



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL
POP. MARIANELA PEREIRA CEA
FECHA: 07/05/2007
PROF. GUÍA: Sr. ANDRÉS WEINTRAUB

CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO AGREGADO DE PLANIFICACIÓN MINERA

**CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO AGREGADO DE
PLANIFICACIÓN MINERA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

MARIANELA PEREIRA CEA

PROFESOR GUÍA
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN
RICARDO SAN MARTÍN ZURITA
JOSÉ MIGUEL CRUZ GONZÁLEZ

SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2007

ÍNDICE DE CONTENIDOS

	Pag.
I INTRODUCCIÓN.....	1
II ANTECEDENTES GENERALES	3
II.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	3
II.2 ENFOQUE DE SOLUCIÓN.....	5
II.3 OBJETIVOS Y ALCANCE	6
II.3.1 Objetivo general	6
II.3.2 Objetivos específicos	7
II.3.3 Alcance	7
II.4 METODOLOGÍA GENERAL	7
II.4.1 Definición del problema.....	7
II.4.2 Formulación del modelo agregado.....	8
II.4.3 Solución del modelo agregado.....	9
II.4.4 Obtención, análisis y validación de resultados	9
III DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	10
III.1 PLANIFICACIÓN MINERA.....	10
III.1.1 Principales procesos de operación de una mina subterránea:	12
III.1.2 Elementos relevantes en la operación de una mina subterránea	14
III.1.3 Restricciones de operación.....	16
III.1.4 Objetivo de la planificación minera	18
III.2 AGREGACIÓN EN OPTIMIZACIÓN LINEAL.....	19
III.2.1 Análisis de agregación	19
III.2.2 Análisis de desagregación	19
III.2.3 Análisis de error	20
III.3 RESULTADOS ESPERADOS	20
III.4 MARCO TEÓRICO.....	21
III.4.1 Planteamiento matemático general del problema:.....	21
III.4.2 Proceso de agregación	22
III.4.3 Desagregación	22
III.4.4 Cotas.....	23
IV FORMULACIÓN DEL MODELO	24
IV.1 CONSIDERACIONES INICIALES SOBRE LA AGREGACIÓN EN EL CASO MINERO	24

IV.2	PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA	25
IV.3	PROCESO DE AGREGACIÓN DE COLUMNAS DE LA MATRIZ A	30
IV.3.1	Definición de distancia o medida de similitud	30
IV.3.2	Algoritmo de clasificación.....	31
IV.3.3	Cálculo de ponderadores g	33
IV.4	FORMALIZACIÓN DEL MODELO AGREGADO	38
V	SOLUCIÓN DEL PROBLEMA AGREGADO	40
V.1	DESCRIPCIÓN DE LAS INSTANCIAS DE PRUEBA.....	40
V.2	DESAGREGACIÓN Y CÁLCULO DE COTA DE ERROR.....	41
V.2.1	Desagregación	41
V.2.2	Cálculo de la cota.....	41
VI	OBTENCIÓN ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS.....	43
VI.1	CONSIDERACIONES GENERALES	43
VI.1.1	Criterios de asignación de importancias	43
VI.1.2	Ponderadores g.....	44
VI.2	INSTANCIAS	44
VI.2.1	Instancia 1: Subsector 6.....	45
VI.2.2	Instancia 2: Todos los Subsectores	46
VI.3	ANÁLISIS	47
VI.3.1	Observaciones	49
VII	CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FUTURAS	50
VIII	BIBLIOGRAFÍA.....	52
IX	ANEXOS.....	54
IX.1	ANEXO A: MODELO ORIGINAL	54
IX.2	ANEXO B: MODELO AGREGADO	68

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Enfoques de planificación minera	10
Figura 2: Proceso de decisión minera.	11
Figura 3: Método Subterráneo de Explotación Panel Caving	12
Figura 4: Flujo y diseño de redes de extracción y transporte	14
Figura 5: Sector mirado desde arriba	15
Figura 6: Corte transversal vertical de un sector	16
Figura 7: Restricción de regularidad de alturas de extracción	17
Figura 8: Elementos de agregación y desagregación de PL	20
Figura 9: Columna de A	25
Figura 10: Columna de A modificada.....	27
Figura 11: Algoritmo de agregación Leader Type.....	32

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Asignación de Importancia de componentes de A.....	28
Tabla 2: Asignación de importancia utilizada.....	43
Tabla 3: Distancias máximas utilizadas	44
Tabla 4: Características generales Instancia 1	45
Tabla 5: Resultados distancia 1 e instancia 1.....	45
Tabla 6: Resultados distancia 2 con instancia 1	45
Tabla 7: Resultados distancia 3 instancia 1.....	46
Tabla 8: Características generales instancia 2	46
Tabla 9: Resultados distancia 1 instancia 2.....	46
Tabla 10: Resultados distancia 2 instancia 2.....	47
Tabla 11: Resultados distancia 3 instancia 2.....	47

I INTRODUCCIÓN

Chile, con una producción de 5.28 millones de toneladas de cobre fino en el año 2005 equivalente al 37.5% del total mundial, es el principal productor de cobre del mundo. La principal empresa del rubro es la Corporación Nacional del Cobre (CODELCO), una compañía del Estado que presenta una de las principales fuentes de ingreso para el país. Actualmente CODELCO ejecuta su labor a través de sus cinco divisiones, estas son Codelco Norte, Salvador, Ventana, Andina y El Teniente.

Desde comienzos del siglo XXI, CODELCO comenzó a definir su estrategia en base a una visión de futuro que implica consolidar su liderazgo como productor de cobre en el mundo a través de medidas que permitan desarrollar su potencial de negocios, maximizar su valor económico y su aporte al Estado [2].

La toma de decisiones de extracción minera es un proceso complejo, y en el caso de CODELCO, debido a la dependencia que tiene la economía chilena de las utilidades de esta empresa, tiene además una importancia a nivel país inigualable. A través de los años esta empresa ha incorporado distintas herramientas de investigación operativa, en particular ha ocupado la programación matemática para el apoyo en la toma de decisiones en la planificación de extracción y procesamiento de mineral. Muchos de estos modelos tienen un horizonte de 25 años y son independientes, e incluso distintos en algunas características para las distintas divisiones de la empresa.

Los modelos matemáticos actuales para minas subterráneas entregan planes de acción detallados, que indican en qué momento explotar cada una de las unidades básicas de la mina e indican además, el flujo entre los distintos subsistemas productivos del proceso. Estos modelos son una herramienta totalmente operacional cuyo tamaño supera ampliamente las 600 mil variables y poseen mayor o igual o mayor número de restricciones.

El objetivo de este trabajo es construir un modelo compacto que permita la toma de decisiones a un nivel táctico, pero que a la vez se encuentre alineado con las decisiones de extracción de la división. El modelo agregado debe respetar las variadas restricciones referentes a la operación de la mina y además debe ser validado, mediante la medición del error respecto al modelo detallado de decisiones. Este modelo es formulado para que en investigaciones futuras sea posible incluir en él estocasticidad de parámetros como la ley del

cobre y el precio, lo que requiere de resolución iterativa de problemas, donde el tiempo de procesamiento se hace relevante.

Las técnicas de agregación de modelos de optimización lineales existentes no han sido ampliados ni sistematizados, y en general son específicos para cada tipo de problema. La metodología de agregación usada en este informe tiene base en la teoría desarrollada por Zipkin [12], y ha sido implementada en la agregación en la industria forestal [11].

Para agregar el problema se usará la técnica de clasificación a posteriori, denominada de esta forma dado que se realiza con posterioridad a la formulación del modelo original. Así, conocido y formulado el problema inicial, en su forma estándar¹, el paso siguiente es aglomerar columnas de la matriz A, donde cada una de estas columnas corresponde a una variable del problema original y sus componentes son los coeficientes de dicha variable en cada restricción. La aglomeración consiste en reemplazar varias columnas de la matriz con características similares por una columna nueva que corresponde a una ponderación de las originales. El problema resultante es lo que se denomina el problema agregado (o compacto). Posteriormente se procede a la resolución del problema agregado y mediante técnicas de desagregación se obtiene una solución factible para el problema inicial.

En el Capítulo II de este informe se presentan los antecedentes generales del problema, estableciendo el enfoque de solución a utilizar, los objetivos y la metodología. En el tercer capítulo se plantea la definición del problema, analizando los ámbitos en los que se encuentra inmerso, estos son, la planificación minera y la agregación de problemas de optimización lineal. Adicionalmente en este capítulo, se explicitan los resultados esperados y se formula un marco teórico adecuado que permite conocer la terminología general con la que se trabaja en este documento.

En el Capítulo IV se realiza la formulación del modelo, presentando el proceso de agregación de columnas de la matriz A para, posteriormente en el Capítulo V, discutir la solución del problema agregado incluyendo la desagregación y el cálculo de la cota de error. Tanto los resultados obtenidos, como el análisis y validación de ellos se muestran en el Capítulo VI. Finalmente, en el Capítulo VII, se plantean las conclusiones y consideraciones futuras asociadas a esta investigación.

¹ La forma estándar es $\max c^T x \quad s.a. \quad Ax \leq b$

II ANTECEDENTES GENERALES

La investigación operativa ha sido incluida en la última década en la industria minera, los modelos de decisión matemáticos han sido ampliamente desarrollados para minas a rajo abierto, no así para minas subterráneas, cuyas características y complejidad, sobre todo en el secuenciamiento espacial de la extracción, han hecho difícil el planteamiento y resolución de los problemas matemáticos asociados.

II.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La resolución de problemas reales de programación lineal implica un alto costo computacional, en tiempo y complejidad, debido al gran número de variables y restricciones que poseen. Esto se agudiza en el caso de la programación lineal aplicado a problemas mineros a nivel detallado, donde existen problemas con más de 100 mil variables, muchas de ellas binarias, y cantidades similares de restricciones, lo implica un altísimo esfuerzo computacional asociado.

Adicionalmente, la complejidad de los modelos detallados imposibilita la inclusión de mayor dificultad. Así, si se incluyese por ejemplo el fenómeno de estocasticidad en la ley del cobre y el precio, el problema se tornaría inmanejable.

CODELCO, en el marco del desarrollo y mejoramiento del proceso de toma de decisiones, considera indispensable incluir modelos probabilísticos. Esta inclusión demanda trabajar en base a problemas de menor complejidad, de costo computacional adecuado y tiempos de proceso aceptables. La empresa además considera la construcción de un modelo corporativo de decisiones, que se haga cargo de todas minas y divisiones a la vez, corriendo el modelo en varias iteraciones.

Lo anteriormente expuesto hace necesario reducir el problema de planificación minera, conservando la factibilidad y evitando afectar notoriamente los resultados económicos asociados a dicha planificación.

Consecuentemente, el desafío que enfrenta este trabajo es la implementación de una metodología que permita obtener un plan de acción y decisión reducido para la explotación de una mina subterránea, de manera que, en un futuro, sea posible replicar esta experiencia en otras minas y divisiones, para posteriormente formar un modelo corporativo compacto, que tenga tiempo de procesamiento razonables y que acepte la inclusión de otro tipo de dificultades, enfocado en la maximización de los beneficios económicos de la actividad.

En particular esta investigación se considera la obtención de un plan de acción reducido para la instancia asociada a la planificación de extracción y flujo de procesos de la mina El Teniente.

En la planificación minera, para poder estudiar métodos de agregación de variables, es necesario considerar una serie de características particulares asociadas a la producción de mineral. Dichas características describen la situación general de las actividades de extracción, traslado y procesamiento de la mina y son traspasadas al modelo matemático por medio de unidades, parámetros y restricciones. Estas características son explicadas en extensión en el Capítulo III.1.

Los modelos detallados de programación matemática existentes [10] contemplan dos tipos de extracción, de área fija y área variable. Estos modelos han sido desarrollados y usados a un nivel operacional, y es a partir de ellos que se efectuará la agregación. Las decisiones asociadas a la planificación minera en este nivel constan del detalle de los lugares a ser explotados y la cantidad de material extraído y transportado entre los distintos procesos de la mina. Es con estos modelos detallados, específicamente el de área fija, con el se realizará esta investigación, ya que éste es utilizado en la actualidad en algunas divisiones de CODELCO.

Hasta ahora, la forma de hacer agregación en la planificación minera [6] , ha sido a base de criterios intuitivos y apoyada en la habilidad del planificador para reconocer similitudes y diferencias entre los elementos que se quiere agregar. Además, esto se ha hecho en forma manual, debido a que no se han encontrado metodologías sistemáticas para hacerlo. Este tipo de agregaciones son específicas para cada instancia.

El proceso de agregación provoca que la función objetivo, dada por la utilidades de la mina llevado a valor presente, tenga un valor sub-óptimo al ser comparada con el valor de la función objetivo del problema original, como también puede provocar la infactibilidad del problema agregado. Esto obliga a realizar el proceso de agregación de la forma más eficiente posible para reducir la pérdida de precisión en dicha función y disminuir la probabilidad de causar infactibilidad.

Los tiempos de resolución de problemas de programación lineal dentro de la gama de problemas de investigación operativa son variables. En la toma de decisiones con datos determinísticos un problema comúnmente se resuelve múltiples veces al variar las instancias de resolución. Lo anterior se agudiza en el caso estocástico, donde la incorporación de incertidumbre requiere la resolución iterativa de problemas lineales, es aquí donde la reducción de tiempo de corrida se hace esencial.

Por otra parte es importante recalcar que en la actualidad se resuelven los problemas de extracción en forma relajada, es decir, evitando el problema del tratamiento de variables binarias, pues esto dificulta aún más la resolución agregando costos de tiempo.

II.2 ENFOQUE DE SOLUCIÓN

El enfoque de solución propuesto contempla la construcción de un modelo de programación matemático, de manera de determinar de forma agregada la cantidad de mineral a extraer anualmente en cada subsector de una mina. La compactación del modelo será realizada bajo en enfoque a posteriori, de manera de utilizar el modelo original y disminuir su tamaño agregando columnas de la matriz A de coeficientes de las restricciones, asociada al problema lineal. Con esto se disminuirá el número de variables utilizadas en el modelo de decisión.

Se considera un horizonte de evaluación de mediano plazo equivalente a 5 años, siendo esto coherente con el objetivo de obtener un plan de acción que apoye las decisiones tácticas del sistema. Se consideran además 11 subsectores de la mina El Teniente, los cuales se encuentran en operación durante el horizonte de planificación.

En procedimientos de agregación debe, en primer lugar, determinarse cuáles elementos agrupar basados en sus similitudes. En experiencias previas [6], esta agrupación nace de observar similitudes a través de lógica básica o análisis. En este trabajo se utiliza análisis de cluster o conglomerados como alternativa. Este método busca determinar y clasificar subgrupos en un conjunto de objetos de acuerdo a cierto criterio de similitud. Este método es comúnmente usado como una herramienta estadística y ofrece un conjunto de rutinas que se encargan de agrupar o clasificar eficientemente un conjunto de elementos.

El tipo de agregación a utilizar se denomina “a posteriori” y consiste en la creación de columnas representativas de un conjunto de columnas de la matriz A de coeficientes de las restricciones del problema original, creando así un modelo de programación lineal agregado [12] .

En general, la literatura existente en metodología de agrupación de variables en problemas de programación lineal data de fines de la década de los 80 y principios de los 90, lo que demuestra que ha habido limitadas contribuciones al estado del arte en el último tiempo.

Se agregará el modelo utilizando un algoritmo programado en el software de programación Microsoft Visual Basic 6 y posteriormente se utilizará GAMS con el solver CPLEX para formular y resolver el problema lineal asociado.

La metodología específica y marco teórico a utilizar para la agregación se discute de forma detallada en el Capítulo III de este informe.

II.3 OBJETIVOS Y ALCANCE

II.3.1 Objetivo general

Formular un modelo de decisiones agregado de extracción minera, que permita obtener un plan de acción y decisiones con un margen de error despreciable respecto al modelo detallado existente, y que entregue respuestas en un tiempo considerablemente menor, de manera de facilitar las decisiones tácticas de CODELCO.

II.3.2 Objetivos específicos

- Formular el modelo agregado mediante el uso de agregación a posteriori y validar esta metodología para la reducción de problemas de planificación minera.
- Evaluar el desempeño del modelo desarrollado respecto al modelo detallado y logrando márgenes de error aceptables.
- Lograr un tiempo reducido de resolución que entregue soluciones satisfactorias.
- Desarrollar un modelo consecuente con las restricciones existentes asociadas a la explotación del mineral que representa la situación actual de la mina.

II.3.3 Alcance

Para el desarrollo del modelo se utilizará una instancia de la división El Teniente de CODELCO. Esta instancia división contempla 10 sectores, de estos sólo aquellos que sean posible de explotar en los períodos de planificación considerados.

Los sectores posibles de explotar en el período de planificación son 5, lo que corresponde a 11 sub-sectores de la mina.

II.4 METODOLOGÍA GENERAL

Siendo este un trabajo inmerso en el área de investigación de operaciones la metodología a utilizar se enmarca en la encontrada en la literatura [7] para este tipo de problemas, integrando en ella las técnicas existentes para reducir problemas de optimización.

II.4.1 Definición del problema

En esta etapa se analiza el sistema a estudiar, se define la información relevante respectiva al medio externo o ámbito y se establecen los objetivos del mismo identificando las alternativas de decisión del sistema.

La característica particular de este trabajo es que está basado en la modificación de un modelo ya existente y por tanto el problema que éste resuelve ya se encuentra definido. En este punto se presentarán las características generales del problema de planificación minera, y además las características asociadas a la agregación de problemas de programación lineal.

En la literatura no existe metodología formal para el proceso de definición del problema, pero si se mencionan características importantes a tener en cuenta, estas características relevantes contemplan el dimensionamiento temporal y espacial del problema, la determinación del nivel de las decisiones y su separabilidad, la definición de los recursos existentes y el grado de precisión numérica aceptable. Las características relevantes recién mencionadas serán planteadas a través de la definición de los resultados esperados del trabajo que aquí se presenta.

Por último en la definición del problema se planteará el marco teórico que rodea este trabajo.

II.4.2 Formulación del modelo agregado

La formulación comprende el modelamiento del sistema de forma congruente con los objetivos planteados. Dicha formulación implica capturar los factores dominantes que determinan el comportamiento del sistema en estudio.

Para formular se considera el modo de agregación a posteriori, que se detalla en el marco teórico del Capítulo III.4.

II.4.2.1 Planteamiento del Problema Matemático

Se plantea el problema lineal en su forma estándar matemática estándar, obteniendo el valor de los parámetros asociados, es decir, matriz A , vector del lado derecho b y vector de costos c .

II.4.2.2 Proceso de agregación de columnas A_j :

La aproximación se basa en reemplazar un set de columnas similares por una combinación convexa de estas. Para decidir qué columnas agregar se realiza un análisis de cluster mediante la medición adecuada de la distancia entre los coeficientes. El algoritmo de clusterización a usado es denominado Leader Type [4] y se detalla, junto a la medición de la distancia en el Capítulo IV.

II.4.3 Solución del modelo agregado

Determinar la solución del modelo consiste en la determinación de los valores de las variables de decisión cumpliendo con las restricciones consideradas, optimizando bajo algún criterio establecido. En particular en la metodología de agregación el proceso de solución del modelo y sus implicancias

II.4.3.1 Descripción de la instancia de prueba

Se realizará, en primer lugar, una descripción general de la instancia de manera de establecer cuales son las condiciones generales de la aplicación del nuevo modelo, para luego proceder a su aplicación.

II.4.3.2 Desagregación y cálculo de cota

Posterior a la solución se considera la desagregación del problema en las variables originales y el cálculo de su cota. Una breve descripción de esto se proporciona en el marco teórico del Capítulo II.6.

II.4.4 Obtención, análisis y validación de resultados

Con la cota obtenida se procederá a mostrar y analizar los resultados, reflexionando acerca de los distintos escenarios y valores. Se analizará la reducción de las dimensiones del problema y se hará una comparación con el modelo original, calculando errores porcentuales, validando el problema para distintas instancias.

Esta etapa se analiza la capacidad del modelo para predecir razonablemente el desempeño del sistema ante diversas alternativas de decisión. En particular en la agregación a posteriori, para verificar si el modelo responde a las expectativas, se realiza la comparación entre el error real y la cota calculada.

III DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Ya que establecidos los objetivos del trabajo aquí presentado, a continuación de muestra la definición del ámbito de éste.

III.1 PLANIFICACIÓN MINERA

La formulación de un plan minero de largo plazo corresponde a la actividad de planificación más relevante y que engloba las decisiones de producción para cada mina y el esquema de operación para las plantas de procesamiento de mineral.

En términos generales, un plan minero está compuesto por el plan de producción anual para cada mina, que incluye los ritmos de extracción, el área a incorporar y el conjunto de leyes de minerales. Para determinar estos ritmos, se considera una serie de restricciones mineras (geotécnicas, operacionales, tecnológicas, etc.) y a nivel de planta, para lograr una mezcla de mineral que maximice el valor presente neto global para el conjunto mina-planta, Cada plan se realiza considerando el precio y la ley del cobre como parámetros fijos.

El concepto de planificación puede tener tres enfoques, los grados de libertad con los que se cuenta, el nivel de ingeniería desarrollado o el ámbito de acción en que se encuentra la planificación [5] .

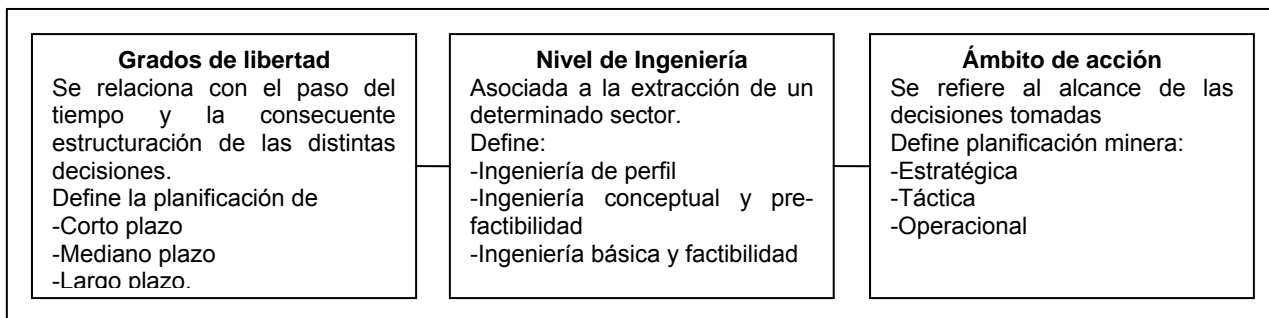


Figura 1: Enfoques de planificación minera

Posterior a la recolección de información relevante, como la caracterización del recurso geológico, historia de la mina y la selección de macro opciones, se presenta la etapa de planificación estratégica. En esta se generan escenarios considerando una serie de parámetros para llevar a cabo la explotación de una mina.

Después de la elección del escenario se recurre a modelos matemáticos como apoyo a las decisiones tácticas y operacionales de mediano y largo plazo de operación explotación y producción de la mina. Las decisiones consideradas conforman el plan minero.

Se ejemplifica a continuación el esquema del proceso minero de toma de decisiones [1]:

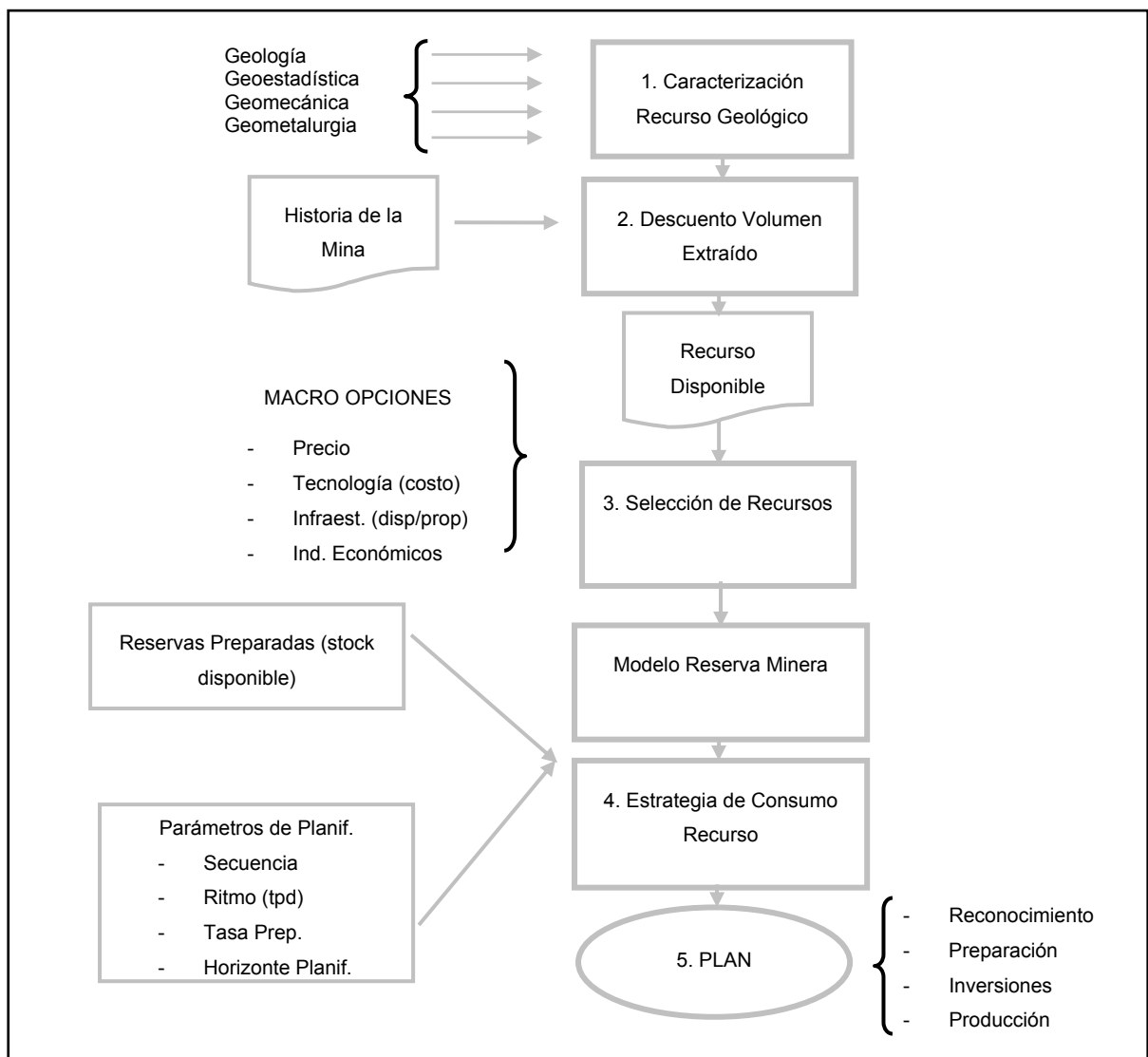


Figura 2: Proceso de decisión minera.

III.1.1 Principales procesos de operación de una mina subterránea:

III.1.1.1 Extracción

Existen distintos métodos de explotación [1] variando principalmente en la extensión del área que es hundida como operación unitaria para quebrar la roca y poder extraerla. Cuando el mineral corresponde a una mineralización secundaria, se presenta como roca blanda y molida, por lo que es suficiente con abrir una vía hasta el mineral, que cae fácilmente. En cambio, si la mineralización es primaria, la roca es dura y se encuentra en bloques que deben quebrarse para poder extraer el mineral.

Los dos métodos principales de extracción de mineral primario son el Block Caving, en el cual se quiebra gran cantidad de área en cada operación; y el Panel Caving, que permite ir avanzando en pequeños frentes de menor área que los utilizados con Block Caving. Este último método es el que se utiliza con mayor frecuencia en El Teniente y por ende es el método a ser estudiado.

Tal como se puede apreciar en la Figura 3, este método consiste básicamente en inducir el hundimiento del material por gravedad al crear una cara libre que origina quebraduras en el cuerpo mineralizado. Este tipo de métodos se consideran altamente productivos y de bajos costos de explotación, especialmente aplicables a depósitos masivos como los Pórfidos Cupríferos.

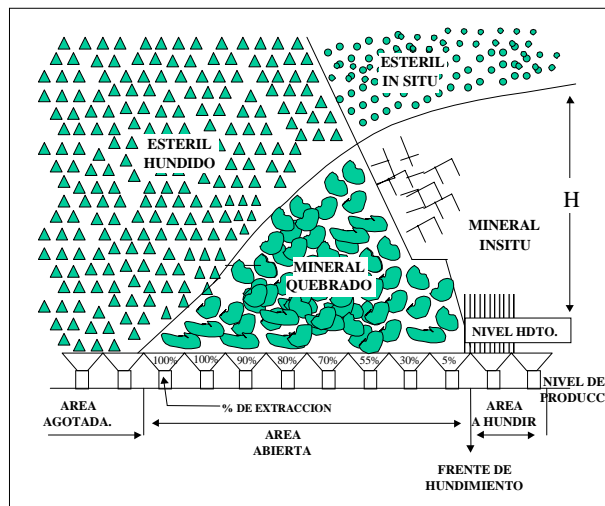


Figura 3: Método Subterráneo de Explotación Panel Caving

Fuente: Centro de Gestión de Operaciones, "Proyecto FONDEF: Metodología para evaluar inversiones en proyectos mineros de Cobre de largo plazo". 2003

La extracción del mineral se realiza a través de un sistema de niveles que permiten ir transportando el mineral desde el nivel de producción a niveles inferiores en los cuales se va procesando. Este sistema se conoce como la ruta de proceso.

III.1.1.2 Reducción: Procesos de chancado y molienda de mineral

Una etapa importante dentro del proceso minero consiste en reducir el tamaño del material proveniente de la mina mediante subprocesos sucesivos que finalizan con mineral prácticamente pulverizado. A continuación se describen los 2 principales subprocesos de reducción de mineral:

- Chancado: Corresponde a la primera fase de reducción, que puede ser realizada tanto al interior de la mina, utilizando chancadores pequeños que procesan mineral de una mina en particular, o bien fuera de la mina mediante chancadores de gran tamaño que procesan la mezcla de minerales proveniente de varias minas.
- Molienda: Proceso siguiente al de chancado, se realiza usando molinos de barras o de bolas (convencional), o con sistemas autógenos / semi-autógenos que aprovechan el mismo mineral como elemento para moler. Esta etapa entrega el mineral en tamaño de micrones, apto para ser procesado en el sistema de flotación.

III.1.1.3 Flotación: Obtención de cobre concentrado

El mineral una vez reducido, pasa a las plantas de procesamiento, en las cuales éste es depositado en celdas con agitadores, a las cuales se les agregan agentes espumantes. El cobre se adhiere a las burbujas, que luego son retiradas desde la celda por medio de paletas. Por último, este concentrado se seca pasando finalmente al proceso de fundición.

A continuación se ejemplifica el flujo y diseño de redes de la mina

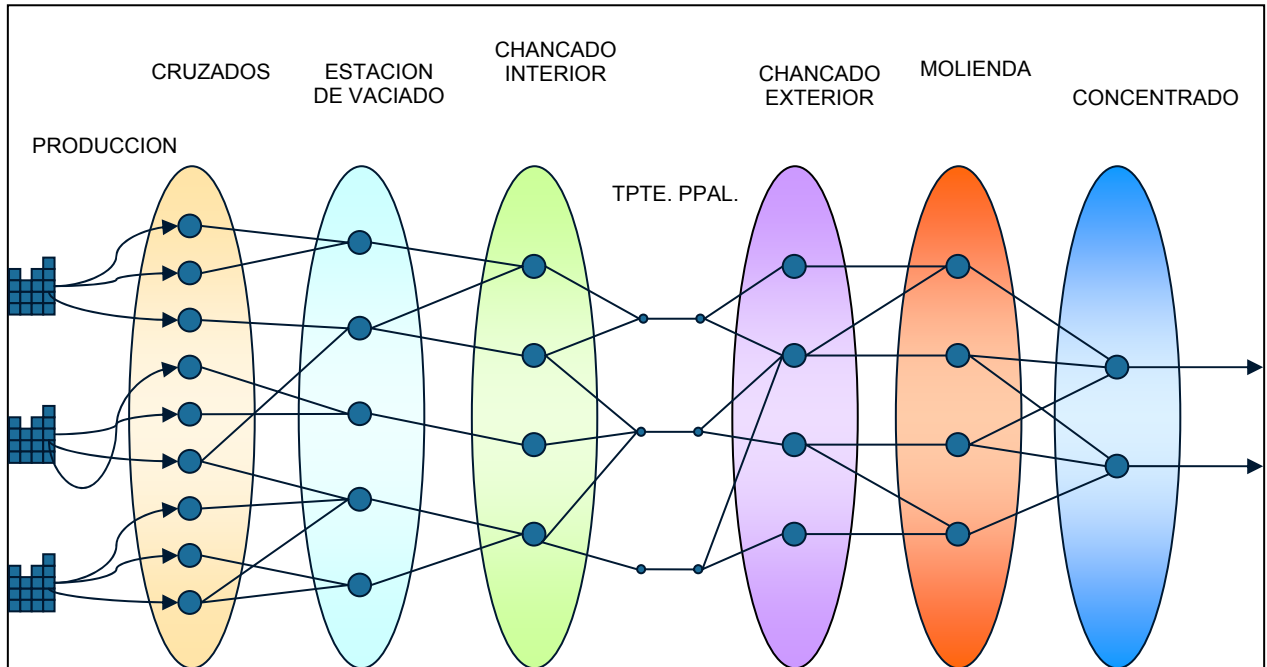


Figura 4: Flujo y diseño de redes de extracción y transporte
Fuente: Ibáñez, Javiera, Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial: "Desarrollo de un modelo compacto de producción minera en CODELCO"

III.1.2 Elementos relevantes en la operación de una mina subterránea

III.1.2.1 Información del Recurso

La caracterización inicial del recurso mostrada en la Figura 1 se realiza a través de la obtención de un modelo geológico, que recoge en sus componentes la información más relevante sobre la mineralización que lo gobierna, litología, dureza, densidad y otras propiedades minerales presentes tan importantes como la ley del mineral. Su geometría espacial y variabilidad resultan fundamentales al momento de diseñar distintos tipos de modelos, ya que permiten identificar zonas de interés y definir los límites globales del depósito. En muchos casos la unidad básica del modelo geológico se transforma en las variables de decisión del modelo planteado.

III.1.2.2 División de la mina

Como ya fue mencionado anteriormente la mina se encuentra dividida en sectores y estos en subsectores. Cada subsector posee características particulares, por lo que es posible observar que existe un modelo geológico para cada subsector. En El Teniente, por ejemplo, se puede

explotar el mineral en distintos sectores en forma simultánea, lo que no significa que todos estos sectores estén habilitados para la extracción. Existe una planificación previa dentro de la mina respecto de los períodos en que comenzarán a ser explotados los sectores y subsectores inactivos.

Los distintos sectores de la mina se encuentran caracterizados mediante puntos de extracción (PEXT). Para cada uno de estos puntos de extracción se conoce el sector o subsector asociado y su ubicación dentro de él. El tamaño de cada sector varía según la cantidad de PEXT que lo conformen. La cantidad de PEXT dentro de un sector puede oscilar entre los 70 y 2500 puntos, considerando de manera individual cada uno de los subsectores que lo componen. Cada punto de extracción tiene una superficie que varía entre los 250 y los 400 m². y una altura que oscila entre los 549 y los 949 metros. Dentro de cada sector, los puntos de extracción que lo conforman tienen una secuencia asignada, para la extracción del mineral.

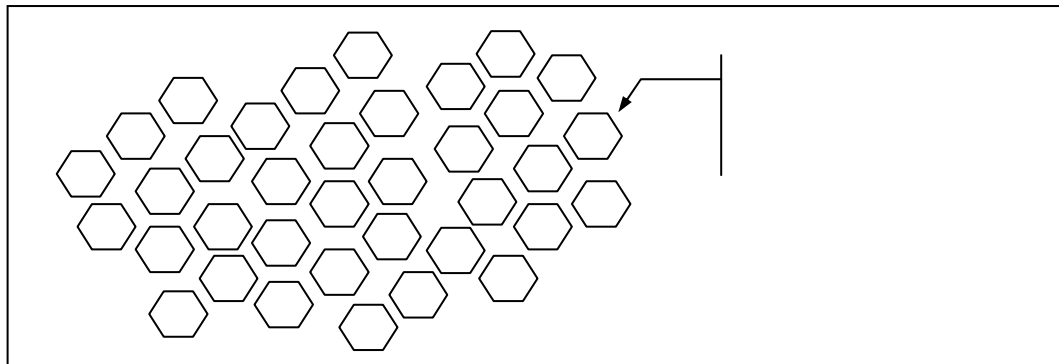


Figura 5: Sector mirado desde arriba

A su vez, los puntos de extracción se encuentran subdivididos en UBC, Unidad Básica de Cubicación. Los UBC en promedio tienen una altura de 20 m, sin embargo esta puede variar dentro de los distintos sectores. Para cada UBC se conoce el material que lo compone, su altura, tonelaje, ley del cobre, arsénico y molibdeno. La cantidad de UBC dentro de un sector puede oscilar entre las 500 y 80 mil unidades, considerando de manera individual cada uno de los subsectores que puedan componer un determinado sector.

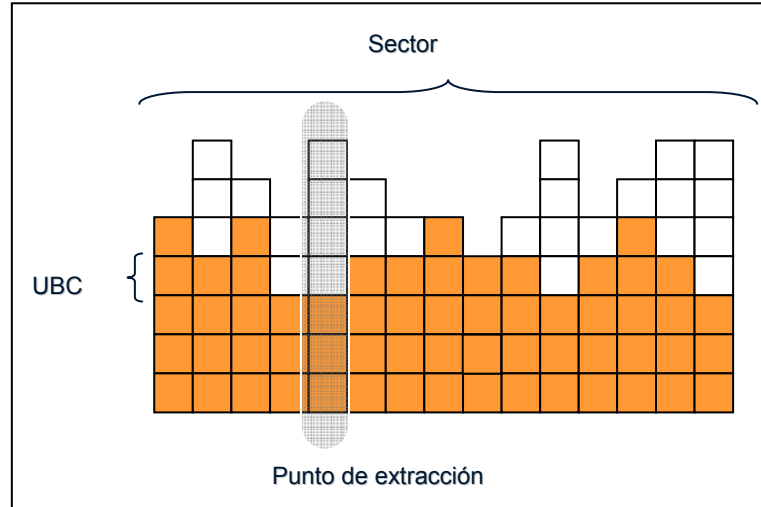


Figura 6: Corte transversal vertical de un sector

III.1.3 Restricciones de operación

III.1.3.1 Capacidad de proceso y transporte

Cada una de las estaciones de la ruta de proceso mostrada en la Figura 4 tiene una capacidad máxima de material que puede ser procesado, definido en toneladas por día. De la misma manera los medios de transporte entre las distintas estaciones, consideran una capacidad máxima de material que puede ser transportado.

La mina opera con distintos subsectores y sectores de producción explotados simultáneamente, por lo que la mayoría de las estaciones de procesamiento existentes en El Teniente son compartidas por todos los sectores que están siendo explotados. Las rutas habilitadas para el transporte se encuentran previamente definidas.

III.1.3.2 Secuencia

El uso de Panel Caving implica que exista una secuencia determinada para la explotación tanto para los puntos de extracción que representan un sector, como para los UBC que conforman el punto. Con esto el primer bloque de un punto de extracción corresponde al UBC ubicado en el nivel más bajo del mismo.

Adicionalmente para poder iniciar la extracción del material de un PEXT es necesario que este se encuentre habilitado, eso quiere decir que el primer UBC definido dentro del PEXT sea

extraído. El primer UBC debe ser extraído completamente antes de pasar al siguiente punto de extracción.

III.1.3.3 Altura de Corte

La altura de corte corresponde a la altura establecida dentro de un sector hasta la cual es posible realizar operaciones de extracción de material dentro de un PEXT, sin que esto presente un riesgo para las operaciones mismas. Es decisión del planificador encargado de la mina, definir esta altura.

III.1.3.4 Regularidad de altura de extracción

Dado que la extracción se realiza a través del desprendimiento de material, las diferencias de altura entre los puntos de extracción se encuentran reguladas. De acuerdo a la estructura de cada sector, se encuentra definida una cierta altura que no puede ser sobrepasada al momento de la extracción, de manera de prevenir los derrumbes de material y mantener la seguridad de los procesos de extracción. La cantidad de puntos afectados por esta restricción se denominan puntos vecinos de un PEXT y se determina mediante la distancia euclidiana entre los centros de cada PEXT.

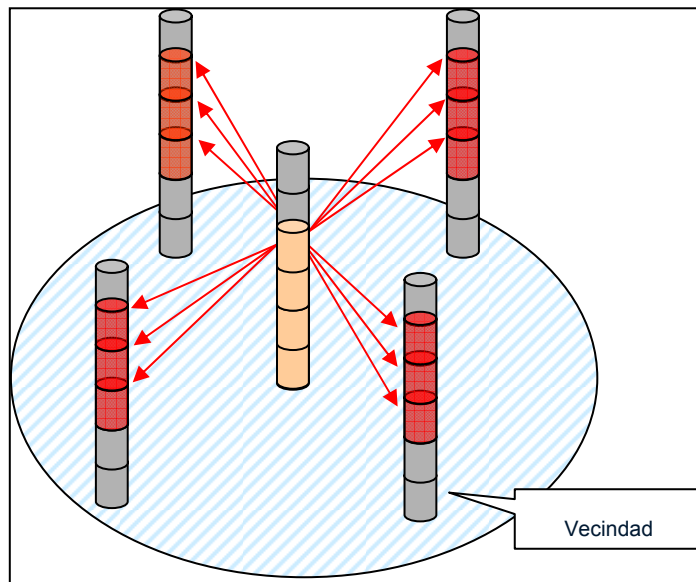


Figura 7: Restricción de regularidad de alturas de extracción

III.1.3.5 Velocidad de extracción

Los puntos de extracción se encuentran agrupados en distintas familias, cada familia tiene una velocidad de extracción definida a la que es posible extraer el material dentro de un PEXT. La velocidad de extracción permite determinar el tiempo requerido para extraer el material dentro de un punto, de acuerdo a la altura a la que se encuentre dentro de él al iniciar la extracción. Dentro de un mismo sector pueden existir numerosas familias, por lo que la velocidad de extracción variará entre éstas.

Esta restricción condiciona la cantidad de mineral que será posible extraer de un determinado PEXT

III.1.3.6 Vida útil

El tiempo durante el cual puede ser explotado un punto de extracción también se encuentra restringido. Esta decisión depende del planificador encargado. Sin embargo desde que se habilita el punto se pueden realizar labores de extracción en éste por un período que oscila entre los 5, 8 o 10 años.

III.1.4 Objetivo de la planificación minera

En el proceso de planificación se determina la cantidad de mineral que puede ser obtenido de la mina. Las leyes de mineral asociadas a cada unidad de extracción permiten determinar el beneficio económico que es posible obtener de un determinado sector. El objetivo de este proceso es maximizar el beneficio económico, en valor presente, eficientemente.

Es intuitivo pensar que mientras mayor sea la ley del mineral mayor será el beneficio económico asociado a un punto de extracción.

Dada la extensión del modelo original, éste adjunta en el Anexo A

III.2 AGREGACIÓN EN OPTIMIZACIÓN LINEAL

El problema original general a reducir es de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \text{(OP)} & \max Z = c^T x \\ & Ax \leq b \\ \text{s.a.} & x \geq 0 \end{array}$$

En donde A es una matriz de $m \times n$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, y $b \in \mathbb{R}^m$.

Muchas técnicas son utilizadas para formar modelos reducidos de problemas de optimización y para analizar su efectividad respecto a recobrar la solución óptima del modelo original. Según lo planteado en la literatura es difícil sistematizar varios aspectos de la agregación según lo que se ha desarrollado en otras experiencias, pues la metodología de agregación dependerá directamente del proceso sujeto a estudio.

Dada la amplitud de las áreas en las que se ha estudiado la optimización matemática, sólo puede establecerse un marco general para las técnicas de agregación y desagregación. Según plantean Rogers, Plante, Wong y Evans [8] Los componentes principales de estos procedimientos son:

III.2.1 Análisis de agregación

Se definen métodos para determinar qué elementos de un modelo combinar en uno solo, con qué criterios de similitud hacerlo, el procedimiento, el nivel de agregación y cómo estos definen los nuevos elementos.

III.2.2 Análisis de desagregación

Se definen métodos para derivar elementos de un modelo más refinado a partir de un modelo agregado, esto en general se realiza a través de métodos de desagregación coherentes con los métodos de combinación, y se debe definir además si el nivel de desagregación equivale al nivel de detalle del modelo original.

III.2.3 Análisis de error

Métodos para determinar el error resultante que puede surgir al emplear modelos agregados y desagregar soluciones.

En la siguiente figura se muestran los elementos principales de la agregación y desagregación y sus componentes.

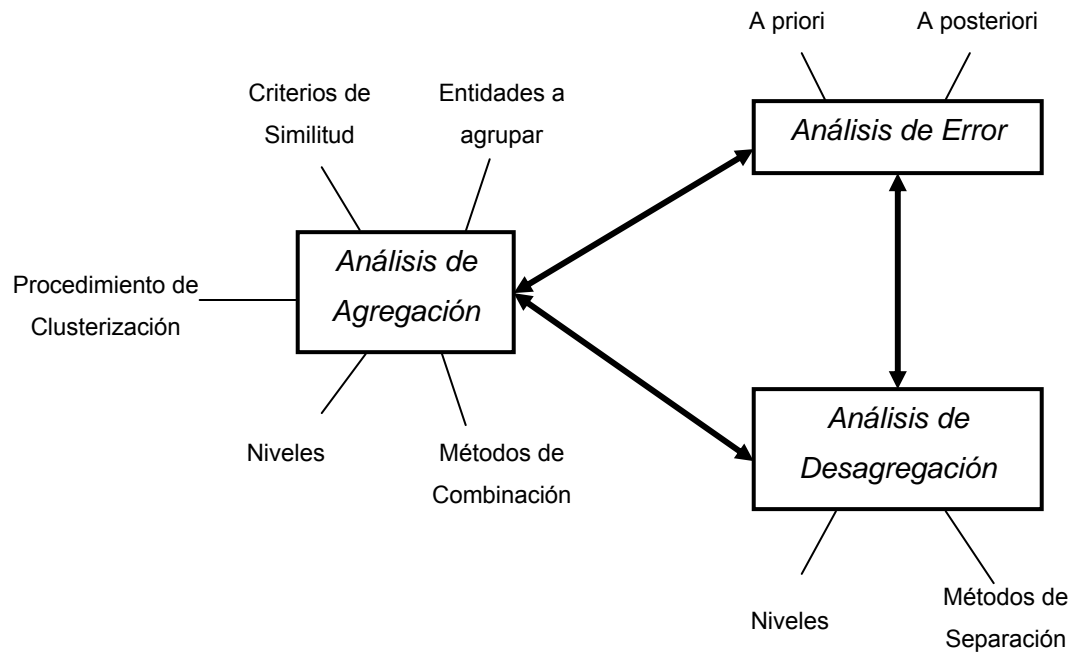


Figura 8: Elementos de agregación y desagregación de PL
Fuente: Rogers D. Plante R. Wong R. Evans J. "Aggregation and disaggregation techniques and methodology in optimization" Op Res. 39, 1991 pp 555.

III.3 RESULTADOS ESPERADOS

Los resultados esperados tienen que ver con cada uno de los objetivos planteados:

- La formulación de un modelo que sirva como apoyo a las decisiones tácticas de una mina subterránea de la empresa.

- Lograr márgenes de error globales aceptables, es decir menores al 10%. Esta cifra se basa en que los errores actuales de la empresa por aproximación al planificar se encuentran en este orden.
- Lograr tiempos de resolución menores al 20% del tiempo de resolución del problema original.
- Obtener un nuevo enfoque de resolución expandible a las distintas divisiones de CODELCO y a la cual se le pueda incorporar estocasticidad en algunos de sus parámetros relevantes.

III.4 MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta el modelo general, con las características descritas en el Capítulo II.1, se hace necesario introducir la técnica de agregación a posteriori con un marco teórico general.

A continuación se realiza una presentación formal de la agregación de columnas basada en la formulación hecha por Zipkin [12], ésta es la teoría en la cual se sustenta la agregación realizada.

III.4.1 Planteamiento matemático general del problema:

Conocido el problema inicial, el paso siguiente es aglomerar columnas de manera que las columnas de la matriz A de coeficientes de las restricciones que pertenezcan a un grupo con características similares, se reemplazan por una sola columna que corresponderá a una ponderación de ellas. El problema resultante es lo que se denomina el problema agregado. Posteriormente se procede a la resolución del problema agregado y mediante una desagregación se obtiene una solución factible para el problema inicial.

Sea OP el problema original de PL:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(OP)} & \max Z = c^T x \\
 & Ax \leq b \\
 \text{s.a.} & x \geq 0
 \end{array}$$

Donde A es una matriz de $m \times n$, c , $x \in \mathfrak{R}^n$ (vectores columna), y $b \in \mathfrak{R}^m$ (vector columna).

III.4.2 Proceso de agregación

Se considera la partición de un grupo de n columnas en K subgrupos.

Así $\sigma = \{S_k : k=1,2,\dots,K\}$, es una partición arbitraria del conjunto $\{1,2,3,\dots,n\}$ en donde S_k tiene n_k elementos.

A_k (de dimensión $m \times n_k$) es la submatriz de columnas de A que pertenecen a S_k , y c_k y x_k son subvectores de dimensión n_k de c y x respectivamente, cuyos índices pertenecen a S_k .

Sea g_k un vector fila de dimensión n_k , cuyas componentes son no negativas y suman 1. Los componentes de estos vectores se denominarán ponderadores.

Definiendo una nueva columna A'_k como una combinación convexa de las columnas de A_k . También, c'_k y x'_k son especificados como valores singulares que reemplazan a c_k y x_k .

$$A'_k = A_k g_k^T, \quad c'_k = c_k g_k, \quad x'_k = x_k g_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (*)$$

$$\text{Si } c' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_k), \quad A' = (A'_1, A'_2, \dots, A'_k)$$

$$\text{Y } x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_k) \quad \text{Donde } c' \text{ y } x' \text{ son vectores columna}$$

El problema original puede transformarse en el siguiente problema agregado.

$$\begin{aligned} \text{(AP)} \quad & \max \bar{Z} = c'^T x' \\ & \text{s.a.} \quad A' x' \leq b \\ & \quad \quad x' \geq 0 \end{aligned}$$

III.4.3 Desagregación

Dada una solución factible x' de (AP), a través de la relación inversa de (*), se puede determinar una solución factible del problema (OP).

$$\text{Así:} \quad \bar{x}_k = g_k^T \cdot x'_k$$

Donde x'_k es la k -ésima componente del x' , y \bar{x}_k es un vector de n_k filas, y cada una de sus componentes corresponderá al valor de una variable del problema original.

Entonces, si (AP) es resuelto y tiene solución factible, siempre se puede encontrar una solución factible para (OP).

A esta desagregación se le denomina desagregación a ponderadores fijos. Existe otro método de desagregación denominado, desagregación por dominancia, pero la calidad de los resultados que ésta entrega son menores a los de la desagregación a ponderadores fijos.

III.4.4 Cotas

El proceso de agregación produce un deterioro en el valor óptimo de la función objetivo del problema original, esto se debe justamente a la aproximación realizada mediante los ponderadores. Por esto la literatura entrega variadas cotas que pueden ser obtenidas en la agregación a posteriori, en este caso, dada la metodología planteada, la cota de Zipkin [12] es la que corresponde analizar.

El beneficio de calcular esta cota es que se obtiene una aproximación al error real sin obtener la solución del problema original.

Cuando (x^o, z^o) es una solución óptima a (AP), entonces la siguiente proposición puede hacerse acerca de esta solución:

Sea $\sigma' = \{S'_k : k'=1, 2, \dots, K'\}$ una partición de $\{1, 2, \dots, n\}$, no necesariamente igual a σ , (d_1, \dots, d_n) números positivos, $(P_1, P_2, \dots, P_{K'})$ números no negativos y (x^o, z^o) una solución óptima del problema original (OP), tal que la siguiente relación se satisface:

$$\sum_{j \in S'_k} d_j x^o_j \leq P_k \quad k'=1, 2, \dots, K' \quad (\text{Rel 1})$$

entonces,
$$z^o \leq z^{*o} + \epsilon_a \quad (\text{Rel 2})$$

donde
$$\epsilon_a = \sum_{k'=1}^{K'} \text{Max}_{j \in S'_k} \left(c_j - \frac{\bar{u} A_{*j}}{d_j} \right)^+ P_{k'} \quad (\text{Rel 3})$$

Donde \bar{u} es el vector de las variables duales en la solución óptima (AP). A_j es la j-ésima columna en el problema original y el signo + implica que sólo valores positivos de la expresión (Rel 3) son considerados. Si la relación 1 (Rel 1) es una igualdad, entonces los términos positivos y negativos son incluidos en la expresión (Rel 3).

En esta forma, después de resolver el PL agregado, una cota superior del error del valor de la función objetivo debido al proceso de agregación puede determinarse mediante la relación 2. Notar que no se necesita ninguna información de la solución del problema original (OP).

Para una partición σ , existe un conjunto de pesos g_k tales que $z^{*o} = z^o$. Este conjunto de pesos pueden extraerse de la solución óptima de (OP), por esto pero su cálculo carece de sentido.

IV FORMULACIÓN DEL MODELO

IV.1 CONSIDERACIONES INICIALES SOBRE LA AGREGACIÓN EN EL CASO MINERO

En primer lugar se determina cuáles son las variables relevantes a agrupar.

El modelo detallado (Anexo A) alberga distintos tipos de variables, en este caso las variables agregadas son las $Z_{n,j}^t$ que se refieren a la fracción de bloque n de la columna j a ser extraída en el período t . La cantidad de variables y restricciones (más de 35 mil) dificulta la resolución rápida del problema.

Es importante destacar que estas variables son agregadas formulando clusters disjuntos para cada subsector y período, es decir no se juntarán en un mismo cluster variables de subsectores distintos y tampoco se combinarán en un mismo cluster variables que respondan a decisiones de distintos períodos. Esto hace que la agregación sea espacial, es decir en cada período se agrupan decisiones asociadas a cubos o ubc (unidades básicas de cubicación) de la mina.

Así la nueva variable será de la forma: $\bar{Z}_{a,l}^t$ que corresponde a la decisión de extracción del cluster l del subsector a en el período t . Cabe notar que aunque la nueva variable tenga la misma cantidad de subíndices de la variable anterior, la cantidad de variables nuevas será igual a la cantidad de cluster formados en la mina en cada período, mientras la cantidad de variables antiguas es igual a la cantidad total de ubc's que existan en la mina por cada período. En

conclusión, los subíndices a y t solo muestran información y no agregan dimensiones a la nueva variable.

Las variables restantes, que no son decisiones de extracción, no son contundentes en cantidad o en dificultad de cálculo, por lo que su agregación no se considera esencial.

IV.2 PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA

En segundo lugar se reconstruye el problema original en forma matricial separando en el bloque de la matriz correspondiente a las variables de extracción y al resto de las variables.

Si se considera una columna de la matriz A asociada a una variable a agregar se obtiene un vector con la siguiente forma:

$$A_{\bullet j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ h_j \\ A_{k_1 j} \\ A_{k_2 j} \\ A_{k_3 j} \\ DP_{at} \\ area_j \end{bmatrix}$$

Figura 9: Columna de A

El extracto de matriz que contiene este tipo de columnas se denominará $A1$. El extracto de matriz que contiene a las columnas asociadas a las restricciones restantes se denominará $A2$.

Así se trabajará en la agregación exclusiva de la matriz $A1$.

En la programación lineal la mayoría de las agregaciones de columnas se realiza en base a las similitudes entre los coeficientes de las columnas de la matriz A , por esto es importante

analizar qué información proporcionan los elementos de dichas columnas que sean útiles en el proceso de agregación.

Los valores de la parte inferior de la columna corresponden a las restricciones asociadas al cálculo del tonelaje extraído, a la restricción de áreas, alturas y producción y son valores del orden de 10^4 . Esta información es útil al agrupar columnas, de manera que aquellas columnas que tengan características productivas similares, en tonelaje y ley son agregadas con mayor facilidad.

Los valores de la parte superior de las columnas corresponden a las restricciones asociadas a la característica espacial del problema y a la extracción secuencial del espacio. Debido a la composición binaria esta sección la información que se puede obtener es nula, por lo tanto se hace necesario agregar dicha información a la columna para poder ser considerada en la clasificación.

Considerando lo anterior es necesario determinar cuáles son los datos útiles para complementar las columnas, dichos datos deben dar luces acerca de las características espaciales de las variables. Así, si una columna pertenece a la variable Z_{jn}^t , donde t es el período, j la columna de extracción y n el bloque de dicha columna, se considera relevante conocer la ubicación en el plano de la columna j y la altura a la que se encuentra el bloque n .

La ubicación en el plano de la columna j está dada por sus coordenadas x e y , la altura por su distancia al primer bloque h (altura acumulada de bloques). Estos datos son agregados al final de la columna, en una nueva fila asociada al período de la variable, de manera que la columna queda según muestra la Figura 10:

Con la nueva columna formada, que será usada para agrupar, se hace necesario ver el peso que cada uno de sus componentes tendrá en la agregación.

En primer lugar, al analizar los componentes de la matriz, se observan diferencias relevantes en el orden de magnitud de los datos, por ejemplo los datos de altura ($\sum h_{nj}$) son del orden de 10^1 , los datos de tonelaje y ley en las restricciones de capacidad (A_{kjn}) son del orden de 10^4 , etc. Por lo tanto se estima necesario normalizar estos valores dividiéndolos por el exponente de su orden de magnitud, de manera que al usarlos, la información asociada a ellos tenga el mismo el mismo peso. Esta normalización se realiza para todos los valores de la columna.

$$A_{\bullet,j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ h_j \\ A_{k_{jn}} \\ \frac{A_{k_{jn}}}{DP_{at}} \\ \frac{A_{k_{jn}}}{area_j} \\ \dots \\ X_j \\ \dots \\ Y_j \\ \dots \\ h_{nj} \end{bmatrix}$$

← Coordenada
 ← Coordenada
 ← Altura

Se agregan por cada uno de los tres datos, tantas filas como períodos tenga el problema

Figura 10: Columna de A modificada

Luego es relevante dar importancia disímil a cada uno de los componentes de la matriz, según el tipo de información que aporta. Esto se hace asignándoles prioridades de 1 a 10 de manera que 1 corresponde a la información más valiosa al momento de agregar y 10 a la menos valiosa. Un ejemplo resumen de esta asignación se muestra en la siguiente tabla, en la que la primera columna muestra la información que proporciona cada componente (según la restricción a la que corresponde) y el tipo de dato, mientras que en la segunda columna la importancia establecida.

Información de la fila	Importancia
Extracción secuencial vertical (1)	3
Extracción Secuencia horizontal(1)	3
Tiempo de extracción (β_{jn})	1
Capacidad ($A_{k_{jn}}$)	2
Ubicación en el plano x (X_j)	1
Ubicación en el plano y (Y_j)	1
Altura acumulada del ubc ($\sum h_{nj}$)	2

Tabla 1: Asignación de Importancia de componentes de A

Así, la columna o vector normalizado será dividido por 10^i siendo i la importancia asignada.

Estas importancias se determinan analizando el valor de la información que aporta cada coeficiente, así por ejemplo las características espaciales (X_j, Y_j) aportan información relevante para la agregación, pues nos interesa saber dónde se encuentra el cubo que se está agregando para agregar cubos que se encuentren relativamente cerca, nos interesa también la cantidad de producto k que aporta el cubo, por tanto A_{kin} también es relevante. En cambio las restricciones secuenciales cuyos coeficientes son sólo 0 y 1, que no aportan información relevante, tienen importancia menor.

La definición de importancia de las restricciones es uno de los grados de libertad de la investigación, ya que ajustando adecuadamente estos valores se puede cambiar los criterios implícitos de clasificación. Los criterios implícitos aquí usados, ordenados prioritariamente, son los siguientes:

- Sólo se permite agrupar variables de un mismo período, lo que significa que la aglomeración de variables es espacial, y no necesariamente igual en distintos períodos.
- Se privilegia aglomerar los cubos de una misma columna.
- Se privilegia aglomerar los cubos adyacentes en una misma columna y en un mismo nivel de altura.
- Se privilegia aglomerar cubos con aportes en tonelaje de producto similares.
- Se privilegia aglomerar cubos de dimensiones similares

Con los vectores normalizados, priorizados y listos para ser utilizados se procede a realizar la agregación de columnas, en este proceso de aglomeración se utilizan los criterios explícitos, que no son considerados en el planteamiento matemático inicial.

Implementación computacional

La implementación computacional de esta etapa contempla en primer lugar, generar la matriz A del problema original. Esto se realiza con el software GAMS, que escribe dos archivos en formato de texto denominados MAP y MPS. El primer archivo entrega el listado total de restricciones y columnas y el segundo los valores de los componentes de la matriz A según cada fila y columna. Estos archivos se obtienen al plantear el problema original, pero no es necesaria su resolución.

Posteriormente es necesario procesar esta información para poder trabajar con formatos numéricos, de manera de poder seleccionar las columnas de interés, cambiar su dimensión, agregar los valores mencionados, normalizarlos y priorizarlos. Lo anterior se realiza mediante un algoritmo programado en MS Visual Basic 6, en una rutina denominada Matriz. Esta rutina requiere de la siguiente información:

- Los períodos del problema para los que se construye el modelo agregado.
- Los archivos MAP y MPS.
- Los ponderadores de importancia de las restricciones.

Esta rutina además elimina las filas de la matriz que tienen valor cero para todas las variables, pues estos valores no entregan información útil alguna al proceso de agrupación. Esta disminución de tamaño además permite disminuir los tiempos de modificación de la matriz y agiliza posteriormente la rutina de clasificación.

Con lo anterior, el resultado de esta rutina es la matriz, con sus columnas seleccionadas y modificadas, preparada para su agrupación.

IV.3 PROCESO DE AGREGACIÓN DE COLUMNAS DE LA MATRIZ A

La elección de cómo crear las particiones se realiza a través de análisis de cluster. Las técnicas básicas de análisis de clusters pueden ser catalogadas en tres tipos: basadas en medidas de similitud y diferencias, clasificación jerárquica, y clasificación mediante particiones [9].

En este caso se utilizó un análisis basado en medidas de similitud y diferencias, es decir los conjuntos de columnas a agregar se definen a partir de la semejanza que exista entre ellas. Para dicha la similitud, se define una medida de distancia permite ver qué tan similares son dos objetos.

IV.3.1 Definición de distancia o medida de similitud

Una manera estándar de expresar similitudes es a través de un conjunto de distancias que actúan sobre pares de elementos u objetos. Muchos de los algoritmos de clasificación asumen este tipo de distancias como dada y a través de éstas se construyen las clases buscando que las distancias entre objetos de una clase sean pequeñas.

La medida de similitud, debe cumplir con los siguientes requisitos:

- $d(A_j, A_k) \geq 0$ para todo j y k
- $d(A_j, A_j) = 0$ para todo j
- $d(A_j, A_k) = d(A_k, A_j)$ para todo j y k
- $d(A_j, A_k) \leq d(A_j, A_i) + d(A_i, A_k)$ para todo i, j y k

Donde $d(.,.)$ es la distancia entre dos elementos y A_k es la columna k de la matriz de coeficientes A.

De las medidas de similitud existentes, que son numerosas, se determinó que la adecuada a utilizar es la siguiente:

$$d(A_{\bullet j}, A_{\bullet i}) = 1 - \cos(\bar{A}_{\bullet j}, \bar{A}_{\bullet i})$$

Donde $\overline{A_{\cdot,j}}$ y $\overline{A_{\cdot,i}}$ son las columnas modificadas según lo expuesto en el Capítulo anterior y \cos : coseno del ángulo entre ambas columnas dado por:

$$\cos(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \cdot \|Y\|}$$

La elección de esta distancia, propuesta en la literatura [9], se debe a que, en primer lugar cumple con las restricciones establecidas, en segundo lugar, a medida que se agrega con una distancia máxima más pequeña, los conjuntos factibles del problema agregado y del problema original son más parecidos, por último esta distancia fue usada con éxito en la agregación forestal con la diferencia que los vectores a utilizar no presentaban las modificaciones como las establecidas en el punto IV.2.

La normalización de columnas planteada anteriormente tendrá dos efectos en la medición de distancias:

1.- Aquellos componentes de la misma fila de ambas columnas que no tengan la misma magnitud crearán mayor distancia entre vectores, por lo tanto éstos serán agregados con menor probabilidad.

2.- Se otorgará mayor valor a las características espaciales del problema, por lo que las distancias darán fe de cercanía espacial entre columnas y bloques de extracción.

IV.3.2 Algoritmo de clasificación

A continuación se presenta la técnica de agregación utilizada. Es importante acotar que el problema que se enfrenta es de gran escala en términos de cantidad de variables y restricciones, por lo tanto algoritmos de clasificación óptimos como k-means serán de costo computacional alto e infactibles de implementar en tiempo aceptable para las mismas instancias u otras de mayor tamaño.

El algoritmo a usar tiene su base en el desarrollado por Hartigan denominado Leader Type Algorithm [4] y modificado por Sáez [9] Es un procedimiento de tipo aproximado dada la necesidad de realizar una agregación en forma rápida y de bajo costo computacional.

Con la distancia anterior y definiendo el criterio de que dicha distancia no debe ser mayor que un cierto valor $\epsilon > 0$, se procede a formalizar el algoritmo.

En la siguiente figura se grafica el algoritmo a utilizar.

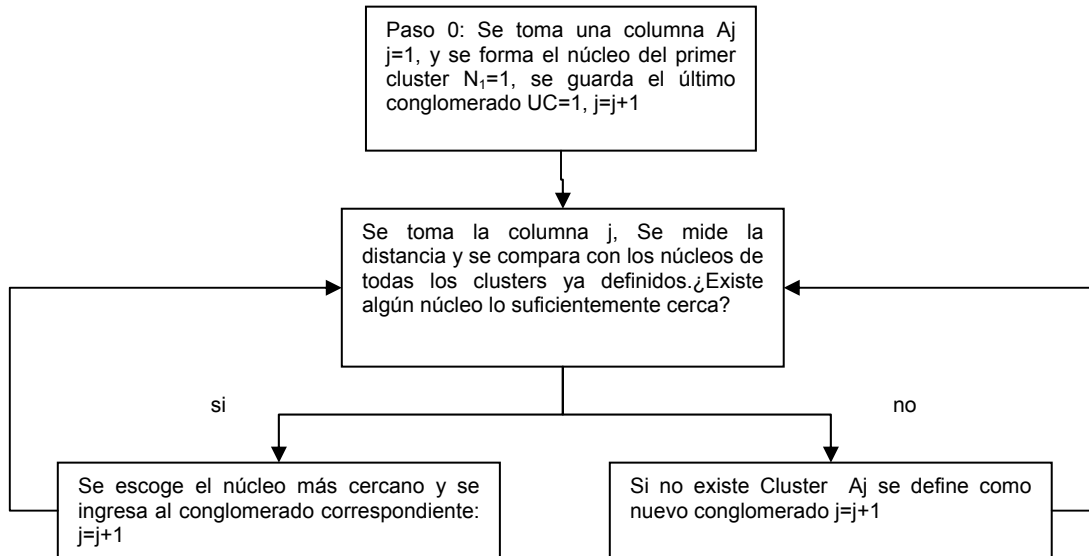


Figura 11: Algoritmo de agregación Leader Type

Una de las deficiencias de este algoritmo es que la clasificación resultante dependerá del orden en que estén las columnas originalmente. Para eliminar esta deficiencia se permutó aleatoriamente el orden de las columnas, para distintas instancias, y las diferencias obtenidas en los resultados de la clasificación, con los distintos órdenes de las columnas fueron despreciables.

El segundo grado de libertad de la aglomeración, siguiendo a la definición de importancia de los componentes de la matriz, es la definición de la distancia $\epsilon > 0$. Claramente con mayores distancias iniciales la cantidad de clusters resultantes es menor y se muestran mayores errores, cuando las distancias elegidas son pequeñas aumenta la cantidad de clusters pero el error se ve disminuido, así una forma de acotar el error es considerar distancias de pequeño tamaño.

Con las distancias obtenidas, y la clasificación hecha, se da paso al cálculo de los ponderadores.

IV.3.3 Cálculo de ponderadores g

La forma de definir los ponderadores g puede ser de gran importancia para la solución que se obtenga, dado que estos obligan a las variables a tomar valores que pueden perjudicar la factibilidad del problema. Lo anterior sucede de forma notoria en el caso de la planificación minera operacional, pues el gran detalle que ésta posee, en términos de secuenciamiento espacial y temporal, da alta sensibilidad a la factibilidad de la clasificación de variables.

Un ejemplo de esto es que pudiesen existir, en un cluster, dos variables y estas variables sean tales que la factibilidad del problema se da sólo si una de ellas es uno y la otra es cero. Si se toman ponderadores tal que ambos son iguales a 0.5 cualquiera sea el valor de la variable esta hará infactible el problema.

El vector de ponderadores G para el cluster k se denomina G_k , este vector de ponderadores está compuesto por l componentes tal que :

$$\sum_{i=1}^{n_k} G_{ki} = 1$$

Cada G_{ki} representa a una variable del problema original $Z_{n,j}^t$ dentro del cluster k . Dada la correspondencia entre el ponderador y la variable del problema original se puede plantear G_{ki} de la siguiente forma para cada tripleta de n,j,t :

$$G_{n,j,t}^k = \begin{cases} G_{ki} & \text{Si la variable } Z_{n,j}^t \text{ pertenece al cluster } k. \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Tal como se señala a continuación se calcularon ponderadores de diversas maneras:

Ponderador 1:

Los ponderadores fueron calculados de la manera más simple posible, considerando simplemente la cantidad de variables aglomeradas en cada grupo. Así si el cluster k contiene n_k variables, el ponderador de la columna i , perteneciente a dicho cluster será sencillamente:

$$G_{ki} = \frac{1}{n_k}$$

La formulación de este ponderador con tiene la ventaja de ser de cálculo rápido e intuitivo, es decir, que cada variable valdrá lo mismo que las demás dentro de un cluster. Lamentablemente las desventajas superan las ventajas en este caso, tal como se verá en el análisis de resultados, y esto es que este tipo de cálculo de ponderadores atenta contra la factibilidad del problema.

Podría ser discutido que este problema se elimina si la clasificación de por sí es lo suficientemente robusta, de manera tal que esta agrupe variables que no sean contradictorias entre sí, pero esto no puede ser evitado de una forma generalizada ni nemotécnica para la gran cantidad de variables trabajadas con la información disponible previo a la solución del problema.

Ponderador 2:

El segundo ponderador responde a la necesidad a dar prioridad a ciertas variables dentro de un cluster, así los ponderadores de aquellas variables que correspondan a bloques o ubicados más abajo en la mina tendrán mayor ponderador, como así también aquellas variables que corresponda extraer antes de otras.

El ponderador se construye de la siguiente forma:

Dentro de un cluster hay variables asociadas a columnas que deben ser extraídas antes que otras columnas. Así se tiene.

$JPrior_l$: Prioridad de extracción de la columna asociada a la variable l del cluster, esta información se obtiene para cada una de las variables que pertenecen al cluster. Dicha prioridad tomará valores más bajos mientras antes deba ser explotada una columna. Por ejemplo, la columna que debe ser explotada primero tendrá JPrior igual a 1. Así, para que el valor de numerador sea alto mientras menor sea el JPrior, se usa:

$$\max_l(JPrior_l) - JPrior_l$$

Un ponderador adecuado si se quisiera ponderar solo a base de la prioridad de la columna sería:

$$\frac{(\max_l(J \text{ Prior}_l) - J \text{ Prior}_i)}{n_k \cdot \max_l(J \text{ Prior}_l) - \sum_{l=1}^{n_k} J \text{ Prior}_l}$$

Un ejemplo para este cociente puede ser un cluster con dos variables ($n_k = 2$), de manera que la variable $l=1$ está asociada a un punto de extracción con prioridad 2, y la variable $l=2$ está asociada a un punto de extracción con prioridad 3. De esta forma el máximo de JPrior dentro del cluster será 3. Así el cociente anterior para la variable $l=1$ será:

$$\frac{(3 - 2)}{2 \cdot 3 - (2 + 3)} = \frac{1}{1}$$

Así el mismo cociente para la variable $l=2$ será cero.

En segundo lugar es necesario considerar dentro de una columna la prioridad de extracción de sus cubos, para esto se determina.

$N \text{ Prior}_l$: Prioridad de extracción del ubc asociada a la variable l del cluster, dentro de su columna. Esta información se obtiene para cada una de las variables que pertenecen al cluster. Dicha prioridad más bajos mientras antes deba ser explotada un cubo. Así, para que el valor de numerador sea alto mientras menor sea el NPrior, se usa:

$$\max_l(N \text{ Prior}_l) - N \text{ Prior}_i$$

A partir de esto se podría también construir un ponderador como el expresado anteriormente.

Considerando lo recién expuesto y considerando el fondo del ponderador 1 se formula el siguiente ponderador para la variable i perteneciente al cluster k es el siguiente:

$$G_{ki} = \frac{(\max_l(N \text{ Prior}_l) - N \text{ Prior}_i) + (\max_l(J \text{ Prior}_l) - J \text{ Prior}_i) + 1}{n_k \cdot \max_l(N \text{ Prior}_l) - \sum_{l=1}^{n_k} N \text{ Prior}_l + n_k \cdot \max_l(J \text{ Prior}_l) - \sum_{l=1}^{n_k} J \text{ Prior}_l + n_k}$$

De manera que a menor prioridad de extracción tenga la variable, mayor será su ponderador. Notar que la suma de los ponderadores sobre todos los componentes de un cluster será igual a 1.

Con el mismo ejemplo usado anteriormente se puede suponer que la variable $l=1$ tiene un NPrior de 1 y la variable $l=2$ tienen un NPrior de 2. De esta forma el máximo de los NPrior es 2, por lo que los ponderadores quedan:

$$G_{k1} = \frac{(2-1)+(3-2)+1}{2 \cdot 2 - (1+2) + 2 \cdot 3 - (2+3) + 2} = \frac{3}{4}$$

$$G_{k2} = \frac{(2-2)+(3-3)+1}{2 \cdot 2 - (1+2) + 2 \cdot 3 - (2+3) + 2} = \frac{1}{4}$$

Así, el ponderador asociado a la primera variable del cluster $l=1$ que se encontraba asociado a un cubo cuya columna tenía mayor prioridad de extracción (JPrior=2) y mayor prioridad de extracción del ubc (NPrior = 1) se lleva la mayor parte del ponderador. Notemos además que ambos ponderadores suman 1.

Ponderador 3:

El tercer y último ponderador está pensado de forma similar al anterior, pero se incluye algunos otros datos relevantes en el cálculo del ponderador.

En primer lugar se estableció que el secuenciamiento vertical o de los cubos (dado por NPrior) es más importante en los primeros períodos del modelo, esto es pues aquí es importante que las variables asociadas a ubc's que se encuentran más abajo en la mina (de menor valor de NPrior) sean explotadas primero. En cambio el secuenciamiento en el plano o de las columnas (dado por JPrior) es más importante en los períodos centrales o últimos del modelo, pues aquí es más relevante extraer en las partes centrales y superiores de la mina, según el orden de prioridad de cada columna.

Por otro lado se agregó una ponderación asociada al tiempo de extracción de cada cubo, ya que es importante que aquellas variables cuyo tiempo de extracción es mayor, sean priorizadas de distinta forma dependiendo del período en el cual se está agregando.

Así se tiene que $pond_x(t)$ corresponde al ponderador de la información dependiendo del período asociado a la variable que representa cada ponderador y tpo de extracción del cubo por sobre el tiempo de extracción promedio de los cubos que pertenecen al cluster.

$$G_{ki} = \frac{pond_1(t)(\max_i NPrior_i - NPrior_i) + pond_2(t)(\max_i JPrior_i - JPrior_i) + pond_3(t) * tpo_i}{pond_1(t) \left(n_k * \max_i NPrior_i - \sum_{l=1}^{n_k} NPrior_l \right) + pond_2(t) \left(n_k * \max_i JPrior_i - \sum_{l=1}^{n_k} JPrior_l \right) + pond_3(t) * \sum_l tpo_l}$$

La selección de ponderadores afecta de manera importante la factibilidad del problema. Desde un punto de vista conceptual la elección de ponderadores se basa en que éstos sigan implícitamente los criterios que usa el problema lineal para dar valor a las variables. Por ejemplo, se puede inferir que al solucionar el problema original se prioriza que las variables de los períodos iniciales asociadas a cubos que se encuentran en las primeras prioridades de extracción tomarán mayor valor que las variables de estos mismos períodos iniciales pero asociadas a cubos con baja prioridad de extracción (debido a su posición física). No así en períodos finales del horizonte, donde las variables que tenían mayor prioridad de extracción seguramente tomarán valor y aquellas con menor prioridad de extracción, por haber sido ya extraídas, no toman valor. De esta forma al aglomerar variables, los ponderadores privilegian dar valor en criterios similares a los que el problema original muestra debido a las características de secuenciamiento espacial del modelo.

Los resultados obtenidos con cada uno de estos ponderadores serán discutidos en el Capítulo V de este documento.

Implementación computacional

Los procesos de agregación de columnas y cálculo de ponderadores se realizan en una misma rutina utilizando Visual Basic 6. Dicha rutina en primer lugar, y dada una distancia máxima, realiza la clasificación y agrupación de variables según el algoritmo discutido anteriormente.

A continuación la rutina realiza el cálculo de los ponderadores liberando archivos de texto con los datos a usar en la solución del modelo.

La información requerida por este programa es:

- La matriz en el formato correspondiente, después de ser procesada
- La distancia máxima permitida
- Las condiciones especiales de agregación, es decir, si se desea agrupar separadamente los subsectores, períodos o columnas este es el lugar para indicarlo.
- La fórmula de cálculo de los ponderadores

Con todo lo anterior se obtienen los archivos en el formato adecuado que usará el software GAMS para dar solución al modelo. Los archivos que se obtienen son:

- El listado de clusters o agrupaciones formadas
- El valor de los ponderadores para cada variable del problema original
- El número de variables agrupadas por cluster

IV.4 FORMALIZACIÓN DEL MODELO AGREGADO

Considerando la agregación oficial del modelo se hace necesario formularlo. Esta formulación contempla el reemplazo de las variables Z_{jm}^t por la nueva variable multiplicada por su ponderador.

Así, tal como se mencionó el Capítulo III.4 Zipkin propone la formalización del nuevo modelo de la forma

$$\begin{array}{ll}
 \text{(AP)} & \max \bar{Z} = c'^T x' \\
 & A' x' \leq b \\
 \text{s.a.} & x' \geq 0
 \end{array}$$

$$\text{Donde } A'_k = A_k g_k^T \quad c'_k = c_k g_k \quad x'_k = x_k g_k \quad k = 1, \dots, K \quad (*)$$

Para la formulación del nuevo modelo se plantea la forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 \text{(AP)} \quad & \max Z = c^T x' \\
 \text{s.a.} \quad & Ag^T x' \leq b \\
 & x' \geq 0
 \end{aligned}$$

Dado que del modelo original sólo cambia en aquellas restricciones que se relacionan con las variables antes mencionadas (Z_{jn}^l) se mostrará en el cuerpo de este informe solo un ejemplo del cambio en las ecuaciones. En el Anexo B se plantea el nuevo modelo en extensión.

Siendo l el subíndice asociado a los clusters, la restricción 23 que indica que el flujo de productos en el cruzado v , en el período t , debe ser menor que su capacidad queda de la siguiente forma:

$$\sum_{k \in K_v} \sum_{j \in J(v)} \sum_{n \in N(j)} \sum_i A_{kjn} \cdot G_{j,n,t}^l \cdot Z_{a,l}^t \leq CAP_v^t \quad \forall v, t$$

Donde los subíndices a y t de la nueva variable pueden ser obviados, según lo explicado en el Capítulo IV.1.

V SOLUCIÓN DEL PROBLEMA AGREGADO

En este Capítulo se discute la solución del problema, para luego realizar la desagregación que permite conocer el valor de las variables del problema original. El cálculo de la cota permite estimar, sin conocer la solución del problema original, el error que asociado al problema agregado.

V.1 DESCRIPCIÓN DE LAS INSTANCIAS DE PRUEBA

Con el fin de probar la capacidad del modelo construido se tomó la planificación de operaciones de El Teniente. Se consideraron los sectores que lo conforman y según lo definido en el Capítulo II de este informe, los requerimientos del modelo de agregación son los siguientes:

- Horizonte: 5 años, período comprendido entre el 2006 y el 2010
- Modelo de optimización original: Este modelo debe contener los datos asociados al estado de los sectores que conforman la mina, el modelo geológico asociado, las capacidades de extracción, incremento y decremento de los tonelajes de extracción anual para cada subsector, la capacidad de las estaciones de procesamiento de material, la cantidad de metros cuadrados a ser habilitados por sector en cada período, el precio de los productos generados y descuentos asociados al mismo, los cotos de habilitación de área para cada sector, los costos de extracción de material por sector, costo por incremento o decremento de la producción en cada período respecto al período anterior, y costos de flujo de material por período de acuerdo al sector de inicio del recorrido y las estaciones de procesamiento utilizadas.
- Información espacial de cada ubc: Coordenada X e Y, y altura.

En general el modelo de optimización original y sus instancias, dan cuenta de todos los datos necesarios para la formulación y solución del modelo agregado.

El nivel de agregación necesaria es obtenido mediante el planteamiento de los resultados esperados y se implementa a través del establecimiento de la distancia máxima entre los vectores a agrupar.

Con todo lo anterior el modelo agregado fue formulado en el lenguaje del software GAMS, y solucionado mediante su solver CPLEX, en un PC Pentium IV de 3Ghz y 3GB Ram.

V.2 DESAGREGACIÓN Y CÁLCULO DE COTA DE ERROR

V.2.1 Desagregación

Debido a la definición conveniente de los ponderadores g , la desagregación se obtiene directamente, de la siguiente forma:

$$Z_{nj}^t = \sum_{k=1}^K G_{j,n,t}^k \cdot \bar{Z}_{a,k}^t$$

Así la desagregación a ponderadores fijos expuesta por Zipkin es utilizada en cabalidad.

La desagregación se realiza directamente mediante el software GAMS, y entrega los datos en un formato con similares características al del modelo original.

V.2.2 Cálculo de la cota

La cota de Zipkin exige establecer condiciones sobre la solución óptima, sin previamente haber resuelto el problema original (de lo contrario dicha cota carece de sentido).

En el caso minero es posible construir sin dificultad esta condición, pues se encuentra dada por la primera restricción del modelo, dada por:

$$\sum_t Z_{jn}^t \leq 1 \quad \forall j, n$$

Donde $\sigma' = \{S'_k : k'=1,2,\dots,K'\}$ una partición de las variables originales tal que se agrupan, para cada par ordenado j,n las variables correspondientes a un período. Así e resuelve entonces esta dificultad eligiendo una partición $\sigma' = \{S'_k : k'=1,2,\dots,K'\}$ tal que $K'=N \times J$ y $d_j=1$ y $P_k=1$

Por otro lado se sabe que si la solución dual del problema agregado es factible en el problema dual no agregado entonces la cota de Zipkin es cero. Es decir, no se perdió precisión en la solución óptima al hacer la agregación.

Notemos, por otro lado, que la expresión que calcula la cota de Zipkin es válida aún en los casos que el problema no tiene exclusivamente restricciones del tipo “menor igual”, sino que también restricciones de igualdad o “mayor o igual” lo que ocurre en nuestro caso.

Por último cabe mencionar que según Zipkin, las variables que no se agreguen, pueden eliminarse del cálculo de la cota.

Según lo anterior la cota se calcula de la forma establecida en el Capítulo III.4.

$$\epsilon_a = \sum_{k=1}^{K'} \left(\max_{j \in S_k} (c_j - \bar{u} A_{*j})^+ \right)$$

El cálculo de la cota fue realizado en una rutina implementada en Visual Basic 6, utilizando como información los reportes de las variables duales y los archivos MPS y MAP entregados por GAMS.

VI OBTENCIÓN ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS

VI.1 CONSIDERACIONES GENERALES

VI.1.1 Criterios de asignación de importancias

Se realizaron variadas agregaciones de columnas probando tres criterios de asignación de importancia a los componentes de las columnas de la matriz A según lo explicado en el Capítulo IV.2. De estos tres criterios, sólo uno dio como resultado agregaciones factibles.

Las importancias asignadas para el caso factible se muestran en la siguiente tabla, ordenada según el nombre de la restricción a la que corresponde cada fila de la matriz A.

Nombre Restricción	Información que aporta el coeficiente	Importancia
Altura	altura del ubc o cubo	2
set_piso	0 y 1	3
calc_ext	0 y 1	3
exp_up	0 y 1	3
exp_fact	0 y 1	3
exp_fac	0 y 1	3
exp_bloq	0 y 1	3
Obliga	0 y 1	3
Secuencia	0 y 1	3
tpo_ext	tiempo de extracción del cubo	2
area_min	área de influencia de la columna	3
area_max	área de influencia de la columna	3
crz_cap	toneladas de producto que aporta el cubo	2
crz_out	toneladas de producto que aporta el cubo	2
altura_acum*	altura de la posición del cubo	1
X*	coordenada X en el plano del cubo	1
Y*	coordenada Y en el plano del cubo	1

*Corresponde a los datos espaciales agregados a cada columna

Tabla 2: Asignación de importancia utilizada

La tabla anterior indica, implícitamente, que se le da mayor importancia a la información espacial, en segundo lugar a la información de tonelaje, tiempo de extracción y altura de bloque, y en último lugar todas aquellas restricciones donde la información propiciada es del orden 10^0 .

VI.1.2 Ponderadores g

Adicionalmente, se testearon los tres ponderadores g planteados en el Capítulo IV.3.3. De ellos sólo el tercer ponderador derivó a resultados factibles de la agregación. Las infactibilidades observadas al desagregar con los restantes dos ponderadores se encuentran íntimamente relacionadas con la violación de las restricciones de extracción secuencial.

VI.2 INSTANCIAS

Los resultados de la técnica de agregación haciendo uso de análisis de conglomerados se validan a continuación de forma empírica ocupando dos instancias. Para cada una de estas instancias se muestran conglomeraciones hechas con tres medidas máximas de disimilitud, según lo planteado en el punto IV.3.1

	ϵ
distancia 1	0.003
distancia 2	0.001
distancia 3	0.0005

Tabla 3: Distancias máximas utilizadas

Cabe destacar que además de las dos instancias aquí descritas se realizaron corridas para una tercera instancia, ésta comprendía al subsector más pequeño de la mina El Teniente. Se consideró que esta instancia era muy pequeña pues respondía de la misma forma para todas las distancias utilizadas.

VI.2.1 Instancia 1: Subsector 6

La instancia 1 (de prueba) contempla al subsector 6 de la mina El Teniente, el modelo original para este subsector tiene las siguientes características:

N° de Columnas (Variables) Relevantes	Tiempo de Corrida [s]
9785	66.04

Tabla 4: Características generales Instancia 1

Los resultados de esta segunda instancia de validación se muestran a continuación:

- Al establecer distancia 1 0.003 en el algoritmo de agregación, para el segundo problema, se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	953
Reducción porcentual de variables	91.26%
Tiempo de resolución [s]	7.124
Reducción porcentual de tiempo de resolución	89.21%
Error real de la función objetivo	4.90%
Error de la cota de Zipkin	5.70%

Tabla 5: Resultados distancia 1 e instancia 1

- Al establecer distancia máxima de 0.001 en el algoritmo de agregación, para el segundo problema, se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	1012
Reducción porcentual de variables	89.66%
Tiempo de resolución [s]	7.587
Reducción porcentual de tiempo de resolución	88.51%
Error real de la función objetivo	3.45%
Error de la cota de Zipkin	3.62%

Tabla 6: Resultados distancia 2 con instancia 1

- Al establecer distancia máxima de 0.0005 en el algoritmo de agregación, para el segundo problema, se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	1234
Reducción porcentual de variables	87.39%
Tiempo de resolución [s]	8.965
Reducción porcentual de tiempo de reducción	86.43%
Error real de la función objetivo	2.98%
Error de la cota de Zipkin	3.80%

Tabla 7: Resultados distancia 3 instancia 1

VI.2.2 Instancia 2: Todos los Subsectores

Los datos del problema original con los cuales se debe comparar los resultados obtenidos son los siguientes:

Nº de Columnas (Variables) Relevantes	Tiempo de Corrida [s]
30040	211.375

Tabla 8: Características generales instancia 2

Con la instancia descrita anteriormente, que agrupa a 11 subsectores de la mina, los resultados obtenidos son los siguientes.

De las agrupaciones factibles, los resultados obtenidos son los siguientes.

- Al establecer distancia máxima de 0.001 en el algoritmo de agregación se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	3015
Reducción porcentual de variables	89.96%
Tiempo de resolución [s]	27.484
Reducción porcentual de tiempo de resolución	87.00%
Error real de la función objetivo	4.04%
Error de la cota de Zipkin	4.13%

Tabla 9: Resultados distancia 1 instancia 2

- Al establecer distancia máxima de 0.003 en el algoritmo de agregación se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	3507
Reducción porcentual de variables	88.33%
Tiempo de resolución [s]	27.031
Reducción porcentual de tiempo de resolución	87.21%
Error real de la función objetivo	3.11%
Error de la cota de Zipkin	3.77%

Tabla 10: Resultados distancia 2 instancia 2

- Al establecer distancia máxima de 0.0005 en el algoritmo de agregación se obtuvieron los siguientes resultados:

Número de Variables	4049
Reducción porcentual de variables	86.52%
Tiempo de resolución [s]	26.484
Reducción porcentual de tiempo de reducción	87.47%
Error real de la función objetivo	2.63%
Error de la cota de Zipkin	3.10%

Tabla 11: Resultados distancia 3 instancia 2

VI.3 ANÁLISIS

Se puede observar que para todas las agregaciones realizadas el problema disminuye su cantidad de variables y/o columnas en alrededor de un 88%. Esto trae consigo reducciones considerables de los tiempos de resolución del modelo siendo el máximo ahorro encontrado de un 89,21% (Tabla 5).

El deterioro de la función objetivo se puede ver mediante dos indicadores: el error real de la función objetivo y la cota de Zipkin calculada. En primer lugar se puede afirmar que el error asociado a la cota es similar al real, esto implica que el cálculo de la cota de Zipkin agrega

valor, pues da una estimación del error medianamente certera, para la cual no se necesita resolver el problema original. En segundo lugar se puede ver que los errores bordean el 3% para los mejores casos.

Es preciso recalcar que una pérdida de precisión del 3% no es notoriamente significativa para los planificadores de la empresa, puesto que CODELCO incurre en errores del orden del 8-10% al hacer aproximaciones en la planificación cuando este tipo de modelos no son usados. Si bien es cierto cifras del 3% de las utilidades pueden significar muchos millones de pesos, este tipo de cotas de error son frecuentes en el proceso de planificación minera.

De los resultados se puede observar además, que existe congruencia entre los datos obtenidos de ambas instancias, esto quiere decir que las agregaciones realizadas cumplen el objetivo de disminuir el tamaño del problema de la mina de extracción de El Teniente, para el cuál fue implementada la técnica. Se puede afirmar además que el error calculado disminuye al aumentar el tamaño de la instancia. Así, al aumentar el tamaño de la instancia y por tanto los tiempos de resolución disminuye el error asociado.

La distancia máxima definida es un dato determinante en el error obtenido en la función objetivo para cada agregación. De la Tabla 11, se observa que la distancia 3 es la más beneficiosa en términos de reducción de este error (2,63%) y el costo de implementarla en términos de aumento de tiempos de corrida respecto a la distancia 2 es menor a un segundo (27.031-26.484), lo que la hace muy atractiva, ya que hay un aumento de los beneficios no proporcional al aumento de los costos. Cabe destacar que el modelo fue testeado con distancias máximas más pequeñas, pero se observó que una mayor disminución en este valor perjudica los tiempos de resolución más que proporcionalmente, por lo que las distancias menores fueron eliminadas del análisis.

En cuanto a los recursos invertidos para correr el modelo detallado: este modelo demora más de 3 horas en procesar cada vez que es corrido para la mina El Teniente a 25 años plazo, y si se incluyeran además todas las otras divisiones y la estocasticidad de las leyes y precios este demoraría o incluso semanas en correr, lo que es inaceptable en términos prácticos. Con el modelo agregado, la disminución de tiempo se reduce de forma notoria y haciendo esfuerzos de precisión aceptables (menores al 5%) se podría lograr reducir el tiempo a horas, donde 3 a 5 horas es un tiempo aceptable para un modelo de estas dimensiones.

En cuanto a los recursos investidos en la agregación y búsqueda de los ponderadores: la búsqueda de agregaciones factibles implica procesar el algoritmo de aglomeración muchísimas veces (en esta experiencia alrededor de 80 veces). Este algoritmo demora alrededor de 3 minutos en procesar y realizar la aglomeración, lo que significa que demora alrededor de 8 horas en encontrar ponderadores y aglomeraciones adecuadas. Una vez encontrado el modelo, éste puede ser corrido variadas veces con distintos valores de sus parámetros (instancias), es decir no es necesario encontrar distintos ponderadores o clusters cada vez que se corre el modelo.

El trade off existente, entre los recursos invertidos en procesar el modelo original y los recursos invertidos en la obtención de ponderadores, se inclina a favor de la agregación del problema, pues ésta reduce los tiempos, y a pesar de que se invierte una cantidad considerable de horas en el proceso de aglomeración, éste otorga la posibilidad de obtener tiempos de procesamiento menores, y correr el modelo reiteradas veces.

Al realizar un análisis más profundo de errores detallados por subsector en términos de cantidades extraídas se pueden detectar diferencias mayores que bordean el 9%, pero estas son esporádicas, en general el error total, asociado a la función objetivo, es menor que el error detallado.

VI.3.1 Observaciones

Las restricciones violadas por los dos ponderadores iniciales (ponderador 1 y ponderador 2 mostrados en el punto IV.3.3 de este informe) son las asociadas a la extracción hacia arriba de las columnas, los tiempos de extracción y la regularidad de alturas.

VII CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FUTURAS

Se demostró que es factible agrupar variables con metodología de análisis de conglomerados a partir del problema original de planificación minera. Con esta metodología se obtuvieron tiempos de resolución menores al 20% del tiempo de resolución del problema original, lo que permite agilizar el proceso de toma de decisiones. Los errores globales obtenidos, medidos mediante el valor de la función objetivo, bordean el 3%, lo que se considera una precisión aceptable en términos de los resultados esperados de esta investigación.

Se logró la formulación de un modelo de decisiones a nivel táctico de menor tamaño para la planificación de extracción a área fija de una mina subterránea, que dependiendo del adecuado cálculo de ponderadores cumple con las restricciones del modelo detallado.

La teoría que hay detrás de la agregación a posteriori tiene varias ventajas en su aplicación, la primera de ellas es que si el problema agregado tiene solución factible, esto asegura la factibilidad al desagregar. La segunda ventaja visible es la otorgada por el planteamiento formal de la cota de Zipkin, ya que con ella es posible establecer de manera medianamente certera cuál es la cota máxima de error sin necesidad de resolver el problema original

Para obtener mejores resultados en la agregación es necesario definir eficientemente los criterios implícitos que debe tener cada decisión a tomar por el planificador en el proceso de agregación. Estos criterios deben estar alineados con los criterios de decisión del problema original y hacerse cargo de sus restricciones más inhabilitantes. En el caso de la extracción de minas subterráneas a área fija, la información relevante a considerar está dada por la información de posición y secuenciamiento espacial y temporal de las unidades básicas de cubicación (ubc).

Para el caso en estudio, los grados de libertad del planificador se presentan en las distintas etapas de la agregación: En primer lugar, para obtener agrupaciones favorables se debe determinar adecuadamente qué información es relevante al agregar columnas de la matriz A. En segundo lugar es indispensable calcular ponderadores g que consideren las características espaciales y secuenciales del problema de manera de que su cálculo tenga menores posibilidades de perjudicar la factibilidad del modelo agregado.

Cabe destacar que, de las agrupaciones realizadas (alrededor de 80), no más de un 10% fueron encontradas factibles. Esto se debe a que, con frecuencia, los ponderadores calculados no responden a las necesidades de priorización espacial del problema. Así, el inconveniente más trascendental de la agrupación a posteriori, en el problema de extracción minera, es que el cálculo de ponderadores g para compactar la matriz atenta muy fácilmente contra la factibilidad del modelo, afectando principalmente en las restricciones que tienen que ver con el secuenciamiento espacial y temporal de la extracción.

Por otro lado, la información disponible con anterioridad a la solución del modelo, no permite establecer una nemotecnia o manera sistemática cien por ciento certera para conseguir ponderadores que aseguren la factibilidad posterior del modelo agregado y revertir el problema general de ésta técnica.

En este sentido, los beneficios de la agregación a posteriori en planificación minera serán claros sólo cuando, en la evaluación del trade off entre los recursos invertidos en la búsqueda de ponderadores factibles y los recursos invertidos en solucionar el problema detallado, sea favorable a la búsqueda de ponderadores.

Este tipo de modelos de agregación son un poco más complicados de aplicar para el problema minero real, donde las variables de extracción son binarias. Además según lo establecido por Hallefjord y Storoy [3] en programación lineal entera, la desagregación a ponderadores fijos no siempre resulta en una solución factible para el problema original y la cota de Zipkin pierde sentido.

En la implementación no se evaluó, como solución al problema de factibilidad relajar las restricciones problemáticas penalizándolas en la función objetivo, esto mejora la solución obtenida, pero aún así la factibilidad del problema original no es asegurada. Queda planteado realizar este análisis en trabajos futuros en el tema y determinar su impacto real en el plan de operaciones.

En otro tipo de modelos un poco más simples, donde las restricciones de secuenciamiento no endurezcan el problema tan notoriamente, la agregación a posteriori puede ser una herramienta de gran utilidad. Queda abierta la inquietud de incorporar este tipo de técnicas en la agregación para el caso de la minería a rajo abierto, donde los problemas que se presentaron en este caso podrían ser eliminados con más facilidad por ser esta una técnica más estudiada en la literatura en general.

El modelo propuesto, tal como fue enunciado por Rogers, Plante, Wong y Evans [8], responde a las necesidades particulares del proceso de agregación de variables en la extracción de minas subterráneas a área fija, por lo tanto su generalización directa no es posible.

Para realizar una validación más detallada del modelo, sería recomendable realizar la implementación de este tipo de técnicas en las instancias a 25 años plazo, donde las distorsiones y la variación de los precios pueden cambiar los resultados de manera considerable.

Por otra parte, para evaluar la factibilidad de agregar modelos de operación de planificación minera usando este tipo de técnicas debe analizarse la cantidad de variables y restricciones de extracción que tiene el modelo, pues si la cantidad de variables de extracción es despreciable respecto de la cantidad de variables de flujo, esta herramienta no agrega valor.

La implementación de este modelo en otras divisiones de CODELCO o en otras minas de extracción de mineral, dependerá directamente del parecido que tenga el modelo de extracción de la mina con el modelo original estudiado, por tanto, la flexibilidad de la técnica implementada es limitada. Los pasos futuros apuntan a la ampliación de esta herramienta a minas de similares características.

En rubros distintos a la minería, donde existan problemas de programación lineal de gran tamaño esta técnica podría ser aplicada, pero dependerán de las características particulares de las restricciones asociadas al problema, las dificultades que se puedan presentar.

Con los resultados obtenidos de este trabajo surgen nuevas inquietudes de conocimiento dentro de la investigación operativa en el ámbito de la industria minera, como por ejemplo implementar las agrupaciones hechas con metodologías a priori en la agregación a posteriori e implementar la agregación a posteriori sobre el modelo agregado a priori, con el objetivo de reducir de manera más que significativa los modelos utilizados.

VIII BIBLIOGRAFÍA

[1] CENTRO DE GESTIÓN DE OPERACIONES, "Proyecto FONDEF: Metodología para evaluar inversiones en proyectos mineros de Cobre de largo plazo". 2003

[2] CODELO CHILE S.A. 2006. Página web oficial www.codelco.cl;

- [3] HALLEFJORD A., STOROY S., 1990. "Aggregation and disaggregation in integer programming problems" Op. Res 38
- [4] HARTIGAN J. "Clustering Algorithms" Wiley, New York. 686 p-
- [5] HUNEUS F. 2004. "Generación de escenarios de Planificación Minera". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil en Minas. Santiago, Chile, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Minas,.
- [6] IBAÑEZ, J. 2006. "Desarrollo de un modelo compacto de producción minera en CODLECO" Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial. Santiago, Chile, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Industrial.
- [7] ORTIZ C., VARAS S. y VERA J. 1995. "Apuntes de Investigación Operativa". Santiago , Chile. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Industrial,
- [8] ROGERS D. PLANTE R. WONG R. EVANS J. 1991. "Aggregation and disaggregation techniques and methodology in optimization". Op Res. 39. pp 553.
- [9] SÁEZ G, 1991. "Técnicas de clasificación para agregación de problemas de clasificación forestal". Tesis para optar al título de Magíster en Gestión de Operaciones. Santiago, Chile, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Industrial.
- [10] SANTIBÁÑEZ, P. 2000. "Investigación para la evaluación y optimización de planes mineros de largo plazo". Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Industrial. Santiago, Chile, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Industrial.
- [11] WEINTRAUB A., SÁEZ G. y YADLIN M. 1997. "Aggregation procedures in forest management planning using cluster analysis". Forest Science 43(2)
- [12] ZIPKIN. P 1980. "Bounds on the effect of aggregating variables in linear programs" . Op.Res. 28: 1299-1309