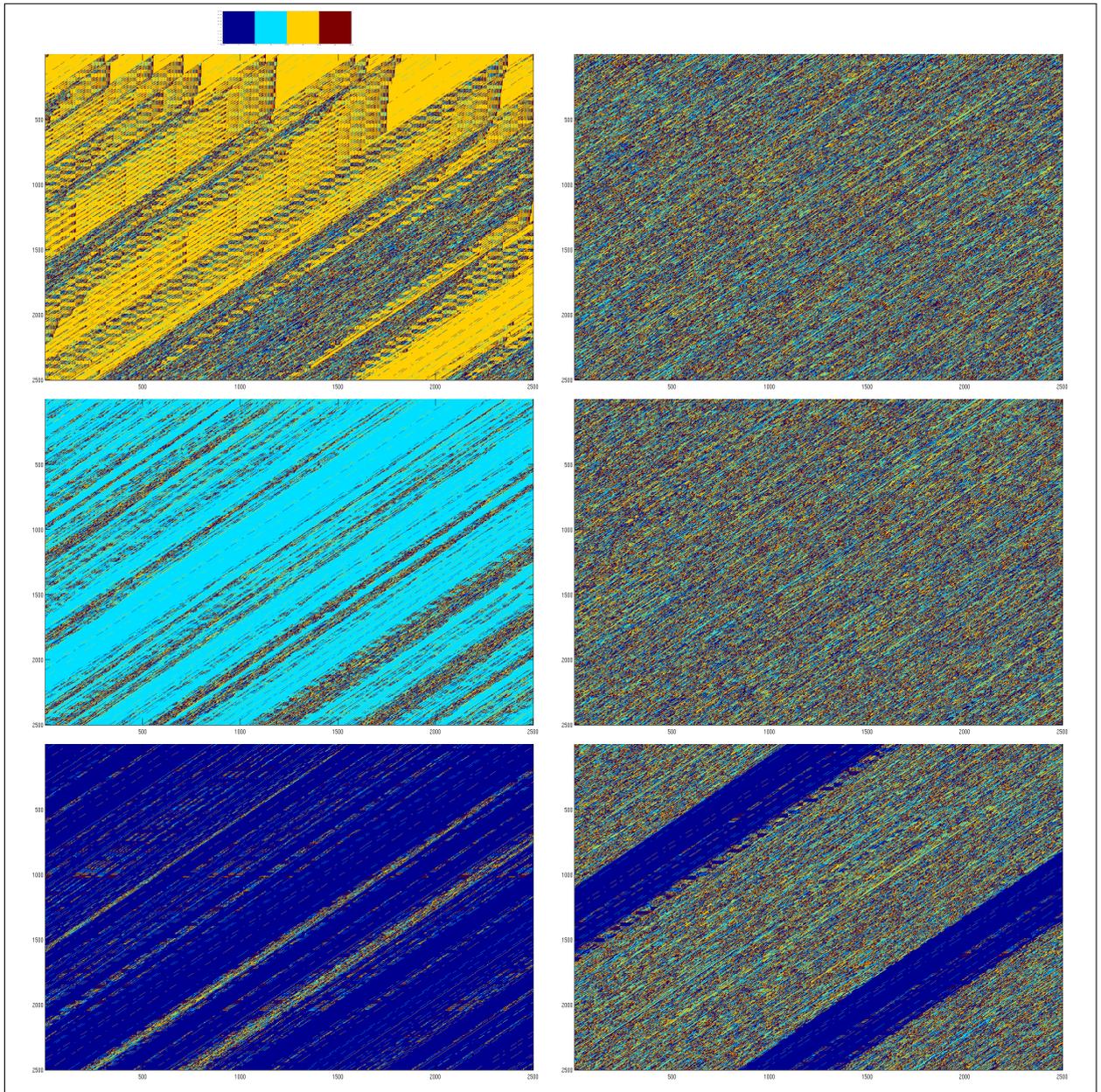
$$T_{n,m_A,m_L}^{F_5}(w)_{[0,m_A],[0,m_A]} \text{ (lado izquierdo de la imagen) y}$$

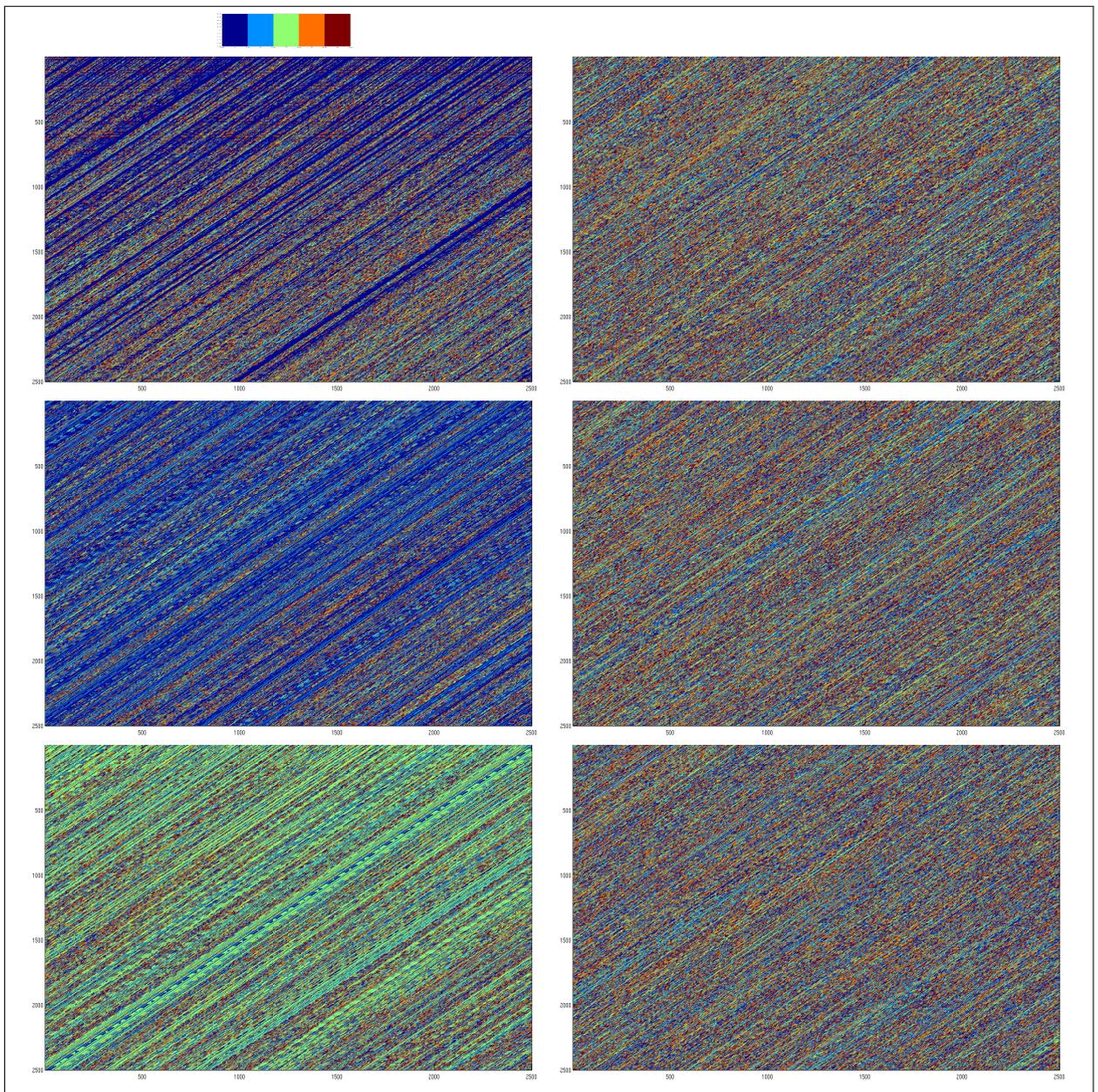
$$T_{n,m_A,m_L}^{F_5}(w)_{[m_L-m_A,m_L],[0,m_A]} \text{ (lado derecho de la imagen),}$$

para tres distribuciones de Bernoulli distintas

$$(0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,9), (0,6; 0,2; 0,1; 0,05; 0,05) \text{ y } (0,2; 0,1; 0,6; 0,05; 0,05).$$

En la imagen los resultados para cada distribución aparecen en orden descendente.

Figura 4.3: Simulación de medidas  $F_{4\mu}^n$ .

Figura 4.4: Simulación de medidas  $F_{5\mu}^n$ .

4. Figura 4.5: Implementación de Ejemplo 4.1.1 para evidenciar randomización asintótica del AC  $F_3$  con respecto a una medida de Bernoulli  $(0,01, 0,01, 0,98)$ . Se grafica en verde  $q_{i+1,0,m}$  y en rojo  $\binom{i+1}{m} \frac{2^{i+1-m}}{3}$  para  $m = 2, c = 0, i = 6, 7, \dots, 12$ .

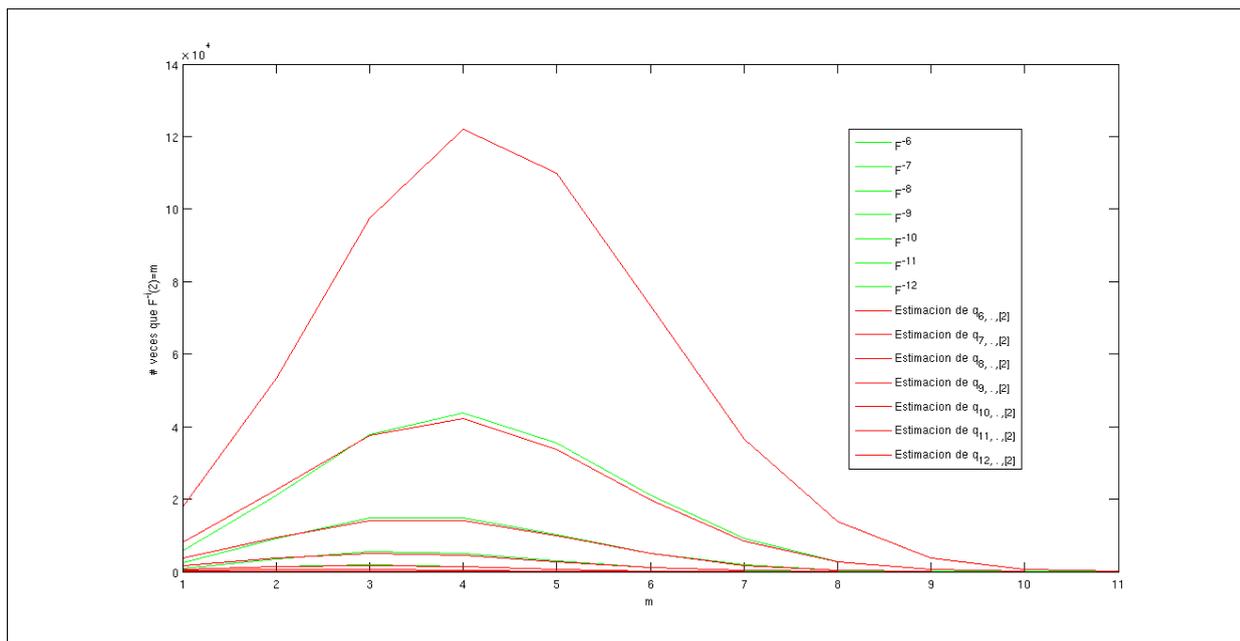


Figura 4.5: Crecimiento de  $q_{i,0,m} = q_i$ .

**Nota 4.2.1.** Las simulaciones fueron hechas en Matlab 7.6.0 en un computador con procesador Intel Core Duo T2300, Dual core, 1.66GHz, 667MHz FSB, 2MB L2 Cache.

## 4.3. Conclusiones

Se pretende justificar que la evidencia encontrada corresponde efectivamente a randomización asintótica. La sección está dividida en dos partes, primero se sintetiza cuando las simulaciones son evidencia de tal randomización, y segundo se discuten los resultados obtenidos.

### 4.3.1. Interpretaciones de resultados

Se esquematiza cuando un resultado es evidencia de randomización asintótica de la medida inicial.

1. (4.1.1) Cálculo explícito de la medida iterada.
  - Caso General: si se tiene que para  $n$  “grande”, para todo cilindro  $c = [c_1, \dots, c_m]$ 

$$F_\mu^n(c) \approx \frac{1}{3^m}.$$
  - Ejemplo: si se tiene la convergencia (4.2). Notar que este resultado es más débil que en el caso general, pues es equivalente a solo considerar los cilindros con una coordenada fija.

2. (4.1.2) Imagen iteraciones por AC : si para  $n, m_L, m_A > 0$  “enteros grandes” tal que cumplan la condición  $m_L \leq n + 1 - m_A$  se tiene que el bloque

$$T_{n, m_A, m_L}(w)_{[m_L - m_A, m_L], [0, m_A]}$$

no se puede “distinguir” de uno generado por una instancia de una distribución uniforme.

3. (4.1.3) Estimación de la medida iterada:

- Simulación medida iterada: Si dado un  $M > 0$  entero, para todo cilindro  $c = [c_1, \dots, c_m]$

$$S_{M, Nc} \rightarrow \frac{1}{3^m} \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

- Simulación media de Cesàro: Si dado un  $M > 0$  entero, para todo cilindro  $c = [c_1, \dots, c_m]$

$$\overline{S}_{M, Nc} \rightarrow \frac{1}{3^m} \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

- Test de hipótesis sobre  $Z$ : Si dado cierto  $m > 0$  entero y  $n$  “grande”, se tiene que en base a las observaciones de  $m$  instancias de  $Z_n$  que se acepta la hipótesis nula.
- Test de hipótesis sobre  $\overline{Z}$ : Si dado cierto  $m > 0$  entero y  $n$  “grande”, se tiene que en base a las observaciones de  $m$  instancias de  $\overline{Z}_n$  que se acepta la hipótesis nula.

### 4.3.2. Discusión de resultados

Primero se discute cada resultado, luego se obtiene las conclusiones generales. Más simulaciones fueron incorporadas en Anexo.

1. Figura 4.1: Los resultados que se obtienen sugieren que efectivamente se tiene la convergencia a la medida de Bernoulli uniforme. De hecho para todo cilindro  $c$  considerado se tiene que el error

$$|\overline{S}_{1, Nc} - \frac{1}{3^{|c|}}|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

El estudio de los errores para cada cilindro considerado se muestra en la Figura 4.2.

2. Hay dos simulaciones

- a) Figura 4.3: Imágenes de iteraciones por AC  $F_4$ . Los resultados que se obtienen sugieren que efectivamente se tiene la convergencia a la medida de Bernoulli uniforme y que es independiente de la medida de Bernoulli inicial considerada. Lo anterior es debido a que en las imágenes en el lado derecho no es posible diferenciar de la distribución de la medida uniforme.
- b) Figura 4.4: La conclusión es análoga al caso anterior.

3. Figura 4.5: El resultado evidencia randomización asintótica de la medida de Bernoulli  $(0,01; 0,01; 0,98)$  por el AC  $F_3$ , ya que se tiene la convergencia (4.2).

Todos los resultados anteriores evidencian que efectivamente se tiene convergencia asintótica de una medida iterada a la medida uniforme por los ACs  $F_3$  y  $F_5$  en *RANDOMES*, y más aún sugieren que es independiente de la distribución de Bernoulli inicial.

# Capítulo 5

## Randomización

Para entender la medida iterada por un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es fundamental poder describir  $F^{-n}([c]_0)$  para  $c \in \mathcal{A}$  y  $n$  “grande”. Supongamos que  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  es un AC de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . La acción  $F^n$ , i.e. la iteración  $n$  veces de la función  $F$ , se puede interpretar como una función  $G : \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que para  $w \in \mathcal{A}^{n+1}$  y  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ,  $G(w) = F^n(wx)_0$ . Con esta interpretación, dado  $c \in \mathcal{A}$ ,  $F^{-n}([c]_0)$  corresponde al conjunto solución de la ecuación  $G(w_0, \dots, w_n) = c$ . Si esta ecuación es fácil de resolver, entonces  $F^{-n}([c]_0)$  es fácil de obtener. Notemos que gracias al Lema 2.1.12, si  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo, entonces todo AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  está definido por una regla local algebraica, en el sentido de que es un polinomio a coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ . Luego, en este caso, se tiene que la función  $G$  definida antes también es un polinomio, y entonces resolver la ecuación  $G(w_0, \dots, w_n) = c$ , se reduce a encontrar las raíces de un polinomio. Como  $\mathbb{Z}_p$  es un cuerpo finito, y existe una teoría para estudiar las funciones polinomiales en cuerpos finitos, parece razonable estudiar la iteración de medidas de probabilidad desde este otro punto de vista. Usando esta idea, a cada AC  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con  $p$  primo, le asociaremos una familia de polinomios a coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ ,  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Primero enunciaremos la nomenclatura típica en el estudio de polinomios sobre cuerpos finitos, luego reescribiremos en este contexto resultados conocidos para la medida iterada, y finalmente extenderemos algunas ideas usadas en ACs a familias de polinomios en general.

### 5.1. Notación y definiciones

Sea  $p$  un primo. Sea  $\mathbb{F}_p$  el cuerpo finito con  $p$  elementos, que puede ser identificado con  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , y para un entero  $n \geq 1$  escribamos  $\mathbb{F}_p^n$  para el espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{F}_p$ , el que se entenderá tiene una base  $(e_1, \dots, e_n)$ , con respecto a la cual puede descomponerse  $x \in \mathbb{F}_p^n$  por  $(x_1, \dots, x_n)$ . Escribamos  $N = p^n$ .

El conjunto de caracteres  $\chi : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{S}^1$  está dado por las funciones  $\chi_\xi$ , definidas por

$$\chi_\xi(x) = \chi_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x) = w^{\xi^T x},$$

donde  $\xi \in \mathbb{F}_p^n$  y  $w = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ . Para cada  $\xi \in \mathbb{F}_p^n$ , se define la *transformada de Fourier* de una función  $f : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$  mediante

$$\hat{f}(\xi) \doteq \sum_{x \in \mathbb{F}_p^n} f(x) \chi_\xi(x) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^n} f(x) w^{\xi^T x}.$$

**Definición 5.1.1** (Derivada multiplicativa). Dada una función  $f : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $h \in \mathbb{F}_p^n$ , definimos la derivada multiplicativa  $\Delta_h f(x) : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$  por la fórmula

$$\Delta_h f(x) \doteq f(x+h)\overline{f(x)}.$$

**Definición 5.1.2** (Derivada aditiva). Dada una función  $P : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  y  $h \in \mathbb{F}_p^n$ , definimos la derivada aditiva  $D_h P(x) : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  por la fórmula

$$D_h P(x) \doteq P(x+h) - P(x).$$

Notar que para  $f = e_{\mathbb{F}}(P)$  tal que  $e_{\mathbb{F}}(j) \doteq e^{2\pi ij/p}$  para  $j = 0, \dots, p-1$  (donde  $P : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ ), se tiene que  $\Delta_h f = e_{\mathbb{F}}(D_h P)$ .

Dado un entero  $d \geq 0$ , decimos que una función  $P : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  es un *polinomio de grado a lo más  $d$*  si se tiene que  $D_{h_1} \cdots D_{h_{d+1}} P = 0$  para todo  $h_1, \dots, h_{d+1} \in \mathbb{F}_p^n$ , y denotamos  $\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$  el espacio de los polinomios en  $\mathbb{F}_p^n$  de grado a lo más  $d$ .  $\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$  es un espacio vectorial con la base formada por los monomios  $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$  para  $0 \leq i_1, \dots, i_n < p$  y  $i_1 + \cdots + i_n \leq d$ . Esta base la denotaremos por  $B\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$ . Decimos que una función  $f : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$  es un *polinomio de fase de grado a lo más  $d$*  si es de la forma  $f = e_{\mathbb{F}_p}(P)$  con  $P \in \mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$ .

**Definición 5.1.3** (Rank). Sea  $d \geq 0$ , y  $P : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  una función, definimos  $rank_d(P)$  como el menor entero  $k \geq 0$  para el cual existen polinomios  $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$  y una función  $B : \mathbb{F}_p^k \rightarrow \mathbb{F}_p$  tal que  $P = B(Q_1, \dots, Q_k)$ . Si tal  $k$  no existe se define como infinito.

**Definición 5.1.4** (Rango). Sea  $d \geq 0$  un entero y  $P : \mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$  una función, definimos el *rango de grado  $d$*  de  $P$ , denotado  $rango_d(P)$ , como el menor entero  $k \geq 0$  tal que existen  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{F}_p$  y  $\{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset B\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_p^n)$  tal que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i = P$ .

## 5.2. Motivación y ejemplos

En general, dado un AC  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , se le puede asociar la familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definidos por  $G_n : \mathbb{Z}_p^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  tal que a  $x \in \mathbb{Z}_p^{n+1} \mapsto G_n(x) = F^n(xw)_0 \in \mathbb{Z}_p$ , para  $w \in \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$  cualquiera.

### Ejemplo 5.2.1.

- Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  el shift, i.e. para  $x \in \mathbb{Z}_p$ ,  $F(x)_i = x_{i+1}$ . En este caso se tiene que la familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que  $G_n(x_0, \dots, x_n) = x_n$ .
- Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  un AC afín tal que para  $x \in \mathbb{Z}_p$ ,  $F(x)_n = \mu x_n + \nu x_{n+1}$  para  $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_p^*$ . Entonces se tiene que la familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que

$$G_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \nu^k x_k.$$

Veamos algunas propiedades elementales.

**Lema 5.2.2.** Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces la condición siguiente es equivalente a la noción de positiva expansividad en ACs. Para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $m > n$  tal que para cada vector fijo  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{Z}_p^n$  existen  $(x_n, \dots, x_m), (y_n, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}_p^{m-n}$  tales que  $G_m(x_0, \dots, x_m) \neq G_m(x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, \dots, y_m)$ .

**Lema 5.2.3.** Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces la existencia de una dirección de equicontinuidad en ACs implica la siguiente condición. Existe un  $n \in \mathbb{N}$  y  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m > n$ ,  $G_m(x_0, \dots, x_m)$  depende de  $k$  variables.

**Lema 5.2.4.** Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Entonces la existencia de una palabra bloqueante implica la siguiente condición. Existe  $n \in \mathbb{N}$  y  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1}$  tal que para todo  $m > n$ ,  $G_m(x_0, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_m)$  no depende de  $(y_{n+1}, \dots, y_m)$ .

**Ejemplo 5.2.5.** Sea el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  con regla local  $f(x, y) = x^2y + y$ . Este AC es claramente positivamente expansivo, pues para la familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $G_n(x_0, \dots, x_n) = P_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_n$  para  $P_n$  un polinomio. Sin embargo, el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, \sigma^{-1} \circ F)$  tiene palabras bloqueantes. De hecho, este AC tiene regla local  $f(x, y) = y^2x + x$ , luego  $G_n(x_0, \dots, x_n) = x_0 P'_n(x_1, \dots, x_n)$  para  $P'_n$  un polinomio. De donde se deduce inmediatamente que 0 es palabra bloqueante.

El siguiente ejemplo es un problema abierto para esta memoria.

**Ejemplo 5.2.6.** Consideremos el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  con regla local  $f(x, y) = x^2 + y$ . Este AC es claramente positivamente expansivo por la misma razón que el ejemplo anterior. Sin embargo, no se sabe si el AC  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, \sigma^{-1} \circ F)$  tiene palabras bloqueantes. En este caso la regla local es  $f(x, y) = x + y^2$  y se puede demostrar que  $G_n(x_0, \dots, x_n) = P_n^0(x_0, \dots, x_{n-1}) + x_n^2 P_n^1(x_1, \dots, x_{n-1}) + x_n^2$ , para  $P_n^0, P_n^1$  polinomios. Para probar que no hay palabras bloqueantes bastaría demostrar que para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y cualquier vector  $(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}_p^{k+1}$  existe un  $m > k$  y un vector  $(y_{k+1}, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}_p^{m-k}$  tal que  $P_n^1(x_1, \dots, x_{n-1}, y_{k+1}, \dots, y_m) \neq 2$ . La prueba anterior de hecho demostraría que el AC original  $(\mathbb{Z}_3^{\mathbb{N}}, F)$  no tiene palabras bloqueantes en ninguna dirección, ya que este AC es permutativo a la derecha, y entonces no tiene palabras bloqueantes en direcciones distintas a  $-1$ .

## 5.3. Resultados

Motivados principalmente por [FMMN00], llevaremos algunos resultados de ACs al contexto más general de familias de polinomios a coeficientes en cuerpos finitos.

Sea  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  un AC con vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  y sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la familia de polinomios asociadas. Para tener randomización asintótica de una medida de probabilidad en  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$  hay que verificar que para todo cilindro  $[c]_i$  para  $c \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(F^{-n}[c]_i) \rightarrow p^{-|c|} \text{ cuando } N \rightarrow \infty.$$

Una condición necesaria para tener la convergencia anterior, es que para todo  $c \in \mathbb{Z}_p$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(F^{-n}[c]_0) \rightarrow p^{-1} \text{ cuando } N \rightarrow \infty,$$

que en términos de la familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , significa que existe  $D \subset \mathbb{N}$  de densidad de Cesàro 1, tal que para todo  $c \in \mathbb{Z}_p$

$$\mu(\{[x_0, \dots, x_n]_0 : G_n(x_0, \dots, x_n) = c\}) \rightarrow p^{-1} \text{ cuando } n \in D \rightarrow \infty.$$

Veremos que la idea usada por Ferrari, Maass, Martínez y Ney en [FMMN00] para demostrar que

$$\mu(\{[x_0, \dots, x_n]_0 : \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \nu^k x_k = c\}) \rightarrow p^{-1} \text{ cuando } n \in D \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

se puede adaptar fácilmente para demostrar que este fenómeno también ocurre para familias de polinomios  $(G'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  que no están necesariamente asociados a ACs.

En [FMMN00] se demuestra (5.1). De hecho se prueba que para una familia de polinomios  $(G'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $G'_n \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_n]$ , definidos por la recurrencia siguiente:  $G'_0(x_0) = a_0 x_0$ ,  $G'_n(x_0, \dots, x_n) = G'_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + a_{n+1} x_{n+1}$  con  $a_i \in \mathbb{Z}_p$  y  $\mathbb{P}$  una medida en  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$  invariante bajo translaciones, con conexión completa, decaimiento sumable y  $\underline{w} \in \mathbb{Z}_p^{-\mathbb{N}^*}$  se verifica

$$\left| \mathbb{P}_{\underline{w}}(G'_n = g) - (p)^{-1} \right| \leq \epsilon(\text{Rango}_1(G'_n)) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, g \in \mathbb{Z}_p, \quad (5.2)$$

para  $\epsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una función decreciente a 0.

### Esquema de demostración de (5.2)

Denotemos  $H \doteq \mathbb{Z}_p$ . Dada  $\mathbb{P}$  una medida en  $H^{\mathbb{Z}}$  invariante bajo translaciones, con conexión completa, decaimiento sumable y  $\underline{w} \in H^{-\mathbb{N}^*}$ . Se construye una secuencia aleatoria  $\underline{x}$  de distribución  $\mathbb{P}_{\underline{w}}$ . Para esto se define

$$a_{-1}(h|\underline{w}) \doteq \inf_{h \in H, \bar{v} \in H^{-\mathbb{N}^*}} \mathbb{P}\{x_0 = h | x_i = \bar{v}_i, i \leq -1\},$$

y para cada  $h \in H$  se define

$$a_0(h|\underline{w}) \doteq \inf_{\bar{v} \in H^{-\mathbb{N}^*}} \mathbb{P}\{x_0 = h | x_i = \bar{v}_i, i \leq -1\}.$$

Para cada  $h \in H$  y  $k \in \mathbb{N}^*$  se define

$$a_k(h|\underline{w}) \doteq \inf_{\bar{v} \in H^{-\mathbb{N}^*}} \mathbb{P}\{x_0 = h | x_i = \bar{v}_i, -k \leq i \leq -1, x_i = \bar{v}_i, i < -k\}.$$

Luego, se definen intervalos disjuntos contenidos en  $[0, 1]$ ,  $\{B_k(h|\underline{w})\}_{k \in \{-1, 0, \dots\}, h \in H}$ , tales que la medida de Lebesgue de  $B_{-1}(h|\underline{w})$  sea  $a_{-1}(h|\underline{w})$ , y para cada  $k \in \mathbb{N}$  la medida de Lebesgue de  $B_k(h|\underline{w})$  sea  $a_k(h|\underline{w}) - a_{k-1}(h|\underline{w})$ . Sea  $(U_n : n \in \mathbb{Z})$  una sucesión bi-infinita de variables aleatorias i.i.d. y uniforme en  $[0, 1]$ . Se define el espacio inducido por

estas variables aleatorias  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Finalmente se construye la secuencia aleatoria  $\bar{x}$  de distribución  $\mathbb{P}_{\bar{w}}$ , de la siguiente manera. Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \doteq \sum_{h \in H} \left[ \sum_{l \geq -1} 1\{U_n \in B_l(h|x_{n-1}, \dots, x_0, \underline{w})\} \right].$$

Se define para cada  $a \in \mathbb{N}$   $a_k \doteq \min_{\underline{w}} \{\sum_{h \in H} a_k(h|\underline{w})\}$ . Se definen los tiempos

$$T_1 \doteq \min\{n \geq 0 : U_{n+j} \leq a_{j-1}, j \geq 0\},$$

$$T_i \doteq \min\{n > T_{i-1} : U_{n+j} \leq a_{j-1}, j \geq 0\},$$

para  $i > 1$ . Se define el proceso de conteo  $\mathbb{N}$  inducido por  $(T_i : i \geq 1)$ : Para  $A \subset \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$N(A) \doteq \sum_{i \geq 1} 1\{T_i \in A\}.$$

Se demuestra que  $N$  cumple las hipótesis del Lema 5.3.1 y que las variables  $(x_{T_i} : i \geq 0)$  son i.i.d y están uniformemente distribuidas en  $H$ .

**Lema 5.3.1** (Ferrari, Maass, Martínez, Ney). *Si  $N$  es un proceso de renovación estacionario con tiempo medio entre renovaciones finito. Entonces para todo  $A \subset \mathbb{N}$ ,*

$$\mathbb{P}(N(A) = 0) \leq \epsilon(\#A)$$

con  $\epsilon : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una función decreciente a 0.

De la definición de  $(G'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se obtiene una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ . Definamos la subsucesión  $(a_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  tal que  $a_{n_m} \neq 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Definiendo  $\tau \doteq \inf\{k \in \mathbb{N} : N(n_k) = 1\}$ ,  $q \doteq (\#H)^{-1}$  y  $n^* \doteq \text{Rango}_1(G'_n)$  se deduce que demostrar (5.2) es equivalente a probar

$$\mathbb{P}(G'_n = g | \tau \leq n^*) = q\mathbb{P}(\tau \leq n^*), \quad (5.3)$$

ya que en este caso

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(G'_n = g) - q| &= |q\mathbb{P}(\tau \leq n^*) - q + \mathbb{P}(G'_n = g | \tau > n^*)| \\ &= |-q\mathbb{P}(\tau > n^*) + \mathbb{P}(G'_n = g | \tau > n^*)| \leq 2\mathbb{P}(\tau > n^*) \leq 2\epsilon(n^* + 1), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene del Lema 5.3.1.

### Familias de polinomios que randomizan asintóticamente una medida de probabilidad inicial

Veremos que hay otras familias de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no necesariamente asociadas a ACs que también satisfacen (5.3). Luego, para estos polinomios también se verifica (5.2).

**Definición 5.3.2.** Sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de polinomios con  $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_n]$ , sea  $\mathbb{P}$  una medida de probabilidad en  $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{Z}}$  invariante bajo translaciones, con conexión completa, decaimiento sumable,  $\underline{w} \in \mathbb{Z}_p^{-\mathbb{N}^*}$  y  $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots)$  una secuencia aleatoria de distribución  $\mathbb{P}_{\underline{w}}$ . Además sea  $U$  una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $\mathbb{Z}_p$ . Diremos que la familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisface la condición  $(*_1)$  si existe un conjunto  $D \subset \mathbb{N}^*$  con densidad de Cesàro 1, tal que para todo  $n \in D$  y para todo  $m \in [n+1]$  la variable aleatoria  $G_n(x_0, \dots, x_{m-1}, U, x_{m+1}, \dots, x_n)$  está uniformemente distribuida en  $\mathbb{Z}_p$ .

**Definición 5.3.3.** Sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de polinomios con  $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_n]$ . Diremos que la familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisface la condición  $(*_2)$  si existe una función  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente y un conjunto  $D \subset \mathbb{N}$  con densidad de Cesàro 1, tal que para todo  $n \in D$ ,  $G_n(x_0, \dots, x_n)$  depende de  $\phi(n)$  variables y depende de todas las variables que dependía  $G_m(x_0, \dots, x_m)$ , para  $m$  el mayor entero en  $D$  que es estrictamente menor que  $n$ .

**Proposición 5.3.4.** Dada una familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La condición  $(*_1) + (*_2)$  es una condición suficiente para tener randomización asintótica de una medida inicial invariante bajo translaciones, con conexión completa y decaimiento sumable.

**Demostración.** Supongamos  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de polinomios satisfaciendo la condición  $(*_1) + (*_2)$ . Tomemos  $D = D_1 \cap D_2 \subset \mathbb{N}$ , para  $D_1$  el conjunto de densidad de Cesàro 1 de  $(*_1)$  y  $D_2$  el respectivo de  $(*_2)$ . Denotemos  $D \doteq \{n_1, n_2, \dots\}$ . Para cada  $n \in D$  sean  $R_n \subset [n]$  los conjuntos de índices tales que  $G_n$  depende de las variables con índices en  $R_n$ . De  $(*_1)$  se tiene que  $R_{n_1} \subset R_{n_2} \subset \dots$ . Definamos  $R \doteq \cup_{k \geq 0} R_{n_k}$ . Considerando el orden natural en  $\mathbb{N}$  numeramos los elementos de  $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ . Definimos  $\tau \doteq \min\{k \in \mathbb{N} : N(r_k) = 1\}$ , con  $N$  el proceso de renovación en el esquema de demostración de (5.3). Luego, de  $(*_1)$  se tiene que para  $n \in D$  y  $k \in \{0, \dots, N\}$

$$\mathbb{P}(G_n = g | \tau = k) = \frac{1}{p}.$$

De la misma manera que en [FMMN00], esto se usa para demostrar que

$$\mathbb{P}\{G_n = g | \tau \leq N\} = \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(G_n = g | \tau = k) = \frac{1}{p} \mathbb{P}(\tau \leq N).$$

Aplicando el mismo argumento que en la última parte del esquema de demostración de (5.2), obtenemos que

$$\left| \mathbb{P}(G_n = g) - \frac{1}{p} \right| \leq 2\epsilon(N).$$

Finalmente de  $(*_2)$  se concluye el resultado.  $\square$

Algunos ejemplos de familias cumpliendo las hipótesis de la última proposición son las siguientes.

### Ejemplo 5.3.5.

- Para un primo  $p > 2$  considerar la familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  tales que para  $n$  par

$$G_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n/2} x_{2k}^{p-1} + \sum_{k=0}^{n/2-1} x_{2k+1}^{p-2},$$

y cuando  $n$  es impar

$$G_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} x_{2k}^{p-1} + \sum_{k=0}^{(n-1)/2} x_{2k+1}^{p-2}.$$

- Consideremos  $P$  el conjunto de los números primos. Para un primo  $p$  considerar la familia de polinomios  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$  tales que

$$G_n(x_0, \dots, x_n) = (p-1)x_0 + \sum_{i \in [n] \cup P} x_i^2.$$

El argumento complicado para generalizar esta demostración al caso de familias de polinomios asociadas a ACs con regla local no lineal es poder demostrar una condición análoga a  $(*_1)$ . No se consiguió obtener tal generalización, pero se plantea una conjetura.

**Conjetura 5.3.6.** *Sea  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de polinomios con  $G_n \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_n]$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{x \in \mathbb{Z}_p^{n+1}} e_{\mathbb{F}_p}(G_n(x_0, \dots, x_n)) = 0$ . Sea  $D$  de densidad de Cesàro 1. Sean  $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función no decreciente y  $\phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  función estrictamente creciente. Si para cada  $n \in D$ , el  $\text{rank}_1(G_n) = \phi_1(n)$  y a la vez para los polinomios  $Q_1, \dots, Q_{\phi_1(n)}$  tales que existe una función  $B : \mathbb{Z}_p^{\phi_1(n)} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  con  $G_n = B(Q_1, \dots, Q_{\phi_1(n)})$  se satisface  $\text{rango}_1(Q_i) \geq \phi_2(n)$  para todo  $i$ . Entonces  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  randomiza asintóticamente una medida invariante bajo translaciones, de conexión completa y decaimiento sumable.*

Recordar que en el caso de un AC  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$  afín tal que para  $x \in \mathbb{Z}_p$ ,  $F(x)_n = \mu x_n + \nu x_{n+1}$  para  $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_p^*$ . Se tiene que la familia de polinomios asociada  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que

$$G_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \nu^k x_k.$$

Luego, estas familias de polinomios satisfacen la conjetura anterior, ya que en este caso se tiene que  $\text{rank}_1(G_n) = 1$  constante y que  $\text{rango}_1(G_n)$  es estrictamente creciente.

## 5.4. Conclusiones

A cada AC  $(\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}, F)$ , para  $p$  primo, se le asoció una familia de polinomios a coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ . Se estableció un análogo entre estudiar propiedades de randomización asintótica por el AC y estudiar propiedades de su polinomio asociado. La Proposición 5.3.4 permite extender el concepto de randomización asintótica a familias de polinomios que no tienen necesariamente un AC asociado. La Conjetura 5.3.6 plantea una alternativa para demostrar randomización asintótica de la iteración de medidas por ACs que no tiene propiedades algebraicas.

## Capítulo 6

# Autómatas Celulares positivamente expansivos

El estudio de las medidas iteradas por ACs sugirió buscar en la clase de ACs positivamente expansivos. En el Capítulo 2 se demostró que los ACs positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  sobre alfabetos de cardinal primo son los permutativos a la derecha. En [BM97] Blanchard y Maass encuentran una generalización de los ACs permutativos a la derecha que son expansivos, y construyen para  $s = k_1 k_2$  con  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  una familia de ACs epiyectivos de vecindad  $(0, 1)$  definidos por  $F_{k_1, k_2}(x)_i = k_1 l_{x_i} + f_{x_{i+1}}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_s^{\mathbb{N}}$  donde para  $a \in \mathbb{Z}_s$ ,  $f_a \in \mathbb{Z}_{k_1}$ ,  $l_a \in \mathbb{Z}_{k_2}$  son tales que  $a = f_a k_2 + l_a$ . Además demuestran que el AC  $F_{k_1, k_2}$  es positivamente expansivo si y solo si  $k_2$  divide a una potencia positiva de  $k_1$ . Este último ejemplo no es permutativo a la derecha y no es permutativo en el sentido de la generalización de éstos en [BM97]. Sin embargo, la falta de ejemplos de ACs positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  (y expansivos en general) sobre alfabetos de cardinal no primo ha sido algo que ha llamado fuertemente mi atención. Como se mencionó en el Capítulo 2, los ACs de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con alfabeto de cardinal  $m \in \mathbb{N}^*$  están caracterizados por una matriz de  $m \times m$  a entradas en el alfabeto. Parece “complicado” determinar si una matriz define un AC expansivo.

Esta sección muestra una manera de construir ACs positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  de una manera no algebraica. La potencia de la construcción radica en su simplicidad y en que nos dá la posibilidad de obtener una familia “grande” de ACs positivamente expansivos. La idea está inspirada en la vieja idea de partículas en movimiento. Al final del capítulo se estudian propiedades dinámicas de la clase.

### 6.1. Construcción

En esta sección se pretende mostrar la construcción de ACs expansivos y positivamente expansivos de una manera no algebraica. La idea es colocar un número finito de partículas que se mueven de manera periódica en dirección al origen de modo tal que no interfieren con el movimiento de las otras. En este capítulo, consideraremos que los ACs se iteran hacia arriba. Motivaremos la definición con algunos ejemplos.

### 6.1.1. Ejemplos

**Ejemplo 6.1.1.** Supongamos hay partículas que se mueven en el vacío. Cada partícula tiene una manera predeterminada e idéntica de moverse. Los movimientos son secuencias de dos estados, durante una iteración la partícula permanece en una posición y luego se mueve hacia el origen en la iteración siguiente. En la siguiente figura se muestran iteraciones del AC descrito, después se definirá formalmente el modelo.

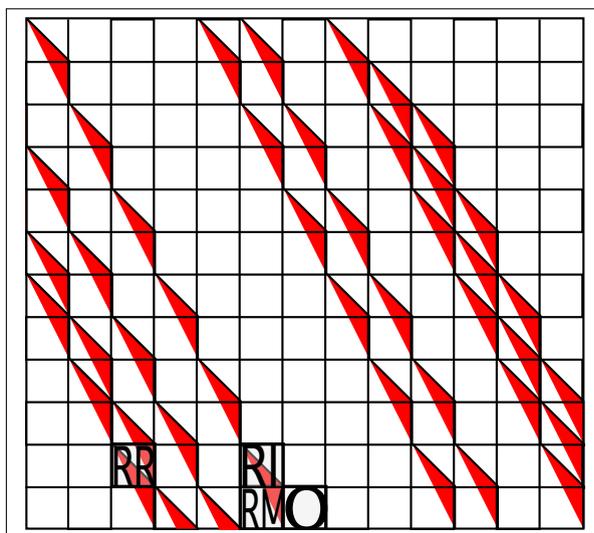


Figura 6.1: AC positivamente expansivo.

El AC tiene vecindad  $(0, 1)$  y actúa sobre un alfabeto de 4 letras  $\{O, RM, RI, RR\}$ . La regla local está dada por la matriz siguiente.

$$M = \begin{pmatrix} O & O & RM & RM \\ RI & RI & RR & RR \\ O & O & RM & RM \\ RI & RI & RR & RR \end{pmatrix},$$

indexada por  $O, RM, RI, RR$  en este orden. El AC quedará descrito por el movimiento de partículas. Donde una partícula siempre sigue la secuencia  $RM, RI, RM, RI, \dots$  y donde  $RM$  representa que en la siguiente iteración ocupará la misma posición y  $RI$  que en la siguiente iteración estará una coordenada más a la izquierda. El estado  $O$  representa el vacío. El estado  $RR$  se produce cuando dos partículas ocupan una misma celda. No puede darse que más de dos partículas ocupen una misma celda, por lo que el alfabeto queda bien definido. El AC descrito no es permutativo a la derecha, sin embargo, es positivamente expansivo. De hecho, es el AC definido en [BM97] por  $F_{2,2}(x)_i = 2l_{x_i} + f_{x_{i+1}}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$  donde para  $a \in \mathbb{Z}_4$ ,  $f_a \in \mathbb{Z}_2$ ,  $l_a \in \mathbb{Z}_2$  son tales que  $a = 2f_a + l_a$ , que representa la multiplicación por 2 en base 4. En [BM97] se prueba en la Proposición 4.2 que la multiplicación por  $k_1$  en base  $k_1 k_2$  es positivamente expansiva si y solo si  $k_2$  divide a una potencia de  $k_1$ . Como en este caso  $k_1 = k_2 = 2$  se tiene que la proposición en particular prueba que el AC construido en este ejemplo es positivamente expansivo.

**Ejemplo 6.1.2.** Con la misma idea del ejemplo anterior construiremos otro AC positivamente expansivo. En este caso cada partícula debe permanecer en la misma posición tres

iteraciones y luego desplazarse a la izquierda. El movimiento de cada partícula no interfiere con el de otra si es que momentáneamente tuvieran que ocupar la misma posición. El movimiento de una partícula sin interferencia por el de otras se muestra en la siguiente figura.

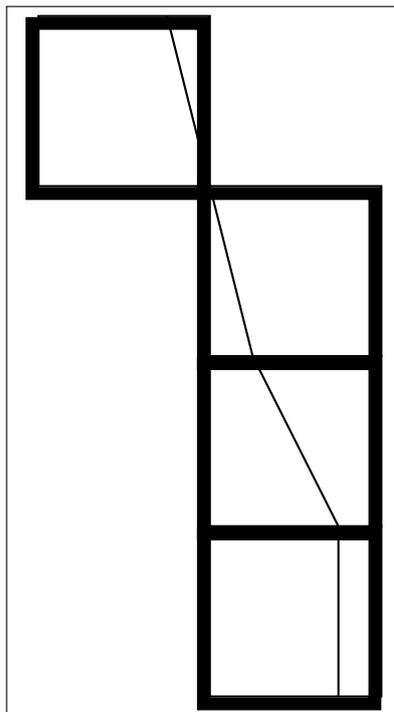


Figura 6.2: Movimiento de una partícula en el vacío.

La definición del movimiento de una partícula es suficiente para determinar el AC asociado a éste. Notemos que el movimiento de una partícula depende solamente de su posición en una vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  en cada instante. Además, con el movimiento descrito, nunca pueden ocupar una misma posición al mismo tiempo más de cuatro partículas, luego podemos definir un alfabeto finito asociado al AC, este AC es tal que la información de cada partícula no se pierde, y cada partícula se mueve hacia la izquierda, luego determina un AC positivamente expansivo. Detallaremos estas ideas cuando formalicemos el modelo. En este ejemplo se encuentra que el alfabeto  $\mathcal{A}$  tiene cardinalidad 16, y se muestra a continuación.

El AC obtenido es positivamente expansivo y de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . Para representar la regla local usaremos una matriz  $M$  de  $16 \times 16$  a entradas en  $0, \dots, 15$ , indexada por  $0, \dots, 15$ . Notar que esto es equivalente a hacer una conjugación uno-bloque con un AC a alfabeto  $\mathcal{A}' = \{0, \dots, 15\}$ .

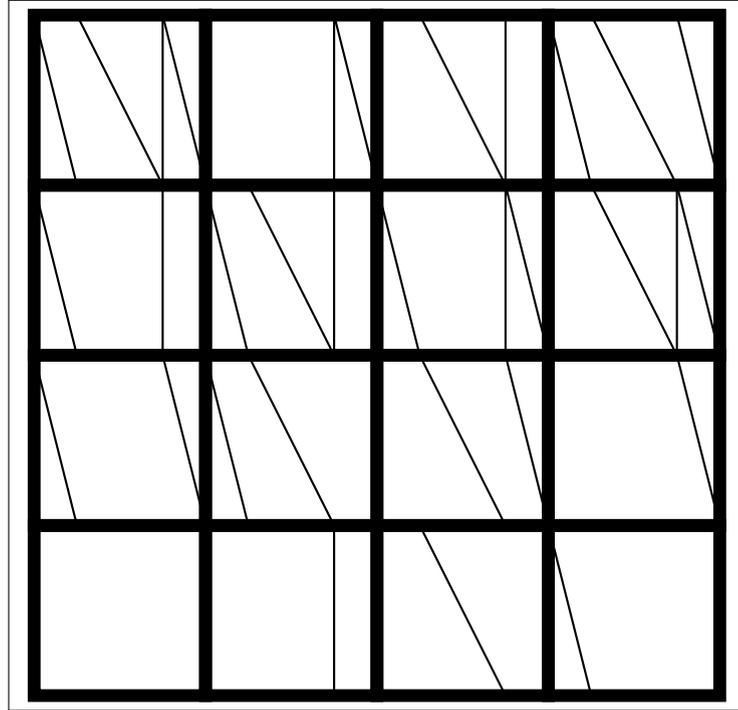


Figura 6.3: Alfabeto del AC.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 15 & 4 & 4 & 15 & 1 & 15 & 0 & 15 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 13 & 13 & 5 & 11 & 5 & 5 & 11 & 13 & 11 & 2 & 11 & 13 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 8 & 8 & 7 & 10 & 7 & 7 & 10 & 8 & 10 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 15 & 4 & 4 & 15 & 1 & 15 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 15 & 4 & 4 & 15 & 1 & 15 & 0 & 15 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 8 & 8 & 7 & 10 & 7 & 7 & 10 & 8 & 10 & 3 & 10 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 8 & 8 & 7 & 10 & 7 & 7 & 10 & 8 & 10 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 15 & 4 & 4 & 15 & 1 & 15 & 0 & 15 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 13 & 13 & 5 & 11 & 5 & 5 & 11 & 13 & 11 & 2 & 11 & 13 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 9 & 9 & 12 & 14 & 12 & 12 & 14 & 9 & 14 & 6 & 14 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 13 & 13 & 5 & 11 & 5 & 5 & 11 & 13 & 11 & 2 & 11 & 13 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 9 & 9 & 12 & 14 & 12 & 12 & 14 & 9 & 14 & 6 & 14 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 12 & 12 & 7 & 10 & 7 & 7 & 10 & 12 & 10 & 3 & 10 & 12 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 9 & 9 & 12 & 14 & 12 & 12 & 14 & 9 & 14 & 6 & 14 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 9 & 9 & 12 & 14 & 12 & 12 & 14 & 9 & 14 & 6 & 14 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 13 & 13 & 5 & 11 & 5 & 5 & 11 & 13 & 11 & 2 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Observar que se cumple la condición necesaria de expansividad de la Proposición 2.1.1. Recordemos que esta propiedad dice que en la matriz asociada a un AC positivamente expansivo todos los números aparecen en  $k_1$  filas  $k_2$  veces. En este caso se tiene que  $k_1 = k_2 = 4$ .

### 6.1.2. Formalización de la construcción

Motivaremos la construcción con el Ejemplo 6.1.2. La Figura 6.2 define lo que llamaremos posibles estados o formas de una partícula. De manera genérica, lo anterior se define mediante un alfabeto que denotamos por  $\mathcal{A}_0$ . La partícula puede permanecer en la misma coordenada o moverse a la izquierda, pero siempre debe cambiar de estado.

A cada estado le asociamos una letra  $S$  o  $L$  dependiendo si en la siguiente iteración la partícula permanecerá en la misma posición, o si la partícula se moverá una posición a la izquierda en la siguiente iteración, respectivamente. Esto particiona al alfabeto  $\mathcal{A}_0$  en  $\mathcal{A}_0^S$  y  $\mathcal{A}_0^L$ .

Definimos la especie de una partícula por una permutación que depende de los posibles estados, ver Figura 6.4.

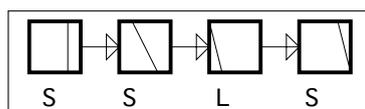


Figura 6.4: Representación de la especie.

De manera genérica, definimos una especie por un par ordenado  $(\mathcal{A}_0, R)$ , donde  $\mathcal{A}_0$  es el alfabeto y  $R : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$  una permutación. Por ejemplo, la Figura 6.5 muestra una partícula de la especie definida en el Ejemplo 6.1.2 adoptando una forma particular.

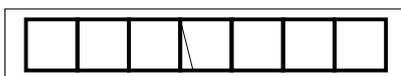


Figura 6.5: Forma de una partícula en cierto instante de tiempo.

Las iteraciones de solo una partícula queda completamente determinada por  $\mathcal{A}_0$ , como muestra la siguiente figura.

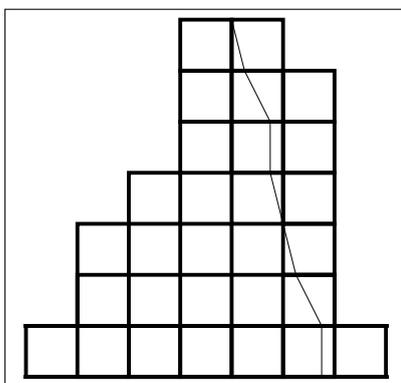


Figura 6.6: Partícula moviéndose en el tiempo.

Para estudiar las iteraciones de muchas partículas simultáneamente es necesario considerar en el alfabeto las posibles interacciones entre ellas. Por ejemplo, la Figura 6.7 muestra interacciones entre dos partículas.

Enunciaremos un lema que permite construir un AC positivamente expansivo a partir de una especie de partícula  $(\mathcal{A}_0, R)$ . Recordemos que consideramos que  $\mathcal{A}_0$  es el alfabeto asociado a la partícula que se particiona en dos conjuntos  $\mathcal{A}_0^L$  y  $\mathcal{A}_0^S$ , que permiten

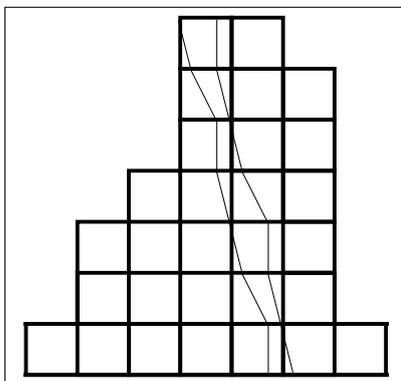


Figura 6.7: Interacción entre distintas partículas.

determinar si la partícula se moverá en la siguiente iteración a la izquierda ( $\mathcal{A}_0^L$ ), o si permanecerá en la misma posición. La función  $R : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$  es una permutación que describe las transiciones entre estados de la partícula.

**Lema 6.1.3.** *Dado un alfabeto  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^S \cup \mathcal{A}_0^L$  de cardinalidad  $m$ ,  $\mathcal{A}_0^L \neq \emptyset$  y una especie  $(\mathcal{A}_0, R)$ . Se puede definir un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo con regla local  $f$  de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , de la siguiente forma. Considerar  $\mathcal{A}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  con un orden arbitrario pero fijo. Definamos*

$$\mathcal{A} \doteq \{0, 1\}^m$$

y la regla local  $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , tal que para  $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{A}$ ,

$$f((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)) = (c_1, \dots, c_m),$$

donde  $c_i = 1$  si y solo si existe  $j \in [m]$  tal que  $a_j = 1$ ,  $R(x_j) = x_i$  y  $x_j \in \mathcal{A}_0^S$  o si existe  $j \in [m]$  tal que  $b_j = 1$ ,  $R(x_j) = x_i$  y  $x_j \in \mathcal{A}_0^L$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{A}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  el orden escogido y fijo de  $\mathcal{A}_0$ . Veamos que  $f$  está bien definida. Sean  $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{A}$ . Para cada  $i$ ,  $c_i$  está definido unívocamente como 0 o 1, luego está bien definida. Luego esto define a un AC de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . Veamos que es positivamente expansivo. Sean  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  dos configuraciones tales que  $j \in \mathbb{N}$  es el menor entero positivo con  $\bar{a}_j \neq \bar{b}_j$ . Demostraremos que existe  $n' \in \mathbb{N}$  tal que  $F^{n'}(\bar{a})_0 \neq F^{n'}(\bar{b})_0$ . Consideremos que  $\bar{a}_j = (a_1^j, \dots, a_m^j)$ ,  $\bar{a}_{j+1} = (a_1^{j+1}, \dots, a_m^{j+1})$  y  $\bar{b}_{j+1} = (b_1^{j+1}, \dots, b_m^{j+1})$ . Sin pérdida de generalidad  $a_1^j = 0$  y  $b_1^j = 1$ . Demostraremos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $F^n(\bar{a})_{j-1} \neq F^n(\bar{b})_{j-1}$  y por inducción concluiremos el resultado. Interpretemos el vector  $(0, \dots, a_m^j) \in \{0, 1\}^m$  como un indicador de la distribución de partículas en la coordenada  $j \in \mathbb{N}$  en  $t = 0$ . Si todo está en 0 quiere decir que no hay partículas en la coordenada, si hay un 1 en la posición  $j$  indica que hay una partícula en esa coordenada adoptando la forma  $x_j$ . Notemos que esto está bien definido, pues no pueden haber dos partículas distintas en una misma coordenada adoptando la misma forma, pues se comportarían siempre de manera idéntica (dado que todo su futuro y pasado queda determinado por la permutación  $R$ ), luego podría considerarse es una única partícula. Notar que la interpretación anterior es independiente de las definiciones. Luego, como  $a_1^j = 0$  y  $b_1^j = 1$  se tiene que: en la coordenada  $j$  en la instancia  $\bar{a}$  no hay ninguna partícula adoptando la forma  $x_1$ , pero en la coordenada  $j$  de la instancia  $\bar{b}$  sí hay una

partícula adoptando la forma  $x_1$ . Seguiremos la trayectoria de esta partícula hasta que se tenga que mover a la izquierda. En ese instante podremos obtener el resultado buscado. Notemos que en las hipótesis se tiene que  $\mathcal{A}_0^L \neq \emptyset$ , luego toda partícula en algún instante se mueve a la izquierda. Observar que la necesidad de que  $f$  tenga vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  es para poder hacer el movimiento a la izquierda cuando estemos siguiendo la trayectoria de la partícula en cuestión. Sea  $t \in [m]$  el menor entero positivo tal que  $R(x_0)^t \in \mathcal{A}_0^L$ . De la definición de la regla local del AC obtenemos que en la instancia  $F^t(\bar{b})$  en la coordenada  $j$  hay una partícula adoptando una forma  $x_k = R(x_0)^t \in \mathcal{A}_0^L$ , pero en la instancia  $F^t(\bar{a})$  en la coordenada  $j$  no hay ninguna partícula adoptando la forma  $x_k$ . Luego de la definición de la regla local  $F^{t+1}(\bar{b})_{j-1} = (c(b)_1, \dots, c(b)_m)$  es tal que para  $k'$  tal que  $x_{k'} = R(x_k)$   $c(b)_{k'} = 1$ , pero en  $F^{t+1}(\bar{a})_{j-1} = (c(a)_1, \dots, c(a)_m)$ ,  $c(b)_{k'} = 0$  ya que  $x_k \in \mathcal{A}_0^L$  y en la coordenada  $j$  de la instancia  $F^t(\bar{a})$  no hay ninguna partícula adoptando la forma  $x_k$ . Lo anterior concluye la demostración.  $\square$

**Teorema 6.1.4.** *Dado un alfabeto  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0^S \cup \mathcal{A}_0^L$  de cardinalidad  $m$ ,  $\mathcal{A}_0^L, \mathcal{A}_0^S \neq \emptyset$  y una especie  $(\mathcal{A}_0, R)$ . Entonces se puede construir un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  con  $\#\mathcal{A} = 2^m$  de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  que es positivamente expansivo y no permutativo.*

**Demostración.** Consideremos el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  construido a partir del Lema 6.1.3. Para demostrar que no es permutativo notar que como  $\mathcal{A}_0^S \neq \emptyset$ , entonces existen  $y, y' \in \mathcal{A}_0^S$  distintos, consideremos que en el orden de  $\mathcal{A}_0$ , considerado fijo antes de construir el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$ ,  $y = x_1$  y  $y' = x_k$ . Consideremos  $a = (0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^m$ ,  $b = (1, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^m$  y  $b' = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^m$  el vector de puros 0's salvo la coordenada  $k$ . De la definición de la regla local  $f$  del AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  se deduce que  $f(a, b) = f(a, b') = a$ , luego el AC construido no es permutativo.  $\square$

### 6.1.3. Generalizaciones de la construcción

El Lema 6.1.3 permite encontrar ACs positivamente expansivos sobre alfabetos de cardinalidades que son potencias de 2. Si la partícula puede adoptar  $k$  formas distintas, entonces la cardinalidad del alfabeto es  $2^k$ . Notar que cuando se restringe a la partícula a adoptar sólo una posición, en realidad se está considerando el shift en  $\{0, 1\}$ . La construcción anterior estuvo basada en el movimiento de una partícula de una única especie. Veremos que la misma idea puede generalizarse, de modo de construir ACs positivamente expansivos no permutativos sobre cualquier alfabeto de cardinalidad  $r^m$  para  $r, m \in \{2, \dots\}$ . Bastará considerar  $r - 1$  especies de partículas en que cada una puede adoptar  $m$  formas distintas de una manera compatible. Con lo anterior se podrá construir un AC positivamente expansivo no permutativo sobre cualquier alfabeto de cardinalidad  $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ , con  $p_1, \dots, p_n$  primos distintos y algún  $k_i > 1$ , simplemente tomando el AC producto de los  $n$  ACs construidos sobre alfabetos de cardinalidad  $p_i^{k_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

#### Primera Generalización

**Definición 6.1.5.** Sean  $r \in \{2, 3, \dots\}$  y  $m \in \mathbb{N}^*$ . Sean  $\mathcal{A}_0(i) = \mathcal{A}_0^S(i) \cup \mathcal{A}_0^L(i)$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ , alfabetos distintos de cardinalidad  $m$ , con  $\mathcal{A}_0(i)^L \neq \emptyset$ , y sean  $(\mathcal{A}_0(i), R_i)$   $r - 1$  especies. Diremos que las especies son compatibles si para cada par de especies  $(\mathcal{A}_0(i), R_i), (\mathcal{A}_0(j), R_j)$  con  $i \neq j$ , existe una función biyectiva  $\phi_{i,j} : \mathcal{A}_0(j) \rightarrow \mathcal{A}_0(i)$  tal que  $R_i \circ \phi_{i,j} = \phi_{i,j} \circ R_j$  y  $\phi_{i,j}(\mathcal{A}_0(j)^S) = \mathcal{A}_0(i)^S$ . Diremos que  $r - 1$  especies compatibles

$(\mathcal{A}_0(i), R_i)$  para  $i = 1, \dots, r-1$ , con alfabetos distintos  $\mathcal{A}_0(i) = \mathcal{A}_0^S(i) \cup \mathcal{A}_0^L(i)$  de cardinalidad  $m$ , son especies compatibles ordenadas de cardinalidad  $m$ , si  $\mathcal{A}_0(1)$  tiene un orden arbitrario pero fijo, i.e.  $\mathcal{A}_0(1) = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , y los otros alfabetos están ordenados de acuerdo al orden dado por  $\phi_{1,\cdot}$  y  $\mathcal{A}_0(1)$ , i.e. para cada  $j \in \{2, \dots, r-1\}$  consideramos  $\mathcal{A}_0(j) = (\phi_{1,j}^{-1}(x_1), \phi_{1,j}^{-1}(x_2), \dots, \phi_{1,j}^{-1}(x_m))$ .

**Lema 6.1.6.** *Dadas  $r-1$  especies compatibles ordenadas de cardinalidad  $m$ ,  $(\mathcal{A}_0(i), R_i)$  con  $i = 1, \dots, r-1$  y tales que  $\mathcal{A}_0(1)^L \neq \emptyset$ , donde cada alfabeto se considera  $\mathcal{A}_0(i) = (x_1(i), \dots, x_m(i))$  para  $i = 1, \dots, r-1$ .*

*Se puede definir un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  donde  $\#\mathcal{A} = r^m$ , con regla local  $f$  de vecindad  $(0, 1)$  y positivamente expansivo, de la siguiente forma. Definamos*

$$\mathcal{A} \doteq \{0, 1, \dots, r-1\}^m,$$

y la regla local  $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , tal que para  $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{A}$ ,

$$f((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)) = (c_1, \dots, c_m),$$

donde  $c_i = r' \in \{1, \dots, r-1\}$  si y solo si existe  $j \in [m]$  tal que  $a_j = r' \in \{1, \dots, r\}$  si y solo si  $R_{r'}(x_j(r')) = x_i(r')$  y  $x_j(r') \in \mathcal{A}_0^S(r')$  o si existe  $j \in [m]$  tal que  $b_j = r'$ ,  $R_{r'}(x_j(r')) = x_i(r')$  y  $x_j(r') \in \mathcal{A}_0^L(r')$ , cuando la condición anterior no se cumpla  $c_i = 0$ .

**Demostración.** Sean  $(\mathcal{A}_0(i), R_i)$  con  $i = 1, \dots, r-1$   $r-1$  especies compatibles ordenadas de cardinalidad  $m$ , y tales que  $\mathcal{A}_0(1)^L \neq \emptyset$ . Interpretaremos cada especie como un color en  $Color \doteq \{1, \dots, r-1\}$ . Para cada  $r' \in Color$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ , diremos que  $x_j(r')$  es la forma  $j$ -ésima de la partícula de color  $r'$ . Cuando  $r' = 0$ , Además, interpretaremos  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{A}$  como el vector que indica la distribución de especies en una coordenada fija. Si  $a_i = r' \in Color$ , entonces la partícula de color  $r'$  tiene su forma  $i$ -ésima en la coordenada fija considerada. De este modo dada una configuración  $\bar{a} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , interpretamos para cada  $j \in \mathbb{N}$   $\bar{a}_j$  como la distribución de las especies en la coordenada  $j$ . Notar que estamos haciendo un supuesto en lo anterior para que todo esto tenga sentido. Estamos suponiendo que no puede haber dos colores adoptando la misma forma  $i$ -ésima en una misma coordenada fija, pero esto tiene sentido, ya que de lo contrario, gracias a que son especies compatibles ordenadas se tendría que siempre en el futuro y en el pasado estas dos partículas adoptarían y han adoptado al mismo tiempo la misma forma, luego puede suponerse sin pérdida de generalidad que en realidad es solamente una de ellas. Como la definición es consistente, entonces la regla local está bien definida y se obtiene un AC. Para demostrar la positiva expansividad seguiremos la misma idea que en la demostración del Lema 6.1.3. Nos daremos dos configuraciones  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  distintas con  $j \in \mathbb{N}$  el menor entero positivo tal que  $\bar{a}_j \neq \bar{b}_j$ . Suponemos que  $\bar{a}_j = (a_1^j, \dots, a_m^j)$  y  $\bar{b}_{j+1} = (b_1^j, \dots, b_m^j)$ . Sin pérdida de generalidad suponemos además que  $a_1^j = r$  y  $b_1^j = r'$  para  $r \neq r'$ . En el caso que  $r = 0$  y  $r' \in Color$  la demostración es idéntica al Lema 6.1.3. Supongamos entonces que  $r, r' \in Color$ . Con la interpretación del inicio, esto significa que en la instancia  $\bar{a}$  en la coordenada  $j$  hay una partícula de color  $r$  adoptando la forma  $j$ , y en la instancia  $\bar{b}$  en la coordenada  $j$  hay una partícula de color  $r'$  adoptando la forma  $j$ . De nuevo, gracias a que son especies compatibles ordenadas, entonces para  $t \in [m]$  el menor entero positivo tal que  $a^t \doteq R_r(x_j(r))^t \in \mathcal{A}_0^L(r)$  se tendrá que a la vez que  $b^t \doteq R_{r'}(x_j(r'))^t \in \mathcal{A}_0^L(r')$ . De la definición de la regla local del AC obtenemos que en la

instancia  $F^{t+1}(\bar{a})$  en la coordenada  $j - 1$  hay una partícula adoptando una forma  $x_k(r) = R_r(a')^t \in \mathcal{A}_0^L(r)$ , pero en la instancia  $F^{t+1}(\bar{b})$  en la coordenada  $j - 1$  hay una partícula adoptando una forma  $x_k(r') = R_{r'}(b')^t \in \mathcal{A}_0^L(r')$ , luego  $F^{t+1}(\bar{a})_{j-1} = (c_1(\bar{a}), \dots, c_n(\bar{a}))$  con  $c_k(\bar{a}) = r$  y  $F^{t+1}(\bar{b})_{j-1} = (c_1(\bar{b}), \dots, c_n(\bar{b}))$  con  $c_k(\bar{b}) = r'$ , luego por inducción se concluye el resultado.  $\square$

**Teorema 6.1.7.** *Dadas  $r-1$  especies compatibles ordenadas de cardinalidad  $m$ ,  $(\mathcal{A}_0(i), R_i)$  con  $i = 1, \dots, r-1$  y tales que  $\mathcal{A}_0(1)^L, \mathcal{A}_0(1)^S \neq \emptyset$ , se puede definir un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  donde  $\#\mathcal{A} = r^m$ , con regla local  $f$  de vecindad  $(0, 1)$  y positivamente expansivo y no permutativo.*

**Demostración.** La demostración es completamente análoga a la del Teorema 6.1.4.  $\square$

### Ejemplos de construcción de ACs positivamente expansivos usando Lema 6.1.6

Construiremos tres ejemplos de ACs usando el Lema 6.1.6. Para esto se definirán las especies y se mostrará la tabla de composición que define a los ACs obtenidos. En el primer ejemplo además se mostrará una iteración del AC allí construido.

**Ejemplo 6.1.8** (AC positivamente expansivo no permutativo en un alfabeto de cardinalidad 9). En este ejemplo consideramos dos especies. Cuyo alfabeto  $A_0(i)$  y permutación asociada  $R_i$  para  $i = 1, 2$ , se muestra en la Figura 6.8. Los bloques azules corresponden a  $A_0(1)$  y los rojos a  $A_0(2)$ . El bloque con la diagonal azul representa al elemento en  $A_0^S(1)$ , y el con la diagonal roja al elemento en  $A_0^S(2)$ . La regla local  $R_1$  queda determinada en  $A_0(1)$  por la alternación de los bloques azules, y la regla local  $R_2$  por la alternación de los bloques rojos. Claramente ambas especies son compatibles.

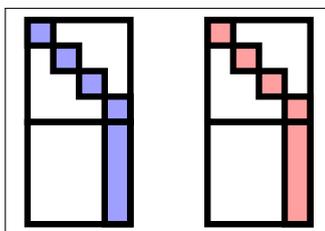


Figura 6.8: Definición de dos especies compatibles.

El AC inducido queda definido por el siguiente alfabeto en la Figura 6.9.

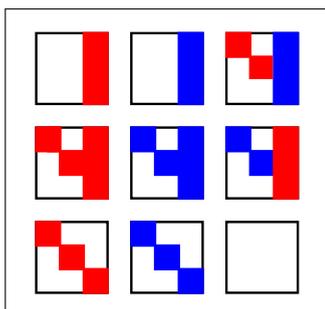


Figura 6.9: Alfabeto del AC inducido.

El AC queda determinado por la siguiente tabla de composición en Figura.6.10. Una iteración del AC se muestra en la Figura 6.11.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Figura 6.10: Tabla de composición del AC inducido por dos especies.

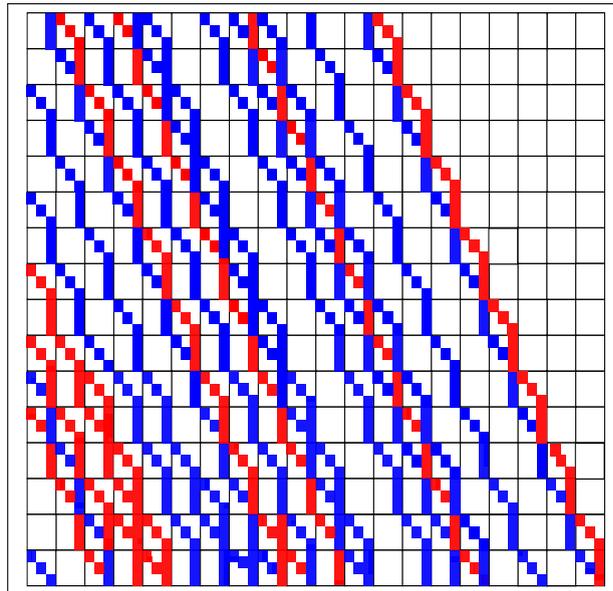


Figura 6.11: Iteración del AC inducido por dos especies.

**Ejemplo 6.1.9** (AC positivamente expansivo no permutativo en un alfabeto de cardinalidad 16). En este ejemplo consideramos tres especies, cuyo alfabeto  $A_0(i)$  y permutación asociada  $R_i$  para  $i = 1, 2, 3$ , se muestra en la Figura 6.12. Los bloques azules corresponden a  $A_0(1)$ , los verdes a  $A_0(2)$  y los amarillos a  $A_0(3)$ . Los bloques con diagonal representan al elemento en  $A_0^S(i)$ . La regla local  $R_i$  queda determinada por la alternación de los bloques de cada alfabeto  $A_0(i)$ . Claramente las especies son compatibles.

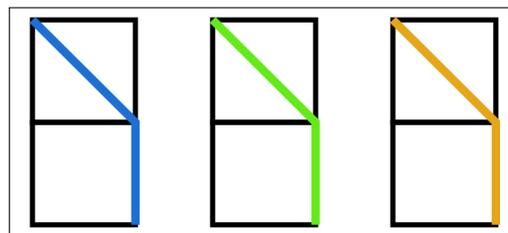


Figura 6.12: Definición de tres especies compatibles.

La Figura 6.13 muestra la matriz asociada a la regla local del AC inducido a partir de las tres especies consideradas al usar el Lema 6.1.6.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0																
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																

Figura 6.13: Tabla de composición del AC definido por tres especies.

**Ejemplo 6.1.10** (AC positivamente expansivo no permutativo en un alfabeto de cardinalidad 25). En este ejemplo consideramos cuatro especies, cuyo alfabeto  $A_0(i)$  y permutación asociada  $R_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , se muestra en la Figura 6.14. Los bloques amarillos corresponden a  $A_0(1)$ , los verdes a  $A_0(2)$  y los azules a  $A_0(3)$ . Los bloques con diagonal representan al elemento en  $A_0^S(i)$ . La regla local  $R_i$  queda determinada por la alternación de los bloques de cada alfabeto  $A_0(i)$ . Claramente las especies son compatibles.

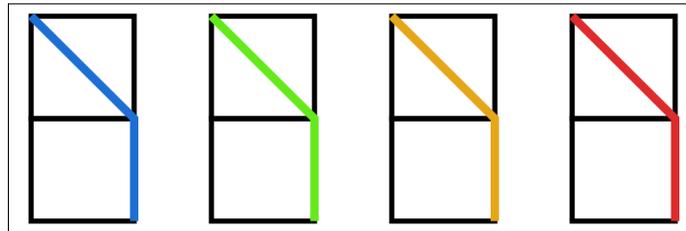


Figura 6.14: Definición de cuatro especies compatibles.

La Figura 6.15 muestra la matriz asociada a la regla local del AC inducido a partir de las cuatro especies consideradas al usar el Lema 6.1.6.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
0																										
1																										
2																										
3																										
4																										
5																										
6																										
7																										
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																										
14																										
15																										
16																										
17																										
18																										
19																										
20																										
21																										
22																										
23																										
24																										

Figura 6.15: Tabla de composición del AC inducido por cuatro especies.

## Segunda Generalización

El objetivo de esta parte es usar las construcciones en los Lemas 6.1.3, 6.1.6 y el producto cruz entre ACs, para construir otros ACs positivamente expansivos.

**Definición 6.1.11.** Dada una familia de ACs  $\{(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)\}_{i=1}^m$  definiremos el AC producto

$$(\prod_{i=1}^m \mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, (F_1, \dots, F_m))$$

donde

$$(F_1, \dots, F_m)(x^1, \dots, x^m)_{(i_1, \dots, i_m)} = ((F_1 x^1)_{i_1}, \dots, (F_m x^m)_{i_m}),$$

para  $x^i \in \mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}$ .

**Lema 6.1.12.** Dada una familia de ACs  $\{(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)\}_{i=1}^m$ . Si para algún  $i$  el AC  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  no tiene palabras bloqueantes en ninguna dirección, entonces el AC producto no tiene palabras bloqueantes en ninguna dirección.

**Demostración.** Supongamos el AC  $(\sigma^{j_1} \circ F_1, \dots, \sigma^{j_m} F_m)$  para  $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{Z}$  tuviera una palabra  $(w^1, \dots, w^m) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{A}_i^*$  bloqueante, luego para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $w^i$  sería palabra bloqueante del AC  $\sigma^{j_i} \circ F_i$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

**Lema 6.1.13.** El AC producto  $(\prod_{i=1}^m \mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, (F_1, \dots, F_m))$  es positivamente expansivo si y solo si para todo  $i$  el AC  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  es positivamente expansivo.

**Demostración.** Hagamos la demostración en el caso que cada AC  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  es de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ . Si el AC producto  $(\prod_{i=1}^m \mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, (F_1, \dots, F_m))$  es positivamente expansivo, entonces para cada  $i$  podemos considerar  $x^j \in \mathcal{A}_j^{\mathbb{N}}$  fijos para  $j \neq i$ . Luego del hecho que el AC producto sea positivamente expansivo se concluye que para todo  $x^i \neq y^i$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)^n(x^1, \dots, x^i, \dots, x^m)_{(0, \dots, 0)} \neq (F_1, \dots, F_m)^n(x^1, \dots, y^i, \dots, x^m)_{(0, \dots, 0)},$$

que claramente implica que  $F_i^n(x^i)_0 \neq F_i^n(y^i)_0$ , lo que demuestra que el AC  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  es positivamente expansivo. Para demostrar el recíproco basta notar que si  $(x^1, \dots, x^m) \neq (y^1, \dots, y^m)$  entonces para algún  $i = 1, \dots, m$ , se tiene que  $x^i \neq y^i$  y de la positiva expansividad de  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  se concluye que  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $F_i^n x^i \neq F_i^n y^i$  y luego que

$$(F_1, \dots, F_i, \dots, F_m)^n(x^1, \dots, x^m)_{(0, \dots, 0)} \neq (F_1, \dots, F_m)^n(y^1, \dots, y^m)_{(0, \dots, 0)},$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 6.1.14.** Dado un número  $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ , con  $p_1, \dots, p_n$  primos distintos,  $k_1, \dots, k_n$  enteros positivos tales que algún  $k_i > 1$ . Entonces puede construirse un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo y no permutativo de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $k$

**Demostración.** Para  $j = 1, \dots, n$  usando el Lema 6.1.6, construimos los ACs  $(\mathcal{A}_j^{\mathbb{N}}, F_j)$  positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , donde  $\mathcal{A}_j$  es un alfabeto cualquiera de cardinalidad  $p_j^{k_j}$  y  $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j^S \cup \mathcal{A}_j^L$  donde  $\mathcal{A}_j^L \neq \emptyset$  para  $j \neq i$ , y escogiendo  $\mathcal{A}_i$  con cardinalidad  $p_i^{k_i}$  satisfaciendo además que  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i^S \cup \mathcal{A}_i^L$  con  $\mathcal{A}_i^S, \mathcal{A}_i^L \neq \emptyset$ . Gracias a

Teorema 6.1.7 se tiene que el AC  $(\mathcal{A}_i^{\mathbb{N}}, F_i)$  es no permutativo, luego se concluye el resultado considerando el AC producto  $(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i, \prod_{i=1}^n F_i)$  con regla local

$$f((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = (f_1(a_1, b_1), \dots, f_n(a_n, b_n)),$$

para  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ . □

Notemos que en el Lema 6.1.6 para cada  $r, m \in \{2, 3, \dots\}$  se construye un AC positivamente expansivo no permutativo de vecindad  $(0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $r^m$  y no se usa en la construcción el producto cruz entre ACs. Luego dados  $r$  y  $m_1, \dots, m_n$  tales que  $m = \sum_{i=1}^n m_i$ , podemos construir un AC positivamente expansivo no permutativo de vecindad  $(0, 1)$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $r^m$  haciendo el producto cruz entre los ACs construídos usando el Lema 6.1.6 sobre alfabetos de cardinalidad  $r^{m_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

## 6.2. Propiedades dinámicas y de iteración de medidas por los autómatas celulares construídos

Los dos lemas a continuación se enuncian sin demostración dado que son directos.

**Lema 6.2.1.** *Dadas  $r - 1$  especies compatibles ordenadas de cardinalidad  $m$ ,  $(\mathcal{A}_0(i), R_i)$  con  $i = 1, \dots, r - 1$  y tales que  $\mathcal{A}_0(1)^L, \mathcal{A}_0(1)^S \neq \emptyset$ . Gracias al Teorema 6.1.7 se puede definir un AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  donde  $\#\mathcal{A} = r^m$ , con regla local  $f$  de vecindad  $(0, 1)$  positivamente expansivo y no permutativo. Para cada cilindro  $[c]_i$  con  $c \in \mathcal{A}^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $F^{-n}([c]_i)$  es un cilindro con  $|c| \cdot \#\mathcal{A}$  coordenadas fijas.*

**Lema 6.2.2.** *Dado el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo y no permutativo de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ , con  $p_1, \dots, p_n$  primos distintos,  $k_1, \dots, k_n$  enteros positivos tales que algún  $k_i > 1$ , construído en Proposición 6.1.14. Para cada cilindro  $[c]_i$  con  $c \in \mathcal{A}^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $F^{-n}([c]_i)$  es un cilindro con  $|c| \cdot \#\mathcal{A}$  coordenadas fijas.*

**Proposición 6.2.3.** *Dado el AC  $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, F)$  positivamente expansivo y no permutativo de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$  con alfabeto  $\mathcal{A}$  de cardinalidad  $k = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$ , con  $p_1, \dots, p_n$ ,  $k_1, \dots, k_n$  enteros positivos tales que algún  $k_i > 1$ , construído en Proposición 6.1.14. Se tiene que la media de Cesàro de una medida de Bernoulli iterada existe.*

**Demostración.** Gracias al Lema 6.2.2, se tiene que para cada cilindro  $[c]_i$  con  $c \in \mathcal{A}^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F^{-n}([c]_i)$  es un cilindro con a lo más  $n(c) \doteq |c| \cdot \#\mathcal{A}$  coordenadas fijas y para  $n > n(c)$ , con exactamente  $n(c)$  coordenadas fijas. Definamos  $C_{n(c)} \doteq \{(x_1, \dots, x_{n(c)}) : x_i \in \mathcal{A}\}$ , y consideremos que  $C_{n(c)} = \{y_i\}_{i \in \mathcal{A}^{n(c)}}$ . Podemos definir la función

$$\phi_c : \{n(c), n(c) + 1, \dots\} \rightarrow C_{n(c)}$$

donde

$$\phi_c(n) = (x_1, \dots, x_{n(c)}) \in C_{n(c)}$$

si

$$F^{-n}([c]_i) = \{z \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \exists \{i_1, \dots, i_{n(c)}\} \subset \mathbb{N}, (z_{i_1}, \dots, z_{i_{n(c)}}) = (x_1, \dots, x_{n(c)})\}.$$

También podemos definir para cada  $i = 1, \dots, \mathcal{A}^{n(c)}$

$$\delta_i \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=n(c)+1}^{N-1} 1\{\phi_c(n) = y_i\}.$$

Para cada  $(x_1, \dots, x_{n(c)}) \in C_{n(c)}$ , definamos  $c((x_1, \dots, x_{n(c)})) \doteq [x_1 \cdots x_{n(c)}]_0$ . Luego,

$$\mathcal{C}_\mu(F)([c]_i) = \sum_i \delta_i \mu(c(y_i)).$$

Como lo anterior puede hacerse para cualquier cilindro se deduce que la media de Cesàro existe.  $\square$

### 6.3. Conclusiones

En este capítulo se construyen ACs positivamente expansivos no permutativos sobre alfabetos de cualquier cardinalidad tal que existe un primo  $p$  para el que  $p^2$  divide esta cardinalidad. El capítulo presenta la construcción y una propiedad de existencia de la media de Cesàro para la iteración de medidas de Bernoulli iteradas por estos ACs. No se exploran propiedades dinámicas generales de la clase, pero la construcción debiera permitir construir ACs donde la dinámica puede definirse a priori, en el sentido de controlar las direcciones de equicontinuidad y aquellas con palabras bloqueantes. También debiera poder ser fácil usar las mismas ideas para definir ACs positivamente expansivos sobre sub shifts de tipo finito, y también en ese caso estudiar la iteración de medidas.

# Capítulo 7

## Conclusiones y Preguntas Abiertas

Mostramos las conclusiones obtenidas en esta memoria y los problemas abiertos de interés.

Con respecto a familias de autómatas celulares que no cumplen ninguna hipótesis para las que se sabe la existencia de la media de Cesàro, para iteraciones de medidas iniciales de Bernoulli en  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , se propone la familia de autómatas celulares asociados a las matrices en el conjunto  $ES(\mathcal{A})$ . En particular se estudiaron propiedades dinámicas de los autómatas asociados a matrices en  $ES_3(\mathbb{Z}_3)$ . Estos autómatas celulares son positivamente expansivos de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ , no son afines, en general no tienen regla local  $\psi$ -asociativa ni son  $N$ -scaling, pero pueden tener palabras bloqueantes en la dirección  $-1$ . Sería interesante extender los resultados conocidos de existencia de la media de Cesàro a autómatas en las familias encontradas. Las demostraciones conocidas parecen no ser aplicables, por lo que es necesario descubrir nuevas técnicas para poder demostrar este resultado.

Con respecto a la randomización asintótica de medidas de probabilidad shift-ergódicas por autómatas celulares permutativos a la derecha, se demostró que hay dos casos: la media de Cesàro existe, o el AC es conjugado topológicamente a un AC permutativo con regla local de vecindad  $l = 0, r = 1$  que no tiene palabras bloqueantes en la dirección  $-1$ , en cuyo caso no sabemos probar si dicho límite existe.

Quedan abiertas las siguientes preguntas:

- ¿Siempre existe la media de Cesàro en el caso de autómatas celulares permutativos a la derecha de vecindad  $l = 0, r = 1$ ?
- ¿Existe una manera de demostrar que no existen palabras bloqueantes en la dirección  $-1$  para un AC permutativo a la derecha de vecindad  $(l, r) = (0, 1)$ ?

Con respecto a la simulación de las iteraciones de medidas de Bernoulli por autómatas celulares permutativos, se propusieron tres maneras de estudiar la randomización asintótica. Los resultados permiten conjeturar que la media de Cesàro de la iteración de medidas de Bernoulli por autómatas celulares permutativos siempre existe. Y que en el caso en que no hay palabras bloqueantes en ninguna dirección, siempre se tiene randomización asintótica.

Con respecto a ejemplos conocidos de autómatas celulares positivamente expansivos no permutativos, se muestra una construcción sencilla que permite obtener autómatas celulares de este tipo con vecindades  $l = 0$ ,  $r = 1$ , sobre cualquier alfabeto de cardinalidad divisible por  $p^2$ , para  $p$  un número primo cualquiera. Es fácil estudiar la medida iterada por estos autómatas.

# Apéndice A

## Evolución ACs en $ESQ_3$ y $\sigma^{-1}ESQ_3$

Se obtiene la evolución de cada AC en  $ESQ_3$  y  $\sigma^{-1}ESQ_3$  a partir de un punto inicial generado con distribución uniforme. Estas simulaciones fueron hechas en SAGE.

Los ACs se simulan mediante el siguiente código. Tiene por entrada una matriz  $M$  de  $3 \times 3$  a valores en  $\mathbb{Z}_3$  que define la regla local del AC

```
def automata(x,F):
    #'sage.matrix.matrix_integer_dense.Matrix_integer_dense'
    #matrix F: M matrix of 3x3, local rule
    #
    n=len(x)
    y=[1]*n
    for i in range(n):
        y[i]=int(x[i])

    M=matrix(n,n,[-1 for i in range(0,n^2)])
    for i in range(n):
        M[0,i]=y[i]

    for i in range(1,n):
        for j in range(0,n-i):
            M[i,j]=F[M[i-1,j],M[i-1,j+1]]
    return M
```

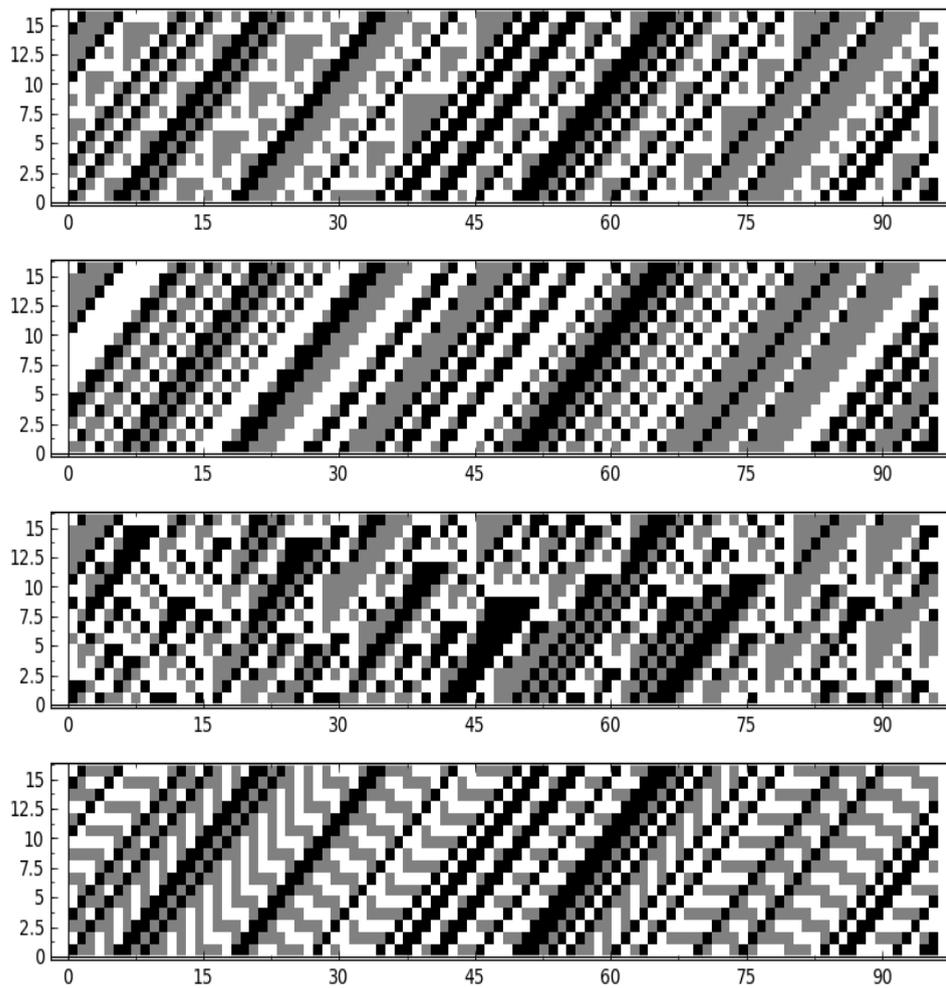


Figura A.1: Evolución de ACs en  $ESQ_3^0$

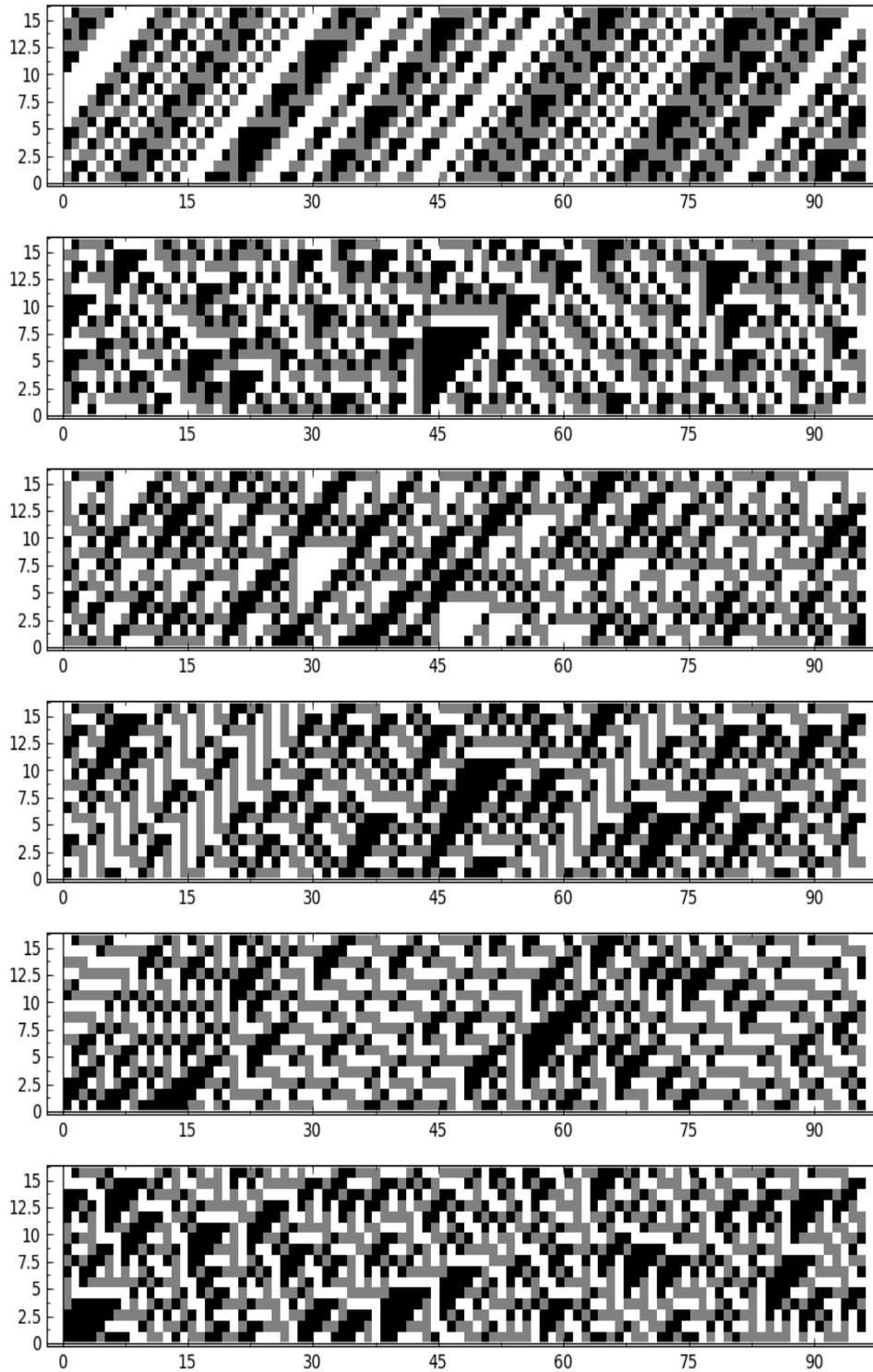


Figura A.2: Evolución de ACs en  $ESQ_3^0$

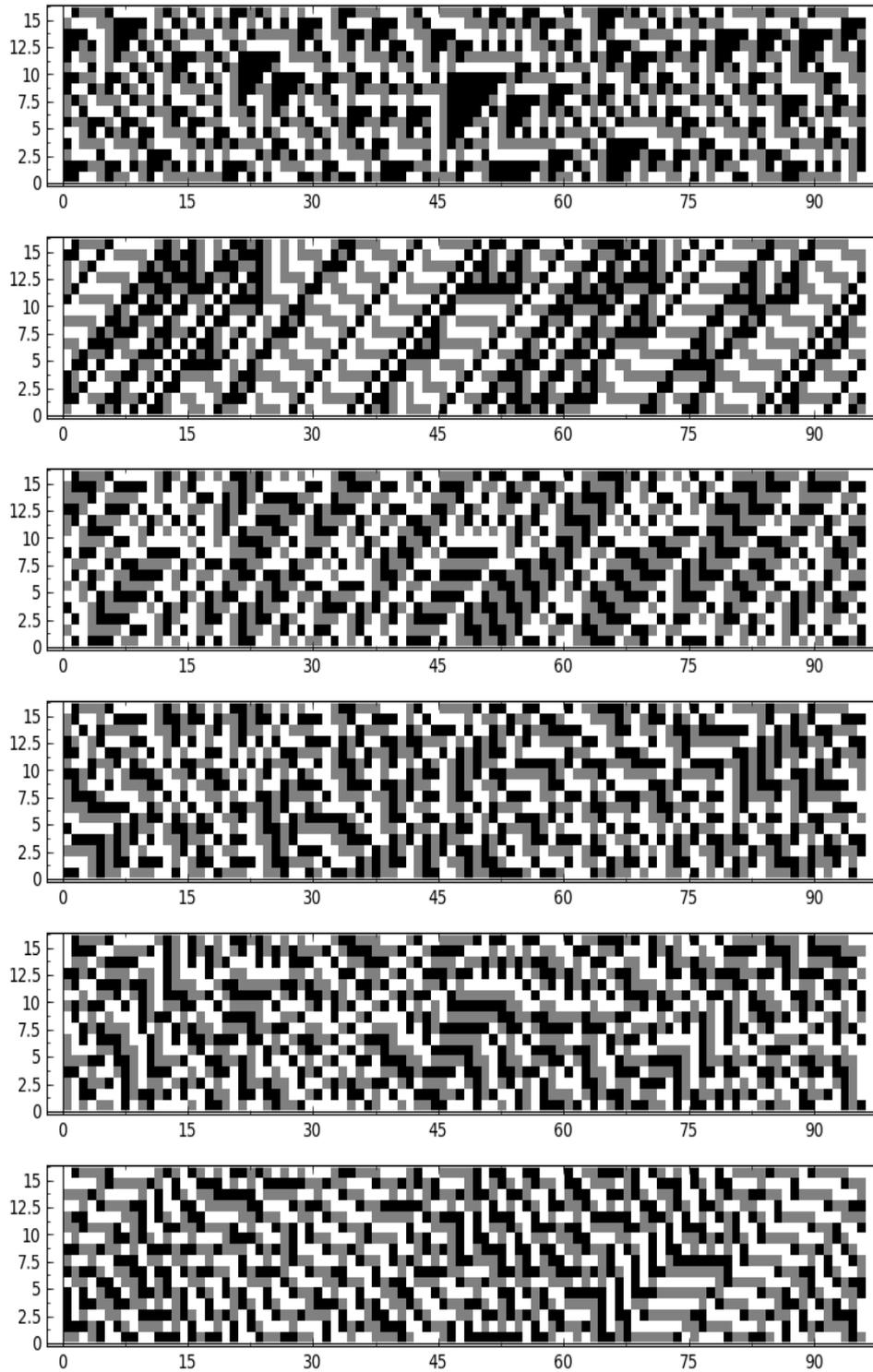


Figura A.3: Evolución de ACs en  $ESQ_3^0$

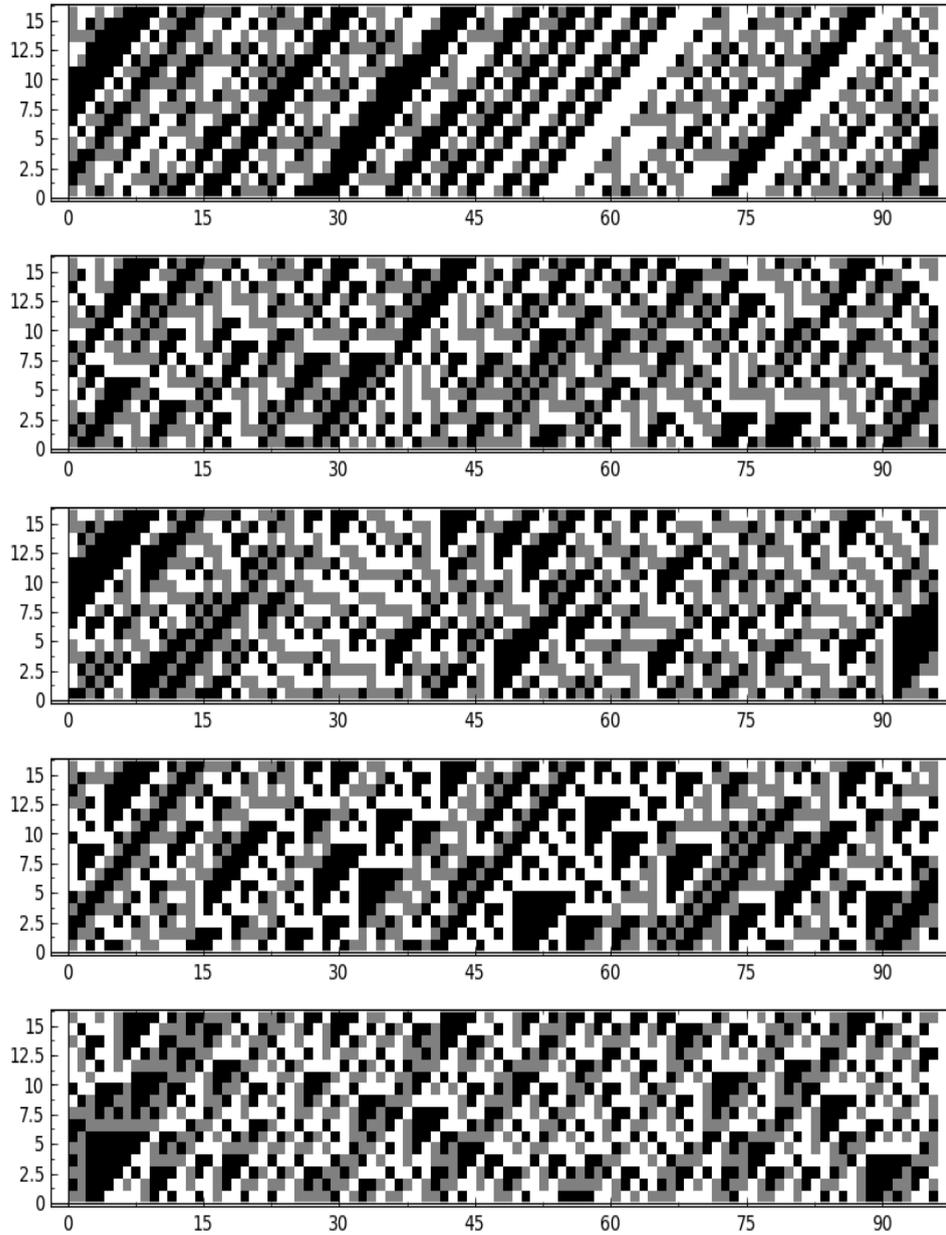


Figura A.4: Evolución de ACs en  $ESQ_3^1$

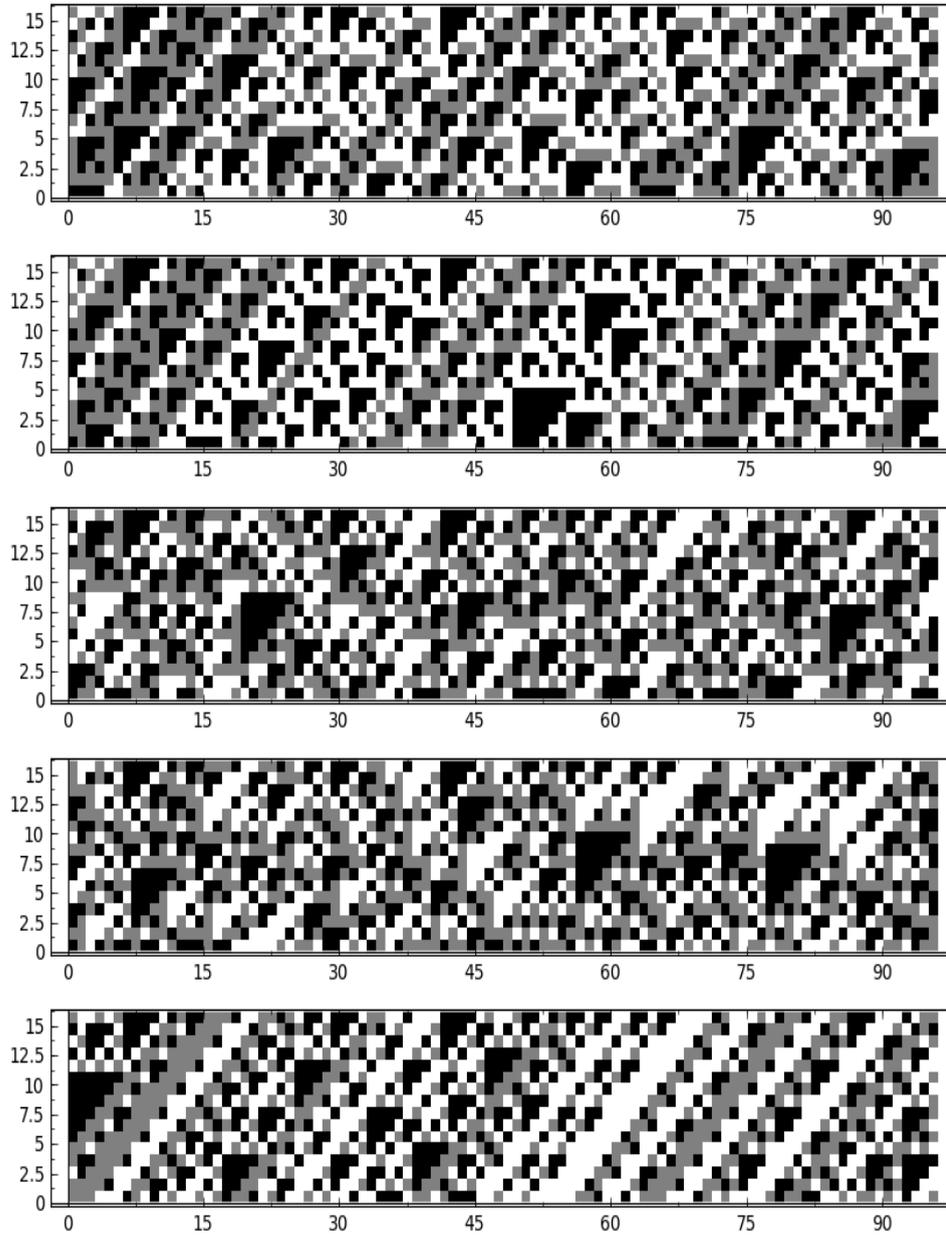


Figura A.5: Evolución de ACs en  $ESQ_3^1$

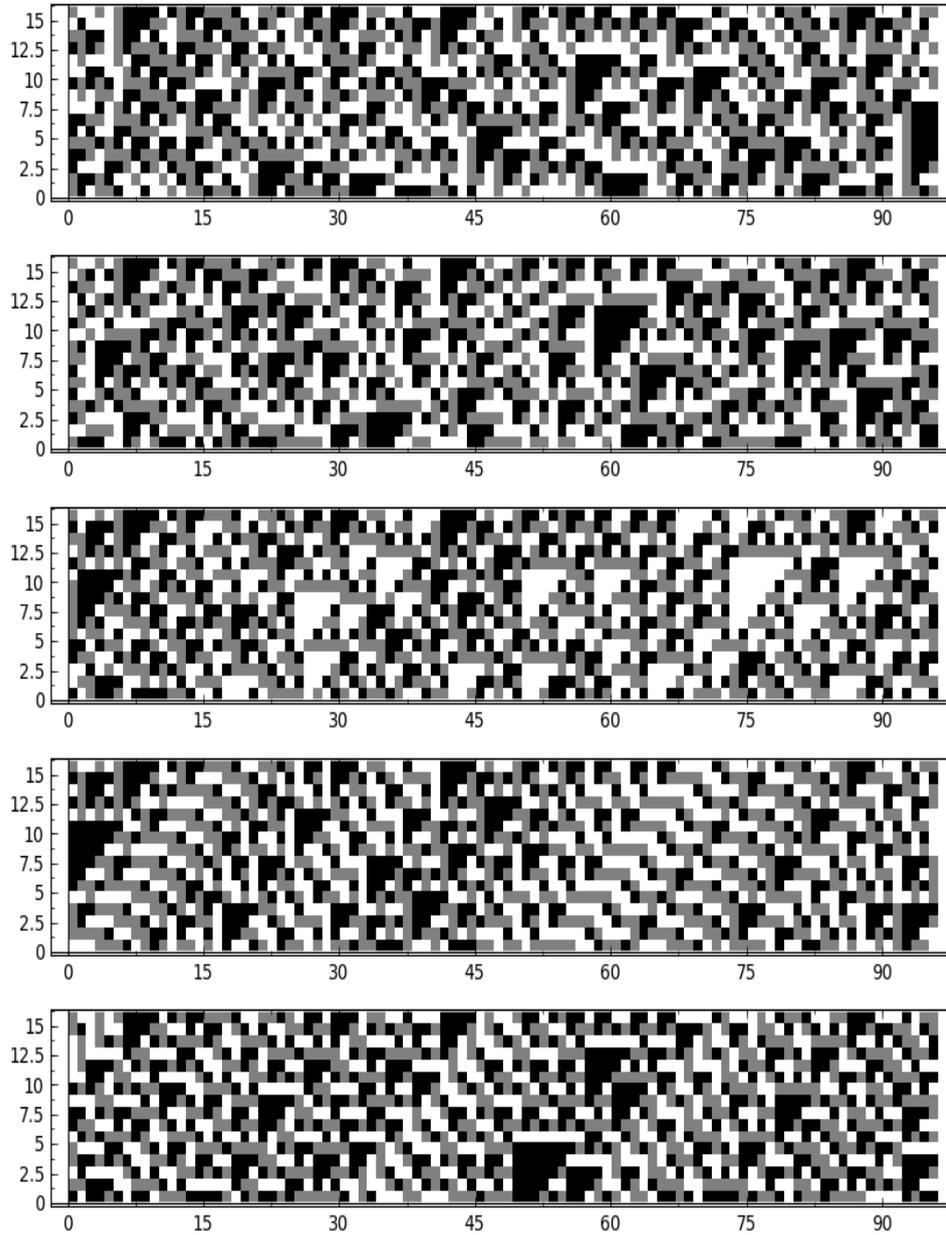


Figura A.6: Evolución de ACs en  $ESQ_3^1$

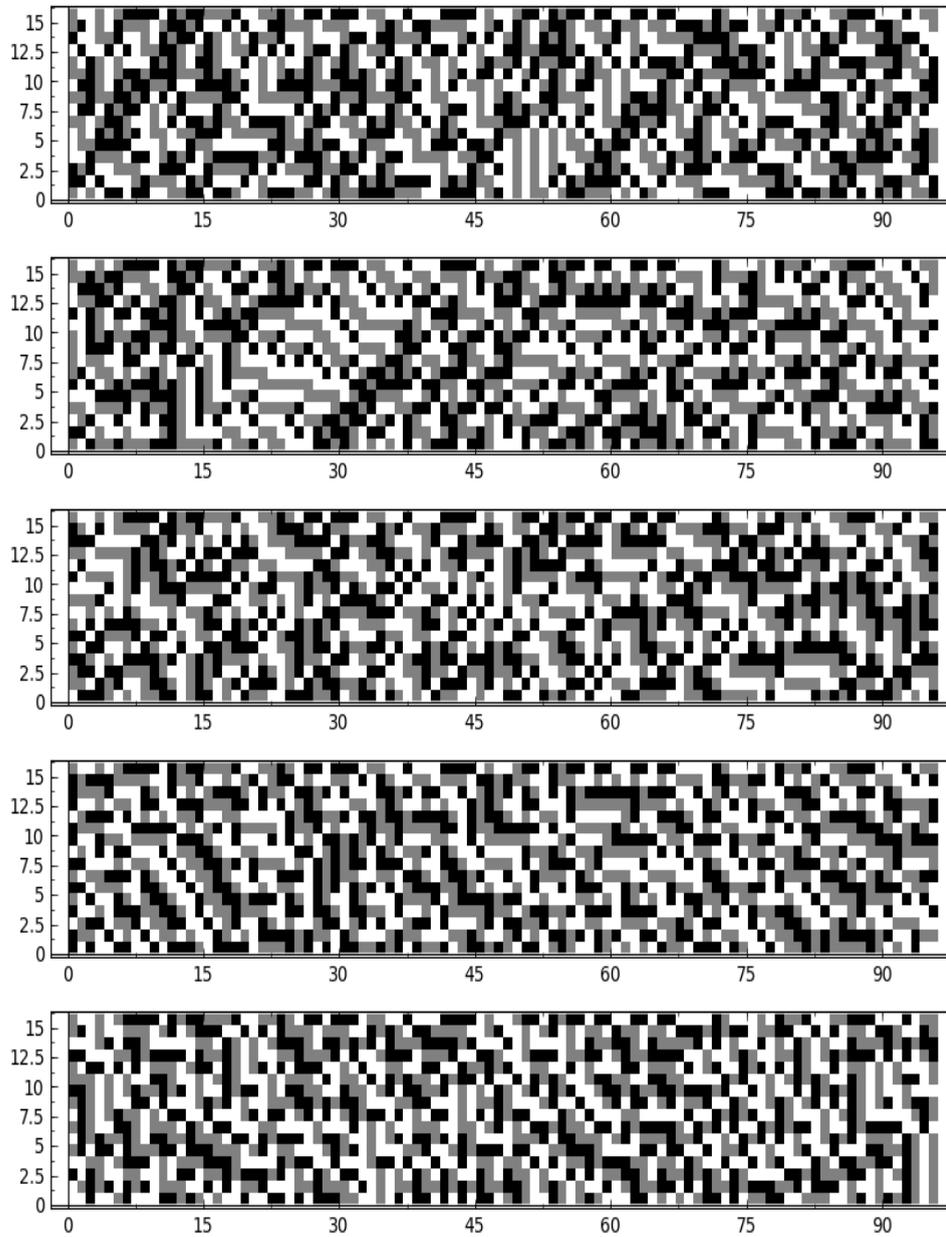


Figura A.7: Evolución de ACs en  $ESQ_3^1$

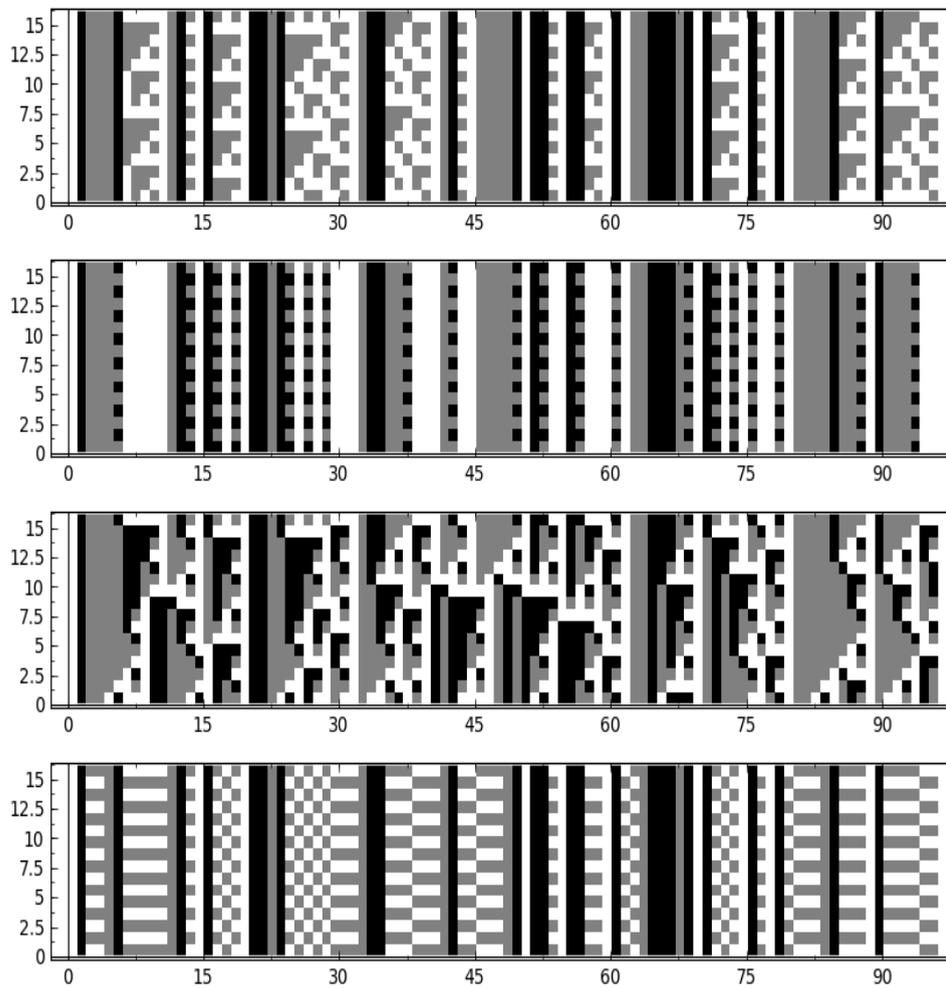


Figura A.8: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^0$

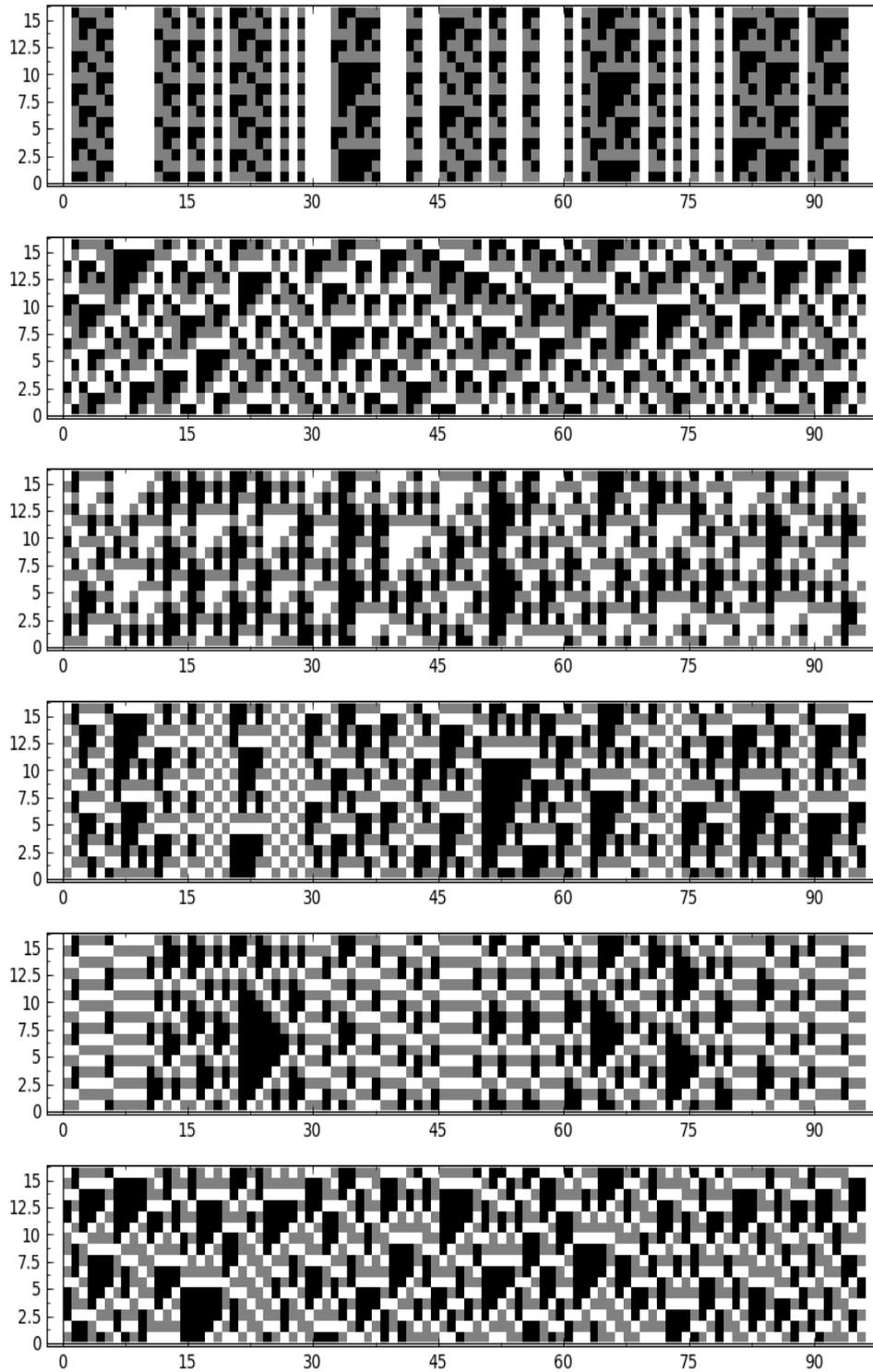


Figura A.9: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^0$

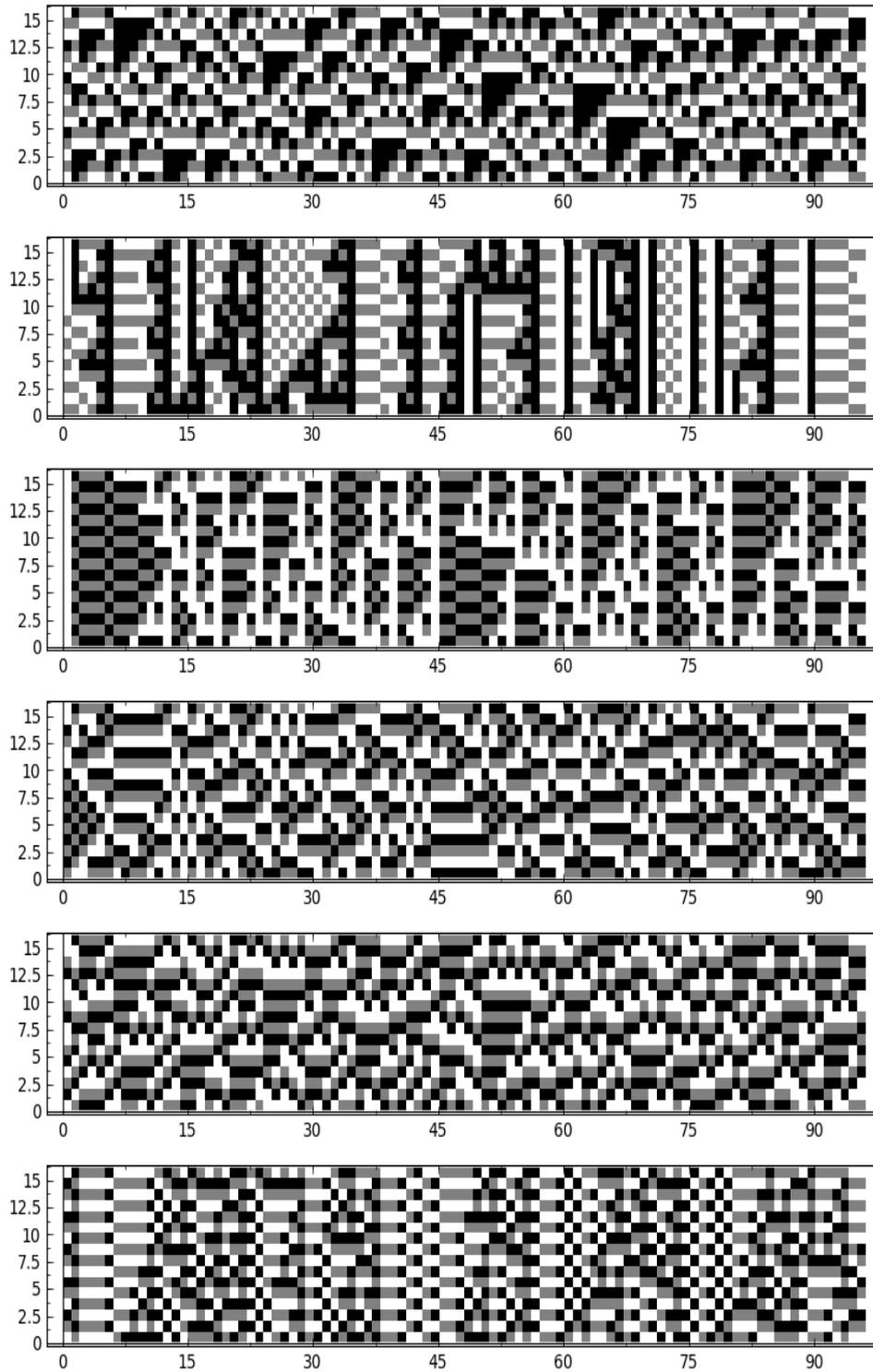


Figura A.10: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^0$

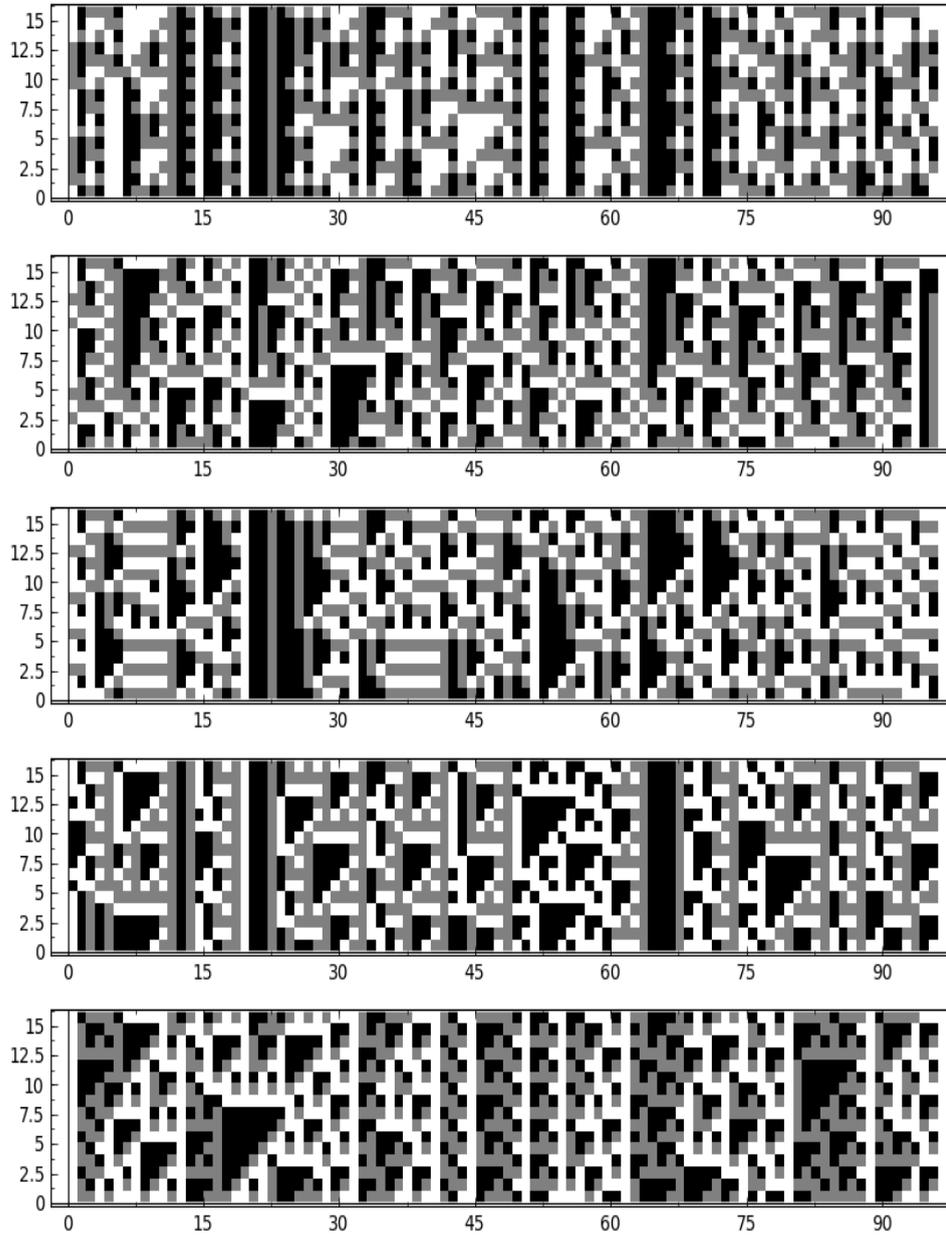


Figura A.11: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^1$

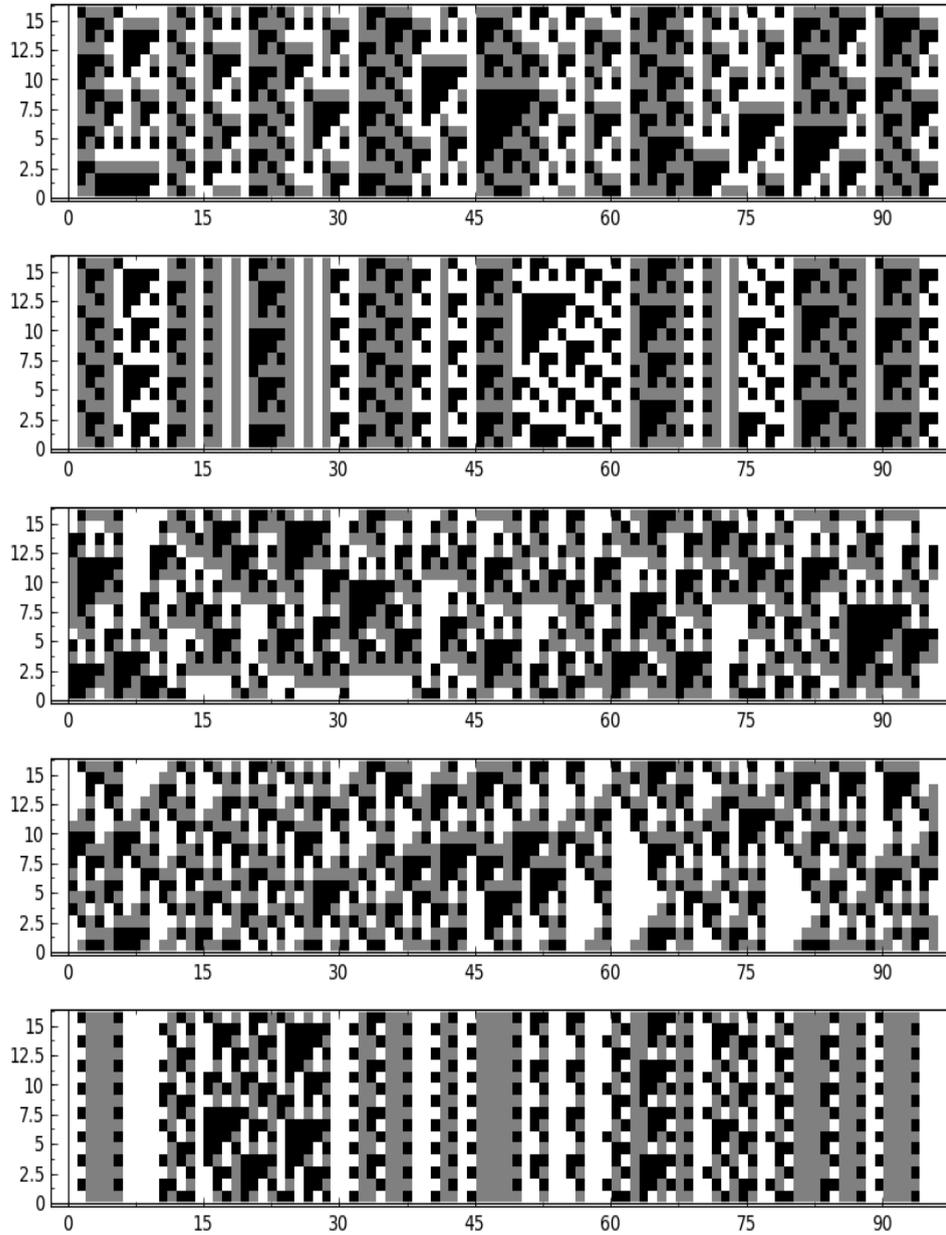


Figura A.12: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^1$

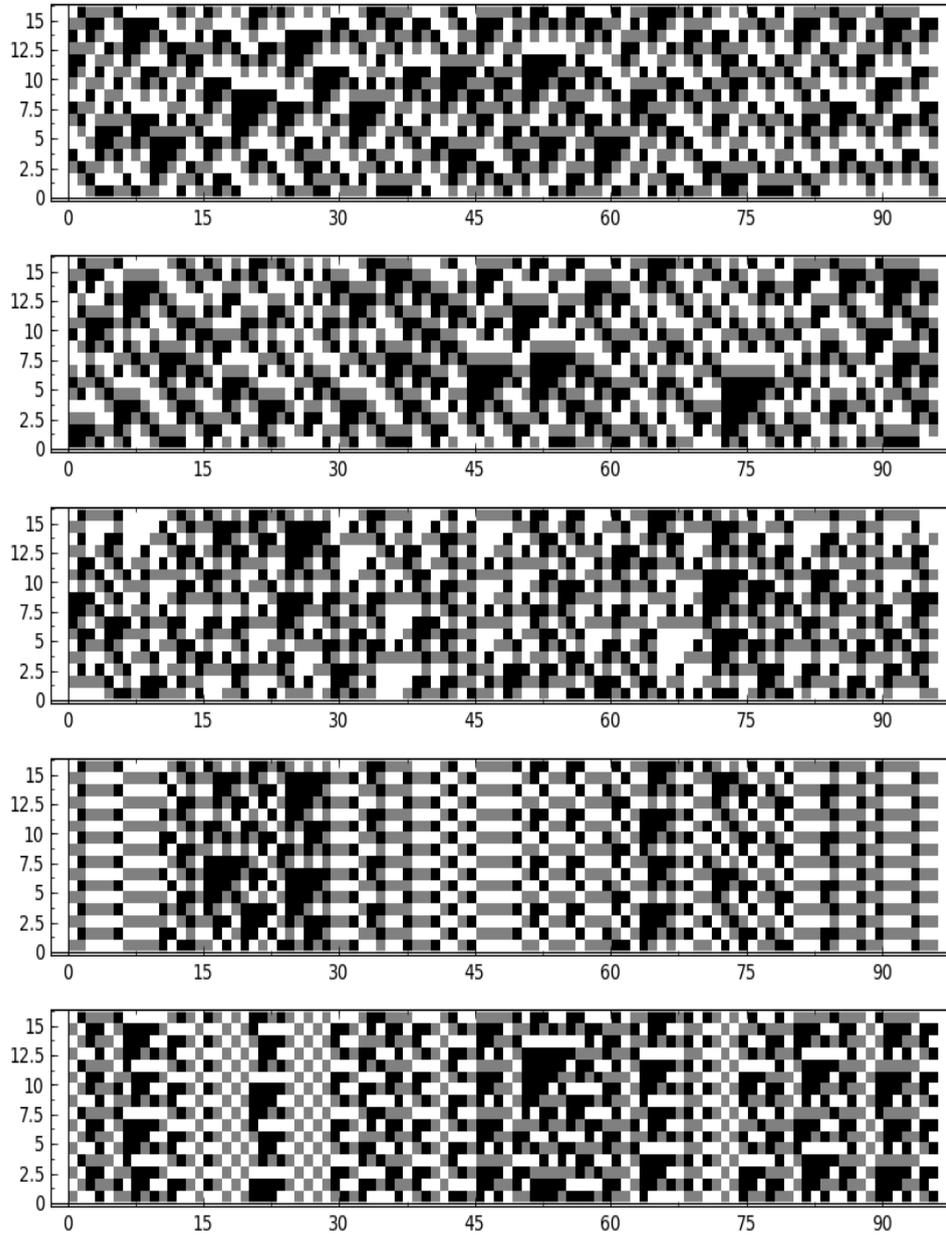


Figura A.13: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^1$

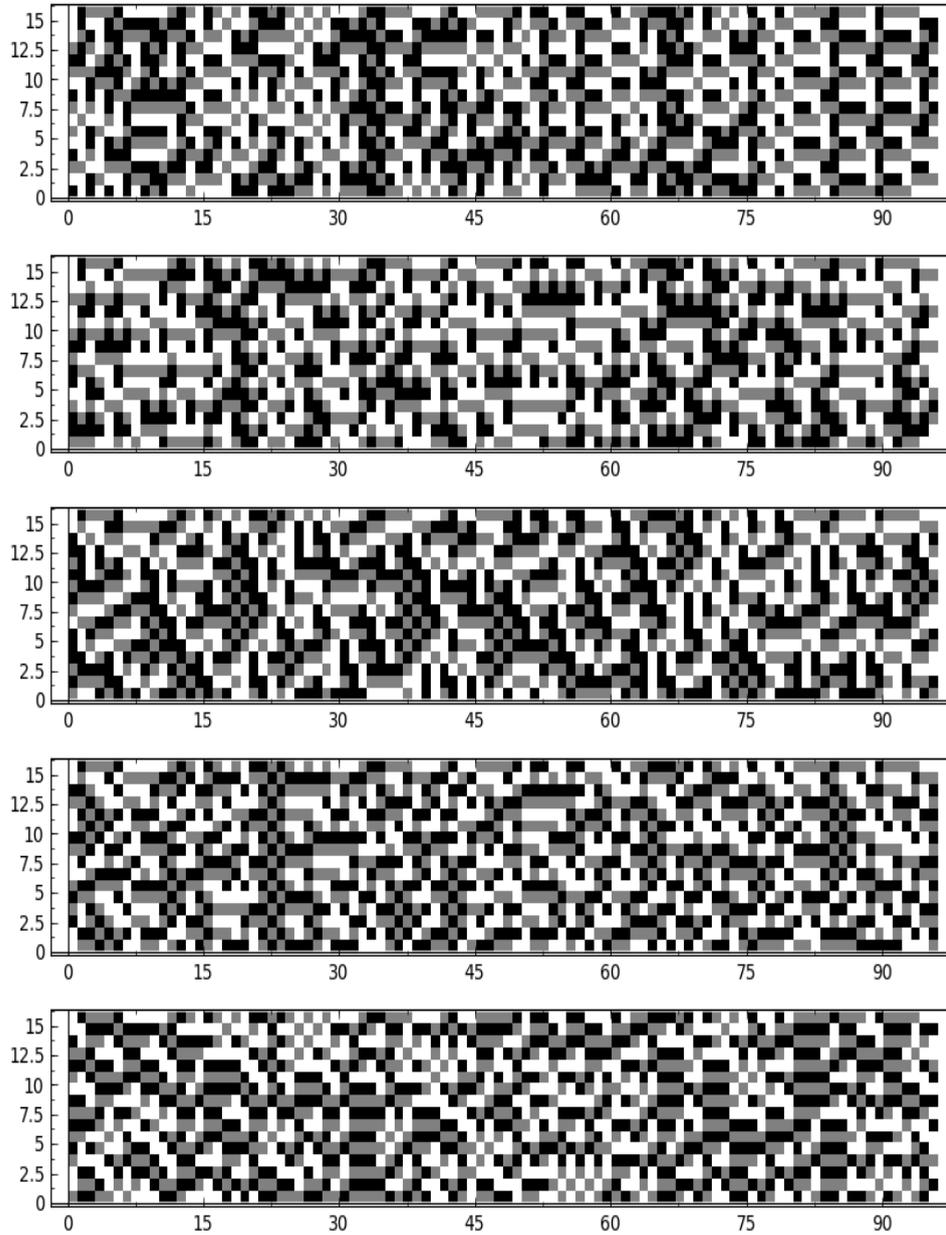


Figura A.14: Evolución de ACs en  $\sigma^{-1}ESQ_3^1$

## Apéndice B

# Iteración medida de Bernoulli por ACs en $ESQ_3^0$

Se programó en Matlab un AC de radio 1 de la siguiente manera.

```
function R=CelAut(M,word,r)
#matrix M es la matriz que define al AC
#array word es un vector con entradas en 0,1,2
que representa la palabra a ser iterada
#int r columnsize es el tamaño el ancho de la columna que queremos ver
#example:
#M=[0,1,2;0,1,2;2,1,0];
#x=discretesample([0.05,0.9,0.05],100)';-1;
#R=CelAut(M,x,2);
#image(M,'CDataMapping','scaled');
#OJO: r<length(word)

n=length(word);
R=zeros(n-r+1,r);
R(1,:)=word(1:r);
iter_word0=word;

for i1=2:n-r+1
iter_word1=zeros(1,n-i1+1);
for i2=1:n-i1+1
iter_word1(i2)=M(iter_word0(i2)+1,iter_word0(i2+1)+1);
end
R(i1,:)=iter_word1(1:r);
iter_word0=0;
iter_word0=iter_word1;
iter_word1=0;
end
end
```

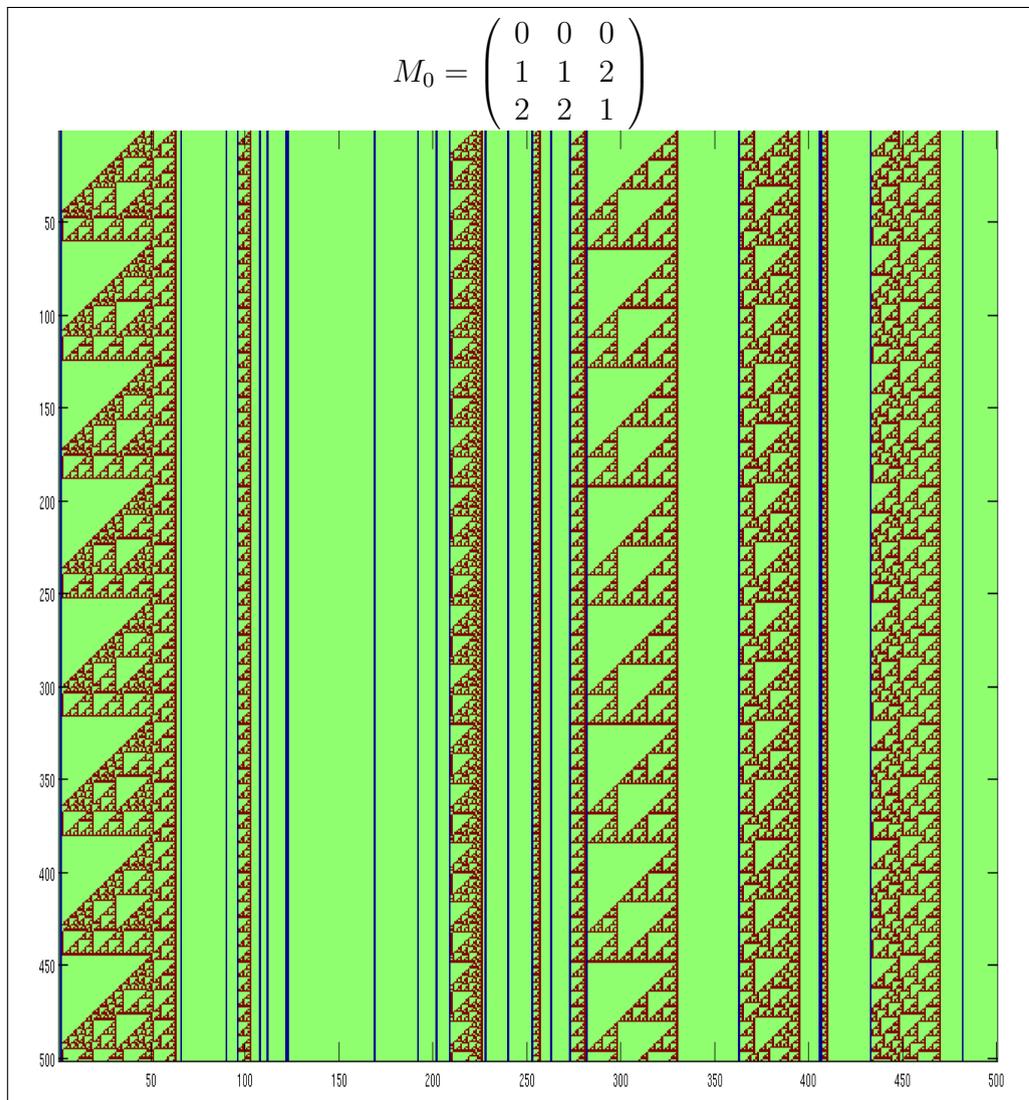


Figura B.1: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_0$

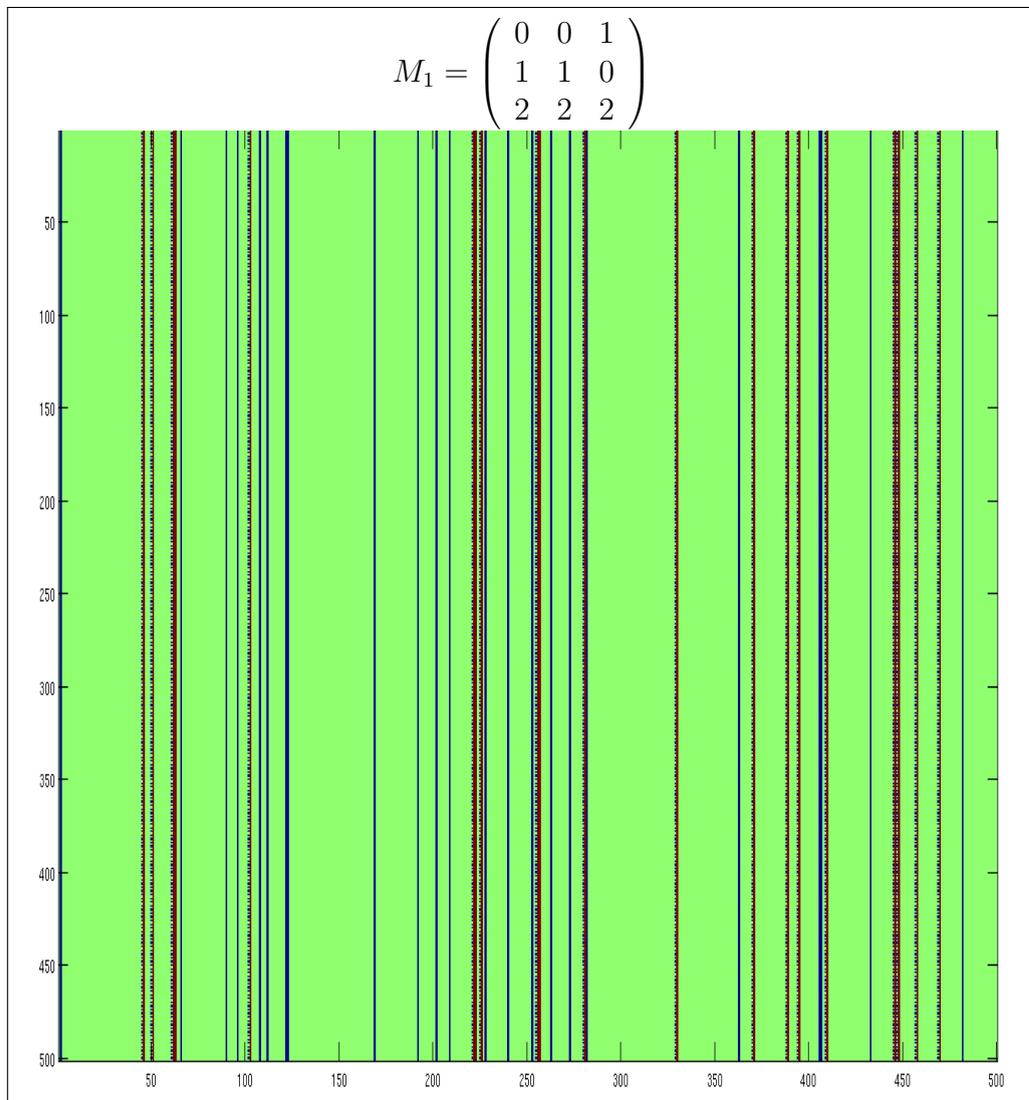


Figura B.2: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_1$

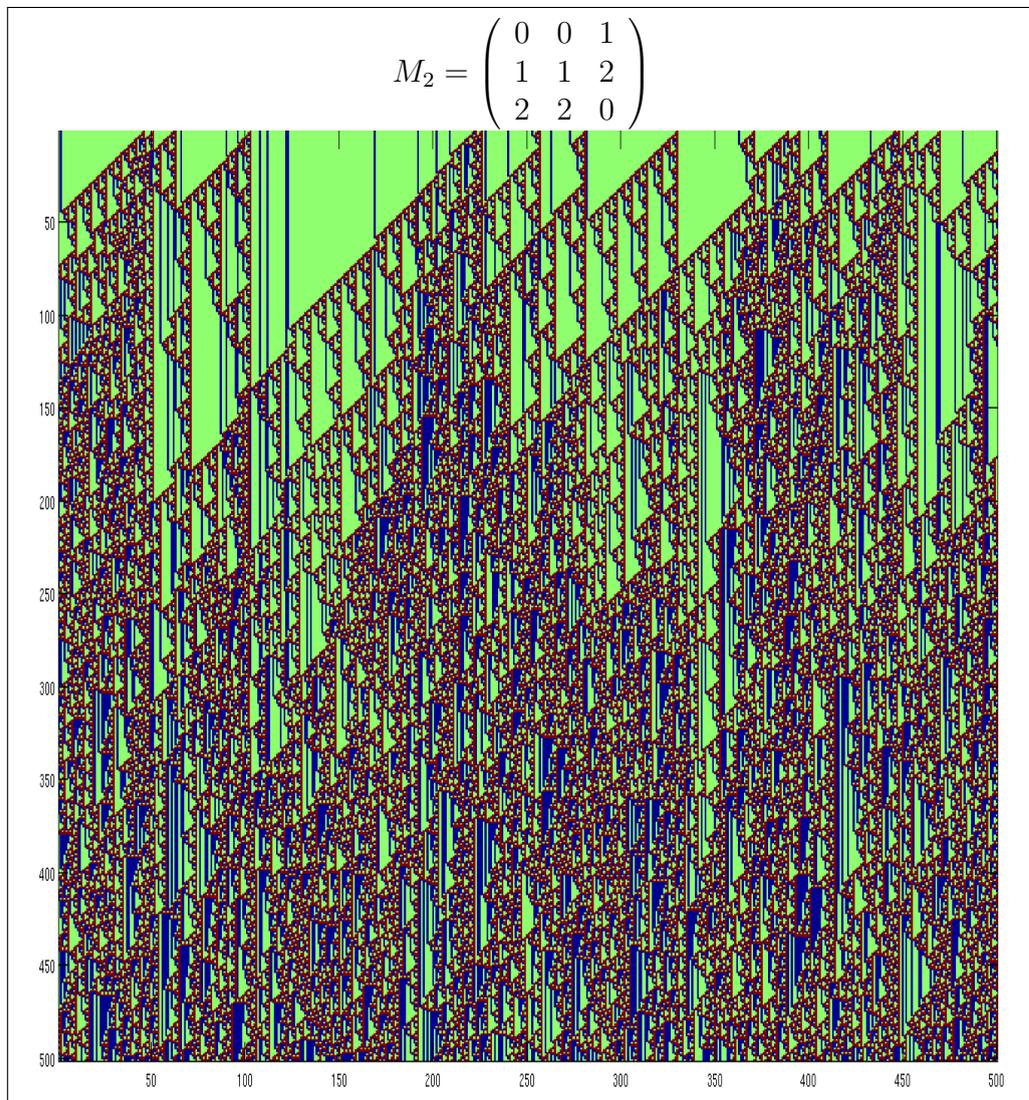


Figura B.3: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_2$

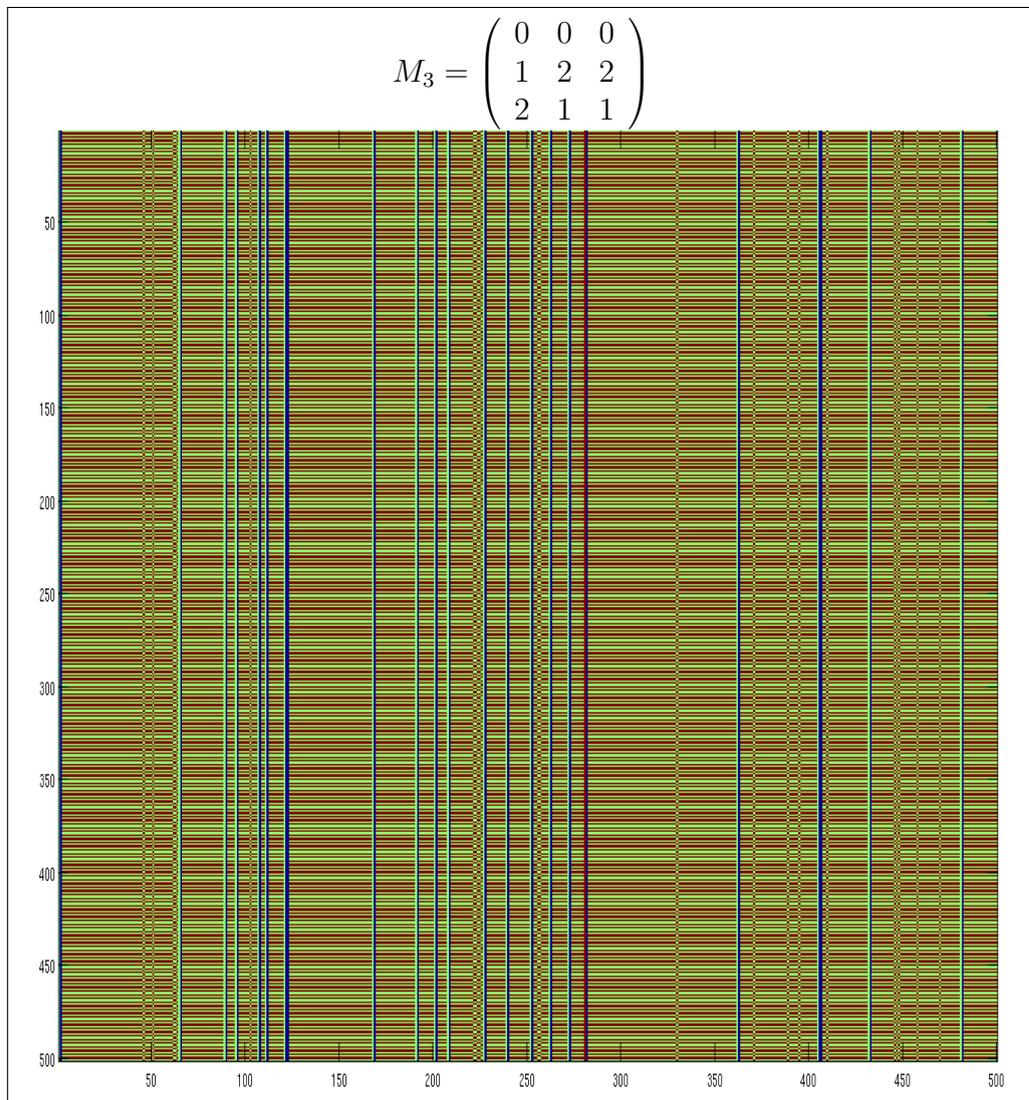


Figura B.4: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_3$

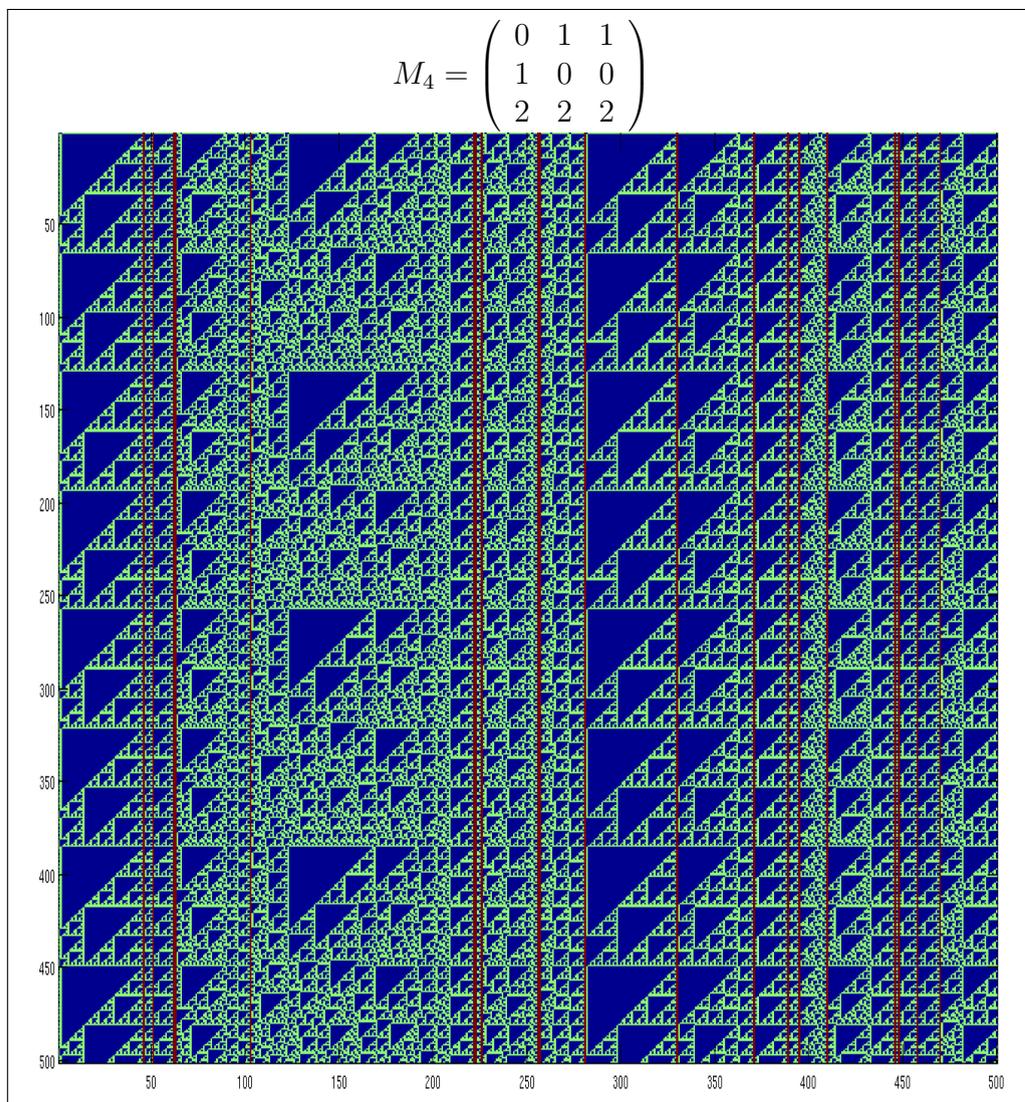


Figura B.5: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_4$

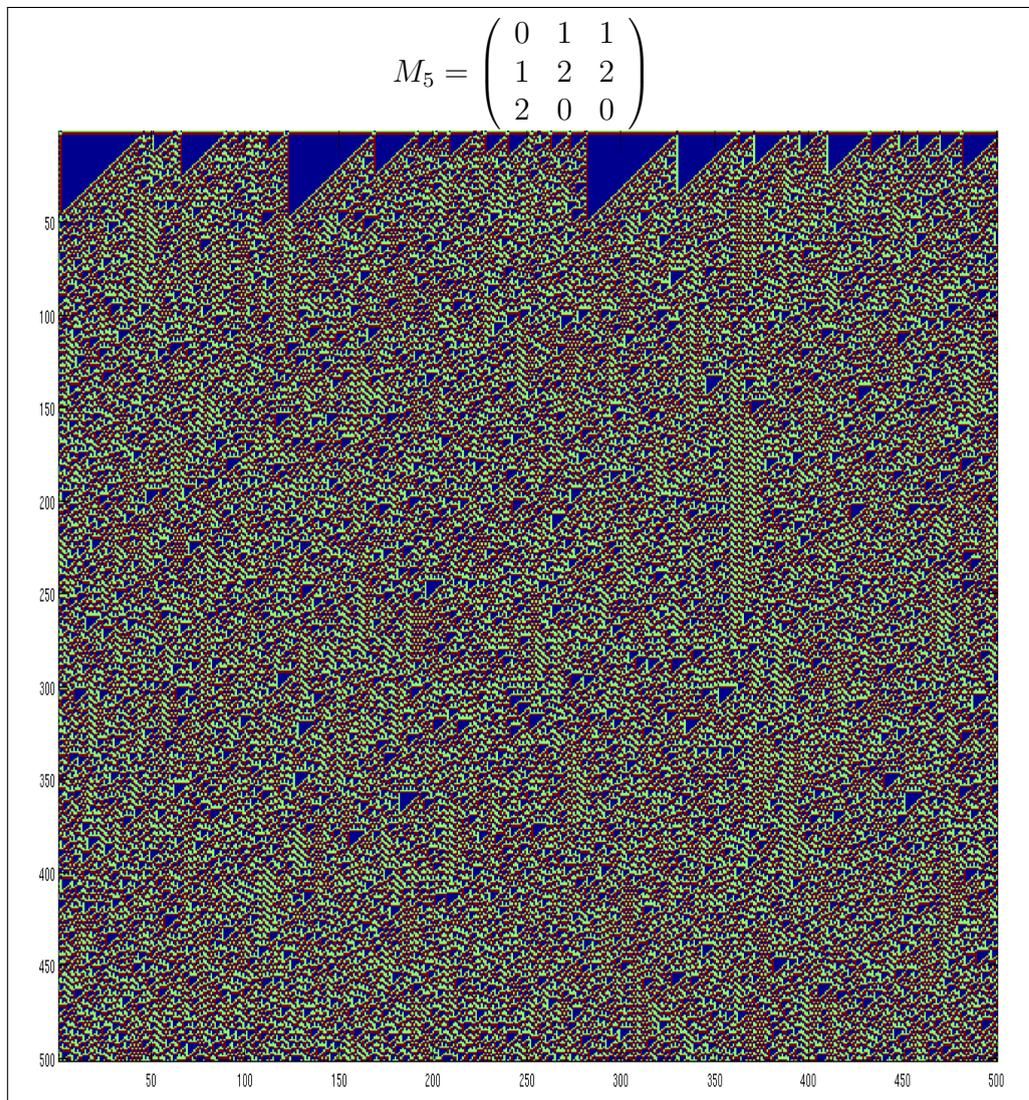


Figura B.6: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_5$

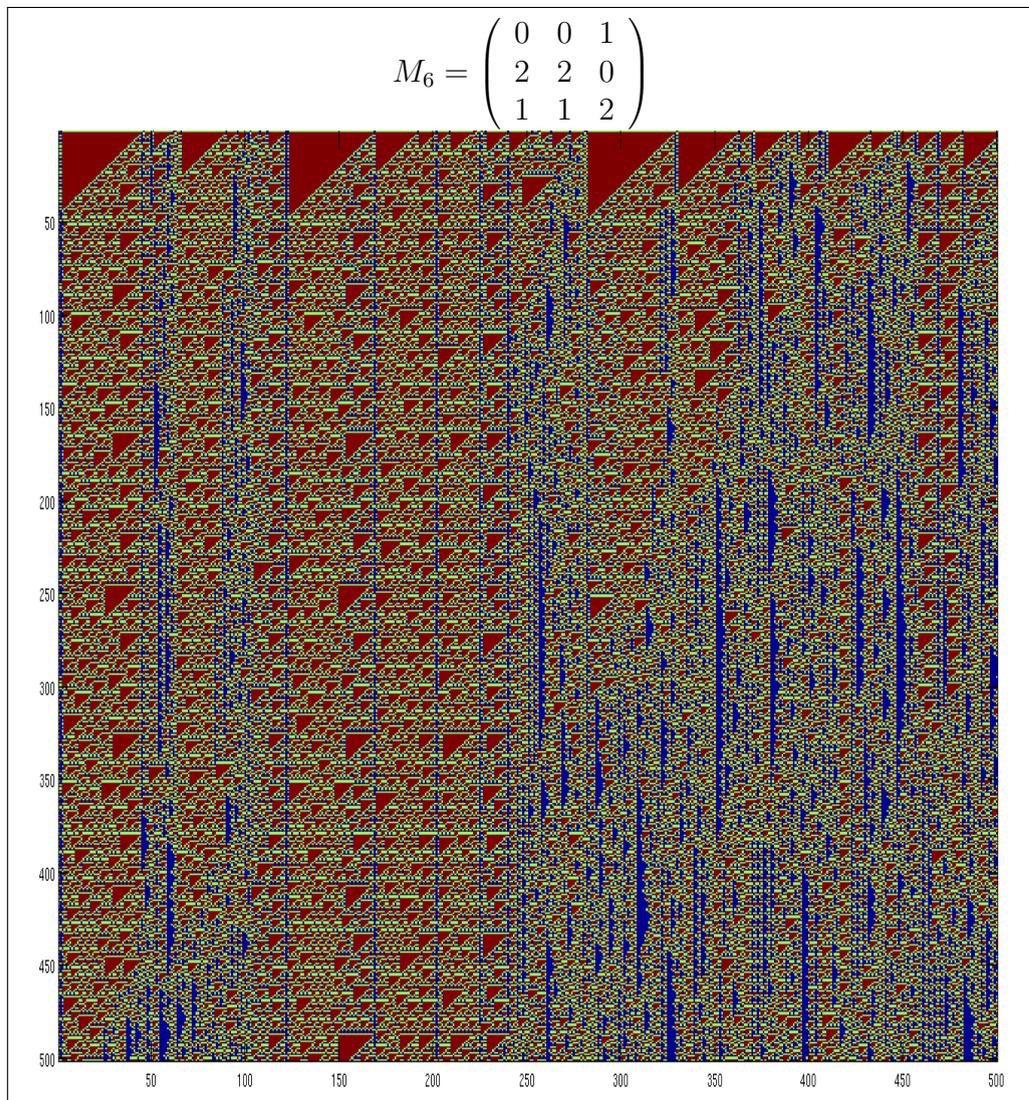


Figura B.7: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_6$

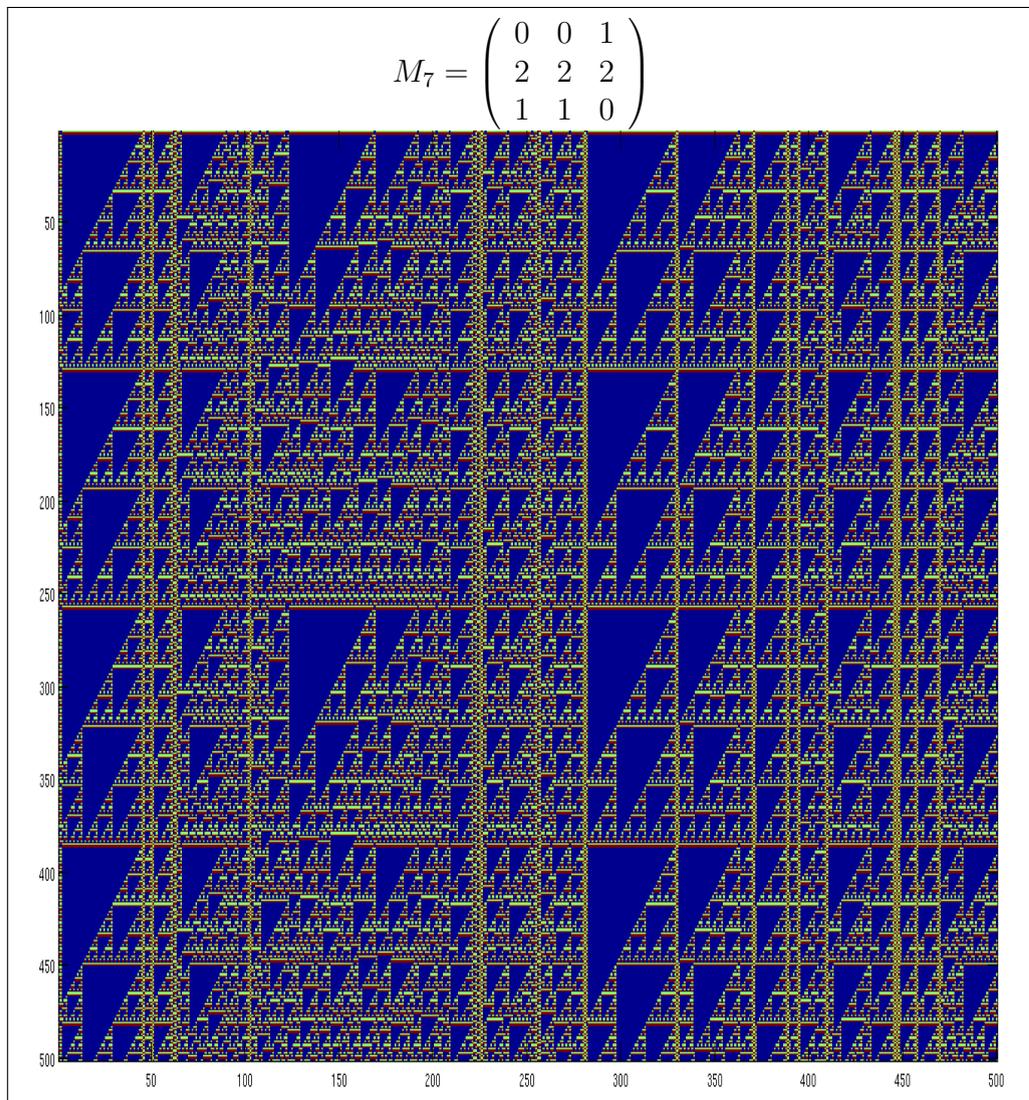


Figura B.8: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_7$

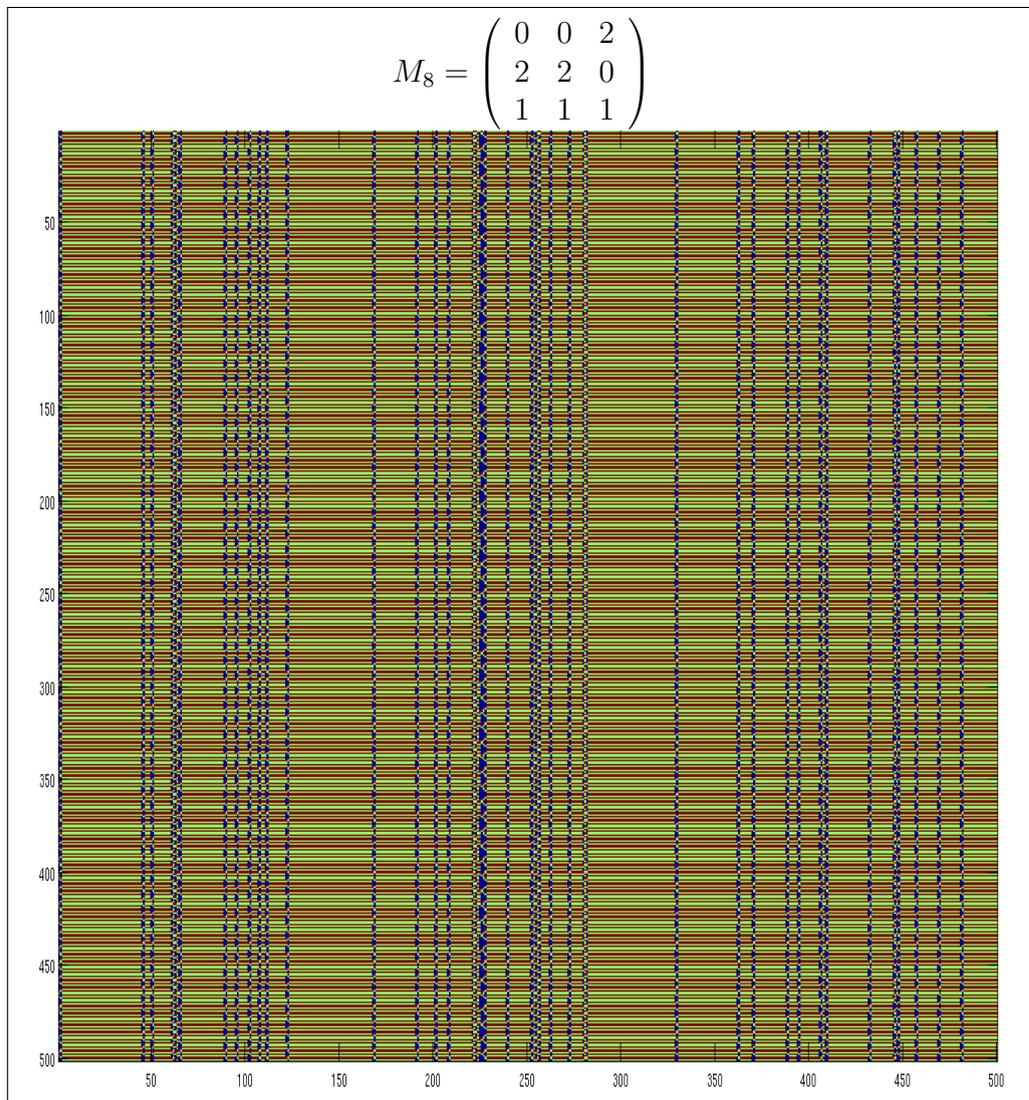


Figura B.9: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_8$

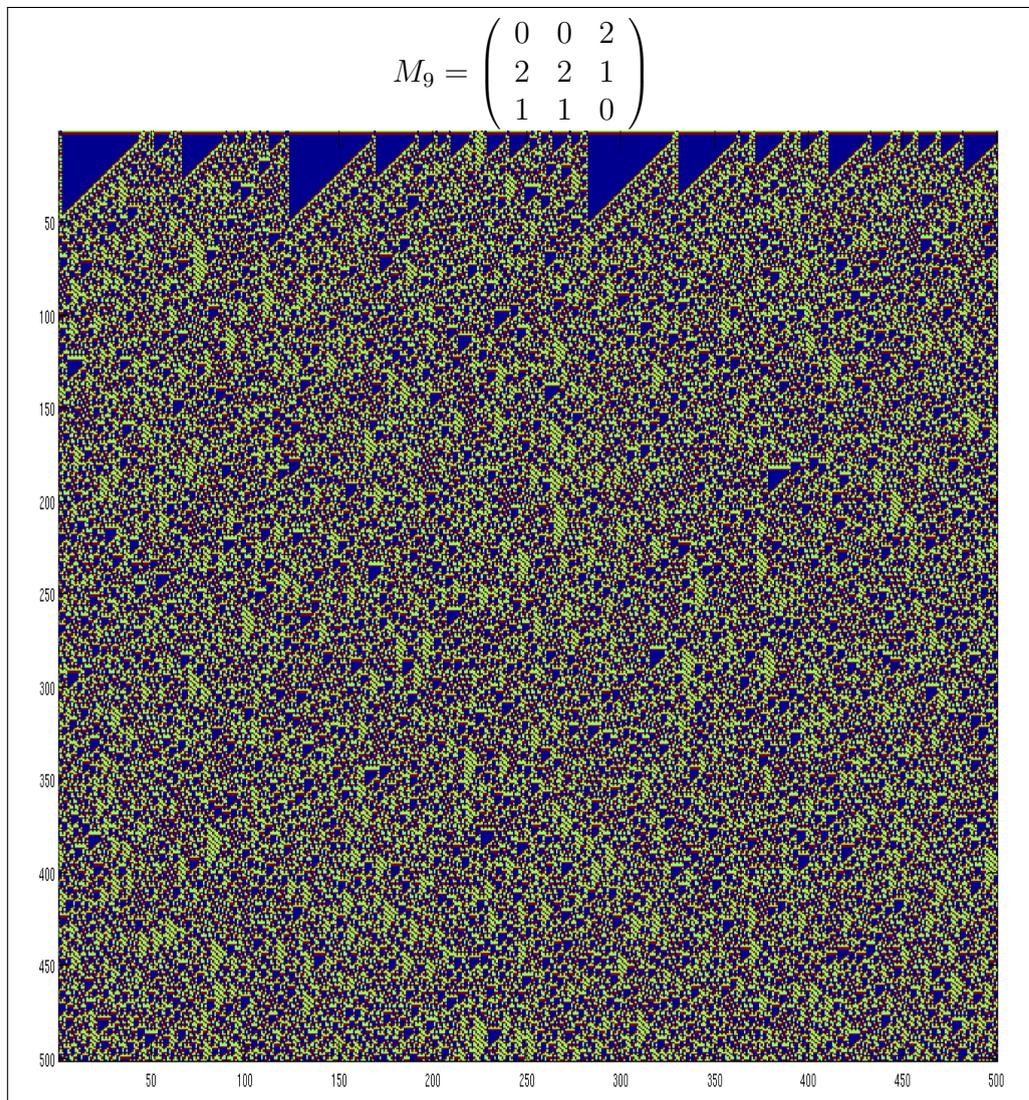


Figura B.10: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_9$

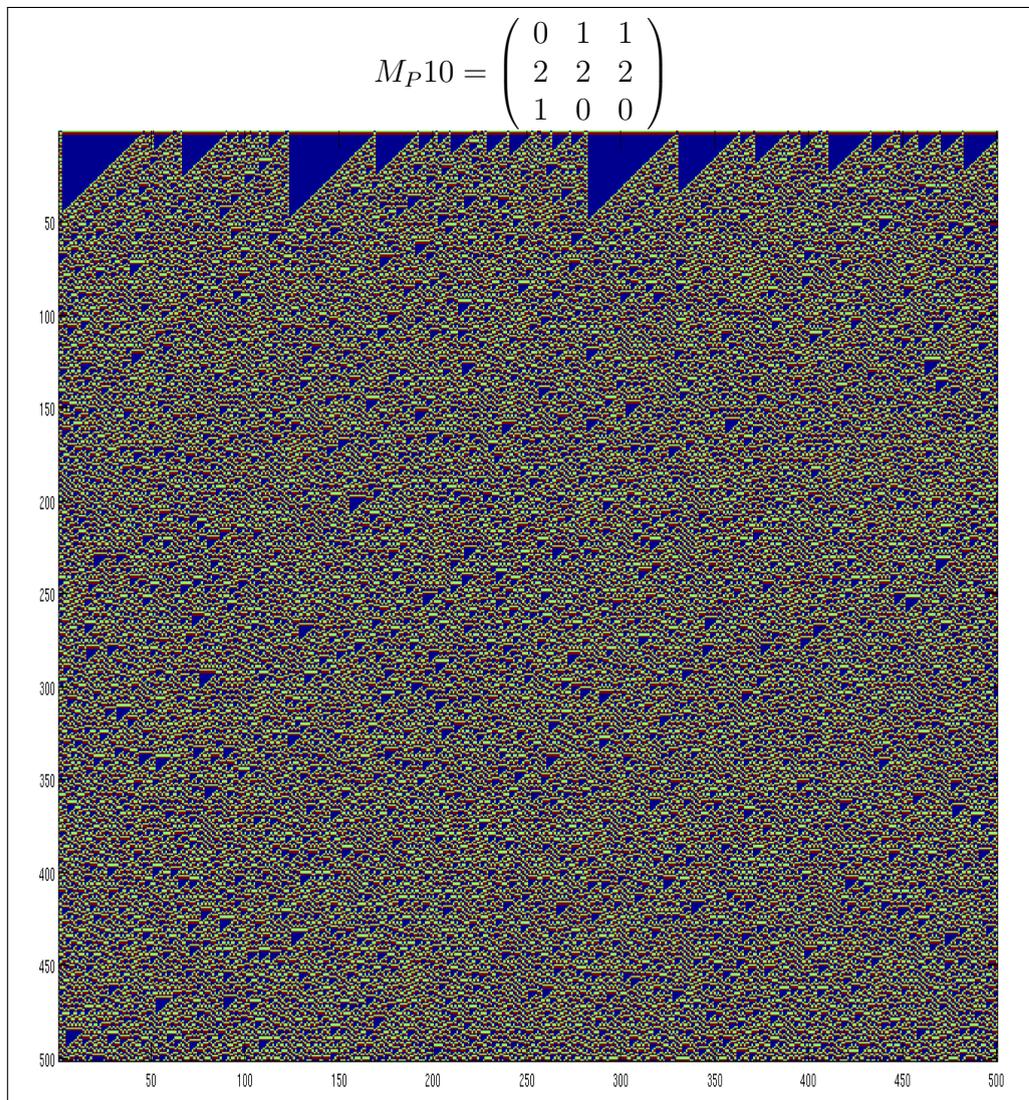


Figura B.11: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{10}$

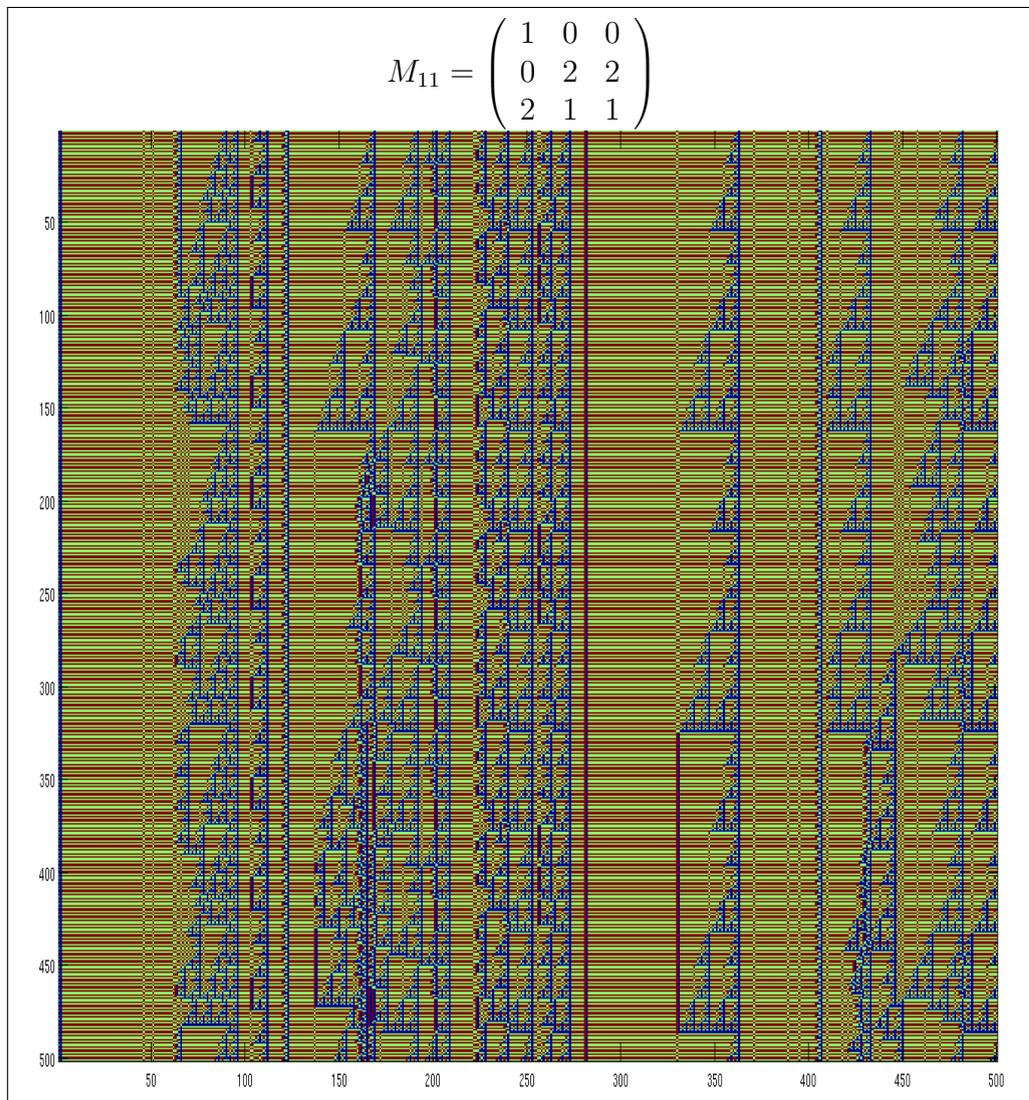


Figura B.12: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{11}$

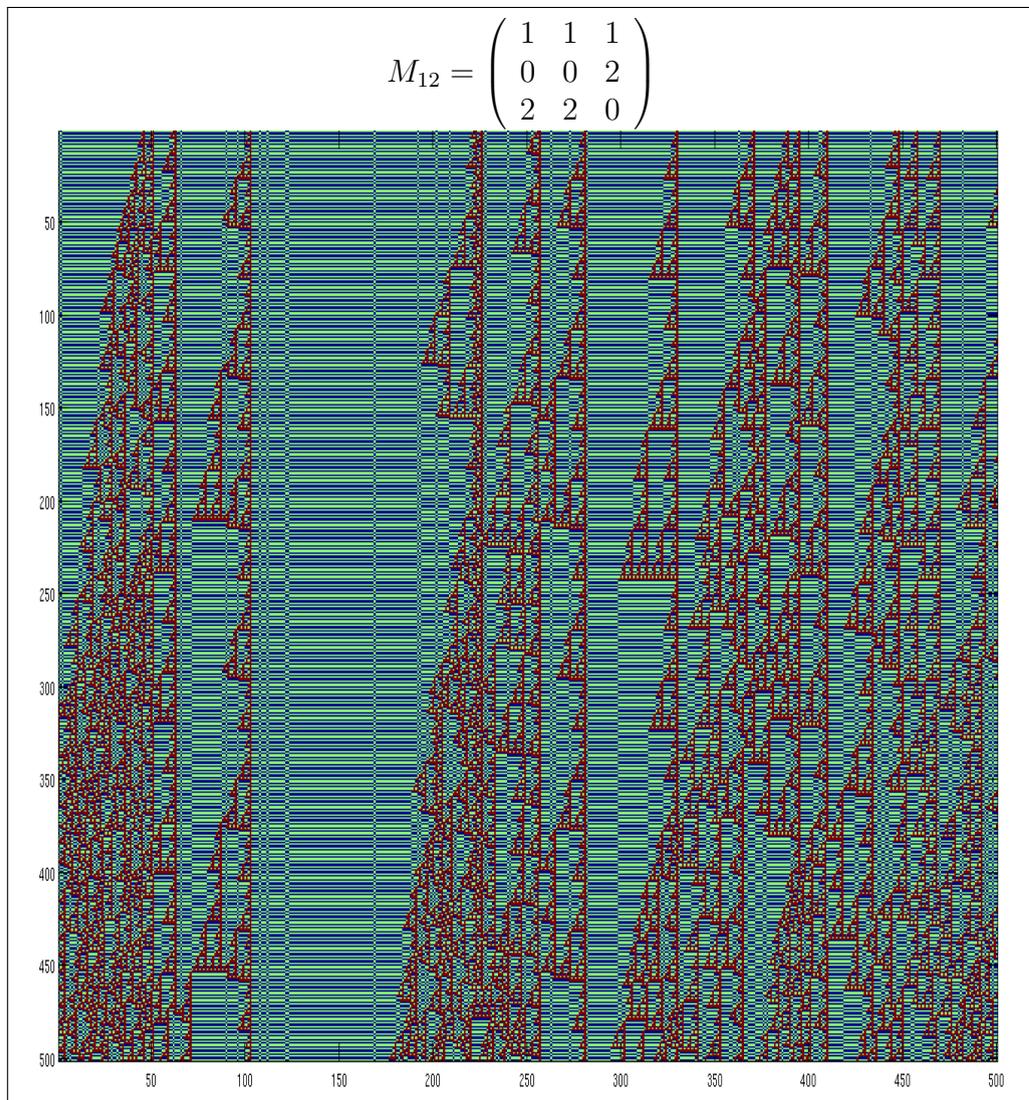


Figura B.13: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{12}$

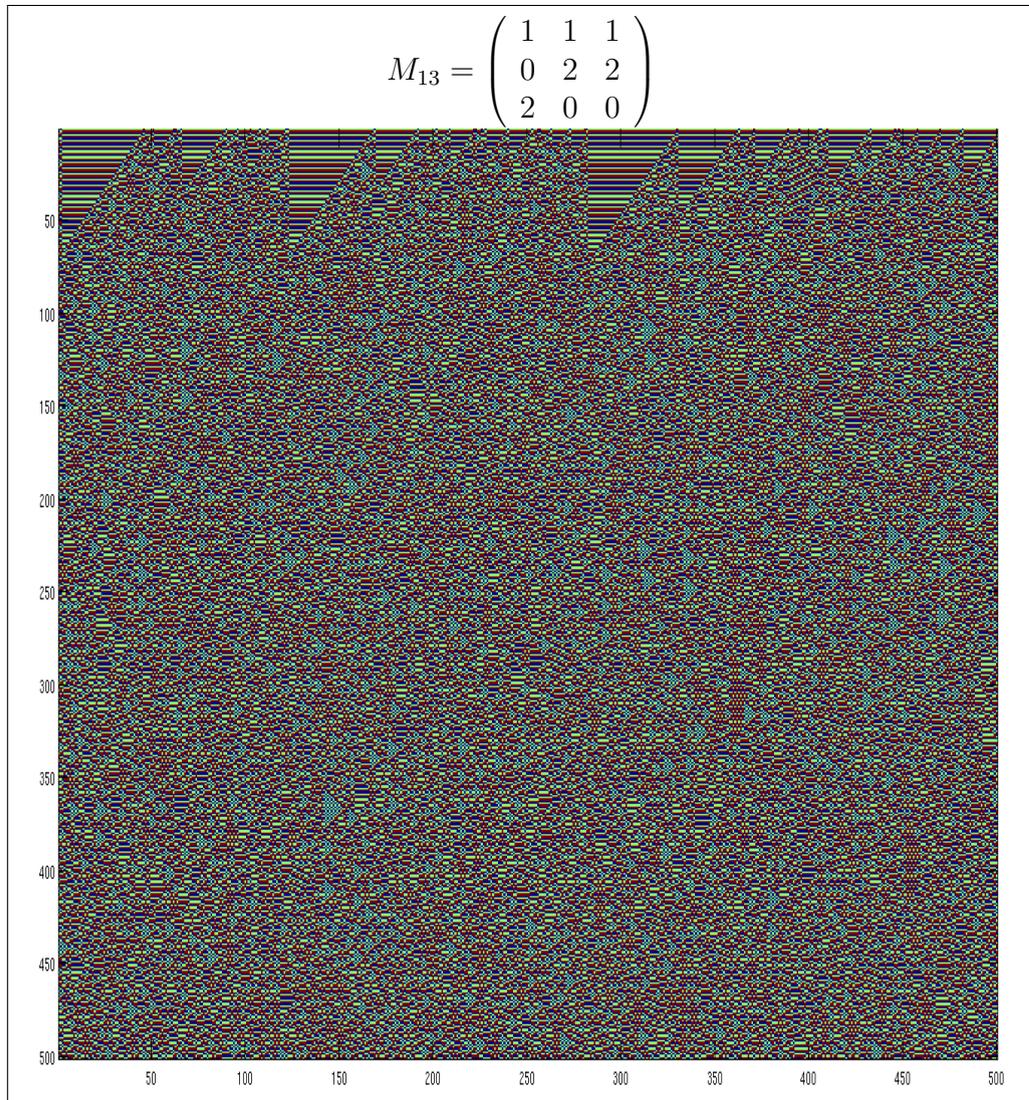


Figura B.14: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{13}$

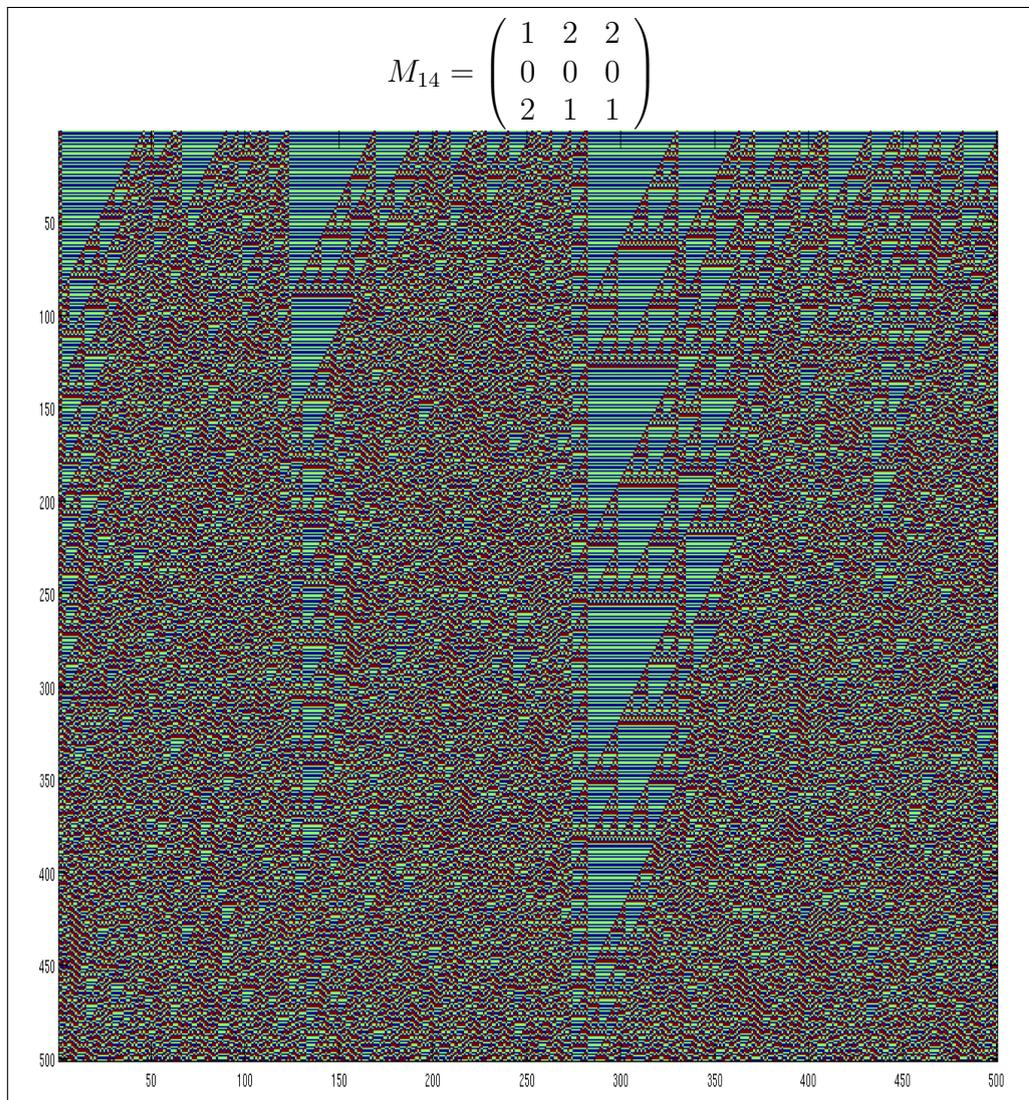


Figura B.15: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{14}$

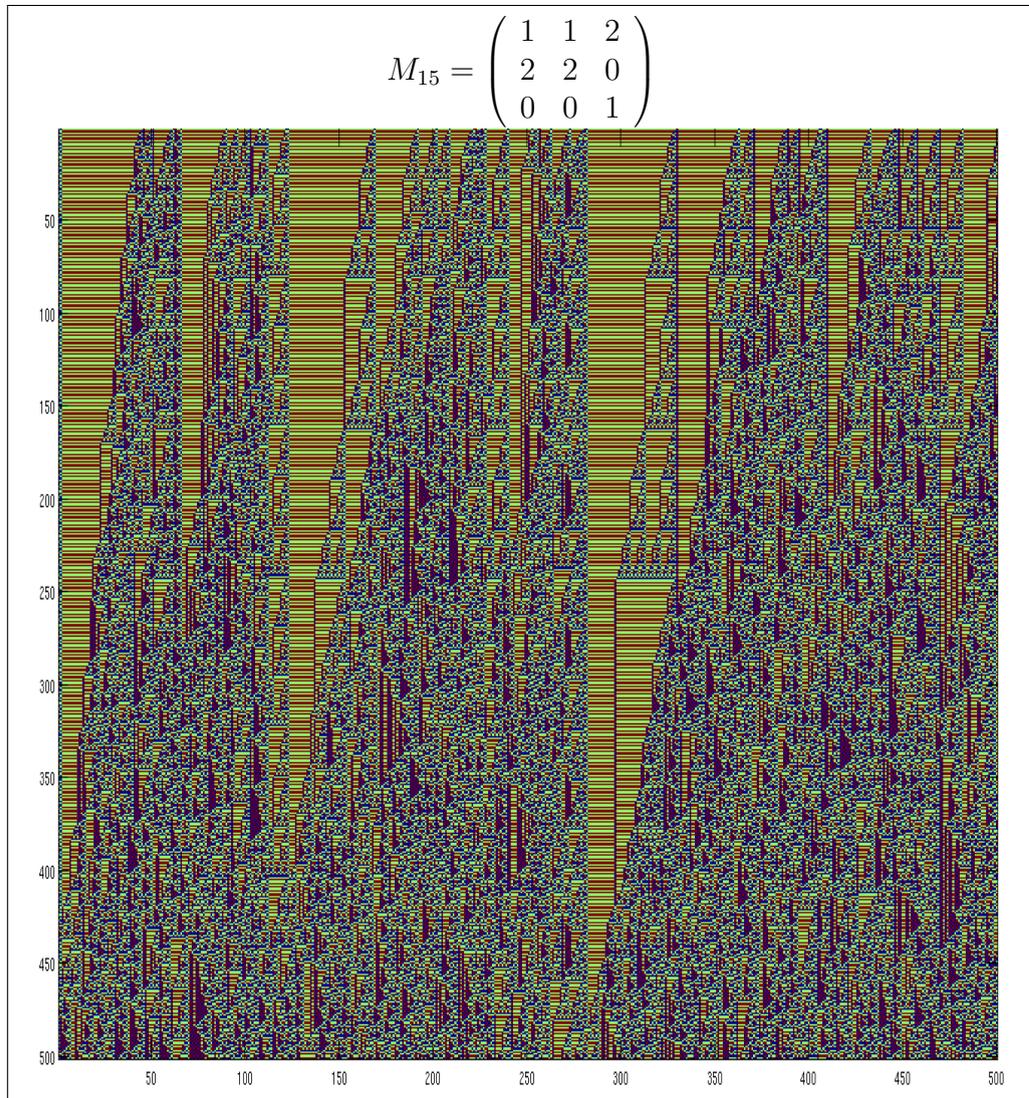


Figura B.16: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{15}$

## Apéndice C

Iteración medida de Bernoulli por  
ACs en  $\sigma^{-1} - ESQ_3^1$

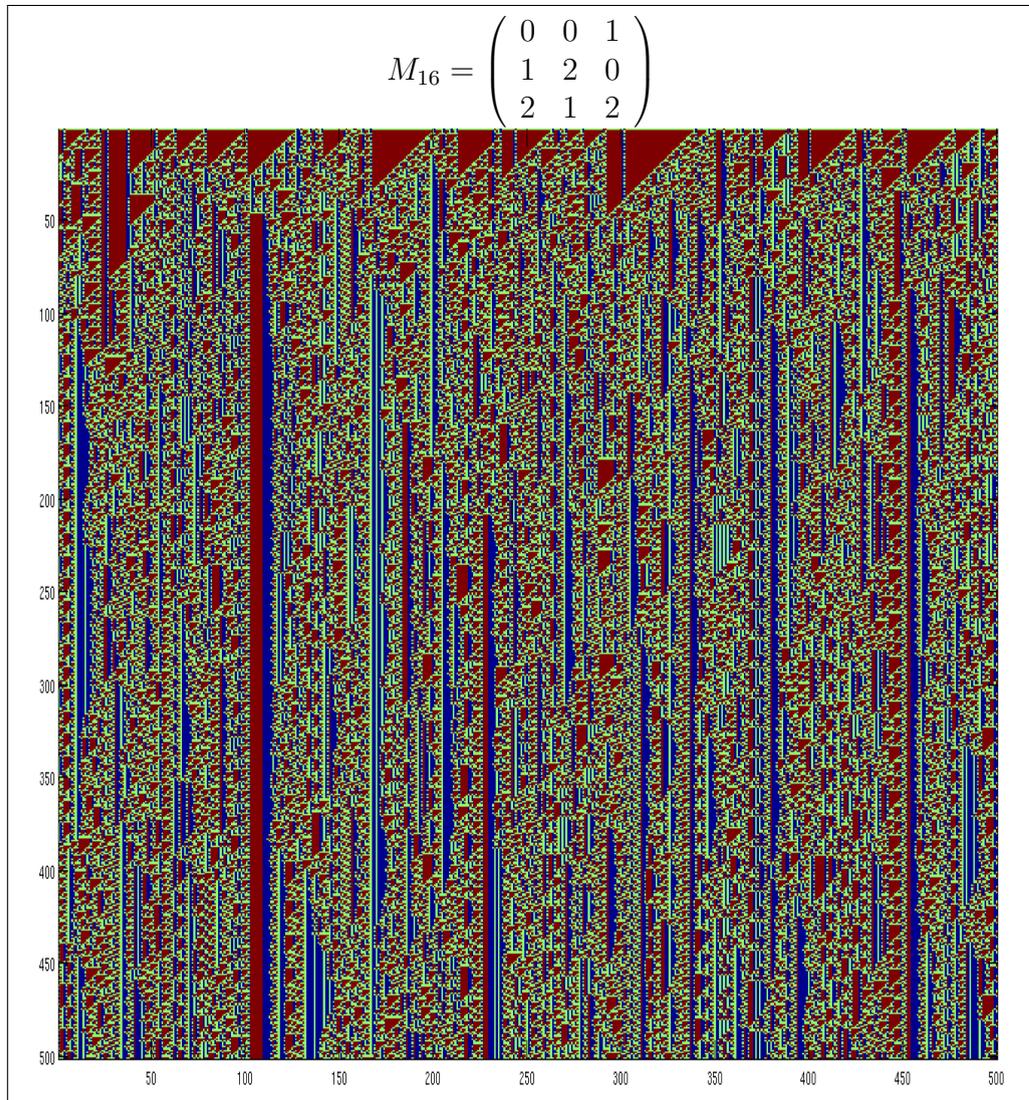


Figura C.1: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{16}$

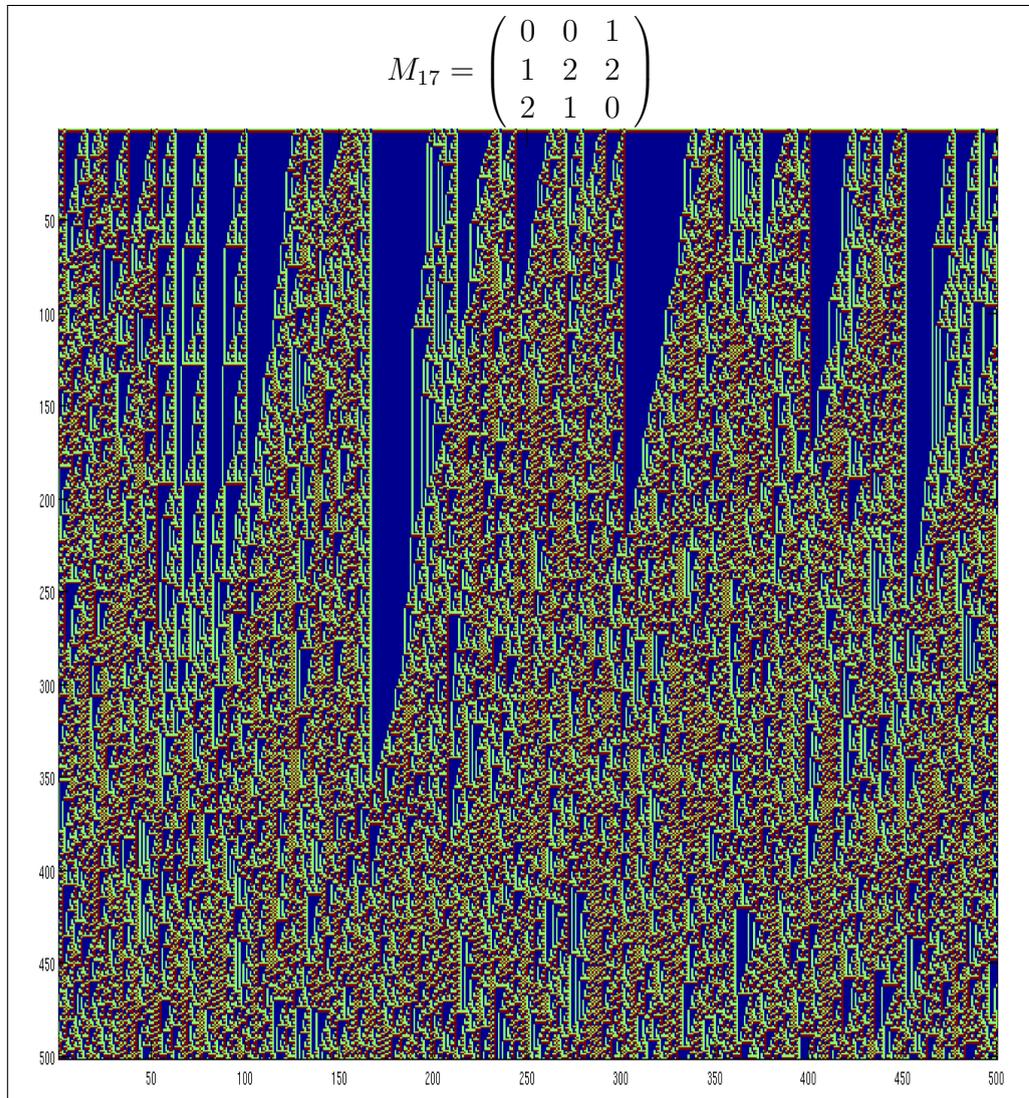


Figura C.2: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{17}$

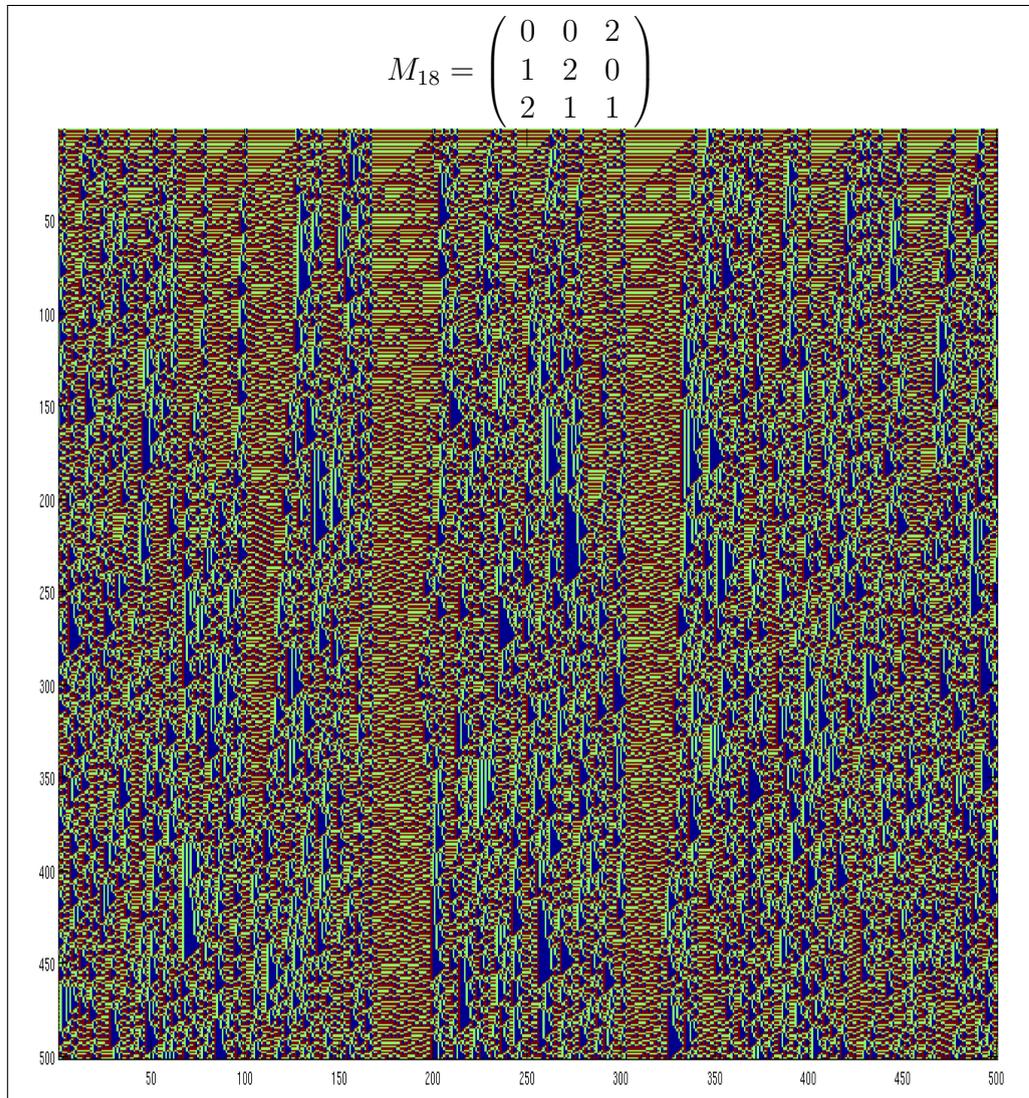


Figura C.3: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{18}$

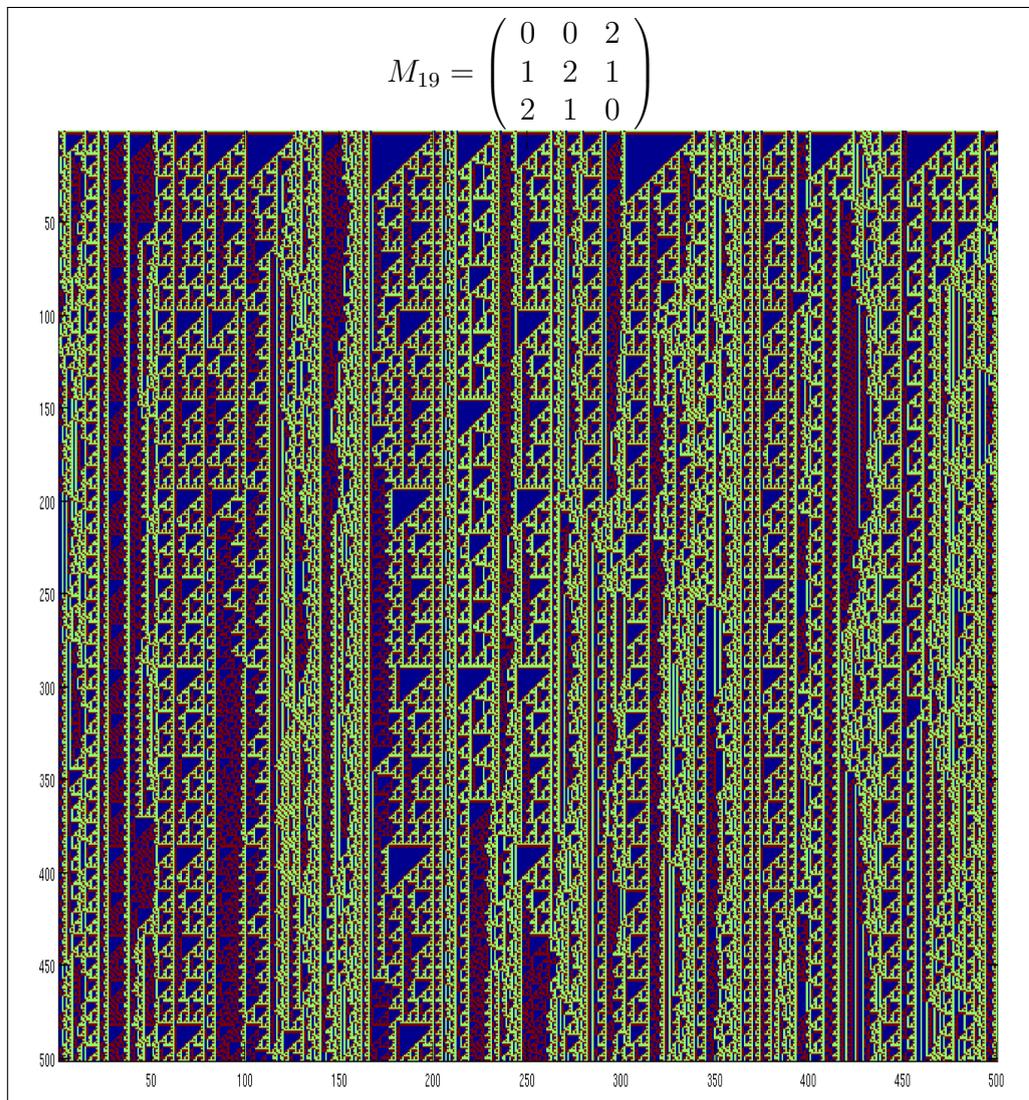


Figura C.4: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{19}$

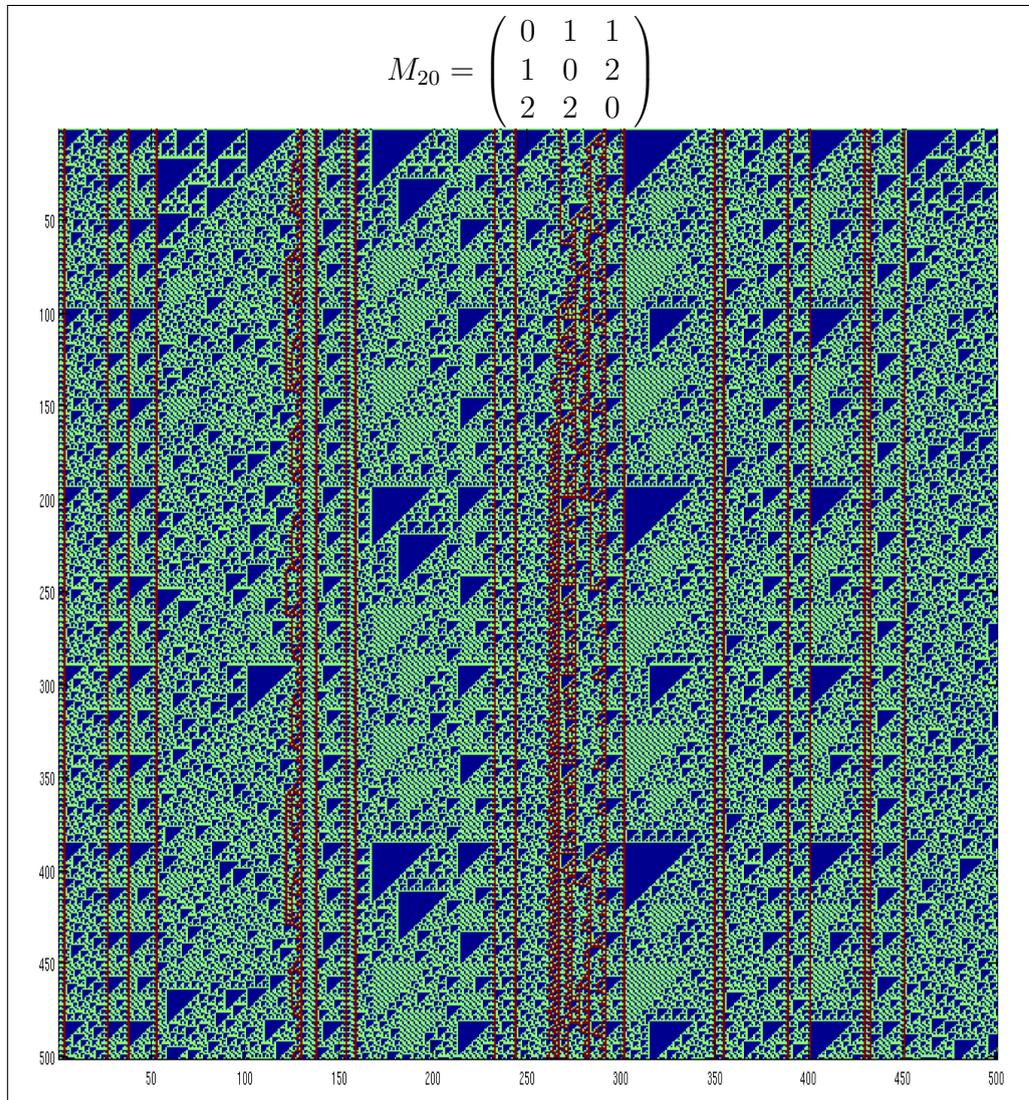


Figura C.5: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{20}$

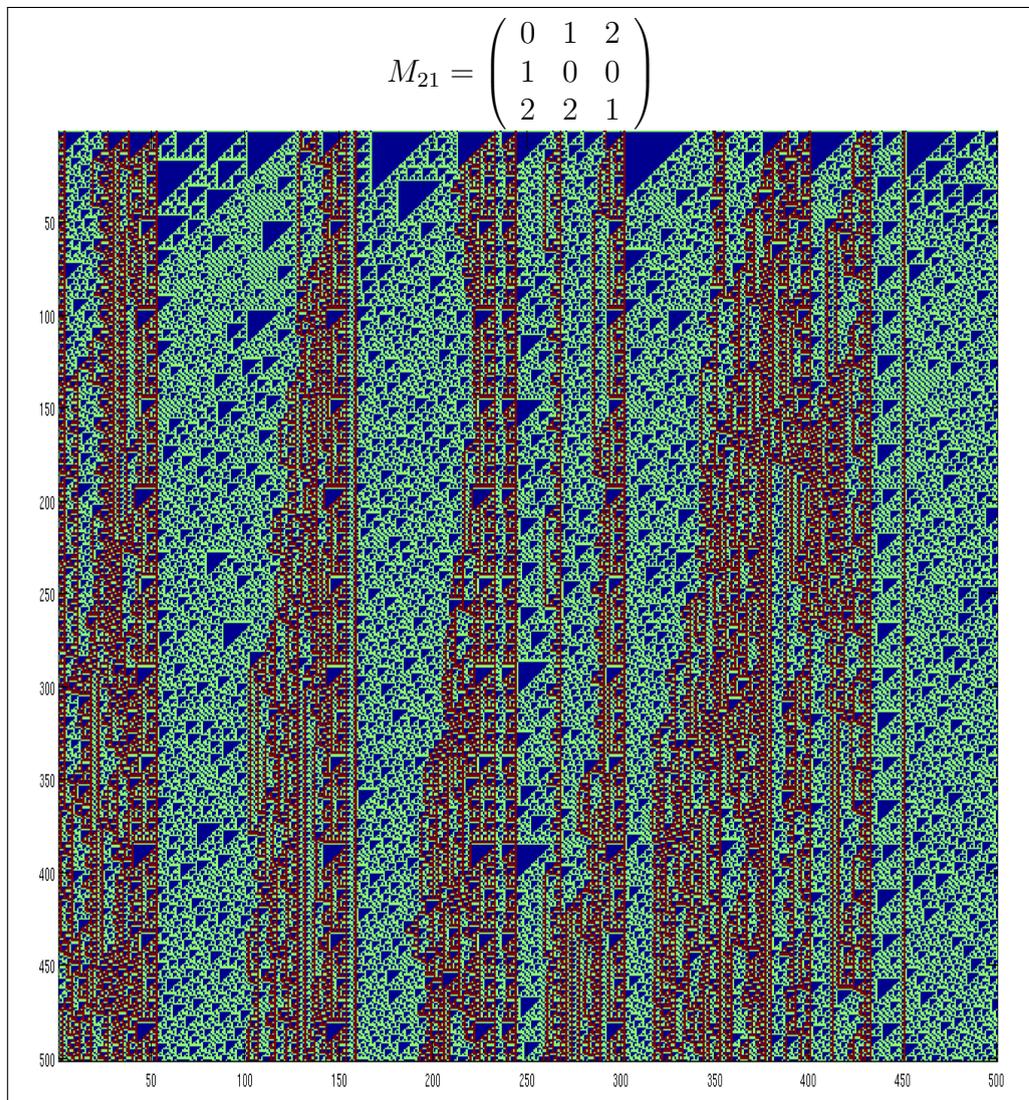


Figura C.6: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{21}$

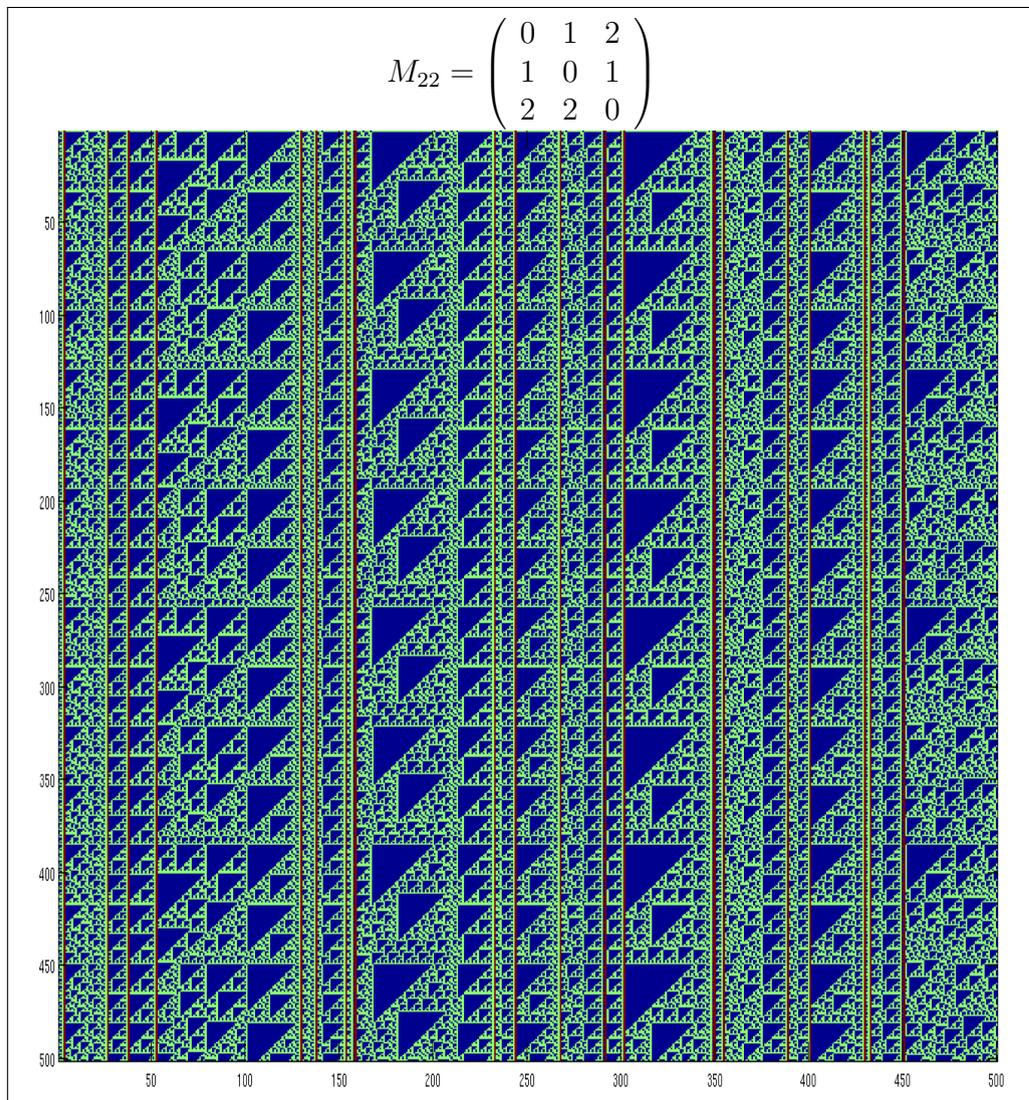


Figura C.7: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{22}$

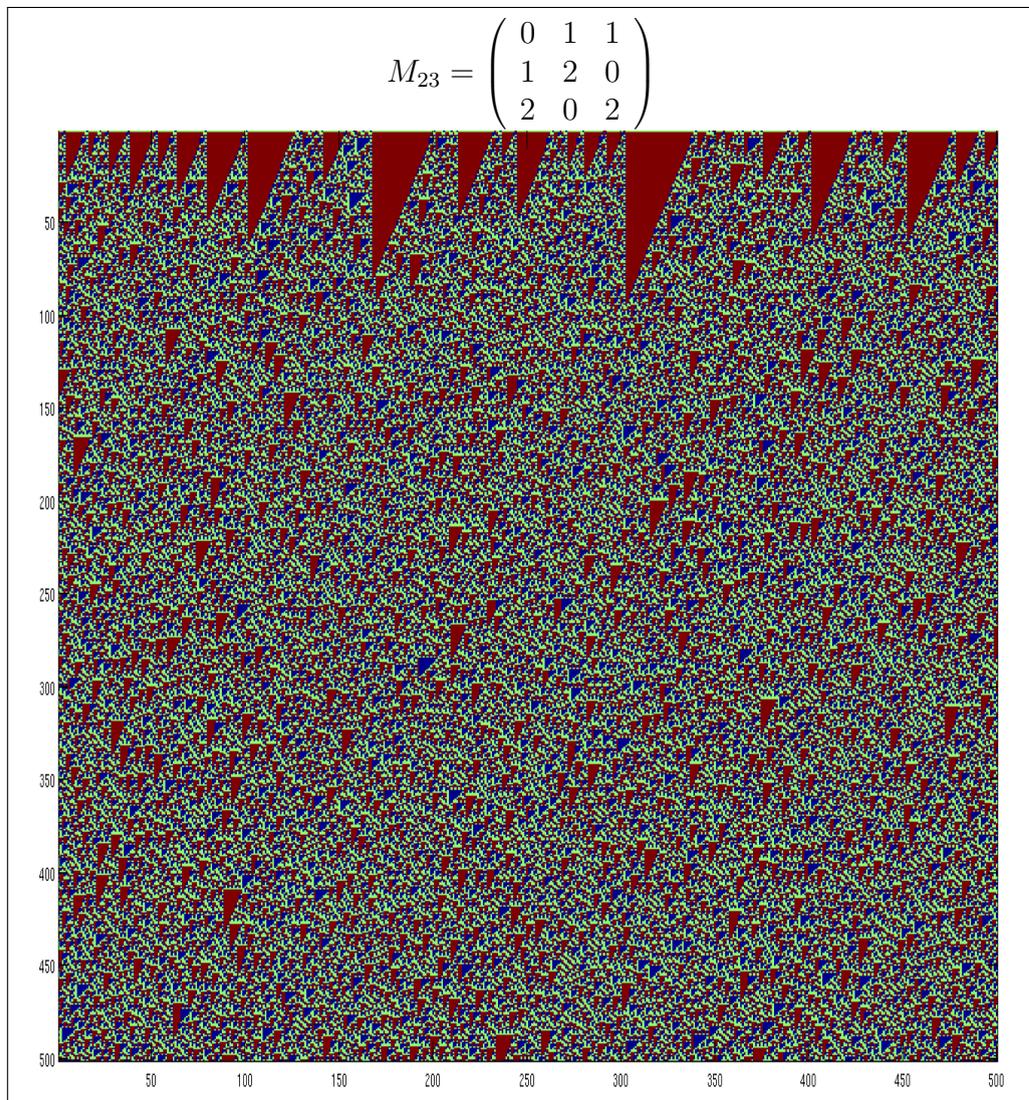


Figura C.8: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{23}$

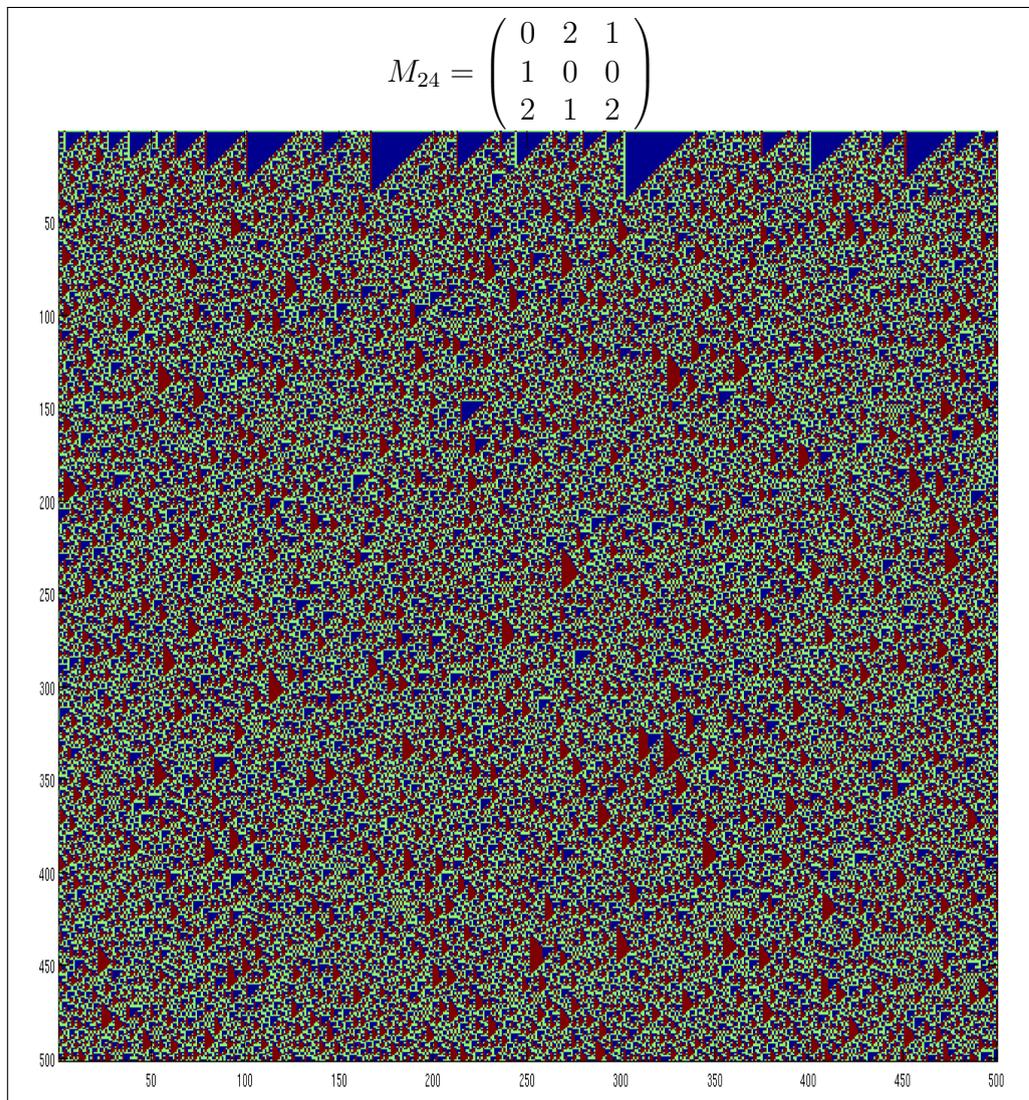


Figura C.9: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{24}$

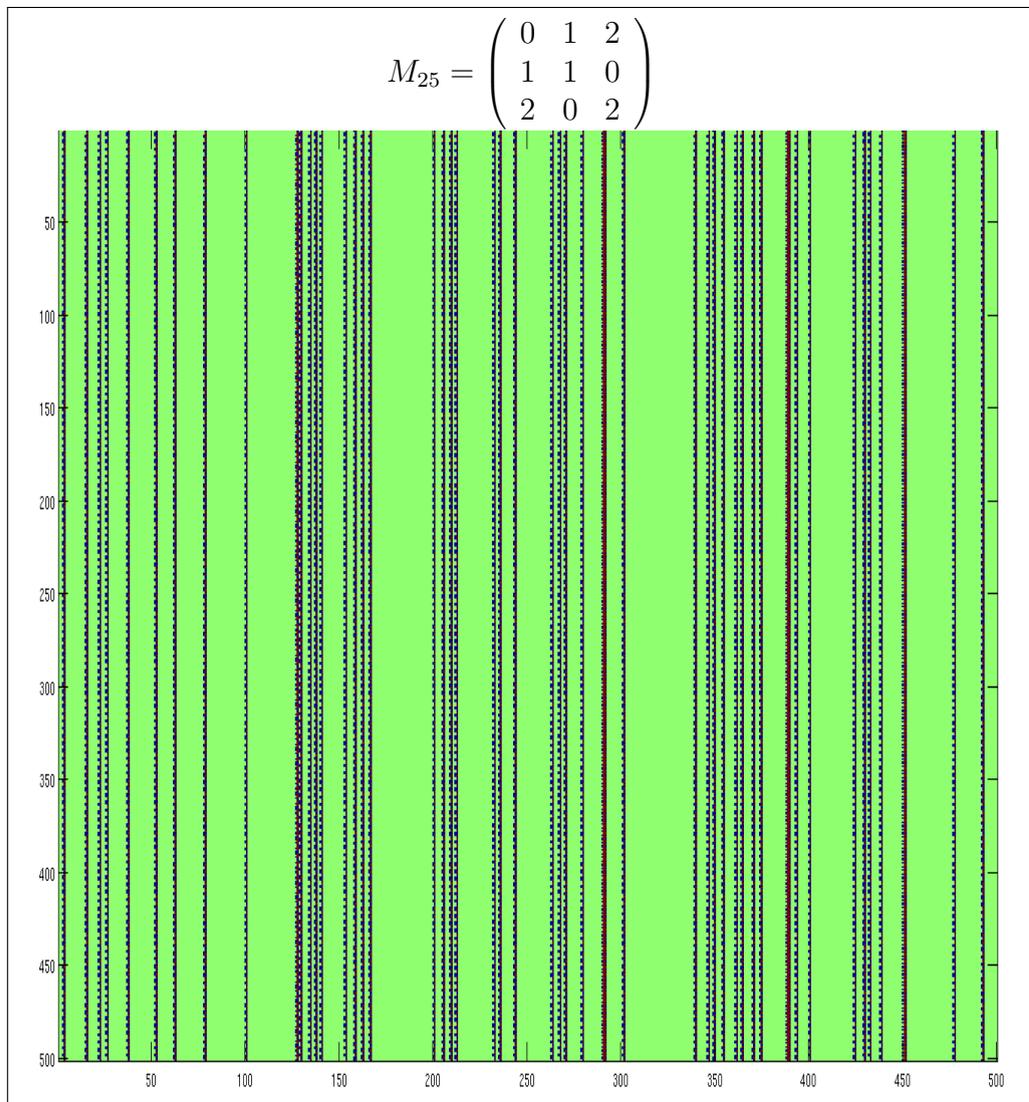


Figura C.10: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{25}$

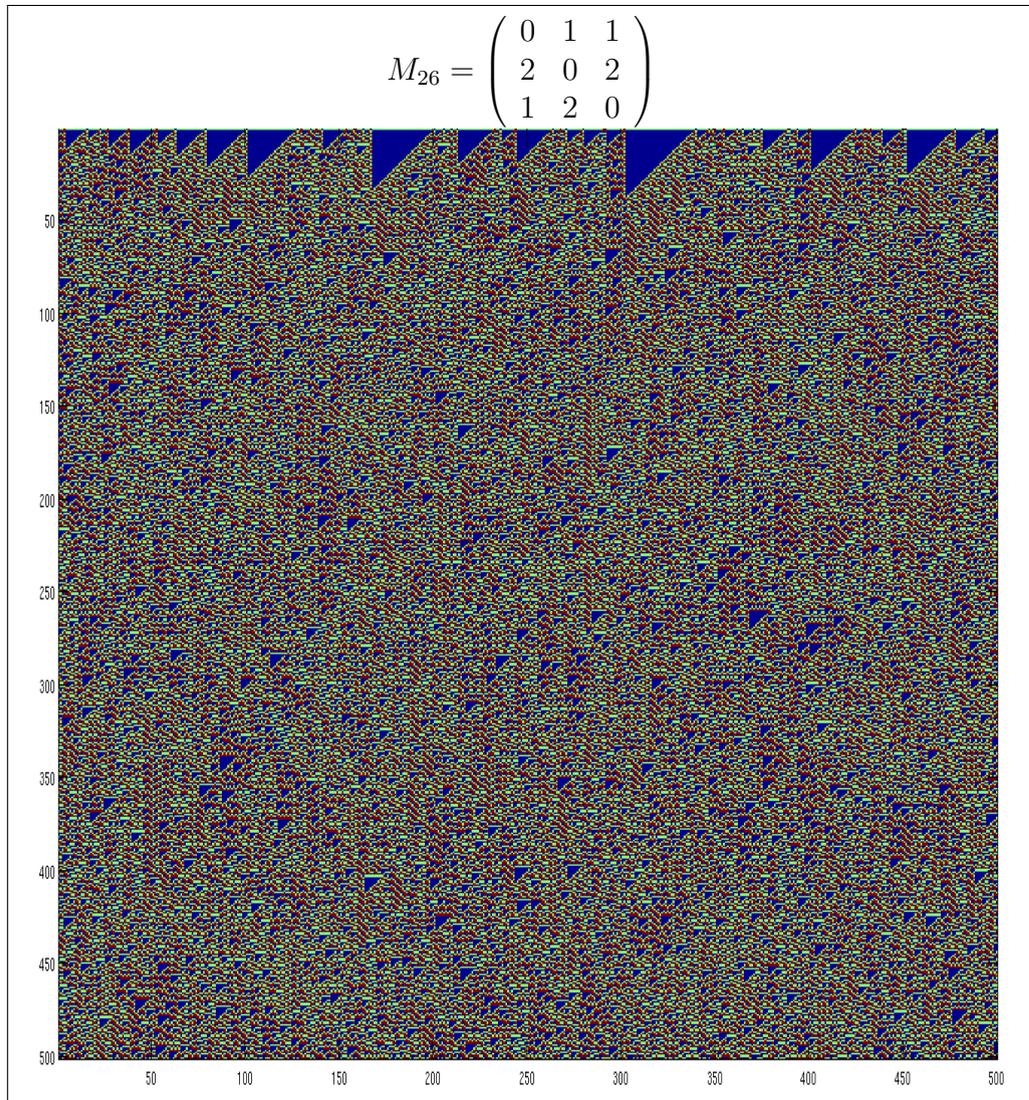


Figura C.11: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{26}$

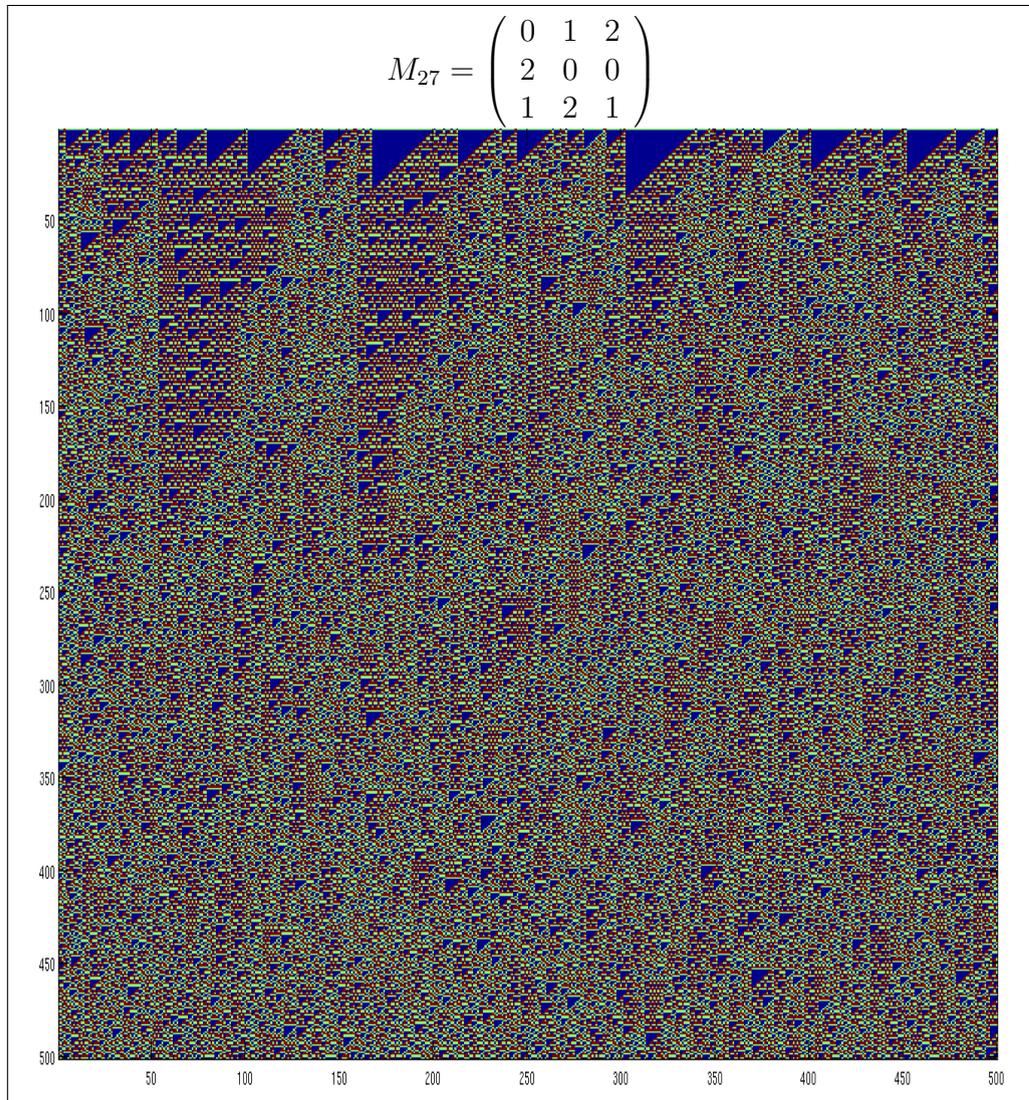


Figura C.12: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{27}$

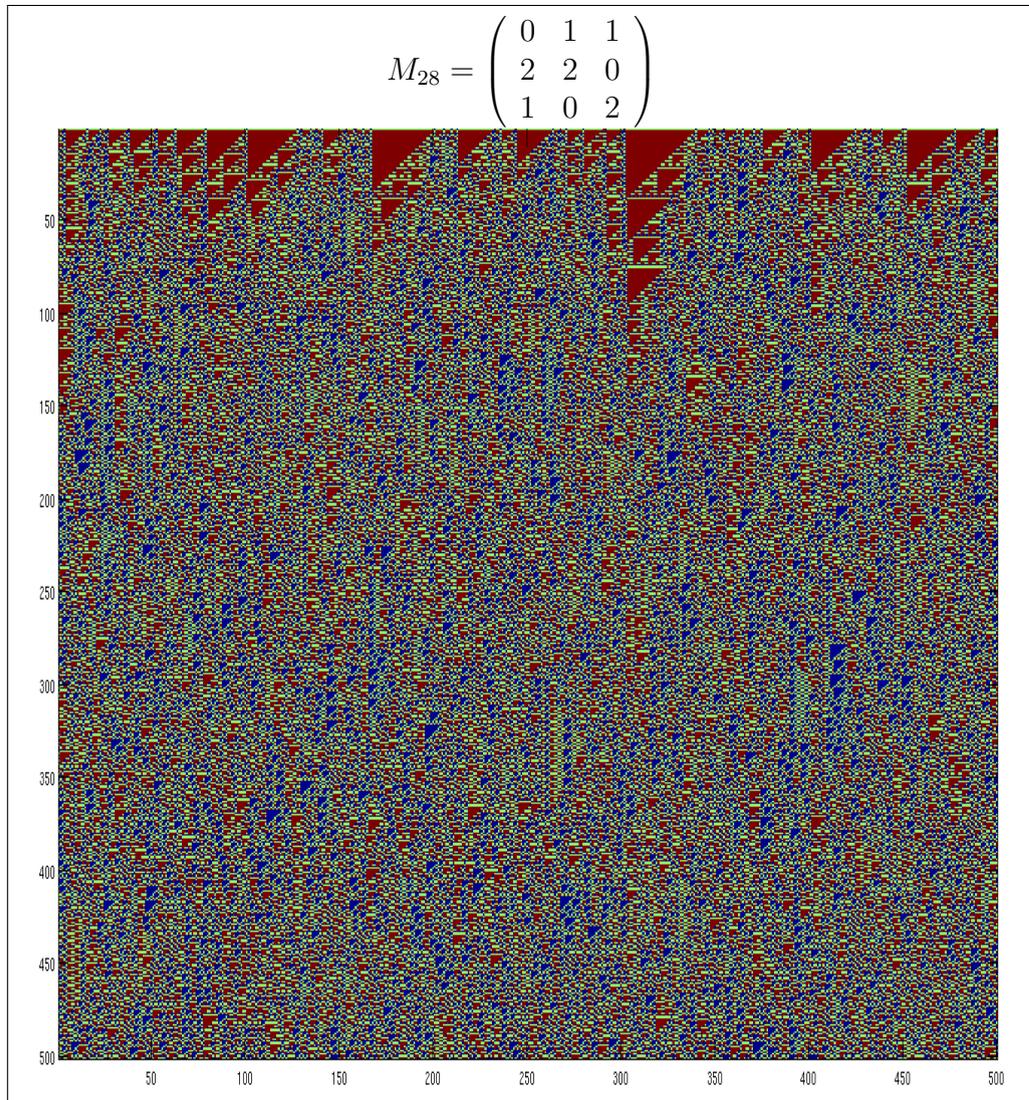


Figura C.13: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{28}$

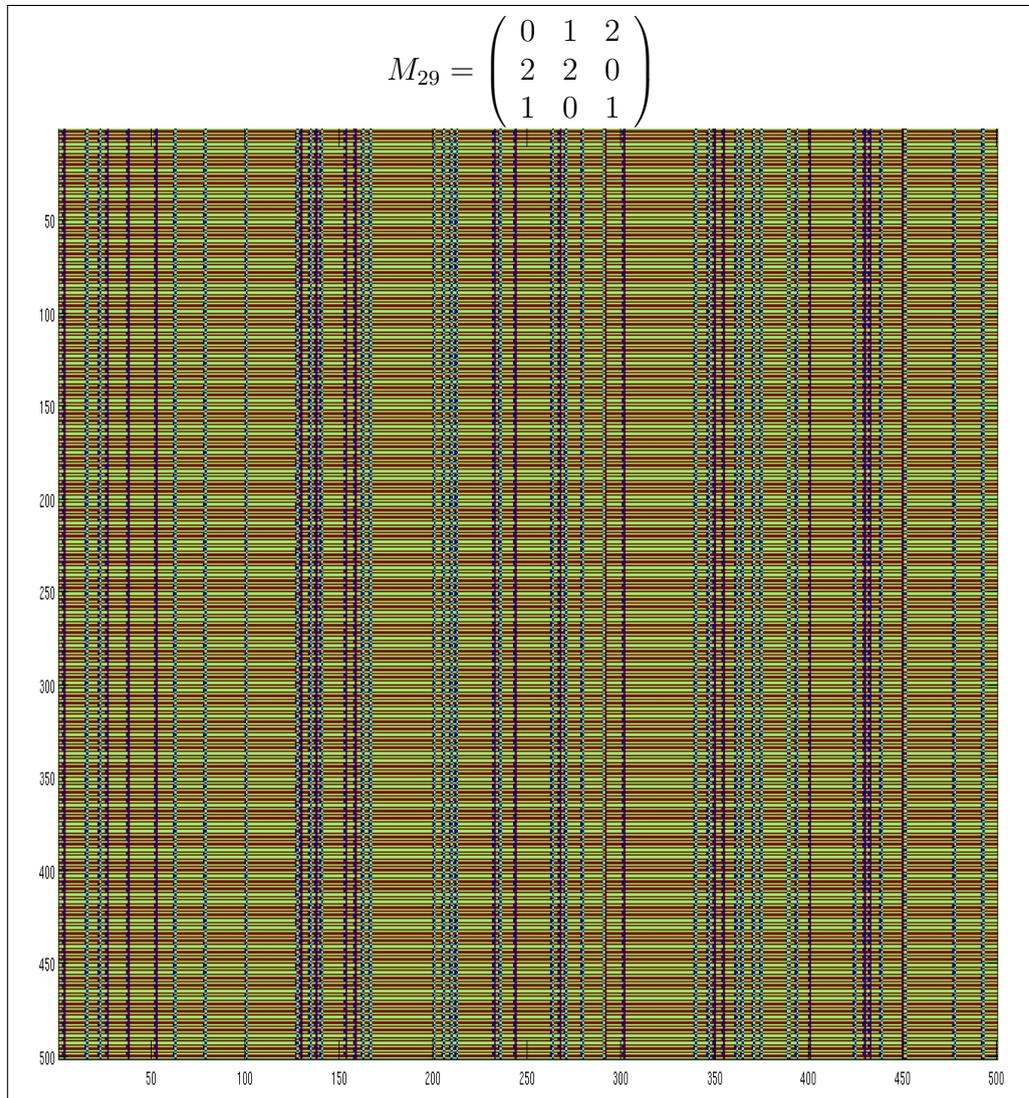


Figura C.14: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{29}$

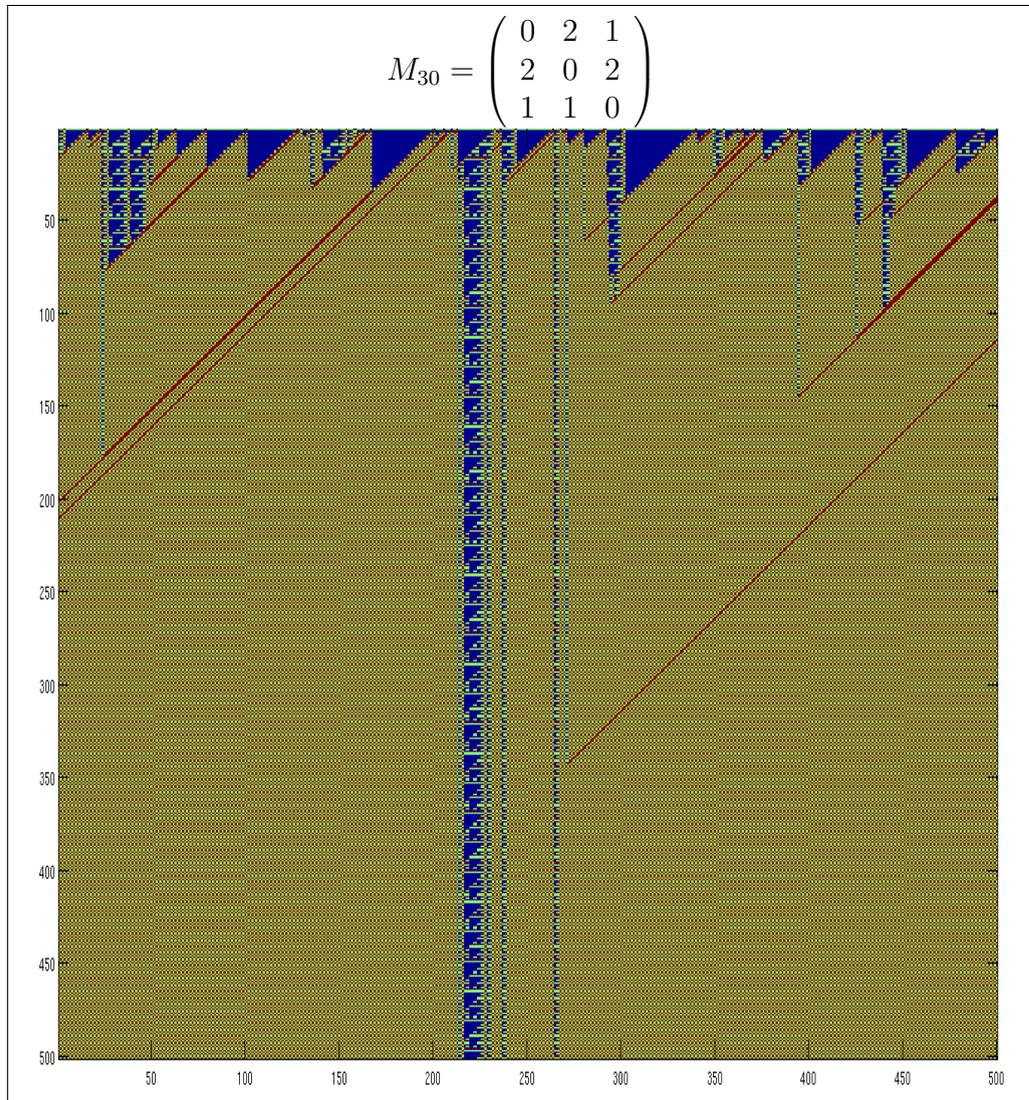


Figura C.15: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{30}$

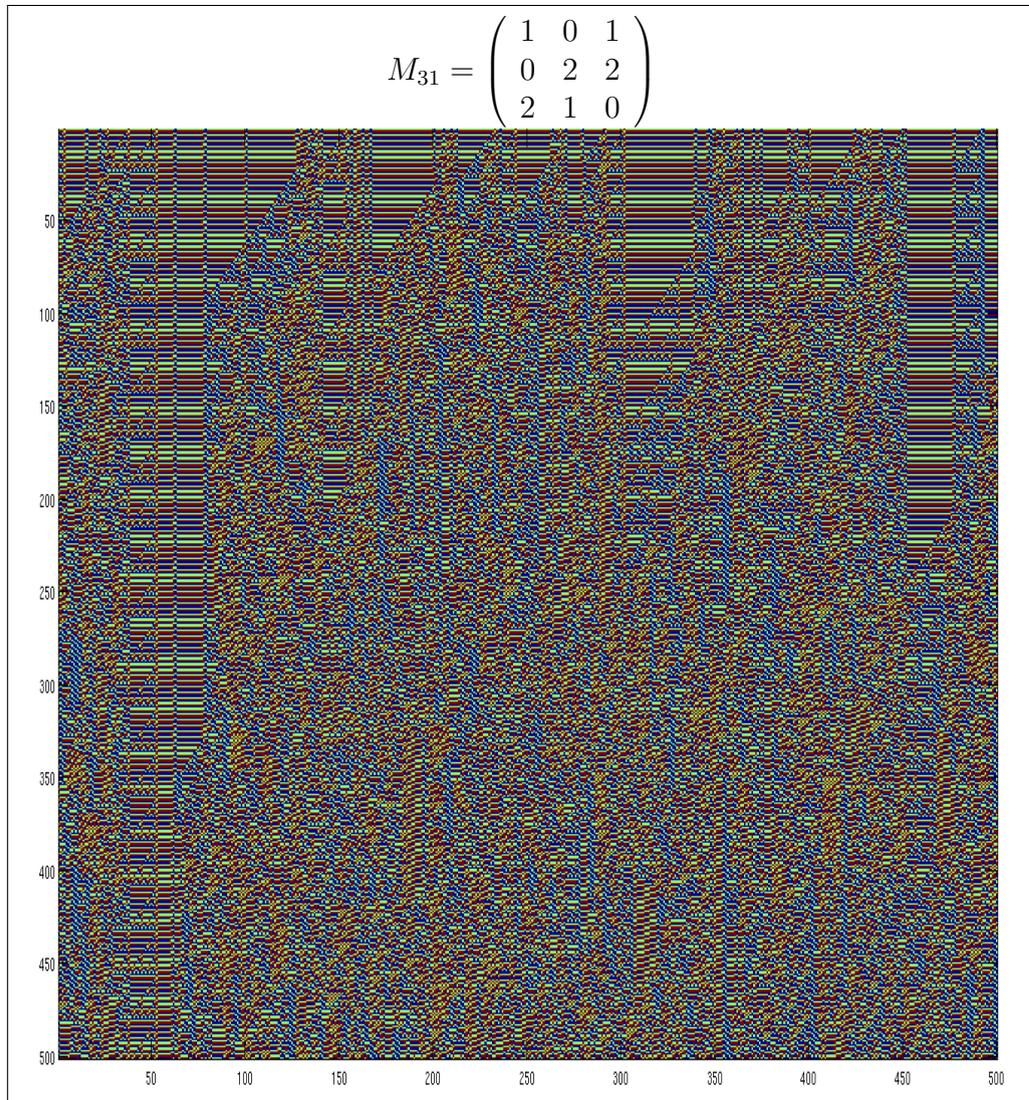


Figura C.16: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{31}$

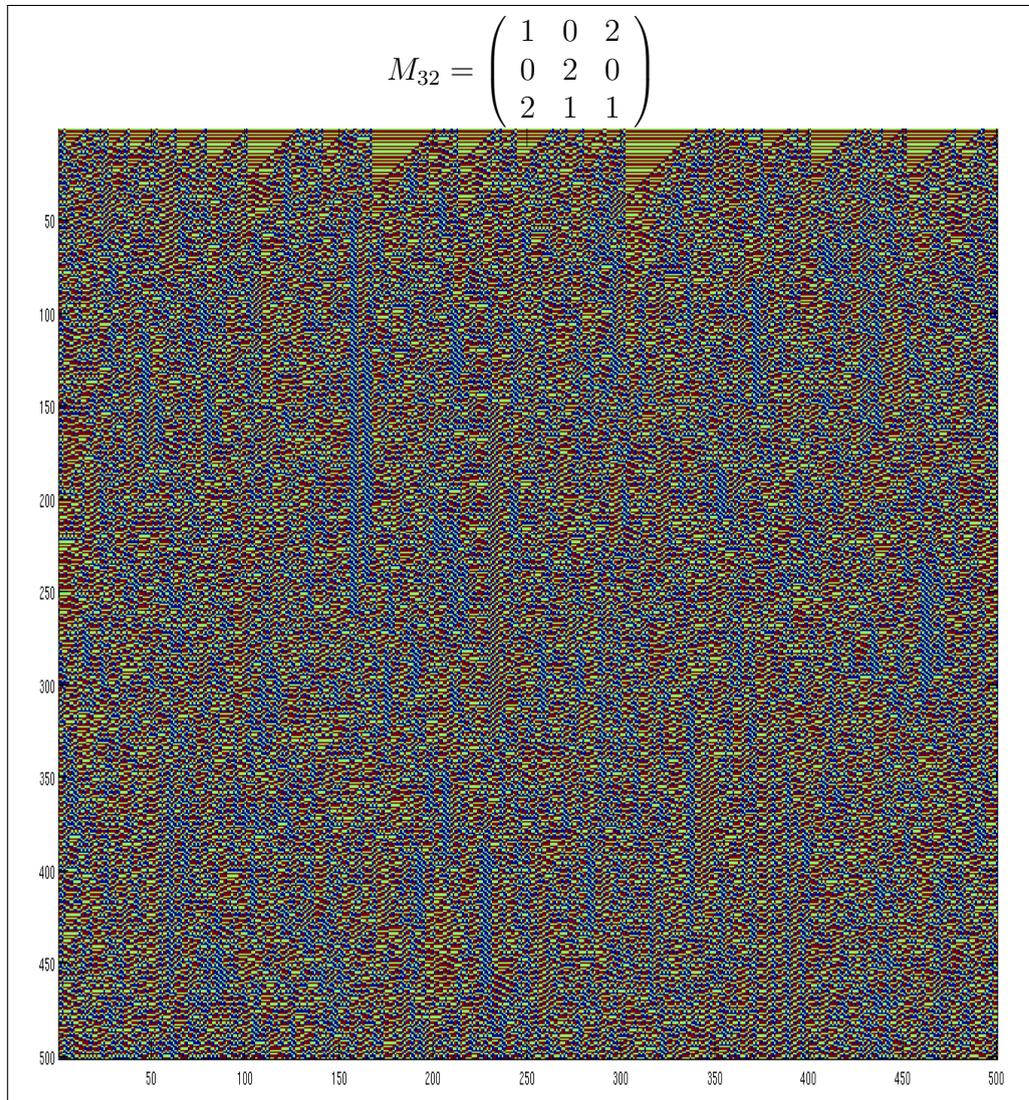


Figura C.17: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{32}$

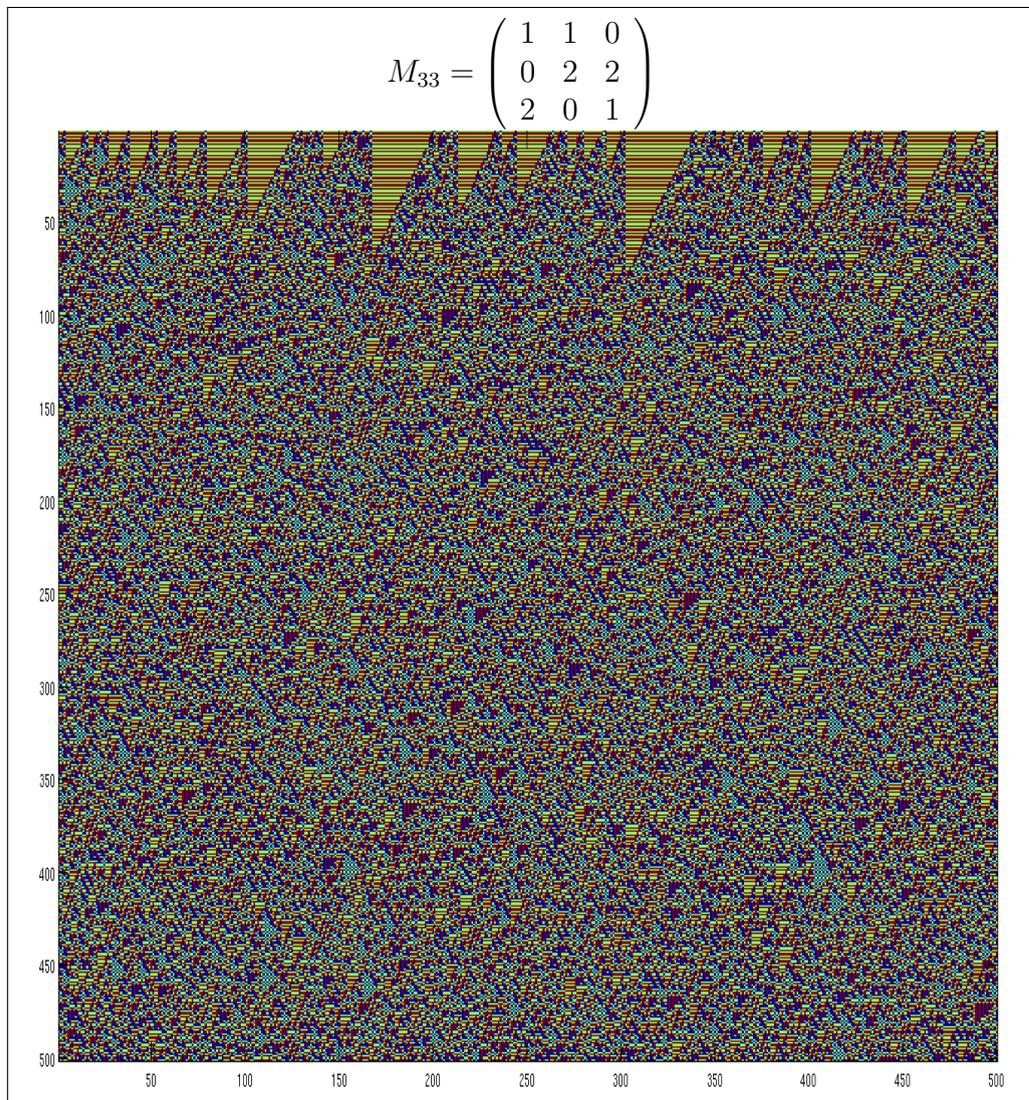


Figura C.18: Simulación de iteraciones de  $\mu$  de Bernoulli con distribución  $\pi = (0,05; 0,9; 0,05)$  por el AC  $M_{33}$

# Apéndice D

## Demostraciones usando SAGE

### Obtención de las subclases de $PE_3$

Se obtienen a partir del siguiente código en SAGE.

1. Se crea una lista con todos los ACs en  $PE_3$

```
L=[[0,1,2],[0,2,1],[1,0,2],[1,2,0],[2,0,1],[2,1,0]]
PE=[]
for i1 in range(6):
    for i2 in range(6):
        for i3 in range(6):
            PE.append(matrix(3,3,[L[i1],L[i2],L[i3]]))
```

2. Aplicación de propiedad para encontrar ACs conjugados en informe.

```
def transform(N,vector):
    #primero cambiar simbolos
    M=copy(N)

    for i,j in CartesianProduct(range(3),range(3)):
        if M[i,j]==0:
            M[i,j]=-1
        if M[i,j]==1:
            M[i,j]=-2
        if M[i,j]==2:
            M[i,j]=-3

    for i,j in CartesianProduct(range(3),range(3)):
        if M[i,j]==-1:
            M[i,j]=vector[0]
        if M[i,j]==-2:
            M[i,j]=vector[1]
        if M[i,j]==-3:
            M[i,j]=vector[2]
```

```

PerM=[matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]),
matrix(3,3,[0,1,0,1,0,0,0,0,1]),matrix(3,3,[1,0,0,0,0,1,0,1,0]),
matrix(3,3,[0,0,1,0,1,0,1,0,0]),matrix(3,3,[0,0,1,1,0,0,0,1,0]),
matrix(3,3,[0,1,0,0,0,1,1,0,0])]

if vector==[1,0,2]:
    M=copy(PerM[1].transpose()*M*PerM[1])
if vector==[0,2,1]:
    M=copy(PerM[2].transpose()*M*PerM[2])
if vector==[2,1,0]:
    M=copy(PerM[3].transpose()*M*PerM[3])
if vector==[1,2,0]:
    M=copy(PerM[5].transpose()*M*PerM[5])
if vector==[2,0,1]:
    M=copy(PerM[4].transpose()*M*PerM[4])

return M

```

```

CLASS=[]
INCLUDED=[]
aux=0
for _ in range(216):
    aux=0
    for i in range(216):
        for j in range(6):
            if PE[_]==transform(PE[i],L[j]):
                if ( PE[i] in INCLUDED )==false and aux==0:
                    CLASS.append(PE[i])
                    aux=1
                    INCLUDED.append(PE[i])

```

3. Obtención de  $TRQ_3$ ,  $ALQ_3$ ,  $ESQ_3^0$ ,  $ESQ_3^1$  y cardinalidad de cada clase.

```

indexTRQ=vector([0,19,42])
indexALGQ=vector([15,17,26,31,35])
indexESQ0=vector([1,2,3,4,9,14,20,21,22,23,28,32,36,38,41,43])
indexESQ1=vector([5,6,7,8,10,11,12,13,16,18,24,25,27,29,30,33,34,37,39,40])

TRQ3=[CLASS[i] for i in indexTRQ]
ALQ3=[CLASS[i] for i in indexALGQ]
C0=[CLASS[i] for i in indexESQ0]
C1=[CLASS[i] for i in indexESQ1]

```

4. Encontrar polinomio de cada AC en  $PEQ_3$

```

def FindFunction(M):
    A1=[]
    A2=[]
    for (i,j) in CartesianProduct(range(3),range(3)):
        if M[i,j]==1:
            A1.append((i,j))
        if M[i,j]==2:
            A2.append((i,j))

    I(x,y)=2*x^2+2*y^2+2*x*y+1
    f(x,y,e1,e2)=(I(0,e1)*I(0,x)+
    I(1,e1)*I(1,x)+I(2,e1)*I(2,x))*
    (I(0,e2)*I(0,y)+I(1,e2)*I(1,y)+I(2,e2)*I(2,y))
    h(x,y)=f(x,y,1,1)

    s1(x,y)=0
    for (i,j) in A1:
        s1(x,y)=s1(x,y)+f(x,y,i,j)

    s2(x,y)=0
    for (i,j) in A2:
        s2(x,y)=s2(x,y)+f(x,y,i,j)

    s2(x,y)=2*s2(x,y)

    h(x,y)=s1(x,y)+s2(x,y)

    return h

Z3=IntegerModRing(3)
L=['x','y']
R = PolynomialRing(Z3,2, L, 'lex')
x,y= PolynomialRing(Z3,2, L, 'lex').gens()

a) Polinomio de ACs en  $TRQ_3$ 

    for _ in indexTRQ:
        h=FindFunction(CLASS[_])
        hh=h.factor()
        latex(R(hh))

b) Polinomio de ACs en  $ALQ_3$ 

    for _ in indexALGQ:
        h=FindFunction(CLASS[_])
        hh=h.factor()
        latex(R(hh))

```

c) Polinomio de ACs en  $ESQ_3^0$

```
for _ in indexESQ0:
    h=FindFunction(CLASS[_])
    hh=h.factor()
    latex(R(hh))
```

d) Polinomio de ACs en  $ESQ_3^1$

```
for _ in indexESQ1:
    h=FindFunction(CLASS[_])
    hh=h.factor()
    latex(R(hh))
```

### Demostración propiedad $N$ -scaling

Programado en SAGE.

```
def Scaling_2(x,letra):
    p1=[2,1,0]
    p2=[2,0,1]
    F=matrix(3,3,[p1,p1,p2])

    n=len(x)
    y=[1]*n
    for i in range(n):
        y[i]=int(x[i])

    M1=matrix(n,2,[0 for i in range(0,n*2)])
    M2=matrix(n,2,[0 for i in range(0,n*2)])

    M1[0,1]=0
    M2[0,1]=1

    M1[0,0]=letra
    M2[0,0]=letra

    for i in range(1,n):
        M1[i,1]=y[i]

    for i in range(1,n):
        M2[i,1]=y[i]

    for i in range(1,n):
        M1[i,0]=F[M1[i-1,0],M1[i-1,1]]
        M2[i,0]=F[M2[i-1,0],M2[i-1,1]]

    return [M1,M2]
```

**Demostración regla local  $\psi$ -asociativa**

Programado en SAGE.

```
def psiasociativity_2(x):
    p1=[2,1,0]
    p2=[1,2,0]
    F=matrix(3,3,[p1,p1,p2])

    n=len(x)
    y=[1]*n
    for i in range(n):
        y[i]=int(x[i])

    M=matrix(2,n,[0 for i in range(0,n*2)])
    for i in range(n):
        M[0,i]=y[i]

    for i in range(1,2):
        for j in range(0,n-i):
            M[i,j]=F[M[i-1,j],M[i-1,j+1]]

    return M[1,0]#[range(0,n/2),range(0,n/2)]
```

# Apéndice E

## Evidencia de Randomización en *RANDOMES*

Se programó en Matlab un AC en *RANDOMES* de la siguiente manera.

```
function [M1,M2]=Randomes(x,n)
% Create matrix iteration from RANDOMES local rules
%
%[M1,M2]=Automata(x,n)
% creates two matrices M1 and M2, M1 corresp
% onds
% to the first 300 iterations, M2 corresponds to
% the iterations from
% 25000 to 25300. x is a word with lenght 26000
% given as a vector with coefficients
% in {0,1,..n-1}, and n is an integers that represents
% index of the CA in RANDOMES.
%
%
%
%
% Remarks
% -----
% - This function is designed only for RANDOMES type
% CA.
%
% - In the input it is necessary to put a vector x with
% lenght 26000.
%
% - This function can easily be modified in order to
% obtain other number of iterations, or other type of CA
%
% - This function can be useful for inputs that comes
% from Bernoulli random variables.
% Using this it is possible to use the funtion to
```

```

%           generate random matrix from CAs in
%           RANDOMES.
%
% Examples
% -----
%           % sample to generate a RANDOM matrix from
%           Bernoulli random variables with distribution
%           [1/4,1/4,1/4,1/4] using the CA F_4
%           [M1,M2]=Randomes(discretedsample([1/4,1/4,1/4,
%           1/4],26000)','-1,4);
%
% % sample to iterate the word 1...1 26000 times
%           repited with the CA F_6
%           [M1,M2]=Randomes(ones(26000,1),6);
%
% Created by Italo Cipriano, On Dic, 2010

l1=length(x);
porte=300;
M1=zeros(porte,porte);
M2=zeros(porte,porte);

M(1,:)=x(1:porte);
l=l1;
for i=1:l1-1
   iaux=find(x([1:l-1])==n-1);
    x=x([2:l]);
    x(iaux)=mod(x(iaux)+1,n);
if i<porte+1
M1(i+1,:)=x(1:porte);

end
if i>24999 & i<24999+porte+2
M2(i-24999,:)=x(1:porte);
end
    l=l-1;
   iaux=0;
end
%image(M,'CDataMapping','scaled'); to create a
%matrix to represent the output
end

```

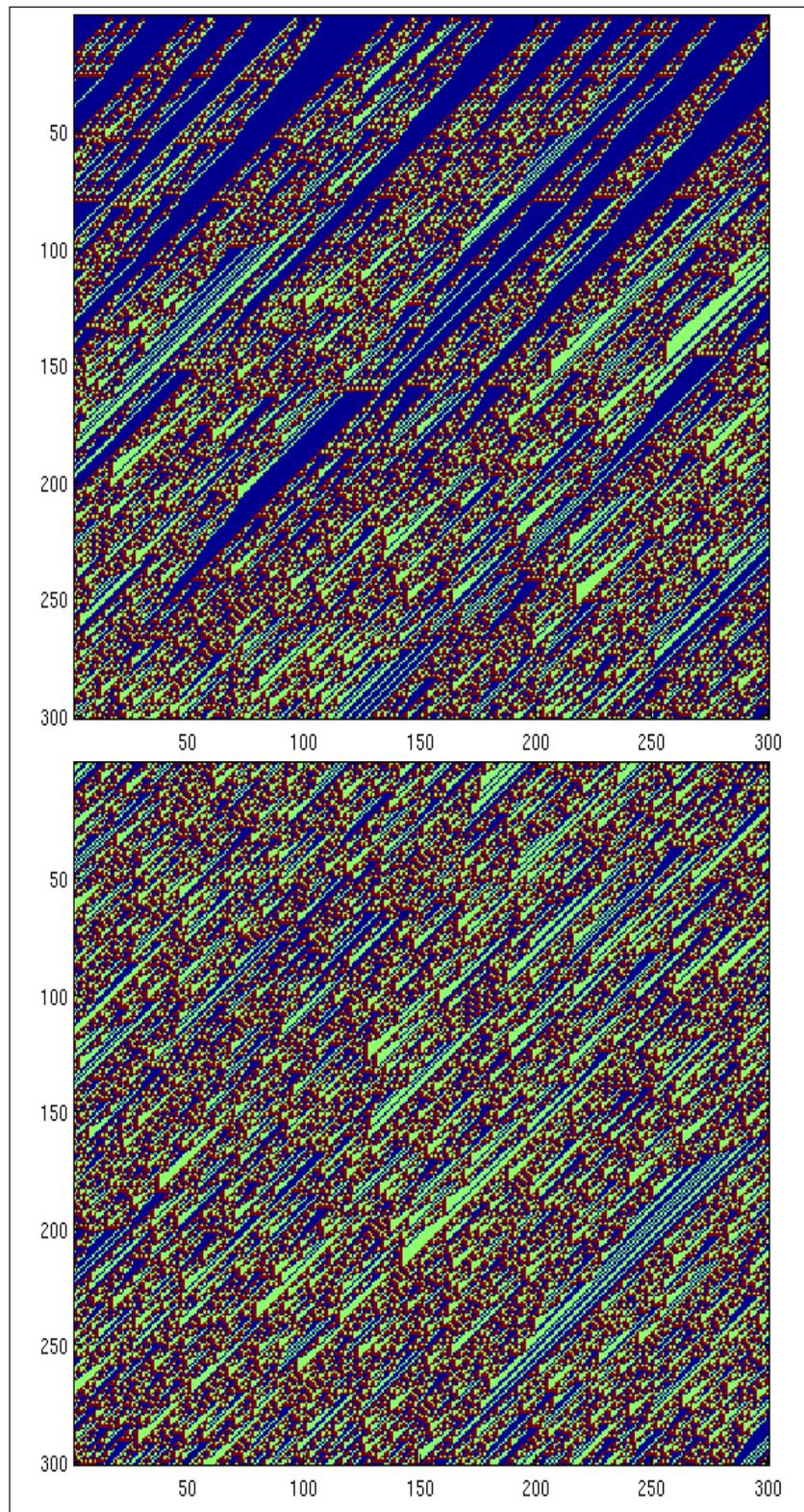


Figura E.1: Simulaciones iteraciones por  $F_3$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0, 01; 0, 09; 0, 9)$  .

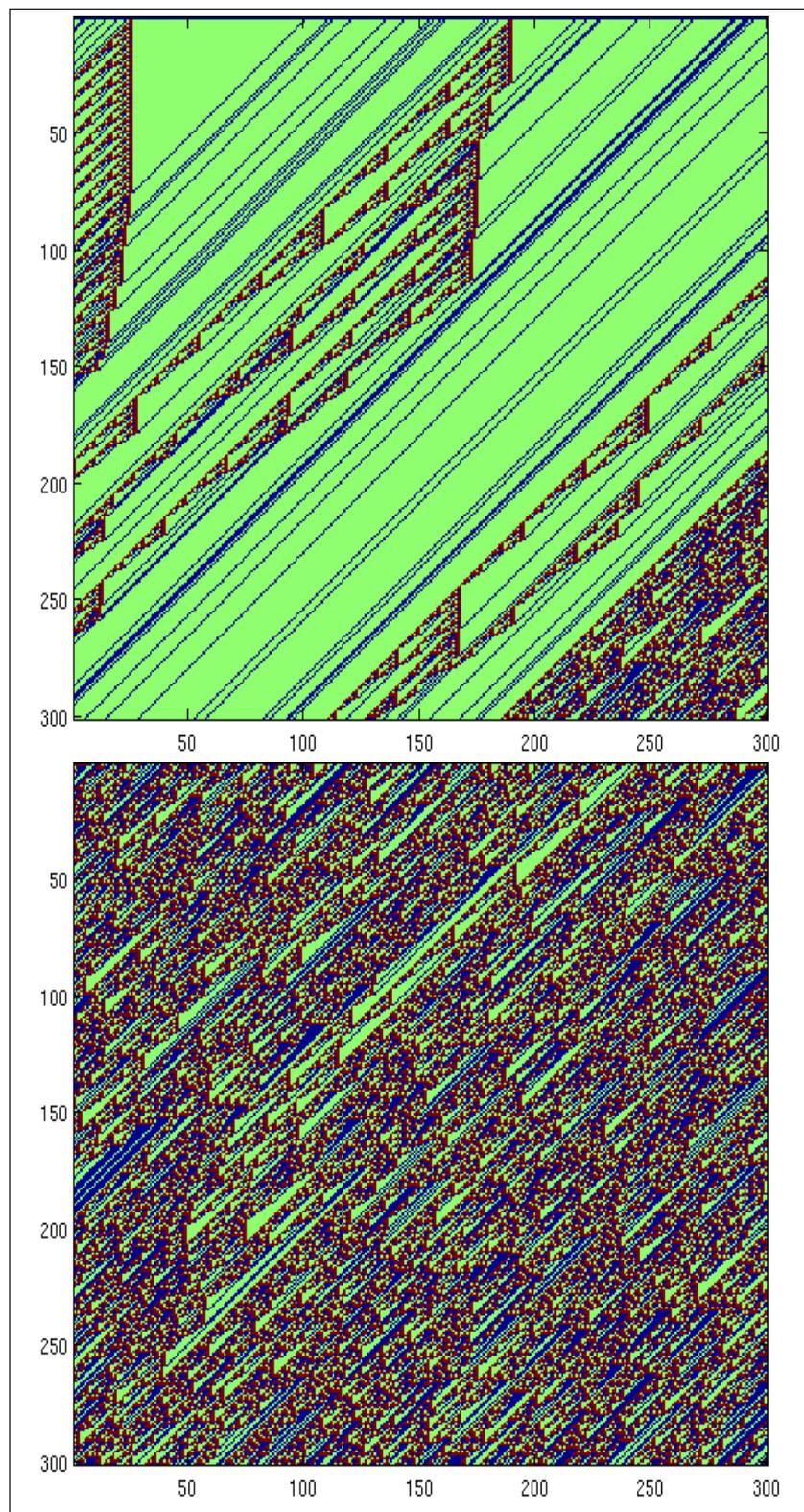


Figura E.2: Simulaciones iteraciones por  $F_3$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0, 09; 0, 9; 0, 01)$  .

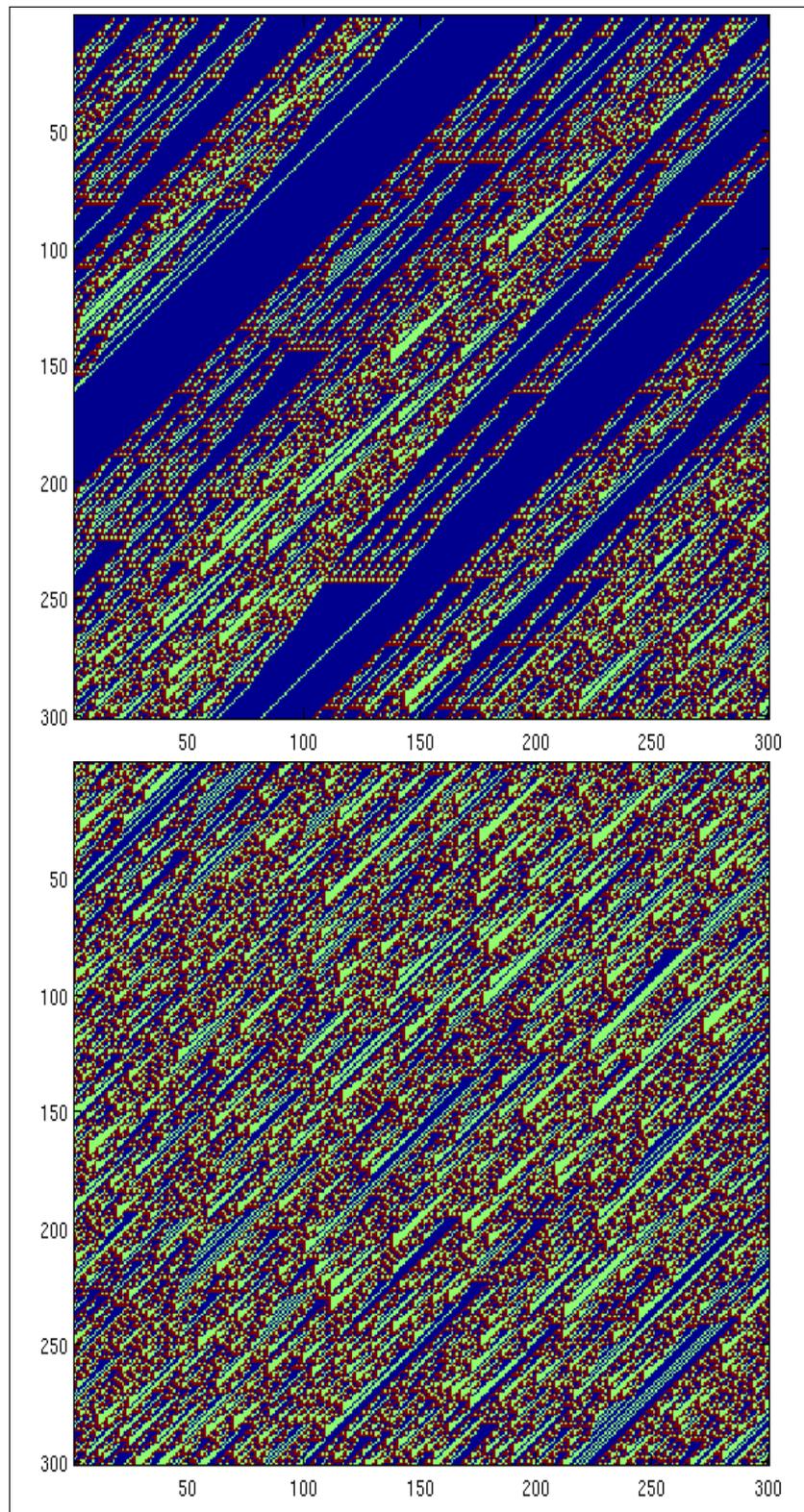


Figura E.3: Simulaciones iteraciones por  $F_3$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0, 9; 0, 01; 0, 09)$  .

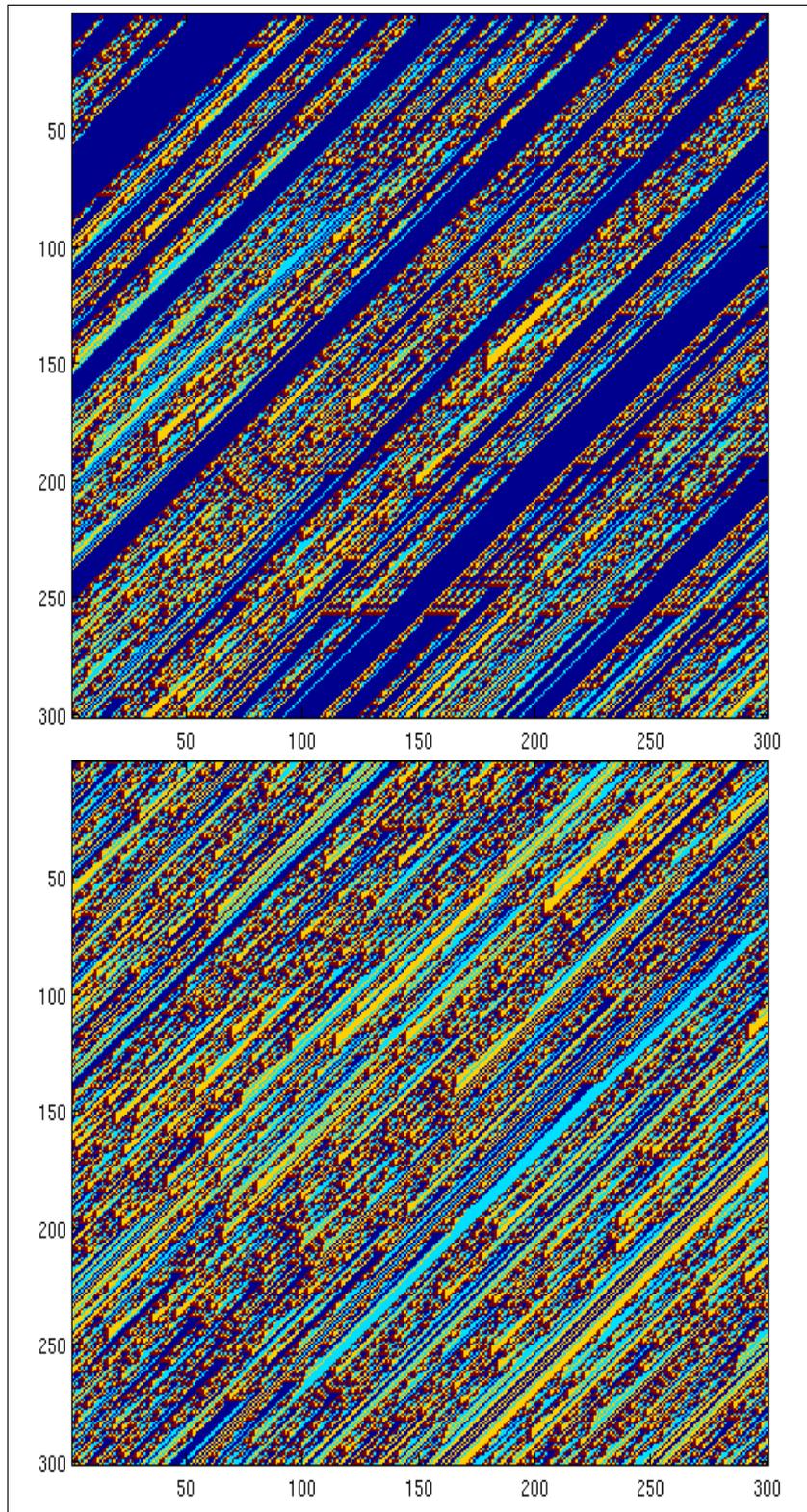


Figura E.4: Simulaciones iteraciones por  $F_4$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,01; 0,02; 0,07; 0,9)$  .

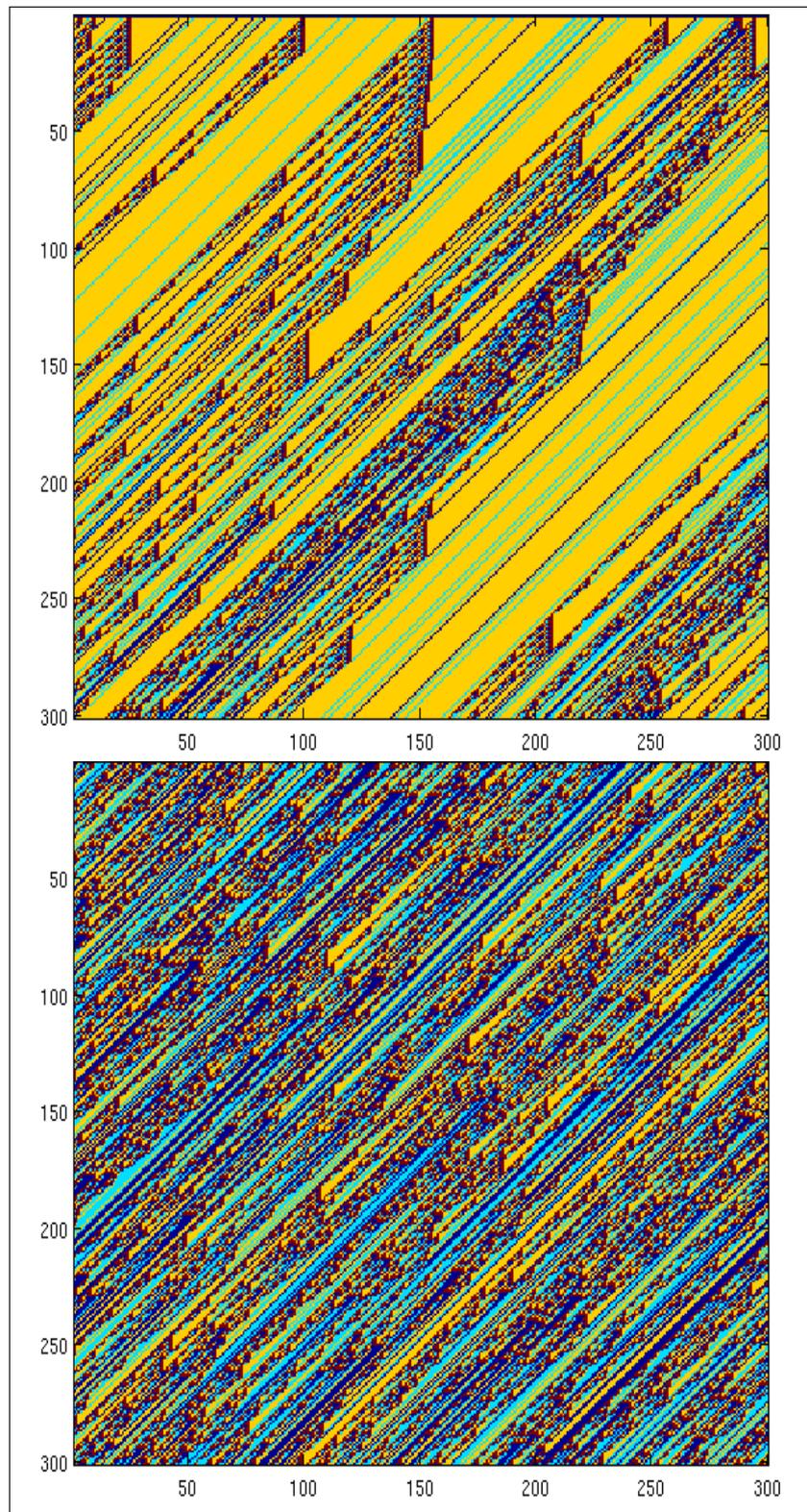


Figura E.5: Simulaciones iteraciones por  $F_4$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,02; 0,07; 0,9; 0,01)$  .

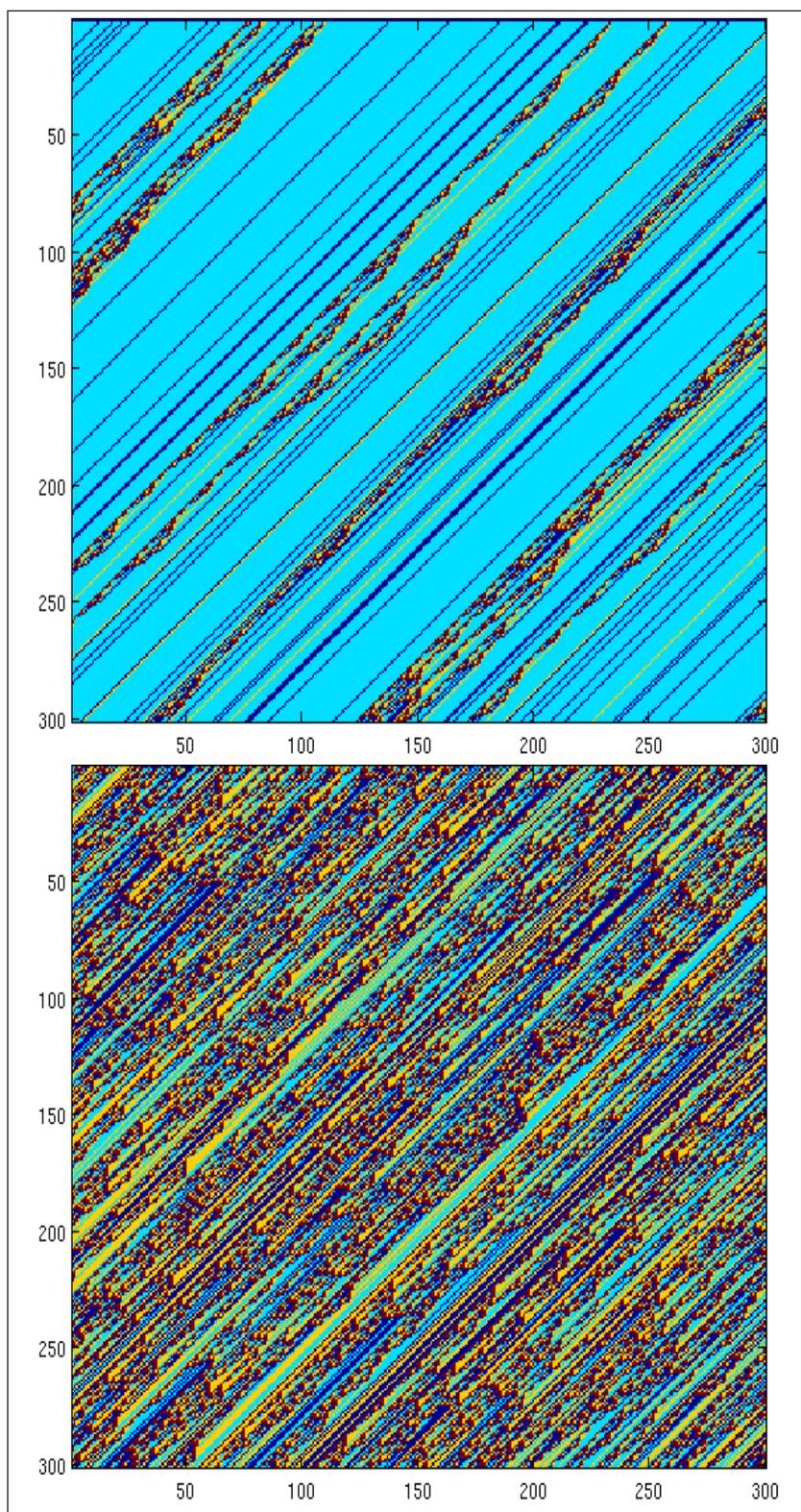


Figura E.6: Simulaciones iteraciones por  $F_4$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,07; 0,9; 0,01; 0,02)$  .

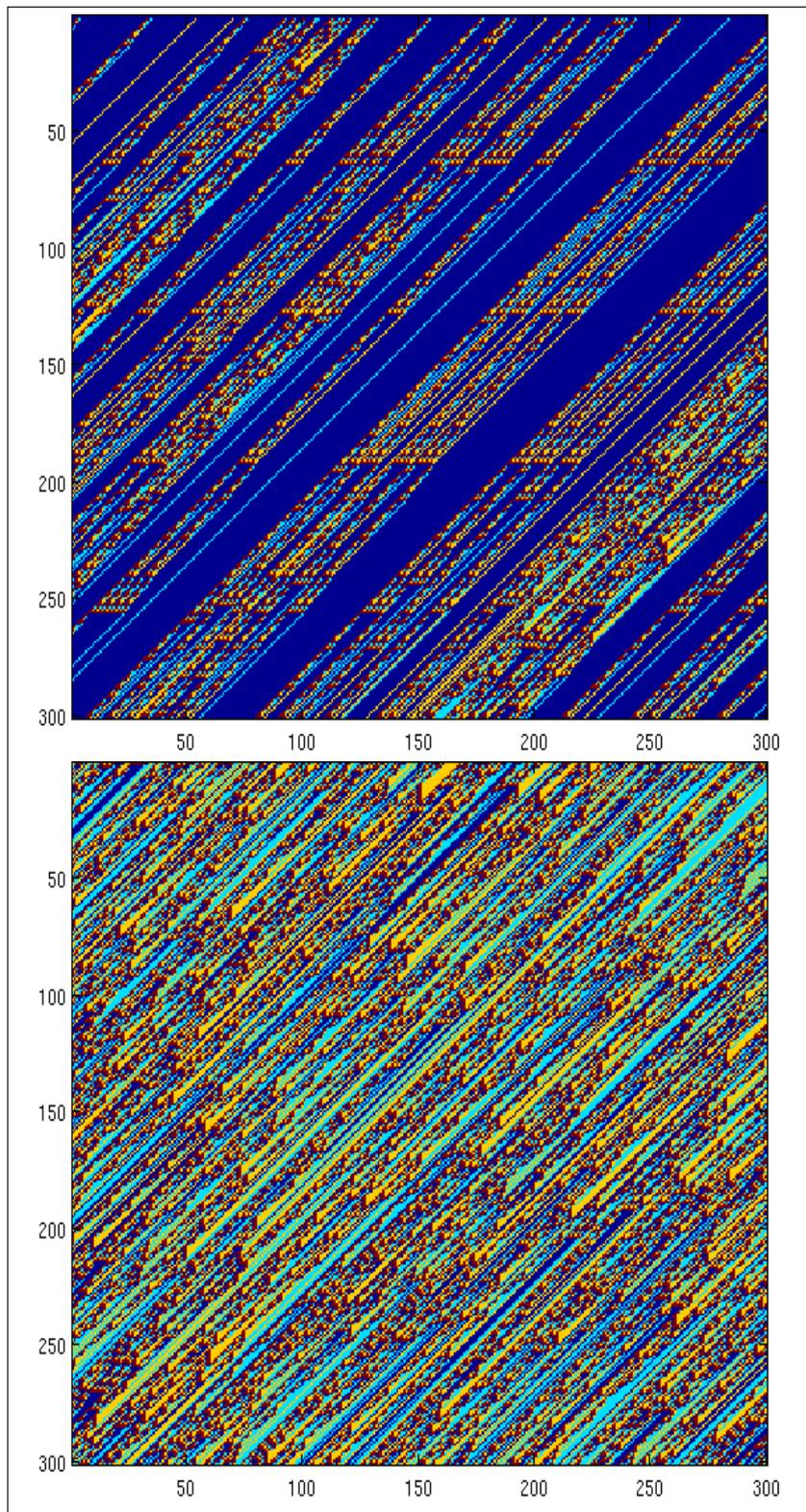


Figura E.7: Simulaciones iteraciones por  $F_4$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,9; 0,01; 0,02; 0,07)$  .

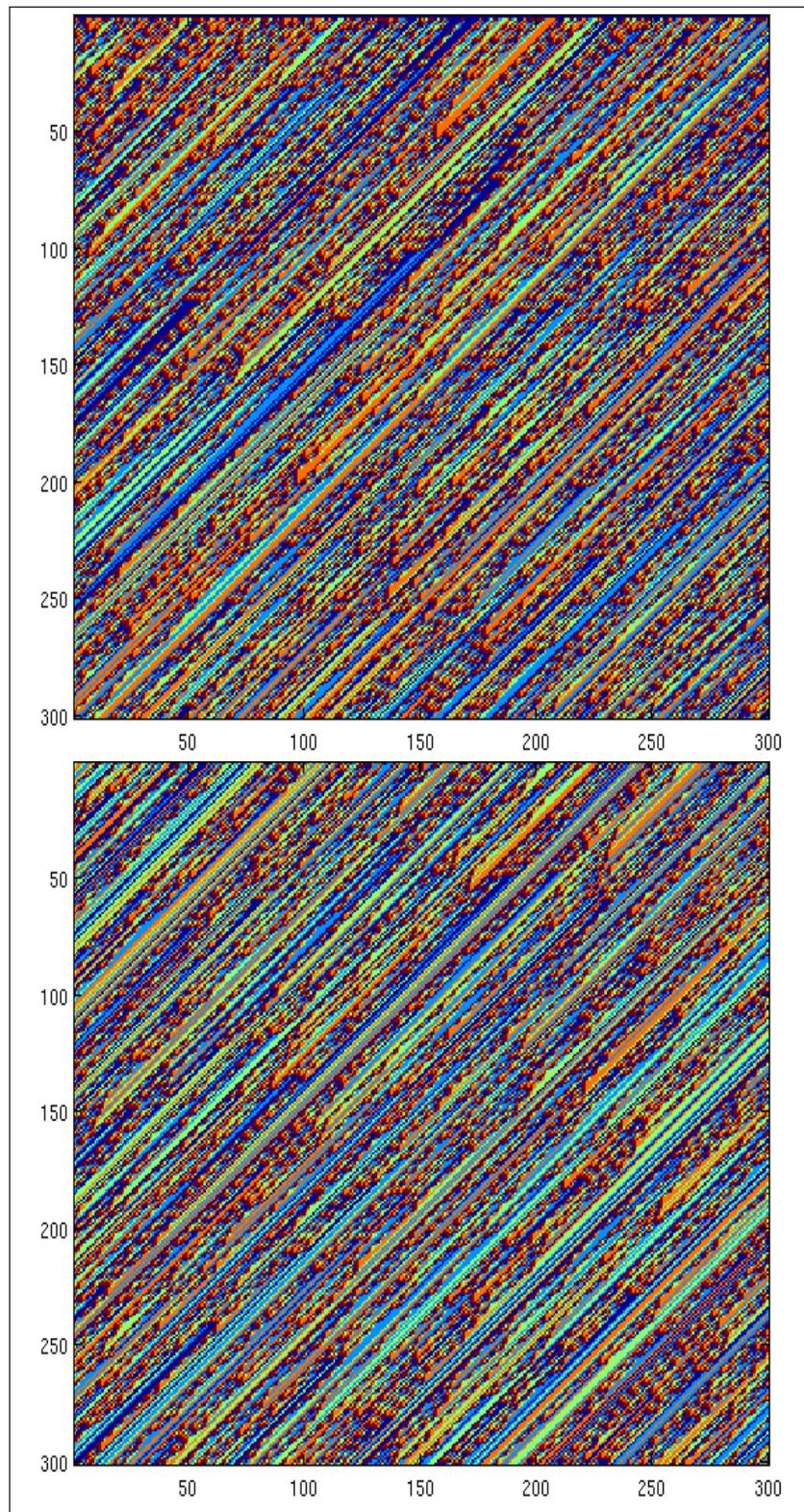


Figura E.8: Simulaciones iteraciones por  $F_5$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,5)$  .

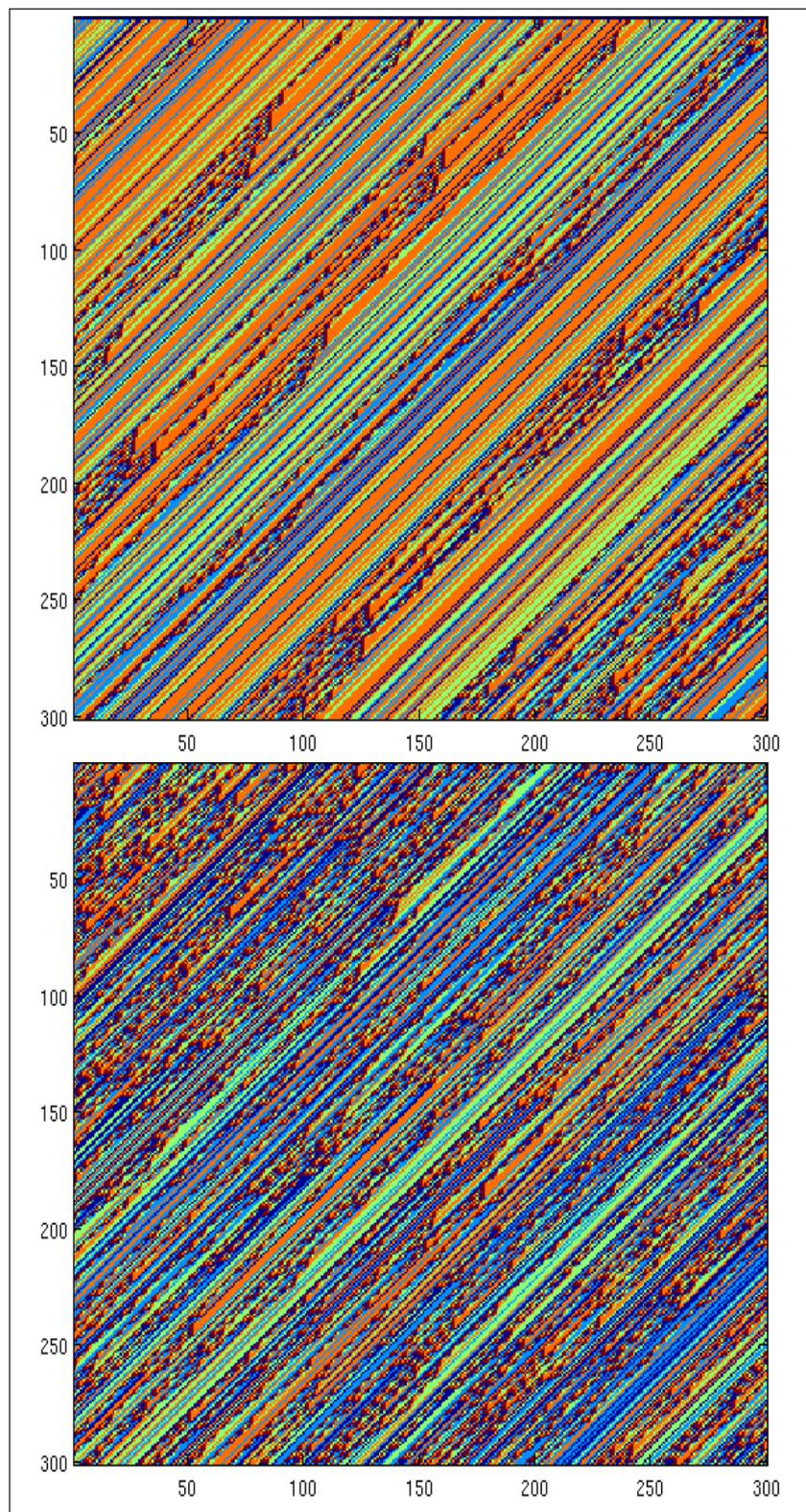


Figura E.9: Simulaciones iteraciones por  $F_5$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,1; 0,15; 0,2; 0,5; 0,05)$  .

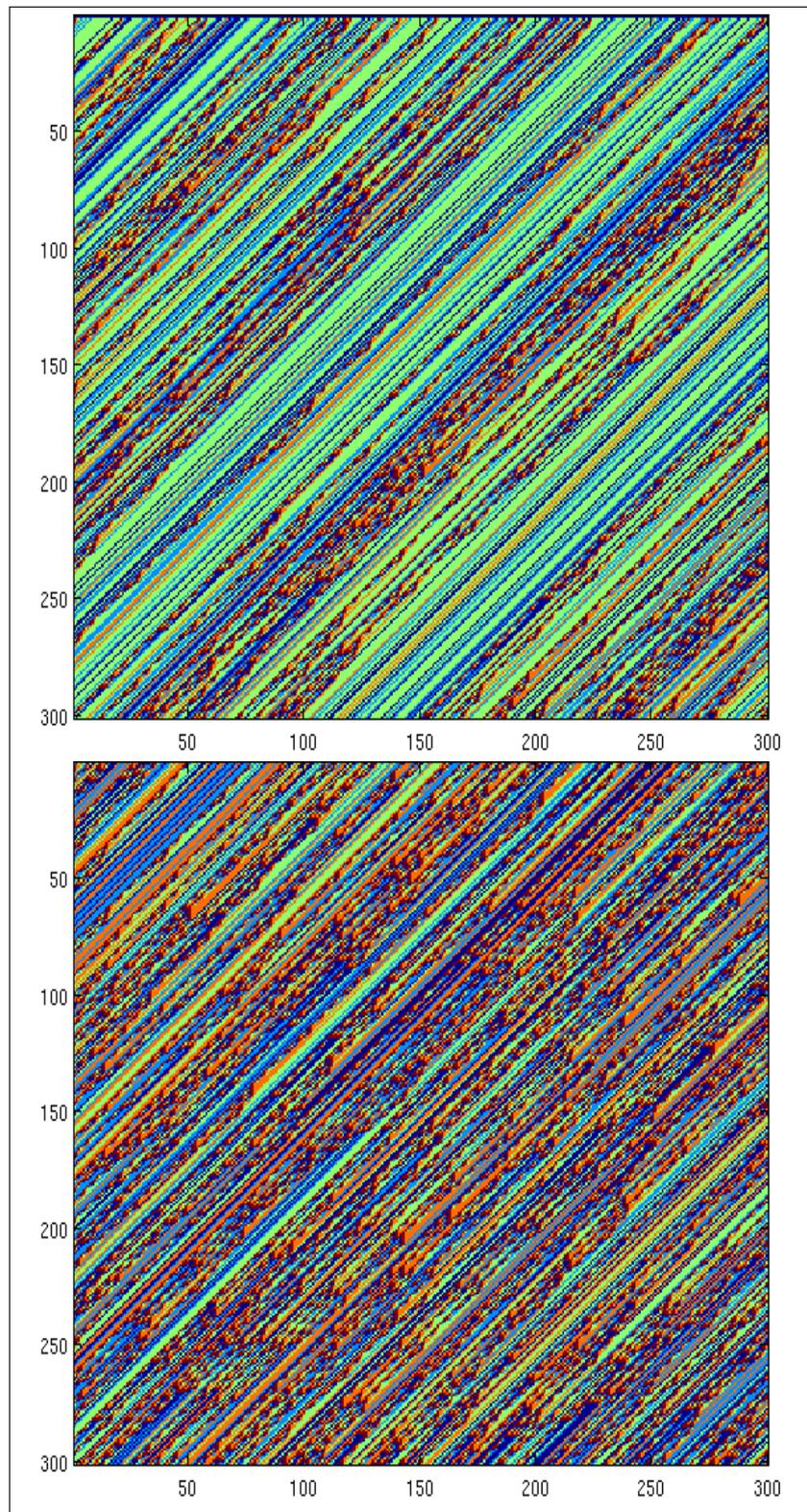


Figura E.10: Simulaciones iteraciones por  $F_5$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,15; 0,2; 0,5; 0,05; 0,1)$  .

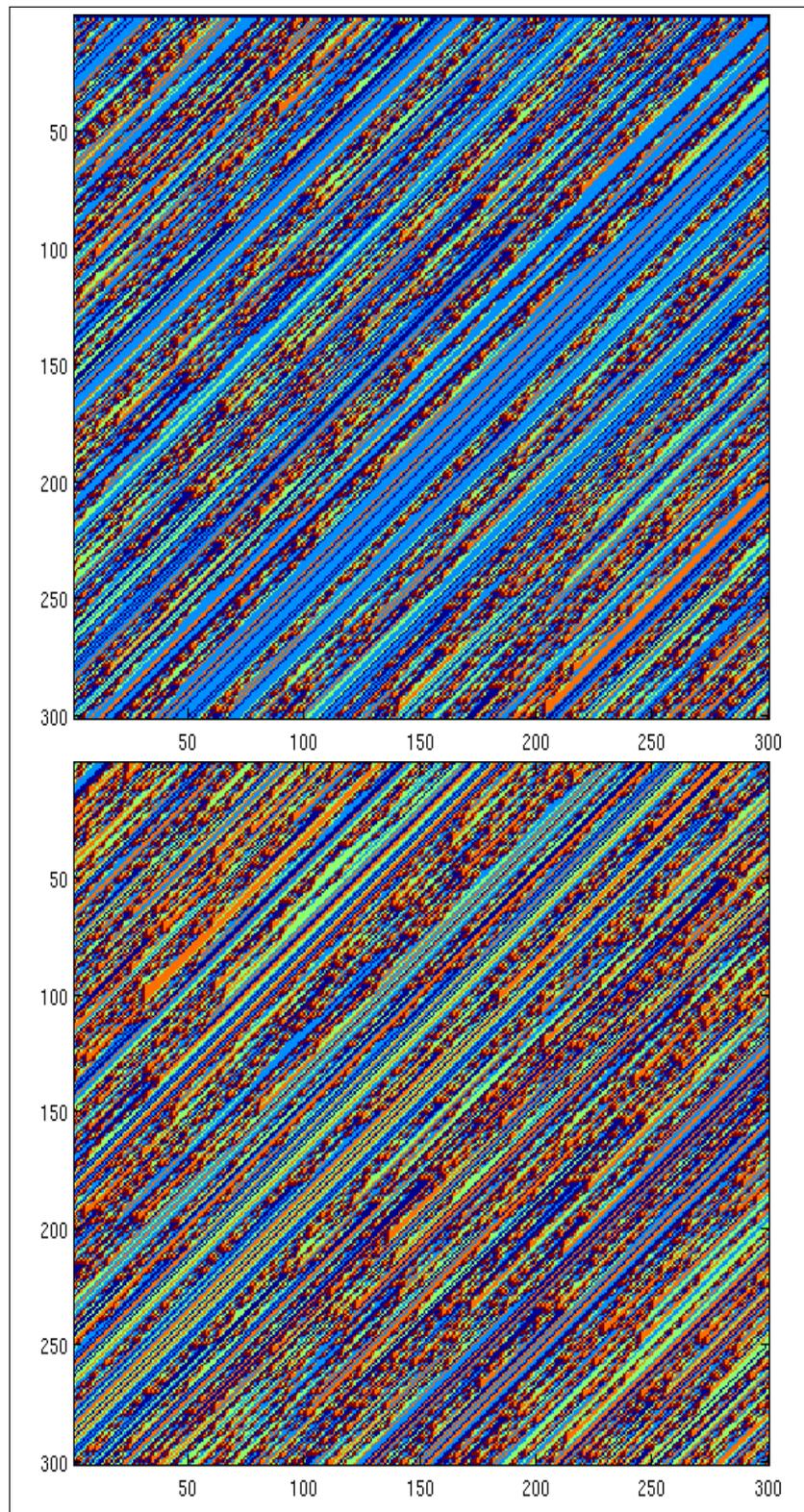


Figura E.11: Simulaciones iteraciones por  $F_5$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,2; 0,5; 0,05; 0,1; 0,15)$  .

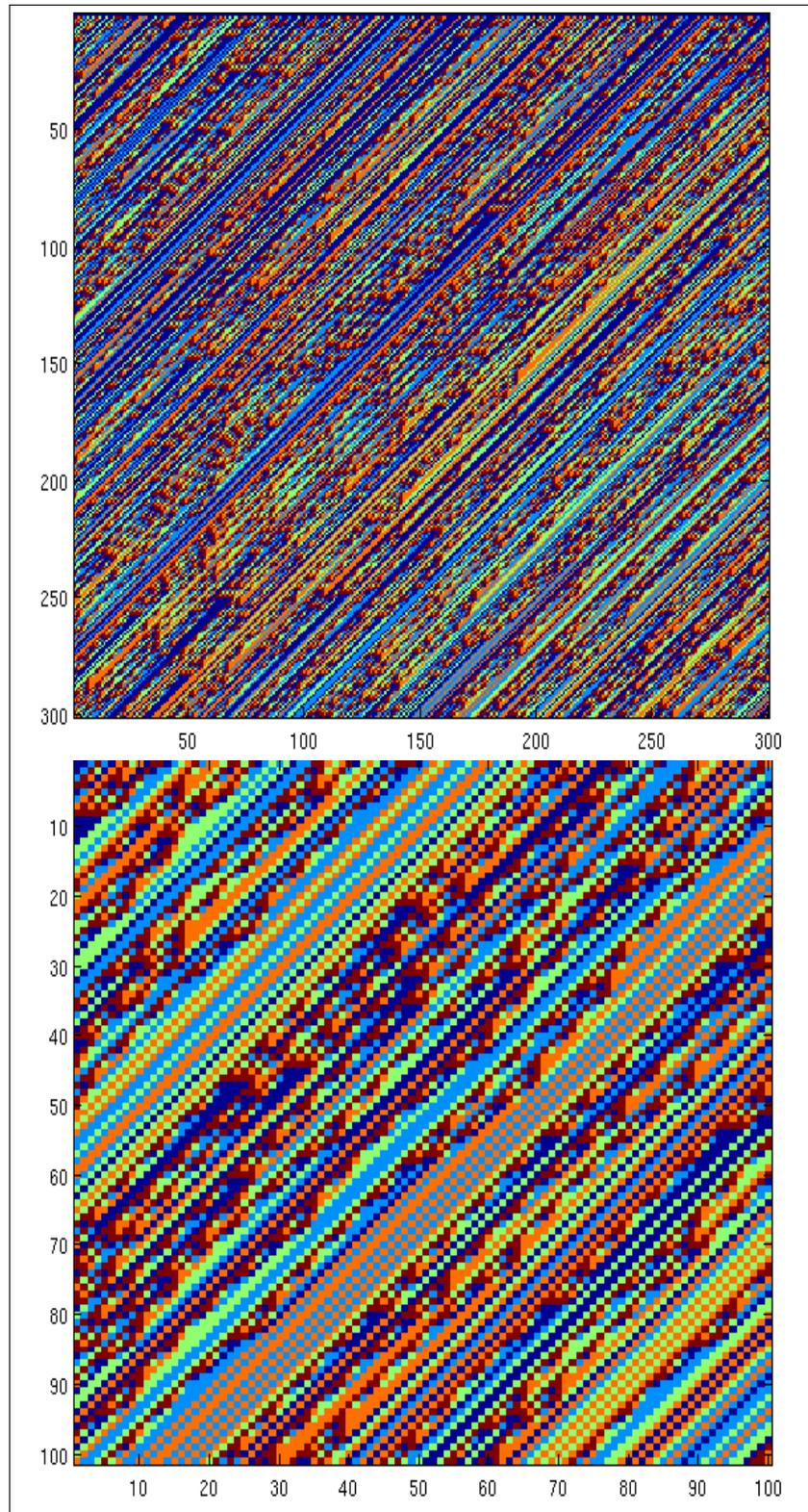


Figura E.12: Simulaciones iteraciones por  $F_5$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,5; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2)$  .

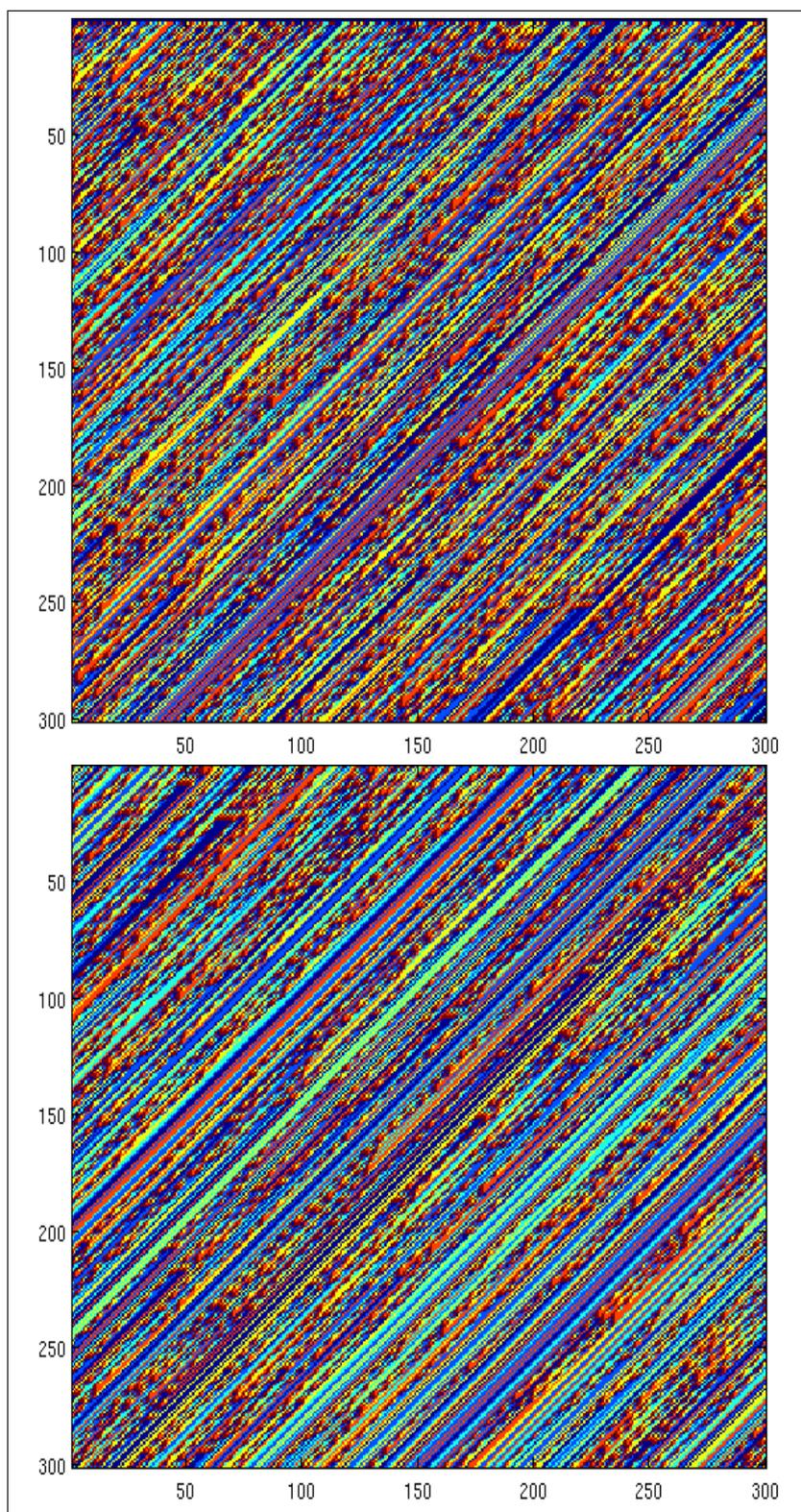


Figura E.13: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,05; 0,1; 0,15; 0,1; 0,1; 0,5)$  .

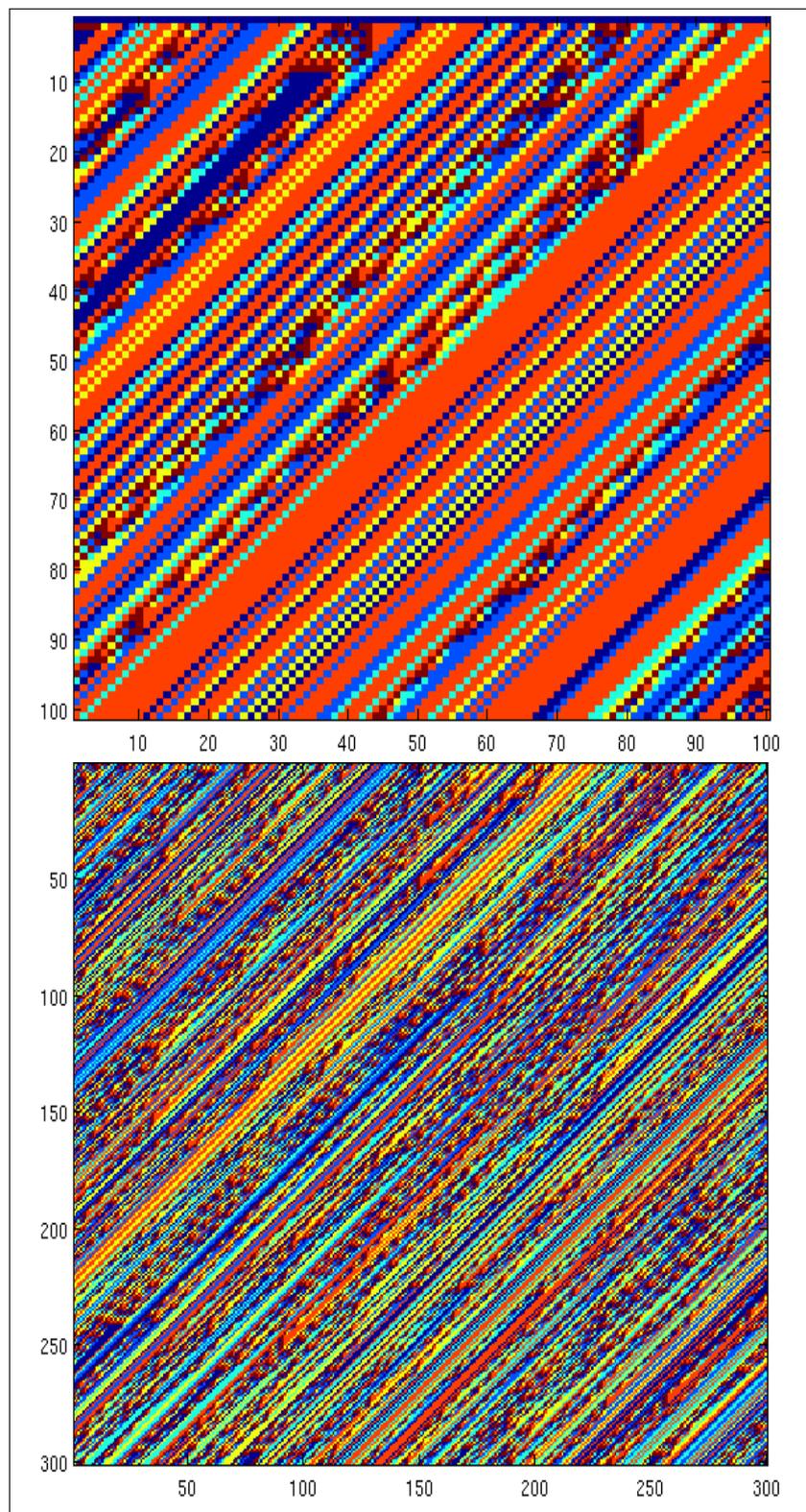


Figura E.14: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,1; 0,15; 0,1; 0,1; 0,5; 0,05)$  .

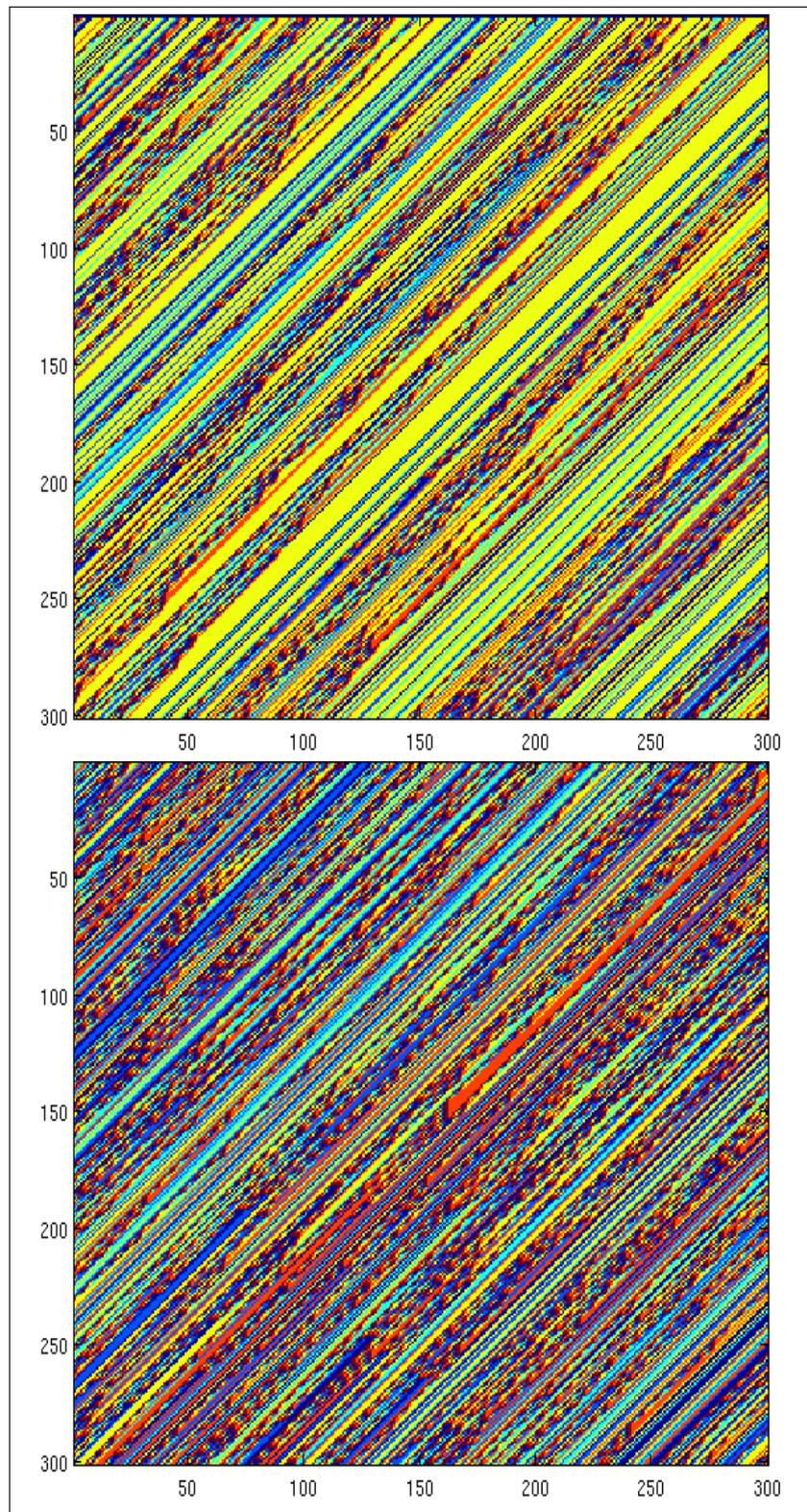


Figura E.15: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,15; 0,1; 0,1; 0,5; 0,05; 0,1)$  .

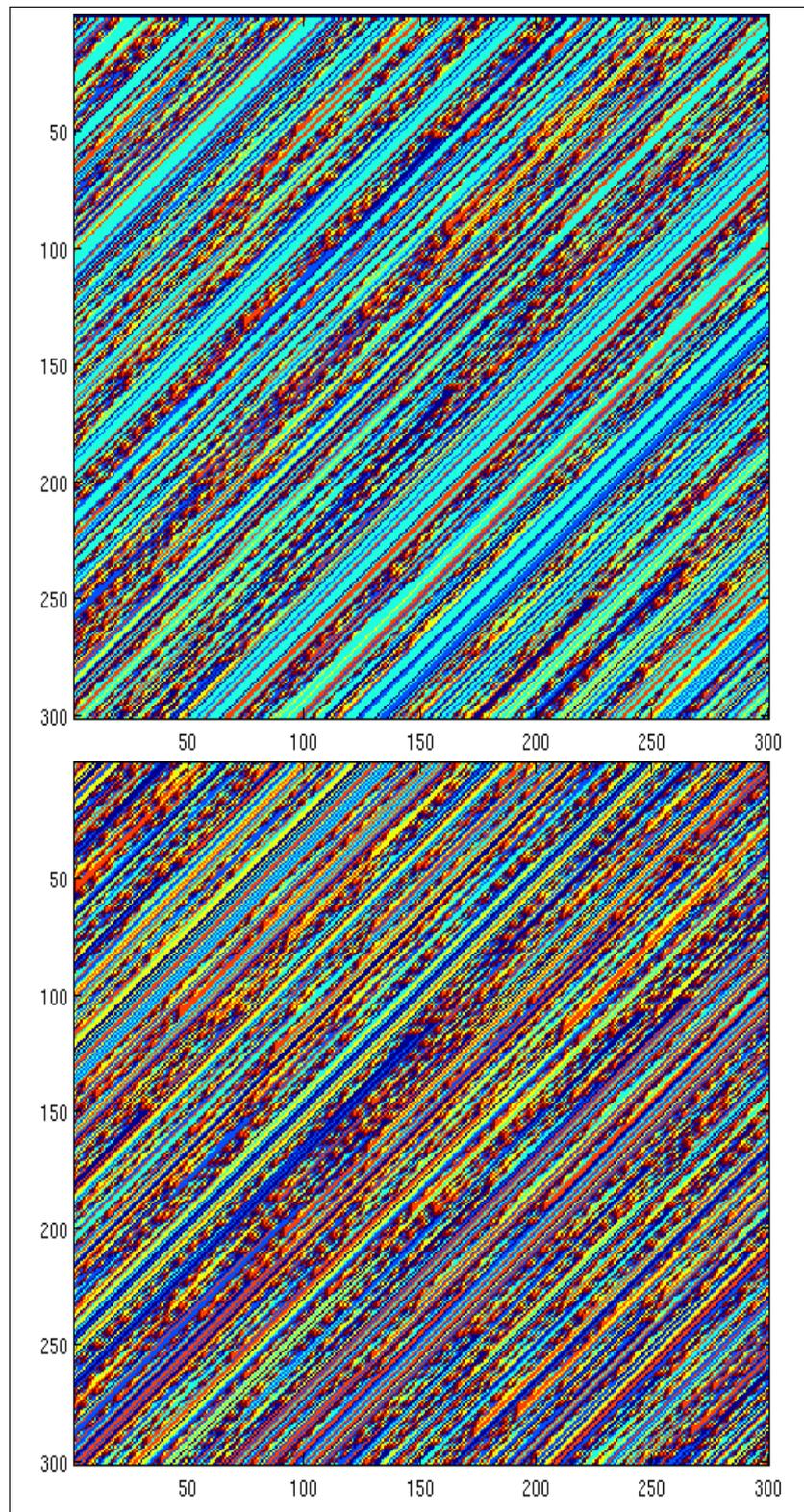


Figura E.16: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,1; 0,1; 0,5; 0,05; 0,1; 0,15)$  .

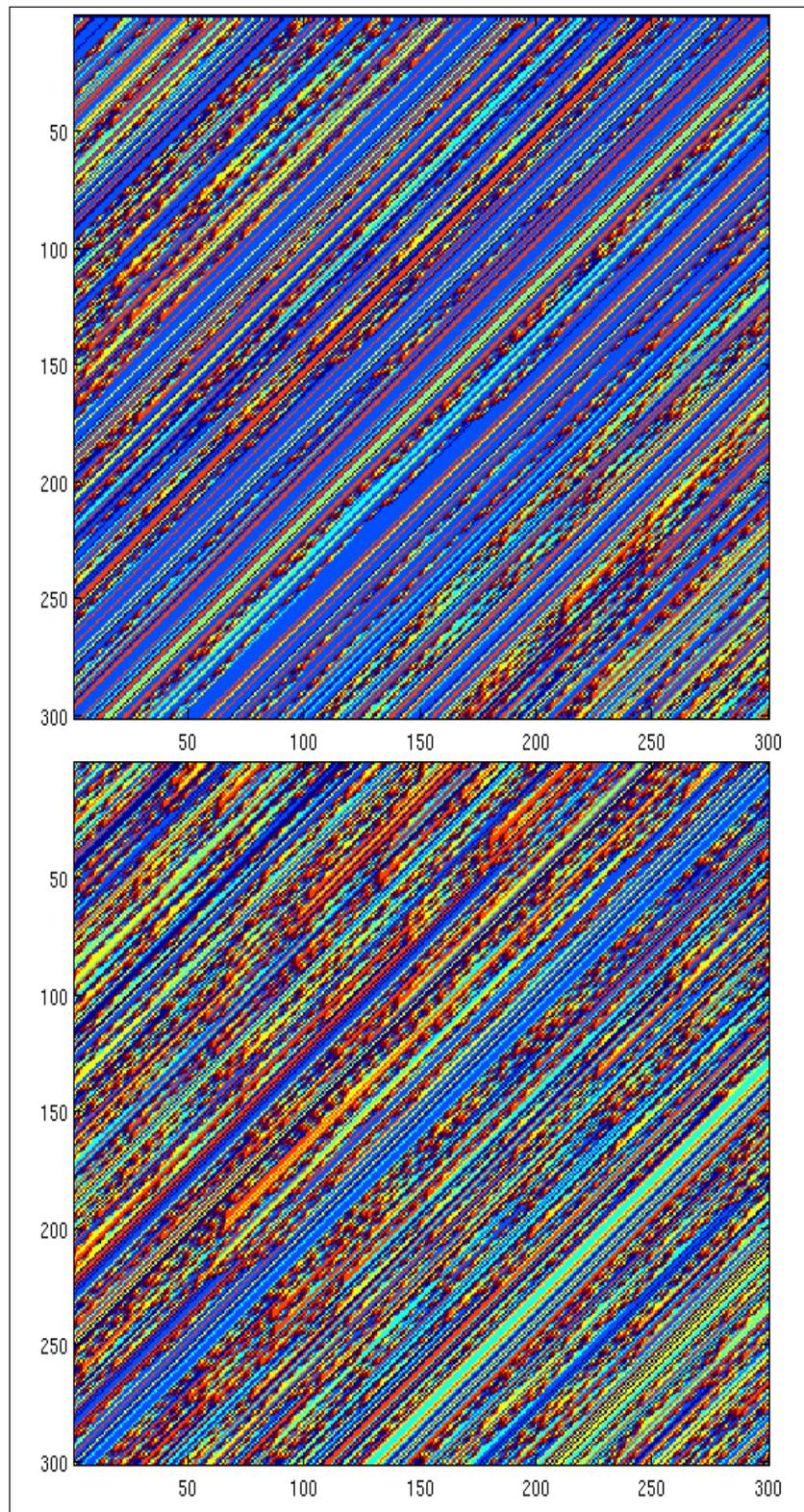


Figura E.17: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,1; 0,5; 0,05; 0,1; 0,15; 0,1)$  .

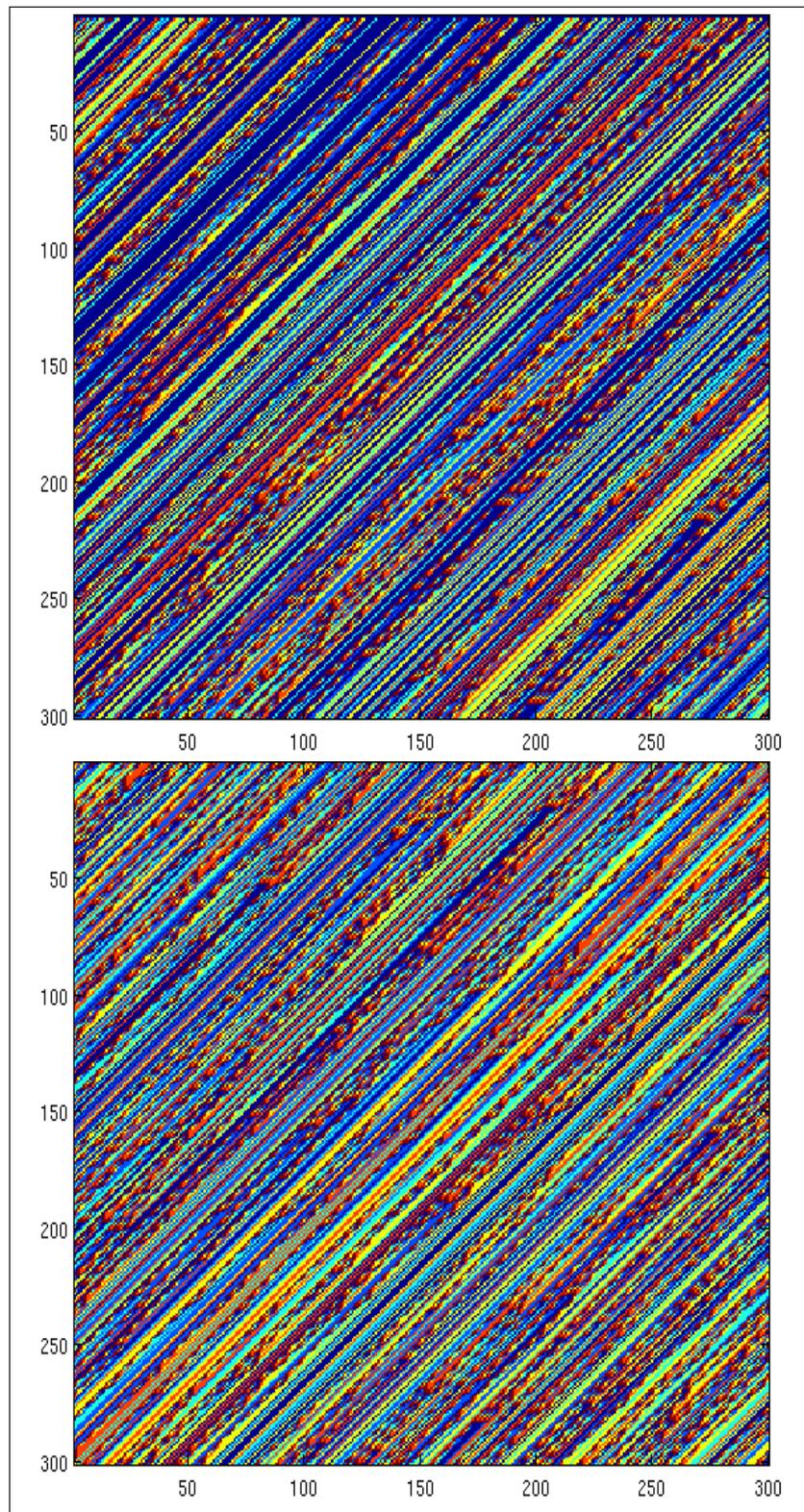


Figura E.18: Simulaciones iteraciones por  $F_6$  de la medida de Bernoulli  $\mu$  con distribución  $\pi = (0,5; 0,05; 0,1; 0,15; 0,1; 0,1)$  .

# Bibliografía

- [BK99] Mike Boyle and Bruce Kitchens. Periodic points for onto cellular automata. *Indagationes Mathematicae*, 10(4):483–493, 1999.
- [BM97] F. Blanchard and A. Maass. Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata. *Israel Journal of Mathematics*, 99(1):149–174, 1997.
- [BT00] F. Blanchard and P. Tisseur. Some properties of cellular automata with equicontinuity points. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 36(5):569–582, 2000.
- [DG76] Manfred Denker and Christian Grillenberger. *Ergodic Theory on Compact Spaces*. Srpinger-Verlag, 1976.
- [FMMN00] P. Ferrari, A. Maass, S. Martínez, and P. Ney. Cesàro mean distribution of group automata starting from measures with summable decay. *Ergodic Theory Dynam. System*, 20:1657–1670, 2000.
- [GT] Ben Green and Terence Tao. The distribution of polynomials over finite fields, with applications to the gowers norms. *Contribution to Discrete Mathematics*, 4(2):1–36.
- [GW93] E. Glasner and B. Weiss. Sensitive dependence on initial conditions. *Nonlinearity*, 6(6):1067–1670, 1993.
- [HMS03] B. Host, A. Maass, and S. Martínez. Uniform Bernoulli measure in dynamics of permutative cellular automata with algebraic local rules. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9(6):1423–1446, 2003.
- [Kur03] Petr Kurka. *Topological and Symbolic Dynamic*. Number 11. Société Mathématique de France, 2003.
- [Lin84] D. Lind. Applications of ergodic theory and sofic systems to cellular automata. *Cellular automata (Los Alamos, N.M., 1983)*. *Phys.*, 10(1-2):36–44, 1984.
- [LM95] D. Lind and B. Marcus. *Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University, 1995.
- [MMPY06a] Alejandro Maass, Servet Martínez, Marcus Pivato, and Reem Yassawi. Asymptotic randomization of subgroup shifts by linear cellular automata. *Ergodic Theory Dynam. System*, 26(4):1203–1224, 2006.

- [MMPY06b] Alejandro Maass, Servet Martínez, Marcus Pivato, and Reem Yassawi. Attractiveness of the haar measure for linear cellular automata on markov subgroups. *Dynamics and stochastics*, pages 100–108, 2006.
- [MSS06] A. Maass, S.Martínez, and M. Sobottka. Limit measures for affine cellular automata on topological markov subgroups. *Nonlinearity*, 19:2137–2147, 2006.
- [Piv05] M. Pivato. Invariant measures for bipermutative cellular automata. *Discrete Contin. Dyn. Sys.*, A 12(4):723–736, 2005.
- [PY02] M. Pivato and R. Yassawi. Limit measures for affine cellular automata. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 22:1269–1287, 2002.
- [PY04] M. Pivato and R. Yassawi. Limit measures for affine cellular automata ii. *Ergodic Theory Dynam. System*, 26(6):1961–1980, 2004.
- [Sab07] M. Sablik. Measure rigidity for algebraic bipermutative cellular automata. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 27:1965–1990, 2007.
- [Sch95] Klaus Schmidt. *Dynamical Systems of Algebraic Origin (Progress in Mathematics, 128)*. Birkhäuser, Boston, MA, 1995.
- [Shi95] A. N. Shiryaev. *Probability*. Springer-Verlag, 1995.
- [Tis00] P. Tisseur. Cellular automata and lyapunov exponents. *Nonlinearity*, 13, 2000.
- [Wal82] Peter Walters. *An introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag New York, 1982.
- [Wil75] Stephen J. Willson. On the ergodic theory of cellular automata. *Math. Systems Theory*, 9:132–141, 1975.