

# Índice

1.- Introducción.....	3
2.- Objetivos.....	5
2.1.- Objetivos generales.....	5
2.2.- Objetivos específicos.....	5
3.- Alcances.....	6
4.- Análisis de antecedentes bibliográficos.....	7
4.1.- Conceptos básicos en geoestadística.....	7
4.1.1.- Variable regionalizada.....	7
4.1.2.- Función aleatoria.....	7
4.1.3.- Estimación local (Kriging).....	10
4.1.4.- Simulación multigaussiana.....	12
5.- Metodología de trabajo.....	15
6.- Primer caso de estudio: leyes de cobre soluble.....	18
6.1.- Estudio exploratorio.....	18
6.1.1.-Estadísticas Básicas de los Datos Condicionantes.....	18
6.1.2.-Desagrupamiento de los datos.....	19
6.1.3.- Análisis de derivas.....	20
6.2.-Anamorfosis Gaussiana de los datos.....	21
6.3 Validación de la distribución bigaussiana.....	22
6.3.1.-Nube de correlación diferida.....	22
6.3.2.-Comparación del variograma con el madograma.....	23
6.4.-Estudio variográfico de los datos Gaussianos.....	25
6.4.1.-Modelamiento.....	26
6.5.-Simulaciones condicionales.....	27
6.6.-Validación.....	36
7.- Segundo caso de estudio: leyes de cobre total.....	39
7.1.- Estudio exploratorio.....	39
7.1.1.-Estadísticas Básicas de los Datos Condicionantes.....	39
7.1.2.-Desagrupamiento de los datos.....	40
7.1.3.- Análisis de derivas.....	41
7.2.-Anamorfosis Gaussiana de los datos.....	42
7.3 Validación de la distribución bigaussiana.....	43
7.3.1.-Nube de correlación diferida.....	43
7.3.2.-Comparación del variograma v/s madograma.....	44
7.4.-Estudio variográfico de los datos gaussianos.....	45
7.5.-Simulaciones condicionales.....	46
7.6.-Validación.....	56
8.-Conclusiones y Recomendaciones.....	59
9.- Bibliografía.....	62
Anexos.....	63
Anexo A: Mapas e histogramas de simulaciones por bandas rotantes 1º caso de estudio.....	64
Anexo B: Curvas tonelaje-ley para las medias de las simulaciones 1º caso de estudio.....	69

Anexo C: Histogramas de la media de las simulaciones, 1° caso de estudio.....	71
Anexo D: Diferencias entre los distintos métodos, 1° caso de estudio. ....	72
Anexo E: Histogramas y curvas tonelaje-ley para todas las realizaciones 1° caso de estudio.....	74
Anexo F: Histogramas y curvas tonelaje-ley para la media de las simulaciones, 2° caso de estudio.....	77
Anexo G: Diferencias entre los distintos métodos, 2° caso de estudio. ....	79
Anexo H: Histogramas y curvas tonelaje-ley para todas las realizaciones 2° caso de estudio.....	82
Anexo I: Resultados de validación por Jack-knife, 2° caso de estudio. ....	87
Anexo J: justificación del uso de Kriging ordinario para condicionar a los datos .....	92

## 1.- Introducción.

En los proyectos mineros es de vital importancia la precisión con que se estiman los recursos, ya que de esto depende la aprobación de fondos necesarios para realizar el proyecto por parte de los inversionistas. Al disminuir la incertidumbre de la estimación de los atributos mineros disminuyen los riesgos en la toma de decisiones de estos. También es importante que la estimación de los recursos sea precisa ya que influye en la planificación minera y por lo tanto en el resultado final del proyecto.

En la mayoría de las faenas mineras se utiliza para la estimación de recursos el método llamado “Kriging”, el cual entrega como resultado solo un valor para la variable estimada (ley de un mineral) además de una varianza de estimación, lo cual no es suficiente información para cuantificar la incertidumbre en las leyes. Para solucionar esto, se recomienda el uso de las simulaciones geoestadísticas, ya que estas entregan mayor cantidad de información a través de la generación de una serie de escenarios plausibles. A diferencia de la estimación por Kriging, la simulación entrega medidas de incertidumbre, por ejemplo las probabilidades de superar ciertas leyes de cortes.

En la actualidad las simulaciones son condicionadas a los datos por medio del método de Kriging simple, el cual se basa generalmente en una hipótesis de estacionaridad estricta (ley media constante y conocida), lo que en la práctica puede ser cuestionable.

Además, al usar Kriging simple, el resultado es el más optimista ya que se sabe que la varianza de Kriging simple obtenida es siempre menor o igual que

la entregada por otro método de condicionamiento, por ejemplo condicionar las simulaciones por Kriging ordinario (ley media desconocida).

Por lo tanto, se sugiere el uso del Kriging ordinario en el condicionamiento de las simulaciones a los datos, ya que permitiría incorporar la incertidumbre en la ley media en cada vecindad de Kriging. Sin embargo, en la actualidad, este método de condicionamiento por Kriging ordinario no ha sido validado.

Este trabajo, que forma parte del proyecto Fondecyt N° 1061103 **“Cuantificación de la incertidumbre en atributos geológicos, mineros y metalúrgicos: nuevos modelos geoestadísticos y aspectos de implementación”**, se basa en la aplicación y validación de métodos de simulación, considerando incertidumbre en la media del atributo minero (ley mineral) y en la comparación de este enfoque con los modelos actualmente utilizados.

## **2.- Objetivos**

### **2.1.- Objetivos generales.**

El objetivo general de este trabajo de título es analizar y aplicar métodos de simulación geoestadística para atributos mineros (leyes), considerando incertidumbre en el valor promedio del atributo y compararlos con los métodos utilizados en la actualidad (considerando un valor promedio conocido).

### **2.2.- Objetivos específicos.**

- Justificar el uso de Kriging ordinario (de media desconocida) para condicionar las simulaciones, en desmedro del uso del Kriging simple.
- Implementar, probar y comparar la eficiencia del método de simulación con Kriging ordinario, con los métodos actualmente utilizados basados en Kriging simple (de media conocida).
- Diseñar una metodología para incorporar la incertidumbre en el valor promedio de los atributos a simular.
- Examinar el efecto que tiene en los resultados el tamaño de la vecindad de Kriging.
- Comparar los algoritmos de simulación utilizados (con Kriging simple y Kriging ordinario) y determinar la sensibilidad de estos a las hipótesis planteadas.

### **3.- Alcances.**

La principal motivación de este estudio se basa en la incertidumbre en la ley media, la cual en la mayoría de los casos no se comporta en forma constante a escala global, aunque sí a escala local. Esto hace que condicionar la simulación por el método de Kriging ordinario sea una opción atractiva, incorporando las características locales del yacimiento (zonas de altas y bajas leyes) que el Kriging simple no considera.

Actualmente se utiliza para la simulación el método de Kriging simple, el cual considera una hipótesis de estacionaridad estricta y conocimiento perfecto del valor medio de la ley, que suele calcularse como el promedio global de todos los datos disponibles. Por lo tanto este método no refleja lo que ocurre a escala local, lo que puede afectar por ejemplo la estimación para la planificación de corto plazo.

Se aplicará la simulación con Kriging simple y ordinario a datos que pertenecen a yacimientos cupríferos chilenos. La primera base de datos corresponde a leyes de cobre soluble, las cuales presentan en su mayoría valores bajo el 1%, y la segunda base de datos corresponde a leyes de cobre total, donde se aprecia una tendencia espacial y una buena continuidad en las leyes.

## 4.- Análisis de antecedentes bibliográficos.

### 4.1.- Conceptos básicos en geoestadística.

#### 4.1.1.- Variable regionalizada.

Consiste en una función numérica que represente un atributo en cada lugar del espacio, denotada  $z(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{x}$  es la posición en el espacio. Muchas veces es difícil determinarla completamente y de forma exacta, debido a su variabilidad en el espacio. La ley de mineral es un ejemplo de variable regionalizada.

#### 4.1.2.- Función aleatoria.

Se interpreta cada valor de la variable regionalizada en estudio  $z(\mathbf{x})$  como una realización de una variable aleatoria  $Z(\mathbf{x})$ . El conjunto de variables aleatorias  $\{Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  constituye una función aleatoria y se caracteriza por una **distribución espacial**:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n \in \mathbb{R}, \\ F(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \text{Prob}(Z(\mathbf{x}_1) < \mathbf{z}_1, \dots, Z(\mathbf{x}_n) < \mathbf{z}_n).$$

Como casos particulares, tenemos las distribuciones univariable (para  $n=1$ ) y bivariable (para  $n=2$ ).

Existen ciertas hipótesis simplificadoras que son generalmente utilizadas para determinar la distribución espacial y son las siguientes:

- **Estacionaridad:** la distribución espacial es invariante por traslación en el espacio, lo que quiere decir que no existen derivas (tendencias sistemáticas).
- **Ergodicidad:** se puede aproximar las esperanzas matemáticas (promedio sobre las realizaciones de la función aleatoria) por un promedio en el espacio.

La estacionaridad es juiciosa cuando existe una homogeneidad de las propiedades de la variable regionalizada en el espacio. A menudo es razonable suponer que se cumple a escala local (de la vecindad de Kriging), por lo que se habla de una estacionaridad local o casi-estacionaridad.

Producto de la escasez de datos experimentales resulta imposible poder inferir la distribución espacial completa. Por consiguiente, a menudo sólo se considera los parámetros más relevantes o “primeros momentos”, los cuales son:

#### **4.1.2.1.- Momentos de primer orden.**

**Esperanza** (momento de primer orden): corresponde al valor esperado o esperanza matemática de la variable aleatoria  $Z(\mathbf{x})$ , denotada  $\mathbf{m}$  independiente de  $\mathbf{x}$ , producto de la hipótesis de estacionaridad. Se puede definir como la suma de la probabilidad de cada suceso multiplicado por su valor.

#### **4.1.2.2.- Momentos de segundo orden.**

**Varianza:** La varianza es una medida de la dispersión de la variable aleatoria  $Z(\mathbf{x})$  en torno a su valor esperado. También se utiliza la desviación estándar, que corresponde a la raíz cuadrada de la varianza.



**Covarianza:** corresponde a una función que mide la relación entre dos variables aleatorias en función de sus posiciones en el espacio, o más simplemente (bajo la hipótesis de estacionariedad) del vector de separación:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}, \text{cov}\{Z(\mathbf{x}), Z(\mathbf{x} + \mathbf{h})\} = C(\mathbf{h})$$

**Variograma:** Corresponde a una función que mide la mitad de la varianza de la diferencia entre dos variables en función del vector de separación  $\mathbf{h}$ .

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]$$

Si consideramos las hipótesis de estacionariedad se llega a la siguiente relación entre el variograma y la covarianza:

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})$$

Donde  $C(\mathbf{0})$  es igual a la varianza de la función aleatoria.

Los parámetros más importantes son la covarianza y el variograma, pues tiene que ver con la relación existente entre dos valores que se encuentran a cierta distancia de separación. La covarianza indica qué tan semejantes son los valores entre dos sitios, mientras que el variograma representa lo contrario.

### 4.1.3.- Estimación local (Kriging).

Este método permite estimar la variable regionalizada en un lugar no muestreado, a partir de los datos que se encuentren dentro de una vecindad. La definición de esta vecindad (radio, orientación, número de datos a buscar) toma en cuenta la continuidad espacial de la variable regionalizada y el diseño de la malla de muestreo, lo que se realiza en la etapa del estudio exploratorio y variográfico.

El estimador es una combinación lineal ponderada de los datos y, por lo tanto, el problema del Kriging se reduce a calcular los valores de los ponderadores que permitan obtener una estimación insesgada y con la mejor precisión posible. La construcción del Kriging se realiza a partir de las siguientes restricciones:

- **Restricción de linealidad:** El estimador es una combinación lineal ponderada de los datos ubicados en la vecindad.
- **Restricción de insesgo:** el valor esperado del error cometido debe ser cero.
- **Restricción de optimización:** el objetivo es minimizar la varianza del error cometido en la estimación.

Existen diferentes tipos de Kriging, los cuales se definen según las hipótesis usadas por el usuario, por ejemplo kriging simple, ordinario, universal, etc. Para nuestro caso de estudio sólo trabajaremos con kriging simple y ordinario, que se utilizarán para condicionar las simulaciones.

#### 4.1.3.1-. Kriging simple.

Este método de estimación consiste en considerar que la ley media es conocida. Esto implica que el valor de esta media recibe un ponderador complementario a la ponderación acumulada de los datos utilizadas para la estimación, con lo cual el valor estimado será muy cercano al valor de la media si existe poca cantidad de datos. Esto genera un acercamiento a la ley media en los bordes del yacimiento y en las zonas donde escasean los datos.

#### 4.1.3.2-. Kriging ordinario.

##### *Hipótesis.*

- Se desconoce el valor promedio de la variable regionalizada.
- Se conoce el variograma  $\gamma(\mathbf{h})$ , el cual puede o no tener meseta.

El considerar el valor de la media como desconocido permite generalizar el estimador a situaciones donde esta media no es constante a escala global: la media puede variar de una región a otra del espacio, siempre que sea aproximadamente constante en cada vecindad de Kriging.

#### 4.1.3.3-. Propiedades del Kriging.

- **Interpolación exacta:** estimar un sitio con dato devuelve el valor medido en este sitio.
- **Suavizamiento:** la dispersión de los valores estimados es menor que la dispersión de los valores verdaderos. Esto implica que se tiende a

subestimar las zonas de altas leyes y sobre estimar las zonas de bajas leyes.

- **Aditividad:** el Kriging del valor promedio de un sector es el promedio de las estimaciones puntuales en este sector.
- **Insesgo:** la media de los errores cometidos en una región de gran tamaño se acerca a cero.
- **Sesgo condicional:** en las zonas cuya estimación supera una ley de corte (considerando como mineral), la media de los errores puede diferir de cero. Para evitar este sesgo, se aconseja tomar muchos datos (varias decenas) en la vecindad de Kriging.

El Kriging entrega una medida elemental de la precisión de la estimación (varianza de Kriging), la que depende sólo de la configuración geométrica de los datos y su continuidad espacial, no considerando el valor mismo de los datos. Esto provoca que la varianza de Kriging no refleje la mayor dispersión que usualmente ocurre en las zonas de altas leyes (efecto proporcional).

Por esto se utiliza el método de simulación con el fin de corregir estas deficiencias a la hora de modelar la variable regionalizada.

Para más antecedentes acerca de los métodos de estimación, se recomienda acudir a la bibliografía especializada (Chilés and Delfines, 1999; Goovaerts, 1997).

#### **4.1.4.- Simulación multigaussiana.**

El principio de la simulación consiste en construir realizaciones que reproduzcan la variabilidad real de la variable en estudio, esto es reproducir el

histograma, variograma, etc.), en donde cada realización representa un escenario posible. Además se impone la reproducción de los valores de los datos en los sitios de muestreo (simulación condicional). Esta técnica se usa básicamente en análisis de riesgos, para estimar recursos recuperables (promediando los escenarios), medición de incertidumbre y análisis de selectividad frente a un cambio de soporte.

La simulación se basa en la interpretación de la variable regionalizada como una realización de una función aleatoria. Para construir otras realizaciones de esta función aleatoria es necesario conocer su distribución espacial completa.

El modelo multigaussiano considera que la función aleatoria tiene una distribución multigaussiana (o sea, toda combinación lineal ponderada sigue una distribución Gaussiana). Esto tiene bastantes ventajas, ya que es un modelo muy fácil de aplicar y sólo necesita transformar la variable original a una variable Gaussiana y caracterizar la media y el variograma de la variable Gaussiana.

A continuación se presentan los pasos a seguir para realizar una simulación multigaussiana:

- Transformación de los datos (leyes) a valores Gaussianos.
- Verificación del carácter bigaussiano; análisis variográfico de los datos Gaussianos.
- Simulación de la función aleatoria Gaussiana.
  - Elección de un algoritmo de simulación.
  - Construcción de varias realizaciones.
  - Condicionamiento a los datos Gaussianos disponibles
- Transformación Gaussiana inversa, para volver a la variable original (ley).

Para nuestro caso, se utilizará los siguientes algoritmos de simulación:

### **1. Método de bandas rotantes.**

Este algoritmo lleva a cabo la simulación en espacios multidimensionales (en  $R^3$ ), usando simulaciones unidimensionales y “esparciéndolas” al espacio 3D (Lantuéjoul, 2002). Este algoritmo produce simulaciones no condicionales, por lo cual requiere de una etapa adicional (basada en un Kriging) para convertirlas en simulaciones condicionales.

### **2. Método secuencial.**

Este algoritmo consiste en simular el valor en un sitio a partir de su distribución condicional a los datos existentes y valores ya simulados (Deutsch and Journel, 1998). Esta distribución depende del valor estimado por el estimador (Kriging) y de la varianza de este estimador (varianza de Kriging). El algoritmo produce directamente simulaciones condicionales.

En la actualidad ambos algoritmos recurren a un Kriging simple (de media conocida) para asegurar el condicionamiento de las realizaciones a los datos, siendo la razón que los datos Gaussianos tienen una media igual a 0.

Recientemente (Emery, 2007), se ha propuesto el uso de Kriging Ordinario en lugar de Kriging Simple. Esto se puede justificar en un modelo donde la media de los datos Gaussianos se convierte en una variable aleatoria (reflejando así una incertidumbre en esta media) cuya dispersión a priori es muy grande. En estas circunstancias, el Kriging simple coincide con el Kriging ordinario (los ponderadores de Kriging simple de los datos sumen 1, por lo cual la media no recibe ponderación y puede ser omitida) (ver Anexo J).

## 5.- Metodología de trabajo.

Para las dos bases de datos entregadas, la metodología propuesta para realizar el estudio consta en primera instancia de un estudio exploratorio de los datos, para lo cual se construyen los histogramas y mapas de ubicación de los datos. Un segundo paso consta en eliminar los datos duplicados o aberrantes (datos que están más de una vez considerados en la base de datos y datos que poseen un valor no acorde a la realidad del resto de los datos o mal definidos). Otra etapa importante en el estudio exploratorio es la verificación de tendencias de la variable estudiada, por esto se realiza gráficos de derivas para el atributo.

Para realizar las simulaciones multigaussianas condicionales, se debe practicar una transformación Gaussiana utilizando el programa *NSCORE* de *GSLIB* (Deutsch y Journel, 1998). Luego debemos validar la distribución bigaussiana, para lo cual se construyen las nubes de correlación diferidas y se compara la relación entre el variograma v/s madograma. Posteriormente se realiza el análisis variográfico de los datos Gaussianos, luego al cumplir las hipótesis de validación, podemos continuar con la siguiente etapa que corresponde a las simulaciones condicionales.

Para realizar las simulaciones Gaussianas condicionales, tanto para el algoritmo secuencial como para el algoritmo de bandas rotantes, se utilizarán programas desarrollados en MATLAB. Para cada caso se realizarán simulaciones de prueba, con la finalidad de usar los parámetros más adecuados al estudio (número de nodos previamente simulados para el caso del algoritmo secuencial, número de datos por octante, radio de búsqueda, etc), con esto se obtendrá las simulaciones finales para los distintos tipos de condicionamientos.

Luego se analizarán los resultados, considerando tanto la influencia del tipo de condicionamiento, las características de la vecindad de Kriging y el algoritmo de simulación utilizado. Para esto se comparará las medias de las realizaciones,

histograma de la media de las realizaciones y las curvas tonelaje - ley para todas las realizaciones.

Por último, validaremos los modelos de incertidumbre mediante un ejercicio de “Jackknife”. Para esto se dividirá el dominio donde se encuentran ubicados los sondeos en dos poblaciones, y se estimará una en función de la otra con los distintos métodos. Para determinar cuál método es más representativo, se considerará la correlación entre los datos reales y estimados y la media del error (valor real menos el valor estimado)

A continuación, se presentan los distintos enfoques que se realizarán y posteriormente se compararán.

- Simulación por método de bandas rotantes, condicionando las realizaciones con Kriging simple, usando la media global.
- Simulación por método de bandas rotantes, condicionando las realizaciones con Kriging ordinario.
- Simulación secuencial, usando Kriging simple y varianza de Kriging simple para determinar las distribuciones condicionales.
- Simulación secuencial, usando Kriging ordinario y varianza de kriging simple, tal como ha sido sugerido por Deutsch y Journel (1998) y Goovaerts (1997).
- Simulación secuencial, usando kriging ordinario y varianza de kriging ordinario.

Para el caso de las simulaciones secuenciales, se realizará primeramente una simulación densa, y luego un rebloqueo al tamaño de bloque utilizado, ya que se



utilizará una programación que sólo realiza una simulación puntual. Para el método de bandas rotantes, el programa computacional (Emery and Lantuéjoul, 2006) permite realizar directamente el cambio de soporte.

Finalmente se concluirá, cual fue el efecto de incluir en las simulaciones el condicionamiento por medio del Kriging ordinario, además de analizar el efecto que produce el cambio de tamaño de la vecindad de búsqueda en los resultados.

## 6.- Primer caso de estudio: leyes de cobre soluble.

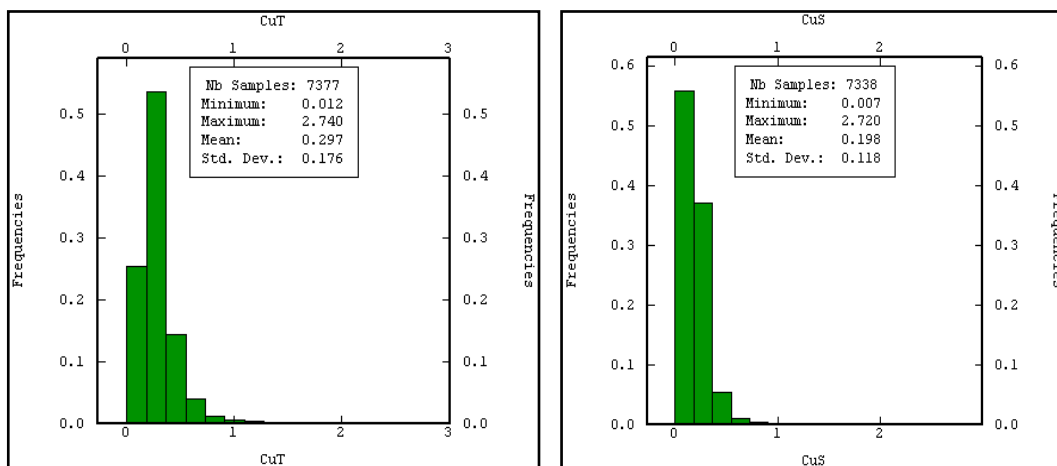
### 6.1.- Estudio exploratorio.

#### 6.1.1.- Estadísticas Básicas de los Datos Condicionantes.

Los datos utilizados en esta sección corresponden a una malla de sondajes del yacimiento "Gaby". El archivo contiene la información de 7338 datos de sondajes compositados cada 1,5 metro (sin considerar los datos duplicados). Además presenta 6 columnas con la información de las coordenadas (Este, Norte, Cota), Cobre Total, Cobre Soluble y Razón de Solubilidad, respectivamente.

La zona en donde se encuentran los sondajes es un espacio de 1370x770x300(m). Esta zona está ubicada entre las coordenadas 517712 (m) y 518982 (m) en la coordenada Este, 7411898 (m) y 7412668 (m) en la coordenada Norte y 2332 (m) y 2632 (m) en la coordenada vertical.

Los histogramas de los datos sin desagrupar, tanto para ley de Cobre Total y Soluble, se muestran a continuación. Se aprecia que la mayoría de los datos poseen un valor menor a 1%, tanto para la ley de cobre total como para la ley de cobre soluble.



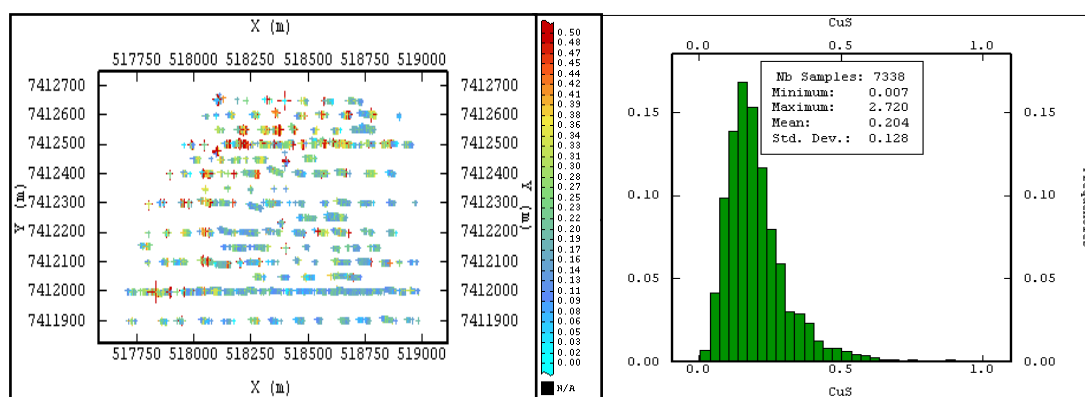
Gráfica 1: histograma de los datos de cobre total (izquierda) y cobre soluble (derecha).

Para este estudio se consideró como variable a utilizar la ley de Cobre soluble, básicamente por el tipo de yacimiento (óxidos de cobre), además de considerar la totalidad de las muestras entregadas para realizar las simulaciones correspondientes. Para esto, se amplió la zona a simular en 100 metros (50 metros en la coordenada superior y 50 metros en la coordenada inferior), tanto en la coordenada Este como Norte, con la finalidad de observar qué resultados entregan los distintos métodos en zonas donde la cantidad de muestras sea baja.

### 6.1.2.-Desagrupamiento de los datos.

Con el objetivo de disminuir la influencia del muestreo irregular en las estadísticas a utilizar se realiza un desagrupamiento que consiste en asignar un ponderador a cada dato. Los datos originales están compositados a 1,5(m) en los sondajes, los cuales se encuentran dispuestos en una malla semi-regular con un espaciamiento medio de aproximadamente 60(m) en la coordenada Este y 120(m) en la coordenada Norte. El desagrupamiento se realiza por medio del software “DECLUS” (GSLIB) al considerar un tamaño de celda de 60x120x6(m).

En la siguiente figura se puede ver la disposición de los datos de cobre soluble y su respectivo histograma desagrupado.



Gráfica 2: despliegue de las leyes de cobre soluble e histograma desagrupado.

Vemos que el histograma de los datos desagrupados no presenta mayores diferencias en cuanto a su forma con respecto al histograma no desagrupado. A continuación se comparan las estadísticas de los datos originales y los datos desagrupados.

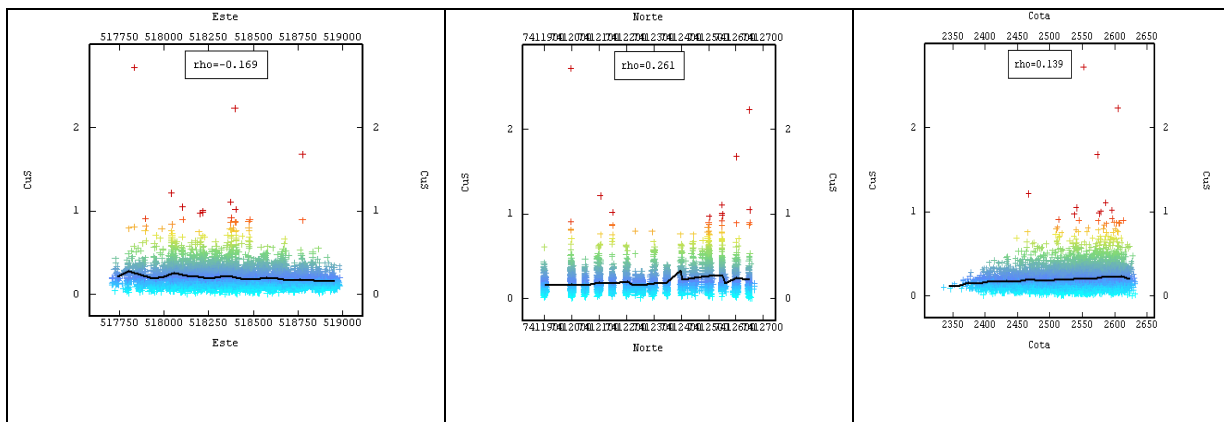
Variable	Mínimo	Máximo	Media	Varianza	Des. Estandar
CuS (%) Originales	0.01	2.72	0.198	0.021	0.118
CuS (%) Desagrupado	0.01	2.72	0.204	0.021	0.128

Tabla 1: estadísticas básicas de datos originales y datos desagrupados.

Con respecto a la tabla anterior, vemos que no existen variaciones muy grandes en las estadísticas de los datos desagrupados y los originales. Esto indica que el muestreo realizado, a pesar de ser irregular, no es preferencial, es decir, no privilegia las zonas de altas leyes o de bajas leyes.

### 6.1.3.- Análisis de derivas.

A continuación se presenta el análisis de las derivas a lo largo de las distintas coordenadas para la ley de cobre soluble:



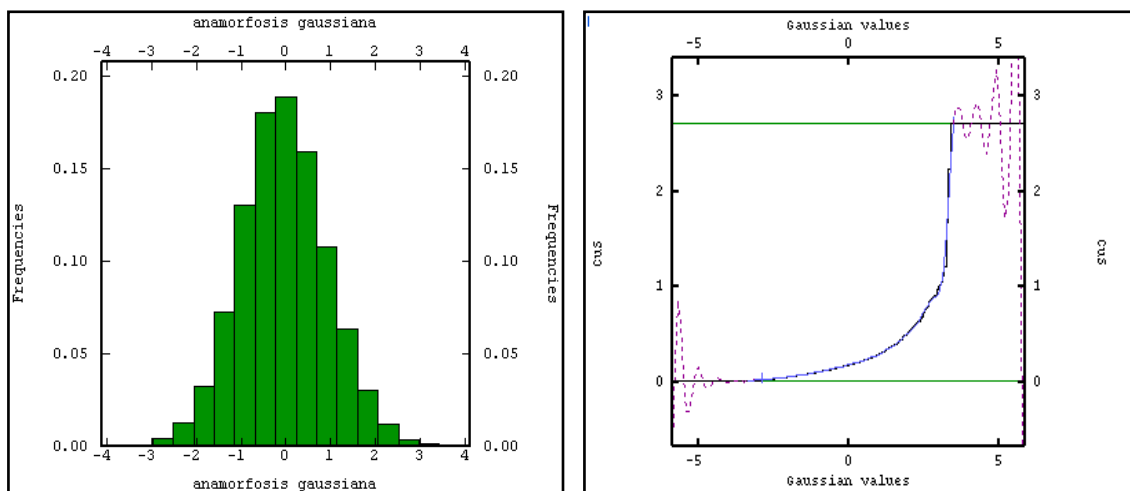
Gráfica 3.- Derivas (de izquierda a derecha) a lo largo de las coordenadas este, norte y cota.

De la grafica anterior, concluimos que los datos presentan tendencias leves en cuanto al valor de la ley, y que la dispersión de las leyes disminuye en el sector este y en profundidad.

## 6.2.-Anamorfosis Gaussiana de los datos.

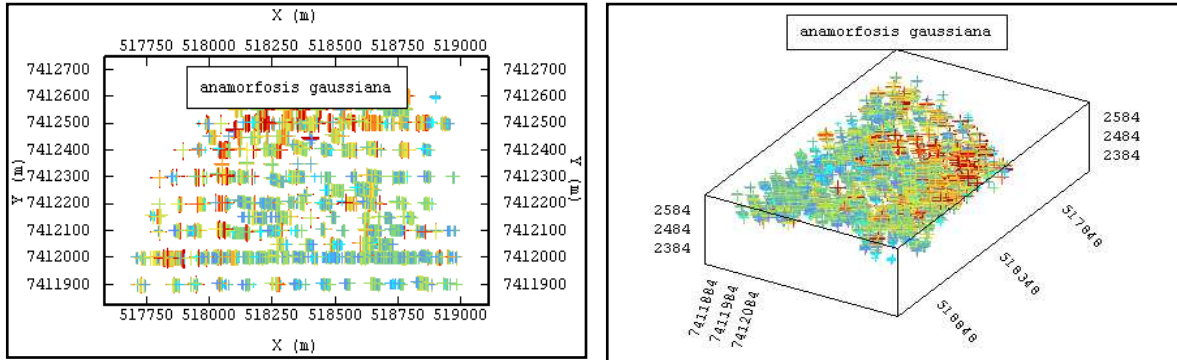
Los datos originales tienen un histograma asimétrico, el cual es incompatible con una distribución Gaussiana y un modelo multigaussiano. Por este motivo y como se especificó en la metodología propuesta, tanto para la simulación secuencial como para la simulación por bandas rotantes, se requiere primero transformar los datos, para que tengan (una vez transformados) una distribución Gaussiana estándar (media 0, varianza 1). Esto es lo que se conoce como Anamorfosis Gaussiana.

Para esto se utilizó el software “NSCORE” (GSLIB), con el cual se obtuvo una tabla de transformación y un archivo con las coordenadas y los valores transformados (Gaussianos). La anamorfosis de los datos condicionantes nos entrega como resultados un valor medio de la variable Gaussiana de -0.05 y una varianza 0.98 (sin desagrupar), lo cual se aproxima a los valores determinados por la hipótesis utilizada (0 y 1 respectivamente), además de un valor máximo de 3.42 y un mínimo de -3.42. En la siguiente figura se muestra el histograma de los datos Gaussianos y su respectiva función de anamorfosis (entregada por el software “ISATIS”).



Gráfica 4: histograma de los datos gaussianos y su función de anamorfosis que relaciona valores Gaussianos (abscisa) con valores de ley (ordenada).

La siguiente figura muestra una vista en planta y una vista en perspectiva de los datos transformados, con los cuales se realizará el posterior análisis variográfico.



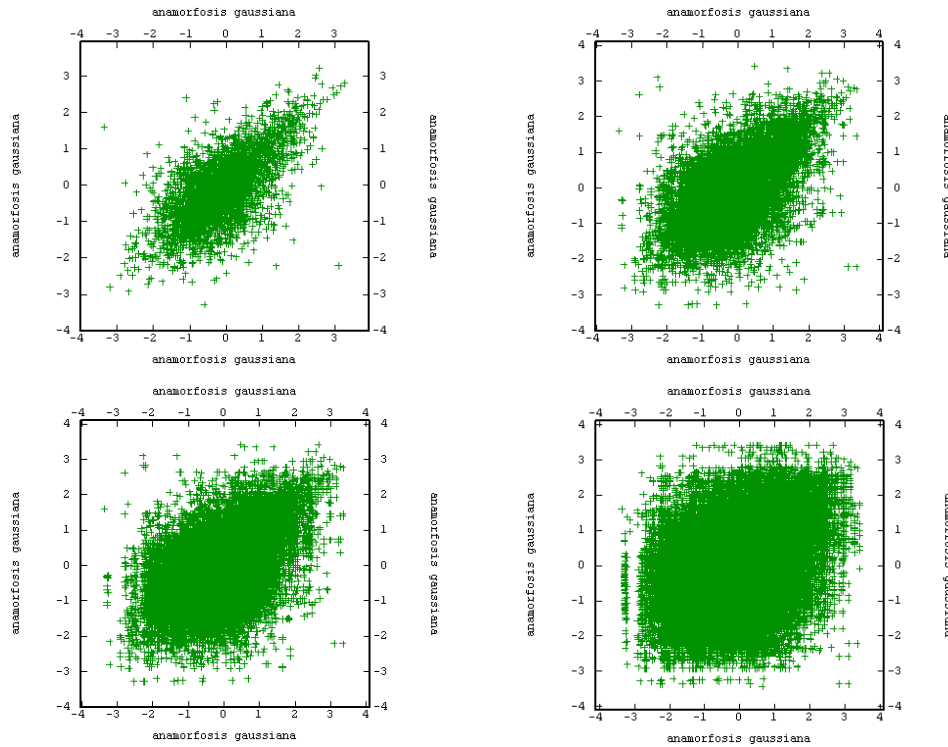
Gráfica 5: despliegue de valores gaussianos en planta y perspectiva.

### 6.3 Validación de la distribución bigaussiana.

Por construcción, el histograma de los datos transformados es Gaussiano, por lo cual la distribución univariable es consistente con el modelo multigaussiano. Sin embargo, hace falta verificar que las distribuciones de orden superior sean también compatibles con la hipótesis multigaussiana. En la práctica, sólo se estudia las distribuciones bivariantes, es decir, las distribuciones de los pares de valores Gaussianos. En este caso se verificará la hipótesis bigaussiana examinando las nubes de correlación diferida de los datos y comparando el variograma con el madograma.

#### 6.3.1.-Nube de correlación diferida

Se realizan nubes de correlación diferida para distintas distancias de separación  $y$ . Las distancias utilizadas fueron: 1.5m, 10m, 50m y 100m. Los gráficos de nubes de correlación son los siguientes.



Gráfica 6: nubes de correlación diferida para 1.5, 5, 50 y 100m respectivamente (cálculos realizados en forma omnidireccional).

Vemos que cuando la distancia tiende a cero, la nube de correlación se restringe en torno a la diagonal, y cuando tiende a infinito la nube se asemeja a una circunferencia. Además muestra formas medianamente elípticas (acorde a lo esperado en el modelo multigaussiano) para valores intermedios de la distancia, por lo que los resultados de este test son satisfactorios.

### 6.3.2.-Comparación del variograma con el madograma.

Cabe recordar que el variograma se define por:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{|Y(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Y(\mathbf{x})|^2\}$$

donde  $\gamma(\mathbf{x})$  es el valor Gaussiano en el sitio  $\mathbf{x}$  del espacio, y  $\mathbf{h}$  un vector de separación.

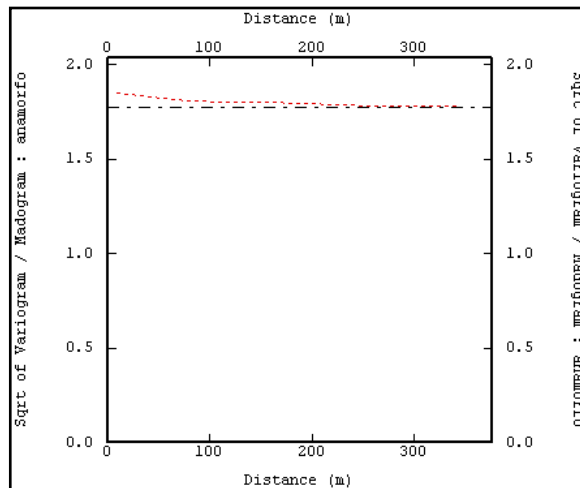
El madograma corresponde al “variograma de orden 1” y se define de la siguiente forma:

$$\gamma_1(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} E\{|Y(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - Y(\mathbf{x})|\}$$

Para que los datos tengan una distribución bigaussiana se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{\gamma(\mathbf{h})}}{\gamma_1(\mathbf{h})} = \sqrt{\pi} \cong 1.77 \quad \text{para todo } \mathbf{h}$$

El siguiente gráfico corresponde a la raíz cuadrada del variograma experimental de los datos dividida por el madograma experimental, calculada en forma omnidireccional, la cual se observa relativamente cercana al valor teórico (1.77, indicado con una línea horizontal punteada)



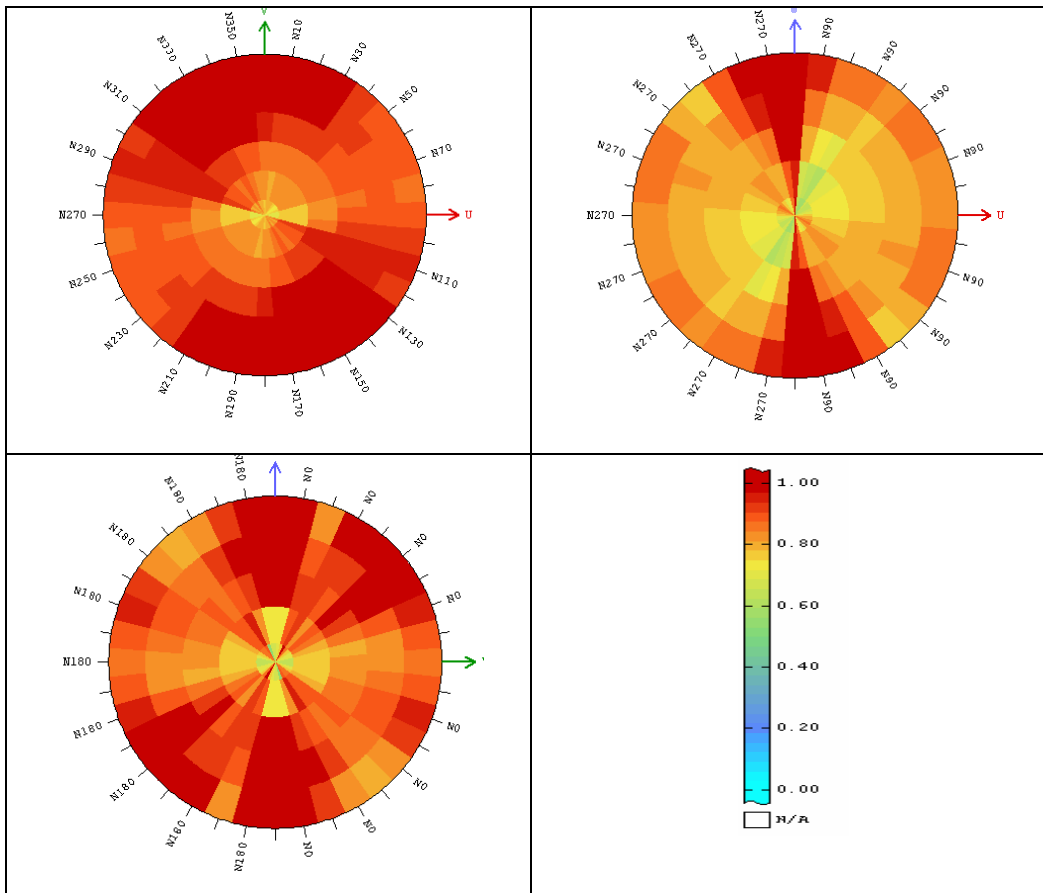
Gráfica 7: raíz cuadrada del variograma dividida por el madograma.

Finalmente, considerando los tests realizados, es posible concluir que los datos (luego de transformar por medio de la anamorfosis) poseen una distribución Gaussiana univariable y bivariable. Por lo tanto, es posible utilizar estos datos en las etapas siguientes del estudio, como lo son el análisis variográfico y los distintos tipos de simulaciones.



#### 6.4.-Estudio variográfico de los datos Gaussianos.

Para advertir la existencia de anisotropías, es conveniente realizar los mapas variográficos de los datos Gaussianos. Los siguientes son los mapas variográficos en el plano horizontal y las secciones verticales (este-vertical y norte-vertical).



Grafica 8: mapas variográficos de los datos Gaussianos.

Al ver los mapas variográficos podemos concluir que, en la dirección horizontal no se evidencian direcciones de anisotropías claras. Sin embargo, en la dirección vertical se aprecia claramente una anisotropía con respecto al plano horizontal. Por lo tanto, se realizaron dos variogramas, uno omnihorizontal y otro vertical.

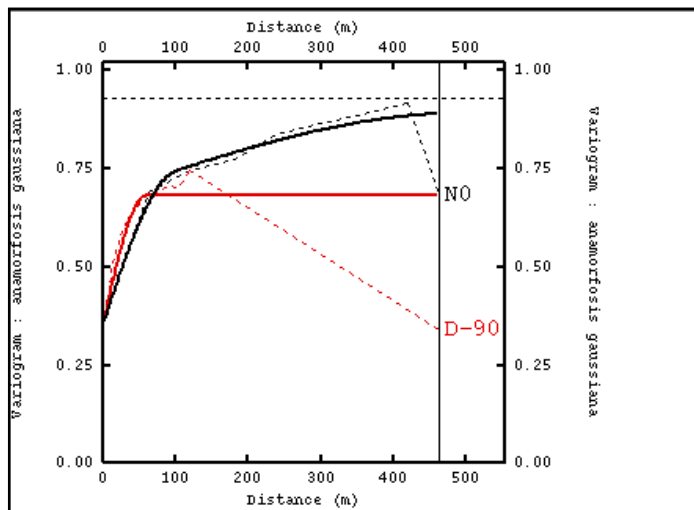
En la tabla 2 se presentan los valores utilizados para el cálculo de ambos variogramas:

Variograma	Largo del paso (m).	Números de pasos.	Tolerancia. en paso (m).	Tolerancia. Angular (°).
Omnihorizontal	60	7	30	90
Vertical	20	8	10	45

Tabla 2: parámetros de cálculo del variograma experimental.

### 6.4.1.-Modelamiento.

El siguiente gráfico muestra tanto los variogramas experimentales como los modelos variográficos definitivos:



Gráfica 9: variogramas experimentales (líneas punteadas) y modelo variográfico (líneas continuas).

El modelo final considera dos estructuras esféricas anidadas, además de un efecto pepita:

$$\gamma(h)=0,35\text{pep} + 0,33\text{esf}(60\text{m};100\text{m}) + 0,21\text{esf}(\infty;500\text{m}).$$

En donde las distancias entre paréntesis indican los alcances en el plano horizontal y en la dirección vertical, respectivamente.

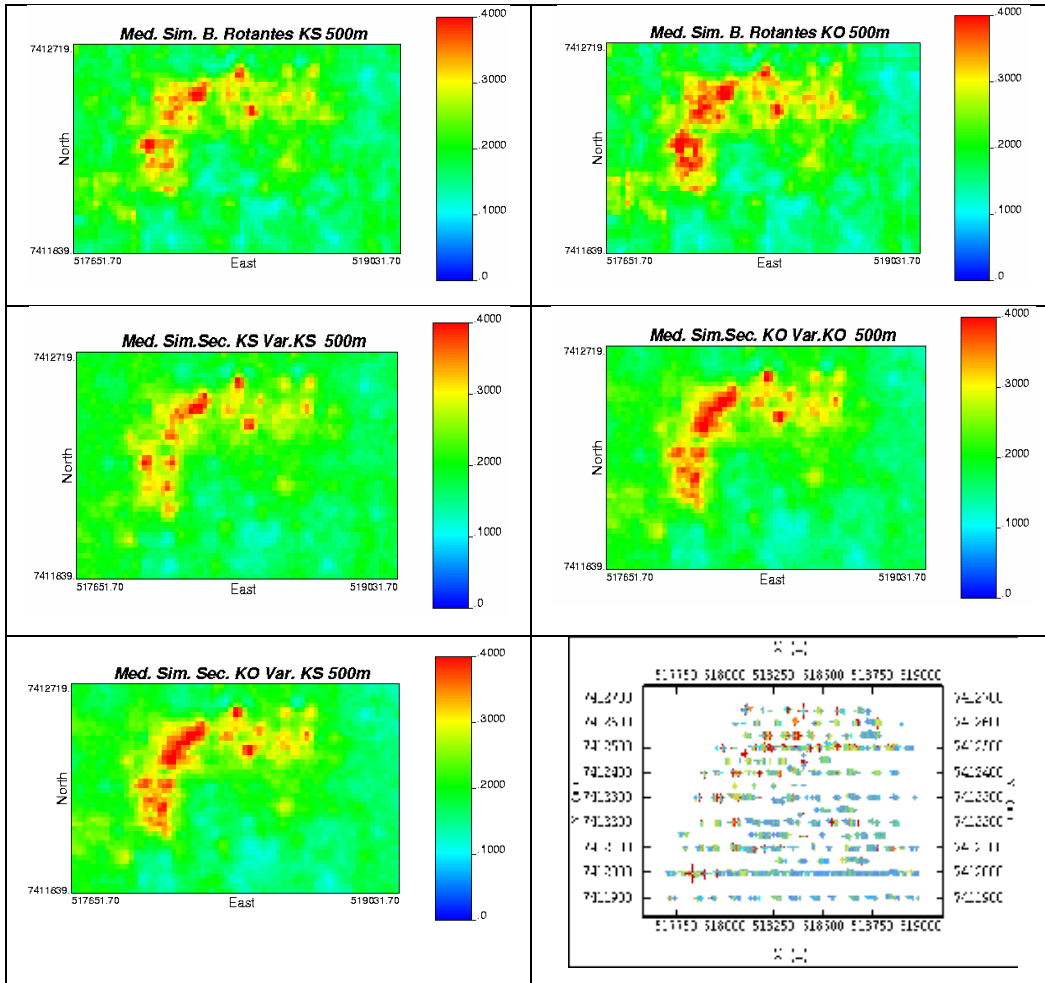
## **6.5.-Simulaciones condicionales.**

Como se estipuló en el capítulo anterior, toda la información entregada fue utilizada para generar las distintas simulaciones. Además se consideró un tamaño de bloque de 20x20x10(m), con la finalidad de tener tiempos de cálculo menores y tener una estimación más cercana a la realidad operacional de un yacimiento.

Se realizaron distintas simulaciones con los 5 métodos antes mencionados. El modelo de bloques cuenta con 69 nodos en la dirección Este, 44 nodos en la dirección Norte y 20 nodos en la cota. Respecto a la vecindad de Kriging, se eligió en primera instancia un número de datos por octante igual a 4 (un total de 32) y un radio máximo de búsqueda de 500 (m) en las coordenadas este y norte, y 150 (m) en la cota para las primeras realizaciones. Luego se consideró un radio máximo de búsqueda de 250 (m) en las coordenadas este y norte, y 100 (m) en la vertical, con el objetivo de determinar cómo varían los resultados al disminuir la vecindad de Kriging. Para el caso de la simulaciones secuenciales el número de nodos previamente simulados utilizados fue 40 (5 por octante).

Para ambos métodos de simulación (secuencial y bandas rotantes), condicionando tanto por kriging simple como por kriging ordinario, se realizaron 20 simulaciones con cada vecindad con la finalidad de que los resultados sean comparables.

En la Gráfica 10, se presentan las medias de las simulaciones correspondientes a la primera vecindad (radios de búsqueda iguales a 500 metros en la horizontal y 150 metros en la vertical).



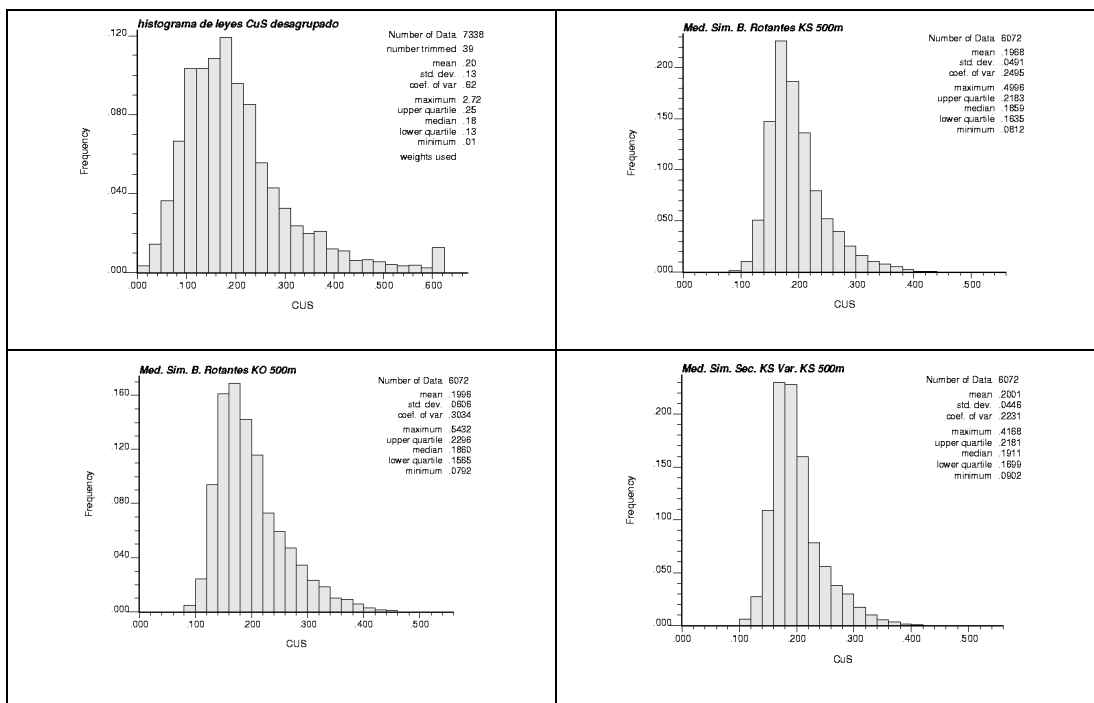
Gráfica 10: media de las realizaciones para los distintos tipos de condicionamientos y algoritmos (primera vecindad de búsqueda) y mapa de los datos condicionantes (KS :Kriging Simple; KO: Kriging Ordinario).

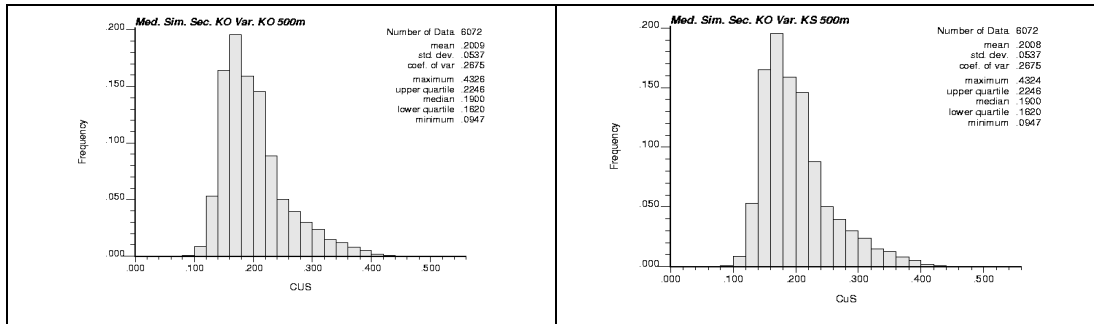
Vemos en la imagen anterior que los resultados entregados para las distintas simulaciones son relativamente similares. Las diferencias se ven principalmente en la zona central de los mapas (zona de alta ley). En los casos donde el condicionamiento se realiza a partir de un Kriging ordinario, se ve claramente un aumento del área de altas leyes, esto básicamente porque el Kriging ordinario se basa en una media local mayor que al media global utilizada por el Kriging simple. En cuanto a las zonas de extrapolación de la grilla, no se aprecia grandes diferencias, principalmente por la poca cantidad de datos condicionantes y el gran tamaño de la vecindad de Kriging. En efecto, cabe señalar que, si uno trabajara en una vecindad infinitamente grande (vecindad única), el Kriging ordinario usaría la misma media local en toda la zona y

entregaría entonces un resultado muy parecido al Kriging simple. Además podemos ver claramente que el método secuencial mixto ( que usa el estimador Kriging ordinario y la varianza de Kriging simple) entrega resultados muy similares al método secuencial basado en el por estimador de Kriging ordinario y la varianza de Kriging ordinario.

La relativa similitud de los resultados se puede explicar por la poca continuidad (importante efecto pepita y corto alcance en el variograma) y la ausencia de tendencias espaciales en el atributo a simular. Esto hace que la ley media de las vecindades locales se mantenga aproximadamente constante (salvo en la zona central), lo que hace que en el resto del dominio no existan grandes diferencias entre el condicionamiento por Kriging simple y Kriging ordinario.

A continuación se presentan los histogramas de las leyes de los datos y las leyes simuladas para cada método:



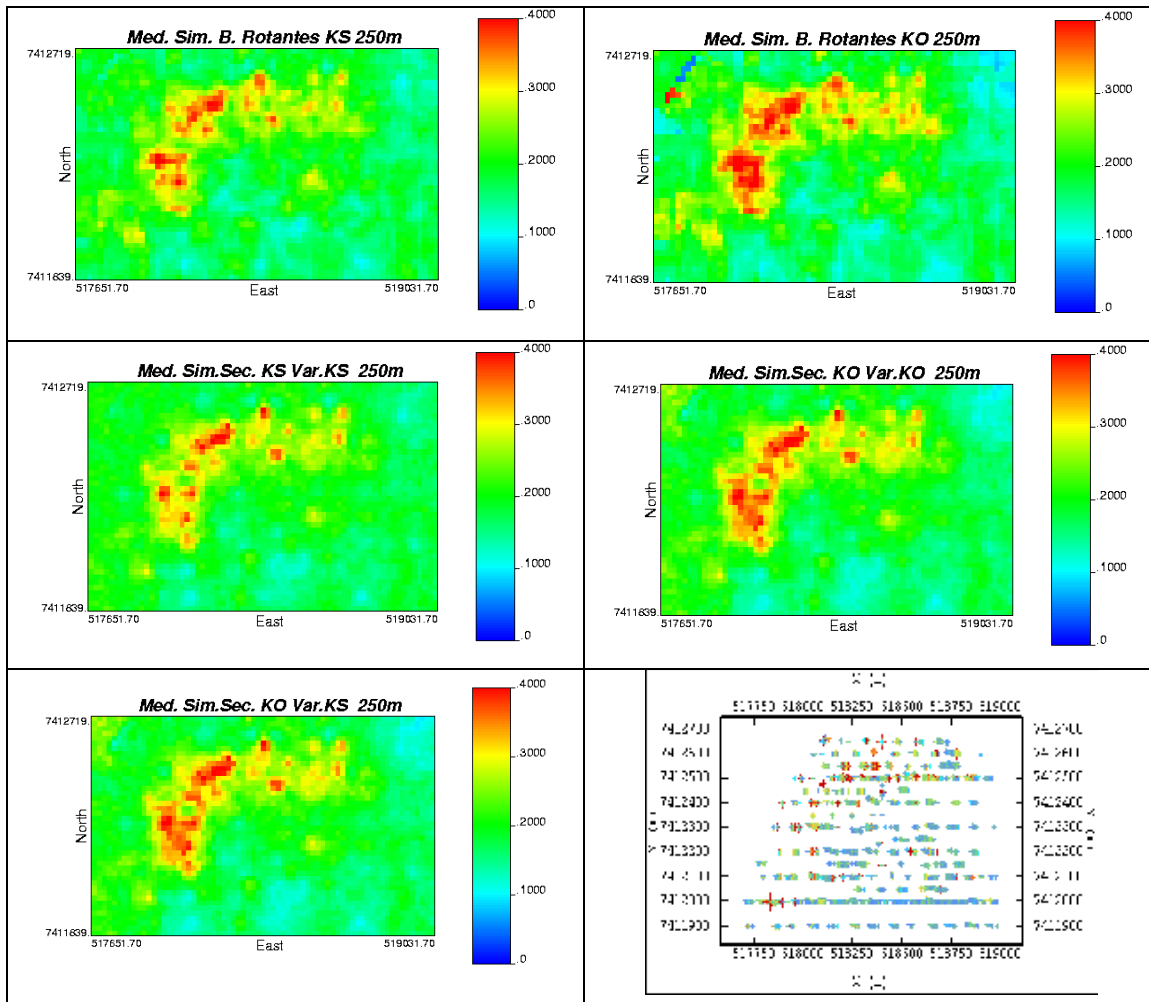


Gráfica 11: histograma de los datos desagrupados, y de leyes simuladas por bandas rotantes (K.S, K.O), y método secuencial (K.S + varianza K.S, K.O + varianza K.O y K.O + varianza K.S).

A partir de la imagen anterior (Gráfica 11), se ve que las tres implementaciones del algoritmo secuencial entregan histogramas muy similares (casi idénticos entre el caso donde se usa el estimador de Kriging ordinario más varianza de Kriging ordinario y el caso mixto), lo que confirma lo planteado con anterioridad, aunque se ve que el histograma correspondiente al condicionamiento por Kriging simple más es levemente más compacto. Con respecto a las simulaciones desarrolladas según el método de bandas rotantes, vemos similitudes con lo obtenido por el método secuencial, excepto una varianza levemente mayor al condicionar por Kriging ordinario.

La diferencia entre los histogramas de las simulaciones y de los datos desagrupados se debe principalmente al cambio de soporte realizado (desde muestras hasta bloques de 20x20x10[m]), lo cual restringe los valores extremos y disminuye la desviación estándar (efecto soporte).

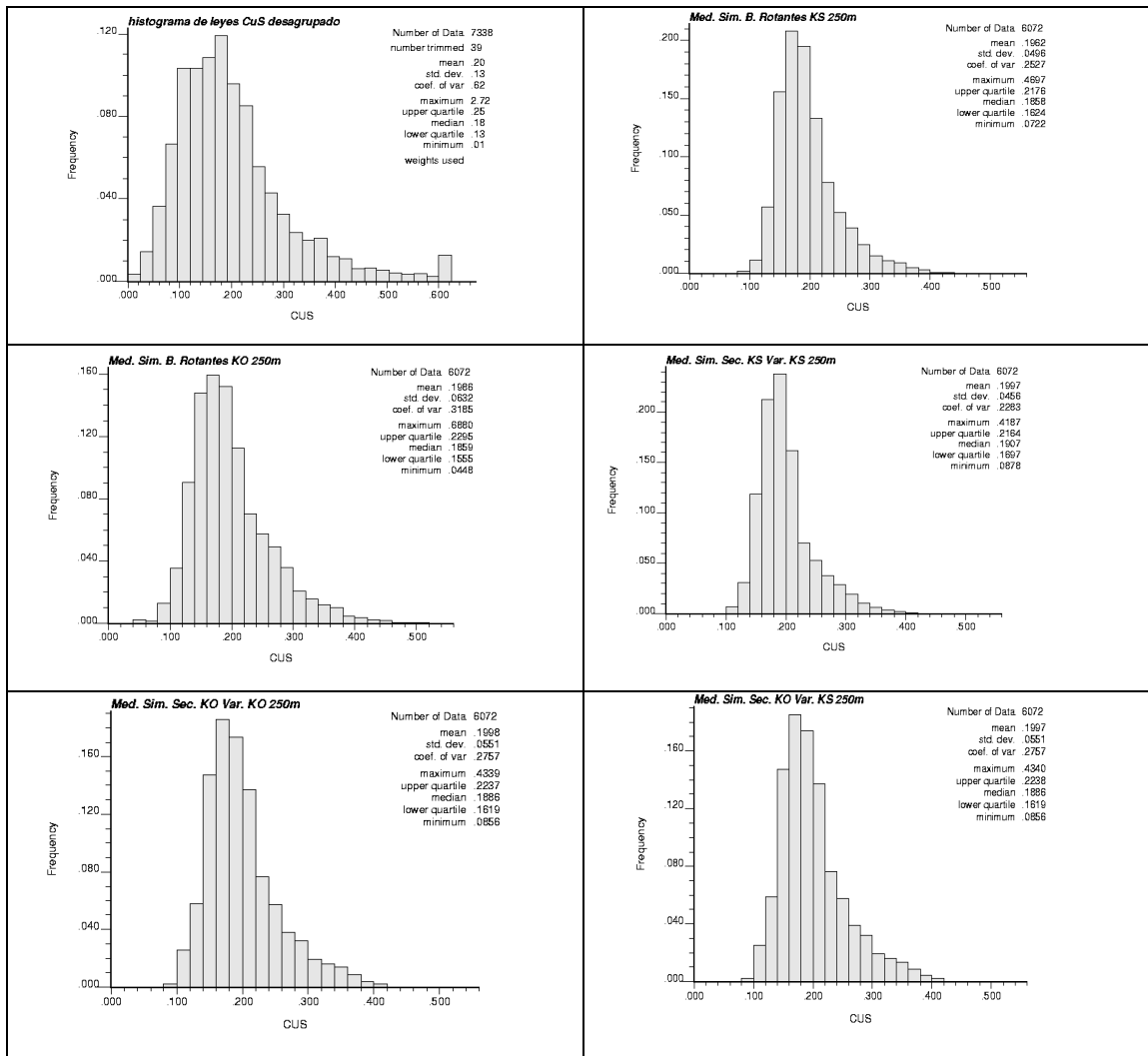
El segundo caso a estudiar, considera una vecindad de Kriging de 250[m] en la horizontal y 100[m] en la vertical y un número máximo de datos por octante igual 4. El resto de los parámetros son los mismos que fueron ocupados para el primer caso. En la Gráfica 12, se presentan las medias de las simulaciones correspondientes a esta segunda vecindad.



Gráfica 12: media de las realizaciones para los distintos tipos de condicionamientos y algoritmos (segunda vecindad de búsqueda) y mapa de los sondajes. (KS: Kriging Simple; KO: Kriging Ordinario)

En la grafica anterior vemos que, al igual que en el primer caso, al condicionar las simulaciones con el método de Kriging ordinario existe un aumento en el área de la zona de altas leyes con respecto al condicionamiento por Kriging simple, esto para ambos algoritmos. Pero a diferencia del primer caso, vemos en la zona de extrapolación de la grilla, por ejemplo en la zona superior derecha, un aumento del área de color azul para el condicionamiento por Kriging ordinario. Esto se debe a la mayor ponderación que el método le atribuye a los datos cercanos y a la ley media local. Además existe un aumento en el valor de las leyes estimadas en la zona superior izquierda, dado la cercanía de ésta con la zona de altas leyes.

Por otro lado, nuevamente podemos ver que las diferencias son muy pequeñas entre los resultados del algoritmo secuencial donde se usa el estimador de Kriging ordinario y la varianza Kriging ordinario y el caso mixto (Kriging ordinario y varianza de Kriging simple). A continuación, se presentan los histogramas para cada caso y sus respectivas estadísticas básicas.



Gráfica 13: histograma de los datos desagrupados y de las leyes simuladas por bandas rotantes (K.S, K.O), y el método secuencial (K.S + varianza K.S, K.O + varianza K.O y K.O + varianza K.S). Segunda vecindad de Kriging.

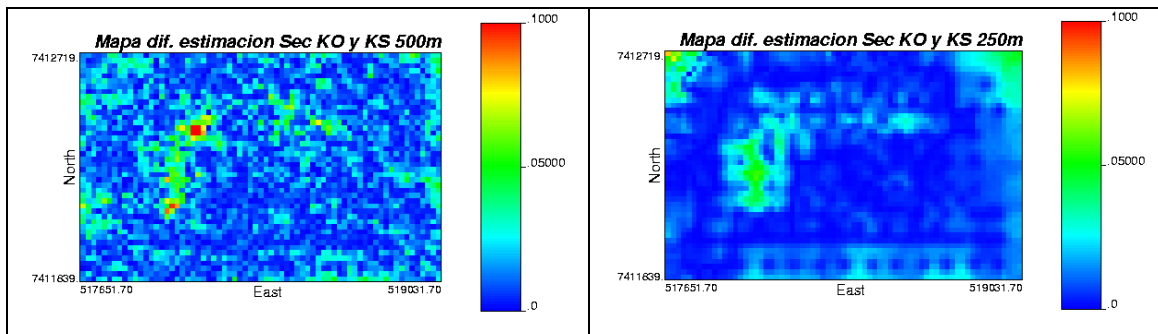


En la siguiente tabla se entregan las estadísticas básicas para todos los casos; siendo lo más destacables la mayor dispersión y mayor rango de las leyes obtenidas con el método de bandas rotantes condicionado con Kriging ordinario.

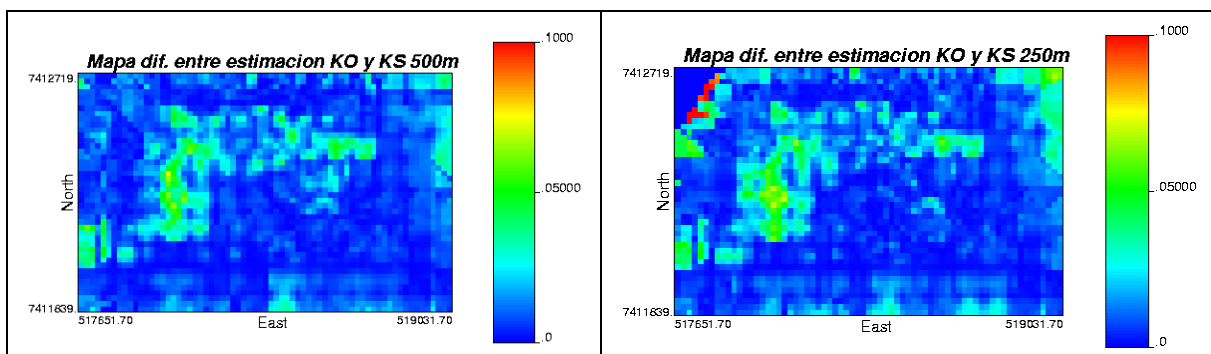
Tabla 3: estadísticas básicas para la media de las realizaciones y para los datos.

Simulación	Nº Bloques	Media(%)	Des. Estándar(%)	Varianza	Coef. Variación(%)	Máximo(%)	Mínimo(%)
B.Rotantes K.S vecindad 250(m).	6072	0.1962	0.0496	0.0025	0.2527	0.4697	0.0722
B.Rotantes K.S vecindad 500(m).	6072	0.1968	0.0491	0.0024	0.2495	0.4996	0.0812
B.Rotantes K.O vecindad 250(m).	6072	0.1986	0.0632	0.0040	0.3185	0.688	0.0448
B.Rotantes K.O vecindad 500(m).	6072	0.1996	0.0606	0.0037	0.3034	0.5432	0.0792
Sec. K.S + Var. K.S vecindad 250(m)	6072	0.1997	0.0551	0.0030	0.2757	0.4339	0.0856
Sec. K.S + Var. K.S vecindad 500(m)	6072	0.2001	0.0446	0.0020	0.2231	0.4168	0.0902
Sec. K.O + Var. K.O vecindad 250(m)	6072	0.1998	0.0456	0.0021	0.2283	0.4187	0.0878
Sec. K.O + Var. K.O vecindad 500(m)	6072	0.2009	0.0537	0.0029	0.2675	0.4326	0.0947
Sec. K.O + Var. K.S vecindad 250(m)	6072	0.1997	0.0551	0.0030	0.2757	0.434	0.0856
Sec. K.O + Var. K.S vecindad 500(m)	6072	0.2008	0.0537	0.0029	0.2675	0.4324	0.0947
Muestras	7338	0.198	0.118	0.0180	0.623	2.72	0.007

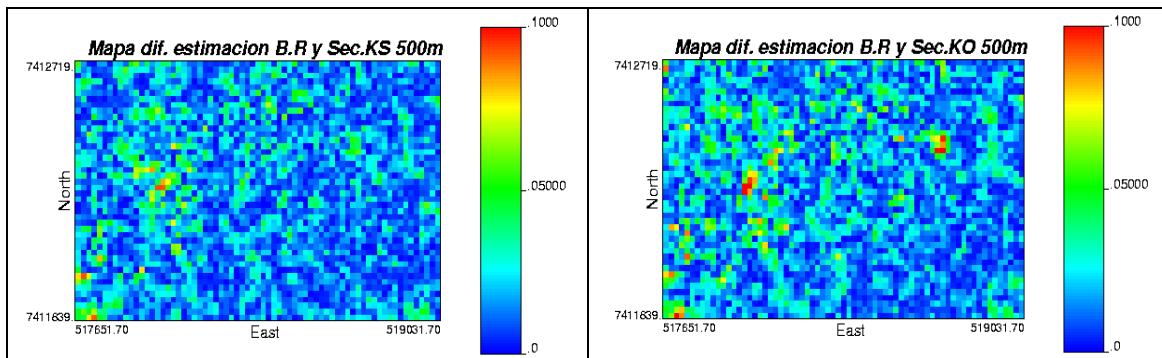
A continuación se presentan los mapas de diferencias (modulo de la diferencia) para los casos más relevantes:



Gráfica 14: diferencia en los resultados para método secuencial K.O más varianza K.O v/s secuencial K.S más varianza K.S, vecindad de 500[m] y 250[m] (izquierda a derecha).



Gráfica 15: diferencia en los resultados para método bandas rotantes K.O v/s método bandas rotantes K.S, vecindad de 500[m] y 250[m] (izquierda a derecha)



Gráfica 16: diferencia en los resultados para método secuencial K.S más varianza K.S v/s método bandas rotantes K.S, y secuencial K.O más varianza K.O v/s método bandas rotantes K.O (izquierda a derecha). Vecindad de 500[m].

Podemos ver en los gráficos 14 y 15 que las diferencias más notorias se encuentran en la zona de alta ley (en el centro) y en las esquinas superiores del dominio. Al disminuir el tamaño de vecindad, las diferencias entre el condicionamiento por Kriging simple y por Kriging ordinario tienden a aumentar, tanto para el algoritmo secuencial como para el algoritmo de las bandas rotantes. Con respecto al método secuencial mixto, los resultados son casi idénticos al obtenido con el método secuencial condicionado por Kriging ordinario. El resto de los mapas de diferencias e histogramas se muestran en la sección anexo D.

En relación al tipo de algoritmo ocupado (gráfica 16), vemos que las diferencias tienden a ser mayores, especialmente al utilizar un condicionamiento por Kriging ordinario. Esto se debe a que el algoritmo secuencial está constantemente agregando datos simulados como condicionantes, por lo que la vecindad de búsqueda para este método varía en cada etapa, siendo mucho más sensible a la definición de la vecindad que el algoritmo de bandas rotantes.

Finalmente, con el objeto de analizar la variabilidad de las realizaciones tomadas individualmente, ya que la media de las simulaciones disminuye la variabilidad de los resultados, se presenta a continuación las estadísticas básicas de las realizaciones realizadas con cada caso, y las correspondientes tablas de las curvas tonelaje-ley.

Simulación	Nº Bloques	Media(%)	Des. Estándar(%)	Varianza	Coef. Variación(%)	Máximo(%)	Mínimo(%)
B.Rotantes K.S vecindad 250(m).	121440	0.1962	0.0828	0.0069	0.4219	1.364	0.014
B.Rotantes K.S vecindad 500(m).	121440	0.1968	0.0821	0.0067	0.4171	1.311	0.014
B.Rotantes K.O vecindad 250(m).	121440	0.1986	0.096	0.0092	0.4836	2.521	0.02
B.Rotantes K.O vecindad 500(m).	121440	0.1996	0.0926	0.0086	0.464	1.608	0.008
Sec. K.S + Var. K.S vecindad 250(m)	121440	0.1997	0.0638	0.0041	0.3197	0.833	0.044
Sec. K.S + Var. K.S vecindad 500(m)	121440	0.2001	0.063	0.0040	0.3148	0.89	0.047
Sec. K.O + Var. K.O vecindad 250(m)	121440	0.1998	0.0751	0.0056	0.3761	1.386	0.011
Sec. K.O + Var. K.O vecindad 500(m)	121440	0.2009	0.0713	0.0051	0.3548	0.996	0.029
Sec. K.O + Var. K.S vecindad 250(m)	121440	0.1997	0.0749	0.0056	0.375	1.214	0.012
Sec. K.O + Var. K.S vecindad 500(m)	121440	0.2008	0.0712	0.0051	0.3544	0.993	0.03

Tabla 4: estadísticas básicas para todas las realizaciones.

Ley de Corte [%]	Sim. Bandas Rotantes K.O Vecindad 250[m]		Sim. Bandas Rotantes K.S Vecindad 250[m]		Sim. Bandas Rotantes K.O Vecindad 500[m]		Sim. Bandas Rotantes K.S Vecindad 500[m]	
	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]
0	100.00	0.1986	100.00	0.1962	100.00	0.1996	100.00	0.1968
0.1	91.31	0.2100	93.79	0.2037	92.53	0.2092	94.20	0.2038
0.2	40.17	0.2844	39.74	0.2728	40.56	0.2827	40.06	0.2723
0.3	11.81	0.3896	9.80	0.3755	11.73	0.3865	9.80	0.3747
0.4	3.60	0.5033	2.50	0.4835	3.52	0.4957	2.49	0.4815
0.5	1.23	0.6275	0.70	0.6028	1.12	0.6179	0.67	0.6026

Tabla 5: tabla curva tonelaje-ley obtenida con el algoritmo de bandas rotantes todos los casos.

Ley de Corte [%]	Sim. Secuencial K.O + Var.K.O Vecindad 250[m]		Sim. Secuencial K.S + Var.K.S Vecindad 250[m]		Sim. Secuencial K.O + Var.K.S Vecindad 250[m]		Sim. Secuencial K.O + Var.K.O Vecindad 500[m]		Sim. Secuencial K.S + Var.K.S Vecindad 500[m]		Sim. Secuencial K.O + Var.K.S Vecindad 500[m]	
	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]
0	100.00	0.1998	100.00	0.1997	100.00	0.1997	100.00	0.2009	100.00	0.2001	100.00	0.2008
0.1	96.63	0.2038	98.70	0.2012	96.68	0.2037	97.77	0.2035	98.88	0.2013	97.79	0.2034
0.2	41.56	0.2669	42.26	0.2569	41.55	0.2668	42.38	0.2643	42.64	0.2561	42.35	0.2642
0.3	9.16	0.3664	7.15	0.3539	9.14	0.3662	8.86	0.3616	7.04	0.3526	8.83	0.3616
0.4	1.94	0.4735	1.08	0.4547	1.93	0.4728	1.72	0.4624	1.01	0.4529	1.71	0.4622
0.5	0.46	0.5953	0.19	0.5509	0.45	0.5925	0.35	0.5671	0.16	0.5505	0.35	0.5665

Tabla 6: tabla curva tonelaje-ley obtenida con el algoritmo secuencial (todos los casos).

A modo de ejemplo, si comparamos los resultados para leyes de corte de 0.1% y 0.2%, vemos que los resultados son similares para un mismo algoritmo y cuando se varía el tipo de condicionamiento las diferencias son más importantes entre los dos algoritmos (bandas rotantes y secuencial), lo que sugiere que la elección del algoritmo tiene más impacto que el tipo de Kriging utilizado para condicionar las realizaciones.

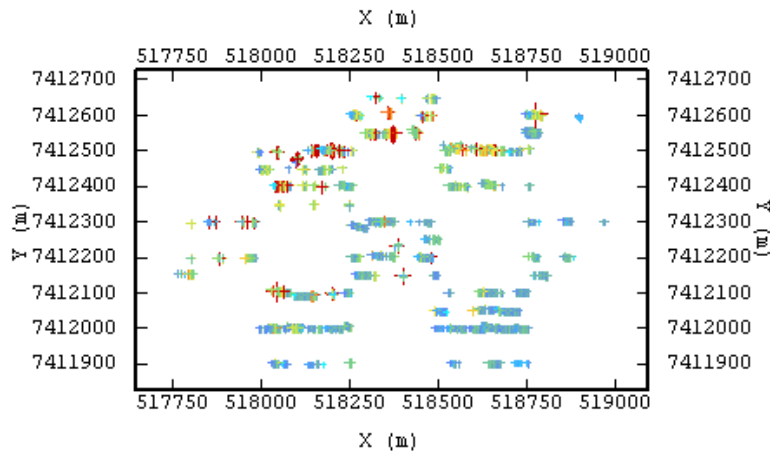
Después de analizar todos los resultados, podemos concluir que para este caso de estudio los resultados no muestran grandes diferencias al cambiar el Kriging simple al cambiar por uno ordinario. Esto se debe principalmente a la poca continuidad espacial de las leyes y a la ausencia de tendencias marcadas. En cambio, sí existen diferencias con respecto al algoritmo utilizado: el algoritmo secuencial presenta una menor varianza que el algoritmo de bandas rotantes. Además, la semejanza del caso secuencial mixto con el secuencial utilizando Kriging ordinario y varianza de Kriging ordinario nos indica que es mucho más relevante para la simulación el estimador (Kriging simple u ordinario, que indica la media de la distribución condicional) que la varianza del error de estimación (que indica la dispersión condicional). La razón se debe a que las varianzas de Kriging simple y ordinario suelen ser muy parecidos cuando se cuenta con varias decenas de datos, como es el caso analizado aquí.

## **6.6- Validación.**

Para determinar cuál método entrega mejores resultados, en cuanto a la precisión y exactitud, se realizó una validación de los todos los casos mediante un método de “Jack-knife”. Para esto se dividió el total del dominio en dos poblaciones, y se estimará una población a partir de la otra.

La población considerada para estimar la otra población consta de 2860 datos, con una ley media igual 0.221%, mientras que la población estimada tiene 5517 datos, con una ley media igual a 0.192%.

A continuación se muestra la distribución espacial de la 2 población a partir de la cual se estimará las zonas que no presentan valores (zonas en blanco).



Gráfica 17: sectorización espacial de las poblaciones.

En la siguiente tabla se presentan los resultados del Jack-Knife para los distintos casos estudiados. Como criterios de comparación, se busca que la media de los datos sea igual a la media de los datos estimados (insesgo global), que la correlación entre los datos reales y los datos estimados sea la más alta posible y por último que la varianza del error (valor real – valor estimado) sea baja.

Validación	Media Error	Des. Estándar(%)	Varianza(%)	Coef. Correlación(%)
B.Rotantes K.S 250m.	-0.0115	0.102	0.010	0.218
B.Rotantes K.O 250m.	-0.0119	0.105	0.011	0.193
B.Rotantes K.S 500m.	-0.0103	0.103	0.011	0.201
B.Rotantes K.O 500m.	-0.0095	0.105	0.011	0.194
Sec. K.S + Var. K.S 250m.	-0.0098	0.103	0.011	0.126
Sec. K.O + Var. K.O 250m.	-0.0097	0.103	0.011	0.210
Sec. K.O + Var. K.S 250m.	-0.0083	0.103	0.011	0.221
Sec. K.S + Var. K.S 500m.	-0.0091	0.101	0.010	0.229
Sec. K.O + Var. K.O 500m.	-0.0056	0.102	0.010	0.215
Sec. K.O + Var. K.S 500m.	-0.0064	0.102	0.010	0.217

Tabla 7: resultados de las validaciones.

De la tabla anterior, comparando los algoritmos (secuencial y bandas rotantes), vemos que las medias de los errores para el algoritmo de bandas rotantes son mayores a las entregadas por el algoritmo secuencial, aunque las varianzas para ambos se mantiene casi invariante.

Vemos además, que la media del error es menor en los casos secuencial usando Kriging ordinario y la varianza de Kriging ordinario y secuencial usando Kriging ordinario y la varianza Kriging de simple con respecto al condicionamiento tradicional, en cuanto al método de las bandas rotantes se repite la tendencia anterior.

Finalmente, no podemos concluir que método es el que reproduce mejor la realidad, ya que los resultados son muy similares entre uno método y otro (por la homogeneidad que tiene la distribución de las leyes), aunque si se nota una clara tendencia a la disminución de la media del error al condicionar las simulaciones por Kriging ordinario.

## 7.- Segundo caso de estudio: leyes de cobre total.

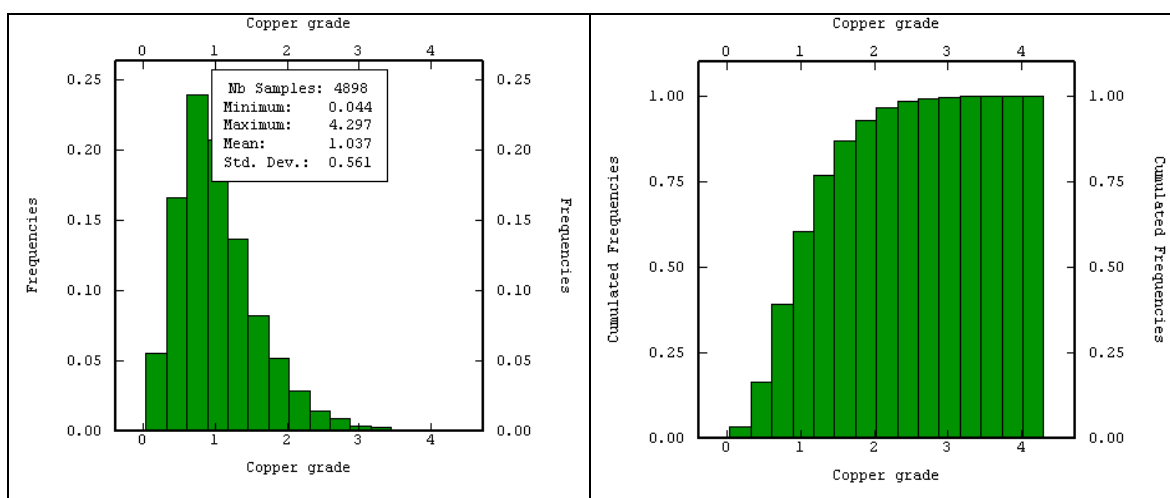
### 7.1.- Estudio exploratorio.

#### 7.1.1.- Estadísticas Básicas de los Datos Condicionantes.

Los datos a utilizar fueron obtenidos a partir de una malla de sondajes perteneciente al yacimiento “El Teniente”, El archivo contiene la información de 4898 datos de sondajes compositados cada 10 metros (sin considerar datos duplicados ni aberrantes), y presenta 4 columnas con la información de las coordenadas (Este, Norte, Cota) y Cobre Total.

El dominio en donde se encuentran los sondajes es un volumen de 700x650x150(m). Esta zona está ubicada entre las coordenadas -200 [m] y 550 [m] en la coordenada Este, 500 [m] y 1200 [m] en la coordenada Norte y 1850 [m] y 2550 [m] en la coordenada vertical.

Los histogramas de los datos sin desagrupar para la ley de Cobre Total, se muestran a continuación.



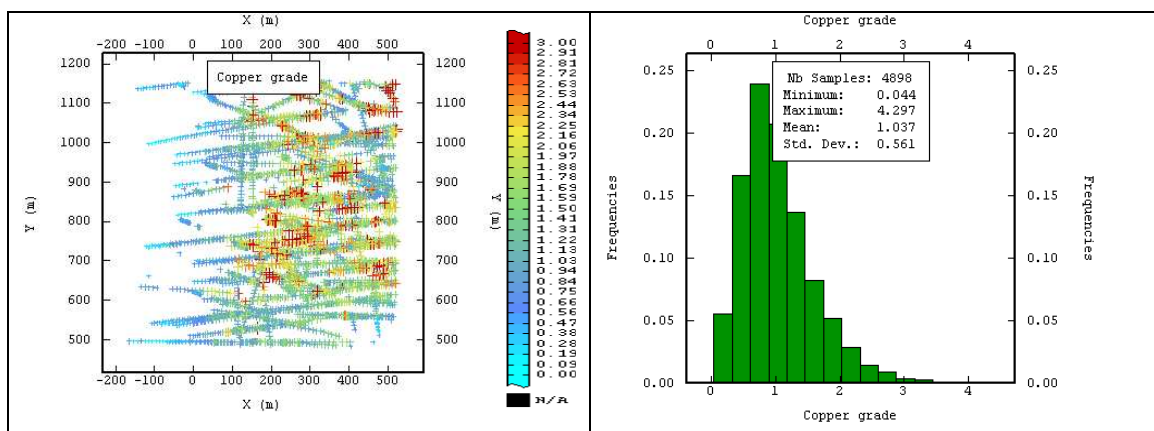
Gráfica 18: histograma de los datos de cobre total (izquierda) e histograma acumulado (derecha).

Para este estudio se consideró la totalidad de las muestras entregadas. Se amplió la zona a simular en 100 metros (50 metros en la coordenada superior y 50 metros en la coordenada inferior), tanto en la coordenada Este como Norte, con el fin de observar qué resultados entregan los distintos métodos en zonas donde la cantidad de datos sea baja.

### 7.1.2.-Desagrupamiento de los datos.

Los datos originales están compositados a 10[m] en los sondajes, los cuales se encuentran dispuestos en una malla semi-regular con un espaciamiento medio de aproximadamente 50(m) en la coordenada Este y 100(m) en la coordenada Norte. El desagrupamiento se realizó por medio del software “DECLUS” (GSLIB) al considerar un tamaño de celda de 50x100x10(m).

En la siguiente figura se puede ver la disposición de los datos de cobre total y su respectivo histograma desagrupado.



Gráfica 19: despliegue de las leyes de cobre total e histograma desagrupado.

Vemos que el histograma de los datos desagrupados no presenta mayores diferencias con el histograma no desagrupado en cuanto a su forma. A continuación se comparan las estadísticas de los datos originales y de los datos desagrupados.



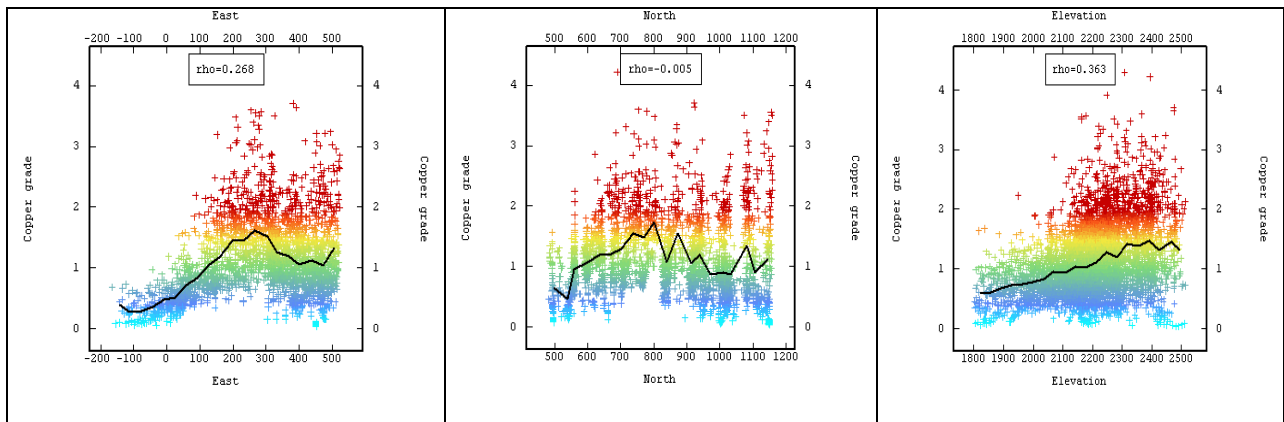
Variable	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
CuT (%) Originales	0.04	4.301	1.121	0.31
CuT (%) Desagrupado	0.44	4.291	1.023	0.305

Tabla 8: estadísticas básicas de datos originales y desagrupados.

Con respecto a la tabla anterior, vemos que existen variaciones leves en las estadísticas de los datos desagrupados y los originales. Esto indica que el muestreo realizado no es preferencial, es decir, no privilegia las zonas de altas leyes o de bajas leyes.

### 7.1.3.- Análisis de derivas.

A continuación se presenta el análisis de las derivas a lo largo de las distintas coordenadas para la ley de cobre total:



Gráfica 20.- Derivas (de izquierda a derecha) a lo largo de las coordenadas este, norte y cota.

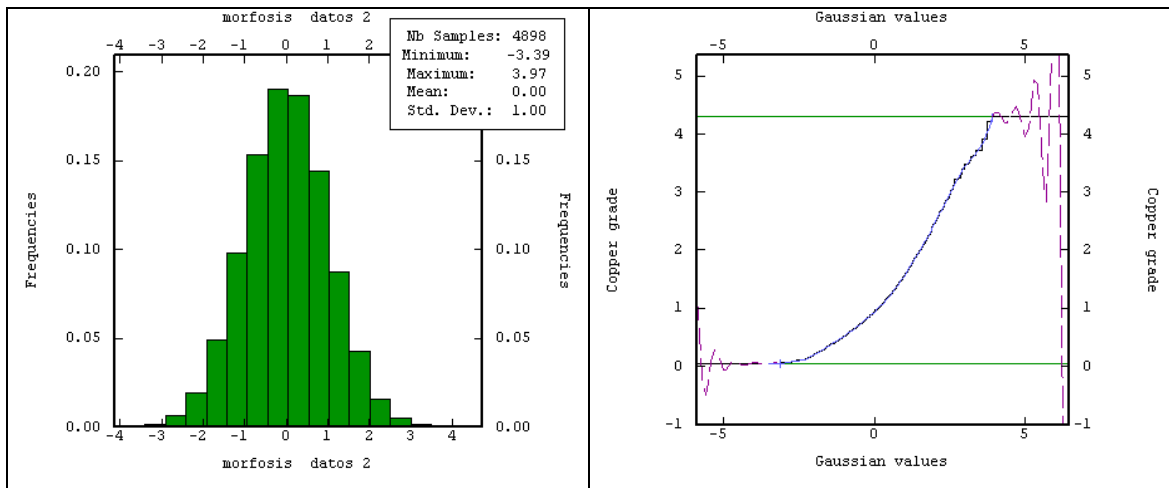
De la grafica anterior, concluimos que los datos presentan tendencias claras. Por ejemplo, en la coordenada este vemos que existe una zona central de alta ley, la cual disminuye notablemente hacia el oeste. En cuanto a la coordenada norte, la tendencia de la ley de cobre es más bien errática, no así la cota en donde vemos que la ley media disminuye fuertemente a medida que aumenta la profundidad.

## 7.2.-Anamorfosis Gaussiana de los datos.

Como se describe en la metodología propuesta para el desarrollo de la simulación secuencial gaussiana y para el algoritmo de las bandas rotantes, se realiza la anamorfosis de los datos condicionantes utilizando el software “NSCORE” (GSLIB) (Deutsch y Journel, 1998).

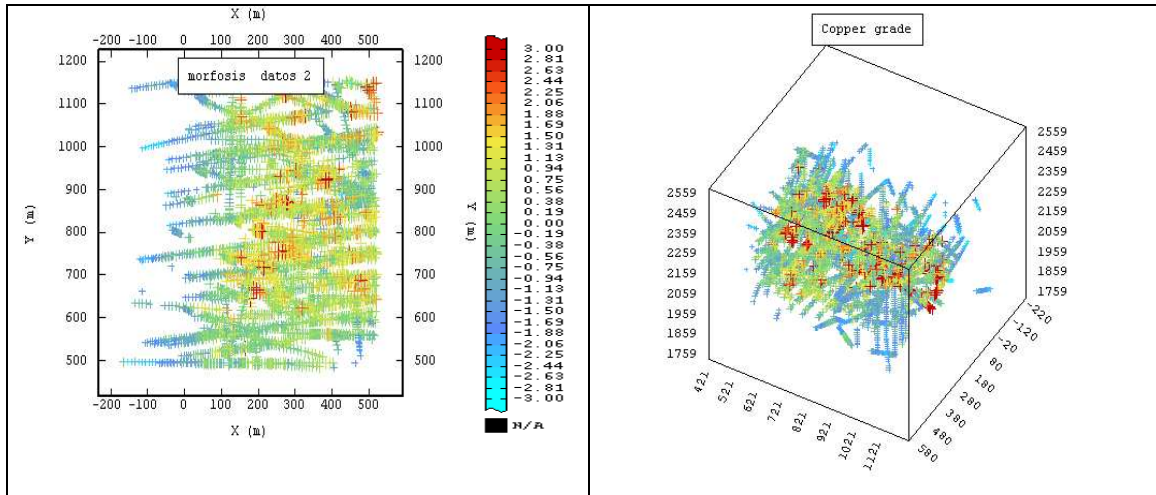
Luego de la anamorfosis los datos condicionantes para la simulación poseen una media de 0.006 y una varianza de 1.007. Estos valores se encuentran próximos a los valores ideales (media 0 y varianza 1).

La gráfica 20 muestra la función de anamorfosis que se utiliza para realizar la transformación de los datos (entregada por el software “ISATIS”). Esta función presenta un crecimiento muy similar al tipo exponencial para todo el espectro de los valores, además se muestra el histograma de los datos Gaussianos.



Gráfica 21: histograma de los datos Gaussianos y función de anamorfosis.

La siguiente figura presenta una vista en planta y una vista en perspectiva de los datos transformados (Gaussianos), con los cuales se realizará el posterior análisis variográfico.



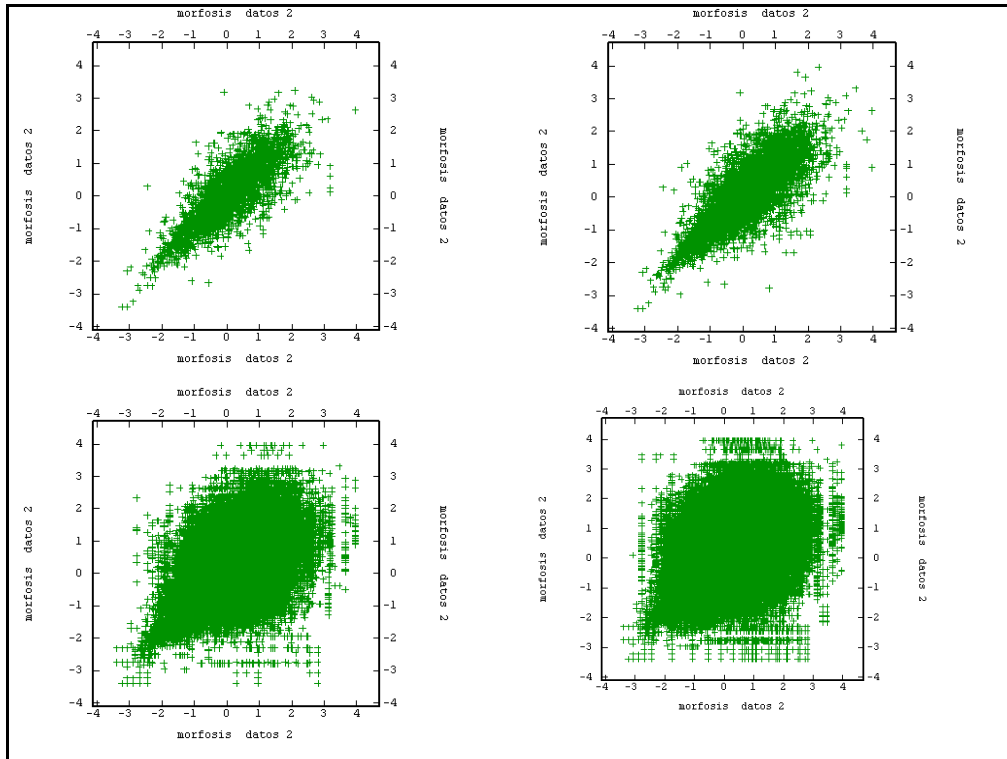
Gráfica 22: despliegue de valores Gaussianos en planta y perspectiva.

### ***7.3 Validación de la distribución bigaussiana.***

Se verificará la hipótesis bigaussiana examinando las nubes de correlación diferida de los datos y comparando el variograma con el madograma.

#### **7.3.1.-Nube de correlación diferida**

Se realizan nubes de correlación diferida para distintas distancias de separación. La hipótesis bigaussiana indica que para distancias de separación pequeñas la nube de correlación se restringe en torno a la diagonal, y cuando tiende a infinito la nube se asemeja a una circunferencia. Además muestra formas aproximadamente elípticas para valores intermedios de la distancia. Para esto se consideraron las siguientes distancias:  $|h|= 10[m]$ ,  $|h|=15[m]$ ,  $|h|=60[m]$  y  $|h|= 100[m]$ . Los gráficos de nubes de correlación son los siguientes.

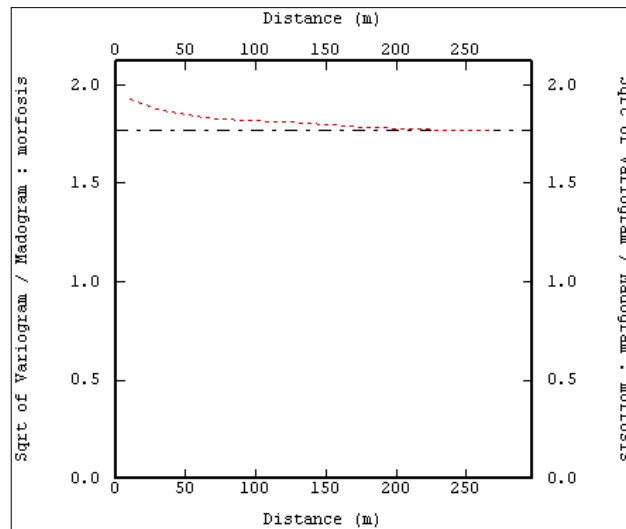


Gráfica 23: nubes de correlación diferida para  $|h|=10$ ,  $|h|=15$ ,  $|h|=60$  y  $|h|=100$ m respectivamente.

Vemos que los resultados de este test son satisfactorios (nubes de forma aproximadamente elípticas).

### 7.3.2.-Comparación del variograma v/s madograma.

El siguiente gráfico corresponde a la raíz cuadrada del variograma experimental dividida por el madograma experimental, calculada en forma omnidireccional. Este cuociente la cual se observa relativamente cercana al valor teórico (1.77, indicado con una línea horizontal punteada), salvo para distancias pequeñas (menores que 50[m]).



Gráfica 24: raíz cuadrada del variograma dividida por el madograma.

Finalmente, considerando los tests realizados, es posible concluir que los datos transformados por medio de la anamorfosis se ajustan a una distribución Gaussiana univariable y bivariable. Por lo tanto, se podrá utilizar estos datos en las etapas siguientes del estudio, (análisis variográfico y simulaciones condicionales).

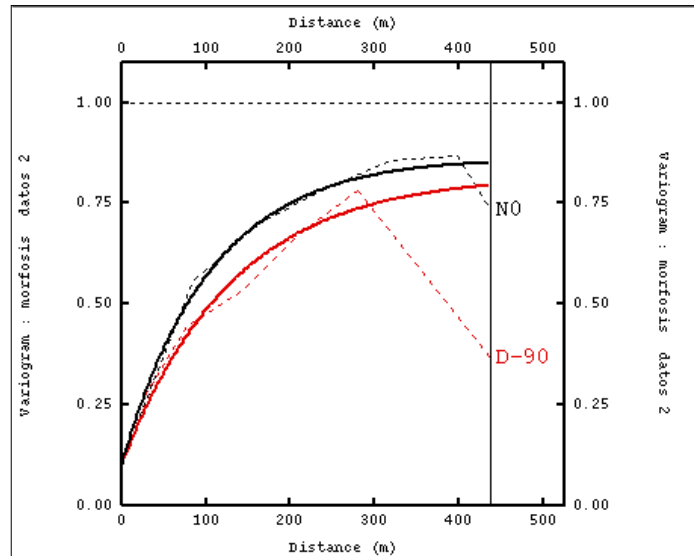
#### **7.4.-Estudio variográfico de los datos gaussianos.**

En este caso, se consideraron 2 variogramas, uno omnihorizontal y otro vertical. En la tabla 8 se presentan los valores utilizados para el cálculo de los variogramas:

Variograma	Largo del paso (m).	Números de pasos.	Tolerancia en paso (m).	Tolerancia angular (°).
Omnihorizontal	70	6	35	90
Vertical	50	6	25	45

Tabla 9: parámetros de cálculo del variograma experimental.

El siguiente gráfico muestra tanto los variogramas experimentales como los modelos variográficos definitivos:



Gráfica 25: variogramas experimentales (líneas punteadas) y modelados (líneas continuas).

El modelo final considera dos estructuras anidadas, además de un efecto pepita:

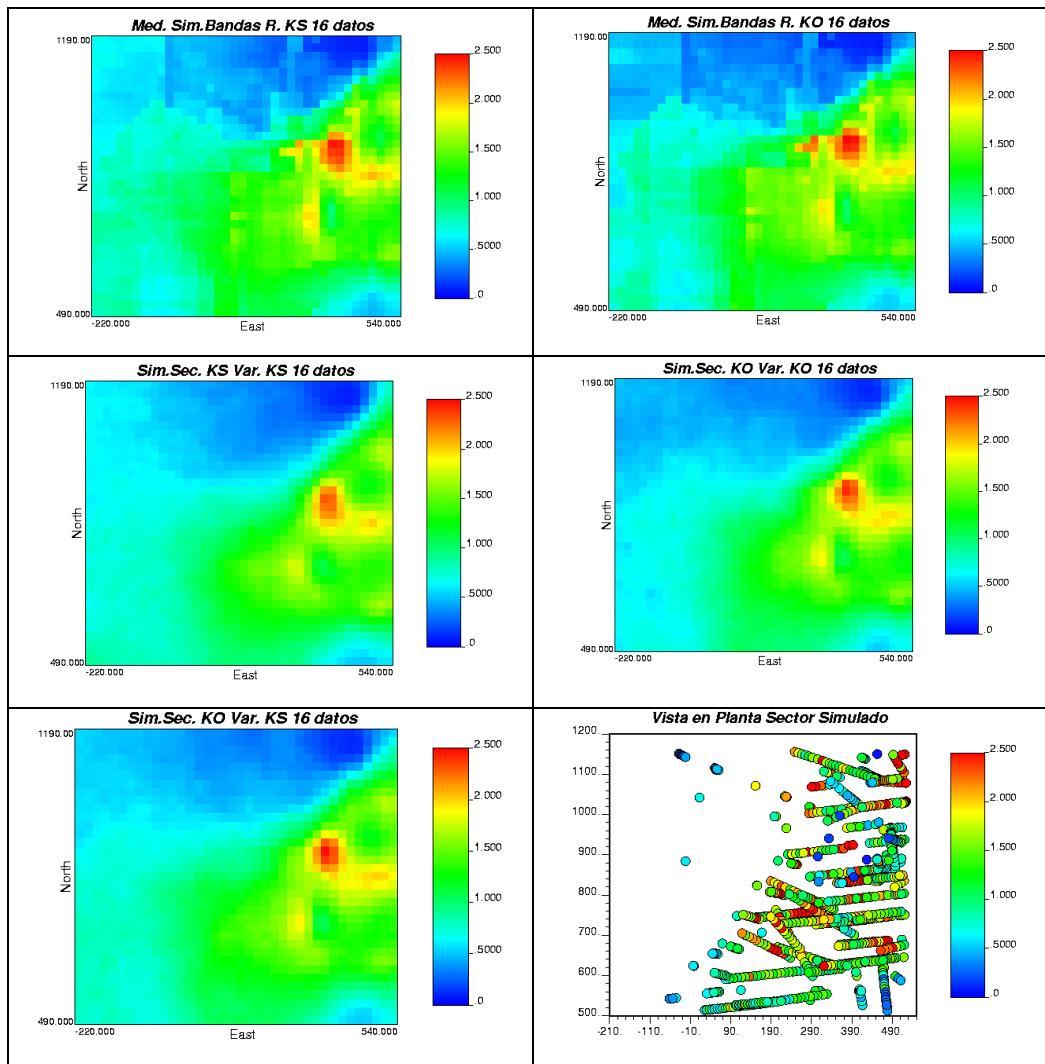
$$\gamma(h)=0,1\text{pep} +0,72\text{exp}(390;300)+0,04\text{esf}(\infty;400).$$

### 7.5.-Simulaciones condicionales.

Se realizaron distintas simulaciones con los 5 métodos antes mencionados. El modelo de bloques cuenta con 38 nodos en la dirección Este, 35 nodos en la dirección Norte y 2 nodos en la cota (2 bancos) con una malla de 20x20x10[m]. Respecto a la vecindad de Kriging, se definieron 3 casos: el primero se definió por un radio de búsqueda de 500[m] en las coordenadas este y norte y 150[m] en la vertical, con un total de datos por octante igual a 2 (o sea, un total de 16 datos). En el segundo caso se consideró el mismo radio de búsqueda para todas las coordenadas pero el número de datos por octantes elegidos fue de 5 (o sea, un total de 40 datos). Por último, el tercer caso, consideró igual radio de búsqueda

pero un número de datos por octante igual a 10 (80 datos en total). Para el caso de las simulaciones secuenciales, el número de nodos previamente simulados utilizados fue 40 (5 por octante).

Para los métodos de simulación secuencial y por bandas rotantes, condicionados tanto por Kriging simple como por Kriging ordinario, se realizaron 30 simulaciones para cada caso. En la Gráfica 26, se presentan las medias de las simulaciones correspondientes al primer caso (radios de búsqueda iguales a 500 y 150 metros y 2 datos por octantes).

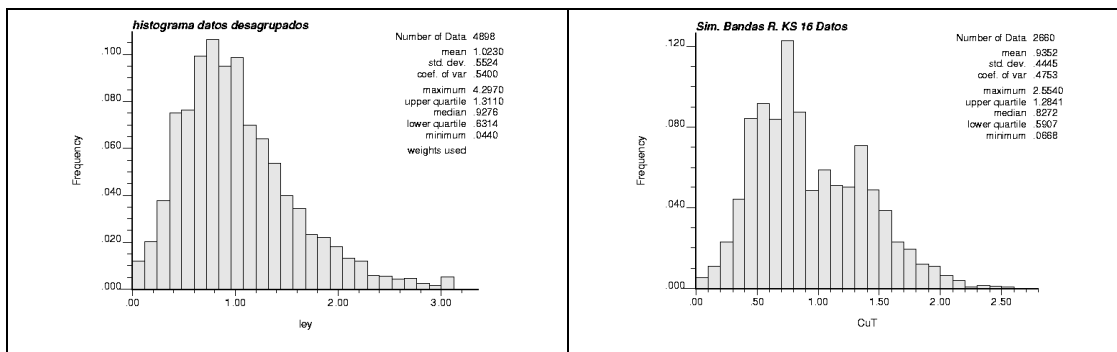


Gráfica 26: media de las realizaciones para los distintos tipos de condicionamiento y algoritmos (primera vecindad) y mapa de los sondajes.

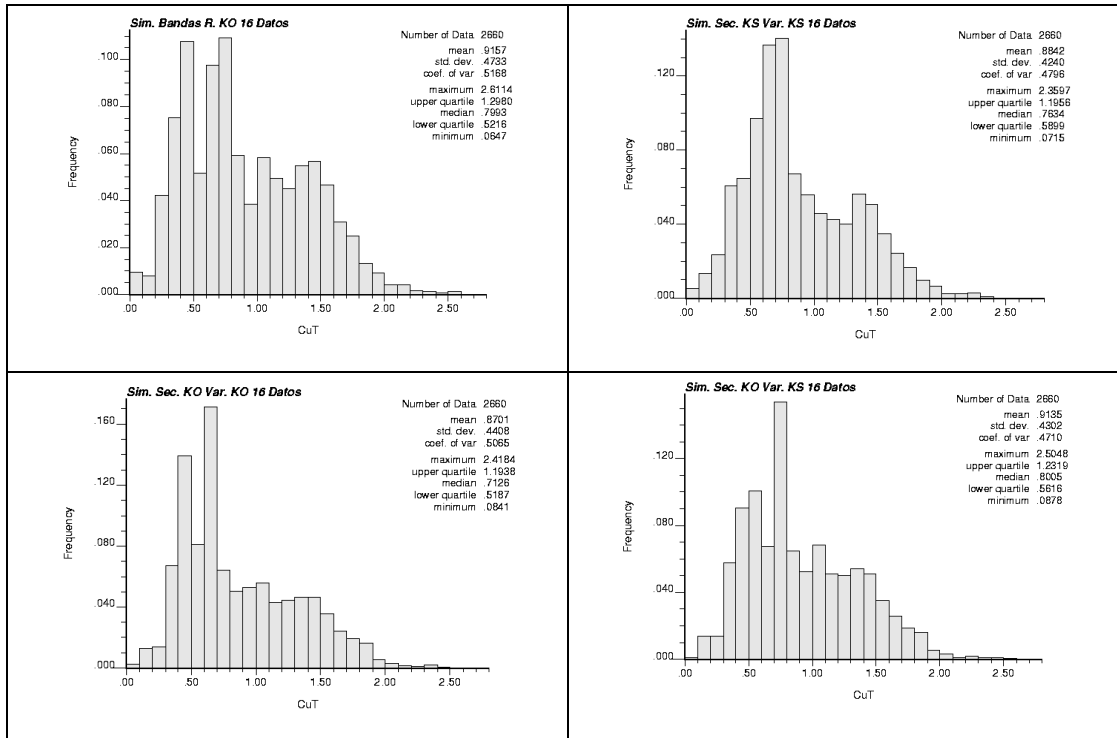
En la gráfica anterior, vemos diferencias interesantes para este caso. Al comparar los resultados para ambos algoritmos (bandas rotantes y secuencial se ve un aumento del área de zona de alta ley ubicada en la parte central del dominio al igual que un aumento de los valores de ley, y una disminución de las leyes en la zona superior izquierda al utilizar el método bandas rotantes. Con respecto al método secuencial donde se usa el estimador de Kriging ordinario y la varianza de Kriging simple (caso mixto) podemos decir que es más semejante al caso donde se usa el estimador de Kriging ordinario y la varianza Kriging ordinario, esto se explica por la mayor influencia en distribuciones condicionales del estimador que de la varianza utilizada (las varianzas de Kriging simple y ordinario son similares en cuanto se usa 16 datos condicionantes).

El condicionamiento de las simulaciones con Kriging ordinario con respecto al condicionamiento usando Kriging simple, muestra como resultado un aumento del área de altas leyes, esto básicamente porque el Kriging ordinario estima una media local y le da mayor importancia a los datos de la vecindad. En cuanto a las zonas de extrapolación de la grilla, se aprecian diferencias mayores en la parte oeste, principalmente por la poca cantidad datos condicionantes y por la diferencia entre la media local utilizada por el Kriging ordinario (baja ley) y la media global utilizada por el Kriging simple.

A continuación se presentan los histogramas de las leyes simuladas por cada método.



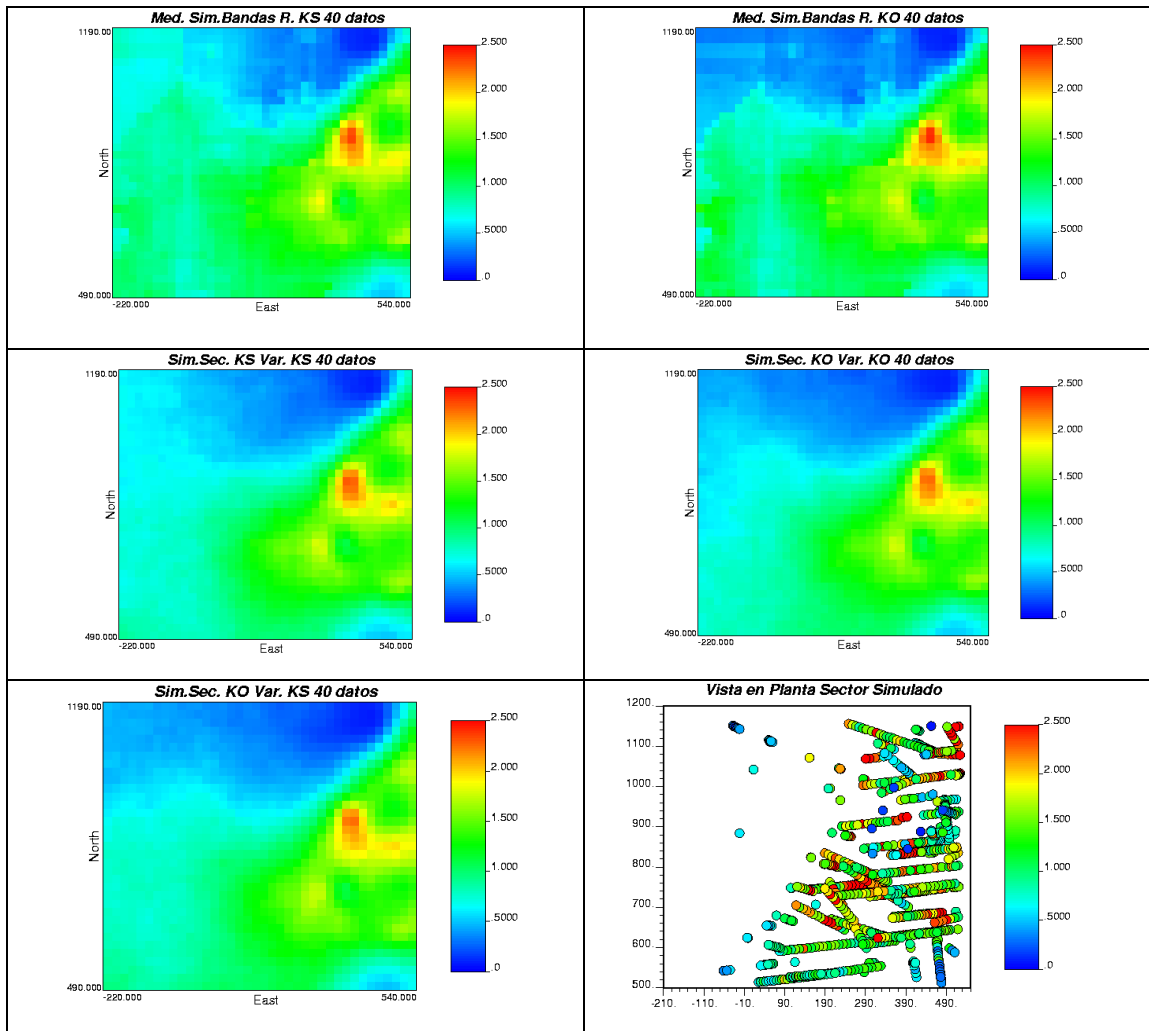




Gráfica 27: histograma de los datos desagrupados y de las leyes simuladas por bandas rotantes (K.S, K.O), y método secuencial (K.S + varianza K.S, K.O + varianza K.O y K.O + varianza K.S). Primera vecindad

La clara diferencia entre los histogramas de las simulaciones y el histograma de los datos desagrupados se debe principalmente al cambio de soporte realizado (desde muestras compositadas a 10 metros hasta bloques de 20x20x10[m]) así como al suavizamiento provocado por promediar las realizaciones, lo cual restringe los valores extremos y disminuye la desviación estándar.

La Gráfica 28, presenta las medias de las realizaciones correspondientes a la segunda vecindad (radios de búsqueda iguales a 500 y 150 metros con 5 datos por octante).

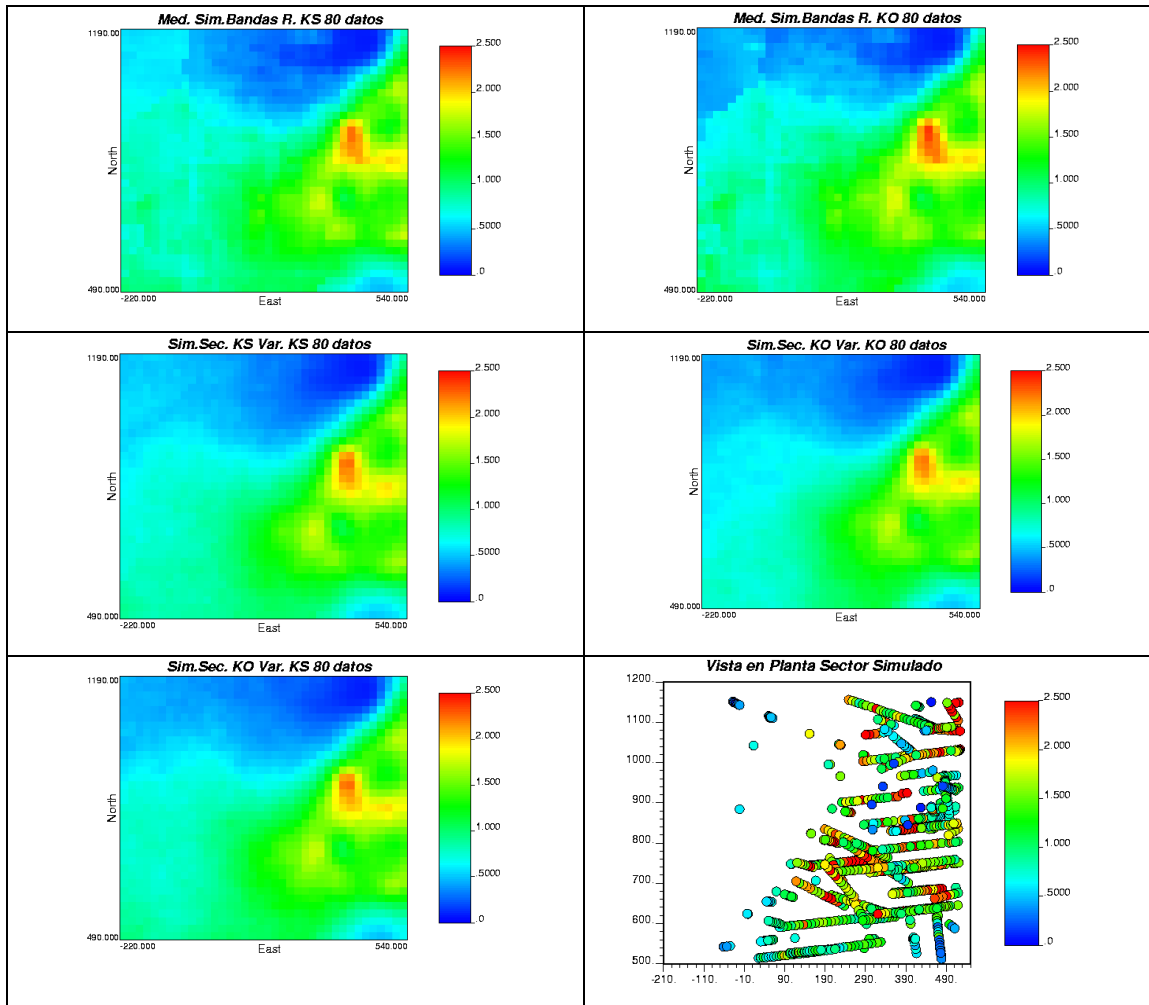


Gráfica 28: media de las realizaciones para los distintos tipos de condicionamiento y algoritmos (segunda vecindad) y mapa de los sondajes.

En la gráfica anterior vemos que las diferencias se incrementan entre los distintos casos sobre todo en la zona superior izquierda del dominio, donde se aprecia con mayor claridad la presencia de una zona de baja ley al utilizar condicionamiento por kriging ordinario; esto se corrobora al comparar los histogramas de las leyes simuladas (Anexos F). Además, las diferencias entre los algoritmos de simulación es menor que en el caso anterior.

Por último, se presentan los resultados de las medias de las realizaciones para la tercera vecindad de estudio, que considera de 10 datos por octantes (o sea, un total de 80 datos). Estos resultados son parecidos a aquellos obtenidos en

el caso anterior, indicando que el aumento de la cantidad de datos en la vecindad más allá de 40 tiene poco impacto en la simulación.



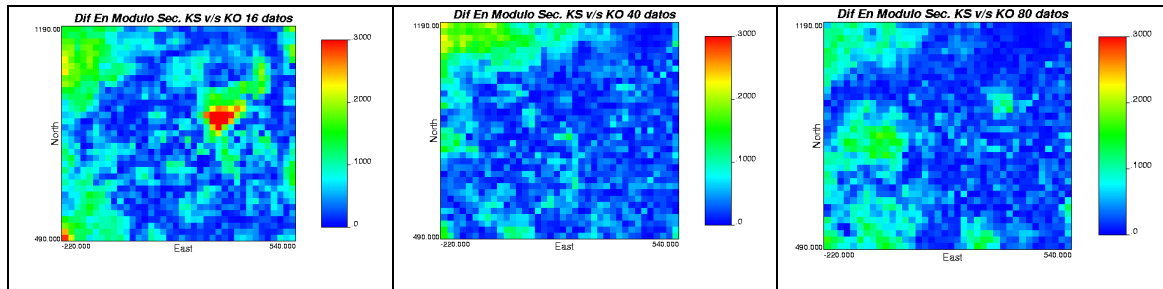
Gráfica 29: media de las realizaciones para los distintos tipos de condicionamiento y algoritmos (tercera vecindad) y mapa de los sondajes.

A continuación se presentan las estadísticas básicas para la media de las realizaciones en todos los casos presentados:

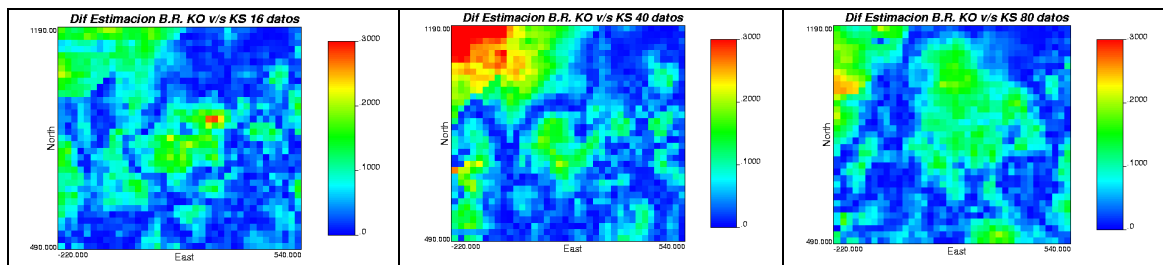
Simulación	Nº Bloques	Media(%)	Des. Estándar(%)	Varianza	Coef. Variación(%)	Máximo(%)	Mínimo(%)
B.Rotantes K.S 16 datos.	2660	0.935	0.445	0.198	0.475	2.554	0.067
B.Rotantes K.O 16 datos.	2660	0.916	0.473	0.224	0.517	2.611	0.065
B.Rotantes K.S 40 datos.	2660	0.934	0.404	0.163	0.432	2.452	0.070
B.Rotantes K.O 40 datos.	2660	0.911	0.448	0.201	0.492	2.531	0.067
B.Rotantes K.S 80 datos.	2660	0.881	0.431	0.186	0.490	2.380	0.059
B.Rotantes K.O 80 datos.	2660	0.899	0.443	0.196	0.493	2.447	0.065
Sec. K.S + Var. K.S 16 datos.	2660	0.884	0.424	0.180	0.480	2.360	0.072
Sec. K.O + Var. K.O 16 datos.	2660	0.870	0.441	0.194	0.507	2.418	0.084
Sec. K.O + Var. K.S 16 datos.	2660	0.914	0.430	0.185	0.471	2.505	0.088
Sec. K.S + Var. K.S 40 datos.	2660	0.884	0.425	0.181	0.479	2.360	0.071
Sec. K.O + Var. K.O 40 datos.	2660	0.865	0.441	0.194	0.509	2.323	0.072
Sec. K.O + Var. K.S 40 datos.	2660	0.873	0.437	0.191	0.500	2.288	0.064
Sec. K.S + Var. K.S 80 datos.	2660	0.863	0.430	0.185	0.498	2.297	0.063
Sec. K.O + Var. K.O 80 datos.	2660	0.837	0.441	0.195	0.528	2.273	0.063
Sec. K.O + Var. K.S 80 datos.	2660	0.873	0.436	0.190	0.500	2.289	0.064

Tabla 10: estadísticas básicas para la media de las realizaciones.

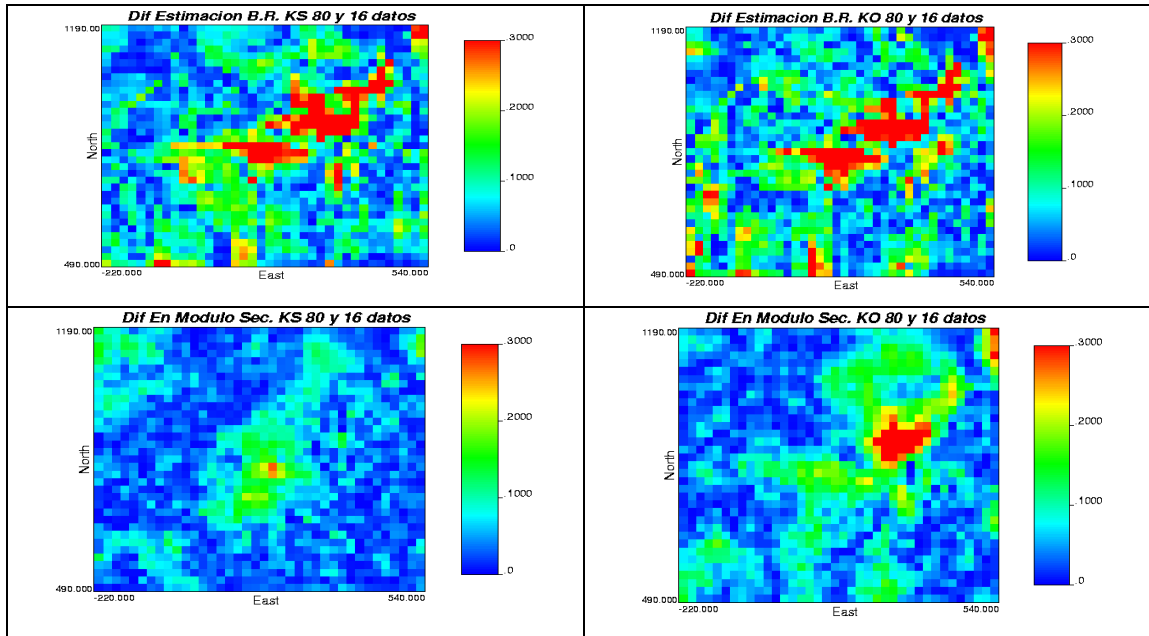
Para ver con mayor claridad las diferencias entre los distintos casos, se muestran a continuación mapas de diferencias (módulo de las diferencias de leyes) para los casos más relevantes:



Gráfica 30: modulo de la diferencia en los resultados para método secuencial K.O más varianza K.O v/s secuencial K.S más varianza K.S, para los casos 1, 2 y 3 (izquierda a derecha).



Gráfica 31: modulo de la diferencia en los resultados para método bandas rotantes K.O v/s método bandas rotantes K.S, para los casos 1, 2 y 3 (izquierda a derecha).



Gráfica 32: diferencia en los resultados para método bandas rotantes entre casos extremos (80 y 16 datos) para ambos tipos de condicionamientos (arriba) y diferencia en los resultados para método secuencial entre casos extremos (80 y 16 datos) para ambos tipos de condicionamientos, sin considerar el caso mixto (abajo).

Podemos ver en las gráficas 30 y 31, que existen grandes diferencias entre un tipo de condicionamiento y otro, principalmente en la zona oeste y noroeste del dominio (sector correspondiente a la zona con baja cantidad de muestras) y en la zona central (correspondiente a alta ley). En la gráfica 32, se muestra que la mayor diferencia se da al comparar los resultados para el algoritmo de bandas rotantes con 2 datos por octante y 10 datos por octante, en ambos tipos de condicionamiento. En el caso del método secuencial, las diferencias no son tan grandes. Esto se corrobora al examinar las estadísticas del módulo de la diferencia en los casos anteriores:

Módulo de la diferencia de estimación	Media (%)	Máximo (%)	Mínimo (%)
Sec. K.S - K.S w/s Sec K.O- K.O 16 datos	0.061	0.494	0
Sec. K.S - K.S w/s Sec K.O- K.O 40 datos	0.052	0.298	0
Sec. K.S - K.S w/s Sec K.O- K.O 80 datos	0.041	0.172	0
B. Rotantes K.S w/s B. Rotantes K.O 16 datos	0.06	0.282	0
B. Rotantes K.S w/s B. Rotantes K.O 40 datos	0.075	0.473	0
B. Rotantes K.S w/s B. Rotantes K.O 80 datos	0.062	0.254	0
Sec. K.S - K.S 80 datos w/s Sec K.S- K.S 16 datos	0.047	0.273	0
Sec. K.O - K.O 80 datos w/s Sec K.O- K.O 16 datos	0.071	0.554	0
B. Rotantes K.S 80 datos w/s B. Rotantes K.S 16 datos	0.121	1.277	0
B. Rotantes K.O 80 datos w/s B. Rotantes K.O 16 datos	0.102	1.355	0

Tabla 11: estadísticas del módulo de la diferencia de leyes simuladas.

En la sección de anexos G, se incluyen los mapas de las diferencias de las leyes simuladas. Ahí se puede observar que el condicionamiento usando Kriging ordinario, entrega valores mayores en la zona central y menores en la zona noroeste para todos los casos.

Finalmente, con el objeto de analizar más detalladamente cada caso, ya que la media de las realizaciones disminuye la variabilidad de los resultados, se presenta a continuación las estadísticas básicas para todas las realizaciones (30 para cada caso), sus histogramas y las tablas de curvas tonelaje-ley.

Simulación	Nº Bloques	Media(%)	Des. Estándar(%)	Varianza	Coef. Variación(%)	Máximo(%)	Mínimo(%)
B. Rotantes K.S 16 datos.	79800	0.935	0.504	0.254	0.539	3.187	0.034
B. Rotantes K.S 40 datos.	79800	0.934	0.476	0.227	0.51	2.935	0.039
B. Rotantes K.S 80 datos.	79800	0.881	0.483	0.233	0.549	2.781	0.033
B. Rotantes K.O 16 datos.	79800	0.916	0.528	0.279	0.577	3.302	0.022
B. Rotantes K.O 40 datos.	79800	0.911	0.502	0.252	0.55	2.992	0.023
B. Rotantes K.O 80 datos.	79800	0.899	0.497	0.247	0.553	2.848	0.028
Sec. K.S + Var. K.S 16 datos.	79800	0.884	0.456	0.208	0.516	2.622	0.05
Sec. K.S + Var. K.S 40 datos.	79800	0.874	0.453	0.205	0.515	2.62	0.042
Sec. K.S + Var. K.S 80 datos.	79800	0.863	0.467	0.218	0.542	2.617	0.038
Sec. K.O + Var. K.O 16 datos.	79800	0.87	0.475	0.226	0.546	2.852	0.042
Sec. K.O + Var. K.O 40 datos.	79800	0.865	0.472	0.223	0.546	2.644	0.021
Sec. K.O + Var. K.O 80 datos.	79800	0.837	0.473	0.224	0.566	2.646	0.039
Sec. K.O + Var. K.S 16 datos.	79800	0.914	0.473	0.224	0.518	2.863	0.037
Sec. K.O + Var. K.S 40 datos.	79800	0.873	0.474	0.225	0.543	2.629	0.035
Sec. K.O + Var. K.S 80 datos.	79800	0.874	0.478	0.228	0.563	2.623	0.035

Tabla 12: estadísticas básicas para todas las realizaciones.

En la tabla anterior, vemos que los casos con mayor varianza corresponden a los que utilizan el algoritmo de bandas rotantes y Kriging ordinario.

Ley de Corte [%]	Sim. Bandas Rotantes K.O 16 Datos		Sim. Bandas Rotantes K.S 16 Datos		Sim. Bandas Rotantes K.O 40 Datos		Sim. Bandas Rotantes K.O 40 Datos		Sim. Bandas Rotantes K.O 80 Datos		Sim. Bandas Rotantes K.O 80 Datos	
	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]
0	100.0	0.916	100.0	0.935	100.0	0.911	100.0	0.934	100.0	0.898	100.0	0.880
0.1	97.1	0.941	98.5	0.949	98.2	0.927	98.5	0.947	97.7	0.918	97.7	0.900
0.2	92.8	0.978	95.0	0.978	93.9	0.963	95.1	0.975	93.8	0.950	93.6	0.932
0.3	87.6	1.020	90.3	1.015	88.5	1.006	90.6	1.011	89.1	0.987	88.8	0.969
0.4	81.4	1.072	84.4	1.062	82.6	1.052	85.8	1.048	82.9	1.034	83.0	1.012
0.5	74.3	1.131	77.7	1.115	75.8	1.106	80.4	1.088	75.5	1.091	75.8	1.066
0.6	67.1	1.193	70.5	1.172	68.6	1.165	73.4	1.139	67.7	1.153	67.7	1.127
0.7	60.1	1.257	63.1	1.234	61.3	1.226	65.8	1.196	60.2	1.216	59.5	1.193
0.8	53.4	1.320	55.8	1.297	54.2	1.288	57.6	1.259	53.0	1.280	51.7	1.259
0.9	46.9	1.386	48.6	1.363	47.5	1.351	49.5	1.326	46.2	1.343	44.3	1.328
1	41.2	1.446	42.0	1.428	41.1	1.412	41.9	1.394	39.8	1.406	37.4	1.398
1.1	35.7	1.507	35.9	1.492	35.2	1.474	34.9	1.463	33.8	1.471	31.4	1.465
1.2	30.4	1.569	30.3	1.557	29.3	1.539	29.0	1.528	27.8	1.539	25.9	1.532
1.3	25.4	1.632	24.8	1.624	23.7	1.607	23.3	1.595	22.2	1.612	20.9	1.599
1.4	20.2	1.705	19.6	1.698	18.4	1.682	18.0	1.669	17.2	1.689	16.1	1.674
1.5	15.6	1.781	14.9	1.776	13.8	1.759	13.4	1.744	13.0	1.766	12.0	1.752
1.6	11.6	1.859	11.1	1.854	10.0	1.839	9.5	1.824	9.5	1.847	8.7	1.831
1.7	8.4	1.942	7.8	1.940	6.9	1.927	6.4	1.911	6.8	1.927	6.0	1.912
1.8	5.8	2.030	5.4	2.025	4.7	2.012	4.1	2.002	4.7	2.006	4.0	1.993
1.9	3.9	2.115	3.6	2.115	3.0	2.106	2.6	2.096	3.0	2.095	2.6	2.076
2	2.5	2.208	2.4	2.201	1.8	2.204	1.6	2.192	1.9	2.186	1.5	2.168

Tabla 13: tabla curva tonelaje-ley para el algoritmo de bandas rotantes (todos los casos).

Ley de Corte [%]	Sim. Secuencial K.O + Var.K.O 16 Datos		Sim. Secuencial K.S + Var.K.S 16 Datos		Sim. Secuencial K.O + Var.K.S 16 Datos		Sim. Secuencial K.O + Var.K.O 40 Datos		Sim. Secuencial K.S + Var.K.S 40 Datos		Sim. Secuencial K.O + Var.K.S 40 Datos		Sim. Secuencial K.O + Var.K.O 80 Datos		Sim. Secuencial K.S + Var.K.S 80 Datos		Sim. Secuencial K.O + Var.K.S 80 Datos	
	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]	Tonelaje [%]	Ley Media [%]
0	100.0	0.870	100.0	0.884	100.0	0.914	100.0	0.865	100.0	0.884	100.0	0.873	100.0	0.837	100.0	0.863	100.0	0.873
0.1	99.2	0.877	99.1	0.891	99.4	0.919	98.5	0.877	99.1	0.891	98.2	0.888	98.1	0.851	98.4	0.876	98.2	0.888
0.2	95.6	0.904	96.7	0.910	96.1	0.944	94.5	0.908	96.7	0.910	93.7	0.923	93.6	0.885	94.6	0.905	93.7	0.923
0.3	90.3	0.942	92.5	0.940	91.7	0.978	88.9	0.949	92.5	0.940	87.9	0.967	87.3	0.930	89.2	0.944	87.9	0.967
0.4	82.9	0.994	85.9	0.985	85.3	1.025	82.0	1.000	85.9	0.985	81.3	1.017	79.7	0.986	82.6	0.992	81.3	1.017
0.5	74.2	1.059	77.6	1.041	77.5	1.083	74.3	1.057	77.6	1.041	74.4	1.070	71.4	1.048	74.7	1.049	74.4	1.070
0.6	65.1	1.129	68.3	1.109	69.4	1.145	66.0	1.120	68.3	1.109	67.2	1.126	63.1	1.114	66.2	1.113	67.2	1.126
0.7	57.0	1.198	59.2	1.179	61.9	1.205	57.6	1.189	59.2	1.179	59.8	1.184	55.1	1.181	57.9	1.179	59.8	1.184
0.8	49.5	1.266	50.7	1.251	54.6	1.265	49.9	1.257	50.7	1.251	52.4	1.246	47.7	1.249	49.8	1.249	52.4	1.246
0.9	42.6	1.333	43.0	1.323	47.4	1.329	43.0	1.322	43.0	1.323	45.1	1.310	40.7	1.318	42.6	1.316	45.1	1.310
1	36.4	1.398	36.6	1.389	40.7	1.392	36.9	1.384	36.6	1.389	38.2	1.375	34.6	1.382	36.2	1.382	38.2	1.375
1.1	30.8	1.463	30.9	1.452	34.3	1.456	31.2	1.445	30.9	1.452	32.1	1.438	29.1	1.445	30.4	1.445	32.1	1.438
1.2	25.7	1.525	25.8	1.511	28.3	1.520	25.9	1.506	25.8	1.511	26.3	1.501	24.2	1.505	25.3	1.505	26.3	1.501
1.3	20.9	1.588	20.9	1.572	22.9	1.585	20.5	1.573	20.9	1.572	20.8	1.567	19.3	1.569	20.2	1.569	20.8	1.567
1.4	16.0	1.660	15.8	1.643	17.5	1.656	15.5	1.646	15.8	1.643	15.5	1.641	14.5	1.643	15.1	1.644	15.5	1.641
1.5	11.8	1.736	11.3	1.722	12.9	1.730	11.1	1.723	11.3	1.722	11.1	1.718	10.4	1.720	10.8	1.722	11.1	1.718
1.6	8.2	1.818	7.5	1.809	9.0	1.809	7.6	1.806	7.5	1.809	7.6	1.799	7.0	1.803	7.4	1.803	7.6	1.799
1.7	5.5	1.901	4.9	1.896	5.9	1.895	5.0	1.889	4.9	1.896	4.8	1.885	4.6	1.884	4.8	1.886	4.8	1.885
1.8	3.5	1.989	3.1	1.984	3.6	1.986	3.1	1.977	3.1	1.984	3.0	1.972	2.8	1.970	3.0	1.971	3.0	1.972
1.9	2.1	2.081	1.8	2.076	2.1	2.089	1.9	2.064	1.8	2.076	1.7	2.061	1.7	2.055	1.7	2.062	1.7	2.061
2	1.2	2.185	1.1	2.170	1.2	2.191	1.1	2.153	1.1	2.170	1.0	2.152	0.9	2.140	1.0	2.146	1.0	2.152

Tabla 14: tabla curva tonelaje-ley para el algoritmo secuencial (todos los casos)

De las tablas anteriores, vemos que existen mayores diferencias con respecto al primer caso de estudio. Esto se explica la mayor continuidad espacial y por tendencias en la distribución de la ley en el dominio a estudiar, que permite distinguir más nítidamente entre la media global y las medias locales, luego entre los condicionamientos por Kriging simple y ordinario.

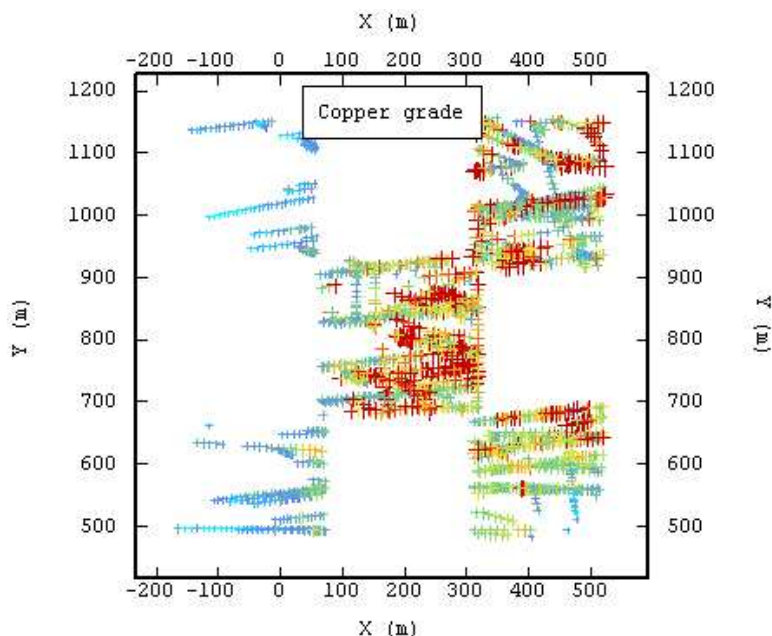
### **7.6-.Validación.**

Con la finalidad de determinar cuál método entrega mejores resultados, en cuanto a la precisión y exactitud, se realizó una validación de los todos los casos considerados mediante un método de “Jack-knife”. Para esto se dividió el total de las muestras disponibles en dos poblaciones, y se estimará una población a partir de la otra.

La población considerada para estimar la otra población consta de 2982 datos, con una ley media igual 1.15%, mientras que la población estimada tiene 1916 datos, con una ley media igual a 1.08%.

A continuación se muestra la distribución espacial de la 2 población a partir de la cual se estimará las zonas que no presentan valores (zonas en blanco).





Gráfica 33: sectorización espacial de las poblaciones.

A continuación se presentan los resultados de la validación para los distintos casos. Como criterios de comparación, se busca que la media de los datos sea igual a la media de los datos estimados (insesgo global), que la correlación entre los datos reales y los datos estimados sea la más alta posible y por último que la varianza del error (valor real – valor estimado) sea baja.

Validación	Media Error	Des. Estándar(%)	Varianza	Coef. Correlación(%)
B.Rotantes K.S 16 datos.	-0.0081	0.505	0.255	0.320
B.Rotantes K.O 16 datos.	-0.0550	0.511	0.262	0.302
B.Rotantes K.S 40 datos.	-0.0044	0.500	0.250	0.334
B.Rotantes K.O 40 datos.	0.0006	0.501	0.251	0.329
B.Rotantes K.S 80 datos.	0.0066	0.501	0.251	0.330
B.Rotantes K.O 80 datos.	0.0048	0.501	0.251	0.329
Sec. K.S + Var. K.S 16 datos.	0.0039	0.506	0.256	0.317
Sec. K.O + Var. K.O 16 datos.	0.0004	0.503	0.253	0.327
Sec. K.O + Var. K.S 16 datos.	0.0004	0.503	0.253	0.327
Sec. K.S + Var. K.S 40 datos.	0.0073	0.495	0.245	0.347
Sec. K.O + Var. K.O 40 datos.	0.0025	0.496	0.246	0.347
Sec. K.O + Var. K.S 40 datos.	0.0025	0.492	0.242	0.358
Sec. K.S + Var. K.S 80 datos.	0.0132	0.497	0.247	0.340
Sec. K.O + Var. K.O 80 datos.	0.0054	0.499	0.249	0.336
Sec. K.O + Var. K.S 80 datos.	0.0052	0.496	0.246	0.344

Tabla 15: resultados de las validaciones.

De la tabla anterior podemos concluir que en la mayoría de los casos en los cuales se condicionan las simulaciones con el método de Kriging simple, la ley media estimada tiene una mayor diferencia con la ley media real de los datos, que en los casos donde se utiliza el condicionamiento por Kriging ordinario.

Comparando los algoritmos (secuencial y bandas rotantes), vemos que las medias de los errores para el algoritmo de bandas rotantes son similares a las entregadas por el algoritmo secuencial, pero las varianzas de los errores en el primero son mayores que en el segundo.

Finalmente, podemos concluir que los casos que entregan mejores resultados en las validaciones corresponden a los casos: secuencial usando Kriging ordinario y la varianza de Kriging ordinario y secuencial usando Kriging ordinario y la varianza Kriging de simple (para mayor detalle ver anexos I).

## **8.-Conclusiones y Recomendaciones.**

De los resultados de este trabajo de título podemos concluir lo siguiente:

El problema de las simulaciones en cuanto a la reproducción de zonas claramente diferentes en cuanto al valor del atributo, se debe principalmente a la influencia de la ley media global en el Kriging simple, que compensa la falta de información en zonas donde la cantidad de datos es escasa, pero a la vez daña el resultado, al no corresponder al comportamiento real del atributo a escala local.

Por esto el uso de Kriging ordinario, que corresponde a estimar la ley media en una vecindad local y con ésta realizar un Kriging simple, tiende a mejorar la reproducción de tendencias espaciales en las zonas donde la cantidad de información disponible es escasa, con respecto al uso de Kriging simple. En cambio, los resultados son variables dependiendo de los parámetros considerados en el condicionamiento, por lo cual es muy importante tener un buen conocimiento de la distribución espacial del atributo, para así determinar el tamaño de vecindad de Kriging apropiado y el número de datos condicionantes adecuado.

Se observa que el uso de Kriging ordinario trae mejoras en relación al uso de Kriging simple, pero para aquello se necesitan ciertos requerimientos, por ejemplo que existan tendencias espaciales del atributo a simular (lo que no se dio en el primer caso de estudio dando resultado relativamente similares), que la vecindad de búsqueda no sea ni muy grande (los resultados se parecen al entregado por el uso de Kriging simple) ni muy chica (condicionamiento pobre), que sea adecuada a la escala de variación de la ley media y, por último, que los datos condicionantes no sean demasiado abundantes para que la media tenga importancia.

En el segundo caso de estudio, vemos que se cumplen los requerimientos anteriores, lo cual permite obtener información más relevante desde el punto de

vista de las conclusiones. Al observar las plantas de la zona simulada vemos que la metodología propuesta entrega resultados que están acordes con la realidad, en especial con bajas leyes en el sector oeste. Para determinar cuál metodología entrega mejores resultados, se realizó una validación tipo jack-knife, considerando una sectorización en dos poblaciones y dejando zonas sin datos condicionantes. Esto entregó que la mejor estimación siempre correspondió a los casos en los cuales se usó el Kriging ordinario. También quedó claro que el aumento de datos condicionantes en la vecindad disminuye las diferencias entre los dos tipos de condicionamientos.

Con respecto al uso del caso secuencial con estimador de Kriging ordinario más varianza de Kriging simple, los resultados son muy parecidos al caso secuencial con estimador de Kriging ordinario más varianza de Kriging ordinario. Esto se explica básicamente por la mayor influencia del estimador con respecto a la varianza utilizada. A pesar de esto, el método mixto pero no este caso no tiene un respaldo matemático y es mucho más lento ya que tiene que realizar en cada etapa dos sistemas de Kriging (uno simple y otro ordinario).

En cuanto al algoritmo de simulación utilizado, vemos que existen diferencias producidas básicamente por la implementación (definición del número de nodos previamente simulados en el método secuencial, que no se requiere para el método de bandas rotantes).

Además, la implementación del condicionamiento usando Kriging ordinario no es complicada y los tiempos de cálculo no aumentan significativamente. Por esto se recomienda utilizar el condicionamiento con Kriging ordinario, ya que entrega resultados más realistas, y en ningún caso son peores que los entregados por la metodología actualmente utilizada, pero para ello se necesita tener un buen control de los parámetros y un conocimiento de la escala de variación de la ley media.

Finalmente, vemos que actualmente se utiliza para realizar estimaciones el Kriging ordinario en desmedro del Kriging simple. Por esto uno podría preguntarse por que en las simulaciones geoestadísticas el uso de Kriging ordinario en el condicionamiento no es preferido como en el caso de la estimación.

A modo de recomendación se propone comparar idealmente los resultados entregados por este estudio con los valores reales obtenidos durante el proceso de explotación de los yacimientos estudiados, para así determinar realmente el efecto de utilizar esta metodología.

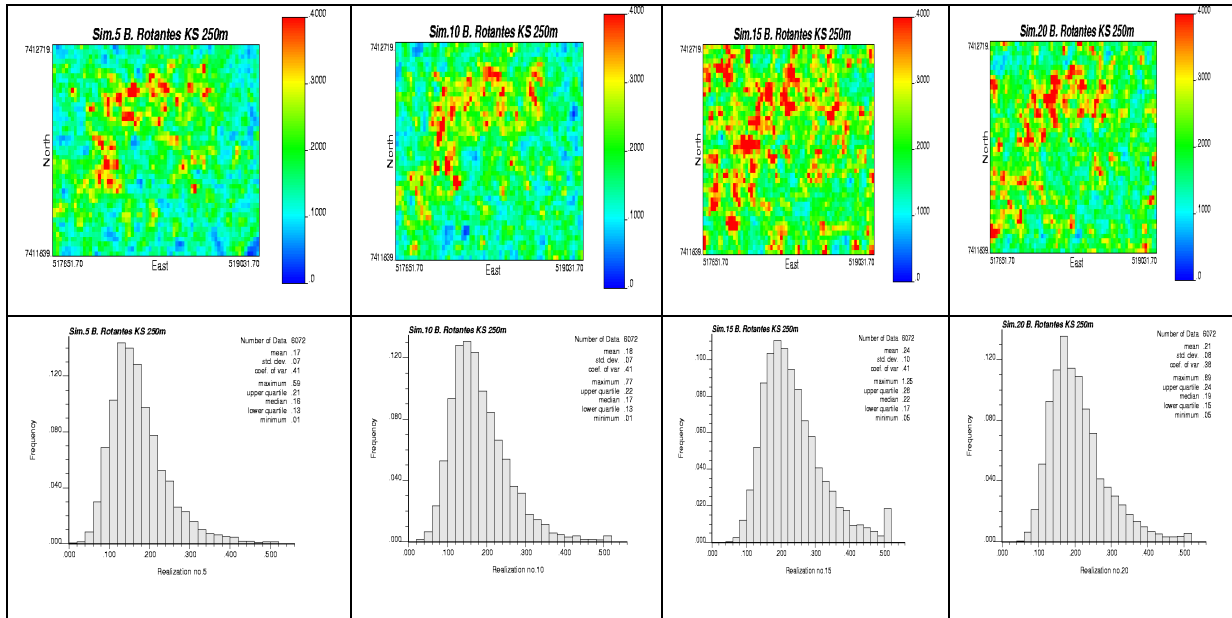
Por último, para trabajos futuros relacionados con este tema, sería muy beneficioso analizar en mayor profundidad los parámetros tratados en este trabajo, pero además incluir otras variables como: el tipo de roca, tipo de mineralización, estructuras presentes, etc, lo cual puede generar complicaciones pero a la vez un aumento de información, lo cual si es utilizada correctamente, aumentará la precisión del estudio.

## 9.- Bibliografía.

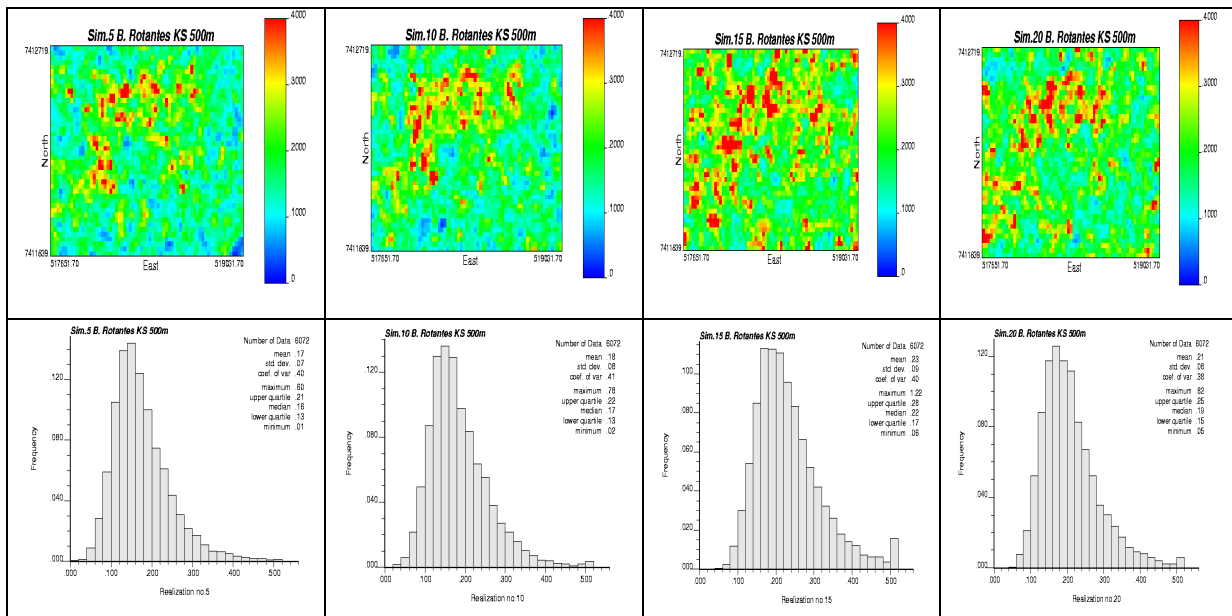
1. Chilès J.P. and Delfiner P., 1999, "Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty", New York: Wiley, 695 p.
2. Lantuéjoul C., 2002, "Geostatistical simulation, models and algorithms", Berlin: Springer – Verlag, 256 p.
3. Goovaerts P., 1997, "Geostatistics for Natural Resources Evaluation", Oxford University Press, Nueva York, 483 p.
4. Deutsch C.V. and Journel A.G., 1998, "GSLIB: geostatistical software library and user's guide", Oxford University Press, New York, 369 p.
5. García de Jalón J, 2004, Manual de Matlab "Aprenda Matlab 6.5" Madrid.
6. Emery X, 2006, Apuntes de clases "Geoestadística", Universidad de Chile.
7. Emery X, 2006, Apuntes de clases "Tópicos avanzados en geoestadística", Universidad de Chile.
8. Journel A.G. and Huijbregts C.J., 1978, "Mining Geostatistics", Academic Press, London, 600 p.
9. Emery X, 2007, Conditioning simulations of Gaussian random fields by ordinary kriging. Mathematical Geology, vol 39, nº 6.
10. Emery X. and Lantuéjoul C., 2006, "TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional Gaussian random fields via the turning bands method", Computers & Geosciences, Vol. 32, nº10, p. 1615-1628.

# **Anexos.**

# Anexo A: Mapas e histogramas de simulaciones por bandas rotantes 1º caso de estudio.

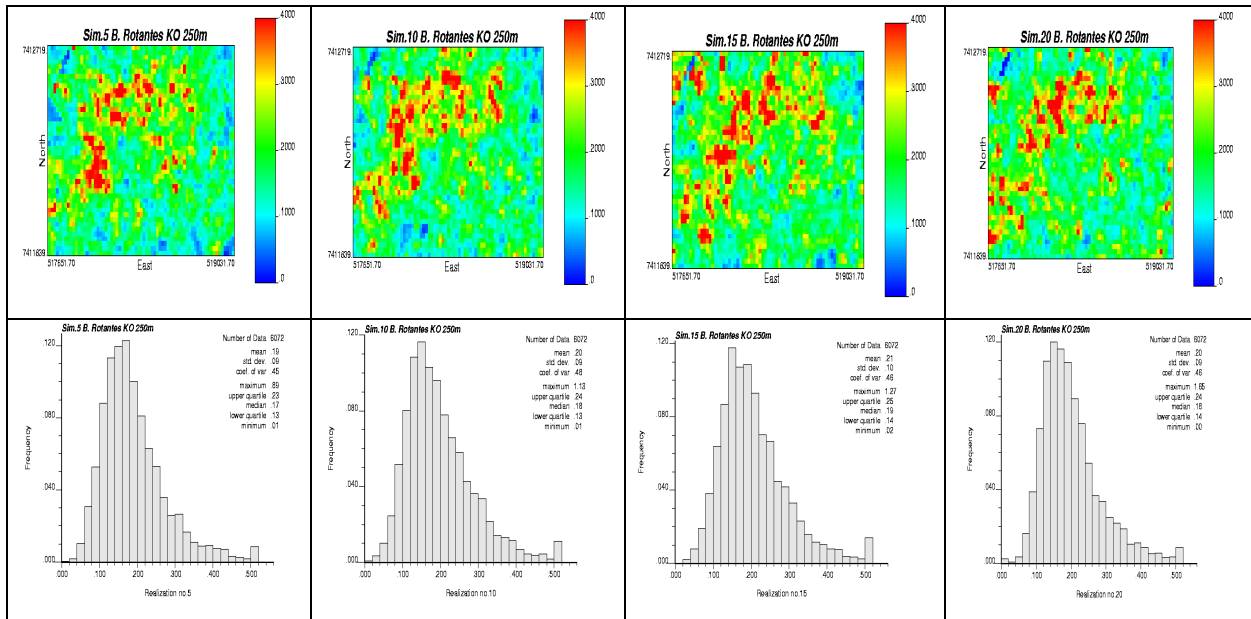


Gráfica 34: Plantas e histogramas de simulaciones por bandas rotantes (K.S, vecindad 250[m]).

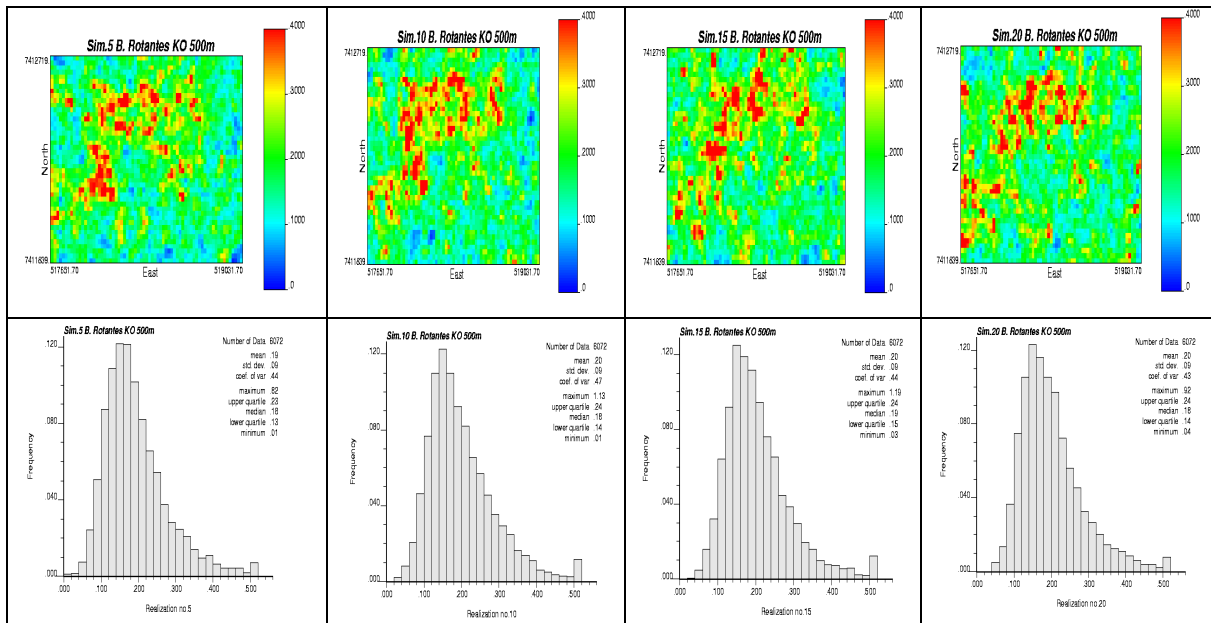


Gráfica 35: Plantas e histogramas de simulaciones por bandas rotantes (K.S, vecindad 500[m]).

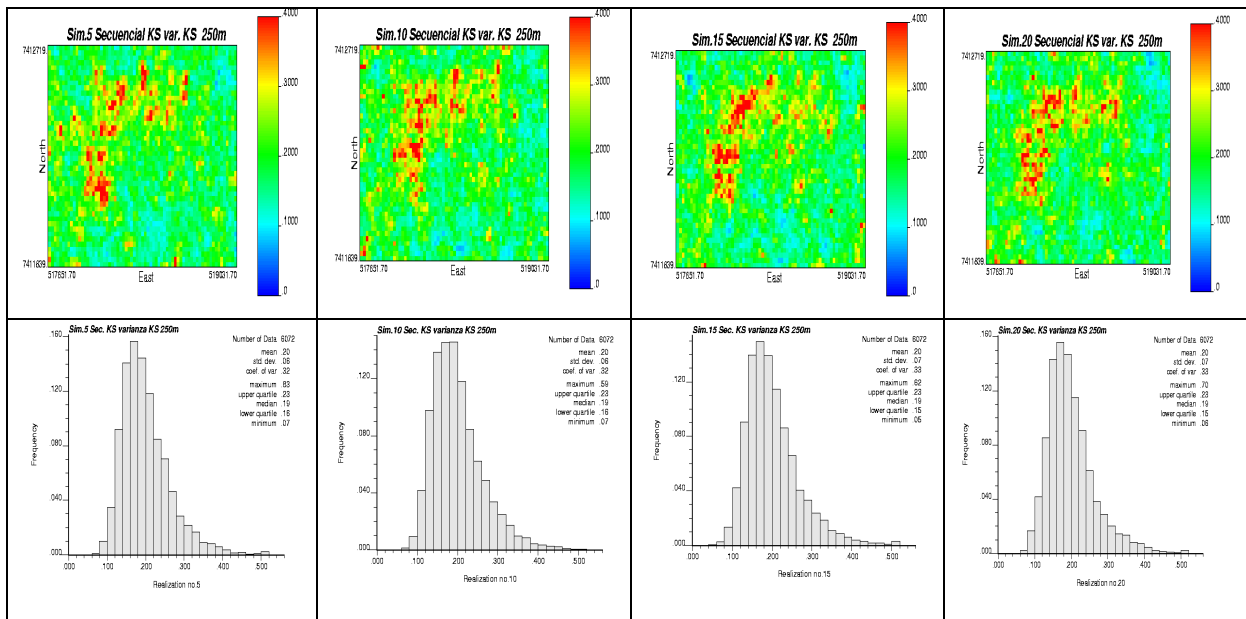




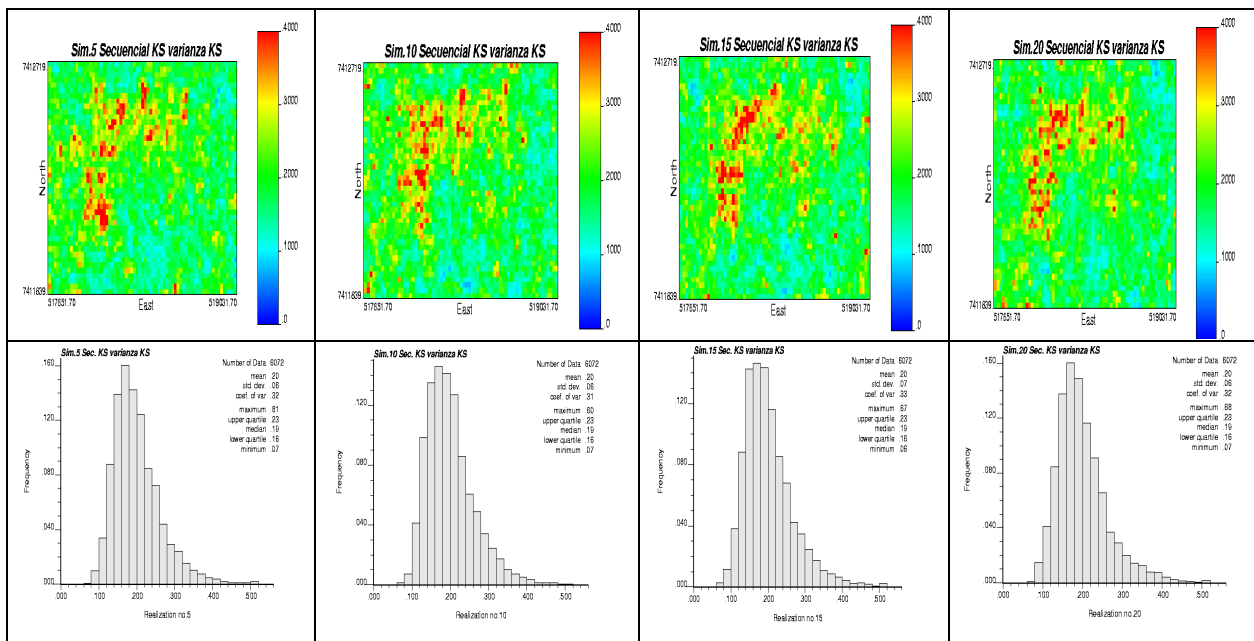
Gráfica 36: Plantas e histogramas de simulaciones por bandas rotantes (K.O, vecindad 250[m]).



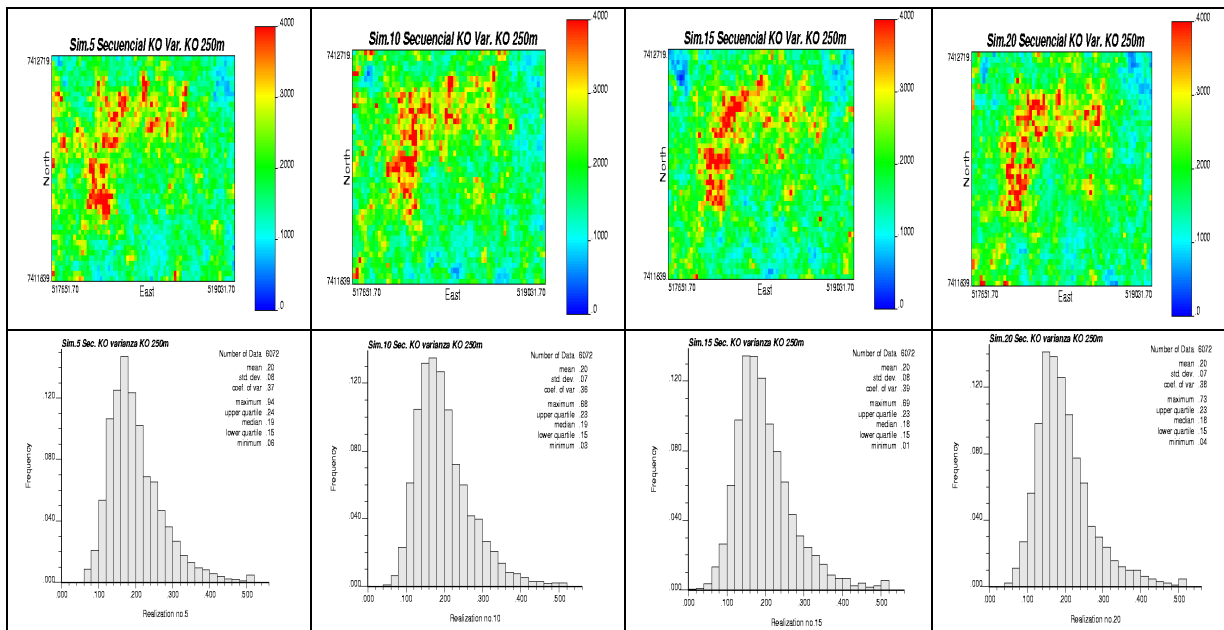
Gráfica 37: Plantas e histogramas de simulaciones bandas por rotantes (K.O, vecindad 500[m]).



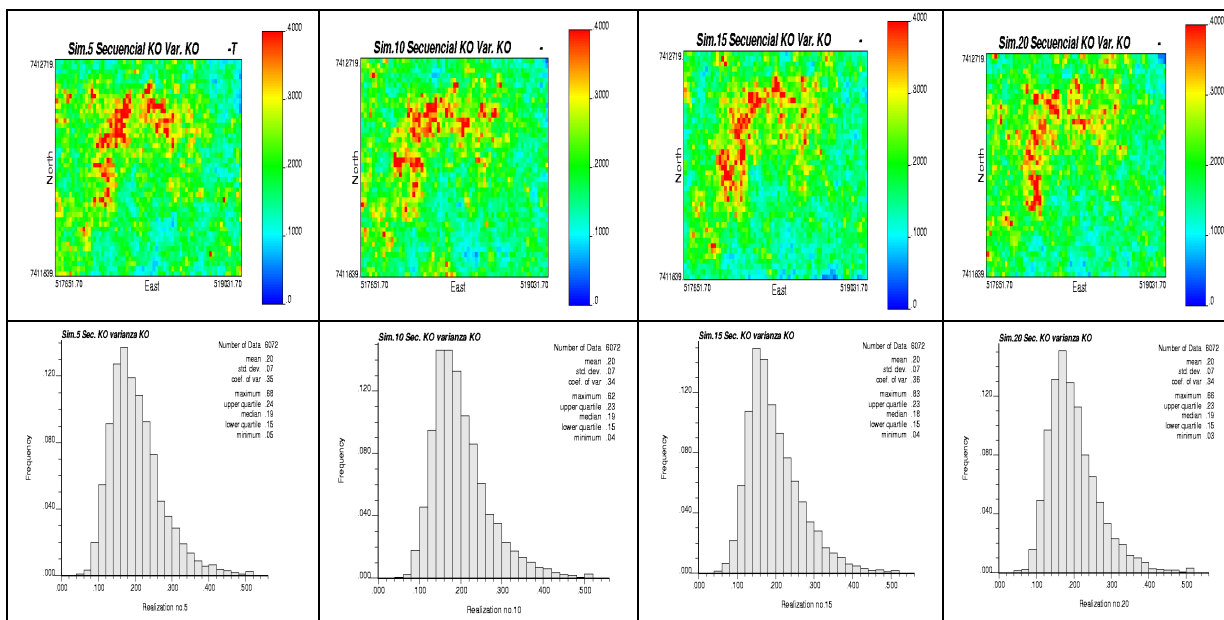
Gráfica 38: Plantas e histogramas de simulaciones secuenciales (K.S + varianza K.S, vecindad 250[m]).



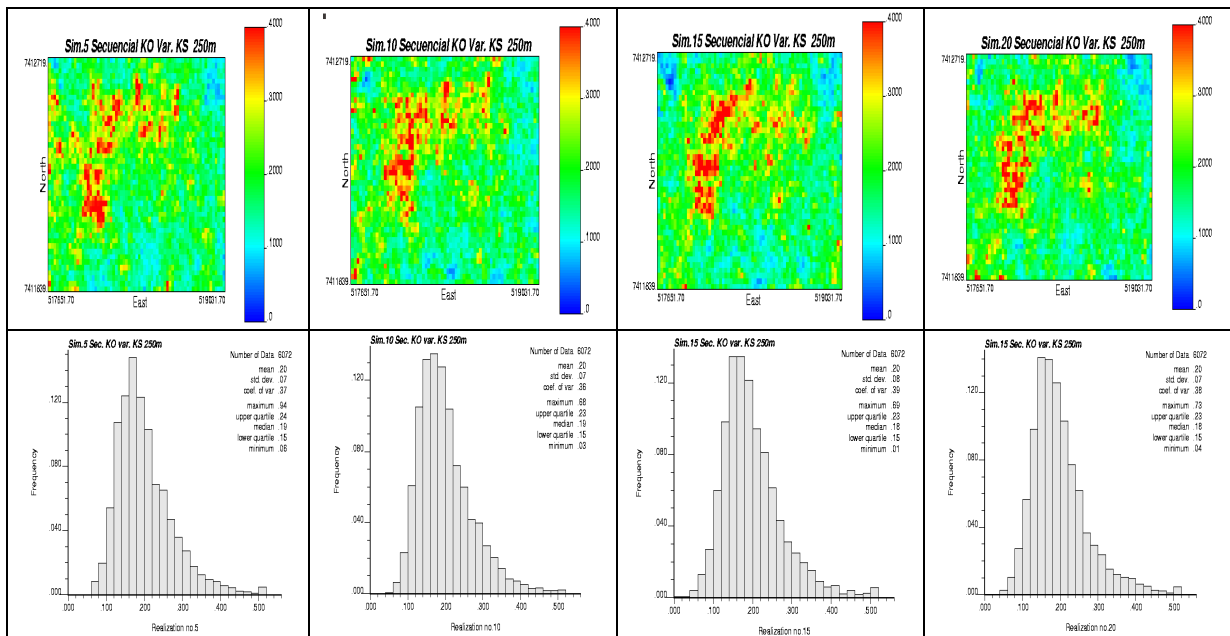
Gráfica 39: Plantas e histogramas simulaciones secuenciales K.S varianza K.S vecindad 500[m].



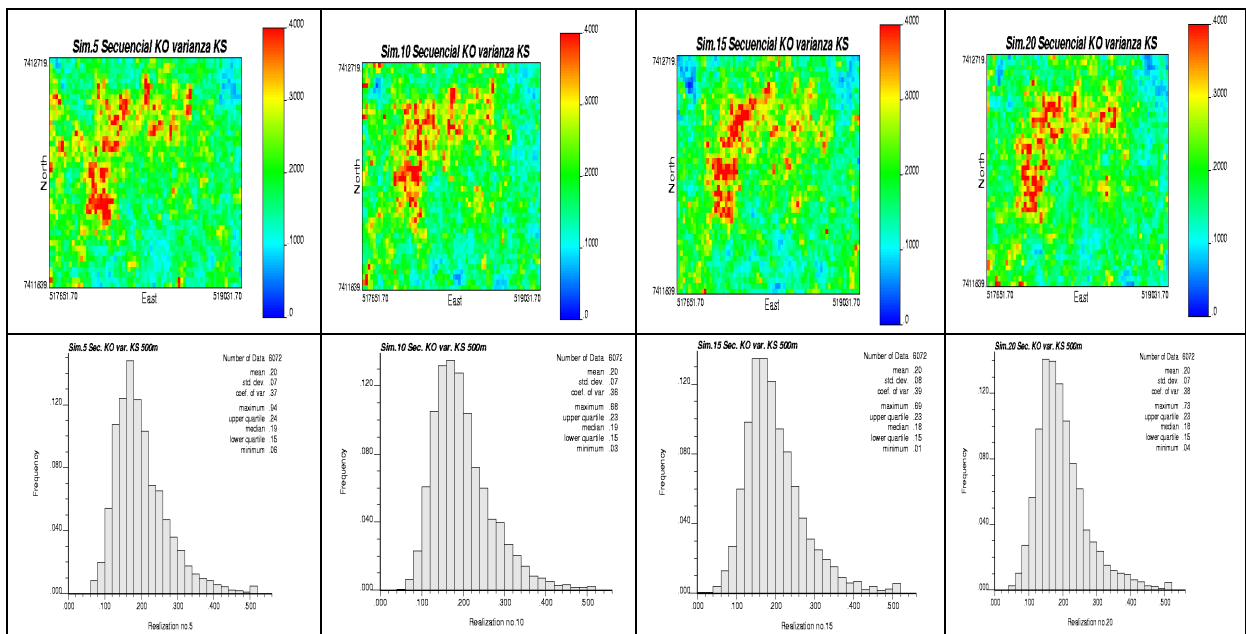
Gráfica 40: Plantas e histogramas de simulaciones secuenciales (K.O + varianza K.O, vecindad 250[m]).



Gráfica 41: Plantas e histogramas de simulaciones secuenciales (K.O + varianza K.O, vecindad 500[m]).

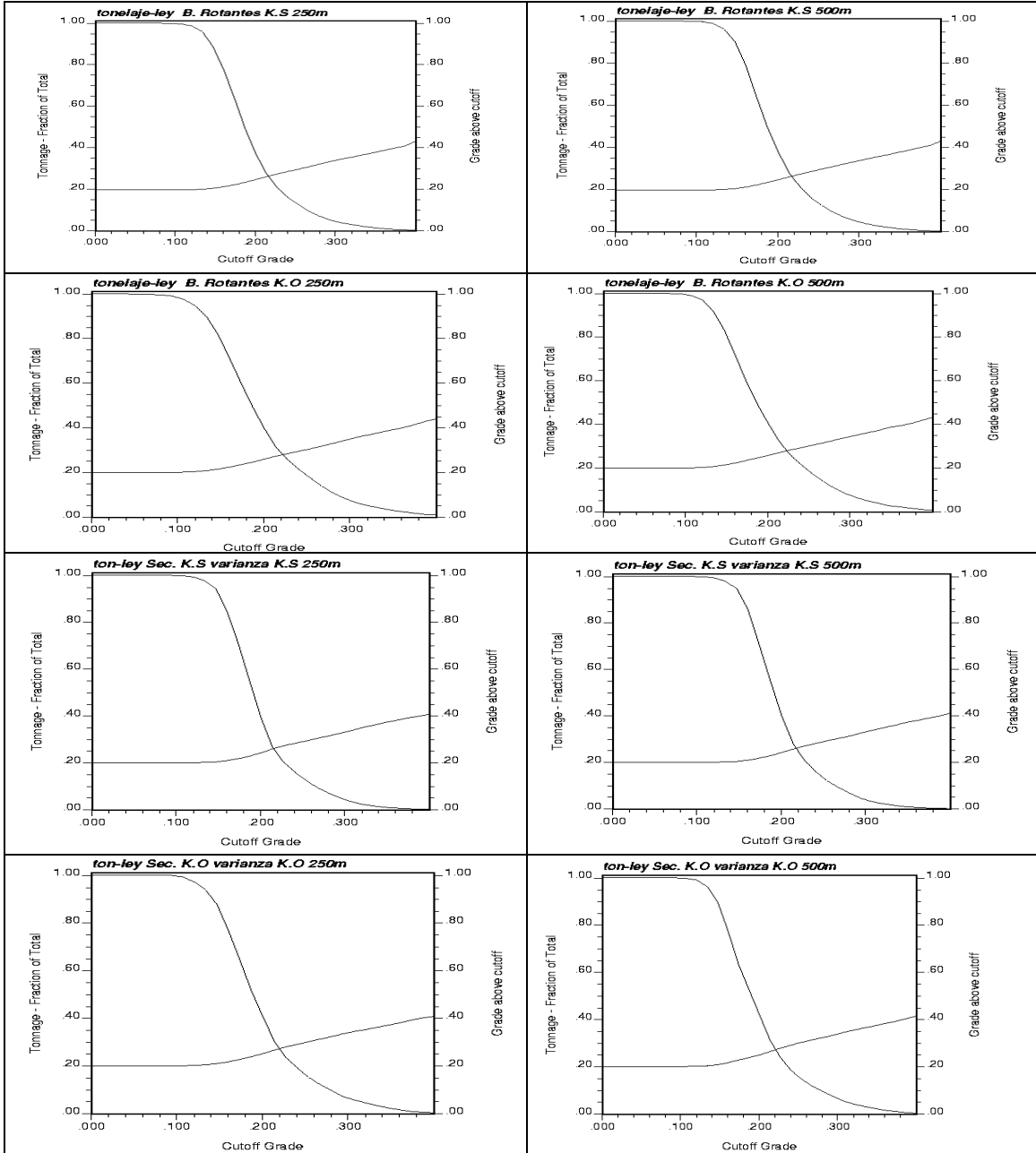


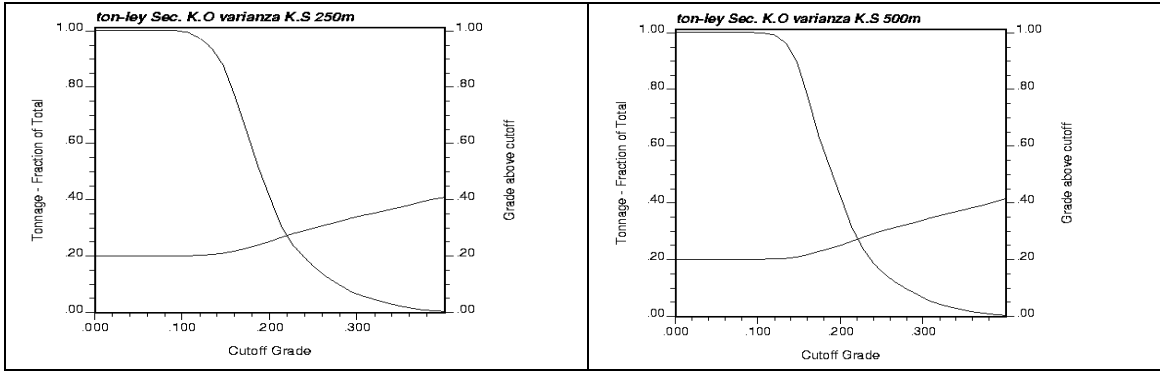
Gráfica 42: Plantas e histogramas de simulaciones secuenciales (K.O + varianza K.S, vecindad 250[m]).



Gráfica 43: Plantas e histogramas de simulaciones secuenciales (K.O + varianza K.S, vecindad 500[m]).

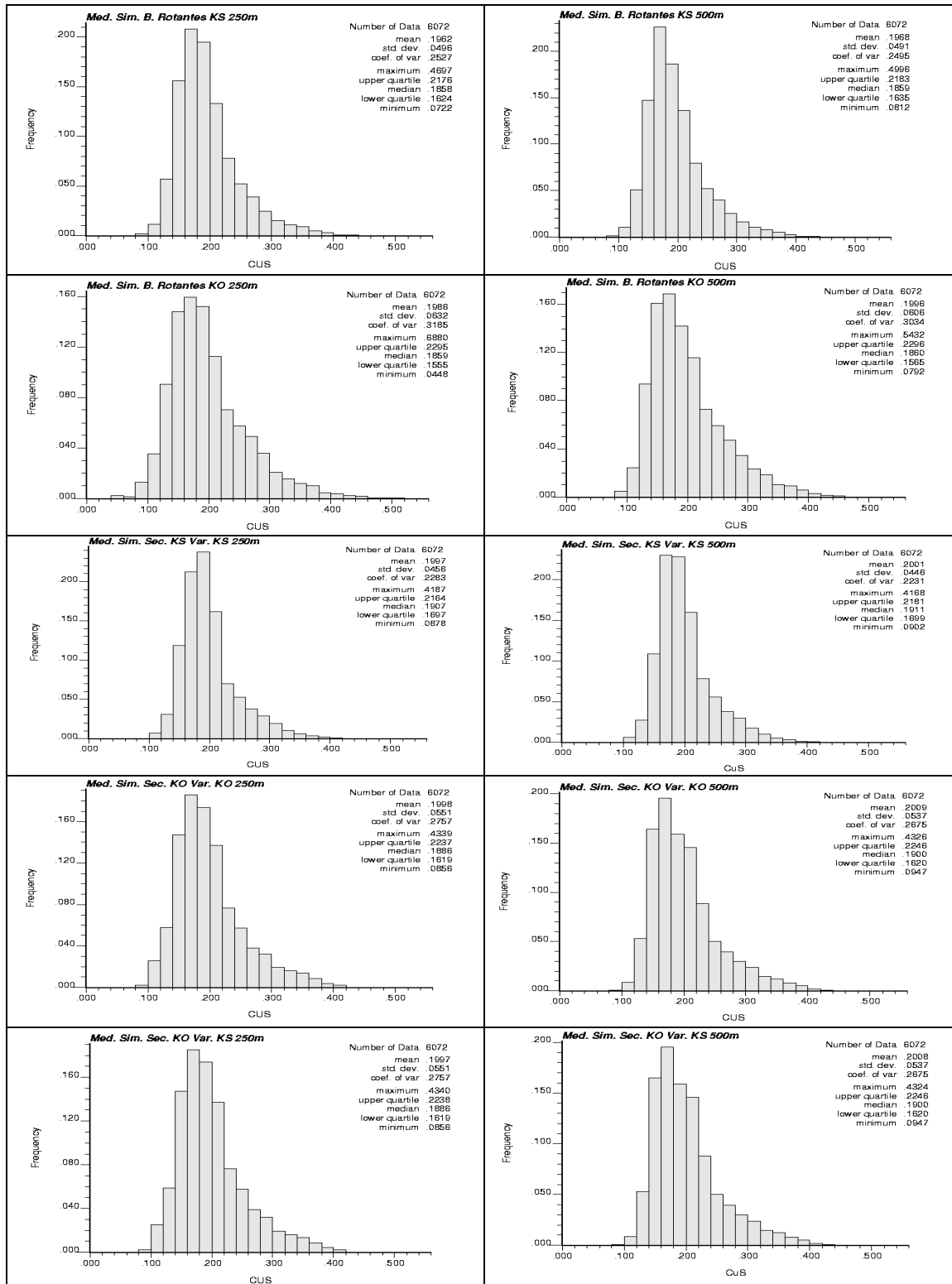
## Anexo B: Curvas tonelaje-ley para las medias de las simulaciones 1º caso de estudio.





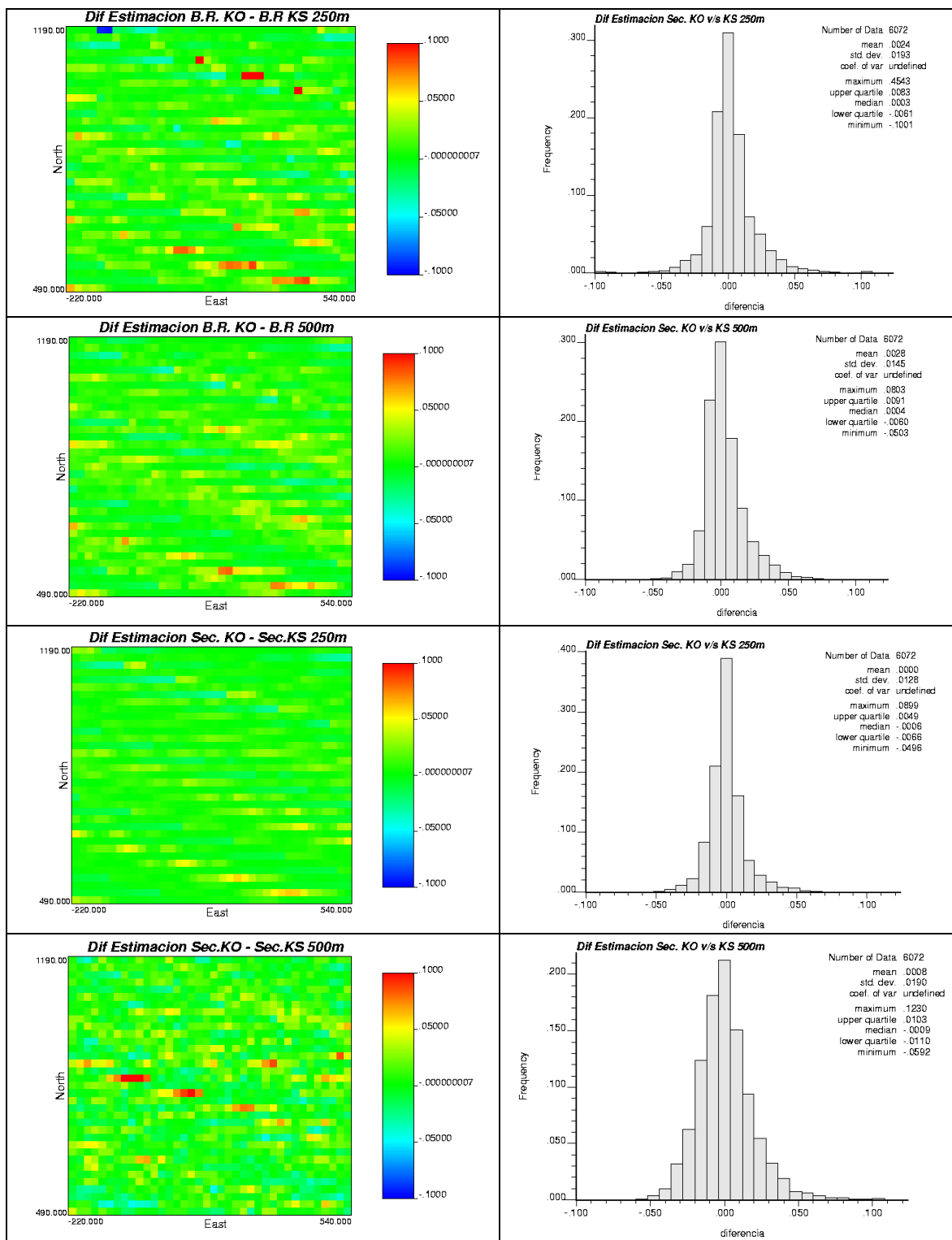
Grafica 44: curvas tonelaje – ley para la media de las simulaciones (1° caso estudio).

# Anexo C: Histogramas de la media de las simulaciones, 1° caso de estudio.



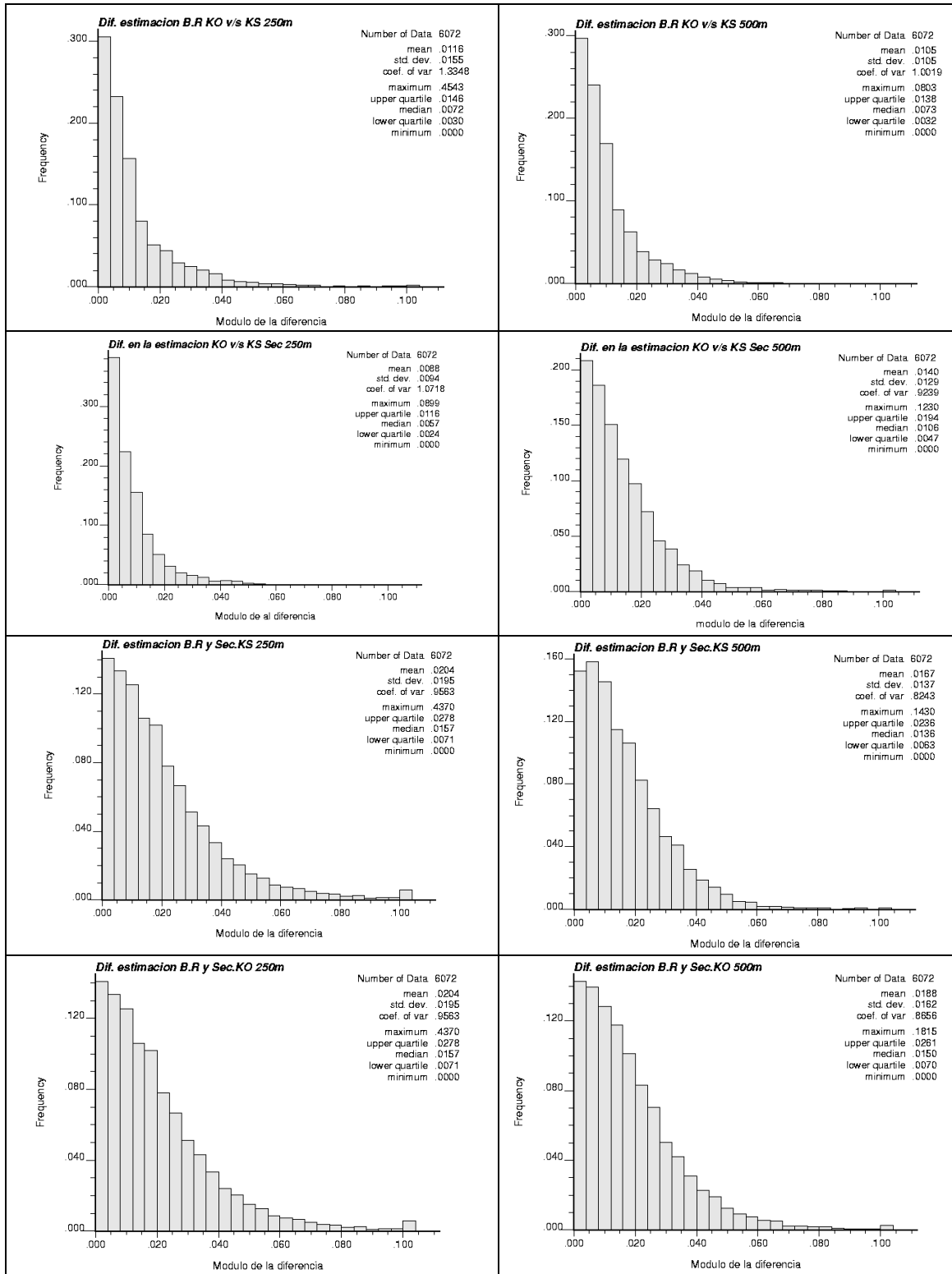
Gráfica 45: histogramas de la media de las simulaciones (1° caso de estudio).

## Anexo D: Diferencias entre los distintos métodos, 1º caso de estudio.



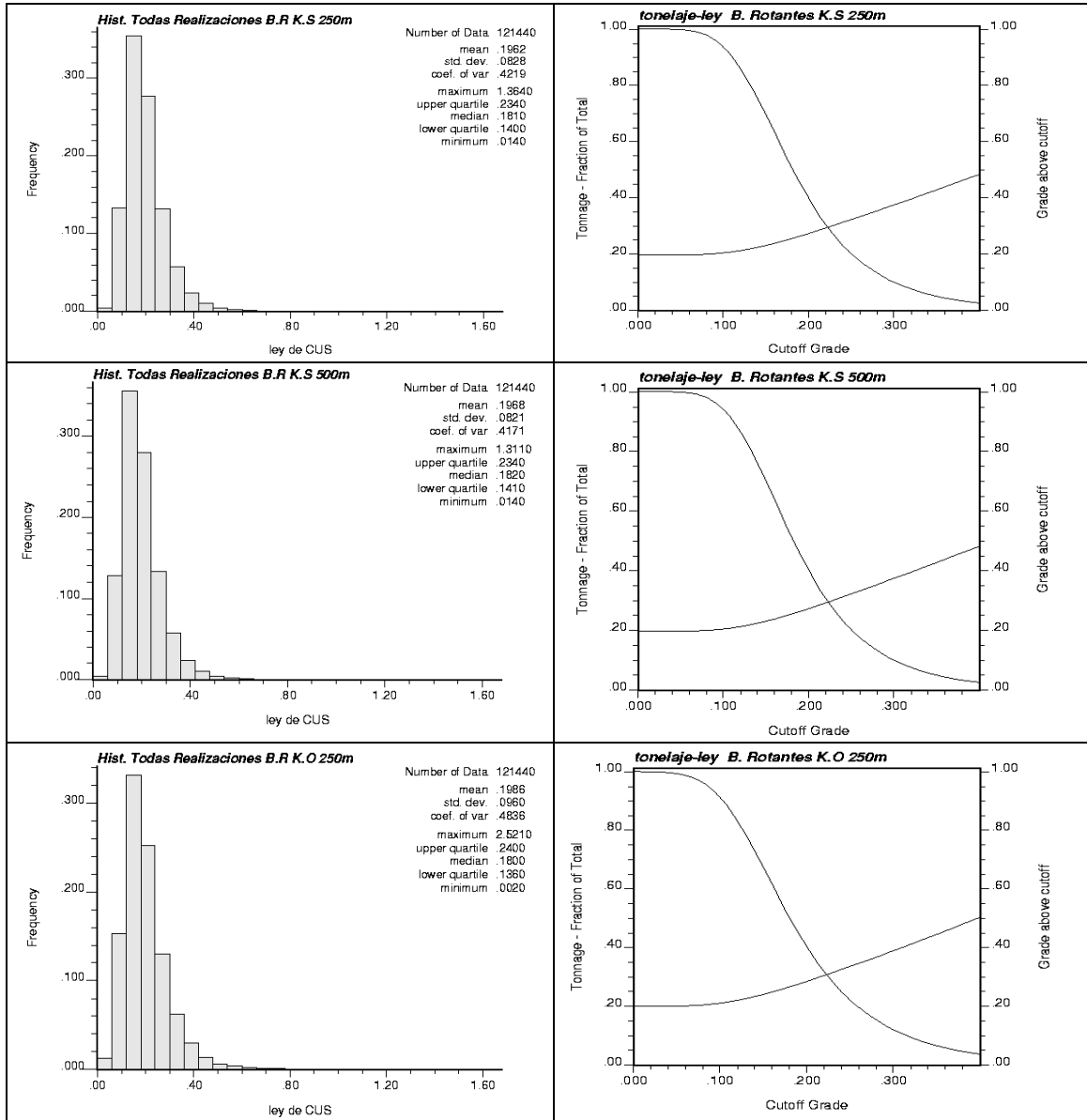
Gráfica 46: mapas de diferencias (bruto) e histogramas de la diferencia de leyes simuladas (1º caso de estudio, distintos condicionamientos).

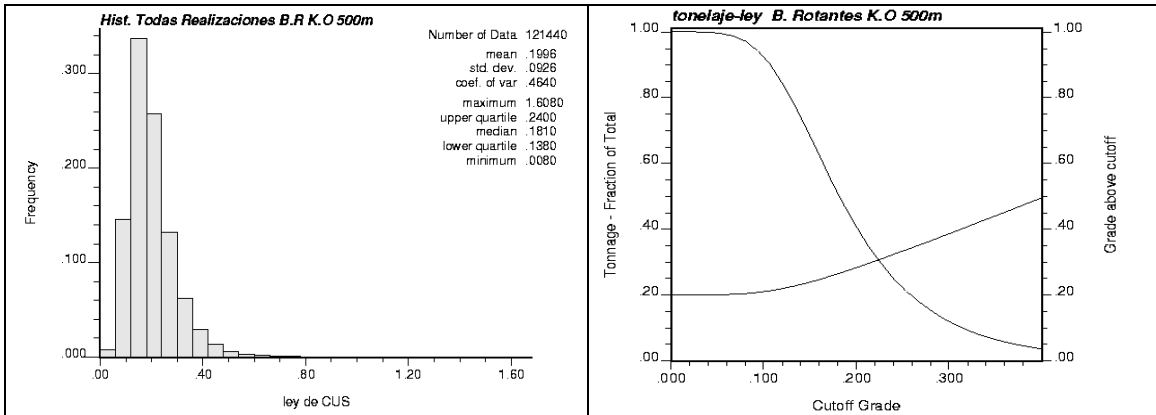




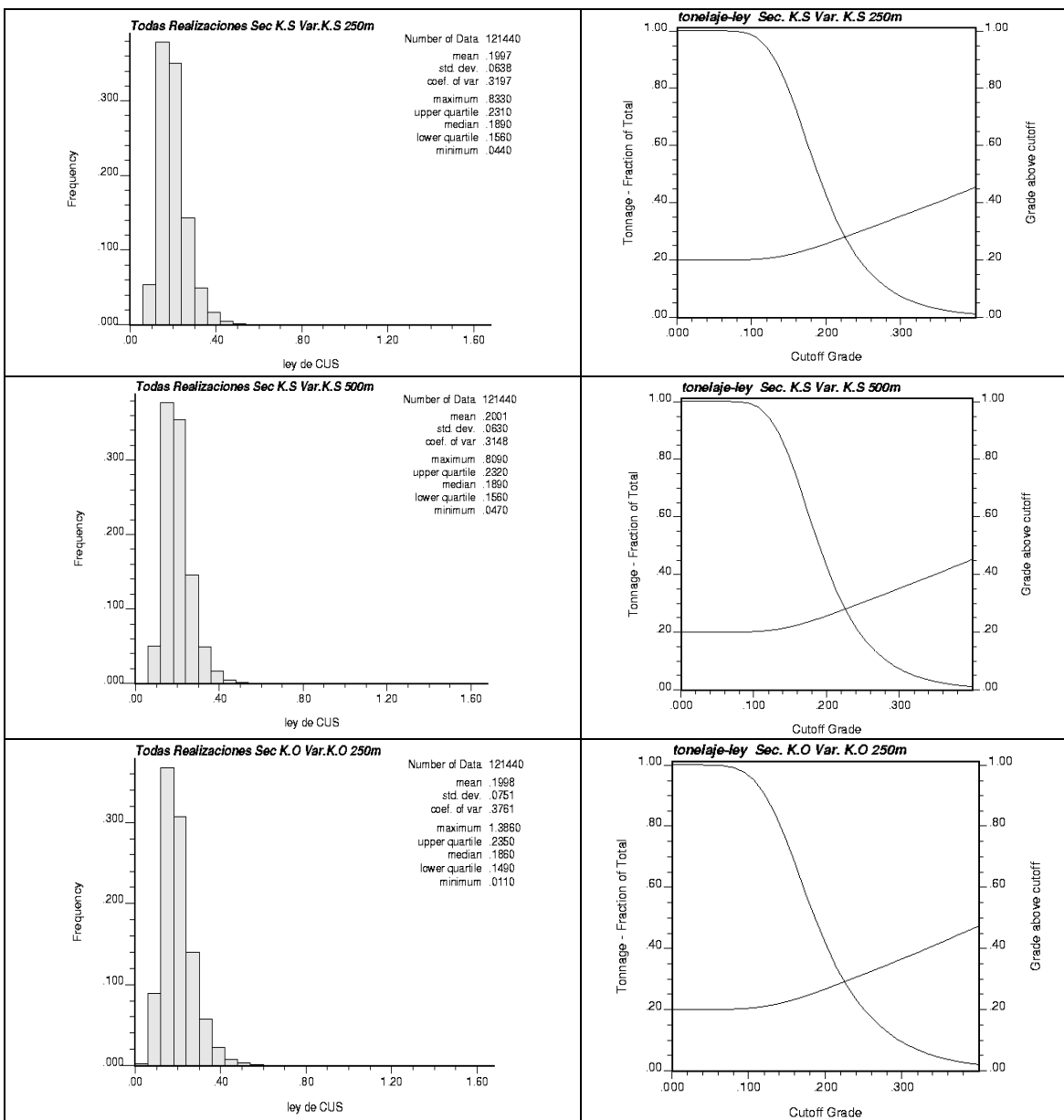
Gráfica 47: histogramas de las diferencias en modulo (1º caso de estudio, distintos condicionamientos).

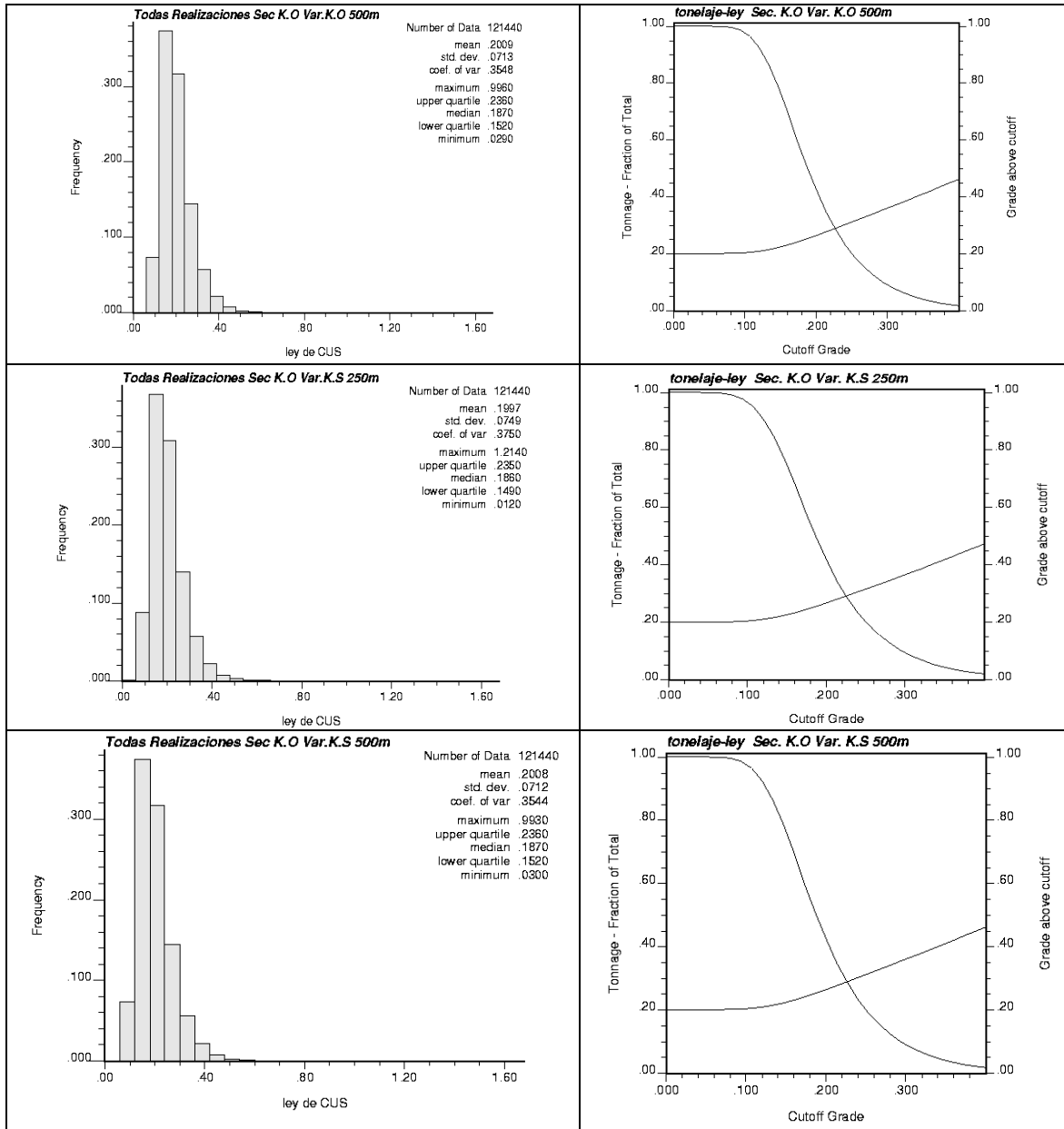
# Anexo E: Histogramas y curvas tonelaje-ley para todas las realizaciones 1° caso de estudio.





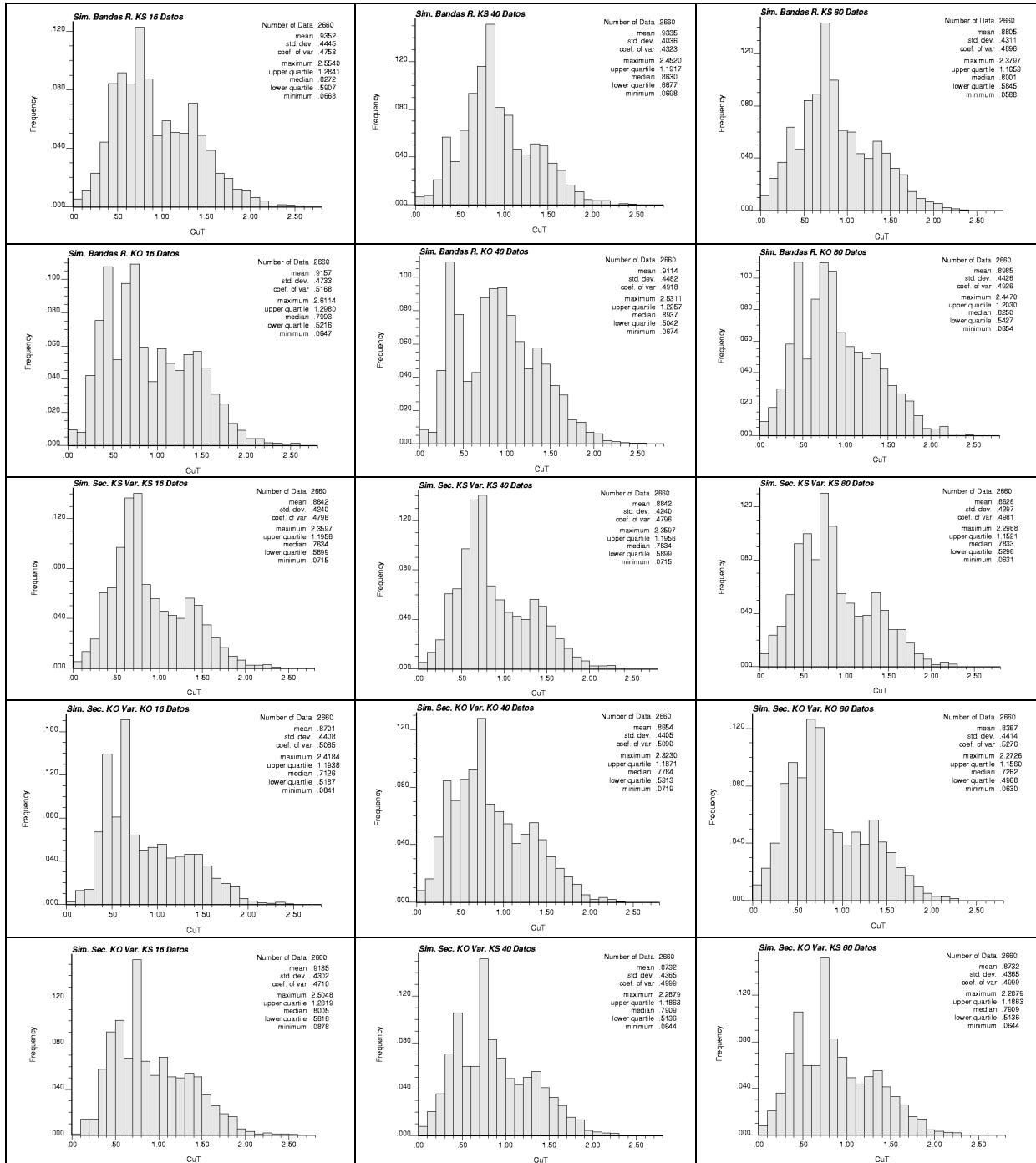
Gráfica 48: histogramas y curvas tonelaje-ley (1° caso de estudio, algoritmo de bandas rotantes).



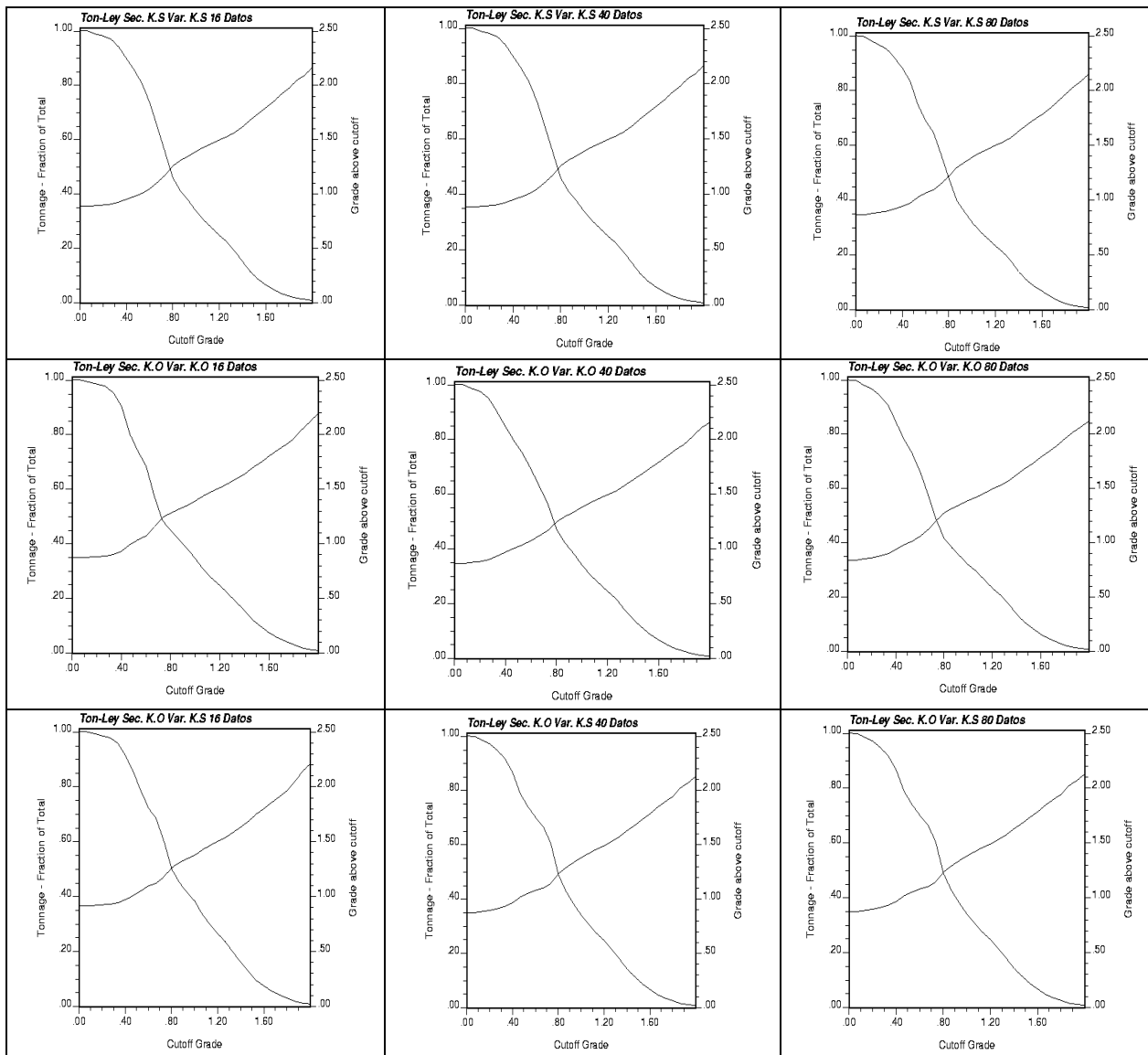


Gráfica 49: histogramas y curvas tonelaje-ley (1º caso de estudio, algoritmo secuencial).

# Anexo F: Histogramas y curvas tonelaje-ley para la media de las simulaciones, 2° caso de estudio.

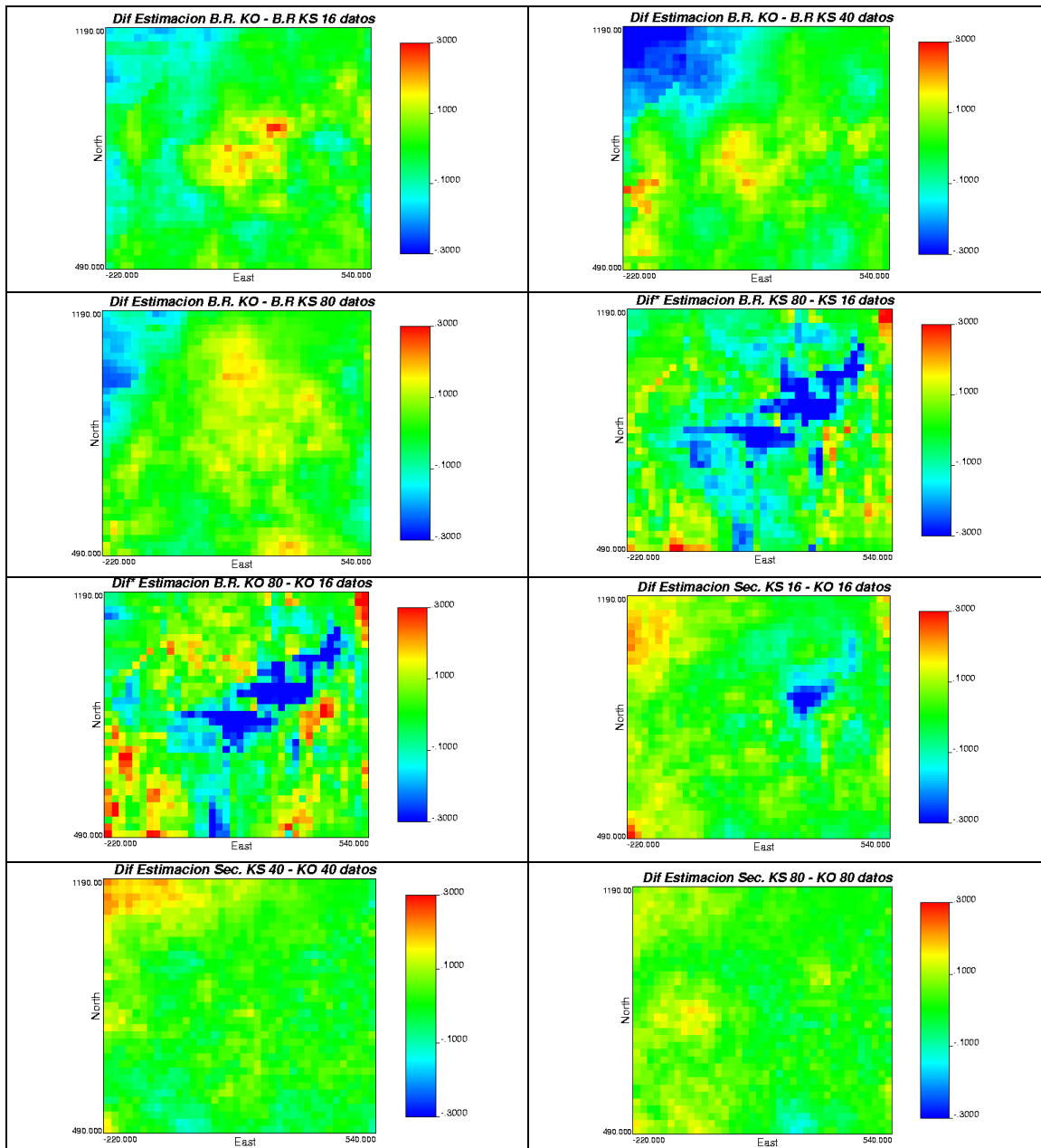


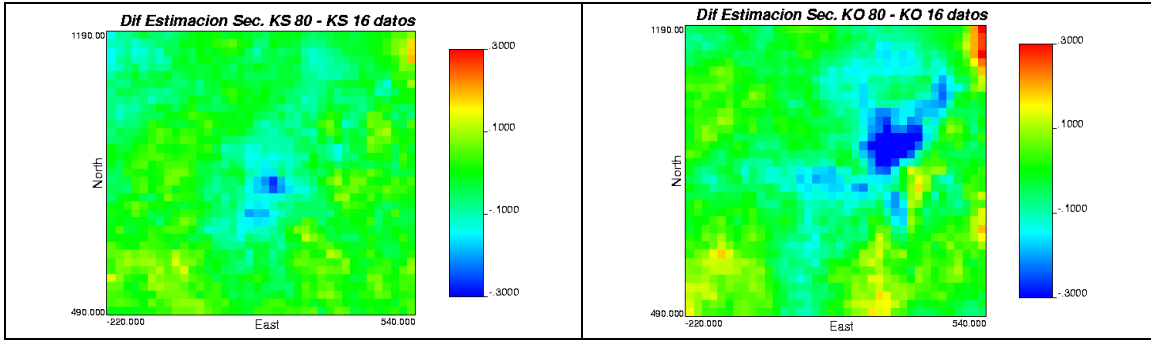
Gráfica 50: histogramas de las medias de las simulaciones todos los casos.



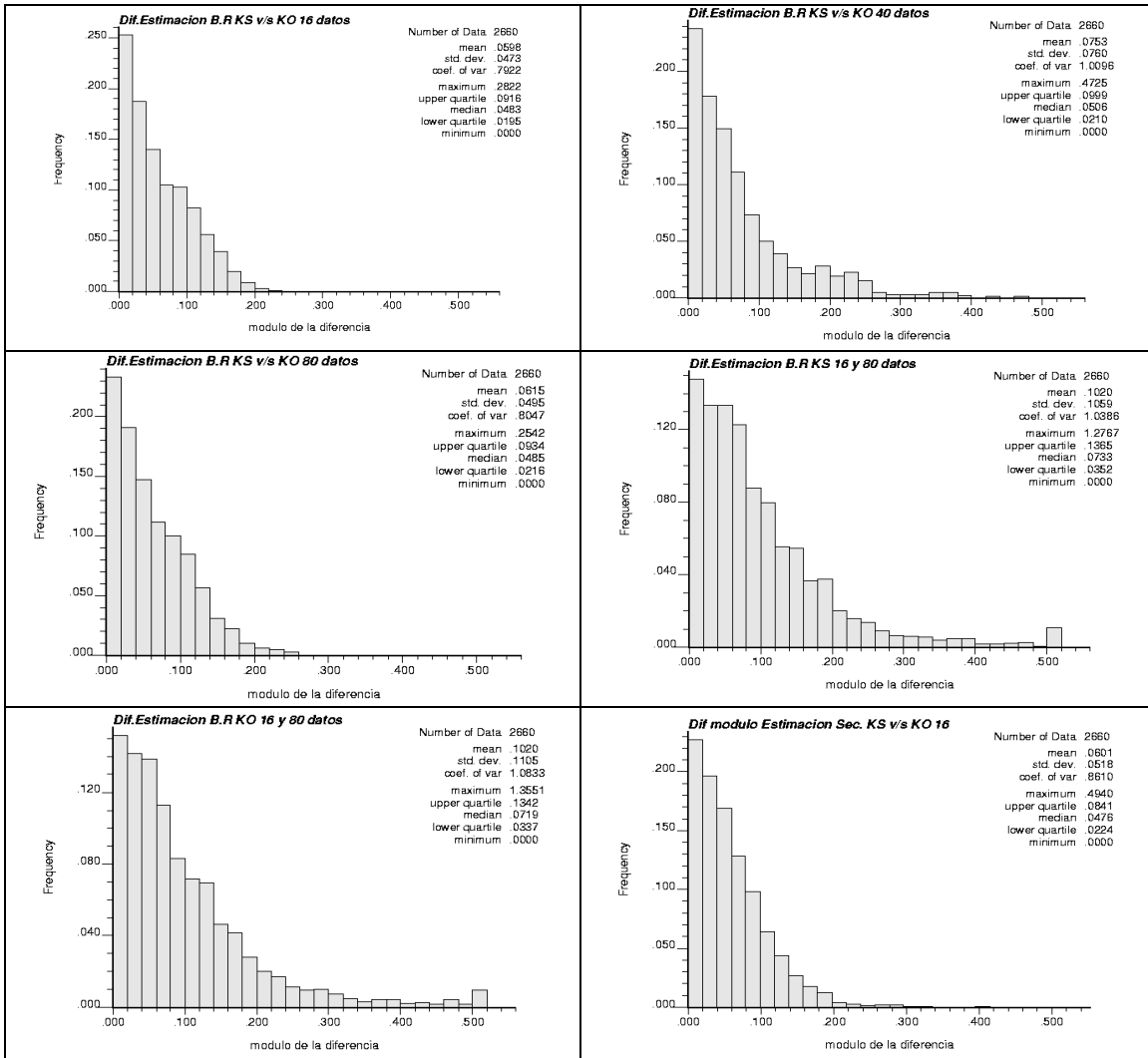
Gráfica 51: curvas tonelaje-ley para todos los casos considerando el algoritmo secuencial.

## Anexo G: Diferencias entre los distintos métodos, 2° caso de estudio.

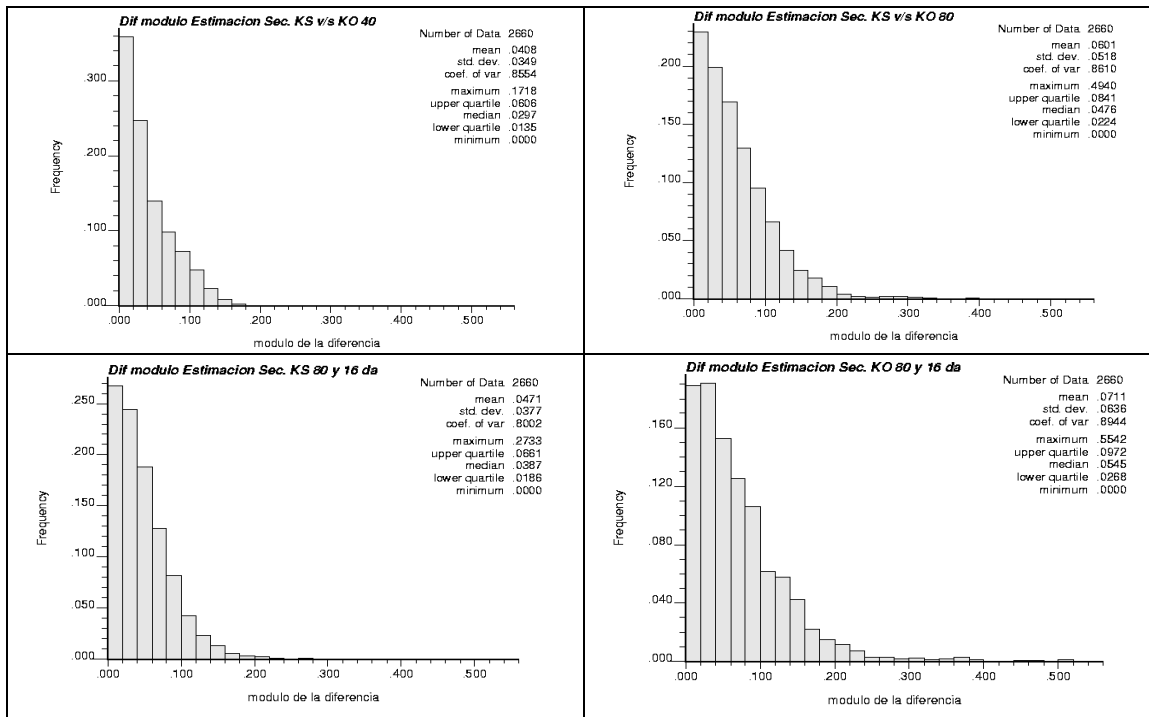




Gráfica 52: mapas de diferencias leyes simuladas, caso de estudio.

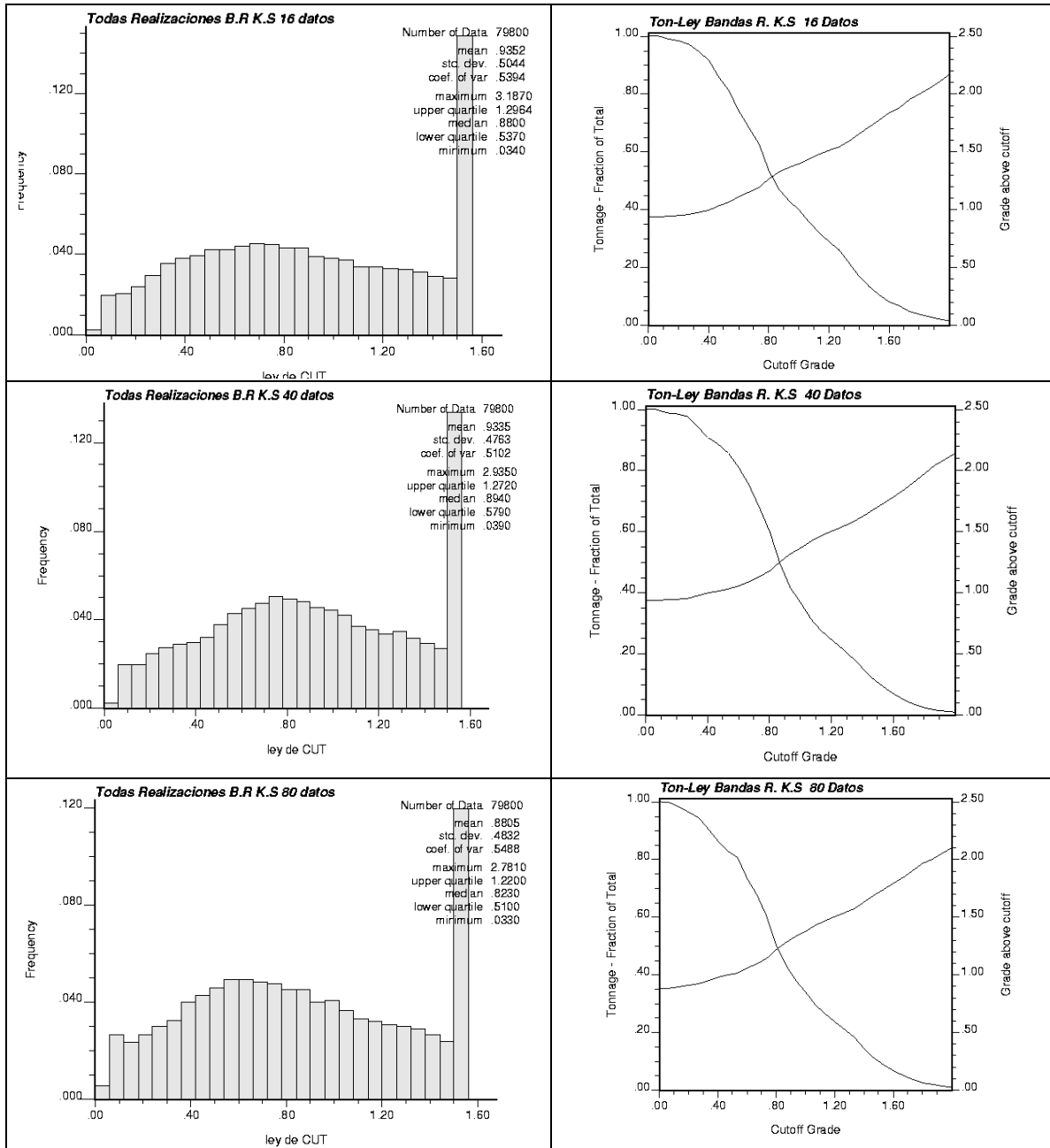




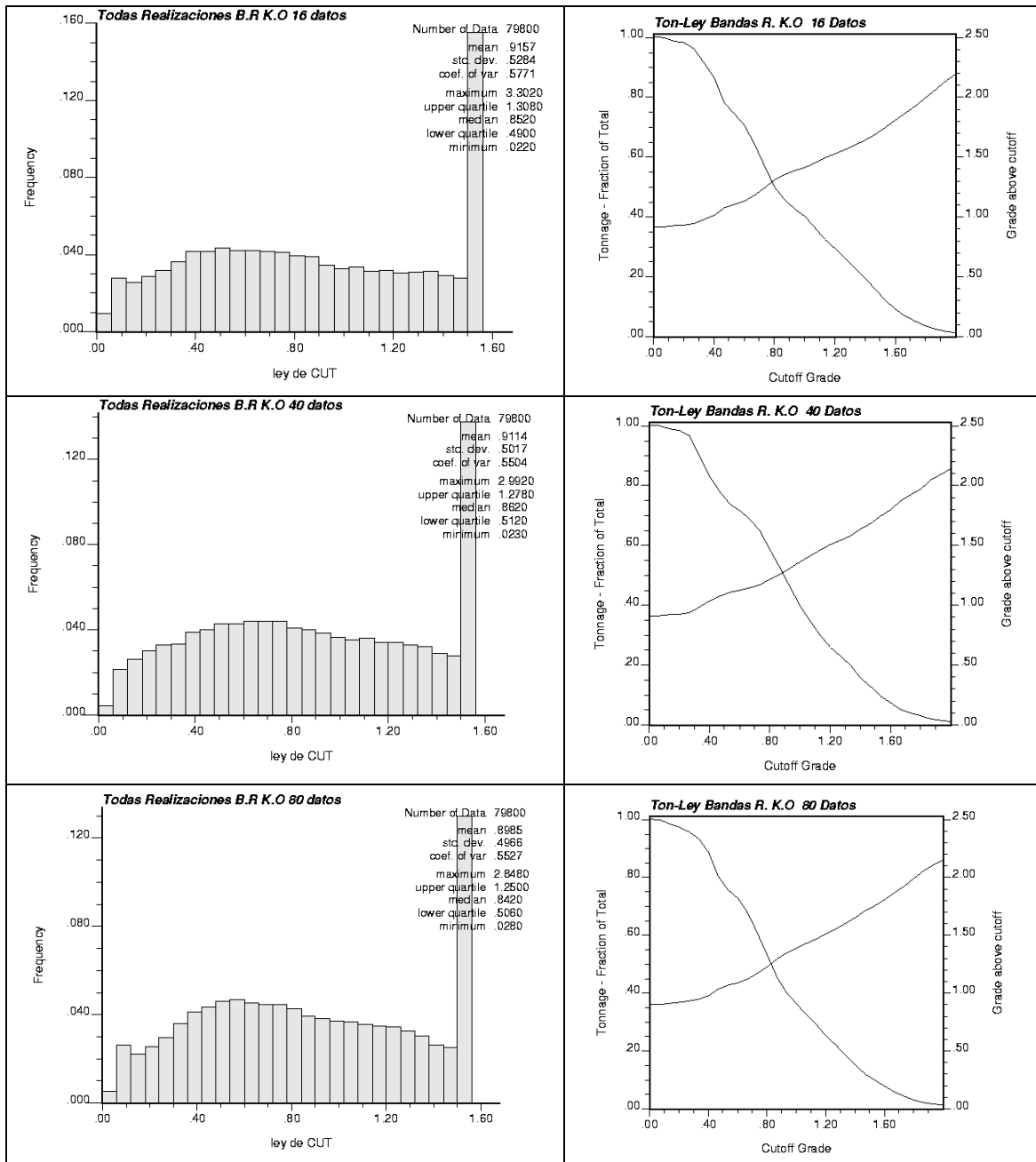


Gráfica 53: histograma del modulo de la diferencia de las leyes simuladas, 2º caso de estudio.

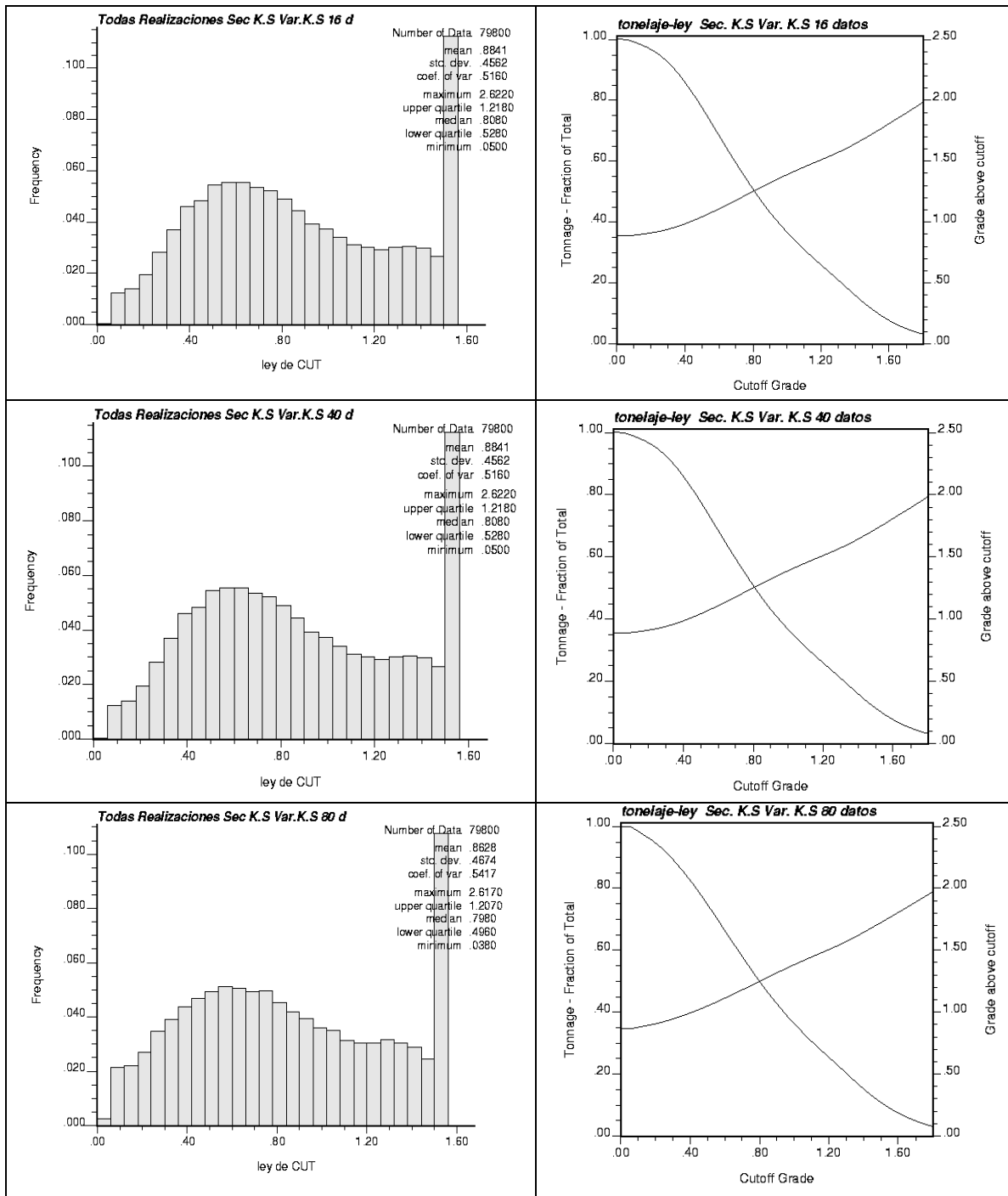
## Anexo H: Histogramas y curvas tonelaje-ley para todas las realizaciones 2° caso de estudio.



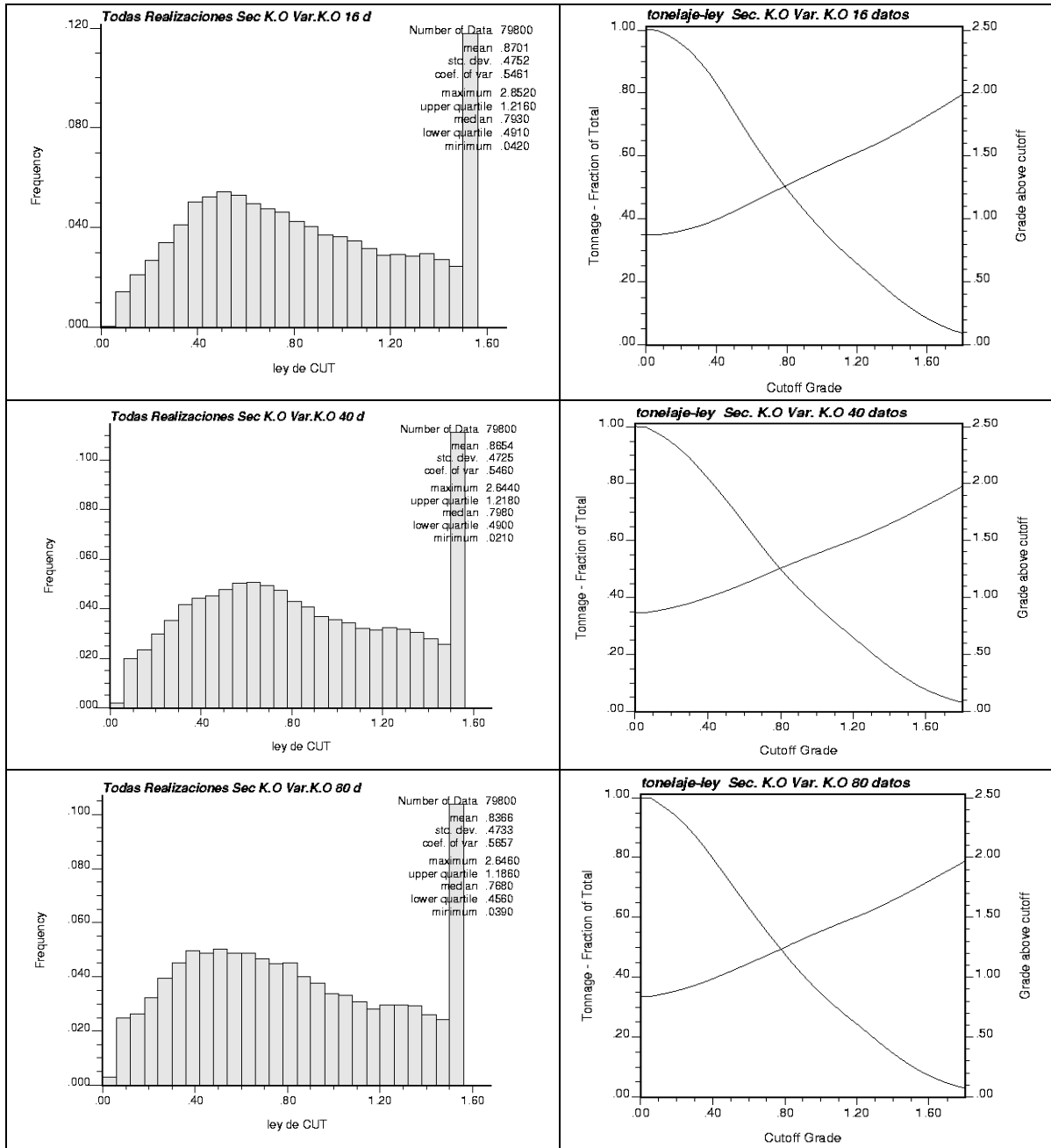
Gráfica 54: histogramas y curvas tonelaje-ley de las realizaciones obtenidas por el método de bandas rotantes condicionados por kriging simple (arriba abajo:16,40,80 datos en la vecindad).



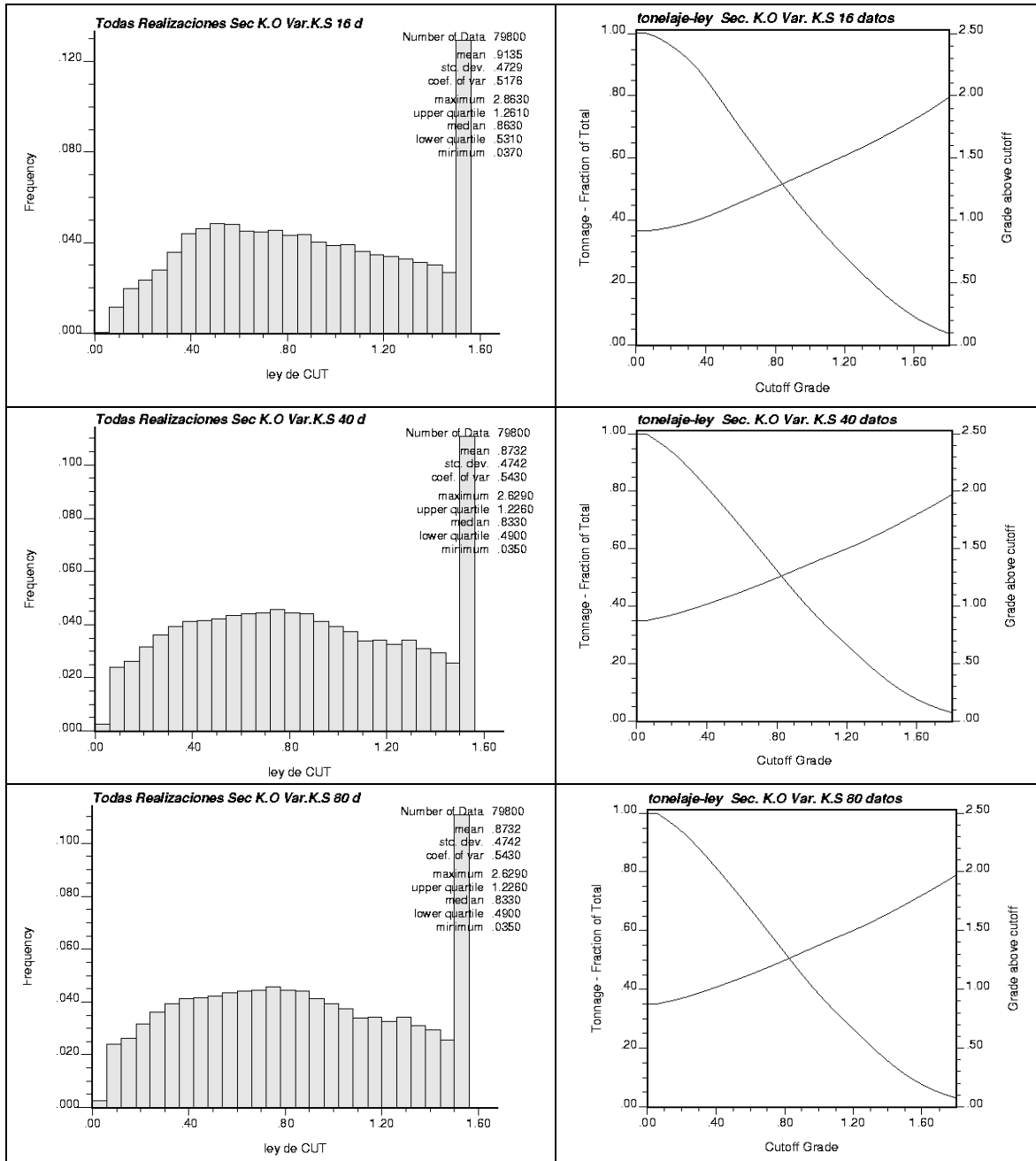
Gráfica 55: histogramas y curvas tonelaje-ley de las realizaciones método bandas rotantes condicionado por kriging ordinario (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos en la vecindad).



Gráfica 56: histogramas y curvas tonelaje-ley de las realizaciones obtenidas por el método secuencial K.S + varianza K.S (arriba abajo: 16, 40 80 datos en al vecindad).

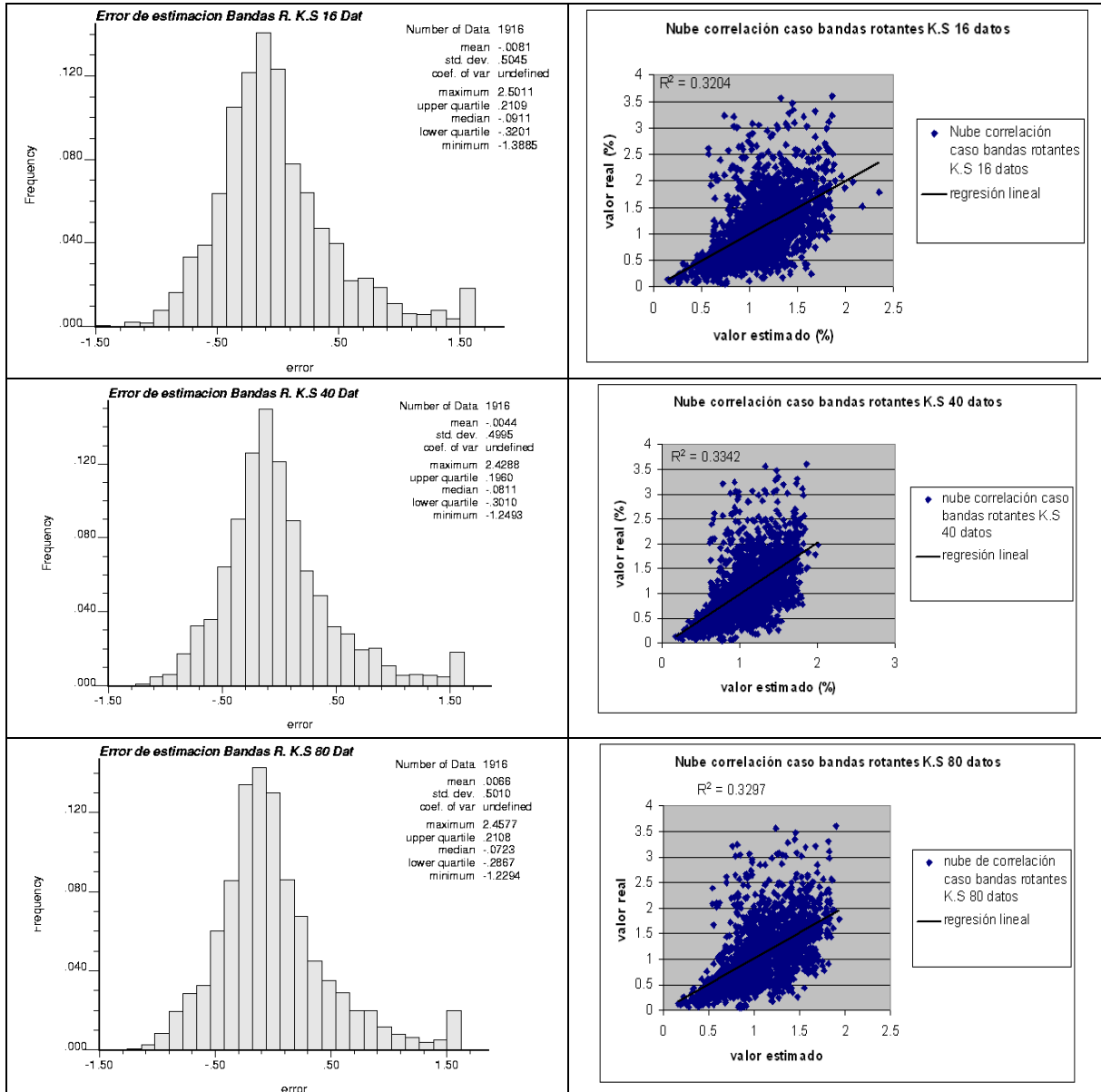


Gráfica 57: histogramas y curvas tonelaje-ley de las realizaciones método secuencial K.O + varianza K.O (arriba abajo: 16, 40 80 datos en la vecindad).

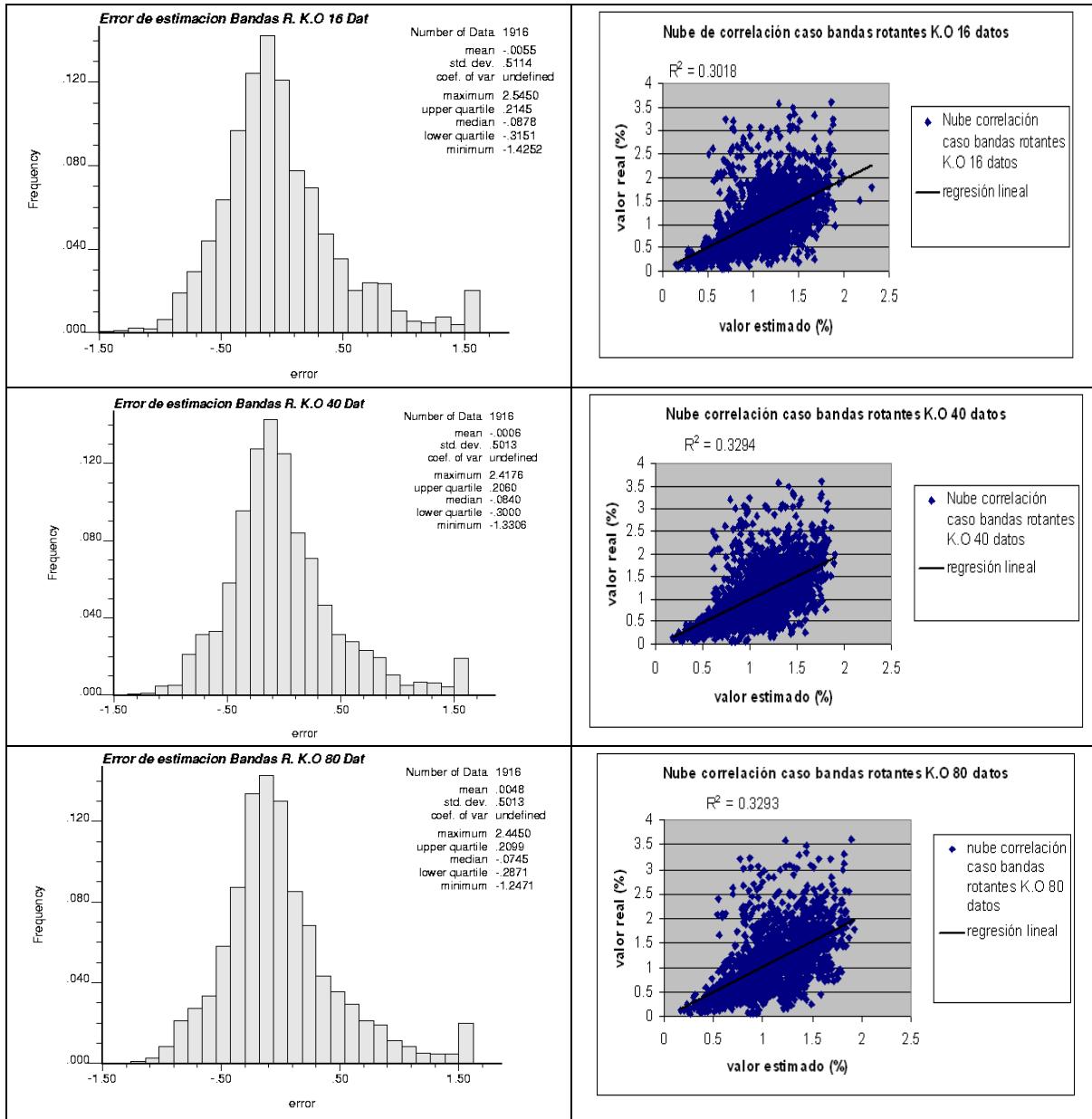


Gráfica 58: histogramas y curvas tonelaje-ley de las realizaciones obtenidas por el método secuencial K.O + varianza K.S (arriba abajo: 16, 40 80 datos en al vecindad).

# Anexo I: Resultados de validación por Jack-knife, 2º caso de estudio.

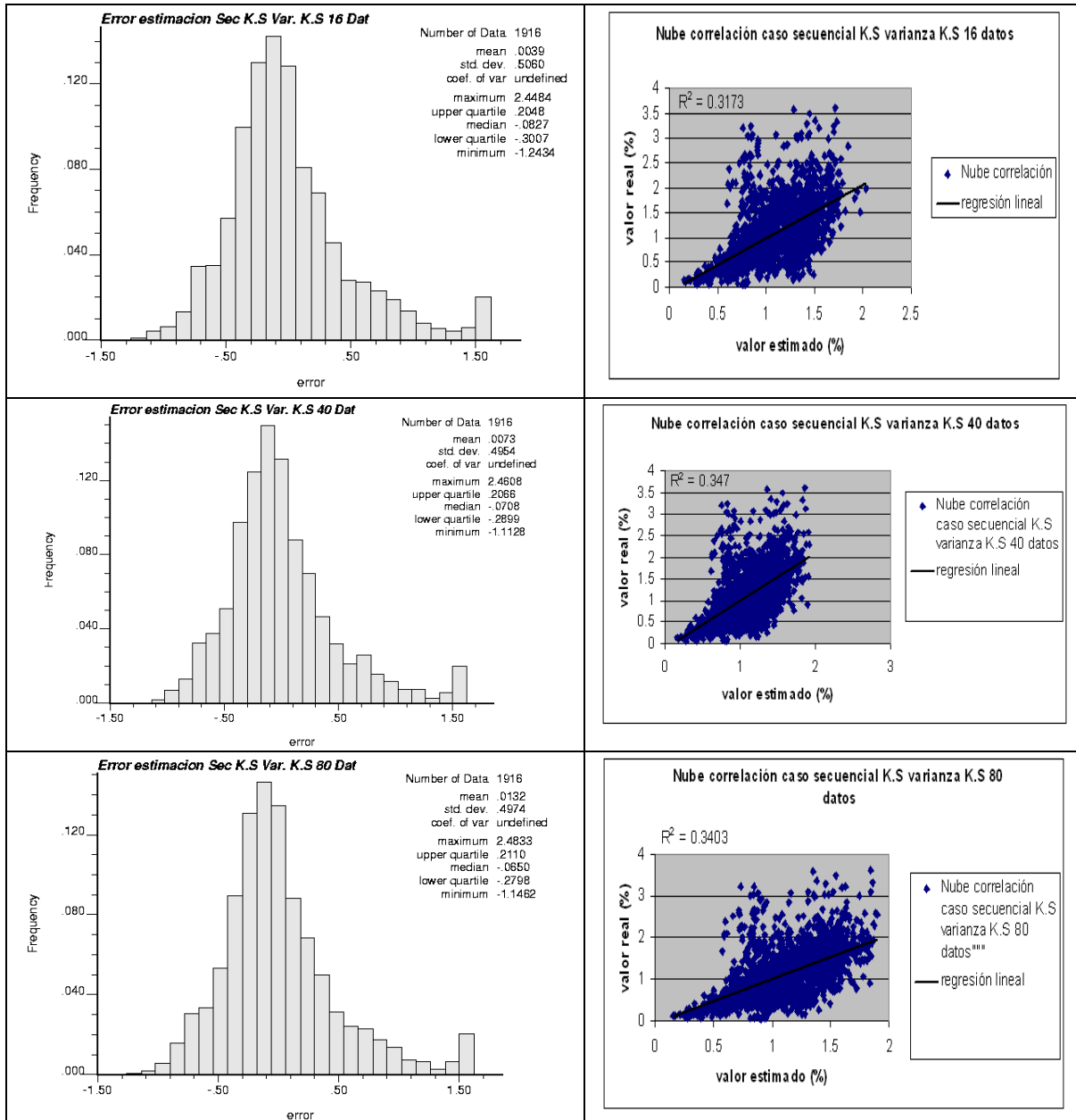


Gráfica 59: histograma para el error de estimación y nube de correlación entre valor real y estimado, método bandas rotantes K.S (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos en la vecindad).

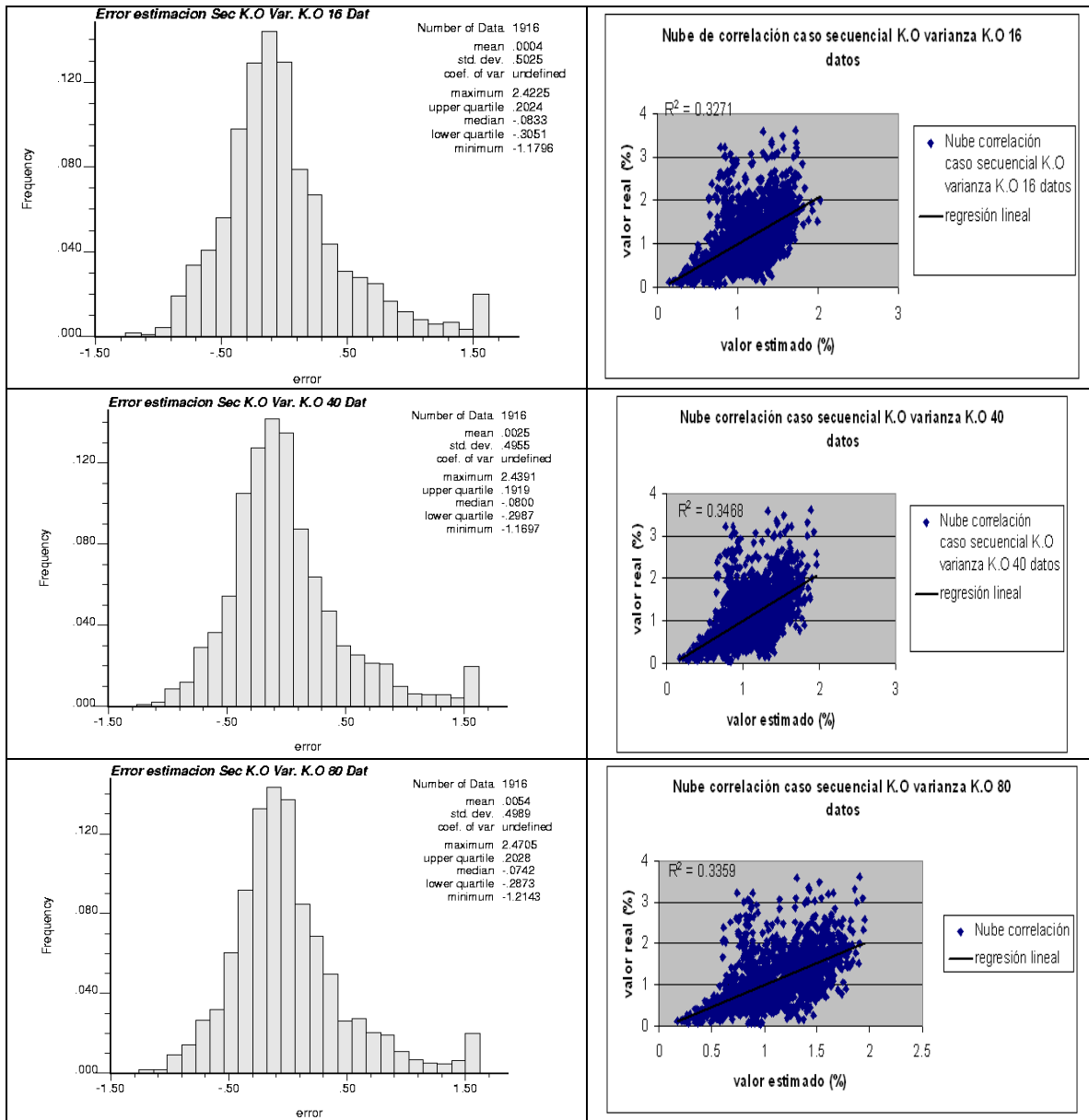


Gráfica 60: histograma para el error de estimación y nube de correlación entre valor real y estimado, método bandas rotantes K.O (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos en la vecindad).

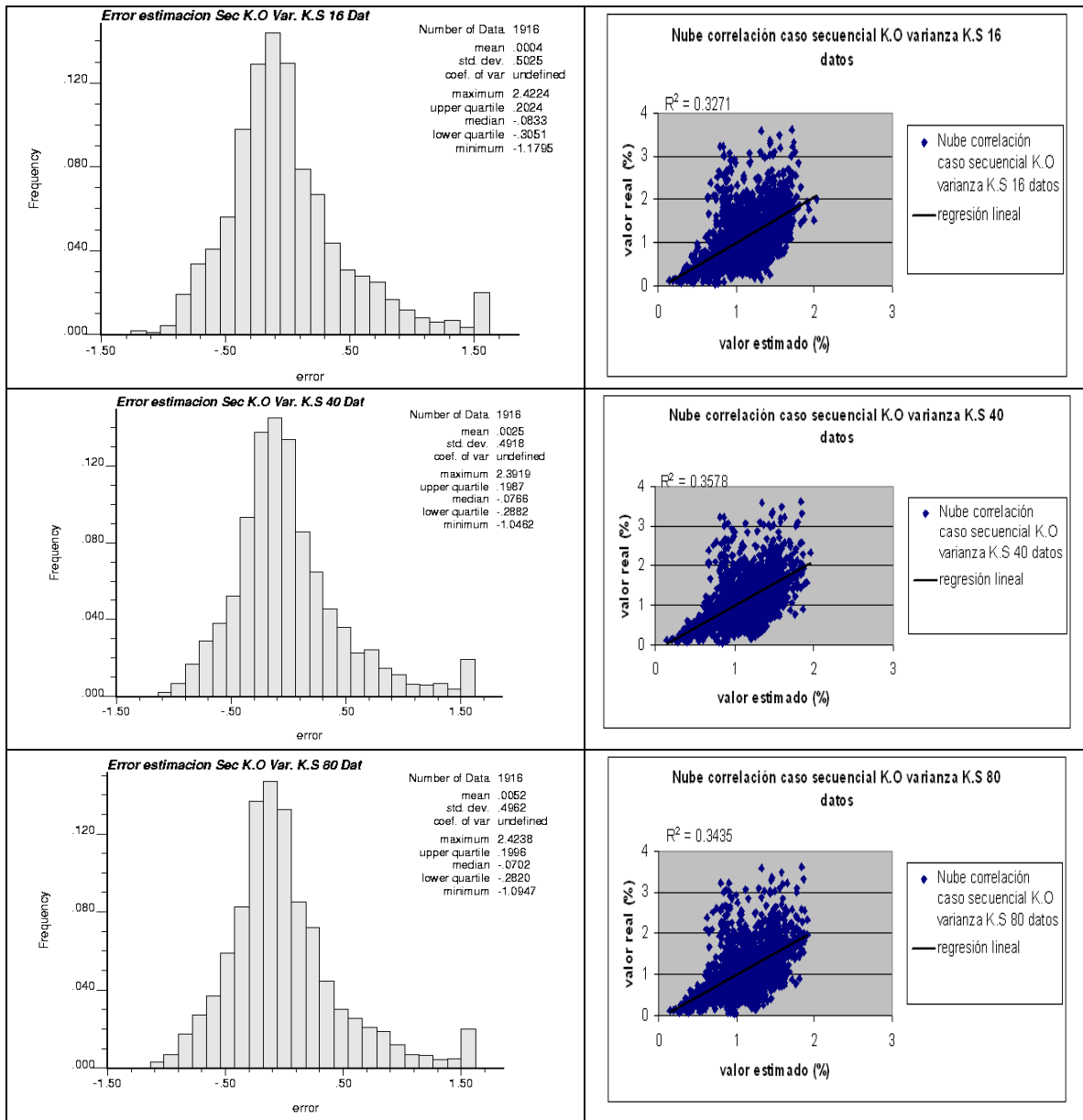




Gráfica 61: histograma para el error de estimación y nube de correlación entre valor real y estimado, método secuencial K.S + varianza K.S (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos).



Gráfica 62: histograma para el error de estimación y nube de correlación entre valor real y estimado, método secuencial K.O + varianza K.O (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos).



Grafica 63: histograma para error de estimación y nube de correlación entre valor real y estimado método secuencial K.O + varianza K.S (arriba abajo: 16, 40 y 80 datos).

## Anexo J: justificación del uso de Kriging ordinario para condicionar a los datos

Considerando  $Z = \{Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$ , una función aleatoria estacionaria que representa la variable regionalizada en el dominio  $D$ . Además  $Y = \{Y(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$  corresponde a su transformada Gaussiana, por lo tanto, corresponde a una función aleatoria con distribuciones multivariantes Gaussianas:

$$\forall \mathbf{x} \in D, Z(\mathbf{x}) = \phi(Y(\mathbf{x})). \quad (1)$$

Donde  $\phi$  es una función creciente (anamorfosis Gaussiana). Denotaremos como  $C_Y$  y  $\gamma$ , a la función covarianza y el variograma de  $Y$  respectivamente.

En el modelo tradicional,  $Y$  tiene una media nula y varianza unitaria, de modo que:

$$C_Y(\mathbf{h}) = 1 - \gamma(\mathbf{h}) \quad (2)$$

Para tomar en cuenta una incertidumbre en la media de  $Y$ , una opción es considerar esta media como un parámetro determinístico desconocido ( $m$ ):

$$\forall \mathbf{x} \in D, Y(\mathbf{x}) = m + U(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Donde  $U = \{U(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$  es una función aleatoria Gaussiana estacionaria de media 0 y varianza 1. Otra opción es considerar a la media como una variable aleatoria ( $M$ ).

$$\forall \mathbf{x} \in D, Y(\mathbf{x}) = M + U(\mathbf{x}) \quad (4)$$

Donde  $M$  es una variable Gaussiana (constante en  $D$ ) de varianza  $\sigma^2$ , independiente de  $U$ . Las funciones aleatorias  $Y$  y  $U$  tienen el mismo variograma  $\gamma$ , aunque la covarianza de la primera ( $C_Y$ ) es igual a la covarianza de la segunda ( $C_U$ ) más la constante  $\sigma^2$ :

$$C_Y(\mathbf{h}) = \sigma^2 + C_U(\mathbf{h}) = 1 - \gamma(\mathbf{h}) \quad (5)$$

Del punto de vista práctico, los modelos con media determinística (Eq. 3) y con media aleatoria (Eq. 4) no son distinguibles sobre la base de una sola realización, por lo que pueden ser utilizados en forma equivalente para representar la variable regionalizada. La única diferencia es la manera de definir la incertidumbre en la media de la función aleatoria Gaussiana: parámetro desconocido en el primer caso ( $m$ ), parámetro aleatorio ( $M$ ) en el segundo caso.

Del punto de vista teórico, el modelo de media aleatoria (Eq. 4) es idéntico al modelo de media conocida, con  $m=0$  y  $C_Y$  dada por la ecuación (5) en lugar de la ecuación (2). En consecuencia, la distribución condicional de  $Y(\mathbf{x})$  está caracterizada por su estimador de kriging simple y su varianza de kriging simple:

$$\begin{cases} Y(\mathbf{x})^{ks} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{ks}(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}_{\alpha}) \\ \sigma_{ks}^2(\mathbf{x}) = C_Y(\mathbf{0}) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{ks}(\mathbf{x}) C_Y(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}) \end{cases} \quad (6)$$

Con

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{ks}(\mathbf{x}) C_Y(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) &= C_Y(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}). \\ \lambda_{\beta}^{ks}(\mathbf{x}) &= 1 - \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{ks}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

Si suponemos que la covarianza  $C_Y$  está dada por la ecuación (5), el sistema anterior da:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{ks}(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) + \lambda_m^{ks}(\mathbf{x}) (\sigma^2 + 1) = \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}). \quad (8)$$

La varianza de Kriging simple es:

$$\sigma_{ks}^2(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{ks}(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}) + \lambda_m^{ks}(\mathbf{x}) (\sigma^2 + 1) \quad (9)$$

Para reflejar una ignorancia total sobre la media (previo al conocimiento de los datos de  $Y$ ), se deja la varianza de  $M$  tender al infinito:  $\sigma^2$  tiende a  $\infty$ . Bajo este supuesto, se ve que una condición necesaria para que la varianza de kriging simple (9) permanezca finita es que el ponderador de la media tienda a 0, es decir, que el kriging simple converja al kriging ordinario:

$$\begin{cases} \lambda_m^{ks}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} 0 \\ \forall \alpha \in \{1, \dots, n\}, \lambda_{\alpha}^{ks}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \lambda_{\alpha}^{ko}(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ks}^2(\mathbf{x}) \xrightarrow{\sigma^2 \rightarrow \infty} \sigma_{ko}^2(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (10)$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{ko}(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) - \mu(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}) \forall \alpha \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{ko}(\mathbf{x}) = 1 \\ \sigma_{ko}^2(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{ko}(\mathbf{x}) \gamma(\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (11)$$

La condición sobre la suma de los ponderadores también es suficiente, puesto que el sistema de kriging ordinario (11) no depende de  $\sigma^2$ , por lo cual la varianza de kriging es finita. En conclusión, en el modelo asintótico donde  $\sigma^2$  tiende a infinito, los resultados obtenidos en el modelo de media conocida quedan válidos, siempre que se reemplace el kriging simple por un kriging ordinario.