

TABLA DE CONTENIDO

Contenidos	Página
1. INTRODUCCIÓN.....	2
1.1. FUNDAMENTACIÓN	2
1.2. PLANTEAMIENTO DE OBJETIVOS	3
1.2.1. Objetivo General.....	3
1.2.2. Objetivos Específicos.....	3
1.3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	4
1.4. PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	4
1.5. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO	4
1.5.1. Valor Teórico	4
1.5.2. Utilidad Metodológica	5
1.5.3. Implicaciones Prácticas	5
1.6. TIPO DE INVESTIGACIÓN.....	5
1.7. CONFIABILIDAD Y VALIDEZ DE LA INVESTIGACIÓN	6
1.7.1. Validez interna.....	6
1.7.2. Validez externa.....	6
1.7.3. Confiabilidad.....	6
1.8. IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES E INDICADORES	7
1.8.1. Variable independiente.....	7
1.8.2. Variable dependiente.....	7
1.9. PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN.....	7
1.9.1. Descripción del procedimiento	8
2. MARCO DE REFERENCIA O ESTADO DEL ARTE.....	9
2.1. INTRODUCCIÓN.....	9
2.2. ESTADO DEL ARTE	9
2.3. CANAL SISO.....	11
2.3.1. Evolución de códigos LDPC.....	11
2.3.2. Modulación Sphere Packing.....	12
2.4. CANAL MIMO	13
2.4.1. Space Time Block Coded	13
2.5. CONCLUSIÓN	14
3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	15
3.1. INTRODUCCIÓN.....	15
3.2. DISEÑO DE TELECOMUNICACIONES.....	15
3.2.1. Ancho de banda mínimo de Nyquist.....	16
3.2.2. Teorema de capacidad de Shannon-Hartley.....	16
3.2.3. Límite de Shannon.....	18
3.2.4. Sistemas limitados en potencia.....	18
3.2.5. Sistemas limitados en Ancho de banda	19
3.3. CONCEPTOS INTRODUCTORIOS	19
3.3.1. Ruido Rayleigh Fading	20
3.4. FADING CON BLOQUE EN CANAL SISO.....	21
3.5. CODIFICADOR Y DECODIFICADOR LDPC NO BINARIO.....	22
3.5.1. Codificador de Q-ARY para códigos LDPC.....	22
3.5.2. Campos de Galois.....	22
3.5.3. Decodificador de Q-ARY para códigos LDPC.....	23
3.5.4. Decodificador con transformada de Fourier.....	23
3.5.5. La Transformada Equivalente	24
3.5.6. Detalles de las iteraciones.....	25
3.6. SPHERE PACKING.....	26

3.6.1. El problema de Sphere Packing	26
3.6.2. Lattice Packings.....	28
3.6.3. Kissing Numbers.....	29
3.6.4. Códigos con corrección de errores.....	29
3.6.5. Sphere Packing y códigos correctores de errores	30
3.6.6. El arreglo de coordenadas de un punto	31
3.6.7. Construcción A	31
3.6.8. Construcción B	32
3.6.9. Construcción C	33
3.7. CANAL CON FADING CON BLOQUE MIMO	37
3.8. SPACE TIME BLOCK CODED.	38
3.8.1. Dos antenas receptoras y una antena transmisora.....	39
3.8.2. Dos antenas transmisoras y una antena receptora.....	40
3.8.3. Dos antenas transmisoras y dos antenas receptoras	43
3.9. CONCLUSIÓN	44
4. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS.....	45
4.1. INTRODUCCIÓN.....	45
4.2. RUIDO AWGN	46
4.2.1. Análisis de las Métricas	46
4.2.2. Evaluación de LDPC con y sin truncar aplicado a un canal AWGN.	49
4.2.3. LDPC no binario con Sphere Packing aplicado a un canal con ruido AWGN.....	50
4.3. RUIDO AWGN Y RAYLEIGH FADING	51
4.3.1. LDPC no binario aplicado a un canal AWGN y Rayleigh Fading.....	52
4.4. MODULACIÓN SPHERE PACKING	53
4.4.1. Modulación Sphere Packing con y sin orden de las Esferas	57
4.5. SISTEMA DE TRANSMISIÓN EN CANAL MIMO (2Tx, 2Rx)	59
5. CONCLUSIONES.....	62
6. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	64

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Fundamentación

El tráfico de información y las comunicaciones en general, a nivel mundial, han registrado un aumento sostenido en los últimos años, es por esto que el desafío en la actualidad recae en la necesidad de realizar importantes cambios en las telecomunicaciones que incorporen cada vez más progresos tecnológicos que faciliten el tráfico de información.

Aumentar las velocidades de transmisión y aprovechar al máximo el ancho de banda disponible, son parte de los desafíos a desarrollar actualmente, por lo que encontrar una codificación y decodificación eficiente y de alta velocidad de transmisión, resulta no menor en estos momentos.

Ahora bien, uno de los principales obstáculos en relación a las comunicaciones, es la construcción de un sistema de codificación y decodificación que sea confiable para la transmisión en un canal con ruido. Durante los años 90's, notables progresos fueron realizados usando códigos que eran definidos en términos de escasos gráficos aleatorios, y que eran decodificados por una simple base de probabilidad, basada en el algoritmo "el paso del mensaje", sin embargo, este tipo de tecnología debe seguir desarrollándose para permitir que los nuevos avances logren una eficiencia aun mayor.

La telefonía de cuarta generación requerirá de un gran ancho de banda, aprovechar al máximo este ancho de banda disponible y una codificación y decodificación que corrija la mayor cantidad de errores dentro de un código. Para el cumplimiento de estos requerimientos será necesario disponer de un canal MIMO, una modulación que aproveche de manera eficiente el espectro de la señal, como es el caso de Sphere Packing. Para el problema en la corrección de los errores las nuevas técnicas de LDPC no Binario, satisfacen de mejor manera esta necesidad, en comparación con códigos Turbo.

Cabe señalar que estas técnicas no se restringen al campo de las comunicaciones de cuarta generación, si no que también pueden ser aplicadas a comunicación satelital, comunicaciones IP, etc.

1.2. Planteamiento de objetivos

1.2.1. Objetivo General.

Es siguiente trabajo a realizar, tiene como objetivo explorar técnicas de codificación con diversidad espacial, modulación, en sistemas de comunicación inalámbrica, con el propósito de contribuir al desarrollo. Esto se realizará a través de simulaciones para medir la calidad de servicio de la combinación de un código *Low density Parity Check* (LDPC) no binario con modulación Sphere Packing (SP) y Space Time Block Coded (STBC) considerando tanto arreglo SISO como MIMO.

La programación de las operaciones en campos de Galois, el codificador LDPC No Binario, modulación Sphere Packing y Codificación Space Time Block Coded se realizará en un socket servidor programado en JAVA, mientras que el decodificador LDPC No Binario, demodulación Sphere Packing y Decodificación Space Time Block Coded se realizará en el socket cliente programado en J2ME.

1.2.2. Objetivos Específicos.

- Medir la calidad de servicios en un sistema SISO (Simple entrada y simple Salida) con codificación y decodificación LDPC No binaria, en un canal con ruido AWGN.
- Medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación LDPC No Binaria y modulación Sphere Packing en el transmisor, en el receptor con un decodificador LDPC No Binaria y un demodulador Sphere Packing dentro de un canal con ruido AWGN.
- Medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación LDPC No Binaria y modulación Sphere Packing en el transmisor y en el receptor con un decodificador LDPC No Binaria y un demodulador Sphere Packing, en un canal con ruido AWGN y Rayleigh Fading.
- Medir la calidad de servicios en un sistema MIMO con codificación LDPC No Binaria, modulación Sphere Packing y modulación Space Time Block Coded en el transmisor y en el receptor con un decodificador LDPC No Binaria, un demodulador Sphere Packing y un demodulador Space Time Block Coded en el transmisor, en un canal con ruido AWGN y Rayleigh Fading y ser comparadas con el sistema SISO.

1.3. Preguntas de Investigación

- ¿Cuáles son los principales ruidos que afectan la transmisión de la comunicación en un canal aéreo?
- ¿Cuan cerca del límite de Shannon podemos estar con los distintos tipos de ruido?
- ¿La codificación LDPC no Binario mejora todo tipo de ruido?
- ¿La modulación y demodulación Sphere Packing ayuda a la mejora de la transmisión?
- ¿Cuál es el mejor arreglo de antenas para la transmisión de la información?

1.4. Planteamiento de hipótesis

- En un canal de comunicación inalámbrico, los principales ruidos que afectan la transmisión de la comunicación, son producidos por desvanecimientos Rayleigh Fading y ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN)
- El ruido blanco aditivo gaussiano es modelado a través de una distribución normal de media 0.
- El ruido Rayleigh Fading es modelado a través de la ecuación $\sqrt{N(0, \sigma_0^2)^2 + N(0, \sigma_1^2)^2}$, en donde $N(0, \sigma_0^2)$ es una distribución normal de media cero.
- Las Combinaciones de Códigos LDPC No Binarios con modulación Sphere Packing y Space Time Block Coded solucionan el problema de la interferencia Rayleigh Fading de la señal y de ruido blanco aditivo Gaussiano.

1.5. Justificación Del Estudio

1.5.1. Valor Teórico

La relevancia teórica del proyecto de investigación, consiste en utilizar y verificar

un conjunto de hipótesis que se han deducido a partir de los conocimientos teóricos que se tiene respecto al tema del proyecto. Se intenta contribuir a un conocimiento disciplinario de carácter científico sobre la transmisión de datos a través de un canal aéreo.

1.5.2. Utilidad Metodológica

La relevancia metodológica radica en la utilización de los datos cuantitativos que ayudan a la definición de conceptos sobre los cuales se intenta esencialmente solucionar las dificultades que se presentan en la transmisión de datos a través de un canal aéreo.

A partir de los datos cuantitativos se medirá el desempeño de LDPC no Binario, la modulación y demodulación de la señal codificada por medio de Sphere Packing y la transmisión y recepción a través de Space Time Block Coded.

1.5.3. Implicaciones Prácticas

La relevancia práctica del proyecto de investigación, reside en el aporte que los conocimientos que esta investigación entregue, los que serán aplicados a la tecnología de cuarta generación.

1.6. Tipo de investigación

Los objetivos, las preguntas e hipótesis propuestas anteriormente requieren la aplicación de una metodología cuantitativa.

El tipo de estudio realizado es de tipo exploratorio, por la estrategia de investigación utilizada, pues la revisión bibliográfica reveló que hasta los momentos (diciembre de 2006), en nuestro país ninguno de los investigadores abocados a esta temática; en consecuencia, el problema en cuestión no tenía estructura y era relativamente desconocido.

Con respecto a los estudios exploratorios, Dankhe (1986) citado por Hernández y otros (1991), señala que los estudios exploratorios nos sirven para aumentar el grado de familiaridad con fenómenos relativamente desconocidos, obtener información sobre la posibilidad de llevar a cabo una investigación más completa sobre un contexto particular de la vida real, además de identificar conceptos o variables promisorias,

establecer prioridades para investigaciones posteriores o sugerir afirmaciones (postulados)".

1.7. Confiabilidad y validez de la investigación

1.7.1. Validez interna

Esta se logra gracias a que en los procedimientos utilizados para la recolección de la información se llevaron a cabo varios grupos de comparaciones.

1.7.2. Validez externa

En este estudio se utilizaron los siguientes procedimientos para otorgar validación externa:

- Se estableció una comunicación permanente con un profesor (Profesor guía de tesis) con la finalidad de someter a evaluación permanente los distintos procesos y etapas desarrolladas en el estudio.
- Constante revisión bibliográfica sobre las temáticas abordadas en el estudio.

1.7.3. Confiabilidad.

La confiabilidad del estudio se obtiene por medio de la validez interna y externa de la investigación las cuales son logradas debido a que la información recolectada y las variables estudiadas son fenómenos observables.

1.8. Identificación de variables e indicadores

1.8.1. Variable independiente

Señal Razón A Ruido: El cociente Signal-to-noise es un término de la ingeniería para el cociente de la energía de una señal (información significativa) y el ruido de fondo:

$$SNR = \frac{P_{señal}}{P_{ruido}} = \left(\frac{A_{señal}}{A_{ruido}} \right)^2 \quad (1)$$

Donde está P es la energía promedio y A es amplitud en RMS. La señal y la energía de ruido se miden dentro de la ancho de banda del sistema.

Porque muchas señales tienen un diagrama dinámico muy ancho, SNRs se expresa generalmente en términos de escala logarítmica del decibel. En decibel, el SNR es 20 veces el logaritmo base-10 del cociente de la amplitud, o 10 veces el logaritmo del cociente de la energía:

$$SNR(dB) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{señal}}{P_{ruido}} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A_{señal}}{A_{ruido}} \right) \quad (2)$$

1.8.2. Variable dependiente

Bit Error Rate: Probabilidad de que un bit sea erróneo dentro de la cantidad de bits totales enviados.

$$BER = \frac{N^{\circ} \text{ de bit erróneos}}{N^{\circ} \text{ de bits totales}} \quad (3)$$

1.9. Procesamiento de la información

Para realizar el análisis se programó en un servidor basado en JAVA y un cliente basado en J2ME (JAVA MicroEdition). Se programó de un socket cliente (Programado en Midlet) y un socket servidor (Programado en JAVA); en el socket servidor se realizó

la codificación del código, la modulación de este y la forma de envío de la señal, en el socket cliente la recepción de la señal, la demodulación Sphere Packing y la decodificación LDPC no binario.

1.9.1. Descripción del procedimiento

En una etapa inicial se procedió a una exhaustiva revisión bibliográfica sobre los temas a abordar. Posteriormente se procedió a programar la codificación LDPC no Binaria en el servidor y la decodificación LDPC no Binaria en el cliente, estos se programaron en un servidor basado en JAVA y un cliente basado en J2ME (JAVA MicroEdition).

Se programó la modulación Sphere Packing en el servidor y la demodulación en el cliente.

Se evaluó el comportamiento de la combinación de ambos sistemas bajo un canal de comunicación con ruido blanco (AWGN). Este sistema bajo transmisión SISO, a continuación se evaluó el sistema bajo un ruido Slow Fading a bloques, conociendo que estos sistemas eran específicamente para combatir ruido AWGN.

Finalmente y debido a los resultados obtenidos se decidió incorporar canal MIMO, el cual está diseñado para combatir Fading Rayleigh, los resultados arrojados fueron comparados con el sistema SISO.

2. MARCO DE REFERENCIA O ESTADO DEL ARTE

2.1. Introducción

En este capítulo tiene por objetivo introducir al lector en el entendimiento de la evolución histórica de la transmisión y recepción en las telecomunicaciones, continuando con la evolución de métodos de codificación LDPC no binaria, modulación Sphere Packing y formas de transmisión en Space Time Block Coded, fundamentando la lógica del trabajo elaborado. Lo anteriormente dicho se realiza con la finalidad de plantear un esquema teórico de la transmisión y recepción de datos a través de un canal inalámbrico.

2.2. Estado del Arte

Como referencia de la evolución de las telecomunicaciones, se realizará una perspectiva general de su evolución. El origen de los códigos correctores de errores se remonta a finales de la década de los 40 cuando los trabajos germinales de Shannon C.E. sobre la Teoría de la Información, dieron paso a numerosos estudios cuyas repercusiones en el ámbito de las comunicaciones son considerables. De hecho, se suele tomar como fecha de nacimiento de la Teoría de la Codificación de la Información la de la publicación, en 1948, del artículo "*A mathematical Theory of Communication*" [5] con el que se abrió una importante línea de investigación en la elaboración de códigos y algoritmos de decodificación. En estos comienzos, la teoría de los códigos tenía un enfoque esencialmente probabilístico. Sin embargo, pasó posteriormente a un enfoque más algebraico, surgiendo entonces muchos ejemplos prácticos (aún en uso hoy en día) como los códigos de Golay y de Hamming, los códigos cíclicos y BCH, o los códigos de Reed-Solomon y de Reed-Muller.

Richard Hamming introdujo en el año 1950 el primer algoritmo de corrección de errores, el código de Hamming [47], aplicado aún en la actualidad. Su método permite identificar y corregir un bit erróneo en una palabra codificada. Este código había sido ya descubierto de forma independiente por Marcel Golay, en el año 1949. Los códigos de Hamming son utilizados actualmente, por ejemplo, en el proceso de lectura y escritura de una memoria RAM. Además, Golay [39] diseñó los denominados códigos Golay, que permiten corregir hasta tres errores. P. Elías introdujo en 1955 los códigos convolucionales [44], que presentan en la actualidad multitud de aplicaciones: comunicaciones wireless (GSM, IMT-2000), comunicación digital terrestre y satélite.

En 1960 R. C. Bose y D. K. Chaudhuri propusieron una clase de correctores de errores múltiples que curiosamente fueron descubiertos independientemente por A. Hocqenghem en 1959. Estos correctores son conocidos como códigos BCH (por la iniciales de los autores). También en 1960, I. S. Reed y G. Solomon publicaron un esquema de codificación que usa todo el potencial de los códigos de bloque [27]. Los códigos Reed-Solomon han sido muy utilizados por la NASA, para transmisión de información en las misiones Galileo, Magellan y Ulises al espacio, y en la actualidad se usan muy frecuentemente: desde los lectores de CD's hasta los discos duros de los ordenadores. Los inicios de los años 60 quedaron marcados por los resultados de Berlekamp sobre la concepción de potentes algoritmos de decodificación algebraica de códigos BCH [18]. En 1966, G. D. Forney discutió por primera vez la posibilidad de usar códigos concatenados (combinación de dos códigos) para incrementar la eficiencia, evitando hacer los dispositivos y componentes demasiado complejos [20]. En 1967, A. J. Viterbi diseñó un algoritmo decodificador para en una máxima probabilidad para códigos convolucionales [2] y lidera el actual desarrollo de los esquemas para códigos correctores de errores en comunicaciones digitales.

El carácter innovador de estas investigaciones sobre los códigos correctores superaban las posibilidades técnicas de la época, y no fue posible una aplicación práctica inmediata. El desarrollo de los dispositivos para la corrección de errores solamente se dio hasta mediados de los años 70. En 1974, Blokh y Zyablov [17] y Zinov'ev [59] introdujeron una importante clase de códigos concatenados, que eran capaces de corregir tanto errores aleatorios como ráfagas de errores. La introducción en los años 70 por Goppa de una nueva construcción de códigos lineales a partir de curvas algebraicas lisas (llamados códigos geométricos de Goppa o códigos álgebro-geométricos) cambió por completo el panorama de investigación en el terreno de la teoría de códigos correctores de errores; por un lado, la codificación de dichos códigos parecía sencilla, y por otro sus parámetros podían ser fácilmente controlables a partir de fórmulas clásicas de la geometría algebraica. Sin embargo, a pesar del interés que suscitó el estudio de los códigos geométricos de Goppa desde su origen, no pudieron encontrarse algoritmos eficientes para su decodificación hasta finales de los años 80, gracias a sucesivos trabajos de Justesen et al., Skorobogatov y Vladut, y Porter. No obstante, los códigos álgebro-geométricos apenas han sido implementados en la práctica por los ingenieros debido a la profundidad matemática de las ideas subyacentes. Por este motivo, los matemáticos están haciendo actualmente una descripción de este tipo de códigos y de su tratamiento práctico mediante una aproximación más elemental [53]. Por otra parte, aunque los parámetros de los códigos álgebro-geométricos son mucho mejores que los clásicos en sentido asintótico (es decir, para códigos de longitud arbitrariamente grande), las aplicaciones técnicas no se han visto aún en la necesidad práctica de sustituir los códigos que actualmente se utilizan por otros de mayor longitud sin que se dispare simultáneamente el coste y la tasa de error. Como contrapartida, los códigos clásicos que actualmente se utilizan tienen una decodificación bastante más rápida y efectiva.

Se puede considerar que hasta mediados de los años 90, los códigos concatenados eran la mejor opción para la corrección de errores. Sin embargo, éstos fueron mejorados por la aparición de los denominados turbo códigos, que conceptualmente son "dos códigos concatenados juntos", y que nos aproximan a alcanzar las máximas tasas de transmisión posibles derivadas de la Teoría de Shannon.

Estos códigos fueron originados por Claude Berrou y Alain Glavieux y la primera descripción utilizando argumentos probabilísticos fue presentada en 1993 [1]. Estos códigos están siendo utilizados actualmente en canales de comunicación digital y en la telefonía de tercera generación.

Recientemente David J.C. Mackay y R. M. Neal han redescubierto unos códigos inventados por Robert Gallager en 1960 [45], los códigos LDPC (Low-Density Parity Check), y que superan notablemente a los turbo códigos. Estos códigos se están incorporando a los nuevos satélites de telecomunicaciones y se espera que se incluyan en un futuro a la telefonía móvil de cuarta generación [10]. También se están realizando estudios sobre la aplicación de técnicas heurísticas para la corrección de errores [15], debido a que el problema de encontrar un código óptimo es NP-Completo, y las técnicas exactas son útiles únicamente para pequeñas instancias. Entre las técnicas heurísticas cabe mencionar el Recocido Simulado, los Algoritmos Genéticos, etc.

2.3. Canal SISO

Fue una de las primeras configuraciones de antenas para el envío de una señal el cual consiste en el envío de una señal a través de una antena y la recepción de dicha señal en otra ante, este tipo de configuración aun se encuentra en uso por su bajo nivel de complejidad, pero para los requerimiento de hoy en día se estas evaluando nuevas técnicas de transmisión de una señal.

2.3.1. Evolución de códigos LDPC

En la Codificación, Galleger [45] [46] en 1963 crea los códigos LDPC durante sus estudios de Ph.D en el MIT. Este es el comienzo de la evolución de los canales de codificación, este esquema produjo un pequeño impacto en las investigaciones de la codificación de canal de comunicación a pesar de este impresionante cambio, el cual fue sin precedentes y anterior a los códigos Turbo [4] , este bajo interés en LDPC surge como consecuencia del alto requerimiento de almacenamiento y complejidad en el sistema de decodificación que eran necesarios. Siguiendo esta concepción, LDPC permaneció dominando por al menos una década. La complejidad de LDPC fue evaluada por Zyablov y Pinsker en 1975 [60], mientras que Tanner [41] sugiere el empleo de un enfoque recursivo para la construcción del código LDPC y presenta una representación gráfica de la matriz de chequeo de paridad, Sipser y Spielman [42] presentan la matriz de chequeo de paridad usando gráficos de expansión.

Durante el año 1990 el interés en la codificación del canal de comunicación en LDPC fue revivido. LDPC fue estudiado extensivamente en múltiples aspectos; Richardson [56] propuso el algoritmo de evolución de densidad para calcular el rendimiento asintótico de un LDPC dado, en un canal AWGN y Cheng [51] [52]

simplifica la complejidad del algoritmo de evolución de densidad usando aproximación gaussiana. El salto a codificación LDPC y sus cambios fueron estudiados por Burshtein [8] [9] [21], otros cambios fueron realizados por Lehmann y Maggio [19], Chen y Fossorier [29]. Mackay y Neal [11] [12] tan solo experimentaron largos códigos e ilustraron que la capacidad de LDPC es capaz de superar a los códigos Turbo cuando el canal de comunicación era afectado por ruido blanco. Motivados por estos logros de LDPC, fue estudiado en muchos otros canales y se trabajo en varios esquemas de modulación, ancho de banda eficiente en un esquema de modulación. Anchote Banda eficiente en un esquema de modulación son estudiados en [16] [30]. El rendimiento con otros canales de comunicación como Rayleigh fading [31] [3], respuesta parcial de un canal [32] y un canal binario [22] fueron evaluados. El esquema OFDM es sólo un esquema de concatenación con LDPC acerca de canales dispersivos [23] [24] [25]. LDPC fue propuesto para ser utilizado usando una decodificación en campos de Galois por Davey [35] [36] [37], Song [26] y Nakamura [33], la construcción irregular de la matriz de chequeo de paridad [38] [55] [13] [14], con el motivo de mejorar el acercamiento al límite de Shannon [6]. Por reemplazar las filas en la matriz de chequeo de paridad por un código de Hamming, Lentmaier propuso la generalización de los códigos LDPC [40], esto atrajo el interés de Zhang [57] [58], Hirst [48] [49] y Boutros [28] para reducir la codificación y decodificación tal como Richardson [56] [54], Kou [61] [62] [63], Spielman [7], Pothier [43]. A continuación se muestra un listado cronológico de la evolución de estos códigos:

Tabla 1: Decodificación y secuencia de transmisión para dos antenas transmisoras

- 1948 Limite de Shannon.
- 1962 LDPC Binario, inventado por Gallager.
- 1975 Cuantifica la complejidad de los códigos LDPC.
- 1983 Representación grafica de la matriz de Chequeo de paridad.
- 1997 Informa cambios en la cercanía del Limite de Shannon
- 1998 Códigos LDPC no binarios
- 1998 Propuesta de códigos irregulares de LDPC
- 1998 Reducción de la complejidad del algoritmo usando Transformada de Fourier.

Los LDPC fueron introducidos junto con un algoritmo de probabilidad basado en iteración de estas. Estos códigos fueron construidos usando matrices al azar de escaso cheque de paridad. Sin embargo, iban en gran parte inadvertidos hasta el advenimiento de los códigos de turbo, donde “fueron vueltos a descubrir” por Mackay en 1999, que demostró era parecida a la capacidad de los códigos de turbo. Recientemente, Richardson y Urbanke han desarrollado los códigos irregulares de LDPC que funcionan incluso mejor que los códigos de turbo para longitudes muy grandes de bloque ($n > 10^5$) y que pueden venir dentro de 0.1 dB de la capacidad de Shannon.

2.3.2. Modulación Sphere Packing

En el espacio euclidiano tridimensional, si se consideran un plano con un arreglo compacto de esferas en él, existen tres esferas vecinas, las que podemos poner en una

cuarta esfera, en el hueco entre las tres esferas inferiores. Si hacemos esto “por todas partes”, creamos un nuevo arreglo compacto. La tercera capa puede sobreponer primera, o las esferas pueden estar sobre un hueco de la primera capa. Hay así tres tipos de planos, llamados A, B y C.

Gauss probó que estos arreglos tienen la densidad más alta entre los arreglos regulares.

Los dos arreglos mas comunes se llaman embalaje cercano cúbico (o cúbico centrada cara) - alternancia de ABCABC... - y embalaje cercano hexagonal - alternancia de ABAB.... Pero todas las combinaciones son posibles (ABAC, ABCBA, ABCBAC, etc.). En todos estos arreglos cada esfera es rodeada por 12 otras esferas, y ambos arreglos tienen una densidad media de 0,74048.

En 1661 Kepler había conjeturado que ésta es la densidad posible máxima para los arreglos regulares e irregulares - ésta se conocía como la conjetura de Kepler. En Thomas 1998 Hales, profesor de Andrew Mellon en la universidad de Pittsburgh, anunció que él tenía una prueba de la conjetura de Kepler. La prueba de Hales es una prueba por el agotamiento que implica la comprobación de muchos casos individuales usando cálculos complejos de la computadora. Los árbitros han dicho que son los “99% seguros” de la corrección de la prueba de Hales, así que la conjetura de Kepler se ha probado casi ciertamente.

2.4. Canal MIMO

2.4.1. Space Time Block Coded

Un código del espacio-tiempo (STC) es un método empleado para mejorar la confiabilidad de la transmisión de datos en los sistemas de comunicación inalámbrica que utiliza múltiples antenas. STCs confía en transmitir copias múltiples, redundantes de una secuencia de datos al receptor con la esperanza de que por lo menos algunas de ellas puedan sobrevivir la trayectoria física entre la transmisión y la recepción para permitir descifrar confiable.

Los códigos del tiempo del espacio se pueden partir en dos tipos principales: los códigos del enrejado del Espacio-tiempo (STTCs) [64] distribuyen las antenas múltiples del enrejado de un excedente del código y los time-slots múltiples y proporcionan aumento de la codificación y aumento de la diversidad y los códigos del bloque del Espacio-tiempo (STBCs) [50] [65] actuar en un bloque de datos inmediatamente (semejantemente bloquear códigos) y proporcionar solamente el aumento de la diversidad, pero son mucho menos complejo en términos de la puesta en práctica que STTCs.

La STC puede ser subdividida más a fondo según si el receptor sabe las debilitaciones del canal. En la STC coherente, el receptor sabe las debilitaciones del canal a través del entrenamiento o de una cierta otra forma de valoración. Estos códigos se han estudiado más extensamente porque son menos complejos que sus contrapartes incoherentes. En la STC incoherente el receptor no sabe las debilitaciones del canal sino sabe la estadística del canal. [34] En códigos diferenciados del espacio-tiempo ni el canal ni la estadística del canal está disponible. [66]

2.5. Conclusión

Con estos antecedentes históricos podemos plantear un esquema de transmisión y recepción de datos para ser enviados a través de un canal inalámbrico, con su respectiva codificación, modulación y diversas configuraciones de antenas.

3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es extenderse en los métodos y algoritmos de los conceptos teóricos abordados en el capítulo anterior; se comenzará con cuales son las metas de un diseño de telecomunicaciones, continuando con conceptos introductorios, en los que se presentará un sistema de comunicación digital típico, pasando a conceptos fundamentales que ayudarán a plantear las bases para el uso de la codificación LDPC No Binaria, la modulación Sphere Packing y los métodos de transmisión SISO y MIMO. Teniendo esta base teórica en el próximo capítulo se podrá simularán las diversas técnicas y comparar el comportamiento de los canales SISO y MIMO.

3.2. Diseño de telecomunicaciones

Para conocer paso a paso cuales son las metas en un sistema de diseño de telecomunicaciones se realizará el siguiente desglose: Para diseñar un sistema de comunicaciones se debe tener en cuenta varios puntos que deber ser puestos en “una balanza“, estos puntos u objetivos son:

1. Maximizar la tasa de transmisión.
2. Minimizar la tasa de probabilidad de error del bit P_B .
3. Minimizar la potencia requerida (esto implica minimizar E_b/N_0).
4. Minimizar el ancho de banda requerido, B.
5. Maximizar la utilización del sistema. Esto es, brindar servicio confiable para un máximo número de usuarios, con mínimo retardo y máxima resistencia a las interferencias.
6. Minimizar la complejidad del sistema y minimizar sus costos.

Lo ideal sería cumplir con todas estas metas en forma simultánea. Sin embargo, se ve por ejemplo que, los puntos 1 y 2 entran en conflicto con los puntos 3 y 4.

Hay varias limitaciones teóricas que imponen restricciones a las metas enumeradas. Estas son:

1. El ancho de banda mínimo requerido (Ancho de banda de Nyquist).

2. Teorema de la capacidad de Shannon-Hartley.
3. Normas Gubernamentales (por ejemplo, distribución de frecuencia).
4. Limitaciones tecnológicas (estado del arte de los componentes).

3.2.1. Ancho de banda mínimo de Nyquist

Cualquier sistema realizable que tenga un filtro no ideal sufrirá una interferencia ínter simbólica (ISI), de manera tal que la “cola” de un impulso interferirá con el impulso adyacente, causando problemas de detección. Nyquist demostró que, en teoría, R_s símbolos por segundo pueden detectarse sin ISI dentro de un ancho de banda mínimo de $R_s/2$ hertz (ancho de banda de Nyquist).

3.2.2. Teorema de capacidad de Shannon-Hartley

Shannon demostró que la capacidad C de un sistema, que tiene un canal perturbado con ruido blanco gaussiano aditivo, es una función de la potencia media recibida S , de la potencia media de ruido N y ancho de banda B . Este relacionado (teorema de Shannon-Hartley) puede escribirse como:

$$C = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (4)$$

Cuando en ancho de banda B se mide en hertz y el logaritmo se toma en base 2, la capacidad del canal viene dada en $bits/s$. Entonces, es teóricamente posible transmitir información sobre tal canal a cualquier tasa R , donde $R \leq C$, con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña usando un suficientemente complicado esquema de codificación. Para una tasa de información $R > C$ no es posible encontrar un esquema de codificación que conduzca a una probabilidad de error arbitrariamente pequeña. El trabajo de Shannon muestra que los valores de S , N y B establecen un límite a la tasa de transmisión, no a la probabilidad de error de bit.

Shannon usó la ecuación (4) para mostrar gráficamente los límites de los sistemas prácticos. Esta curva se dibuja en la Figura 1 y muestra la capacidad de canal normalizada C/B en $bits/s/Hz$ como una función de la relación señal a ruido SNR del canal (es decir, $bits/s$ por cada hertz de ancho de banda del canal). Ya que la potencia de ruido detectada es proporcional al ancho de banda, podemos escribir:

$$N = N_0 \cdot B \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en (4) y reacomodando los términos tenemos:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 \cdot B} \right) \quad (6)$$

Par el caso donde la tasa de transmisión es igual a la capacidad del canal, $R = C$ podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{N_0} &= \frac{S \cdot T}{N_0} = \frac{S}{R \cdot N_0} \\ \frac{S}{N_0 \cdot C} &= \frac{E_b}{N_0} \end{aligned} \quad (7)$$

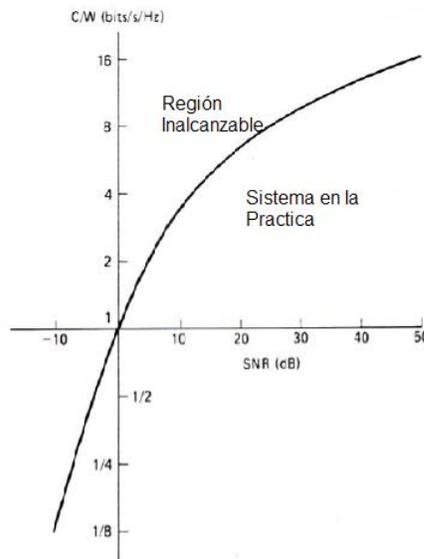


Figura 1: Capacidad del canal normalizado versus SNR del canal (el ancho de banda se indica con W en lugar de hacerlo con B).

Por lo tanto, podemos modificar la ecuación (4) como sigue:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left[1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \left(\frac{C}{B} \right) \right] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 2^{C/B} &= 1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \left(\frac{C}{B} \right) \\ \frac{E_b}{N_0} &= \frac{B}{C} \cdot (2^{C/B} - 1) \end{aligned} \quad (9)$$

3.2.3. Límite de Shannon

Existe un valor límite de E_b / N_0 debajo del cual no puede haber comunicación libre de error a ninguna tasa de transmisión. Usando la siguiente identidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \quad (10)$$

Podemos calcular el valor límite de E_b / N_0 como sigue. Sea

$$x = \frac{E_b}{N_0} \cdot \left(\frac{C}{B} \right) \quad (11)$$

Entonces, de la ecuación (8),

$$\frac{C}{B} = x \cdot \log_2 (1+x)^{1/x} \quad (12)$$

En la ecuación (12), si es reemplazada la primera x por $\frac{E_b}{N_0} \cdot \left(\frac{C}{B} \right)$ tenemos:

$$1 = \frac{E_b}{N_0} \cdot \log_2 (1+x)^{1/x} \quad (13)$$

En el límite, cuando C/B tiende a cero (digamos, cuando la capacidad del canal tiende a cero, es decir, cuando la capacidad del canal es tal que no se puede transmitir nada), entonces $(1+x)^{1/x}$ tiende al número e , y obtenemos:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2(e)} = 0,693 = -1,59dB \quad (14)$$

Este valor de E_b / N_0 es llamado "límite de Shannon".

3.2.4. Sistemas limitados en potencia

Para el caso de sistemas limitados en potencia, es decir, sistemas donde no es posible disponer de toda la potencia deseada pero sí hay disponibilidad de ancho de banda (por ejemplo, un enlace satelital), se puede poner en práctica las siguientes relaciones de compromiso:

1. Mejorar la P_B gastando más ancho de banda (para una dada E_b / N_0).

2. Reducir la E_b / N_0 requerida gastando ancho de banda (para una determinada P_B).

Generalmente, para estas situaciones, las curvas tipo cascada de probabilidad de error, son las más apropiadas para hacer el análisis de compromiso entre las distintas variables.

3.2.5. Sistemas limitados en Ancho de banda

Cualquier sistema digital que transmite k bits en T segundos usando un ancho de banda de B hertz, opera con una eficiencia de ancho de banda de $\frac{R}{B} = \frac{\log_2(M)}{B \cdot T}$ bits/s/Hz. De esta expresión puede verse que un valor del producto $B \cdot T$ dará como resultado un sistema con mejor eficiencia de ancho de banda. Por lo tanto, señales con un bajo $B \cdot T$ se usan normalmente en sistemas limitados de ancho de banda pero con disponibilidad de potencia. Para este caso el objetivo usual es maximizar la tasa de transmisión sobre el canal de banda limitada, a expensas de E_b / N_0 (manteniendo un valor específico de P_B). Un análisis de este tipo es más conveniente hacerlo sobre el plano de eficiencia de ancho de banda.

La zona limitada en ancho de banda y la zona limitada en potencia. Cada zona presenta una relación de compromiso. Por ejemplo, la zona correspondiente a ancho de banda limitado requiere el uso de un valor alto de R/B , pero eso implica aumentar la relación E_b / N_0 . Un compromiso similar, en sentido opuesto, se presenta en la zona correspondiente a limitaciones de potencia.

3.3. Conceptos Introdutorios

Se considerará un modelo en bloques de lo que es una transmisión digital, para comprender los alcances y área de aplicación de las técnicas. La figura 2 muestra un esquema genérico de un sistema de comunicación digital.

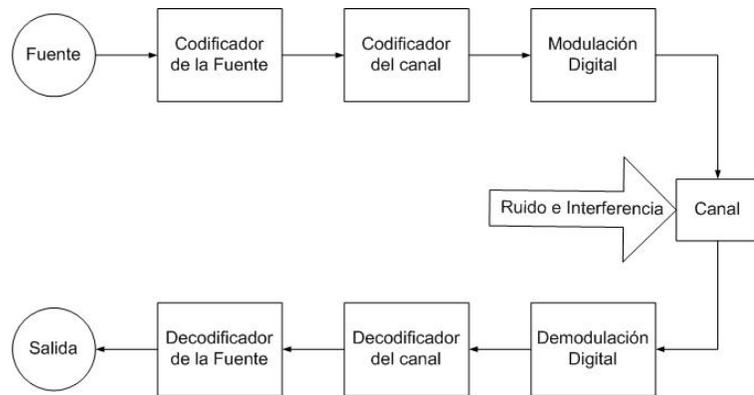


Figura 2: Esquema genérico de un sistema de comunicación digital.

La fuente puede generar señales analógicas o digitales, las cuales son convertidas a una secuencia de símbolos binarios. Esta secuencia de símbolos debe ser capaz de representar el mensaje con el menor número de símbolos posibles, en donde se busca evitar redundancia, el proceso de convertir de forma eficiente la información de la fuente en una secuencia finita de dígitos se llama codificación de la fuente o compresión de los datos. La secuencia de símbolos proveniente del codificador de la fuente, a la que se llama secuencia de información, la cual se entrega al codificador del canal, este tiene como propósito introducir redundancia en la secuencia de información de modo que haga posible recuperar la información en el receptor, contrarrestando los efectos del ruido e interferencia que son introducidos por el canal. Al introducir redundancia en el mensaje que puede interpretarse como mayor fidelidad de la información recibida en el receptor. El mensaje codificado es modulado, con el propósito de mapear la información digital en forma de ondas eléctricas para ser transmitidas, en el canal de comunicación es el medio por el que se transmite esta señal y se modifica la señal enviada debido al ruido e interferencia del medio ambiente.

3.3.1. Ruido Rayleigh Fading

Es el desvanecimiento de la señal, este concepto se utiliza para describir las variaciones de amplitud y fase de una señal, en un periodo de tiempo o a una distancia determinada. El desvanecimiento se origina por la presencia de obstáculos tales como edificios y elevaciones geográficas en la trayectoria de la señal, por la interferencia de dos o más versiones de la señal transmitida, que llegan al receptor en tiempos distintos. Estas ondas, llamadas de múltiples trayectorias, se combinan en la antena receptora, dando una señal resultante que puede variar extensamente en amplitud y fase, dependiendo de la distribución de intensidad, el tiempo relativo de la propagación de las ondas y el ancho de banda de la señal transmitida, en este caso la interferencia destructiva puede llegar a ser que la potencia de la señal en el receptor decaiga por un factor de hasta 1000 veces el valor promedio esperado. En regiones urbanas el desvanecimiento por el tamaño de las antenas de los móviles está por debajo de la altura de los edificios cercanos y no hay líneas de vista a la radio base. Incluso cuando

existen líneas de vista se produce una múltiple trayectoria debido a la reflexión en la tierra y construcciones aledañas. Las variaciones espaciales de la señal producen el receptor variaciones temporales mientras este se mueve en el campo de múltiples trayectorias, un receptor que se mueve puede pasar por múltiples desvanecimientos.

3.4. Fading con bloque en canal SISO.

Más en detalle, en un canal con fading a bloques con entrada simple y salida simple (SISO), con N_B bloques de fading por palabra de código (paquete) y longitud del bloque (en dimensiones complejas) L , la señal recibida se puede expresar como:

$$y_b = \sqrt{\rho} \cdot h_b \cdot x_b + z_b \quad b = 1, \dots, N_B \quad (15)$$

Donde $y_b \in \mathbb{C}^L$ es la señal recibida en el bloque b , $x_b \in \mathbb{C}^L$ es la porción de palabra de código asignada al bloque b , $h_b \in \mathbb{C}$ representa el coeficiente de fading (escalar) del bloque b y $z_b \in \mathbb{C}^L$ corresponde al vector de ruido, con componentes i.i.d. $\sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$. En este modelo, la longitud (en dimensiones complejas) de una palabra de código es $N_B L$. Consideramos que las palabras de código están construidas sobre el alfabeto complejo $X \subseteq \mathbb{C}$ y que dicha constelación de señal está normalizada en energía, o sea, $E[|X|^2] = 1$. Así mismo, consideramos que el fading está normalizado, por lo cual $E[|h_b|^2] = 1$. Por simplicidad, consideraremos fading de Rayleigh, por lo cual, $h_b \sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$. Por consiguiente, la relación señal a ruido (SNR) media es ρ y la SNR instantánea en el bloque b es $\rho \cdot \gamma_b$, donde $\gamma_b \equiv |h_b|^2$. Se considerará que la información del estado del canal (CSI) es conocida solamente por el receptor, esto quiere decir que consideraremos un canal perfecto.

$$Y = \sqrt{\rho} \cdot H \cdot X + Z \quad (16)$$

Donde $Y = [y_1, \dots, y_{N_B}]^T \in \mathbb{C}^{N_B \times L}$, $X = [x_1, \dots, x_{N_B}]^T \in \mathbb{C}^{N_B \times L}$, $Z = [z_1, \dots, z_{N_B}]^T \in \mathbb{C}^{N_B \times L}$ y $H = \text{diagonal}(h) \in \mathbb{C}^{N_B \times N_B}$, donde $h = (h_1, \dots, h_{N_B})$.

Todas posibles palabras de código X forman una modulación codificada M sobre X , con una tasa de transmisión R (en bits por dimensión compleja) dada por:

$$R = \frac{1}{N_B \cdot L} \cdot \log_2 |M| = \frac{K}{N_B \cdot L} \quad (17)$$

Donde $K = \log_2 |M|$ es número de bits de información por palabra de código asumiendo que todas las palabras de código son equiprobables.

En este canal, la capacidad en el sentido estricto de Shannon es cero, ya que existe una probabilidad no nula, llamada probabilidad de corte, que el mensaje transmitido sea recibido en error.

3.5. Codificador y Decodificador LDPC No Binario

3.5.1. Codificador de Q-ARY para códigos LDPC

Para realizar la codificación de un código es necesario conocer la matriz de chequeo de paridad H_{nm} con $m < n$ y coeficientes en \mathbb{Z}_4 , esta debe contener una baja entropía en cada una de las filas de la matriz, una vez obtenida la matriz de paridad resulta necesario el cálculo de la matriz de generación G_{nm} , que es deducida a través de eliminación gaussiana de la matriz de paridad. La palabra codificada es el resultado de $G_{nm} \cdot \vec{s} = \vec{c}$, donde \vec{s} y \vec{c} son los vectores de la palabra original y la palabra codificada respectivamente. Las operaciones de multiplicación y suma son realizadas bajo el campo de Galois, el vector resultante es una palabra de largo 'n' en los cuales sus 'm' primeros símbolos, son la palabra original y los 'n-m' restantes son la redundancia del código.

3.5.2. Campos de Galois.

Un campo de Galois es un campo finito con p^n elementos, donde número p es un entero primo. El conjunto de elementos distintos a cero del campo, es un grupo cíclico bajo multiplicación. Un generador de este grupo cíclico se llama un polinomio primitivo del campo. El campo de Galois se puede generar como el sistema de polinomios con coeficientes en modulo \mathbb{Z}_p y debe ser un polinomio irreducible de N grado. Las operaciones de suma y producto para GF (4) son mostradas en la tabla 2, donde el polinomio primitivo es $x^2 + x + 1$.

Tabla 2: Operaciones suma y producto para GF(4).

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

\otimes	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

3.5.3. Decodificador de Q-ARY para códigos LDPC.

Para referirse al elemento del vector x como el símbolo del ruido y al elemento del vector z como el chequeo. Dado $N(m) := \{n : H_{mn} \neq 0\}$ será el conjunto de símbolos de ruido que participan en el chequeo m . El problema de decodificar, es encontrar el vector más probable tal que $H \cdot x = z$, en que la probabilidad del vector x este determinada por el modelo del canal. Dado $M(n) := \{m : H_{mn} \neq 0\}$ este es el conjunto de chequeo tal que depende del conjunto de símbolos con ruido “ n ”. Con suficientes símbolos distintos de cero en la Matriz de Chequeo de Paridad H_{mn} , asociadas con las cantidades q_{mn}^a, r_{mn}^a para $a \in GF(q)$. La cantidad q_{mn}^a esta asociada con la probabilidad que el símbolo n del vector x sea “ a ”, dada la información obtenida vía otros chequeos que chequearon m . La cantidad r_{mn}^a se refiere a la probabilidad del chequeo de “ m ” haya sido satisfecho si el símbolo “ n ” del vector x , teniendo una distribución dada por la probabilidad $\{q_{mn}^a : n' \in N(m) \setminus n, a \in GF(q)\}$. El valor de r_{mn}^a es (18):

$$r_{mn}^a = \sum_{x: x_n = a} \delta \left(\sum_{n' \in N(m)} H_{mn'} \cdot x_{n'} = z_m \right) \prod_{j \in N(m) \setminus n} q_{mj}^{x_j} \quad (18)$$

3.5.4. Decodificador con transformada de Fourier

Si los códigos LDPC son decodificados por el algoritmo Suma-Producto, el orden de complejidad de la codificación es q^2 por iteración, pero este puede ser reducido usando transformada de Fourier de las probabilidades. La ecuación (18) representa una convolución de la cantidad q_{mj}^a , la sumatoria puede ser remplazada por el producto de la transformada de Fourier. (Asumiendo el grupo aditivo de $GF(q)$) de q_{mj}^a para $j \in N(m) \setminus n$ seguido por la transformada inversa de Fourier. La transformada de Fourier F de una función f sobre $GF(2)$ esta dada por $F^0 = f^0 + f^1, F^1 = f^0 - f^1$. Transformando sobre $GF(2^p)$ puede ser visto como una secuencia transformación binaria en cada p dimensiones. Por lo tanto para $GF(4)$ se tiene (19):

$$\begin{aligned} F^0 &= [f^0 + f^1] + [f^2 + f^3] \\ F^1 &= [f^0 - f^1] + [f^2 - f^3] \\ F^2 &= [f^0 + f^1] - [f^2 + f^3] \\ F^3 &= [f^0 - f^1] - [f^2 - f^3] \end{aligned} \quad (19)$$

Para el cálculo de la transformada inversa se realizan las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned}
f^0 &= \frac{[F^0 + F^1] + [F^2 + F^3]}{4} \\
f^1 &= \frac{[F^0 - F^1] + [F^2 - F^3]}{4} \\
f^2 &= \frac{[F^0 + F^1] - [F^2 + F^3]}{4} \\
f^3 &= \frac{[F^0 - F^1] - [F^2 - F^3]}{4}
\end{aligned} \tag{20}$$

Dado $(Q_{mj}^0, \dots, Q_{mj}^{q-1})$ representa la transformada de Fourier del vector $(q_{mj}^0, \dots, q_{mj}^{q-1})$, ahora r_{mn}^a es la a-esima coordenada de la transformada inversa de Fourier de:

$$\left(\left(\prod_{j \in N(m) \setminus n} Q_{mj}^0 \right), \dots, \left(\prod_{j \in N(m) \setminus n} Q_{mj}^{q-1} \right) \right) \tag{21}$$

3.5.5. La Transformada Equivalente

Asignando al vector C como la palabra codificada, entonces $\sum_j h_{ij} c_j = 0$ (para la i-esima chequeo del nodo). En GF(2), se puede tener $\sum_j c_j = 0$ (j satisface la inecuación $h_{ij} \neq 0$) para elementos distintos de cero, todos son '1', sin embargo, en GF(q) este no es el caso, para elementos distintos de cero son seleccionados de $\{1, 2, \dots, q-1\}$, entonces no se puede copiar el método de decodificación para GF(2), simplemente se debe modificar el algoritmo computacional de Q_{mj}^a y r_{mn}^a . Para decodificar con exactitud, la transformada equivalente (ET) es propuesta.

Ahora se analizara la ecuación $\sum_j h_{ij} c_j = 0$ en GF (q). Aquí h_{ij} no puede ser omitida por que $h_{ij} \in \{1, 2, \dots, q-1\}$. Dado $c'_j = h_{ij} c_j$, entonces $\sum_j c'_j = 0$ (j satisface la inecuación $h_{ij} \neq 0$) en esta condición, el código LDPC puede ser decodificado por copia del proceso de GF (2).

3.5.6. Detalles de las iteraciones.

1. Inicialización:

Se inicializa los valores de q_{mn}^a por f_n^a , en donde significa la probabilidad de que $x_n = a$ otorgado por el modelo del canal.

$$f_n^a = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(HS(x_n) - a)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \quad (22)$$

Considerando $\sigma^2 = 0.25$, y donde $HS(x_n)$ es la posición n del la palabra codificada.

2. La ET (Transformada Equivalente) y FT (Transformada de Fourier).

$$\begin{aligned} q_{mn}'^a &= q_{mn}^{a \oplus h_{mn}} \\ Q_{mn}'^a &= FT[q_{mn}'^0, \dots, q_{mn}'^{q-1}] \end{aligned} \quad (23)$$

3. La IFT (Transformada Inversa de Fourier) y IET (Transformada Inversa Equivalente), actualizando r_{mn}^a .

$$\begin{aligned} r_{mn}'^a &= IFT \left[\left(\prod_{j \in N(m) \setminus n} Q_{mj}^0 \right), \dots, \left(\prod_{j \in N(m) \setminus n} Q_{mj}^{q-1} \right) \right] \\ r_{mn}^a &= r_{mn}'^{(a \oplus h_{mn})} \end{aligned} \quad (24)$$

4. Actualización de q_{mn}^a

$$q_{mn}^a = \alpha_{mn} \cdot f_n^a \cdot \prod_{j \in M(n) \setminus m} r_{jn}^a \quad (25)$$

Donde α_{mn} es escogido tal que $\sum_{a=0}^{q-1} q_{mn}^a = 1$.

5. Calculo de q_n^a .

$$q_n^a = \alpha_n \cdot f_n^a \cdot \prod_{j \in M(n)} r_{jn}^a \quad (26)$$

Donde α_n es escogido tal que $\sum_{a=0}^{q-1} q_n^a = 1$.

Para escoger el código decodificado se realiza:

$$\hat{x}_n = k \left(q_n^k = \max \{ q_n^0, \dots, q_n^{q-1} \} \right) \quad (27)$$

Si $H \cdot \hat{x} = z$, donde z es el síndrome es igual al vector nulo, el código decodificado es válido en caso contrario iterar desde el paso 2, en este caso el número máximo de iteraciones es de 6, para las simulaciones que se realizarán.

3.6. Sphere Packing.

3.6.1. El problema de Sphere Packing

El problema clásico de sphere packing, aun no está resuelto hoy, en el cual es encontrar cuán densamente un gran número de idénticas esferas pueden ser empacadas juntas. Para mostrar esto de otra forma, considerar una región amplia y vacía, y preguntarse cuál es el número más grande de esferas que pueden ser empacadas en esa región.

Las esferas no caben juntas tan bien como los cubos, y siempre hay algo de espacio perdido entre ellas. Sin importar cuán inteligentemente se arreglen las esferas, aproximadamente un cuarto del espacio no se usará. Un arreglo familiar es el que se muestra en la figura 2, en la que los centros de las esferas forman el *face-centered cubic (fcc) lattice*. Este empaque de esferas ocupa $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0.7405$ del espacio total.

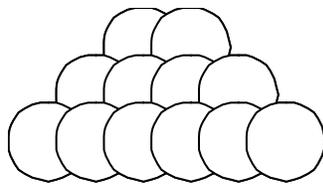


Figura 3: Empaquetamiento De Esferas

La versión clásica del problema de Sphere Packing es preguntarse si es ésta la máxima densidad posible, para esferas de n dimensiones. Este problema tiene considerable importancia práctica aún para dimensiones más grandes que 3.

Un punto en un espacio n dimensional real \mathbb{R}^n es un valor de n números reales:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (28)$$

Una esfera en \mathbb{R}^n con centro $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y radio ρ consiste en todos los puntos $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ tal que:

$$(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + \dots + (x_n - u_n)^2 = \rho^2 \quad (29)$$

Se puede describir un sphere packing en \mathbb{R}^n solo especificando el centro y el radio.

3.6.2. Lattice Packings

El empaquetamiento mostrado en la figura anterior es llamado Lattice Packing porque tiene la propiedad que 0 es un centro y que si hay esferas con centros u y v entonces también hay esferas con centro $u+v$ y $u-v$.

En otras palabras el conjunto de centros forman un grupo aditivo. Se pueden encontrar 3 centros v_1, v_2, v_3 (o en general n centros v_1, v_2, \dots, v_n para un lattice n -dimensional) tales que el conjunto de todos los centros consisten en la suma $\sum (k_i \cdot v_i)$ donde los k_i son enteros.

Los vectores v_1, \dots, v_n son entonces llamados la base del Lattice. El paralelogramo consistente en los puntos:

$$\theta_1 v_1 + \dots + \theta_n v_n \quad 0 \leq \theta_i \leq 1 \quad (30)$$

Es un paralelogramo fundamental. En la figura 3 se muestra en Lattice de dos dimensiones y su paralelogramo fundamental determinado por la base v_1, v_2 .

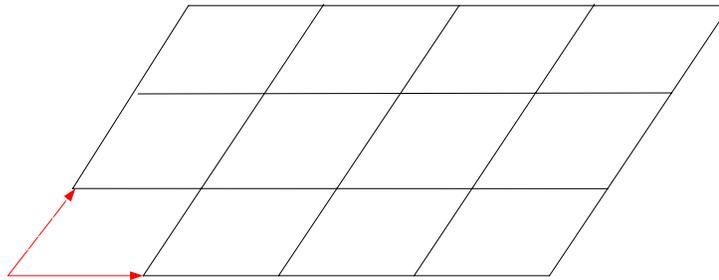


Figura 4: Lattice.

Supongamos que las coordenadas de los vectores base son:

$$v_i = (v_{i1}, \dots, v_{im}) \quad \text{para } i = (1, \dots, n) \quad (31)$$

Donde $m > n$. la matriz:

$$M = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Es la matriz generadora del lattice, y los vectores del lattice consisten en todos los vectores ξM , donde $\xi_1 = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ es un vector arbitrario con componentes enteros ξ_i .

La matriz $A = M \cdot M^T$, Es llamada matriz Gram del Lattice. El determinante de Λ es entonces el determinante de la matriz A. Si M es una matriz cuadrada entonces:

$$\det \Lambda = (\det M)^2 \quad (33)$$

Ahora se puede dar una definición precisa de la densidad Δ (proporción del espacio que es ocupada por las esferas) de un Lattice Packing, que es igual al volumen de una esfera, dividido por el volumen de la región fundamental que es $(\det \Lambda)^{1/2}$.

3.6.3. Kissing Numbers

El problema de los kissing numbers consiste en saber cuantas bolas de billar pueden ser ordenadas de modo que se toquen todas entre ellas.

Más generalmente, podemos definir el kissing number (τ) de un Sphere Packing, en cualquier dimensión, como el número de esferas, que tocan una esfera.

Para un Lattice Packing ρ (radio) es el mismo para cada esfera, pero para un Packing arbitrario ρ puede variar de una esfera a otra.

3.6.4. Códigos con corrección de errores

Uno de los modelos idealizados de canal es el canal binario simétrico. Para este canal los símbolos de entrada y salida son 0 y 1, y hay una probabilidad $p < 1/2$ que cuando un 0 o 1 es transmitido, el otro símbolo es recibido; con probabilidad $1-p > 1/2$, el correcto símbolo es recibido.

Un código binario por bloques C de largo n es un conjunto de vectores binarios, llamados codewords con n coordenadas, o en otras palabras un subconjunto de F_n^2 , donde $F_2 = (0,1)$ es el campo de Galois de orden 2.

Similarmente un código q-ario es un subconjunto de F_n^q , donde F_q es el campo de Galois de orden q y q es un número primo. Un código q-ario es usado en un canal q-ario simétrico, donde los símbolos de entrada y salida son marcados con elementos de F_q .

Se desea elegir codewords tal que sean fácil de distinguir unos de otros aun cuando errores ocurran. Para hacer esto más preciso se define la distancia de Hamming entre dos vectores:

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n), \quad (34)$$

$u_i, v_i \in F_q$, al número de coordenadas donde ellos difieren:

$$d(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}| \quad (35)$$

El peso de Hamming $w_i(u)$ de un vector, u es el número de coordenadas distintas de cero u_i ; por lo tanto:

$$d(u, v) = wt(u - v) \quad (36)$$

La distancia mínima d de un código es:

$$d = \min[d(u, v) : u, v \in C, u \neq v] \quad (37)$$

Si un código tiene distancia mínima d . la esfera Hamming de radio:

$$\rho = \left\lfloor \frac{1}{2}(d-1) \right\rfloor \quad (38)$$

Los codewords están disconexo (sí ρ es el radio de empaquetamiento del código), y por lo tanto el código puede corregir ρ errores. Un código de largo n , contiene M codewords y con una distancia mínima d se dice que es un código (n, M, d) .

3.6.5. Sphere Packing y códigos correctores de errores

Los códigos de corrección de errores son usados para construir Sphere Packing densos en el espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n .

Se mostrará usando sistemáticamente códigos con corrección de errores para construir Sphere Packing densos.

Se comenzará definiendo el arreglo de coordenadas de un punto y luego se describirá la construcción A, la cual es más efectiva sobre 15 dimensiones. Luego se mostrará la construcción B, efectiva en dimensiones de 8 a 24. Luego, la construcción C

que generaliza A y B y es especialmente efectiva en dimensiones que son potencias de 2.

3.6.6. El arreglo de coordenadas de un punto

El arreglo de coordenadas de un punto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, con coordenadas enteras es obtenido escribiendo la expansión binaria de la coordenada x_i en columnas, empezando con los dígitos menos significativos. Notación complementaria es usada por números negativos, como se muestra mas adelante. La primera, segunda, tercera,.... filas son arreglos de coordenadas son llamados 1's, 2's, 4's, filas respectivamente. La fila 1's del arreglo comprende los dígitos 1's de las coordenadas, y así tiene 0 para coordenadas pares y 1's para las impares. Los 2's, 4's, 8's, filas similarmente comprenden los 2's, 4's, 8's, dígitos de las coordenadas. Por ejemplo, el arreglo de coordenadas del punto (4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3) es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fila de 1s} \\ \text{fila de 2s} \\ \text{fila de 4s} \\ \text{fila de 8s} \\ \dots \end{array} \quad (39)$$

El número de filas es potencialmente infinito, pero todas las filas después de las primeras son idénticas.

3.6.7. Construcción A

La construcción: supongamos que C es un código binario (n,M,d). La siguiente construcción especifica un conjunto de centros para un Sphere Packing en \mathbb{R}^n .

Construcción A. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es un centro si y solo si x es congruente (modulo 2) con un codeword de C .

Así un punto x con coordenadas enteras es un centro si y solo si la fila 1's del arreglo de coordenadas de x esta en C . Un Lattice Packing es obtenido si y solo si C es un código lineal.

Centro de densidad: en el cubo unitario en el origen,

$$\{0 \leq x_i \leq 1 : i = 1, \dots, n\} \quad (40)$$

Los centros son exactamente las M codewords. Todos los otros centros son obtenidos sumando enteros pares a cualquiera de las coordenadas de un codeword. Esto corresponde a cambiar el cubo unitario por dos en cualquier dirección. Así todos los centros pueden ser obtenidos repitiendo un bloque de construcción consistente en un cubo de $2^*2^*\dots^*2$ con los codewords marcados en un vértice de un cubo de $1^*1^*\dots^*1$ en una esquina.

Cada copia de un cubo de $2^*2^*\dots^*2$ contribuye M esferas de radio ρ , así el centro de densidad obtenido de la construcción A es:

$$\delta = M\rho^n 2^{-n} \quad (41)$$

Si dos centros distintos son congruentes al mismo codeword su distancia de separación es al menos 2. Si son congruentes a diferentes codewords entonces difieren por lo menos en 1 en por lo menos de lugares y por lo tanto están por lo menos separados \sqrt{d} . así podemos tomar el radio de las esferas en:

$$\rho = \frac{1}{2} \min\{2, \sqrt{d}\} \quad (42)$$

Kissing numbers: supongamos S es una esfera con centro x , donde x es congruente a un codeword c . Candidatos para centro mas cercanos a x son como sigue.

- Hay $2n$ centros del tipo $x + ((\pm 2)0^{n-1})$ a una distancia de 2 de x .
- Supongamos $\{A_i(c)\}$ es una distribución de pesos de C con respecto a c . como hay $A_d(c)$ codewords a una distancia de d de c , hay $2^d A_d(c)$ centros del tipo $x + ((\pm 1)^d 0^{n-d})$ a una distancia de \sqrt{d} de x . Por lo tanto el número de esferas tocando S , el kissing number S , es:

$$\tau(S) = \begin{cases} 2^d A_d(c) \dots d < 4, \\ 2n + 16A_4(c) \dots d = 4. \\ 2n \dots d > 4. \end{cases} \quad (43)$$

3.6.8. Construcción B

La construcción: supongamos que C es un código binario (n, M, d) con la propiedad de que el peso de cada codeword es par. Un Sphere Packing en \mathbb{R}^n está dado por:

Construcción B. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es un centro si y solo si \vec{x} es congruente (módulo

2) con un codeword de C , y $\sum_{i=1}^n x_i$ es divisible por 4.

Así un punto x con coordenadas enteras es un centro si y solo si la fila 1's del arreglo de coordenadas de x es un codeword c en C y la fila de 2's tiene o un peso par si el peso de c es divisible por 4, o peso impar si el peso de c es divisible por 2 pero no por 4. Un Lattice Packing es obtenido si y solo si C es un código lineal.

Centro de densidad y kissing numbers: el número de centros es la mitad de la construcción A, así:

$$\delta = M\rho^n 2^{-n-1} \quad (44)$$

Supongamos que S es una esfera con centro x , donde x es congruente a un codeword c . Candidatos para centro más cercanos a x son como sigue.

- Los $2n(n-1)$ centros del tipo $x + ((\pm 2)^2 0^{n-2})$.
- Los $2^{d-1} A_d(c)$ centros congruentes a los codewords difieren mínimamente de c . Por lo tanto los kissing numbers de S son:

$$\tau(S) = \begin{cases} 2^{d-1} A_d(c) \dots d < 8, \\ 2n(n-1) + 128A_8(c) \dots d = 8. \\ 2n(n-1) \dots d > 8. \end{cases} \quad (45)$$

Y S tiene radio $\rho = \frac{1}{2} \min\{\sqrt{d}, \sqrt{8}\}$.

3.6.9. Construcción C

La construcción: supongamos que $C_i = (n, M, d)$, $i = 0, 1, \dots, a$, son una familia de códigos con $d_i = \gamma 4^{a-i}$, donde $\gamma = 1$ o 2 . Un sphere packing en \mathbb{R}^n está dado por:

Construcción C: Un punto x con coordenadas enteras es un centro si y solo si la fila $2i$'s del arreglo de coordenadas de x es un C_i , para $i = 0, 1, \dots, a$.

La construcción C sigue la tendencia de A y B imponiendo más restricciones exitosamente al arreglo de coordenadas. En general un nonlattice packing es obtenido.

Distancia entre centros: si la primera fila en la cual 2 centros difieren es la fila $2i$'s, entonces:

- Si $i > a$ su distancia aparte es al menos 2^{a+1} , y
- Si $0 \leq i \leq a$ ellos difieren por lo menos $2i$ en por lo menos $2i$ coordenadas, y así hay por lo menos $(d_i 4^i)^{1/2} = \sqrt{\gamma} 2^a$ separados.

Así, se puede tomar el radio de las esferas como:

$$\rho = \sqrt{\gamma} 2^{a-1}. \quad (46)$$

Centro de densidad: ¿Cuántos puntos enteros x satisfacen las condiciones de la construcción C? La fracción de x 's con fila 1 's en C_0 es $M_0 2^{-n}$, de estos una fracción $M_1 2^{-n}$ tiene fila 2 's en C_1 , y así sucesivamente. Así, la fracción de puntos enteros que son aceptados como centros son $M_0 M_1 \dots M_a 2^{-(a+1)n}$, y así el centro de densidad es:

$$\delta = M_0 M_1 \dots M_a 2^{-(a+1)n} \rho^n = M_0 M_1 \dots M_a \gamma^{n/2} 2^{-2n}. \quad (47)$$

Si los códigos son lineales, y $\dim(C_i) = k_i$, entonces:

$$\log_2 \delta = \sum_{i=0}^a k_i - 2n \quad \text{si } \gamma = 1, \quad (48)$$

$$\log_2 \delta = \sum_{i=0}^a k_i - 3 \frac{n}{2} \quad \text{si } \gamma = 2. \quad (49)$$

Para n grande se tiene:

$$\log_2 \Delta = \sum_{i=0}^a k_i - \frac{n}{2} \log_2 \left(\frac{8n}{\pi e} \right) + O(\log_2 n). \quad (50)$$

Kissing numbers: calcularemos el número de esferas tocando la esfera en el origen. Debemos encontrar el número de centros de tipo $(\pm 2^r)^{d_r} 0^{n-d_r}$ para cada $r=0, 1, \dots, a$. Una coordenada igual a $+2r$ contribuye al arreglo de coordenadas una columna con un solo 1 en la fila de $2r$'s; mientras una coordenada igual a $-2r$ tiene unos en la fila

2i's para todo $i \geq r$. Los 1's en la fila 2r's forman un codeword c en C_r , y el signo menos debe estar en las ubicaciones de los unos en el codeword en $C_{r+1} \cap C_{r+2} \cap \dots \cap C_a$. La fila 2r's puede ser elegida en A_{dr} maneras, y por cada uno de éstos, el número de maneras de elegir los signos es igual al número de codewords en $C_{r+1} \cap C_{r+2} \cap \dots \cap C_a$ los cuales son contenidos en el codeword c de C_r . Dejar el último número ser $N_r(c)$.

Entonces el número de centros de un deseado tipo es $\sum N_r(c)$, y

$$\tau = \sum_{r=0}^a \sum N_r(c)$$

Donde \sum denota la suma sobre todo c en C_r . Si $N_r(c) = N_r$, es independiente de c , esto se convierte en:

$$\tau = \sum_{r=0}^a A_{dr} N_r \quad (51)$$

Considerando que una señal de banda ancha finita puede ser representada por un punto en el espacio Euclidiano y teniendo en cuenta un canal binario simétrico, en que sólo son secuencias de 0 y 1 los cuales son transmitidos y recibidos, en este caso el código es llamado "Código De Corrección De Errores Binarios".

Otra de las consideraciones contempladas en este teorema es un canal con ruido blanco Guassiano; este canal transmite señales continuas en todas las frecuencias, sobre una frecuencia de corte, de W ciclos por segundo (llamada el ancho de banda del canal) las que son atenuadas completamente; frecuencias bajo W son transmitidas son atenuación. En el curso de la transmisión de la señal el canal suma ruido aditivo blanco Guassiano.

Este canal tiene una descripción basada en el teorema de muestreo el cual transmite una señal $f(t)$ es representada por un punto $F = (f_1, \dots, f_n)$ en n -dimensiones del espacio Euclidiano. Durante la transmisión este punto es perturbado por la adición de un vector de ruido $Y = (y_1, \dots, y_n)$, estas componentes son independientes y tienen una distribución Gaussiana con media 0 y varianza σ^2 , este último es la potencia promedio del ruido. La señal recibida es representada por el vector $F + Y$.

Para este canal el código es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n si hay M códigos en los que cada uno es representado por una señal de ancho de banda W y de duración T segundos, el "Rate" del código es definido por:

$$R = \frac{1}{T} \cdot \log_2(M) \quad (52)$$

El decodificador encuentra el punto mas cercano al vector recibido y desde este reconstruye la señal. Si el ruido es pequeño, este punto cercano será transmitido y la señal $f(t)$ será reconstruida correctamente, pero si el ruido es grande el vector recibido puede estar cercano a algún otro código y este será decodificado incorrectamente, esto es un “*decoding error*”.

Por lo tanto se puede reducir el efecto del ruido por el reemplazo de un punto distante, en otras palabras este requiere una señal de gran energía que representa un incremento en los costos. Teniendo en consideración que las señales son de potencia finita y que el “*rate*” del código no acceda la capacidad del canal la cual es calculada

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \text{ en donde } P \text{ es la potencia promedio del canal.}$$

Debido a que la señal F tiene potencia promedio $\leq P$, en una esfera de radio $\sqrt{n \cdot P}$, cerca del origen. Para ser n suficientemente largo se puede asumir que el vector ruido Y , el cual tiene n componentes de varianza σ^2 , tiene norma $N(Y) \leq n \cdot (\sigma^2 + \varepsilon)$ en donde ε es arbitrariamente pequeño, en otras palabras, con una alta probabilidad de recibir el vector $F + Y$ puede ser encontrado en una esfera de radio $\leq \{n \cdot (\sigma^2 + \varepsilon)\}^{1/2}$ centrada en F . La potencia promedio del vector recibido es $\leq P + \sigma^2 + \varepsilon$, y un particular $F + Y$ el cual puede ser encontrado por una esfera alrededor del origen de radio $\{n \cdot (P + \sigma^2 + \varepsilon)\}^{1/2}$.

Por lo tanto si se toma el código que consiste en el centro de la esfera en una densidad de empaquetamiento de esfera de radio $\{n \cdot (\sigma^2 + \varepsilon)\}^{1/2}$ dentro de una gran esfera de radio $\{n \cdot (P + \sigma^2 + \varepsilon)\}^{1/2}$, con esto se obtiene la decodificación correcta del código con probabilidad cercana a 1, el número de puntos en un código es:

$$M = \Delta \cdot \left(\frac{P + \sigma^2 + \varepsilon}{\sigma^2 + \varepsilon} \right)^{n/2} < \Delta \cdot \left(\frac{P + \sigma^2}{\sigma^2} \right)^{n/2} \quad (53)$$

En donde Δ es la densidad del empaquetamiento de las esferas, para hacer n grande se puede hacer M cercano a (1). El “*rate*” de este código es:

$$R \approx W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) + \frac{2 \cdot W}{n} \cdot \log_2 (\Delta) \quad (54)$$

Para hacer T y n suficientemente grandes usando una esfera de empaquetamiento de densidad que satisfaga $\frac{(\log_2 \Delta)}{2} \geq -1$ así se puede lograr esencialmente una transmisión libre de errores con algún “*rate*”

$$R < W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) - 2 \cdot W \quad (55)$$

Más sofisticadamente estos argumentos son necesarios para establecer que el “rate” no sobrepase la capacidad del canal.

3.7. Canal con Fading con bloque MIMO

Se considera también el caso de transmisión y recepción con antenas múltiples (canal MIMO). En donde la señal recibida en el bloque b en un canal con N_T antenas en el transmisor y N_R antenas en el receptor, se puede expresar como:

$$Y_b = \sqrt{\rho} \cdot H_b \cdot X_b + Z_b \quad b = 1, \dots, N_B \quad (56)$$

Donde $Y_b \in \mathbb{C}^{N_R \times L}$ se la matriz de señal recibida en el bloque b , $H_b \in \mathbb{C}^{N_R \times N_T}$ es la matriz de canal de bloque b con entradas i.i.d. $\sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$, ejemplo de fading Rayleigh, $X_b \in \mathbb{C}^{N_T \times L}$ es la posición de palabras de código asignada al bloque b y Z_b es la matriz de ruido con entrada i.i.d. $\sim N_{\mathbb{C}}(0,1)$. Asumiendo que los símbolos transmitidos desde una antena tienen energía unitaria y que el canal está normalizado de modo tal que $\frac{1}{N_T N_R} \cdot \text{traza} \left(E \left[H_b H_b^T \right] \right) = 1$, para $1 \leq b \leq N_B$. Así el SNR medio por antena en el receptor es $\rho \cdot N_T$ y el SNR medio por antena en el transmisor es ρ .

En este caso, la capacidad del canal en sentido estricto es también nula, ya que la probabilidad de error para L grande es al menos la probabilidad de corte. En el caso del canal con fading a bloques MIMO.

$$I(P_X, \rho) = \frac{1}{N_B} \sum_{b=1}^{N_B} \log_2 \left| \det \left(I_{N_R} + H_b Q H_b^T \right) \right| \quad (57)$$

Donde $Q = \text{diagonal}(q)$ es la covarianza de entrada. Para SNR grande, $Q = \rho I_{N_T}$ es óptima, aunque para un SNR fijo, la matriz de covarianza óptima no se conoce y es todavía un problema abierto. Por lo tanto consideremos a $Q = \rho I_{N_T}$ para todo SNR. Para SNR suficientemente grande se comporta como $\min \{ N_T, N_R \} \log_2(\rho)$. Por lo tanto, podemos comunicar tasa de transmisión $\min \{ N_T, N_R \}$ veces mayores que en el caso de SISO.

3.8. Space Time Block Coded.

Se mostrará modulación Sphere Packing para un sistema espacio tiempo, empleando dos antenas transmisoras, donde la señal-espacio esta dada por:

$$G_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad (58)$$

Y las filas y columnas de la matriz representan las dimensiones temporales y espaciales correspondientes a dos consecutivos time-slots y dos antenas receptoras, respectivamente.

Más explícitamente, el problema es formulado como:

$$G_2(x_{l,1}, x_{l,2}) = n_f \cdot G_2(a_{l,1} + j \cdot a_{l,2}, a_{l,3} + j \cdot a_{l,4}) \quad (59)$$

Asumimos que hay L señales espacio-tiempo $G_2(x_{l,1}, x_{l,2})$, $l = 0, 1, \dots, L-1$ que el codificador puede elegir de la señal, que tiene que ser transmitida sobre dos antenas en dos time-slots consecutivos, donde el corte de la señal esta dado por $\log_2(L) = 2$ bits por uso de canal.

El objetivo es diseñar $x_{l,1}$ y $x_{l,2}$ conjuntamente, tal que tengan la mínima distancia Euclidiana a todas las otras $(L-1)$ señales espacio-tiempo transmitidas legítimamente, esto minimice la probabilidad de error del sistema. Supongamos $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4})$, $l = 0, 1, \dots, L-1$ es el punto favor del espacio Euclidiano 4-dimensional de valores reales \mathbb{R}^4 , donde cada uno de los 4 elementos $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}$, da una coordenada de los puntos fasores.

Consecuentemente $x_{l,1}$ y $x_{l,2}$ pueden ser escritos como:

$$\begin{aligned} \{x_{l,1}, x_{l,2}\} &= T(a_{l,1}, a_{l,2}, a_{l,3}, a_{l,4}) \\ \{x_{l,1}, x_{l,2}\} &= \{a_{l,1} + ja_{l,2}, a_{l,3} + ja_{l,4}\} \end{aligned} \quad (60)$$

En el espacio euclidiano de valores reales 4-dimensional \mathbb{R}^4 , el Lattice D_4 esta definido como un Sphere Packing con la mínima distancia Euclidiana a todos los otros $(L-1)$ puntos legítimos de la constelación en \mathbb{R}^4 . Más específicamente, D_4 puede ser definido como un Lattice que consiste en todos los puntos legítimos que tienen coordenadas $[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = k$, donde k es un entero par.

Asumiendo que $S = \{[a_{l,1}, a_{l,2}, a_{l,3}, a_{l,4}] \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq l \leq L-1\}$ constituye un conjunto de L puntos legítimos de la constelación del Lattice D_4 teniendo una energía total de:

$$E \equiv \sum_{l=0}^{L-1} (|a_{l,1}|^2 + |a_{l,2}|^2 + |a_{l,3}|^2 + |a_{l,4}|^2) \quad (61)$$

Introduciendo la notación E :

$$C_l = \sqrt{\frac{2L}{E}} G_2(x_{l,1}, x_{l,2}) \quad l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (62)$$

Tenemos un conjunto de señales espacio-tiempo, $\{C_l : 0 \leq l \leq L-1\}$ cuya diversidad de productos es determinada por la mínima distancia euclidiana del conjunto de L puntos legítimos de la constelación en S . Donde $S = [s_l = [a_{l,1}, a_{l,2}, a_{l,3}, a_{l,4}] \in \mathbb{R}^4 : 0 < l < L-1]$ constituye un conjunto de L puntos legítimos de constelación del lattice D_4 , el cual es el Lattice que tiene la mínima distancia Euclidiana en el espacio Euclidiano real 4-dimensional \mathbb{R}^4 y nf es el factor de normalización.

3.8.1. Dos antenas receptoras y una antena transmisora

En el caso de tener dos antenas receptoras y una antena transmisora, el esquema sería el siguiente:

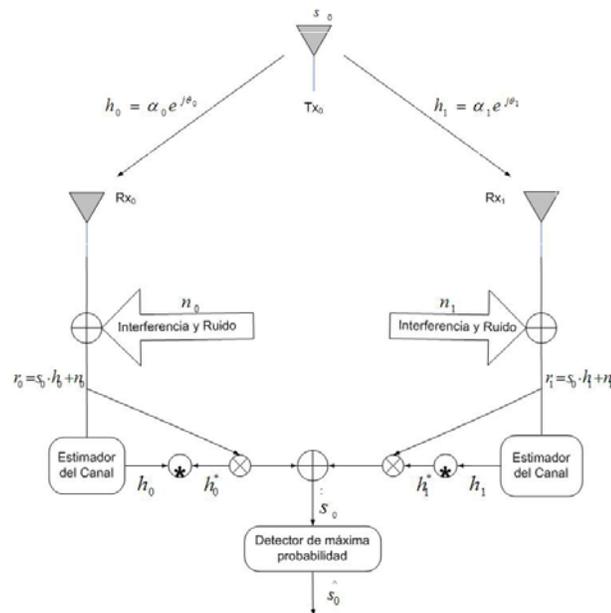


Figura 5: Dos antenas receptoras en un esquema MRRC.

En donde se envía s_0 , y el canal incluye el efecto de envi6 en cadena, la distorsi6n de la amplitud y la fase. La transmisi6n entre las antenas cero, transmisora y receptora se representa a trav6s de h_0 y el receptor de la antena uno como h_1 , donde:

$$\begin{aligned} h_0 &= \alpha_0 \cdot e^{j\theta_0} \\ h_1 &= \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \end{aligned} \quad (63)$$

El ruido y la interferencia son sumados en el receptor. El resultado de la se1al recibido en banda base es:

$$\begin{aligned} r_0 &= h_0 \cdot s_0 + n_0 \\ r_1 &= h_1 \cdot s_1 + n_1 \end{aligned} \quad (64)$$

En donde n_0 y n_1 , representan el ruido complejo e interferencia.

Asumiendo que n_0 y n_1 tienen una distribuci6n Gaussiana, la m1xima probabilidad para la decisi6n en el receptor es escogido s_i , si y solo si:

$$\begin{aligned} d^2(r_0, h_0 \cdot s_i) + d^2(r_1, h_1 \cdot s_i) &\leq d^2(r_0, h_0 \cdot s_k) + d^2(r_1, h_1 \cdot s_k) \\ \forall i \neq k \end{aligned} \quad (65)$$

En donde $d^2(x, y)$ representa la distancia Euclidiana entre las se1ales "x" e "y" calculados seg6n la siguiente expresi6n:

$$d^2(x, y) = (x - y) \cdot (x^* - y^*) \quad (66)$$

El receptor combina el esquema de dos receptores seg6n MRRC (Maximal-Ratio Receive Combining) como se muestra a continuaci6n:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 &= h_0^* \cdot r_0 + h_1 \cdot r_1^* \\ &= h_0^* \cdot (h_0 \cdot s_0 + n_0) + h_1 \cdot (h_1 \cdot s_0 + n_1) \\ &= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot s_0 + h_0^* \cdot n_0 + h_1 \cdot n_1 \end{aligned} \quad (67)$$

Combinando este resultado con el criterio de la m6nima distancia Euclidiana se obtiene:

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot |s_i|^2 - \tilde{s}_0 \cdot s_i^* - \tilde{s}_0^* \cdot s_i &\leq (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot |s_k|^2 - \tilde{s}_0 \cdot s_k^* - \tilde{s}_0^* \cdot s_k \\ \forall i \neq k \end{aligned} \quad (68)$$

3.8.2. Dos antenas transmisoras y una antena receptora

En el caso de tener una antena receptora y dos antenas transmisoras, el esquema de transmisión y recepción cambian teniendo que utilizarse diferentes métodos para la decodificación de la señal recibida:

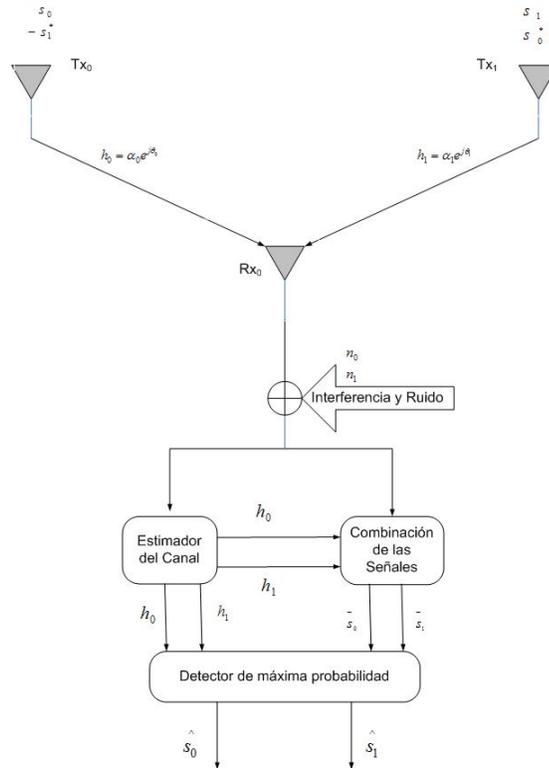


Figura 6: Esquema con un receptor y dos antenas transmisoras.

El esquema usa dos antenas para transmitir y una para recibir y puede ser definido a través de las siguientes 3 funciones:

- La codificación transmite la información en forma secuencial;
- Combina los esquemas de la recepción;
- Detección a través de la regla de la máxima probabilidad.

Codificación y transmisión secuencial: Al enviar el símbolo en un periodo, dos señales son transmitidas simultáneamente, desde dos antenas diferentes. La señal transmitida desde la antena cero es denotada por s_0 y desde la antena uno por s_1 , durante el siguiente periodo el símbolo enviado a través de la antena cero es $-s_1^*$ y a través de la antena uno es s_0^* , en donde * es la operación conjugado, esta secuencia es mostrada en la siguiente tabla.

Tabla 3: Decodificación y secuencia de transmisión para dos antenas transmisoras.

Tiempo	Tx ₀	Tx ₁
t	s ₀	s ₁
T+t	-s ₁ [*]	s ₀ [*]

La codificación es realizada en el espacio y tiempo (Space-Time Coding) La codificación también puede ser realizada en Espacio y en frecuencia. En ves de dos símbolos adyacentes portadoras puedes ser enviadas (Space-Frequency Coding). El canal en el tiempo t puede ser modelada como una multiplicación compleja que distorsiona la señal desde la antena cero designada como h₀ y h₁ desde la antena uno. Asumiendo que el fading es constante a través de dos consecutivos símbolos, pueden ser representados a través de:

$$\begin{aligned} h_0(t) &= h_0(t+T) = h_0 = \alpha_0 \cdot e^{j\theta_0} \\ h_1(t) &= h_1(t+T) = h_1 = \alpha_1 \cdot e^{j\theta_1} \end{aligned} \quad (69)$$

En donde T es la duración del símbolo. La recepción de la señal puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} r_0 &= r(t) = h_0 \cdot s_0 + h_1 \cdot s_1 + n_0 \\ r_1 &= r(t+T) = -h_0 \cdot s_1^* + h_1 \cdot s_0^* + n_1 \end{aligned} \quad (70)$$

Donde r₀ y r₁ son las señales recibidas en los tiempos t y t+T, n₀ y n₁ son variables complejas que representan el ruido y la interferencia.

Combina los esquemas de la recepción: La combinación mostrada es construida por las dos señales que son enviadas al detector de máxima probabilidad:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 &= h_0^* \cdot r_0 + h_1 \cdot r_1^* \\ \tilde{s}_1 &= h_1^* \cdot r_0 - h_0 \cdot r_1^* \end{aligned} \quad (71)$$

Realizando la combinación con las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 &= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot s_0 + h_0^* \cdot n_0 + h_1 \cdot n_1^* \\ \tilde{s}_1 &= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \cdot s_1 + h_1^* \cdot n_0 - h_0 \cdot n_1^* \end{aligned} \quad (72)$$

Detección a través de la regla de la máxima probabilidad: Estas señales son combinada y enviada al detector de máxima probabilidad, que encuentra la señal s₀ y s₁, usando las reglas anteriormente mencionadas.

3.8.3. Dos antenas transmisoras y dos antenas receptoras

En el caso de tener dos antenas receptoras y dos antenas transmisoras, el esquema sería el siguiente:

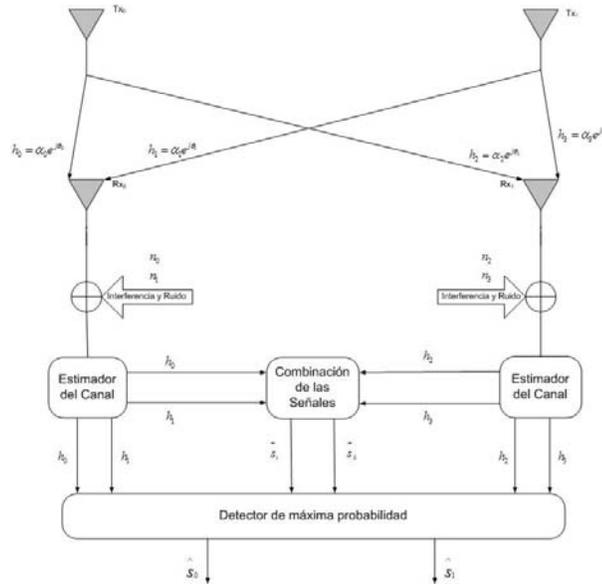


Figura 7: Transmisión con un arreglo de dos antenas transmisoras y dos antenas receptoras.

La codificación y transmisión de la secuencia de los símbolos de información es configurado idénticamente como el caso de una antena de recepción, como se muestran en las 2 siguientes tablas:

Tabla 4: Decodificación y secuencia de transmisión para dos antenas transmisoras

Tiempo	Tx_0	Tx_1
t	s_0	s_1
$T+t$	$-s_1^*$	s_0^*

Tabla 5: Definición del canal entre las transmisiones y recepciones de las antenas

	Rx_0	Rx_1
Tx_0	h_0	h_1
Tx_1	h_2	h_3

Para la recepción en las antenas es resumida en la tabla siguiente:

Tabla 6: Recepción de las señales en las antenas en dos periodos diferentes

Tiempo	Rx ₀	Rx ₁
t	r ₀	r ₁
T+t	r ₂	r ₃

Donde la definición de las recepciones se define a continuación:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= h_0 \cdot s_0 + h_1 \cdot s_1 + n_0 \\
 r_1 &= -h_0 \cdot s_1^* + h_1 \cdot s_0^* + n_1 \\
 r_2 &= h_2 \cdot s_0 + h_3 \cdot s_1 + n_2 \\
 r_3 &= -h_2 \cdot s_1^* + h_3 \cdot s_0^* + n_3
 \end{aligned} \tag{73}$$

n_0, n_1, n_2 y n_3 son variables complejas que representan el ruido Guasiano. Combina los esquemas de la recepción, la combinación mostrada es construida por las dos señales que son enviadas al detector de máxima probabilidad:

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_0 &= h_0^* \cdot r_0 + h_1 \cdot r_1^* + h_2^* \cdot r_2 + h_3 \cdot r_3^* \\
 \tilde{s}_1 &= h_1^* \cdot r_0 - h_0 \cdot r_1^* + h_3^* \cdot r_2 - h_2 \cdot r_3^*
 \end{aligned} \tag{74}$$

Sustituyendo apropiadamente las ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \tilde{s}_0 &= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot s_0 + h_0^* \cdot n_0 + h_1 \cdot n_1^* + h_2^* \cdot n_2 + h_3 \cdot n_3^* \\
 \tilde{s}_1 &= (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \cdot s_1 + h_1^* \cdot n_0 - h_0 \cdot n_1^* + h_3^* \cdot n_2 - h_2 \cdot n_3^*
 \end{aligned} \tag{75}$$

Para la aplicación de detector de máxima probabilidad se utiliza iteraciones bajo la siguiente restricción:

$$d^2 \left(\tilde{s}_1, s_i \right) \leq d^2 \left(\tilde{s}_1, s_k \right) \quad \forall i \neq k \tag{76}$$

3.9. Conclusión

Los antecedentes teóricos planteados en este capítulo nos ayudan a poder plantear las simulaciones y como se estructurarán, para poder realizar un detallado análisis de la codificación y decodificación LDPC no binaria en GF(4), modulación y demodulación Sphere Packing y los arreglo de antenas en un sistema MIMO aplicando Space Time Block Coded.

4. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS

4.1. Introducción

Se presenta a continuación un esquema de bloques general de transmisión y recepción utilizando Space Time Block Coded, en un arreglo de n antenas transmisoras y m antenas receptoras, en este se consideran todos los bloques de codificación de la fuente, codificación del canal y formas de transmisión. Como este sistema resulta ser demasiado complejo, se desglosará durante este capítulo, para poder realizar un análisis detallado de todos el sistema, considerando distintos tipos de ruidos y las diversas formas de eliminación de estos.

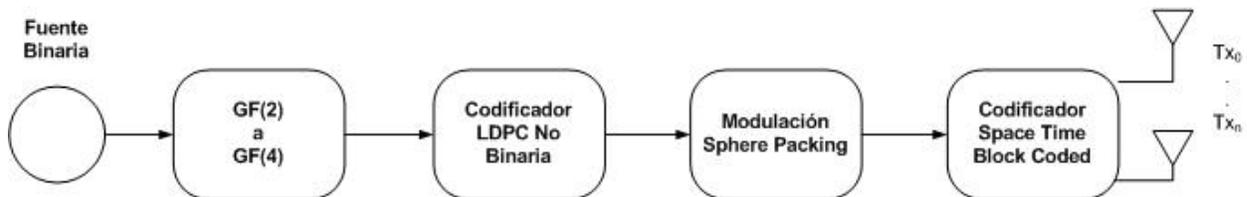


Figura 8: Diagrama de bloques de la Transmisión con n antenas, modulación y codificación.

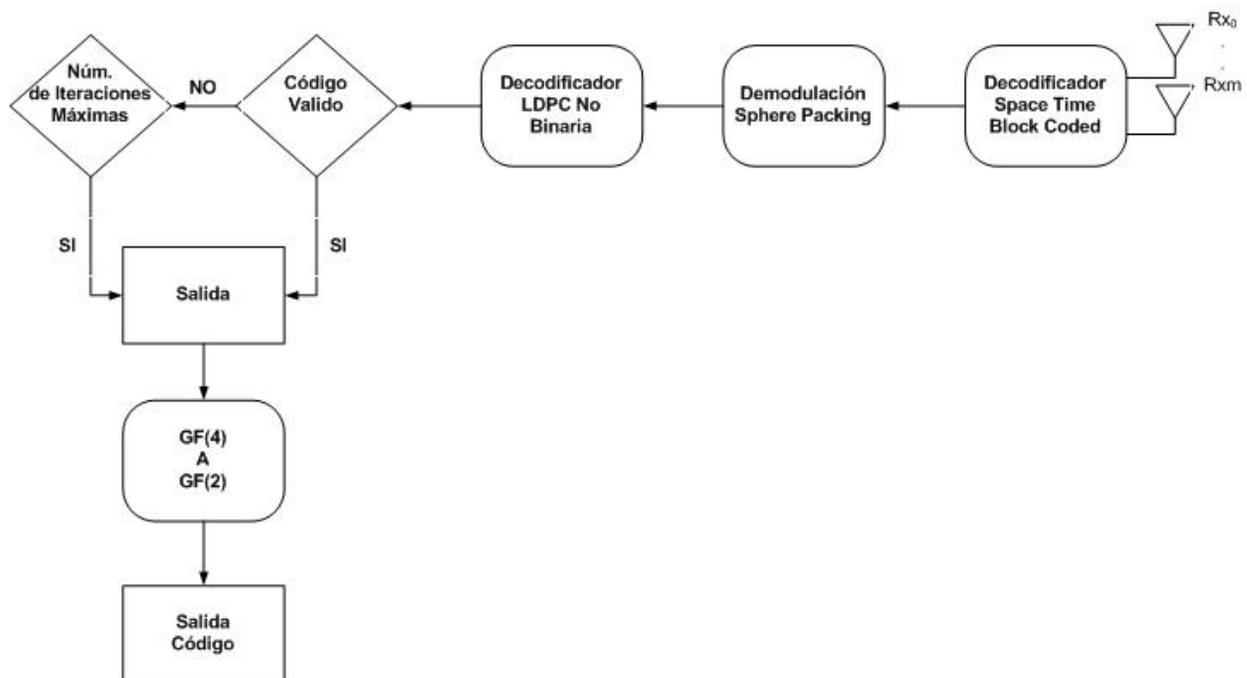


Figura 9: Diagrama de bloques de recepción con m antenas, demodulación y decodificación.

4.2. Ruido AWGN

Al realizar el envío de una señal sinusoidal de amplitud 3 en un canal con ruido AWGN y con una Señal Razón a Ruido de 1 [dB], se obtiene la siguiente gráfica en una señal analógica.

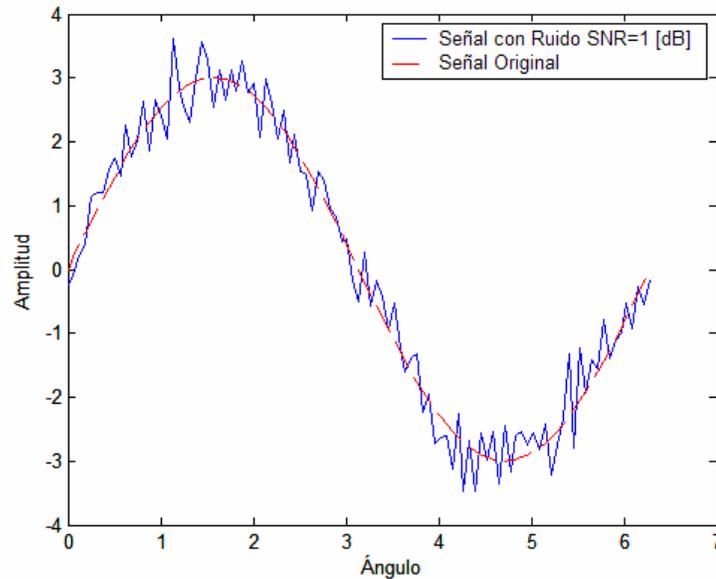


Figura 10: Gráfica de envío de una Señal Sinusoidal en comparación con una Señal Sinusoidal con Ruido AWGN.

Es por este motivo que la señal debe ser codificada para que el receptor reciba la información de manera correcta.

4.2.1. Análisis de las Métricas

Para conocer como afecta el ruido en un canal con AWGN, a una señal codificada con LDPC No Binario se realizará la simulación que se muestra en el siguiente figura que representa una comunicación SISO.

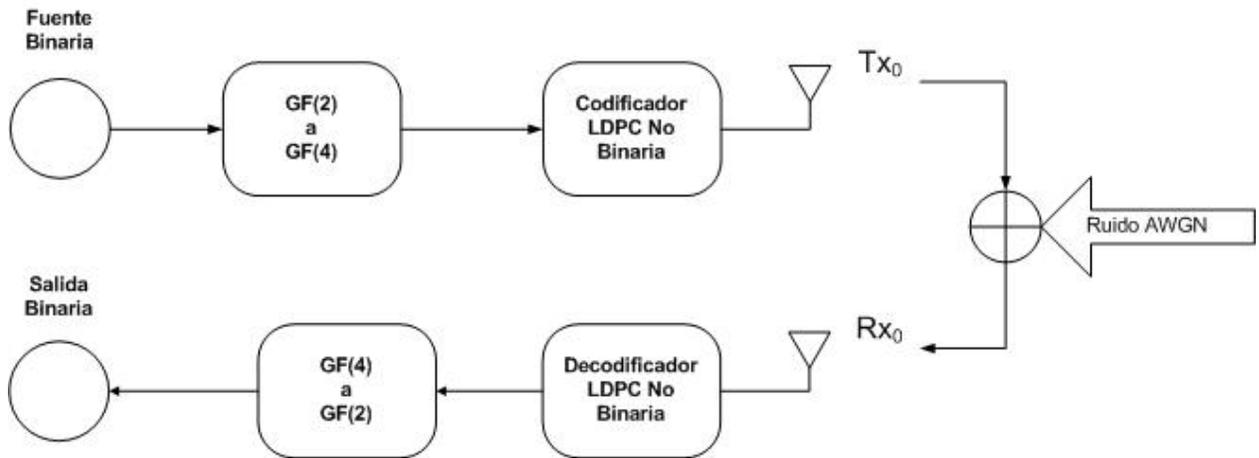


Figura 11: Transmisión realizada en SISO, con un codificador y un decodificador LDPC No Binario, para analizar métricas BER, SER y FER.

Se simulara el envío de 2.000.000 de bit que es equivalente a 1.000.000 símbolos y a 200.000 códigos, la codificación se realizó con LDPC No Binario considerando 6 iteraciones para la corrección de errores, este se evaluó para distintos niveles de razón señal a ruido, a continuación se realizará el análisis de las curvas BER (Bit Error Rate), SER (Symbol Error Rate) y FER (Frame Error Rate). Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

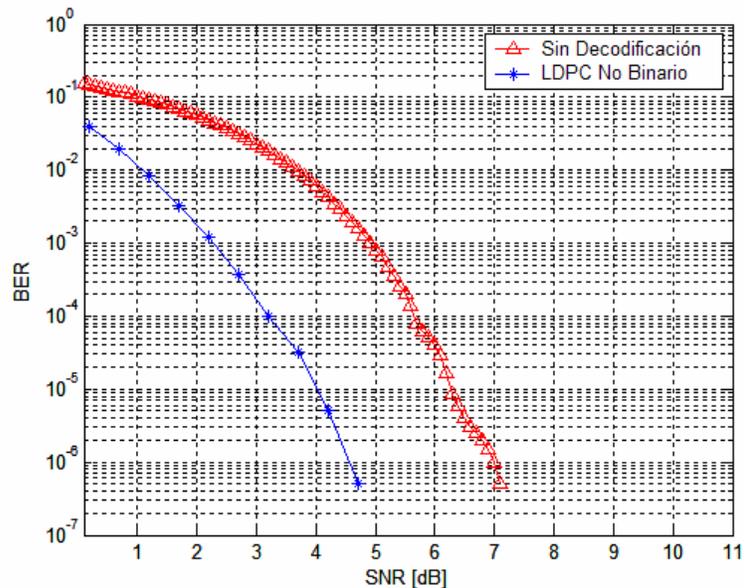


Figura 12: Gráfica de envío de 2.000.000 de bit codificados en BPSK con LDPC No Binario a 6 iteraciones y Sin Codificar.

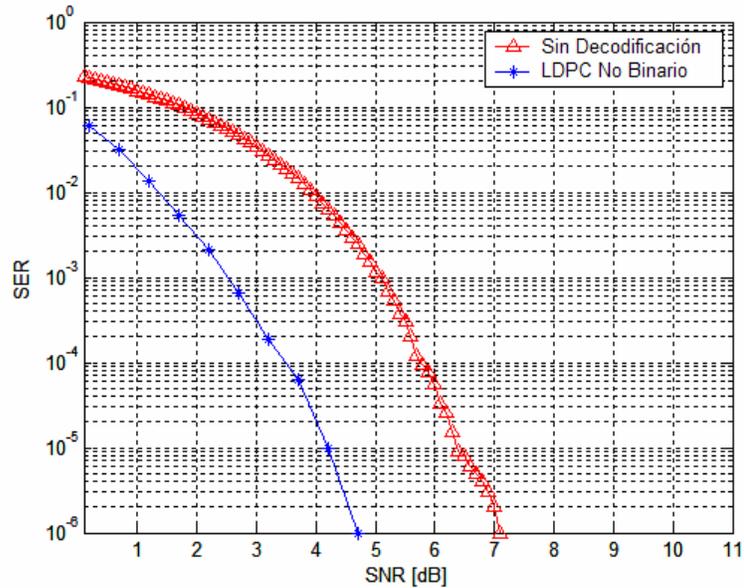


Figura 13: Gráfica de envío de 1.000.000 de símbolos codificados en BPSK con LDPC No Binario con 6 iteraciones y Sin Codificar.

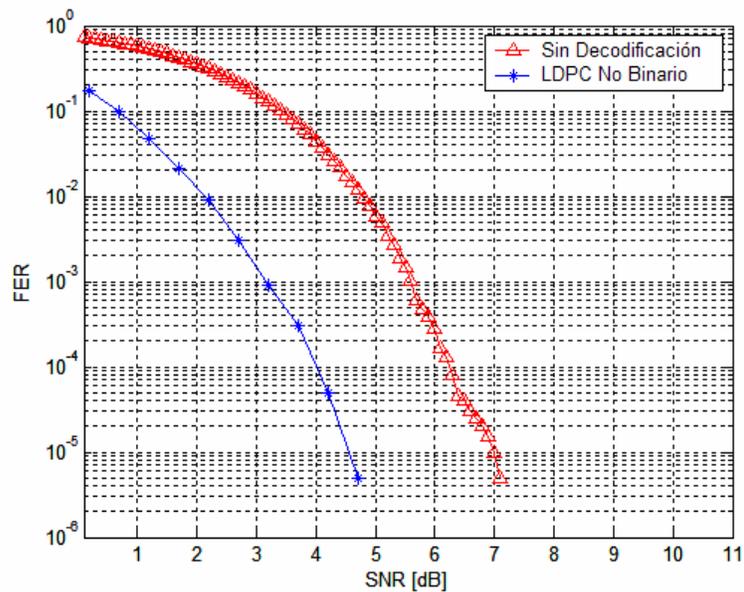


Figura 14: Gráfica de envío de 200.000 de Códigos codificados en BPSK con LDPC No Binario con 6 iteraciones y Sin Codificar.

Se pueden observar que en las figuras 12, 13 y 14 que la forma de la curva es similar en todos los casos, y la curva mas estricta de todas es la de BER esto debido a que se realiza una verificación mucho mas detallada de los errores en el envío del mensaje, en cambio la curva del SER solo compara los símbolos y no indica el número de bit erróneos y la de FER toma como referencia 5 símbolos y si todos se encuentran correctos se considera el envío de código correcto.

Se realizará el análisis de la curva BER para los niveles de 10^{-3} , esto porque a este nivel los errores en una comunicación de voz son aceptables y en el nivel 10^{-6} para que sea una recepción óptima. En el caso de la simulación de un enlace, en la cual solo se considera como ruido AWGN y para el nivel de 10^{-3} (1 error de 1000 bit enviados) la SNR (Signal Noise Rate) necesaria es de 4.9 [dB] si no se realiza una codificación de la señal, pero si se realiza una codificación LDPC No Binario se obtiene la misma tasa de error a solo 2.2 [dB], por lo que se tendrían ganancias de 2.7 [dB], y para un nivel de 10^{-6} BER la razón señal a ruido necesaria para un código sin codificar es de 7.0 [dB] y con la codificación LDPC No Binaria es de 4.5 [dB] por lo que se obtienen ganancias de 2.5 [dB], es por este motivo es que resulta conveniente realizar este tipo de codificación, por las ganancias que esto significa.

4.2.2. Evaluación de LDPC con y sin truncar aplicado a un canal AWGN.

Para conocer como afecta la codificación LDPC No Binaria si los símbolos son aproximados o truncados, se realizará la simulación que se muestra en la figura 15, que representa una comunicación SISO.

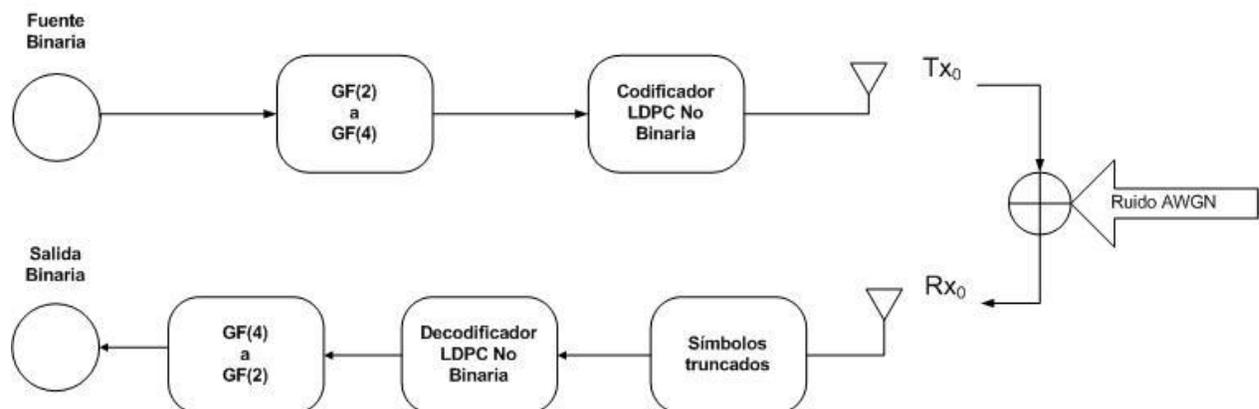


Figura 15: Sistema de Transmisión SISO, con un codificador LDPC No Binario que aproxima los datos de llegada.

La codificación LDPC No Binaria puede ser realizada con números decimales o con números enteros, para lo cual se realiza una aproximación al entero más cercano conociendo que los símbolos posibles son 0, 1, 2 y 3, esta comparación se realiza debido a que la modulación Sphere Packing, aproximación a números enteros. Por este motivo es interesante conocer si el comportamiento es igual para ambos casos o no.

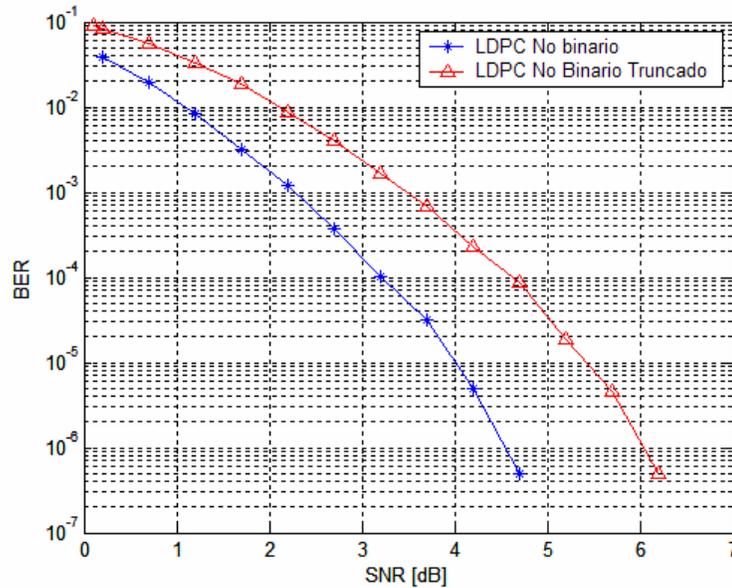


Figura 16: Gráfico de códigos codificados en BPSK con LDPC No Binario con 6 iteraciones y sin truncar con 6 iteraciones en el LDPC No Binario.

Al realizar el análisis de ambas modulaciones se puede observar que a una razón de 10^{-3} BER se puede obtener a una SNR de 2.2 [dB] con LDPC No Binario sin truncar, en el caso de truncar el LDPC No Binario esta razón se obtiene con una SNR de 3.5 [dB], por lo que se obtiene una ganancia de 1.3 [dB], y si se compara a una razón de 10^{-6} BER se obtiene con una SNR de 4.5 [dB] sin truncar, en el caso contrario es de 6.2 [dB], por lo que si la señal recibida no es truncada se obtienen enormes beneficios obteniendo ganancias de 1.7 [dB], esto significa que al unir los bloques de codificación y modulación a un mismo nivel las ganancias de ambos sistemas no se suman de manera directa.

4.2.3. LDPC no binario con Sphere Packing aplicado a un canal con ruido AWGN

Si además de realizar la codificación del canal se realiza una modulación se podrían obtener mayores beneficios teóricamente, el tipo de modulación a realizar es a través de Sphere Packing (Empaquetamiento de Esferas), con en este tipo de modulación se intenta de aprovechar al máximo la capacidad del canal, las pruebas realizadas se muestran a continuación.

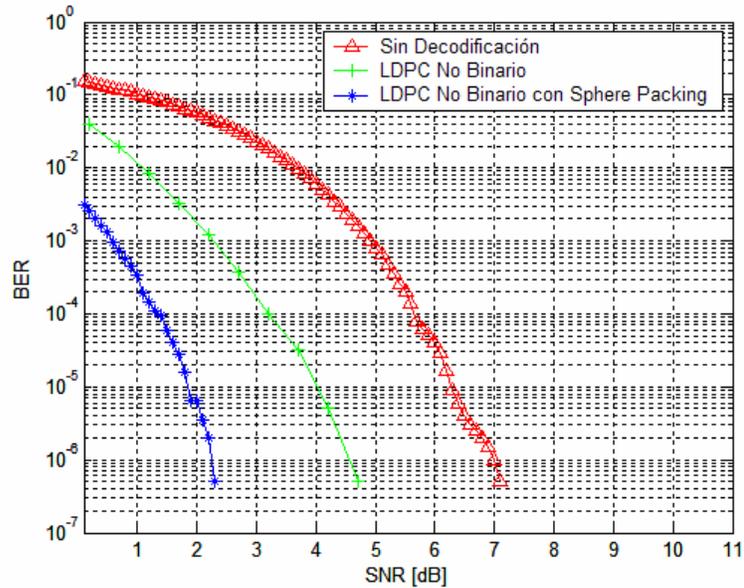


Figura 17: Gráfico de códigos codificados en BPSK, sin codificar con una codificación LDPC No Binario con y sin Sphere Packing, con 6 iteraciones en la decodificación.

Al realizar el análisis a 10^{-3} BER con modulación, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 0.5 [dB] si lo comparamos sin la modulación este es alcanzado a 2.2 [dB] con esto se obtienen ganancias de 1.7 [dB], y a un nivel de 10^{-6} BER con la modulación se requiere un nivel de 2.2 [dB] y sin la modulación a 4.7 [dB], con lo que se obtienen ganancias de 2.5 [dB].

4.3. Ruido AWGN y Rayleigh Fading

Al realizar el envío de una señal sinusoidal de amplitud 3 en un canal con ruido AWGN y con ruido Rayleigh Fading de $\sigma^2 = 1$, con una Señal Razón a Ruido de 1 [dB], se obtiene la siguiente gráfica para el caso de una señal analógica.

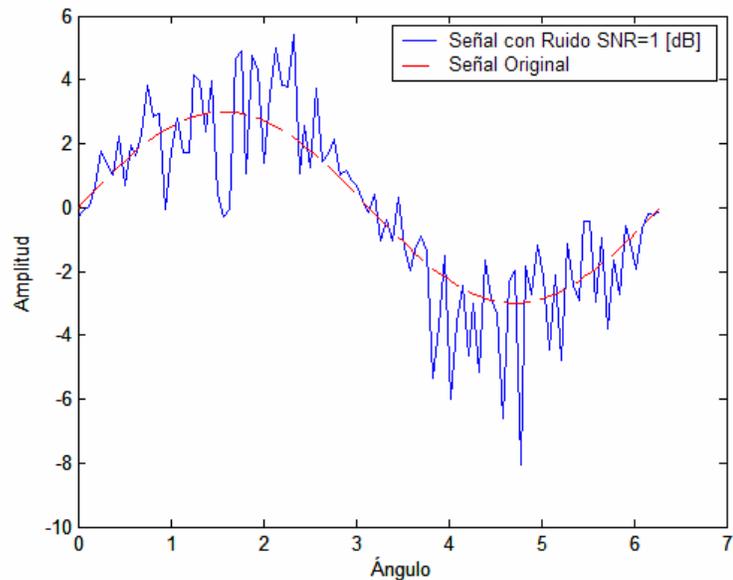


Figura 18: Gráfica de envío de una Señal Sinusoidal en comparación con una Señal Sinusoidal con Ruido AWGN y Ruido Rayleigh Fading.

Este tipo de ruido es mucho más dañino que el Ruido AWGN, debido a que modifica módulo y fase de la señal, la codificación LDPC No Binario está diseñada para reparar códigos con ruido AWGN, por lo que estas pruebas se realizan para analizar cuál sería su comportamiento bajo este tipo de Ruido.

Rayleigh Fading es un modelo estadístico que simula el efecto de propagación de una señal en un ambiente real, a través de un canal aéreo. Este asume que la potencia de la señal que pasa a través de un canal varía de manera aleatoria de acuerdo a la distribución Rayleigh, con componente radial de la suma de 2 vectores no correlacionados con distribución Gaussiana.

4.3.1. LDPC no binario aplicado a un canal AWGN y Rayleigh Fading

Se realizó el análisis del envío de una señal codificada con LDPC a través de un canal con ruido AWGN y Rayleigh Fading, los resultados obtenidos son los siguientes.

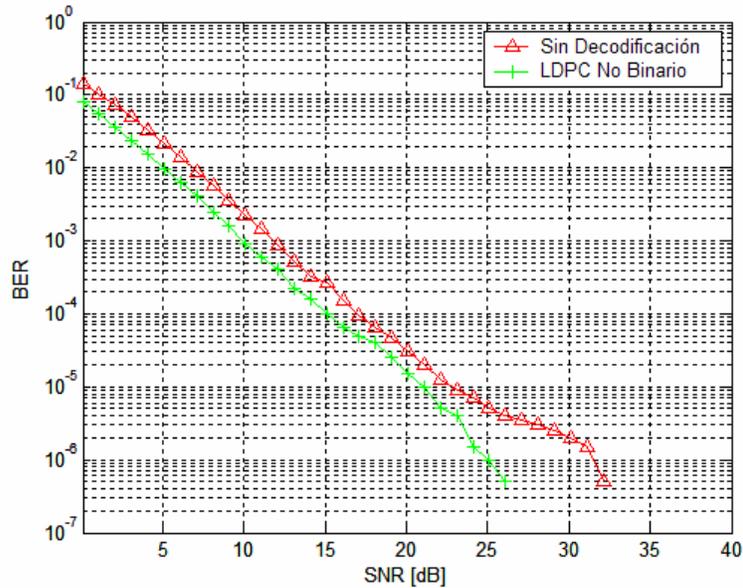


Figura 19: Gráfica de envío de una Señal Codificada con LDPC No Binario y con un Canal con Ruido AWGN y Ruido Rayleigh Fading.

Al realizar el análisis a 10^{-3} BER con modulación, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 9.9 [dB] si lo comparamos sin la modulación este es alcanzado a 12.0 [dB] con esto se obtienen ganancias de 2.1 [dB], y a un nivel de 10^{-6} BER este nivel puede ser alcanzado con una Señal Razona Ruido de 25 [dB] en el caso de realizar la codificación en el caso que esta no sea codificada se alcanza a 32 [dB] por lo que se obtienen ganancias de 7 [dB], lo que demuestra que la codificación LDPC No Binaria esta diseñada para reparar ruidos AWGN y no ruido fading, por lo que será necesario incorporar otro bloque para mitigar la interferencia de este tipo de ruido.

4.4. Modulación Sphere Packing

A continuación en la figura 20 se presenta un esquema de transmisión SISO, con codificación LDPC no binaria y modulación Sphere Packing en el transmisor, mientras que en el receptor se incorpora el decodificador LDPC no Binario y la demodulación Sphere Packing.

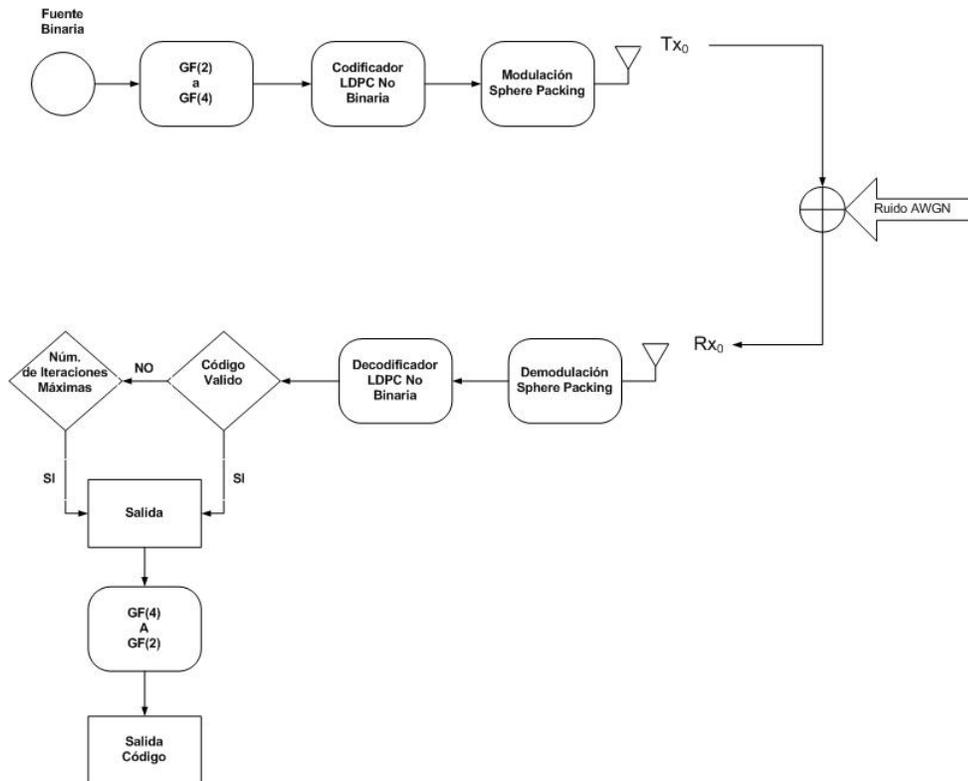


Figura 20: Sistema de Transmisión SISO, con un codificador LDPC No Binario y un modulador Sphere Packing.

En la Modulación Sphere Packing se requieren 4 esferas las cuales se encuentran ubicadas de modo que el espacio sea lo más denso posible, pero la enumeración del orden de estas esferas no es aleatoria es por este motivo que se realizara la simulación del envío de distintos símbolos y se encontrara cual es el ordene de estas Esferas, considerando un Canal Perfecto con Fading disminuido (Show Fading). Con este propósito se consideran clasifican los centros de las esferas con símbolos A, B, C y D que serán los representantes de los símbolos 0, 1, 2, y 3.

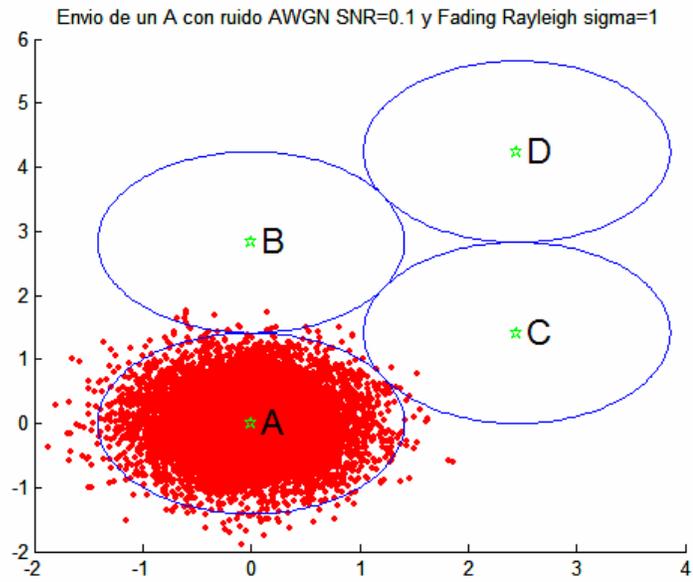


Figura 21: Envió de un A con ruido AWGN SNR=0,1y Fading Rayleigh sigma=1.

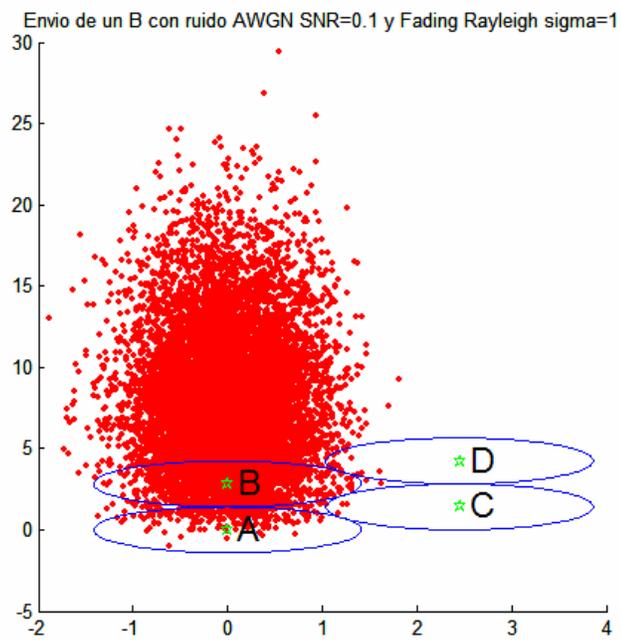


Figura 22: Envió de un B con ruido AWGN SNR=0,1y Fading Rayleigh sigma=1.

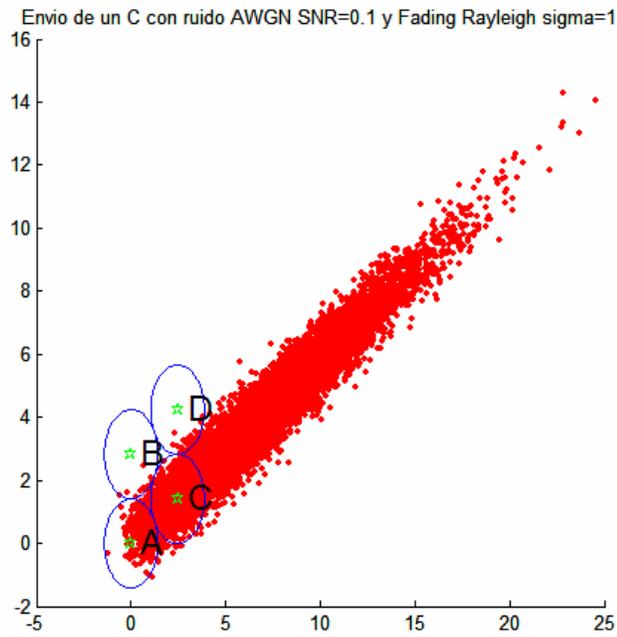


Figura 23: Envió de un C con ruido AWGN SNR=0,1y Fading Rayleigh sigma=1.

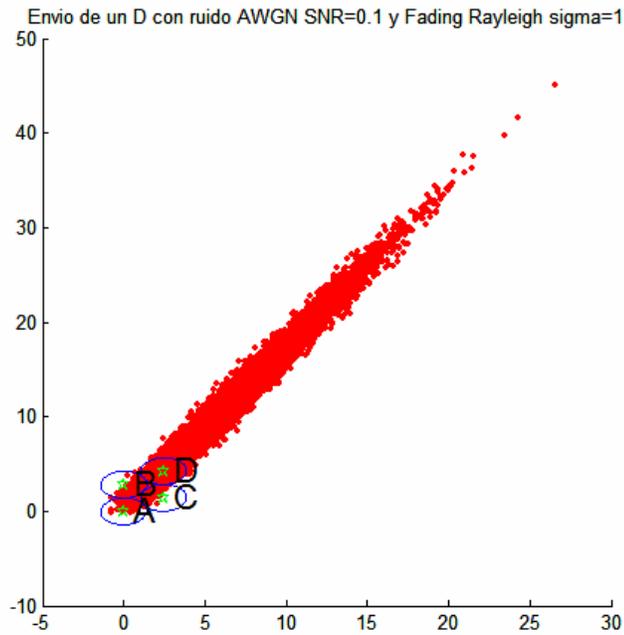


Figura 24: Envió de un D con ruido AWGN SNR=0,1y Fading Rayleigh sigma=1.

El análisis estadístico del envío de la señal se realizan con 10.000 símbolos en MATLAB, y se considera cual es el símbolo según la esfera mas cercana. Los resultados obtenidos se muestrs en la tabla a continuación.

Tabla 7: Contabilización del envío correcto de una esfera.

	A		B		C		D	
	media	desv	media	desv	media	desv	media	desv
A	9961,60	6,66	268,27	9,18	25,47	4,44	2,40	1,52
B	17,17	4,97	3062,87	49,86	155,10	13,87	26,80	3,96
C	20,15	4,67	10,77	4,34	3208,82	55,48	431,60	32,52
D	0,00	0,00	6656,87	46,04	6609,26	47,82	9539,20	35,94

Se realizará la normalización de esta tabla, para luego ser transformados en porcentajes como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 8: Probabilidad del envío correcto de una esfera.

	A		B		C		D	
	media	desv	media	desv	media	desv	media	desv
A	99,62	0,07	2,68	0,09	0,25	0,04	0,02	0,02
B	0,17	0,05	30,63	0,50	1,55	0,14	0,27	0,04
C	0,20	0,05	0,11	0,04	32,09	0,55	4,32	0,33
D	0,00	0,00	66,57	0,46	66,09	0,48	95,39	0,36

Al analizar la Tabla 8, se observa que al enviar un símbolo cualquiera este no necesariamente será el mas probable en el receptor, como es el caso del envío de una B o una C, en los cuales el símbolo más probable es el D. Como se sabe que LDPC no binario corrige errores mientras estos se encuentren cercanos al símbolo original, lo mas adecuado para estos caso sería que el símbolo D fuese un número intermedio ya sea 1 o 2, en el caso de ser 1 se estaría considerando que B Y C serían 0 y 2, para el caso que D fuese 2 se estaría considerando que B y C son 1 y 3, escogiendo este segundo caso (D=2), tenemos fijo entonces que la esfera A corresponde al símbolo 0 por descarte, para poder escoger el valor de las esferas B y C es necesario analizar no solo el valor mayor , sino que también los valores intermedios, para el caso de B existe aproximadamente un 2,68% de probabilidad que se reciba el símbolo A, y para el caso de C existe un 1,55% de probabilidad de recibir el valor de B, considerando estos antecedentes es conveniente escoger la esfera B como el símbolo 1, por lo que queda determinado la esfera C igual a 3. Para analizar las ganancias que esto aportara en el sistema de comunicación se realizara la simulación considerando los datos encontrados anteriormente y otro dando un orden cualquiera sin considerar este orden de esferas.

4.4.1. Modulación Sphere Packing con y sin orden de las Esferas

Como ya se analizo que el orden de las esferas no era al azar, este nuevo orden será incorporado en las simulaciones del sistema de codificación y decodificación, comparando para conocer que tanto afecta en ganancias esta modificación en el sistema.

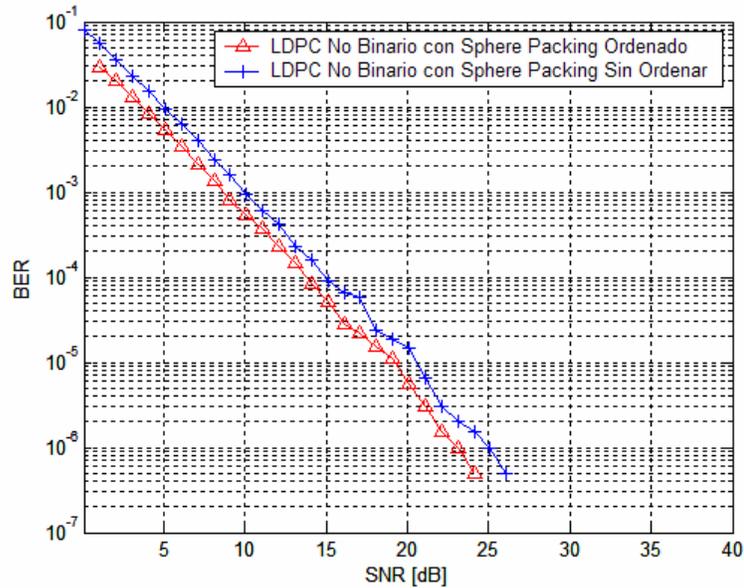


Figura 25: Gráfica de envío de una Señal Codificada con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con y sin Ordenar las Esferas, dado un Canal con Ruido AWGN y Ruido Rayleigh Fading.

Al realizar el análisis a 10^{-3} BER con modulación y ordenando las Esferas, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 8.5 [dB] si lo comparamos con la modulación y sin un orden óptimo de las esferas este es alcanzado a 10.0 [dB] con esto se obtienen ganancias de 1.5 [dB], y a un nivel de 10^{-6} BER este nivel puede ser alcanzado con una Señal Razona Ruido de 23 [dB] en el caso de realizar la codificación y modulación con las esferas ordenas, en el caso que las Esferas no se encuentren ordenadas se alcanza a 25 [dB] por lo que se obtienen ganancias de 2 [dB]. Solo realizando el orden de las Esferas se puede obtener una ganancia considerable, las ventajas que esto nos aporta es que no se deben realizar grandes modificaciones. En los siguientes experimento se considera que las esferas se encuentran ya ordenas.

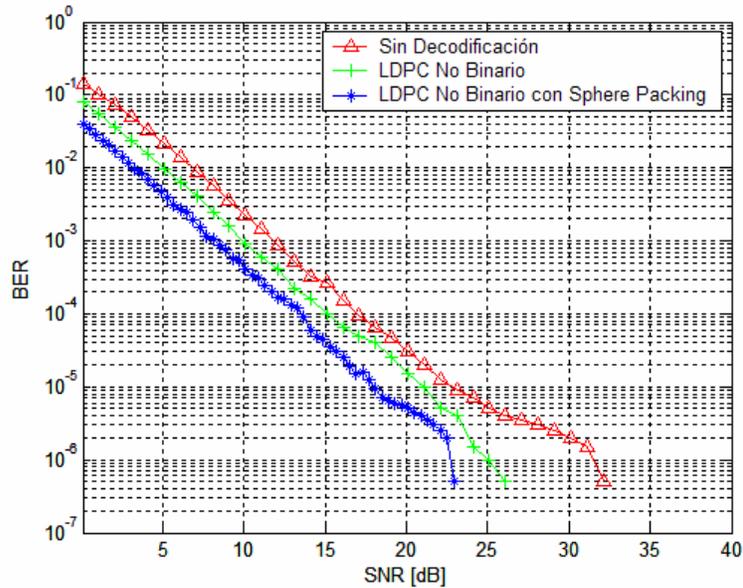


Figura 26: Gráfica de envío de una Señal Codificada con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con las Esferas Ordenadas comparadas con LDPC No Binario, dado un Canal con Ruido AWGN y Ruido Rayleigh Fading.

Al realizar el análisis a 10^{-3} BER con modulación y ordenando las Esferas, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 8.5 [dB] con modulación y solo con LDPC No Binario a 9.9 [dB] con esto se obtienen ganancias de 1.4 [dB] y sin codificación es de 12 [dB] por lo que se obtiene una ganancia de 3.5 [dB], y a un nivel de 10^{-6} BER este nivel puede ser alcanzado con una Señal Razona Ruido de 23 [dB] en el caso de modulación con las Esferas ordenas, en el caso que las Esferas no se encuentren ordenadas se alcanza a 25 [dB] por lo que se obtienen ganancias de 2 [dB]. Se obtuvieron ganancias aunque la potencia que se requiere es muy grande por lo que se incorporarán nuevas técnicas para mitigar este tipo de ruido.

4.5. Sistema de Transmisión en canal MIMO (2Tx, 2Rx)

Para realizar la comunicación en un canal con 2 antenas de transmisión y 2 antenas de recepción se utilizará el esquema que se muestra en las figuras 28 y 27.

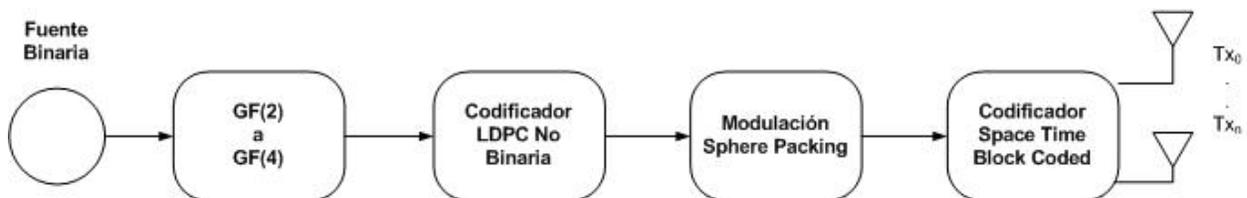


Figura 27: Diagrama de bloques de la Transmisión con dos antenas

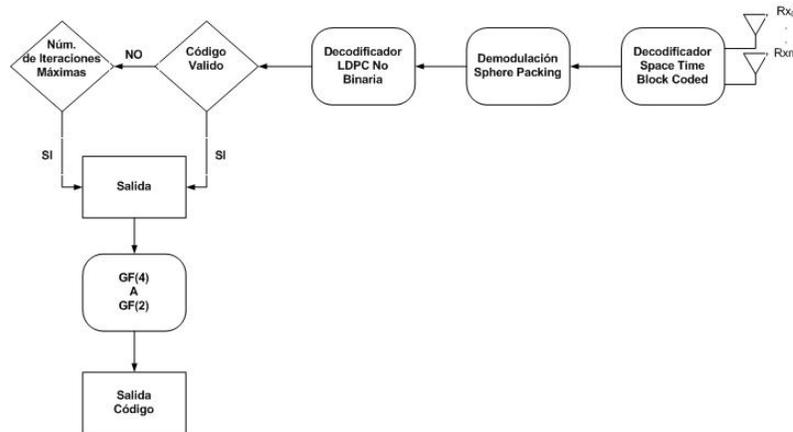


Figura 28: Diagrama de bloques de recepción con dos antenas

El siguiente análisis se realizará con ruido AWGN y Slow Rayleigh Fading para sistemas SISO y MIMO.

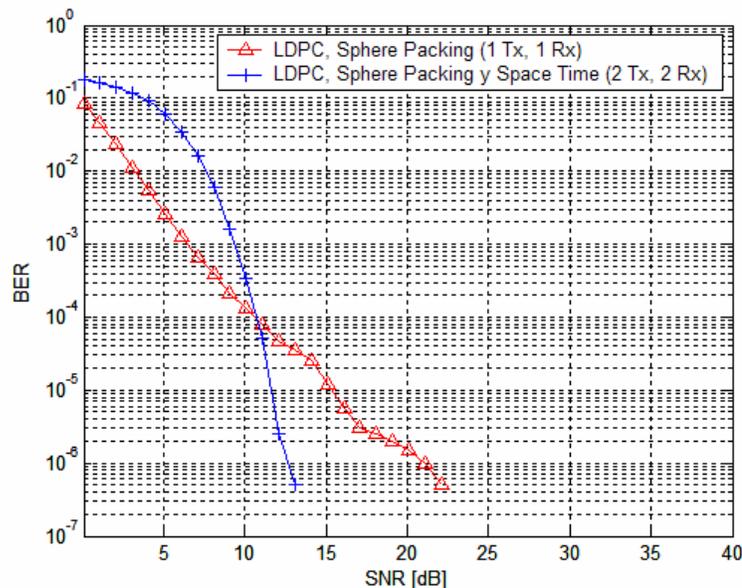


Figura 29: Gráfica de envío de una Señal Codificada con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con las Esferas Ordenadas con sistema SISO comparadas con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con las Esferas Ordenadas y Space Time (MIMO), dado un Canal con Ruido AWGN y Ruido Rayleigh Fading.

Al realizar el análisis a 10^{-3} BER con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con las Esferas Ordenadas con sistema SISO, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 6.3 [dB] y con MIMO a 9.3 [dB] con esto se obtienen ganancias de 3 [dB] utilizando sistema SISO; y para un nivel de 10^{-6} BER con LDPC No Binario con Modulación Sphere Packing con las Esferas Ordenadas con sistema SISO, este nivel puede ser alcanzado con un SNR de 21.1 [dB] y con MIMO a 12.5 [dB] con esto se obtienen ganancias de 8.6 [dB] utilizando sistema MIMO.

Dependiendo el nivel de errores que se desee obtener, será el tipo de arreglo de antenas que se utilizará comparando sistemas de 1 Tx y 1 Rx son efectivos cuando nuestro nivel de error es alto lo que no resulta muy conveniente, pero en las nuevas tecnologías se desea una tasa de error pequeña por lo que las configuraciones con mas de una antena son lo mas conveniente como se muestra en el análisis anterior.

5. CONCLUSIONES

A continuación se presentaran los principales resultados obtenidos en relación con códigos LDPC no Binarios, modulación y demodulación Sphere Packing, arreglo de antena SISO, arreglo de antena MIMO y la combinación de en serie de estos bloques.

Al realizar la comparación de las diversas métricas BER (*Bit Error Rate*), SER (*Symbol Error Rate*) y FER (*File Error Rate*) se observó que estas curvas eran similares, sin embargo, la curva del BER es mucho más estricta al momento de evaluar la señal; esto debido a que compara bit a bit los errores cometidos; en el caso del SER sólo son comparados los símbolos erróneos, pero no se conoce la cantidad de bits erróneos; finalmente al analizar el FER se obtiene que al momento de evaluar la señal compara un conjunto de símbolos y si alguno de estos está erróneo considera que el código es erróneo, debido a este motivo se consideró el análisis de las curvas BER.

Al medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación y decodificación LDPC No binaria, en un canal con ruido AWGN, se obtienen ganancias en todo momento con respecto a una señal que es transmitida sin ser codificada. Se consideraron 2 tipos de tipos de llegadas en el receptor, sin aproximar el código y con aproximación de este, esto debido que en la modulación Sphere Packing los códigos son aproximados. El mejor de estos casos fue sin aproximar, en donde se obtuvieron mejores ganancias.

Al Medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación LDPC No Binaria y modulación Sphere Packing en el transmisor, en el receptor con un decodificador LDPC no binaria y un demodulador Sphere Packing dentro de un canal con ruido AWGN, se obtuvieron ganancias debido al bloque de modulación y demodulación que se incorporo al sistema anterior con ruido AWGN. Lo que lleva a concluir que la modulación en sistemas LDPC No Binario produce beneficios en las señales digitales.

Al medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación y decodificación LDPC no binaria, en un canal con ruido AWGN y desvanecimiento Fading Rayleigh que se encuentra presente en los canales de comunicación de sistemas inalámbricos, produce graves daños a la transmisión de la señal digital, por lo que es necesario incurrir en una gran potencia de salida en la antena transmisora, esto nos muestra que LDPC No Binario corrige errores de canales AWGN y no canales que posean desvanecimiento Fading Rayleigh, teniendo que ser necesario incluir nuevos métodos para eliminar este tipo de ruido.

Al medir la calidad de servicios en un sistema SISO con codificación LDPC No Binaria y modulación Sphere Packing en el transmisor y en el receptor con un decodificador LDPC no binaria y un demodulador Sphere Packing, en un canal con ruido AWGN y Rayleigh Fading, se observó que en este tipo de simulaciones el orden

de la numeración de las esferas no es al azar por este motivo se realizó un análisis estadístico para encontrar un orden óptimo de esferas, lo cual significó obtener ganancias sin la necesidad de agregar nuevos bloques, aunque esto mejora la comunicación no se llega a niveles óptimos para obtener una buena transmisión con mínima potencia de transmisión.

Al medir la calidad de servicios en un sistema MIMO con codificación LDPC No Binaria, modulación Sphere Packing y modulación Space Time Block Coded en el transmisor y en el receptor con un decodificador LDPC no binaria, un demodulador Sphere Packing y un demodulador Space Time Block Coded en el receptor, considerando un canal con ruido AWGN y desvanecimiento Fading Rayleigh, la evaluación mostró que el sistema LDPC no Binario con modulación Sphere Packing en un canal MIMO resulta conveniente cuando el BER es menor a 10^{-4} (un bit erróneo en 10.000 bits enviados), en general los errores esperados son del orden de 10^{-8} para obtener una buena comunicación para la transmisión de una señal de voz, con lo cual es conveniente la transmisión a través de múltiples antenas.

6. BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Revisión Bibliografica

ALAMOUTI, S. M. 1998. A Simple Transmit Diversity Technique For Wireless Communications. Richmond. Canada.

ALAMRI, O. GUO, F. and HANZO, L. 2004. Turbo Detection of Channel-coded space-time signals using sphere packing modulation. University of Southampton, UK.

ALAMRI, O. GUO, F. and HANZO, L. 2005. A Purely Symbol-Based Precoded And Ldpc-Coded Iterative-Detection Assisted Sphere-Packing Modulated Space-Time Coding Scheme. University of Southampton, UK.

ALAMRI, O. GUO, F. and HANZO, L. 2005. Turbo Detection of Symbol-Based Non-Binary LDPC-Coded Space-Time Signals using Sphere Packing Modulation; University of Southampton, UK.

BABICH, F. 2004. On the Performance of Efficient Coding Techniques Over Fading Channels. University of Trieste. Italia

BERROU, C. GLAVIEUX, A. and THITIMAJSHIMA, P. 1993. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes. In Proceedings of the IEEE International Conference on Communications.

CHEN, Z. and BATES, S. 2005. Construction of Low-Density Parity-Check Convolutional Codes through Progressive Edge-Growth. University of Alberta. Canada

CONWAY, J. H. and SLOANE, J. A. 1993. Sphere Packing, Lattices, and Groups. Springer-Verlag. New York. USA.

DAI, H. and POOR V. 2002. Iterative Space-Time Processing for Multiuser Detection in Multipath CDMA Channels. University, of Princeton. USA

DAMEN, O. CHKEIF, A. and BELFIORE, C. 2000. Sphere Decoding of Space-Time Codes. Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications de Paris. Paris

DAMEN, O. CHKEIF, A. and BELFIORE, C. 2000. Lattice Code Decoder for Space-Time Codes. Ecole Nationale Supérieure des Telecommunications de Paris. Paris

EL-KHAMY, M. VIKALO, H. HASSIBI, B and MCELIECE, R. 2005. Performance of Sphere Decoding of Block Codes. California Institute of Technology. USA.

EUSEBIO, P. MANARTE, P and CORREIA, M. 2004. A New Lattice Decoder for Multiple Antenna Systems. Lisbon, Portugal.

FONZUBAL, M. McLaughlin, W. and Schafer, R. 2003. A Sphere Packing Bound on Rayleigh Block-Fading MIMO Channels. School of ECE, Georgia Institute of Technology. Atlanta. USA

GALLEGER, R. 1962. Low Density Parity Check Codes. IEEE Transaction on Informattion Theory. USA

GALLAGER . 1963. Low Density Parity Check Codes. Ph.D *thesis*, M.I.T. USA

GENSANE, Th. 2004. Dense Packings Of Equal Sphere Im A Cube. Laboratoire de mathématique Pures et Appliquées Joseph Liouville. Francia.

GUILLÈN, A. 2004. Concatenated Codes for Block-Fading Channels. University of South Australia. Australia.

HAMKINS, J. 2002. Gaussian Source Coding With Spherical Codes. Editado por Source Coding. USA

HU, X. Eleftheriou, E. and Arnold, M. 2002. Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs. LaboratorIO de Zurich . Switzerland

HERNÁNDEZ, R. 1996. Metodología de la investigación. Editorial Mc.Graw-Hill. México.

MACMULLAN, S and COLLINS, O. 1998. A Comparison of Known Codes, Random Codes, and the Best Code. University of Notre Dame. USA.

NILSSON, J.W and RIEDEL, S. A. 1996. Electric Circuits. 5^a ed. Addison-Wesley. USA.

PINSKER, M. S. and ZYABLOV, V. V. 1975. Estimation of the error complexyt for galager's low-density codes. Problema Peredachi Informatzii.

POTTIE, G. and TAYLOR, D. 1988. Sphere-Packmg Upper Bounds on the Free Distance of Trellis Codes. University Hamilton. Canada,

RICHTER, G. 2005. An Improvement of the PEG Algorithm for LDPC Codes in the Waterfall Region. University of UIM. Alemania

ROCA, KHALLOUF, and LABOURÉ. 2003. Design and evaluation of a Low Density Generator Matrix (LDGM) large block FEC codec. Projet Planète. Munich. Alemania.

SADEGHI, M. BANIHASHEMI A. and PANARIO, D. 2006. Low-Density Parity-Check Lattices: Construction and Decoding Análisis. Unversity of Technology Tehran. Iran.

SIPSER, M. and SIELMAN, D. A. 1996. Expandir Codes. IEEE Transactions on

Information Theory.

TANNER, M. R. 1981. A recursive Approach to Low Complexity Codes. IEEE Transactions on Information Theory,

VIELMON A, LI Y. and BARRY J. 2004. Performance Of Alamouti Transmit Diversity Over Time- Varying Rayleigh- Fading Channels. School of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology. Atlanta. USA

WANG, H. WANG, G. and XIA, X. 2004. Some 2X2 Unitary Space–Time Codes From Sphere Packing Theory With Optimal Diversity Product of Code Size 6. University of Delaware. USA

WANG, H. WANG, G. and XIA, X. 2003. A Design of 2 by 2 Unitary Space-Time Codes from Sphere Packing Theory with Optimal Diversity Product of Code Size 6¹. Department of Electrical and Computer Engineering. University of Delaware. Newark. USA.

WU, N. AHMED, S. ALAMRI, O. YANG, L. and HANZO, L. 2006. A Sphere-Packing Modulated Space-Frequency Diversity Aided FFH-Assisted DSTBC System. University of Southampton. UK.

XIAO, H. BANIHASHEMI, A. 2004. Improved Progressive-Edge-Growth (PEG) Construction of Irregular LDPC Codes. Universidad Ottawa. Canada.

XIAO, H. BANIHASHEMI, A. 2004. Improved Progressive-Edge-Growth (PEG) Construction of Irregular LDPC Codes. Universidad Ottawa. Canada

ZHENG, L. 2000. Sphere Packing in the Grassmann Manifold: A Geometric Approach to the Noncoherent Multi-Antenna Channel. University of California. USA.

Referencias bibliográficas

- [1] A. GLAVIEUX, C. BERROU, and P. THITIMAJSHIMA. 1993. Near shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo codes. pp 1064-1070. Mayo 2003.
- [2] A. J. VITERBI. Abril 1967. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. IT-13:260-269.
- [3] B. LU, X.WANG and K. R. NARAYANAN. Junio 2002. LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels: performance analysis and receiver design," IEEE Transactions on Communications, vol. 50, pp. 74 – 88.
- [4] C. BERROU, A. GLAVIEUX and P. THITIMAJSHIMA. 1993. Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes, in Proceedings of the IEEE International Conference on Communication, pp. 1064-1070.
- [5] C. E. SHANNON. 1948. A mathematical theory of communication. 27:379-423.
- [6] C. E. SHANNON. Julio 1948. A Mathematical Theory of Communication, The Bell system Technical Journal, vol. 27, pp. 379–656.
- [7] D. A. SPIELMAN. Noviembre 1996. Linear-time encodable and decodable error-correcting codes, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 42, pp. 1723–1731.
- [8] D. BURSHTEIN, M. KRIVELEVICH, M. LITSYN and G. MILLER. Septiembre 2002. Upper bounds on the rate of LDPC codes, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 48, pp. 2437 – 2449.
- [9] D. BURSHTEIN. Junio 2002. Bounds on the Performance of Belief Propagation Decoding, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 48, pp. 112 – 122.
- [10] D. J. C. MACKAY and R. M. NEAL. Agosto 1996. Near shannon limit performance of low density parity check codes. 32:1645-1655.
- [11] D. J. C. MACKAY, and R. M. NEAL. Marzo 1997. Near Shannon Limit Performance of Low Density Parity Check Codes, Electronics Letters, vol. 33, pp. 457–458.
- [12] D. J. C. MACKAY and R. M. NEAL. Marzo 1999. Good Error-Correction Codes Based on Very Sparse Matrices, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 45, pp. 399–431.
- [13] D. J. C MACKAY, S. T WILSON, and M. C DAVEY. Octubre 1999. Comparison of Constructions of Irregular Gallager Codes, IEEE Transactions on communications, vol. 47, pp. 1449–1454.

- [14] D. J. C MACKAY. Punctured and Irregular High-Rate Gallager Codes. Unpublished.
- [15] E. ALBA and J.F. CICANO. 2004. Solving the error correcting code problem with parallel hybrid heuristics. pp 985-989. Proceedings of the ACM symposium on Applied computing.
- [16] E. ELEFThERIOU, S. OLCER. Mayo 2001. Further results on the performance of LDPC coded modulation for AWGN channels, ITU-Telecommunication Standardization Sector.
- [17] E. L. BLOKH AND V. V. ZYABLOV. 1974. Coding of generalized concatenated codes. 10:45-50, 1974.
- [18] E. R. BERLEKAMP. 1968. Algebraic Coding Theory. McGraw Hill.
- [19] F. LEHMANN and G. M. MAGGIO. Septiembre 2003. Analysis of the Iterative Decoding of LDPC and Product Codes using the Gaussian Approximation. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 49, pp. 2993 – 3000.
- [20] G. D. FORNEY. 1966. Concatenated codes.
- [21] G. MILLER and D. BURSHTAIN. Noviembre 2001. Bounds on the maximum-likelihood decoding error probability of low-density parity-check codes. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, pp. 2696 – 2710.
- [22] H. PISHRO-NIK and F. FEKRI. Marzo 2004. On Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Over the Binary Erasure Channel, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 50, pp. 439 –454.
- [23] H. FUTAKI and T. OHTSUKI. Mayo 2002. Low-density parity-check (LDPC) coded OFDM systems with M-PSK. In IEEE 55th Vehicular Technology Conference, vol. 2, (Birmingham, AL, USA), pp. 1035 – 1039, 6-9.
- [24] H. FUTAKI and T. OHTSUKI. Mayo 2002. Performance of low-density parity-check (LDPC) coded OFDM systems, in IEEE International Conference on Communications, vol. 3, pp. 1696 – 1700.
- [25] H. FUTAKI and T. OHTSUKI. Octubre 2001. Low-density parity-check (LDPC) coded OFDM systems. In IEEE 54th Vehicular Technology Conference, vol. 1, (Atlanta City, New Jersey, USA), pp. 82 – 86, 7 - 11.
- [26] H. SONG and J. R. CRUZ. Marzo 2003. Reduced-Complexity Decoding of Q-ary LDPC Codes for Magnetic Recording. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 39, pp. 1081–1087.
- [27] I. REED and G. SOLOMON. 1960. Polynomial codes over certain finite fields. 8:300-304.

- [28] J. BOUTROS, O. POTHIER and G. ZEMOR. Junio 1999. Generalized low density (Tanner) codes, in IEEE International Conference on Communications, vol. 1, pp. 441 – 445, 6-10.
- [29] J. CHEN and M. FOSSORIER. Marzo 2002. Near optimum universal belief propagation based decoding of low-density parity-check codes,” IEEE Transactions on Information Theory, vol. 50, pp. 406–414
- [30] J. HOU, P. H. SIEGEL, L. B. MILSTEIN and H. D. PFISTER. September 2003. Capacity-approaching bandwidth-efficient coded modulation schemes based on low-density parity-check codes. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 49, pp. 2141–2155.
- [31] J. HOU, P. H. SIEGEL and L. B. MILSTEIN. Mayo 2001. Performance analysis and code optimization of low density parity-check codes on Rayleigh fading channels. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 19, pp. 924–934.
- [32] J. LI, E. NARAYANAN and C. N. GEORGHIADES. Junio 2001. On the performance of turbo product codes and LDPC codes over partial-response channels. in IEEE International Conference on Communications, vol. 7, pp. 2176 – 2183, 11 - 14.
- [33] K. NAKAMURA, Y. KABASHIMA and D. SAAD. Noviembre 2001. Statistical mechanics of low-density parity check error-correcting codes over Galois fields, Europhysics Letters, vol. 56, pp. 610–616.
- [34] MARZETTA, T.L. Y HOCHWALD, B.M. 1999. Capacidad de un puente de comunicaciones móvil de la múltiple-antena en descolorarse plano de Rayleigh. Transacciones de IEEE de la teoría de información 45 (1): 139-157.
- [35] M. C. DAVEY and D. J. C MACKAY. Junio 1998. Low Density Parity Check Codes over $GF(q)$, IEEE Communications Letters, vol. 2, pp. 165–167.
- [36] M. C. DAVEY and D. J. C. MACKAY. Junio 1998. Low Density Parity Check Codes over $GF(q)$. In Proceedings of the 1998 IEEE Information Theory Workshop, pp. 70–71.
- [37] M.C. DAVEY. 1999. Error-Correction using Low Density Parity Check Codes. Ph.D thesis. University of Cambridge. UK.
- [38] M. G. LUBY, M. MITZENMACHER, M. A. SHOKROLLAHI, and D. A. SPIELMAN. 1998. Improved low density parity check codes using irregular graphs and belief propagations. In Proceedings of the IEEE International Symposium on Information theory, p. 117.
- [39] M.GOLAY. 1949. Notes on digital coding. Vol. 37, pp. 657.

- [40] M. LENTMAIER. 1997. Soft Iterative Decoding of Generalized Low-Density Parity-Check Codes based on MAP Decoding of Component Hamming Codes. Diploma Thesis. University of Ulm. Germany.
- [41] M. R. TANNER. Septiembre 1981. A Recursive Approach to Low Complexity Codes. IEEE Transaction on Information Theory, vol. 27.
- [42] M. SIPSER and D. A. SPIELMAN. Noviembre 1981. Expander Codes. IEEE Transaction on Information Theory, vol 42, pp. 1710-1722.
- [43] O. POTHIER, L. BRUNEL and J. BOUTROS. Mayo 1999. A low complexity FEC scheme based on the intersection of interleaved block codes. In IEEE 49th Vehicular Technology Conference, vol. 1, (Houston, TX, USA), pp. 274 – 278.
- [44] P. ELIAS. 1955. Coding for noisy channels. 3:37-46.
- [45] R. G. GALLAGER. Enero 1962. Low-density parity-check codes.” 8:21-28.
- [46] R. GALLEGGER. 1963. Low Density Parity Check Codes. Ph.D tesis, M.I.T, USA.
- [47] R. HAMMING. 1950. Error detecting and error correcting codes. 29:147-160.
- [48] S. HIRST and B. HONARY. 2002. Decoding of generalized low-density parity-check codes using weighted bit-flip voting. In IEE Proceedings on Communications, vol. 149, pp. 1 – 5.
- [49] S. HIRST and B. HONARY. 2002. Application of efficient Chase algorithm in decoding of generalized low-density parity-check codes. In IEEE Communications Letters, vol. 6, pp. 385 – 387.
- [50] S.M. ALAMOUTI. 1998. Un simple transmete la técnica de la diversidad para las comunicaciones sin hilos. paper IEEE en áreas seleccionadas en las comunicaciones 16 (8): 1451-1458.
- [51] S.Y. CHUNG. 2000. On the Construction of Some Capacity-Approaching Coding Schemes. Ph.D thesis, MIT, USA.
- [52] S.Y. CHUNG, T. J. RICHARDSON AND R. L. URBANKE. Febrero 2001. Analysis of Sum-Product Decoding of Low Density Parity Check codes Using a Gaussian Approximation. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47.
- [53] T. HOEHOLD, J. H. VAN LINT, and PELLIKAAN. 1998. Handbook of Coding Theory. volume1. Elsevier-Amsterdam.
- [54] T. J. RICHARDSON and R. L. URBANKE. Febrero 2001. Efficient Encoding of Low-Density Parity-Check Codes. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, pp. 638 – 656.

- [55] T. RICHARDSON, M. A SHOKROLLAHI, and R. URBANKE. Febrero 2001. Design of Capacity Approaching Irregular Low Density Parity Check Codes. IEEE Transaction on Information Theory, vol. 47.
- [56] T. RICHARDSON and R. URBANKE. 2001. The Capacity of Low-Density Parity Check Codes Under Message-Passing Decoding. IEEE Transaction on Information Theory, vol. 47, pp. 599–618.
- [57] T. ZHANG and K. K. PARHI. Mayo 2001. A class of efficient-encoding generalized low-density parity-check codes. In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 4, pp. 2477 – 2480, 7-11.
- [58] T. ZHANG and K. K. PARHI. Noviembre 2001. High-performance, low-complexity decoding of generalized low-density parity-check codes. In IEEE Global Telecommunications Conference, vol. 1, pp. 181 – 185, 25-29.
- [59] V. A. ZINOV'EV. 1976. Generalized cascade codes.” 12:5-15.
- [60] V. V. ZYABLOV and M. S. PINSKER. 1975. Estimation of the error correction complexity for gallegger’s low-density codes. Problemy Peredachi Informatsii, vol. 11, mo. 1, pp. 23-36.
- [61] Y. KOU, S. LIN and M. FOSSORIER. Junio 2000. Low density parity check codes based on finite geometries: A rediscovery. In IEEE International Symposium on Information Theory, (Sorrento, Italy), 25-30.
- [62] Y. KOU, S. LIN and M. FOSSORIER. Diciembre 2000. Low density parity check codes: construction based on finite geometries. In IEEE Global Telecommunications Conference, vol. 2, pp. 825–829.
- [63] Y. KOU, S. LIN and M. FOSSORIER. Noviembre 2001. Low-density parity-check codes based on finite geometries: a rediscovery and new results. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 47, pp. 2711–2736.
- [64] VAHID TAROKH, NAMBI SESHADRI, y A. R. CALDERBANK. 1998. códigos del Espacio-tiempo para la alta comunicación sin hilos de la tarifa de datos: Construcción del análisis y de código de funcionamiento. Transacciones de IEEE en la teoría de información 44 (2): pp 744-765. marzo de 1998.
- [65] VAHID TAROKH, HAMID JAFARKHANI, Y A.R. CALDERBANK. 1999. códigos del bloque del Espacio-tiempo de diseños ortogonal. Transacciones de IEEE en la teoría de información 45 (5): 744-765.
- [66] V. TAROKH Y H. JAFARKHANI. 2000. Un esquema diferenciado de la detección para transmite diversidad. Diario de IEEE en áreas seleccionadas en las comunicaciones 18 (7).