Train Algebras: Representaciones e Identidades

Cristián Reyes R.

Marzo, 2003

Train-Algebras: Identidades y Representaciones

Tesis

Entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Cristián Giovanni Reyes Reyes

Marzo, 2003

Director de Tesis: Dra. Alicia Labra Jeldres.

A mis padres, a mis hermanos y a mi esposa

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todos los que participaron en mi formación como Matemático, y particularmente a aquellos que me ayudaron en el tiempo del trabajo de esta Tesis.

A la directora de esta tesis, Alicia Labra, por su apoyo científico, por la comprensión y por su amistad.

A Marisol Valenzuela, por todo. Pues sin ella esta tesis no existiría.

A mi familia toda, por el constante cariño y continuo sacrificio.

A Cristian González-Avilés, por su contagiosa pasión por las matemáticas.

A Rolando Pomareda, por la cariñosa preocupación en nuestras carreras.

A Ricardo Baeza, por su magnífica capacidad de enseñar.

A Oscar Vega, por la amistad.

A la Comisión Nacional de Investigación en Ciencia y Tecnología, CONICYT, por la beca que me otorgó en los primeros cuatro años de mi Doctorado.

A FONDECYT por apoyarme en el proyecto de investigación 2010002 en el último año de esta tesis.

Resumen

Esta tesis trata sobre Train-Algebras, esto es, álgebras ponderadas no necesariamente asociativas (A, ω) sobre un cuerpo K, que satisfacen una ecuación del tipo

$$x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \gamma_2\omega(x)^2x^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0,$$

donde $\gamma_i \in K$ y n es el menor entero positivo para el cual A satisface una ecuación de este tipo y x^n es la n-ésima potencia principal de x definida por $x^1 = x, \quad x^{k+1} = x^k x$ para $k \geq 1,\ n$ se llama el rango del álgebra.

En este trabajo definimos train-representaciones de rango 3 y de rango 4 asociativa en las potencias. Probamos que en el caso de rango 3 el álgebra asociativa generada por las imágenes del núcleo de la train-representación es nilpotente, lo cual implica que los módulos irreducibles sobre una train-algebra de rango 3 son unidimensional. Para el caso de train-algebras asociativas en las potencias de rango 4, el resultado es el mismo para dos clases de estas álgebras, pero los métodos son distintos.

Relacionamos las Train-Algebras con identidades polinomiales, demostramos que toda Train-Algebra que satisface una ecuación polinomial de grado 3 es asociativa, y que cualquier Train-Algebra de rango 3 que satisface una identidad polinomial de grado 4 sobre cuerpos de característica $\neq 2, 3, 5$ es un álgebra de Jordan o un álgebra que satisface la relación $x^2y^2 = (xy)^2$. Además en estas álgebras esta última identidad no es contradictoria ni implica la identidad de Jordan.

Encontramos explícitamente la forma de los elementos idempotentes para tres familias de Train-Algebras asociativas en las potencias (no necesariamente de dimensión finita) de rango n.

Abstract

In this thesis we deal with train algebras, that is, baric algebras (A, w) where $w : A \to K$ is a non zero algebra homomorphism, satisfying an equation of the form

$$x^n + \gamma_1 w(x) x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} w(x)^{n-1} x = 0,$$

where n is the minimum positive integer for which the identity holds, $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ are fixed elements in K and x^n is the n-th principal power of x defined by $x^1 = x$, $x^{k+1} = x^k x$ for $k \geq 1$, n is called the rank of the algebra.

We give a characterization of the representations on train algebras of rank 3 and of power-associative train algebras of rank 4. We prove that in the case of train algebras of rank 3 the subalgebra of the algebra of endomorphisms of the module generated by the representation of the kernel of the algebra is nilpotent. Moreover we prove that every irreducible module has dimension one over the field under consideration. In the case of power-associative train algebras of rank 4 we obtain the same result for two classes of these algebras. Here we use different methods.

We also relate train algebras of rank 3 with polynomial identities. Here we prove that every train algebra of rank 3 satisfying a polynomial identity of degree three is an associative algebra. We also prove that a train algebra of rank 3 over fields of characteristic not $2, 3, 5$ that satisfies a polynomial identity of degree four is either a Jordan algebra or satisfies the identity $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$. Moreover, in these algebras this last identity does no oppose or imply the Jordan identity.

We have also found a explicit formula for the idempotent elements for three families of power-associative train algebras (not necessarily finite-dimensional) of rank n.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

Luego de un seminario de un semestre sobre álgebras no asociativas dictado por la Dra. Alicia Labra Jeldres, basado principalmente en los libros *Rings that are Nearly Associative* de Zhevlanov, Slin'ko, Shestakov y Shirshov [22]; y en *Introduction to Nonassociative Algebras* de Schafer [20] fue que me interesé en estos temas. Luego la misma profesora Labra dirigió un seminario de Variedades de Algebras, basado principalmente en el libro de Osborn, *Varieties of Algebras* [18], y fue en ese momento cuando comencé a entender los métodos de trabajo en este tipo de álgebras , donde por ejemplo no es cierto que $x^4 \neq x^2x^2$. Más adelante leyendo el libro de Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics [21],* fue que conocí a las train-algebras y vi como se relacionaban con otras. Son éstas, las train-algebras , las que ocuparán las siguientes páginas.

El capítulo dos dará una visión histórica de las train-algebras enmarcadas dentro de las álgebras no asociativas , también en ese capítulo se darán las definiciones básicas y algunos resultados importantes que nos servirán para entender mejor nuestros resultados, algunas definiciones más precisas se darán en el capítulo pertinente para facilitar la lectura de esta tesis.

El tercer capítulo trata sobre representaciones de train-algebras de rango 3 y 4. Damos las definiciones de train-representaciones, las caracterizamos y probamos que en el caso de rango 3 el álgebra asociativa generada por las imágenes del núcleo de la train-representación es nilpotente, lo cual implica que los módulos irreducibles sobre una train-algebra de rango 3 es unidimensional, lo cual creemos que permitirá avanzar en el estudio de la envolvente universal de una train-algebra de rango 3. Para el caso de train-algebras asociativas en las potencias de rango 4, el resultado es el mismo para dos clases de estas álgebras, pero los métodos son distintos. Además en este capítulo se relaciona a las train-algebras de rango 3 con las identidades polinomiales de grado 3 y 4. Probamos que una train-algebra de rango 3 que satisface una identidad polinomial de grado 3 es necesariamente asociativa, en cambio que si satisface una de grado 4 o bien es de Jordan o satisface la identidad $x^2y^2 = (xy)^2$. Estos resultados pueden acercar a una meta natural que es ¿Cuál es la variedad de álgebras más pequeña que contiene a las train-algebras de rango 3? Además explicitamos la forma que tienen los idempotentes en tres familias de train-algebras asociativas en las potencias.

El capítulo cuarto enunciará las preguntas naturales que surgen al tratar estos temas y más particularmente después de leer este trabajo.

Finalmente entregamos una bibliografía de donde obtuvimos todos los resultados previos, algunos libros y/o artículos no son citados durante este trabajo, pero son lectura obligada para entender estos temas y fundamentales para lograr una base teórica que sustente este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

Este Capítulo mostrará a las train-algebras enmarcadas dentro de las álgebras no asociativas, mostrará una referencia histórica de éstas y dará las definiciones básicas y resultados más importantes para el mejor entendimiento de nuestros resultados.

2.1 Historia

Las álgebras no asociativas aparecen por primera vez en Matemáticas en 1845, cuando el matemático inglés Artur Cayley construye un álgebra A de dimensión ocho sobre el cuerpo de los números reales, la cual no es conmutativa ni es asociativa, pero satisface:

$$(aa)b = a(ab) \qquad \forall a, b \in A.$$

Las álgebras que satisfacen esta última relación se llaman *álgebras alternativas* y el ejemplo particular que dió Cayley hoy se llama *Álgebra de Cayley.* Cayley, sin embargo, no estaba buscando un ejemplo donde la asociatividad fallara, sino que buscaba una forma de representar el producto de dos elementos que son suma de ocho cuadrados como la suma de ocho cuadrados, del mismo modo que el álgebra de Cuaterniones resolvía el problema para cuatro cuadrados.

En el mismo siglo, pero a finales de la década del '70 en el estudio que hace el matemático noruego Sophus Lie de los grupos continuos, hoy llamados *Grupos de Lie*, aparece una estructura de álgebra no asociativa en el plano tangente a un punto del grupo de Lie visto éste como una variedad diferenciable. Este estudio fue realizado inspirado en la teoría de Galois para ecuaciones algebraicas, él intenta hacer lo mismo con las ecuaciones diferenciales. Aquellas álgebras hoy llamadas *álgebras de Lie*, han sido estudiadas desde entonces y han tenido aplicaciones en otras áreas.

Las álgebras de Jordan, quizás las más famosas junto a las álgebras de Lie, nacen en el trabajo que hace el físico alemán P. Jordan en la formalización en Mecánica Cuántica, a comienzos de la década del '30 del siglo XX. Ambos tipos de álgebras hoy forman una área de estudio independiente de sus inicios.

En Genética aparecen álgebras no asociativas, introducidas por Etherington [7] a finales de los años '30. Existen trabajos anteriores a los de Etherington donde se trata el problema de las leyes de Mendel usando un modelamiento algebraico. Algunos de ellos son: Serebrowski, Glivenko, Kostitzin(ver [21], pags. 1-4) El modelamiento que se hace en genética agrega otro ingrediente al estudio de las álgebras no asociativas que es el concepto de la función peso en un álgebra, esto es un homomorfismo no nulo del álgebra A al cuerpo base K. El propio Etherington introduce el concepto de álgebras ponderadas y el de Train-Algebras [8]. Schafer y Gonshor fueron un paso adelante y definieron el concepto de *álgebras genéticas* (ver [21]). Estas álgebras son por lo general conmutativas pero no necesariamente asociativas. Más tarde Holgate [12] y Ljubič [16] introducen un importante ejemplo de álgebras en genética que fueron las álgebras de Bernstein que han tenido un importante desarrollo durante los últimos años.

2.2 Conceptos y Resultados Básicos

Daremos en este apartado las definiciones básicas y resultados clásicos que ocuparemos a lo largo de esta tesis.

Una álgebra no asociativa A sobre K es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, provisto de una función bilineal:

$$: A \times A :\rightarrow A$$

$$(a, b) \rightarrow ab$$

denotada por yuxtaposición, y llamada el producto de la álgebra o la multiplicación de la álgebra. No necesariamente supondremos que satisface la ley asociativa:

$$a(bc) - (ab)c = 0, \qquad \forall a, b, c \in A.$$

Es por esto que también se les llama álgebras no necesariamnete asociativas. Una álgebra no asociativa A, conmutativa, esto es, que satisface la ley $ab - ba = 0, \qquad \forall a, b \in A$, y además satisface:

$$a^2(ba) - (a^2b)a = 0, \qquad \forall a, b \in A,$$

se llama una álgebra de Jordan. Esta última identidad se la conoce como *identidad de Jordan.*

Una álgebra no asociativa A, anti-conmutativa, esto es, que satisface la ley $ab + ba = 0, \qquad \forall a, b \in A$, y además satisface la identidad de Jacobi, esto es:

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0, \qquad \forall a, b, c \in A,$$

se llama una álgebra de Lie.

Ejemplo 2.2.1 *Sea A una álgebra asociativa. A partir del producto en A definimos los productos $x \odot y = xy + yx$ y $[x, y] = xy - yx$. Consideremos las álgebras $A^+ = (A, \odot)$ y la álgebra $A^- = (A, [\quad])$, entonces A^+es una álgebra de Jordan y A^- es una álgebra de Lie.*

Por teoremas de Poincaré-Birkhoff-Witt (ver por ejemplo [14], pag. 159-162) se sabe que toda álgebra de Lie es isomorfa a una subálgebra de A^- para cierta álgebra asociativa A. Sin embargo existen ejemplos de álgebras de Jordan que no son isomorfas a una subálgebra A^+ para cualquier álgebra asociativa A. Aquellas que si resultan del proceso anterior se llaman álgebras de Jordan especiales.

Algunas notaciones:

Si A es una álgebra y $B \subseteq A$ entonces anotaremos $< B >$ el álgebra generada por B en A. Para denotar el espacio vectorial generado por B ocuparemos el símbolo $[B]$.

Para cada elemento x de un álgebra no asociativa A, definimos recursivamente las potencias principales derechas de x como sigue:

$$x^1 = x, \qquad x^{i+1} = x^i x, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Del mismo modo podemos definir las potencias principales izquierdas. Las potencias plenarias de x se definen recursivamente como sigue:

$$x^{[1]} = x, \qquad x^{[i+1]} = x^{[i]} x^{[i]}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si B es una subálgebra de un álgebra A definimos las potencias principales derechas de B recursivamente como sigue:

$$B^1 = B, \qquad B^{i+1} = <B^i B>, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Del mismo modo podemos definir las potencias principales izquierdas. Las potencias principales de B se definen recursivamente como:

$$B^{(1)} = B, \qquad B^{(i+1)} = <B^{(i)} B, B B^{(i)}>, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Las potencias plenarias de B se definen recursivamente por :

$$B^{[1]} = B, \qquad B^{[i+1]} = <B^{[i]} B^{[i]}>, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si una álgebra conmutativa A satisface $x^{i+j} = x^i x^j$ para todos los x en A y para todos los números naturales i y j, diremos que A es una *álgebra asociativa en las potencias*. Esto es equivalente a decir que un álgebra es asociativa en las potencias si la álgebra generada por x es asociativa para cada x en A. En particular si A es una álgebra de Jordan entonces A es una álgebra asociativa en las potencias (ver el libro de Shafer [20]).

Un elemento x de una álgebra A se llama *nilpotente por la derecha de índice* k si $x^k = 0$, pero $x^{k-1} \neq 0$. Del mismo modo se definen elementos nilpotentes por la izquierda.

Una subálgebra B de un álgebra A se dice *nil por la derecha* si todos sus elementos son nilpotentes por la derecha. Del mismo modo se define nil por la izquierda.

Una subálgebra B de un álgebra A se dice *nilpotente por la derecha de índice* k si $B^k = \{0\}$, pero $B^{k-1} \neq \{0\}$. Del mismo modo se define nilpotente por la izquierda.

Una subálgebra B de un álgebra A se dice *nilpotente de índice* k *(respectivamente soluble de índice* k*)* si $B^{(k)} = \{0\}$, pero $B^{(k-1)} \neq \{0\}$ (respectivamente $B^{[k]} = \{0\}$, pero $B^{[k-1]} \neq \{0\}$). Desde luego que si el álgebra es conmutativa los calificativos de derechos e izquierdos se omiten.

Por un resultado de Albert (ver el libro de Schafer [20], pag. 130) se sabe que si una álgebra A conmutativa sobre un cuerpo de característica distinta de dos, tres cinco y satisface $x^4 = x^2x^2, \ \ \forall x \in A$ entonces A es asociativa en las potencias. En particular si A es un álgebra de Jordan sobre un cuerpo de característica distinta de dos, tres y cinco entonces satisface $x^4 = x^2x^2, \ \ \forall x \in A$, y por lo que vimos antes se tiene que A es asociativa en las potencias.

El recíproco del resultado de arriba no es cierto, es decir, existen álgebras de Jordan que no son asociativas en las potencias. El siguiente es un ejemplo de ello.

Ejemplo 2.2.2 *Sea A un álgebra conmutativa de dimensión 4 sobre el cuerpo de los números reales con base $\{e, u, v, z\}$ y con tabla de multiplicación $e^2 = e$, $2eu = u$,*

$ev = v$, $uv = z$ y todos los otros productos nulos. Se verifica facilmente que $x^4 = x^2x^2 \quad \forall x \in A$, luego por el resultado de Albert se tiene que A es asociativa en las potencias y no es un álgebra de Jordan; pues tomando, por ejemplo, $x = e + u$, $y = e + u + v + z$ se tiene que $x^2(yx) \neq (x^2y)x$

Sea A una álgebra que pertenece a una clase $\mathcal{C}$ de álgebras conmutativas sobre un cuerpo K y M un espacio vectorial sobre K. Una función K-lineal no nula

$$\mu : A \to \mathrm{End}(M)$$

se llama una *representación de A en la clase $\mathcal{C}$* si la álgebra $\overline{A} = A \oplus M$ con multiplicación definida por:

$$(a+m)(b+n) = ab + \mu(a)(n) + \mu(b)(m), \quad \forall a, b \in A, \ m, n \in M$$

es también un elemento de $\mathcal{C}$. En el capítulo 3, usaremos la notación $\mu(a)(n) = \mu(a)n$.

Si $\mu : A \to \mathrm{End}(M)$ es una representación de A en la clase $\mathcal{C}$, decimos que M es un A-módulo. Por ejemplo, si A es un álgebra de Jordan, la función lineal $\rho : A \to \mathrm{End}M$ es un representación de Jordan (una representación de A en la clase de las álgebras de Jordan) si y solamente si se cumplen las dos relaciones siguientes:

$$\rho(a^2)\rho(a) = \rho(a)\rho(a^2) \ \ \forall a \in A \ \text{ y}$$

$$2\rho(a)\rho(b)\rho(a) + \rho(a^2b) = 2\rho(a)\rho(ab) + \rho(b)\rho(a^2) \ \ \forall a, b \in A.$$

En este caso M es un A-módulo de Jordan si se cumple:

$$a \cdot m = m \cdot a \ \ \forall a \in A, \ \forall m \in M,$$

$$(m \cdot a^2) \cdot a = (m \cdot a) \cdot a^2 \ \ \forall a \in A, \ \forall m \in M \ \text{ y}$$

$$2(m \cdot a \cdot b) \cdot a + m \cdot (a^2b) = 2(m \cdot a) \cdot (ab) + (m \cdot b) \cdot a^2 \ \ \forall a, b \in A, \ \forall m \in M.$$

Un K-subespacio de M que es un A-módulo en la clase $\mathcal{C}$ se llama un submódulo de M. Un A-módulo M en la clase $\mathcal{C}$,se dice *irreducible* si M no tiene submódulos propios no nulos. En ese caso decimos que la representación μ es irreducible. Es decir, M es irreducible si y solamente si no existen subespacios propios no triviales invariantes por $\mu(a)\ \forall a \in A$.

Un resultado que motivó nuestro estudio es el siguiente, que se debe a Bernard, Iltyakov y Martínez [2]: Si (B, ω) es un álgebra de Bernstein nuclear de dimensión finita sobre K, entonces todo módulo irreducible sobre B es de dimensión uno sobre K.

Sea A una álgebra no asociativa sobre K y sea

$$\omega : A \to K$$

un homomorfismo no nulo de álgebras , entonces (A, ω) se llama un *álgebra ponderada con función peso* ω. Como ω es un morfismo no nulo entonces existe un elemento de peso uno, $(\omega(x) = 1)$, y se tiene la siguiente descomposición:

$$A = Kx \oplus N, \qquad \text{donde} \quad N = \mathrm{Ker}(\omega).$$

Sea A una álgebra no asociativa sobre K. Para cada elemento $x \in A$ definimos las siguientes funciones K-lineales:

$$L_x : A \to A, \quad \text{definida por: } L_x(a) = xa \ \text{ y}$$

$$R_x : A \to A, \quad \text{definida por: } R_x(a) = ax,$$

llamadas multiplicación por la izquierda y por la derecha de x respectivamente.

Otro tema que es necesario ver en estos preliminares es el de las identidades polinomiales y el proceso de linealización.

Recordemos que un *grupoide* es un conjunto N junto con una operación binaria. Nosotros denotaremos esa operación por yuxtaposición, y en el caso de estudiar una sucesión de productos, agregaremos paréntesis para hacer patente el orden de nuestro producto. Si X es un conjunto de símbolos, denotaremos por $N\{X\}$ el conjunto de todas las *palabras* de largo finito que pueden ser realizadas usando los elementos de X

y usando paréntesis para indicar la manera en que dicha palabra fue construida. Dos palabras son iguales en $N\{X\}$ si ellas fueron construidas con los mismos símbolos y en el mismo orden, esto es con la misma cantidad de paréntesis y en las mismas posiciones; por ejemplo $(xy)(zy) \neq x(y(zy))$. $N\{X\}$ con la operación de yuxtaposición forma un grupoide y se le llama el *grupoide libre del conjunto* X. El *grado* de un elemento z en $N\{X\}$ es la cantidad de elementos de X que fue usada para construir z contando multiplicidades, donde por multiplicidades queremos decir el número de veces que aparece un símbolo en una palabra, por ejemplo la multiplicidad de y en $(xy)(zy)$ es dos y la de x es uno. También decimos que el *grado* de x_i en una palabra es la multiplicidad de x_i en esa palabra.

Si R es un anillo (asociativo) conmutativo con elemento unidad, $R\{X\}$ denotará el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $N\{X\}$ con coeficientes en R. Definamos en $R\{X\}$ un producto como sigue:

$$\sum \alpha_i z_i \sum \beta_j w_j = \sum \alpha_i \beta_j (z_i w_j),$$

donde $\alpha_i, \beta_j \in R$ y $z_i, w_j \in R\{X\}$. Con este producto, $R\{X\}$ se llama *el álgebra no asociativa libre en* X *sobre* R. En términos simples, es el álgebra de polinomios sobre R donde la multiplicación no es asociativa y no hay elemento unidad.

Un monomio es un elemento de $R\{X\}$, el cual es el múltiplo escalar de una palabra de $N\{X\}$.

Un elemento p de $R\{X\}$, se dice homogéneo de grado n, si cada monomio de p tiene la misma cantidad, n, de símbolos de X, y cada x_i tiene el mismo grado en cada monomio. Por ejemplo, $x^2(yx) - x(yx^2)$ es un elemento homogéneo de grado cuatro.

Una identidad polinomial de grado m en un álgebra A es un elemento homogéneo[1] $p(X) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $K\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de grado m, tal que $p(X)$ está en el núcleo de ϕ , para cualquier homomorfismo $\phi : R\{X\} \to A$. Esto es equivalente a decir que $p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para cualesquiera $a_i \in A$. Por este motivo anotaremos

[1] La homogeneidad no es una restricción en la definición, ver [18], pag. 177.

la identidad polinomial como $p(X) = 0$ en vez de $p(X)$ simplemente.

Sea S un subconjunto de $K\{X\}$, con K un cuerpo. La clase V de todas las álgebras sobre K que satisfacen todas las identidades de S se llama la *variedad* de álgebras generada por S.

Por ejemplo la identidad $x^2 = 0$ define la variedad de álgebras de Boole, la identidad $x(yz) - (xy)z = 0$ define la variedad de las álgebras asociativas, las identidades $xy - yx = 0$ y $x^2(yx) - x(yx^2) = 0$ definen la variedad de las álgebras de Jordan.

Sea $p(x_1, x_2, \ldots, x_i + y, \ldots, x_m) \in R\{X\}$ y sea $y \in R\{X\} - \{x_1, \ldots, x_m\}$, sustituyamos, para un i fijo, x_i por $x_i + y$, entonces se tiene que

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_k p_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_m, y),$$

donde p_{ik} es la suma de todos los términos que tienen grado k en la variable y. La suma anterior es finita, pues $p_{ik} = 0$ cuando k es mayor que el grado de x_i en p.

Definamos el operador $\delta_i^k(y)$ actuando en p como p_{ik}, esto es

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m)\delta_i^k(y) = p_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m, y),$$

es claro que $\delta_i^k(y)$ es lineal en el sentido siguiente:

$$(\alpha p + \beta q)\delta_i^k(y) = \alpha(p\delta_i^k(y)) + \beta(q\delta_i^k(y)).$$

Se puede ver fácilmente que $\delta_i^k(y)$ reemplaza cada monomio de p por la suma de aquellos que pueden ser obtenidos de p reemplazando k de los $x_i's$ por y, por ejemplo

$$(x_1x_2)(x_1x_1)\delta_1^1(y) = (yx_2)(x_1x_1) + (x_1x_2)(yx_1) + (x_1x_2)(x_1y)$$

Si x_i tiene grado mayor que k en algún monomio de p, entonces $p\delta_i^k(y)$ se llama una *linealización simple de p*. Una identidad f que resulta de aplicar una o más linealizaciones simples de p se llama una *linealización de p*. Una linealización de p en la cual cada monomio tiene grado no mayor que 1 en cada x_i se llama una *linealización completa de p*.

Lo importante a destacar acerca de las linealizaciones es el siguiente teorema (ver [18], pag 180).

Teorema 2.2.1 *Sea K un cuerpo y n un número natural. Sea la característica de K cero o mayor que n y sea $V = V(S)$ una variedad de álgebras sobre K donde cada identidad de S es homogénea que en cada x_i es de grado no mayor que n. Entonces V es igual a la variedad V' de todas las álgebras sobre K satisfaciendo las linealizaciones completas de las identidades de S.*

2.3 Train-Algebras

Este apartado puede ser incluído en el anterior, pero hemos decidido dejarlo separado, para dar énfasis en que éstas son las definiciones y resultados más particulares y más importantes para el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.3.1 *Sea (A, ω) un álgebra ponderada conmutativa sobre el cuerpo K. Llamaremos a (A, ω) (o simplemente a A) una train-algebra*[2] *si existen escalares γ_i tal que para cada $x \in A$ se cumple:*

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \gamma_2 \omega(x)^2 x^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0. \tag{2.1}$$

Al menor entero positivo n para el cual A satisface una ecuación del tipo (2.1) lo llamaremos el *rango de A*.

A la ecuación (2.1), donde n es el rango de A, la llamaremos la *ecuación train* de A.

Al polinomio

$$p(x) = x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \gamma_2 x^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1} x \in K[x]$$

lo llamaremos el *polinomio train* asociado a A y a sus raíces en algún cuerpo de descomposición de $p(x)$ sobre K *las raíces train.*

[2] Existen otros tipos de álgebras, por ejemplo están las álgebras genéticas según Schafer y las álgebras genéticas según Gonshor que implican que A sea una train-algebra sin necesidad de conocer los coeficientes γ_i. En estos preliminares no daremos esas definiciones pues creemos que no son necesarias para leer este trabajo. Una referencia es el libro de Wörz-Busekros [21].

Evaluando algún elemento de peso 1 en (2.1) se tiene que los coeficientes de la ecuación train satisfacen la relación:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i = 0$$

lo cual dice en particular que $\{0,1\}$ es un subconjunto del conjunto formado por las raíces train. A las raíces de $\dfrac{p(x)}{x(x-1)}$ se les llama las *raíces train principales*. Por ejemplo, existe una única ecuación train de rango 2, a saber:

$$x^2 - \omega(x)x = 0$$

en particular se tiene que cualquier elemento de peso uno es un elemento idempotente y cualquier elemento de peso 0 es un elemento nilpotente de índice 2.

Para $n = 3$ se tiene $1 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Si ponemos $\gamma_2 = \gamma$, la ecuación train resulta:

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0. \tag{2.2}$$

I.M.H Etherington [8] probó el siguiente:

Teorema 2.3.1 *Si A es una train-algebra de rango 3, que satisface (2.2) con $\gamma \neq \frac{1}{2}$ entonces siempre existe un elemento idempotente en A. Además si x es un elemento de peso 1 y $\{x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces el elemento:*

$$e_x = \frac{1}{1-2\gamma}(x^2 - 2\gamma x)$$

es idempotente.

El siguiente ejemplo muestra que la condición $\gamma \neq \frac{1}{2}$ no es fútil.

Ejemplo 2.3.1 *Sea A una álgebra de dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ con base $\{c, y, z\}$ y tabla de multiplicación dada por $c^2 = c + y$, $2cy = 2yc = y$, $2cz = 2zc = z$ y todos los otros productos nulos. Definamos ω por su acción en la base: $\omega(z) = \omega(y) = 0$ y $\omega(c) = 1$. Entonces A es una train-algebra de rango 3 que satisface la ecuación $x^3 - \frac{3}{2}\omega(x)x^2 + \frac{1}{2}\omega(x)^2 x = 0$ y no tiene elementos idempotentes no nulos. De hecho,* *si lo tuviera, digamos* $v = \alpha c + \beta y + \gamma z$*, se tendría que* $v = v^2 = \alpha^2 c + (\alpha^2 + \alpha\beta)y + \alpha\gamma z$*, como* $\alpha = \omega(v)$ *se tiene que* $\alpha = 1$*, luego se tendría que* $\alpha^2 + \alpha\beta = 1 + \beta = \beta$ *lo cual es imposible. Luego no existen idempotentes en* A *no nulos.*

En lo que sigue, para train-algebras de rango 3, asumiremos siempre $\mathrm{char(K)} \neq 2$ y $\gamma \neq \frac{1}{2}$.

Si A es una train-algebra de rango 3 sobre un cuerpo K, entonces se tiene la siguiente descomposición de Peirce relativa al idempotente e:

$$A = Ke \oplus U \oplus V \qquad \text{con} \qquad U^2 \subseteq V, \;\; UV \subseteq V, \;\; V^2 = 0 \tag{2.3}$$

donde $U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \;\; \mathrm{2ex = x}\}$ y $V = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \;\; \mathrm{ex} = \gamma \mathrm{x}\}$ son los subespacios propios asociados a los valores propios $\frac{1}{2}$ y γ respectivamente de la función lineal $L_e : \mathrm{Ker}(\omega) \to \mathrm{Ker}(\omega)$ definida por $L_e(x) = ex$ (Ver Costa y Suazo [6]).

Notar que V no puede ser el espacio nulo, pues si lo fuese A satisfacería la ecuación train de rango 2, lo cual sería una contradicción. Notar también que desprende de (2.2) que $N = \mathrm{Ker}(\omega)$ es una nil subálgebra de nilíndice 3.

El siguiente es un importante teorema sobre train-algebras de rango 3 debido a M. Ouattara [19]:

Teorema 2.3.2 *Sea* A *una train-algebra de rango* 3 *que satisface (2.2). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es un álgebra de Jordan.*

(ii) A *es un álgebra asociativa en las potencias.*

(iii) $\gamma = 0$ *o* $\gamma = 1$.

En general para $n > 3$ existen train-algebras asociativa en las potencias que no son álgebras de Jordan. El álgebra del ejemplo (2.2.2) es una train-algebra de rango 4 asociativa en las potencias que satisface: $x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2 = 0$ y no es de Jordan.

El siguiente es un resultado de E. Guzzo [9] que relaciona a las raíces train con la condición de asociatividad en las potencias.

Teorema 2.3.3 *Si A una train-algebra asociativa en las potencias, entonces el conjunto de las raíces train es un subconjunto de* $\{0, 1\}$.

Las ecuaciones train de train-algebras asociativa en las potencias de rango 4 son:

$$x^4 - \omega(x)x^3 = 0 \tag{2.4}$$

$$x^4 - 3\omega(x)x^3 + 3\omega(x)^2x^2 - \omega(x)^3x = 0 \tag{2.5}$$

$$x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2 = 0 \tag{2.6}$$

Gracias al trabajo de Andrade y Labra [1] se sabe que una train-algebra asociativa en las potencias que satisface (2.4) es un álgebra de Jordan y es también sabido que si una train-algebra asociativa en las potencias satisface (2.5), entonces es un álgebra de Jordan (ver [17]). El propio ejemplo (2.2.2) que hemos visto muestra que para el caso de la ecuación (2.6) no puede haber un resultado como los anteriores.

Recién en el año 1994, López-Sánchez y Rodríguez-Santa Maria [17] encontraron condiciones para asegurar la existencia de idempotentes en train-algebras de rango 4 y desde allí obtuvieron una descomposición de Peirce para conocer el álgebra en cuestión. Ellos probaron el siguiente:

Teorema 2.3.4 *Sea A es una train-algebra de rango 4 sobre un cuerpo K que contiene a las raíces train principales λ_1 y λ_2 distintas y distintas de $1/2$. Entonces A posee al menos un idempotente. Mas aún, para cada x con $\omega(x) = 1$, el siguiente elemento en $< x >$ es idempotente:*

$$\begin{aligned} e_x &= x + \frac{1}{1-2\lambda_1}p(x) + \frac{2}{(1-2\lambda_1)(1-2\lambda_2)}q_1(x) \\ &+ \frac{2}{(1-2\lambda_1)^2(1-2\lambda_2)}p^2(x) + \frac{2}{(1-2\lambda_1)^2(1-2\lambda_2)^2}p(x)q_1(x). \end{aligned}$$

donde $p(x) = x^2 - x$ *y* $q_1(x) = x^3 - (1 + \lambda_1)x^2 + \lambda_1 x$.

En el mismo trabajo también se encuentra el siguiente:

Teorema 2.3.5 *Sea A una álgebra ponderada. A es una train-algebra de rango 4 sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 que contiene a las raíces train principales λ_1 y λ_2 distintas y distintas de $1/2$, si y solamente si:*

I) A posee un idempotente e y, con respecto a e, esta tiene una descomposición de Peirce

$$A = Ke \oplus U_{\frac{1}{2}} \oplus U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2}$$

donde $U_i = \{z \in ker(\omega) / \ ez = iz\ \}$, $i \in \{\frac{1}{2}, \lambda_1, \lambda_2\}$ con $U_{\lambda_i} \neq 0$ para $i \in \{0, 1\}$, y las siguientes condiciones son satisfechas:

$U_{\frac{1}{2}}^2 \subseteq U_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$

$U_{\frac{1}{2}} U_{\lambda_i} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \oplus U_{\lambda_j} \qquad i \neq j$

$U_{\lambda_i}^2 \subseteq U_{\lambda_j} \qquad i \neq j$

$U_{\lambda_1} U_{\lambda_2} = \{0\}$

$(U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2})^3 = \{0\}$

II) Para todo $u \in U_{\frac{1}{2}}$, $v \in U_{\lambda_1}$ y $w \in U_{\lambda_2}$, las siguientes relaciones se verifican:

$(\frac{1}{2} - \lambda_2)(u(u^2)_{\lambda_1})_{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{2} - \lambda_1)(u(u^2)_{\lambda_2})_{\frac{1}{2}} = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(u(uv)_{\frac{1}{2}})_{\lambda_1} + (\lambda_1 - \frac{1}{2})(u(uv)_{\lambda_2})_{\lambda_1} = 0$

$(\lambda_2 - \lambda_1)(u(uw)_{\frac{1}{2}})_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \frac{1}{2})(u(uw)_{\lambda_1})_{\lambda_2} = 0$

$(1 - 2\lambda_2)(v(uv))_{\frac{1}{2}} + (\lambda_1 - \frac{1}{2})uv^2 = 0$

$(1 - 2\lambda_1)(w(uw))_{\frac{1}{2}} + (\lambda_2 - \frac{1}{2})uw^2 = 0$

$(\frac{1}{2} - \lambda_1)(v(uw)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{2} - \lambda_2)(w(uv)_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2)(w(uv)_{\frac{1}{2}})_{\lambda_1} + (\lambda_1 - \frac{1}{2})w(uv)_{\lambda_2} = 0$

$(\lambda_2 - \lambda_1)(v(uw)_{\frac{1}{2}})_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \frac{1}{2})v(uw)_{\lambda_1} = 0$ *donde $(z)_i$ denota la proyección de $z \in Ker(\omega)$ sobre el subespacio U_i, $i \in \{\frac{1}{2}, \lambda_1, \lambda_2\}$.*

III) Para cualquier $z \in Ker(\omega)$, se tiene $z^4 = 0$

Capítulo 3

Resultados

Este capítulo está dedicado exclusivamente a mostrar los resultados que hemos obtenido durante el desarrollo de esta tesis. Primero abordaremos las train-representaciones de rango tres. otra sección será dedicada a la existencia de elementos idempotentes en ciertas familias de train-algebras asociativas en las potencias, luego estudiaremos las train representaciones de rango cuatro asociativas en las potencias y la sección última de este capítulo tratará acerca de la relación entre train-algebras de rango tres e identidades polinomiales.

3.1 Representaciones de train-algebras de rango 3

En esta sección estudiaremos representaciones de train-algebras de rango 3. Consideremos la clase $\mathcal{C}$ de todas las train-algebras de rango 3 sobre el cuerpo K, de característica distinta de dos y de tres, con train ecuación:

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0 \tag{3.1}$$

con $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Considemos A (a lo largo de la sección) en $\mathcal{C}$, la cual tiene una descomposición de Peirce para el idempotente e dada por:

$$A = Ke \oplus U \oplus V \qquad \text{con} \qquad U^2 \subseteq V,\ \ UV \subseteq V,\ \ V^2 = 0 \tag{3.2}$$

donde $U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \quad 2ex = x\}$ y $V = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \quad ex = \gamma x\}$.

Sea M un espacio de dimensión finita sobre K y sea $\mu : A \to \mathrm{End(M)}$ una función lineal no nula. Diremos que μ es *una representación de A en $\mathcal{C}$*, si el álgebra $\overline{A} = A \oplus M$ con multiplicación:

$$(a+m)(a'+m') = aa' + \mu(a)m' + \mu(a')m$$

y función peso definida por: $\overline{\omega}(a+m) = \omega(a)$ es un elemento de $\mathcal{C}$, donde $\mu(a)m$ denota $\mu(a)(m)$.

Lema 3.1.1 *Sea A, $\mathcal{C}$ y μ como en el párrafo anterior, entonces μ es una representación de A en $\mathcal{C}$ si y solamente si $\forall a \in A$ se cumple:*

$$2\mu(a)^2 + \mu(a^2) - 2(1+\gamma)\omega(a)\mu(a) + \gamma\omega(a^2)I = 0 \qquad (3.3)$$

donde I denota la función identidad de M.

Demostración:

La demostración resulta al observar que:

$$(a+m)^2 = a^2 + 2\mu(a)m, \qquad \forall a \in A,\ \forall m \in M$$

$$(a+m)^3 = a^3 + 2\mu(a)^2 m + \mu(a^2)m, \qquad \forall a \in A,\ \forall m \in M$$

y de reemplazar x por $(a+m)$ en (3.1). $\square$

Observación 3.1.1 *Si asumimos que M y μ son como en el lema anterior entonces $\overline{A} = A \oplus M$ satisface (3.1) y como $M \subseteq Ker(\overline{\omega})$, tenemos que M se descompone como sigue:*

$$M = M_U \oplus M_V, \quad donde$$

$$M_U = \{m \in M / 2\mu(e)m = m\} \ \ y \ \ M_V = \{m \in M / \mu(e)m = \gamma m\}$$

Además tenemos las siguientes relaciones:

$$eM_U = M_U,\ \ UM_U \subseteq M_V,\ \ VM_U \subseteq M_U,\ \ UM_V \subseteq M_U,$$

$$VM_V = \{0\}, \quad eM_V = \begin{cases} M_V & si\ \gamma \neq 0 \\ \{0\} & si\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Lema 3.1.2 *Si A y μ son como en el lema anterior, entonces para cualquier par de elementos a, b en $N = \mathrm{Ker}(\omega) \subseteq \mathrm{A}$ se tiene:*

$$\mu(a)\mu(b) + \mu(b)\mu(a) + \mu(ab) = 0. \tag{3.4}$$

En particular si a, b están en V entonces $\mu(a)$ y $\mu(b)$ anticonmutan.

Demostración:

Si reemplazamos $x \in N$ por a en (3.3) tenemos que para cualquier $x \in N$ se cumple:

$$2\mu(x)^2 + \mu(x^2) = 0 \tag{3.5}$$

ahora si tomamos $a, b \in N$ y ponemos $x = a + b$ en la identidad anterior se obtiene:

$$2\mu(a)^2 + 2\mu(a)\mu(b) + 2\mu(b)\mu(a) + 2\mu(b)^2 + \mu(a^2) + 2\mu(ab) + \mu(b^2) = 0$$

que junto a (3.5) nos permite obtener (3.4). En el caso particular en que a y b están en V entonces $ab = 0$, luego (3.4) se reduce a $\mu(a)\mu(b) + \mu(b)\mu(a) = 0$. $\square$

Notemos que para cualquier $a \in V$ tenemos que $\mu(a)^2 = 0$. El siguiente lema dice que en general todos los elementos de $\mu(N)$ son nilpotentes de nilíndice a lo más 3.

Lema 3.1.3 *Si A, M, N, y μ son como en el lema anterior, entonces $\mu(x)^3 = 0$, para cualquier elemento $x \in N$.*

Demostración:

Consideremos la relación (3.5). Multiplicando ésta por $\mu(x)$ por la izquierda y la derecha respectivamente se obtiene:

$$2\mu(x)^3 + \mu(x)\mu(x^2) = 0 \text{ y } \qquad 2\mu(x)^3 + \mu(x^2)\mu(x) = 0. \qquad (*)$$

Si restamos estas dos relaciones queda:

$$\mu(x)\mu(x^2) - \mu(x^2)\mu(x) = 0$$

Ahora bien, si ponemos $a = x$ y $b = x^2$ en (3.4) y recordando que $x^3 = 0$ para cualquier $x \in N$ se obtiene:

$$\mu(x)\mu(x^2) + \mu(x^2)\mu(x) = 0,$$

que junto a la última relación resulta: $\mu(x)\mu(x^2) = \mu(x^2)\mu(x) = 0$ y reemplazando esto en (*) se ve que $\mu(x)^3 = 0$. $\square$

Notemos que si $a \in N$ entonces el álgebra asociativa generada por $\mu(a)$ en $\mathrm{End}(M)$,$< \mu(a) >$, es nilpotente, pues $< \mu(a) > = \{\alpha\mu(a) + \beta\mu(a)^2 / \alpha, \beta \text{ escalares}\}$ y es trivial verificar que el producto de tres elementos cualesquiera de $< \mu(a) >$ es nulo. Es importante notar que $< \mu(a) >$ es un subconjunto de $\mu(N)$, pese a que no necesariamente este conjunto es una subálgebra de $\mathrm{End}(M)$.

Supongamos que al igual que $< \mu(a) >$ el álgebra asociativa generada por $\mu(N)$,$< \mu(N) >$, es nilpotente de índice n, es decir, $< \mu(N) >^n = 0$, pero $< \mu(N) >^{n-1} \neq 0$. Sea $0 \neq m \in < \mu(N) >^{n-1} M$, entonces para cualquier $a \in N$ se tiene $\mu(a)m = 0$. Si M fuese irreducible y consideramos $M' = \{m \in M / \mu(N)m = 0\}$, entonces claramente M' es un $A-$submódulo de M que no es $\{0\}$ pues de $< \mu(N) >^{n-1} M \subseteq M'$, se tiene $M' = M$ y $\mu(a)m = 0$ para cualquier $a \in N$ y para cualquier $m \in M$. En este caso si $0 \neq m \in M$ entonces $[m]$, el espacio vectorial generado por m, es invariante bajo $\mu(a)$ $\forall a \in A$, luego $M = [m]$. Concluyendo: si $< \mu(N) >$ fuese nilpotente habríamos probado el siguiente:

Teorema 3.1.1 *Una condición necesaria y suficiente para que M sea un $A-$módulo irreducible es que M sea unidimensional.*

Pues bien, avoquémonos a probar lo que nos falta para demostrar el teorema recién enunciado. Tenemos que probar que $< \mu(N) >$ es nilpotente. Sabemos que todo elemento de $\mu(N)$ es nilpotente de nilíndice a lo más 3, que $< \mu(a) >$ es nilpotente de nilíndice a lo más 3 y que además es subconjunto de $\mu(N)$. Tenemos una relación muy importante que en cierto modo mide la anticonmutatividad en $\mu(N)$, a saber la relación (3.4) que recordamos ahora:

$$\mu(a)\mu(b) + \mu(b)\mu(a) = -\mu(ab)$$

Lema 3.1.4 *Si M, N, y μ son como antes, entonces $< \mu(N) >$ es nilpotente.*

Demostración: (Antes de dar la demostración agreguemos una notación: Si $S \subseteq \mu(N)$ tal que si $\mu(a), \mu(b) \in S$ implica que $\mu(ab) \in S$ anotamos $S \leq_\mu \mu(N)$.)

Si $\mu(N) = \{0\}$ no hay nada que demostrar. Si $M = \{0\}$ tampoco hay nada que probar. Entonces supongamos $M \neq \{0\}$ y $\mu(N) \neq \{0\}$ y hagamos inducción sobre la dimensión de M. Si la dimensión de M es 1 entonces necesariamente $\mu(a)m = 0$ para cualquier $a \in N$ y para cualquier $m \in M$ pues $\mu(a)^3 = 0$, lo cual implica que $\mu(N) = 0$, luego el caso $\dim(M) = 1$ es cierto por vacuidad. Supongamos que el resultado es cierto para espacios vectoriales de dimensión menor que n y supongamos que la dimensión de M es n.

Sea $\Sigma = \{S \leq_\mu \mu(N) / \ < S > \text{ es nilpotente}\}$, notemos que $\Sigma \neq \{0\}$ pues si $\mu(a) \neq 0$ entonces $< \mu(a) > \in \Sigma$ por lo visto en el párrafo anterior a este lema. Sea $S \in \Sigma$ de dimensión maximal. Si $< S > = < \mu(N) >$ la demostración termina aquí. Entonces supongamos que $< S > \neq < \mu(N) >$. Afirmamos que existe $\mu(a) \in \mu(N)$ tal que $\mu(ax) \in < S >$ para cualquier $\mu(x) \in S$. De hecho, sea $\mu(a_1) \in \mu(N) - < S >$. Si $\mu(a_1x) \in < S >$, $\forall \mu(x) \in S$ nuestra afirmación estaría probada. Supongamos que existe $\mu(x_1) \in S$ tal que $\mu(a_1x_1) \notin < S >$, definamos $a_2 = -a_1x_1$ así $\mu(a_2) \in \mu(N) - < S >$, si $\mu(a_2x) \in < S >$ para cualquier $\mu(x) \in S$ entonces a_2 es el elemento que buscamos en nuestra afirmación. Si no, continuamos este proceso definiendo $a_k = -a_{k-1}x_{k-1}$ con $\mu(a_k) \in \mu(N) - < S >$ sucesivamente.

Para probar nuestra afirmación basta mostrar que este proceso es finito; notemos que $\mu(a_2) = \mu(a_1)\mu(x_1) + \mu(x_1)\mu(a_1)$ y $\mu(a_3) = (\mu(a_1)\mu(x_1) + \mu(x_1)\mu(a_1))\mu(x_2) + \mu(x_2)(\mu(a_1)\mu(x_1) + \mu(x_1)\mu(a_1))$. En general $\mu(a_k)$ es una combinación lineal de monomios consistentes de $k-1$ elementos de S y $\mu(a_1)$. Como $< S >$ es nilpotente existe r tal que $\mu(x_{i_1})\mu(x_{i_2})\cdots\mu(x_{i_r}) = 0$, luego $\mu(a_{2r+1}) = 0$ lo cual es una contradicción si suponemos que el proceso es infinito. Entonces tenemos que existe $\mu(a) \in \mu(N)$ tal que $\mu(a) \notin < S >$ y además $\mu(ax) \in < S >$ para cualquier $\mu(x) \in S$.

Sea ahora $M' = [\{sm/s \in < S >, m \in M\}]$, claramente $M' \neq 0$ pues $< S > \neq 0$ pero tampoco es M pues si lo fuese tomemos cualquier elemento m no nulo de M. Entonces $m = \sum s_i m_i$, para ciertos $s_i \in < S >$ y ciertos $m_i \in M$. Pero cada m_i a su vez es una combinación lineal de elementos de la forma $s_{j_2}m_{j_2}$ y así sucesivamente. Repitiendo este proceso tendremos que $m = \sum_{i,j} s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}m_{i_j} = 0$ por la nilpotencia de $< S >$, lo cual es una contradicción; entonces $0 \neq M' \neq M$.

Sea T el conjunto de todos los elementos de $\mu(N)$ que dejan invariante a M'. Notemos que T es un subespacio de $\mu(N)$ y que además si $\mu(a)$ y $\mu(b)$ están en T, entonces $\mu(ab)$ está también en T por la relación (3.4). Luego $T \leq_\mu \mu(N)$. Notemos además que $S \subseteq T$. Luego T tiene la misma propiedad de anticonmutatividad que $\mu(N)$, T actúa en M' e induce una acción en M/M' que tiene dimensión menor que n. Luego $< T >$ es nilpotente por hipótesis inductiva. Luego $T \in \Sigma$. Sea $\mu(a) \in \mu(N) - < S >$ tal que $\mu(ax) \in < S >$ para cualquier $\mu(x) \in S$. Si $m \in M$ entonces $\mu(a)\mu(x)m = -\mu(x)\mu(a)m - \mu(ax)m \in M'$. Luego $\mu(a) \in T$ lo cual es una contradicción pues supusimos S de dimensión máxima.$\square$

3.2 Idempotentes en Train-Algebras asociativas en las potencias

Antes de empezar a estudiar las representaciones de train álgebras de rango cuatro asociativa en las potencias quisiéramos dar una forma explícita de los idempotentes en cada caso. En esta sección supondremos que la característica de K es cero. Primero recordemos el siguiente teorema clásico en álgebras no asociativas:

Teorema 3.2.1 *Toda álgebra asociativa en las potencias de dimensión finita sobre* *el cuerpo K, la cual no es una nilalgebra, tiene un elemento idempotente.*

En el libro de Schafer ([20], pag.32, Prop.3.3) se puede ver una demostración de este teorema. Una aplicación directa de este resultado a nuestra teoría es el siguiente:

Corolario 3.2.1 *Toda train-algebra asociativa en las potencias (no necesariamente de dimensión finita) tiene un elemento idempotente.*

Demostración:
Sea A es una train-algebra y sea x un elemento de peso 1. Ahora bien, el álgebra generada por x es asociativa en las potencias, de hecho es asociativa, y no es nilálgebra pues $\omega(x^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, luego x no es nilpotente. Además $< x >$ es de dimensión finita pues A satisface la ecuación:

$$a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + \gamma_2\omega(a)^2a^{n-2} + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a = 0.$$

En particular x satisface:

$$x^n = -\gamma_1x^{n-1} - \gamma_2x^{n-2} - \cdots - \gamma_{n-1}x,$$

y como A es asociativa en las potencias se tiene que el conjunto

$$\{x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}\}$$

es un conjunto generador de $< x >$. Por el teorema anterior se tiene que en $< x >$ existe un elemento idempotente.$\square$

Sin desmedro de la importancia del teorema y su corolario no tenemos una forma explícita de aquellos idempotentes. Recordemos que si A es una train-algebra asociativa en las potencias de rango n entonces satisface una de las siguientes ecuaciones Train (ver Guzzo [10]):

$$x^n - \omega(x)x^{n-1} = 0 \tag{3.6}$$

$$x^n - 2\omega(x)x^{n-1} + \omega(x)^2x^{n-2} = 0 \tag{3.7}$$

$$x^n - 3\omega(x)x^{n-1} + 3\omega(x)^2x^{n-2} - w(x)^3x^{n-3} = 0 \tag{3.8}$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x^n - (n-1)\omega(x)x^{n-1} + \binom{n}{2}\omega(x)^2x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0.$$

A continuación mostraremos la forma que tienen los idempotentes en los primeros 3 casos.

Proposición 3.2.1 *Si A es asociativa en las potencias y satisface (3.6) entonces se tiene que:*

i) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, entonces

$$x^{n+k} = x^{n-1},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

ii) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, entonces

$$e_x = x^{n-1} \textit{ es un elemento idempotente.}$$

Además cualquier idempotente tiene la forma antes descrita.

Demostración:

La demostración resulta de notar que si $\omega(x) = 1$, entonces, por (3.6), $x^n = x^{n-1}$. Multiplicando por x y usando que el álgebra A es asociativa en las potencias tenemos que $x^{n+1} = x^n$. Repitiendo este argumento inductivamente se obtiene *i)*. La parte *ii)* resulta de *i)* tomando $k = n$ y usando que A es asociativa en las potencias. Claramente si e es un idempotente, que es necesariamente de peso 1 se tiene que $e_e = e^{n-1} = e$, luego todo elemento idempotente se puede exibir como muestra la proposición. □

Por ejemplo, si x es un elemento de peso 1 en una train-algebra A asociativa en las potencias que satisface

$$x^4 - \omega(x)x^3 = 0,$$

el elemento x^3 es idempotente.

Proposición 3.2.2 *Si A es asociativa en las potencias y satisface (3.7), entonces se tiene que:*

i) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, *entonces*

$$x^{n+k} = (k+2)x^{n-1} - (k+1)x^{n-2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ii) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, *entonces*

$$e_x = (n-1)x^{n-2} - (n-2)x^{n-1} \text{ es un elemento idempotente.}$$

Además todos los idempotentes de A tienen esa forma.

Demostración:

La demostración de esta proposición es similar a la anterior, haciendo los cambios pertinentes, pero de todos modos la mostramos a contunuación. Como x tiene peso 1 se tiene que $x^n = 2x^{n-1} - x^{n-2}$ que es la relación que aparece en *i)*, para el caso $k = 0$. Si esta relación se multiplica por x y usando que A es asociativa en las potencias se tiene

$$x^{n+1} = 2x^n - x^{n-1} = 2(2x^{n-1} - x^{n-2}) - x^{n-1} = 3x^{n-1} - 2x^{n-2}.$$

que es lo que afirma *i)*, para el caso $k = 1$.

Supongamos cierto $i)$ para cualquier valor menor que k, entonces tenemos que

$$x^{n+(k-1)} = (k+1)x^{n-1} - kx^{n-2}$$

Multiplicando esta igualdad por x y usando que A es asociativa en las potencias se tiene

$$x^{n+k} = (k+1)x^n - kx^{n-1} = (k+1)(2x^{n-1} - x^{n-2}) - kx^{n-1} = (k+2)x^{n-1} - (k+1)x^{n-2}.$$

Luego inductivamente hemos probado *i)*.

Por *i)* se obtiene

$$x^{2n-2} = x^{n+(n-2)} = nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}$$

$$x^{2n-3} = x^{n+(n-3)} = (n-1)x^{n-1} - (n-2)x^{n-2}$$

$$x^{2n-4} = x^{n+(n-4)} = (n-2)x^{n-1} - (n-3)x^{n-2}$$

Ahora calculando el cuadrado de $e_x = (n-1)x^{n-2} - (n-2)x^{n-1}$ se obtiene

$$e_x^2 = (n-1)^2 x^{2n-4} - 2(n-1)(n-2)x^{2n-3} + (n-2)^2 x^{2n-2}$$

reemplazando los valores de las potencias de x por combinaciones lineales de x^{n-1} y de x^{n-2} se tiene

$$e_x^2 = [(n-1)^2(n-2) - 2(n-1)^2(n-2) + (n-2)^2 n]x^{n-1}$$

$$-[(n-1)^2(n-3) - 2(n-1)(n-2)^2 + (n-2)^2(n-1)]x^{n-2}$$

lo cual es igual a e_x, luego e_x es un elemento idempotente. Además $e_e = e$, luego todo idempotente es de la forma que indica la proposición. $\square$

Por ejemplo si x es un elemento de peso 1 en una train-algebra A asociativa en las potencias que satisface

$$x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2 x^2 = 0,$$

el elemento $3x^2 - 2x^3$ es un elemento idempotente.

A continuación estudiaremos el caso siguiente en la próxima

Proposición 3.2.3 *Si A es asociativa en las potencias y satisface (3.8) entonces se tiene que:*

i) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, entonces

$$x^{n+k} = \frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-1} - ((k+2)^2 - 1)x^{n-2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^{n-3} \ \ \forall k \in \mathbb{N},$$

ii) Si $x \in A$ es un elemento de peso 1, entonces

$$e_x = \frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3} - ((n-2)^2-1)x^{n-2} + \frac{(n-3)(n-2)}{2}x^{n-1}$$

es un elemento idempotente. Además todos los idempotentes de A tienen esa forma.

Demostración:

Al igual que en la proposición anterior la parte *ii)* resulta de *i)* luego de unos cálculos, de modo que probaremos solo la parte *i)*. Como x tiene peso 1 se tiene que

$$x^n = 3x^{n-1} - 3x^{n-2} + x^{n-3}.$$

Multiplicando por x y aplicando que A es un álgebra asociativa en las potencias se tiene que

$$x^{n+1} = 3x^n - 3x^{n-1} + x^{n-2} = 3[3x^{n-1} - 3x^{n-2} + x^{n-3}] - 3x^{n-1} + x^{n-2}.$$

Luego

$$x^{n+1} = 6x^{n-1} - 8x^{n-2} + 3x^{n-3},$$

que es exactamente lo que afirma *i)* para el caso $k = 1$. Supongamos cierto *i)* para k, esto es

$$x^{n+k} = \frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-1} - ((k+2)^2-1)x^{n-2} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^{n-3}$$

y probemos nuestra afirmación para el caso $k+1$. Pues bien, al multiplicar esta última igualdad por x se tiene

$$x^{n+k+1} = \frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n} - ((k+2)^2-1)x^{n-1} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^{n-2},$$

o equivalentemente

$$x^{n+k+1} = \frac{(k+3)(k+2)}{2}[3x^{n-1} - 3x^{n-2} + x^{n-3}] - ((k+2)^2-1)x^{n-1} + \frac{(k+1)(k+2)}{2}x^{n-2}$$

o lo que es lo mismo

$$x^{n+k+1} = \left[\frac{3(k+3)(k+2)}{2} - (k+1)(k+3)\right]x^{n-1}$$

$$+\left[-\frac{3(k+3)(k+2)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]x^{n-2}+\frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-3},$$

o lo que es igual

$$x^{n+k+1}=(k+3)\left[\frac{3(k+2)}{2}-(k+1)\right]x^{n-1}+\frac{k+2}{2}[(k+1)-3(k+3)]x^{n-2}$$

$$+\frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-3},$$

o de otro modo

$$x^{n+k+1}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}x^{n-1}-(k+2)(k+4)x^{n-2}+\frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-3},$$

o

$$x^{n+k+1}=\frac{(k+3)(k+4)}{2}x^{n-1}-[(k+3)^2-1]x^{n-2}+\frac{(k+3)(k+2)}{2}x^{n-3},$$

como queríamos demostrar. □

3.3 Representaciones de Train-Algebras de rango 4 asociativa en las potencias

En esta sección estudiaremos las representaciones de train-algebra de rango 4 que son asociativas en las potencias. Como vimos en la sección anterior, para conocer los módulos irreducibles, es muy importante conocer una relación en $End(M)$ de la representación y conocer relaciones de conmutatividad en $\mu(N)$. Además fue debido a una condición de nilpotencia que pudimos obtener nuestro resultado para train-algebras de rango 3. Encontramos resultados como los de antes en casos más particulares que antes, pero los métodos fueron distintos.

Recordemos que si una train-algebra de rango 4 es asociativa en la potencias necesariamente satisface una de las siguientes relaciones:

$$x^4-\omega(x)x^3=0 \tag{3.9}$$

$$x^4-3\omega(x)x^3+3\omega(x)^2x^2-\omega(x)^3x=0 \tag{3.10}$$

$$x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2 = 0. \tag{3.11}$$

Estudiaremos cada caso independientemente.

Consideremos la clase $\mathcal{D}$ de las train-algebras asociativas en las potencias de rango 4 que satisfacen (3.9) sobre el cuerpo K de característica distinta de 2 y 3. Sea $A \in \mathcal{D}$ y sea M un espacio de dimensión finita sobre K, y $\mu : A \to End(M)$ una función lineal no nula. Diremos que μ es *una representación de* A *en la clase* $\mathcal{D}$ si la álgebra $\widehat{A} = A \oplus M$ con multiplicación

$$(a+m)(a'+m') = aa' + \mu(a)m' + \mu(a')m$$

y función peso definida por $\widehat{\omega}(a+m) = \omega(a)$ es un elemento de $\mathcal{D}$.

Si $A \in \mathcal{D}$, entonces existe un idempotente $e \in A$, a saber, si x es de peso 1 entonces: $e_x = x^3$ es idempotente de peso 1. Además, cualquier idempotente en A tiene esa forma. Además si $e \in A$ es un idempotente tenemos la siguiente descomposición de Peirce con respecto a e :

$$A = Ke \oplus U \oplus V,$$

donde $U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/2ex = x\}$ y $V = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ex = 0\}$, además tenemos las siguientes relaciones:

$$V^2 \subseteq V, \;\; UV \subseteq U, \;\; U^2 \subseteq V. \tag{3.12}$$

Lema 3.3.1 *Si* A *es una train-algebra de rango* 4 *asociativa en las potencias que satisface (3.9),* M *es un espacio vectorial de dimensión finita sobre* K *y* $\mu : A \to End(M)$ *es una representación de* A *en la clase* $\mathcal{D}$*, entonces para cualquier* $a \in A$ *se cumplen las siguientes relaciones:*

$$2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) - 2\omega(a)\mu(a)^2 - \omega(a)\mu(a^2) = 0, \tag{3.13}$$

$$2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) = 4\mu(a^2)\mu(a), \tag{3.14}$$

$$4\mu(a^2)\mu(a) - 2\omega(a)\mu(a)^2 - \omega(a)\mu(a^2) = 0. \tag{3.15}$$

Demostración:

Calculando las potencias de $(a+m)$ se obtiene:

$$(a+m)^2 = a^2 + 2\mu(a)m$$

$$(a+m)^3 = a^3 + 2\mu(a)^2m + \mu(a^2)m$$

$$(a+m)^4 = a^4 + 2\mu(a)^3m + \mu(a)\mu(a^2)m + \mu(a^3)m.$$

Como $\widehat{A}$ es un elemento de $\mathcal{D}$ se tiene que cualquier elemento $(a+m) \in \widehat{A}$ satisface (3.9). Reemplazando x por $a+m$ en (3.9) se obtiene (3.13).

Ahora bien, como $\widehat{A}$ es asociativa en las potencias, en particular en $\widehat{A}$ se satisface:

$$(a+m)^4 = (a+m)^2(a+m)^2$$

lo cual implica (3.14). Reemplazando (3.14) en (3.13) se obtiene (3.15).□

Observación 3.3.1 *Notemos que la demostración de nuestro lema sólo se requiere reemplazar x por $a+m$ en (3.9). Por lo tanto, recíprocamente, la relación (3.13) implica que $\widehat{A}$ satisface (3.9) y la relación (3.14) implica que $\widehat{A}$ satisface $x^4 = x^2x^2$. Luego si K tiene característica distinta de 2, de 3 y de 5 tendríamos que $\widehat{A}$ es asociativa en las potencias. Es decir, bajo estas condiciones de K el lema anterior en vez de considerar la implicancia en un sentido es una equivalencia.*

Observemos que como $M \subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$ se tiene que $M = M_V \oplus M_U$, donde $M_U = \{x \in M /\ 2\mu(e)x = x\}$ y $M_V = \{x \in M /\ \mu(e)x = 0\}$, además de las relaciones (3.12) se obtiene que:

$$eM_V = 0,\ eM_U = M_U,\ UM_U \subseteq M_V,\ UM_V \subseteq M_U,\ VM_U \subseteq M_U,\ VM_V \subseteq M_V$$

Lema 3.3.2 *Si A, M y μ son como en el lema anterior, entonces para cualesquiera $x, y, z \in A$ se tiene:*

$$\begin{aligned}&8\mu(xz)\mu(y) + 8\mu(xy)\mu(z) + 8\mu(zy)\mu(x) - 2\omega(x)\mu(z)\mu(y) - 2\omega(z)\mu(x)\mu(y) - \\ &2\omega(x)\mu(y)\mu(z) - 2\omega(z)\mu(y)\mu(x) - 2\omega(y)\mu(x)\mu(z) - 2\omega(y)\mu(z)\mu(x) - \\ &2\omega(x)\mu(zy) - 2\omega(z)\mu(xy) - 2\omega(y)\mu(xz) = 0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

y además

$$\begin{aligned}&4\mu(x^2)\mu(y)+8\mu(xy)\mu(x)-2\omega(x)\mu(x)\mu(y)-2\omega(x)\mu(y)\mu(x)-\\&2\omega(y)\mu(x)^2-2\omega(x)\mu(xy)-\omega(y)\mu(x^2)=0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Demostración:

Si ponemos $a=x+y$ en (3.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}&4\mu(x^2)\mu(y)+8\mu(xy)\mu(x)+8\mu(xy)\mu(y)+4\mu(y^2)\mu(x)-2\omega(x)\mu(x)\mu(y)-\\&2\omega(x)\mu(y)\mu(x)-2\omega(x)\mu(y)^2-2\omega(y)\mu(x)^2-2\omega(y)\mu(x)\mu(y)-\\&2\omega(y)\mu(y)\mu(x)-2\omega(x)\mu(xy)-\omega(x)\mu(y^2)-\omega(y)\mu(x^2)-2\omega(y)\mu(xy)=0.\end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos x por $x+z$ en la relación de arriba se obtiene (3.16) y si hacemos $x=z$ en (3.16) se obtiene (3.17).□

Con estos dos lemas podemos demostrar el siguiente

Teorema 3.3.1 *Si A, M, y μ son como en los lemas anteriores entonces M es irreducible si y solamente si M es unidimensional.*

Demostración:

Notemos primero que $\widehat{A}$ es un álgebra de Jordan de dimensión finita y $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$ es un ideal de A que es nilpotente.

Supongamos que estamos en el caso particular en que $M_U=0$, entonces tenemos $M=M_V$ y $eM=0, UM=0$. Consideremos en este caso $L=\{m\in M=M_V/\ Vm=0\}$, claramente L es un A-submódulo de M, entonces si M es irreducible se tiene que $L=0$ o bien $L=M$. Si $L=M$ entonces $\mu\equiv 0$ lo cual es una contradicción. Si $L=0$ quiere decir que para cualquier $0\neq m\in M$ se tiene que existe $a_1\in V$ tal que $\mu(a_1)m\neq 0$, como $VM_V\subseteq M_V$ se tiene que existe $a_2\in V$ tal que $\mu(a_2)\mu(a_1)m\neq 0$. Continuando este proceso tendremos que para cualquier $n\in\mathbb{N}$ existe un subconjunto $\{a_n,a_{n-1},\ldots\ldots,a_2,a_1\}$ de elementos no nulos en V tales que

$$(\mu(a_n)(\cdots(\mu(a_2)(\mu(a_1)m))\cdots))\neq 0.$$

Pero esto último es una contradicción a la nilpotencia de $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$. Luego M_U no puede ser el espacio nulo.

Supongamos ahora que $M_V = 0$. En este caso $M = M_U$ y además $eM = M$, $UM = 0$. Consideremos en este caso $N = \{m \in M = M_U / \; Vm = 0\}$, claramente N es un A-submódulo de M, entonces si M es irreducible se tiene que $N = 0$ o bien $N = M$. Si $N = M$ entonces si $0 \neq m \in M$ se tiene que $\mu(e)m = \frac{1}{2}m$, $Um = 0$ y $Vm = 0$; luego $[m]$ es un A-submódulo de M no nulo luego $M = [m]$ de dimensión uno, en este caso la demostración terminaría aquí. Si $N = 0$ quiere decir que para cualquier $0 \neq m \in M$ se tiene que existe $a_1 \in V$ tal que $\mu(a_1)m \neq 0$, como $VM_U \subseteq M_U$ se tiene que existe $a_2 \in V$ tal que $\mu(a_2)\mu(a_1)m \neq 0$. Continuando este proceso tendremos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto $\{a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1\}$ de elementos no nulos en V tales que

$$(\mu(a_n)(\cdots(\mu(a_2)(\mu(a_1)m))\cdots)) \neq 0.$$

Pero esto último es una contradicción a la nilpotencia de $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$. Luego si $M_V = 0$ y M es irreducible, entonces M es unidimensional.

Supongamos entonces $M_U \neq 0$ y $M_V \neq 0$ en lo que sigue de esta prueba. Consideremos $R = \{m \in M_V / \; \mu(a)m = 0 \; \forall a \in U\}$. Si ponemos $x = e$, $y \in U$ y $z \in V$ en (3.16), se obtiene:

$$2\mu(y)\mu(z) + 8\mu(zy)\mu(e) - 2\mu(z)\mu(y) - 2\mu(zy) = 0. \tag{3.18}$$

Si evaluamos en $m \in R$ se tiene que $\mu(y)\mu(z)m = 0$, esto implica que $\mu(z)m \in R \quad \forall m \in M, \quad \forall z \in V$. Luego $eR = 0, \quad UR = 0, \quad VR \subseteq R$. Luego R es A-submódulo. Si suponemos que M es irreducible, entonces $R = M$ o bien $R = 0$. Notemos que $R \neq M$, pues si lo fuese $R = M_V = M$ y $M_U = 0$ lo cual contradice nuestra suposición. Entonces $R = 0$.

En este caso definamos ahora $R' = \{m \in M_U / \; \mu(a)m = 0, \; \forall a \in U\}$, evaluando $m \in R'$ en (3.18) se tiene que: $\mu(y)(\mu(z)m) = 0$ para cualquier $z \in V$ y para cualquier

$y \in U$, lo cual implica que V deja invariante a R'. De aquí deducimos que R' es un A-submódulo de M. Como M es irreducible se tiene que $R' = 0$ o bien $R' = M$. Notemos que $R' \neq M$, pues si lo fuera $M = M_U$ y $M_V = 0$, lo cual contradice nuestra suposición.

Entonces $R' = 0$. De esto se tiene que si $0 \neq m \in M_U$, entonces existe $a_1 \in U$ tal que $\mu(a_1)m \neq 0$ como $UM_U \subseteq M_V$ y como $R = 0$ se tiene que existe $a_2 \in U$ tal que $\mu(a_2)\mu(a_1)m \neq 0$. Continuando este proceso tendremos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto $\{a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1\}$ de elementos no nulos en U tales que

$$(\mu(a_n)(\cdots(\mu(a_2)(\mu(a_1)m))\cdots)) \neq 0,$$

pero esto último es una contradicción por nilpotencia de $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$.

Resumiendo, si M es irreducible $M = [m]$ con $\mu(e)m = (1/2)m$, y $\mu(a)m = 0$ $\forall a \in N = \mathrm{Ker}(\omega)$. $\square$

Estudiemos el caso en que A es una train-algebra de rango 4 asociativa en las potencias que satisface (3.10). Si x es un elemento de peso 1 sabemos que el siguiente es un elemento idempotente:

$$e_x = 3x - 3x^2 + x^3.$$

En este caso se tiene la siguiente descompocisión de Peirce relativa al idempotente e :

$$A = Ke \oplus U \oplus V$$

donde $U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/2ex = x\}$ y $V = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ex = x\}$, además tenemos las siguientes relaciones:

$$V^2 \subseteq V, \;\; UV \subseteq U, \;\; U^2 \subseteq V. \tag{3.19}$$

Consideremos la clase $\mathcal{E}$ de las train-algebras asociativas en las potencias de rango 4 que satisfacen (3.10) sobre el cuerpo K de característica distinta de 2 y 3. Sea $A \in \mathcal{E}$

y sea M un espacio de dimensión finita sobre K, y $\mu : A \to \mathrm{End}(M)$ representación de A en la clase $\mathcal{E}$ como definimos en el capítulo dos.

Lema 3.3.3 *Si A es una train-algebra de rango 4 asociativa en las potencias que satisface (3.10), M es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $\mu : A \to End(M)$ es una representación de A en la clase $\mathcal{E}$, entonces para cualquier $a \in A$ se cumplen las siguientes relaciones:*

$$2\mu(a)^3+\mu(a)\mu(a^2)+\mu(a^3)-6\omega(a)\mu(a)^2-3\omega(a)\mu(a^2)+6\omega(a)^2\mu(a)-\omega(a)^3I = 0 \quad (3.20)$$

$$2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) = 4\mu(a^2)\mu(a) \quad (3.21)$$

$$4\mu(a^2)\mu(a) - 6\omega(a)\mu(a)^2 - 3\omega(a)\mu(a^2) + 6\omega(a)^2\mu(a) - \omega(a)^3I = 0. \quad (3.22)$$

Demostración:

Calculando las potencias de $(a + m)$ se obtiene:

$$(a + m)^2 = a^2 + 2\mu(a)m$$

$$(a + m)^3 = a^3 + 2\mu(a)^2m + \mu(a^2)m$$

$$(a + m)^4 = a^4 + 2\mu(a)^3m + \mu(a)\mu(a^2)m + \mu(a^3)m.$$

Como $\widehat{A}$, es un elemento de $\mathcal{E}$ se tiene que cualquier elemento $(a + m) \in \widehat{A}$ satisface (3.10). Reemplazando x por $a + m$ en (3.10) se obtiene (3.20).

Ahora bien, como $\widehat{A}$ es asociativa en las potencias, en particular en $\widehat{A}$ se satisface:

$$(a + m)^4 = (a + m)^2(a + m)^2,$$

lo cual implica (3.21). Reemplazando (3.21) en (3.20) se obtiene (3.22).□

Observación 3.3.2 *Como en el caso anterior notamos que la demostración de nuestro lema solo necesita reemplazar x por $a+m$ en (3.10), por lo tanto, recíprocamente, la relación (3.20) implica que $\widehat{A}$ satisface (3.10) y la relación (3.21) implica que $\widehat{A}$ satisface $x^4 = x^2x^2$. Luego si K tiene característica distinta de 2, de 3 y de 5 tendríamos que $\widehat{A}$ es asociativa en las potencias.*

Observemos que como $M \subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$ se tiene que $M = M_V \oplus M_U$, donde $M_U = \{x \in M/\ 2\mu(e)x = x\}$ y $M_V = \{x \in M/\ \mu(e)x = x\}$, además de las relaciones que se dieron en (3.19) se obtiene claramente que:

$$eM_V = M_V,\ eM_U = M_U,\ UM_U \subseteq M_V,$$

$$UM_V \subseteq M_U,\ VM_U \subseteq M_U,\ VM_V \subseteq M_V.$$

Lema 3.3.4 *Si A, M y μ son como en el lema anterior, entonces para cualesquiera $x, y, z \in A$ se tiene:*

$$\begin{aligned}&8\mu(xz)\mu(y) + 8\mu(xy)\mu(z) + 8\mu(zy)\mu(x) - 6\omega(x)\mu(z)\mu(y) - 6\omega(z)\mu(x)\mu(y) - \\ &6\omega(x)\mu(y)\mu(z) - 6\omega(z)\mu(y)\mu(x) - 6\omega(y)\mu(x)\mu(z) - 6\omega(y)\mu(z)\mu(x) - \\ &6\omega(x)\mu(zy) - 6\omega(z)\mu(xy) - 6\omega(y)\mu(xz) + 12\omega(xz)\mu(y) + 12\omega(xy)\mu(z) \\ &+12\mu(zy)\mu(x) - 6\omega(xyz)I = 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Demostración:

Si ponemos $a = x + y$ en (3.22) se obtiene:

$$\begin{aligned}&4\mu(x^2)\mu(y) + 8\mu(xy)\mu(x) + 8\mu(xy)\mu(y) + 4\mu(y^2)\mu(x) - 6\omega(x)\mu(x)\mu(y) - \\ &6\omega(x)\mu(y)\mu(x) - 6\omega(x)\mu(y)^2 - 6\omega(y)\mu(x)^2 - 6\omega(y)\mu(x)\mu(y) - 6\omega(y)\mu(y)\mu(x) \\ &-6\omega(x)\mu(xy) - 3\omega(x)\mu(y^2) - 3\omega(y)\mu(x^2) - 6\omega(y)\mu(xy) + 6\omega(x^2)\mu(y) + \\ &12\omega(xy)\mu(x) + 12\omega(xy)\mu(y) + 6\omega(y)^2\mu(x) - 3\omega(x^2y)I - 3\omega(xy^2)I = 0\end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos x por $x + z$ en la relación de arriba se obtiene (3.23).□

Con estos dos lemas podemos demostrar el siguiente

Teorema 3.3.2 *Si A, M, y μ son como en los lemas anteriores entonces M es irreducible si y solamente si M es unidimensional.*

Demostración:

(La demostración es similar a la demostración del Teorema 3.3.1, cambiando algunos nombres y algunas relaciones, de modo que en este caso no daremos todos los detalles y nos referiremos a ésta cuando sea necesario.) Notemos primero que $\widehat{A}$ es un álgebra de Jordan de dimensión finita y $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$ es un ideal de A que es nilpotente. Al igual que en la demostración del Teorema 3.3.1 esta nilpotencia implica el teorema trivialmente cuando $M_U = 0$ o bien $M_V = 0$, de modo que en lo que sigue supondremos $M_V \neq 0$ y $M_U \neq 0$.

Consideremos $R = \{m \in M_V / \ \mu(a)m = 0 \ \forall a \in U\}$. Si ponemos $x = e, \ y \in U$ y $z \in V$ en (3.23) se obtiene:

$$4\mu(z)\mu(y) + 2\mu(y)\mu(z) + 4\mu(zy)\mu(e) - 3\mu(z)\mu(y) - 3\mu(y)\mu(z) - 3\mu(zy) = 0. \quad (3.24)$$

Si evaluamos $m \in R$ en la relación anterior se tiene que $\mu(y)\mu(z)m = 0$, esto implica que

$$\mu(z)m \in R \ \ \forall m \in M, \ \ \forall z \in V, \ \text{ luego}$$

$$eR = R, \ \ UR = 0, \ \ VR \subseteq R, \quad \text{luego } R \text{ es } A\text{-submódulo.}$$

Si suponemos que M es irreducible entonces $R = M$ o bien $R = 0$. Notemos que $R \neq M$, pues si lo fuese $R = M_V = M$ y $M_U = 0$ lo cual contradice nuestra suposición. Entonces tenemos $R = 0$. En este caso definamos ahora $R' = \{m \in M_U / \ \mu(a)m = 0, \ \forall a \in U\}$, evaluando $m \in R'$ en (3.24) se tiene que: $\mu(y)(\mu(z)m) = 0$ para cualquier $z \in V$ y para cualquier $y \in U$, lo cual implica que V deja invariante a R', entonces de aquí deducimos que R' es un A-submódulo de M. Como M es irreducible se tiene que $R' = 0$ o bien $R' = M$. Notemos que $R' \neq M$, pues si lo fuera $M = M_U$ y $M_V = 0$ lo cual contradice nuestra suposición.

Entonces $R' = 0$. De esto se tiene que si $0 \neq m \in M_U$ entonces existe $a_1 \in U$ tal que $\mu(a_1)m \neq 0$ como $UM_U \subseteq M_V$ y como $R = 0$ se tiene que existe $a_2 \in U$ tal que $\mu(a_2)\mu(a_1)m \neq 0$, continuando este proceso, al igual que en la demostración del Teorema 3.3.1, tendremos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto $\{a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1\}$ de elementos no nulos en U tales que

$$(\mu(a_n)(\cdots(\mu(a_2)(\mu(a_1)m))\cdots)) \neq 0,$$

pero esto último es una contradicción por nilpotencia de $\mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$.

Resumiendo, si M es irreducible $M = [m]$ con $\mu(e)m = \frac{1}{2}m$, y $\mu(a)m = 0$ $\forall a \in N = \mathrm{Ker}(\omega)$. $\square$

Consideremos ahora la clase $\mathcal{F}$ de las train-algebras asociativas en las potencias de rango 4 que satisfacen (3.11) sobre el cuerpo K de característica distinta de 2 y 3, sea $A \in \mathcal{F}$ y sea M un espacio de dimensión finita sobre K, y $\mu : A \to \mathrm{End}(M)$ una representación de A en la clase $\mathcal{F}$.

Si $A \in \mathcal{F}$, entonces existe un idempotente $e \in A$, a saber, si x es de peso 1 entonces: $e_x = 3x^2 - 2x^3$ es idempotente de peso 1, como vimos en la Proposición 3.2.3. Además si $e \in A$ es un idempotente tenemos la siguiente descomposición de Peirce con respecto a e :

$$A = Ke \oplus U \oplus V_0 \oplus V_1, \text{ donde}$$

$$U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/2ex = x\} \text{ y } V_\lambda = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ex = \lambda x\}, \ \lambda \in \{0, 1\}.$$

Además tenemos las siguientes relaciones:

$$V_0^2 = V_1^2 = V_0V_1 = 0, \ \ UV_0 \subseteq U \oplus V_1, \ \ UV_1 \subseteq U \oplus V_0, \ \ U^2 \subseteq V_0 \oplus V_1. \tag{3.25}$$

Proposición 3.3.1 *Si A es una train-algebra de rango 4 asociativa en las potencias que satisface (3.11), M es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $\mu : A \to$ End(M) es una representación de A en la clase $\mathcal{F}$, entonces para cualquier $a \in A$ se cumplen las siguientes relaciones:*

$$2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) - 4\omega(a)\mu(a)^2 - 2\omega(a)\mu(a^2) + 2\omega(a)^2\mu(a) = 0, \tag{3.26}$$

$$2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) = 4\mu(a^2)\mu(a), \tag{3.27}$$

$$2\mu(a^2)\mu(a) - 2\omega(a)\mu(a)^2 - \omega(a)\mu(a^2) + \omega(a)^2\mu(a) = 0, \tag{3.28}$$

$$Y particularmente se cumple : \mu(a^2)\mu(a) = 0 \quad \forall a \in Ker(\omega). \tag{3.29}$$

Demostración:

Calculando las potencias de $(a+m)$ se obtiene:

$$(a+m)^2 = a^2 + 2\mu(a)m,$$

$$(a+m)^3 = a^3 + 2\mu(a)^e m + \mu(a^2)m,$$

$$(a+m)^4 = a^4 + 2\mu(a)^3 m + \mu(a)\mu(a^2)m + \mu(a^3)m.$$

Como $\widehat{A}$ es un elemento de $\mathcal{F}$ se tiene que cualquier elemento $(a+m) \in \widehat{A}$ satisface (3.11). Reemplazando x por $a+m$ en (3.11) se obtiene (3.26). Ahora bien, como $\widehat{A}$ es asociativa en las potencias, en particular en $\widehat{A}$ se satisface:

$$(a+m)^4 = (a+m)^2(a+m)^2,$$

lo cual implica (3.27). Reemplazando (3.27) en (3.26) se obtiene (3.28).

Ahora reemplazando x en (3.28) por $a \in N = \mathrm{Ker}(\omega)$ se obtiene (3.29). $\square$

En este caso se aplica el mismo comentario que se hizo el Observación 3.3.2.

Observemos que como $M \subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{\omega})$ se tiene que

$$M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_U,$$

donde $M_U = \{x \in M /\ 2\mu(e)x = x\}$ y $M_\lambda = \{x \in M /\ \mu(e)x = \lambda x\}$, con $\lambda \in \{0,1\}$ a partir de las relaciones que se dieron en (3.25) se obtiene claramente que:

$$eM_0 = 0,\ eM_U = M_U,\ eM_1 = M_1,\ UM_U \subseteq M_0 \oplus M_1,\ UM_0 \subseteq M_U \oplus M_1,$$

$$UM_1 \subseteq M_U \oplus M_0,\ V_0M_0 = 0,\ V_0M_1 = 0,\ V_0M_U \subseteq M_U \oplus M_1,$$

$$V_1M_0 = 0,\ V_1M_1 = 0,\ V_1M_U \subseteq M_U \oplus M_0.$$

Proposición 3.3.2 *Si A, M y μ son como en el lema anterior, entonces para cualesquiera $x, y, z \in A$ se tiene:*

$$\begin{array}{l} 4\mu(xz)\mu(y) + 4\mu(xy)\mu(z) + 4\mu(zy)\mu(x) - 2\omega(x)\mu(z)\mu(y) - 2\omega(z)\mu(x)\mu(y) - \\ 2\omega(x)\mu(y)\mu(z) - 2\omega(z)\mu(y)\mu(x) - 2\omega(y)\mu(x)\mu(z) - 2\omega(y)\mu(z)\mu(x) - \\ 2\omega(x)\mu(zy) - 2\omega(z)\mu(xy) - 2\omega(y)\mu(xz) + 2\omega(xz)\mu(y) + 2\omega(xy)\mu(z) \\ +2\omega(zy)\mu(z) = 0. \end{array} \tag{3.30}$$

Además satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{l} 2\mu(x^2)\mu(y) + 4\mu(xy)\mu(x) - 2\omega(x)\mu(x)\mu(y) - 2\omega(x)\mu(y)\mu(x) - 2\omega(y)\mu(x)^2. \\ -2\omega(x)\mu(xy) - \omega(y)\mu(x^2) + 2\omega(xy)\mu(x) + 2\omega(xy)\mu(x) + \omega(x^2)\mu(y) = 0, \end{array} \tag{3.31}$$

$$2\mu(v)\mu(e) = \mu(v) \ \ \forall v \in V_1, \tag{3.32}$$

$$\mu(v)^2 = 0 \ \ \forall v \in V_1, \tag{3.33}$$

$$2\mu(z)\mu(e) = \mu(z) \ \ \forall z \in V_0, \tag{3.34}$$

$$\mu(z)^2 = 0 \ \ \forall z \in V_0. \tag{3.35}$$

Demostración:

Si ponemos $a = x + y$ en (3.28) resulta:

$$\begin{array}{l} 4\mu(xy)\mu(x) + 2\mu(y^2)\mu(x) + 2\mu(x^2)\mu(y) + 4\mu(xy)\mu(y) - 2\omega(x)\mu(x)\mu(y) \\ -2\omega(x)\mu(y)\mu(x) - 2\omega(x)\mu(y)^2 - 2\omega(y)\mu(x)^2 - 2\omega(y)\mu(x)\mu(y) - \\ 2\omega(y)\mu(y)\mu(x) - 2\omega(x)\mu(xy) - \omega(x)\mu(y^2) - \omega(y)\mu(x^2) - 2\omega(y)\mu(xy) \\ +2\omega(xy)\mu(x) + \omega(y^2)\mu(x) + \omega(x)^2\mu(y) + 2\omega(xy)\mu(y) = 0. \end{array} \tag{3.36}$$

Si hacemos ahora $x = x + z$ en la relación anterior se obtiene (3.30) y si en (3.30) hacemos $z = x$ tenemos (3.31).

Ahora si en (3.31) ponemos $x = e$ y $y = v \in V_1$ obtenemos (3.32). Y si en vez de eso ponemos $x = v \in V_1$ y $y = e$ también en (3.31) obtenemos (3.33). Del mismo modo se obtienen las relaciones (3.34) y (3.35) para V_0. $\square$

Definición 3.3.1 *Diremos que la representación μ es de dimensión r si M es un espacio vectorial de dimensión r. Luego $\mu(a)$ puede pensarse como una matriz de $r \times r$.*

En lo que sigue damos un ejemplo de una representación de dimensión 3 para álgebras que satisfacen (3.11). Hay subespacios invariantes del módulo de dimensiones uno, dos y tres; donde sólo el de dimensión uno es irreducible.

Ejemplo 3.3.1 *Consideremos el álgebra A del ejemplo 2.2.2: Sea A un álgebra conmutativa de dimensión 4 sobre el cuerpo de los números reales con base $\{e, u, v, z\}$ con tabla de multiplicación $e^2 = e$, $2eu = u$, $ev = v$, $uv = z$ y todos los otros productos nulos. Se verifica fácilmente que $x^4 = x^2x^2 \quad \forall x \in A$, luego se tiene que A es asociativa en las potencias. Además satisface la identidad $x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2 = 0$. Si $a = a_1e + a_2u + a_3v + a_4z$ es un elemento de A, definamos la función μ por*

$$\mu(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que μ es una representación 3-dimensional de A. En efecto: Se tiene que

$$\mu(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1a_2 + 2a_1a_3 \\ 0 & a_1^2 & a_1a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{y que} \quad \mu(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^3 \end{pmatrix}.$$

Luego $2\mu(a)^3 + \mu(a)\mu(a^2) + \mu(a^3) - 4\omega(a)\mu(a)^2 - 2\omega(a)\mu(a^2) + 2\omega(a)^2\mu(a) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^2(a_2 + a_3) \\ 0 & 2a_1^3 & \frac{7}{2}a_1^2a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}a_1^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^2(a_2 + a_3) \\ 0 & a_1^3 & \frac{3}{2}a_1^2a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}a_1^3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1^2a_2 + 3a_1^2a_3 \\ 0 & a_1^3 & a_1^2a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^3 \end{pmatrix} - 4a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1(a_2 + a_3) \\ 0 & a_1^2 & \frac{3}{2}a_1a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}a_1^2 \end{pmatrix}$$

$$-2a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1a_2 + 2a_1a_3 \\ 0 & a_1^2 & a_1a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1^2 \end{pmatrix} + 2a_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}a_1 \end{pmatrix} = 0$$

Además

$$2\mu(a)^3+\mu(a)\mu(a^2)+\mu(a^3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a_1^2a_2+4a_1^2a_3 \\ 0 & 4a_1^3 & 6a_1^2a_2 \\ 0 & 0 & a_1^3 \end{pmatrix}=4\mu(a^2)\mu(a)$$

Luego μ es una representación de A en la clase $\mathcal{F}$. Sea $S\neq 0$ un subespacio invariante de M. Sea $w=(x,y,t)\in S$. Supongamos que $t\neq 0$. Como $\mu(a)(w)\in S$, $\forall a\in A$, se tiene que $(t(a_2+a_3),a_1y+a_2t,\frac{1}{2}a_1t)$ es un elemento de S para cualquier valor real de a_1,a_2,a_3,a_4. Tomemos el elemento $a=v+z$, $(a_1=0=a_2,a_3=1)$ entonces $t(1,0,0)=(t,0,0)\in S$. Luego $(1,0,0)$ es un elemento de S. Sea ahora $a=u-v+z$, $(a_1=0,a_2=1,a_3=-1)$ entonces $t(0,1,0)=(0,t,0)\in S$. Luego $(0,1,0)$ es un elemento de S. Finalmente, sea $a=2e+z$, $(a_1=2,a_2=0=a_3)$ entonces $(0,2y,t)=y(0,2,1)+t(0,0,1)\ \in S$. Luego $(0,0,1)$ es un elemento de S. luego los vectores, $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ son elementos de S y ellos son claramente linealmente independientes. Por lo tanto $dim(S)=3$ y $S=M$. Si $t=0$, entonces $\mu(a)(w)=(0,a_1y,0)\ \in S$. Luego $\{w=(x,y,0)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\}$ es subespacio invariante de dimensión 2. Claramente se observa que $<(0,1,0)>$ es tambien un subespacio invariante contenido en el anterior e irreducible. $\square$

En este caso, no hemos podido obtener un resultado como el de los casos anteriores. Creemos que es debido a que no pudimos probar que $\mathrm{Ker}(\omega)$ es nilpotente, pero pensamos que incluso en ese caso no es tan simple encontrar los módulos irreducibles, debido a lo complejas de las relaciones entre U, V_0 y V_1 con M_0, M_1 y M_U. Además éste es el único caso de los tres que no es de Jordan, tal vez esto juege en contra de nuestros propósitos, sin embargo, tenemos condiciones muy interesantes paa μ (Prop. 3.3.2) que nos llevan a pensar que las relaciones antes mencionadas no son tan cahoticas y que necesariamente los módulos irreducibles no pueden tener dimensiones demasiado grandes.

3.4 Train-algebras que satisfacen identidades polinomiales de grado 3 o 4

En esta seccion estudiamos train-algebras de rango 3 que además satisfacen identidades polinomiales.

Las train-algebras de rango tres no forman una variedad, de hecho, por ejemplo podemos considerar una train-algebra de rango tres con ecuación train

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0$$

con $\gamma \neq \frac{1}{2}$, como vimos en el Teorema 2.3.1 esta necesariamente tiene un idempotente no nulo, sin embargo la subálgebra $\mathrm{Ker}(\omega)$ no tiene idempotentes no nulo, luego no es una train-algebra de rango tres, y en una variedad toda subalgebra de un elemento de la variedad es también un elemento de la variedad. Por esta razón quisieramos relacionarlas con algunas variedades de álgebras. Obtendremos resultados que asocian a las train-algebras con las álgebras asociativas y las álgebras de Jordan que si forman variedades en cada caso por separado. En este capítulo K será un cuerpo de característica distinta de 2 y 3, y A será una train-algebra de rango 3 sobre K con ecuación train

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega^2(x)x = 0 \tag{3.37}$$

con γ un escalar distinto de $1/2$. La descomposición de Peirce asociada al idempotente e es la siguiente:

$$A = Ke \oplus U \oplus V \qquad \text{con} \qquad U^2 \subseteq V, UV \subseteq V, V^2 = 0 \tag{3.38}$$

donde $U = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \quad 2ex = x\}$ y $V = \{x \in \mathrm{Ker}(\omega)/ \quad ex = \gamma x\}$.

Según el trabajo de Hentzel y Piacentini-Cattaneo [11] existe una única familia de identidades de grado 3 que no son consecuencia de la ley conmutativa, a saber:

$$\alpha(xy)z + \beta(yz)x + \delta(zx)y = 0. \tag{3.39}$$

Teorema 3.1 *Toda train-algebra de rango 3 que además satisface una identidad de grado 3 es un álgebra asociativa.*

Demostración:

Consideremos una train-algebra A de rango 3 de ecuación train (3.37) sobre un cuerpo K con idempotente e y descomposición de Peirce como en (3.38). Recordemos que $V \neq 0$. Supongamos que A satisface una de las identidades de (3.39), para ciertos α , β, δ en K. Si ponemos $x = y = z = e$ en (3.39) tenemos que

$$\alpha + \beta + \delta = 0.$$

Si $\alpha = 0$ o bien $\beta = 0$ o bien $\delta = 0$ se obtiene la asociatividad de inmediato, y el teorema quedaría demostrado en ese caso.

Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\delta \neq 0$, en este caso supongamos que $U \neq 0$, ahora tomando $x = y = e$ y $0 \neq z = u \in U$ en (3.39) se tiene que $\frac{1}{2}\alpha u + \frac{1}{4}\beta u + \frac{1}{4}\delta u = 0$ y luego

$$2\alpha + \beta + \delta = 0$$

que junto a $\alpha + \beta + \delta = 0$ implica que $\alpha = 0$. Lo cual es una contradicción. Entonces tenemos que $U = 0$. Por otra parte, como $V \neq 0$ tomemos $v \in V$, $v \neq 0$. Tomando ahora $x = e = y$ y $z = v \in V$ en (3.39) obtenemos que $\alpha\gamma v + (\beta + \delta)\gamma^2 v = 0$. Entonces,

$$\alpha\gamma(1 - \gamma) = 0.$$

Como $\alpha \neq 0$ tenemos que $\gamma = 0$ o bien $\gamma = 1$.

En el caso en que $\gamma = 0$, y como $U = 0$ se tiene que si $x = \lambda e + v$, $y = \kappa e + v'$ y $z = \rho e + v''$ entonces

$$x(yz) = (xy)z = \lambda\kappa\rho e.$$

Por otro lado en el caso en que $\gamma = 1$ y escribiendo x, y y z como antes se tiene:

$$x(yz) = (xy)z = \lambda\kappa\rho e + \lambda\kappa v'' + \lambda\rho v' + \kappa\rho v.$$

Es decir, en ambos casos se tiene que A es asociativa. $\square$

Un resultado de Carini, Hentzel y Piacenttini-Catteneo [3] dice lo siguiente:

Si A es un álgebra no asociativa sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y de 3, que satisface una identidad polinomial de grado 4 que no es implicada por la conmutatividad, entonce A satisface una de las siguientes identidades:

$$\alpha x^2x^2 + \beta x^4 = 0\ , \tag{3.40}$$

$$\beta\{(yx^2)x - ((yx)x)x\} + \delta\{yx^3 - ((yx)x)x\} = 0\ , \tag{3.41}$$

$$\alpha\{(xy)^2 - x^2y^2\} + \beta\{((xy)x)y + ((xy)y)x - (y^2x)x - (x^2y)y\} = 0\ , \tag{3.42}$$

$$((xy)z)t - ((xy)t)z + ((yt)x)z - ((yt)z)x + ((yz)t)x - ((yz)x)t = 0\ . \tag{3.43}$$

donde α, β y δ son parámetros en K.

Estudiaremos cada una de las relaciones de arriba por separado y luego los resultados aislados los uniremos en un sólo teorema.

Lema 3.1 *Si (A, ω) es un álgebra ponderada conmutativa sobre un cuerpo de característica distinta de 2, de 3 y de 5 que además satisface (3.40), entonces A es un álgebra de Jordan.*

Demostración:

Considerar x en A de peso 1, evaluando en (3.40) y tomar ω a ambos lados de la igualdad se tiene que: $\alpha + \beta = 0$. Luego la ecuación en cuestión es equivalente a $x^2x^2 = x^4$, que como sabemos (ver Schafer[20],pag. 130) es un relación equivente a asociatividad en las potencias. Por el Teorema de Ouattara (Teorema 2.3.2) se tiene que A es un álgebra de Jordan. $\square$

Estudiemos ahora el caso en que A satisface (3.41).

Lema 3.2 *Sea A una train-algebra de rango 3 sobre un cuerpo K de característica distinta de 2 y de 3 que satisface (3.41). Entonces A es un álgebra de Jordan o bien $U = 0$ y además $\beta\gamma + \delta(1+\gamma) = 0$, en este caso A satisface $(xy)^2 = x^2y^2$.*

Demostración:

Como $V \neq 0$ existe $v \in V$, $v \neq 0$. Poniendo $x = e$ y $y = v \in V$ en (3.41) obtenemos que

$$\gamma(1-\gamma)[\beta\gamma + \delta(1+\gamma)] = 0.$$

Si $\beta\gamma + \delta(1+\gamma) \neq 0$, entonces $\gamma = 0 \quad$ o $\quad \gamma = 1$, y por el teorema de Ouattara (Teorema 2.3.2) se tiene que A es un álgebra de Jordan .

Si A no es un álgebra de Jordan, es decir, $\gamma \neq 0 \quad$ y $\quad \gamma \neq 1$, entonces

$$\beta\gamma + \delta(1+\gamma) = 0.$$

Supongamos en este caso que $U \neq 0$. Tomemos ahora $x = e$ y $y = u \in U - \{0\}$ y reemplacemos en (3.41) , se tiene que $(\beta + 3\delta)u = 0$. y por tanto

$$\beta + 3\delta = 0.$$

Restando $[\beta\gamma + \delta(1+\gamma)] = 0$ a la última ecuación multiplicada por γ y teniendo en cuenta que $\gamma \neq \frac{1}{2}$ obtenemos que $\delta = 0$ y $\beta = 0$, una contradicción. Si A no es un álgebra de Jordan entonces $U = 0$ y $A = Ke \oplus V$. Tomando $x = \lambda e + v$ y $y = \kappa e + v'$ se tiene que: $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$. $\square$

Nota 3.1 *Para que A no sea un álgebra de Jordan, necesariamente $U = 0$ y entonces resulta $A = Ke \oplus V$ con $V^2 = 0$, la cual tiene una estructura bastante pobre. En este caso la identidad (3.41) se transforma en:*

$$-\{(yx^2)x - ((yx)x)x\} + \gamma\{yx^3 - (yx^2)x\} = 0.$$

Nota 3.2 *En particular si* $\beta + 3\delta = 0$, *tenemos que* A *es un álgebra de Jordan y la ecuación (3.41) se convierte en :*

$$yx^3 + 2((yx)x)x - 3(yx^2)x = 0,$$

relación que es una consecuencia de la identidad de Jordan. El lema anterior muestra que en el caso de train-algebras de rango 3 *se tiene el recíproco.*

Nota 3.3 *En el caso en que* $\beta + 3\delta \neq 0$ *los elementos de* A *satisfacen* $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$ *. Esta identidad no implica ni es contradictoria con la identidad de Jordan. Por ejemplo, consideremos el álgebra conmutativa real* A *con base* $\{e, v\}$ *y tabla de multiplicación* $e^2 = e$, $ev = ve = v$ *y todos los otros productos nulos. Entonces* A *es una train-algebras de rango* 3 *que satisfacen (3.41) para cualesquiera* β *y* δ *no nulos y que además es un álgebra de Jordan. Consideremos ahora el siguiente ejemplo, nuevamente* A *es un álgebra conmutativa real con base* $\{e, v\}$ *y tabla de multiplicación* $e^2 = e$ *y* $ev = ve = \frac{1}{3}v$ *y todos los otros productos nulos. Entonces* A *es una train-algebra de rango* 3 *que satisface (3.41) para* $\beta = 4$ *y* $\delta = -1$, *pero* A *no es un álgebra de Jordan.*

Estudiemos ahora el caso en que A satisface la identidad (3.42).

Lema 3.3 *Sea* A *una train-algebra de rango* 3 *sobre un cuerpo* K *de característica distinta de* 2 *y de* 3 *que satisface (3.42). Si* $\beta \neq 0$, *entonces* A *es un álgebra de Jordan. Si* $\beta = 0$, *entonces* A *satisface* $(xy)^2 = x^2y^2$.

Demostración:

Como $V \neq 0$, tomemos $v \in V - \{0\}$ y $\lambda \in K$ no nulo y tal que $\lambda^2 \neq -1$. Reemplazando, $x = \lambda e + v$ y $y = e + \lambda v$ en (3.42), se obtiene:

$$\beta\{\lambda\gamma^2(1 + \lambda^2)(1 - \gamma)\} = 0.$$

Si $\beta \neq 0$ entonces como $\lambda \neq 0$ y como $1 + \lambda^2 \neq 0$, se tiene que $\gamma = 0$ o bien $\gamma = 1$ lo cual implica, por el resultado de Ouattara (Teorema 2.3.2) que A es un álgebra de Jordan. En el caso en que $\beta = 0$, se tiene que A satisface $\alpha\{(xy)^2 - x^2y^2\} = 0$, lo cual implica que A satisface $(xy)^2 = x^2y^2$. $\square$

Nota 3.4 *La identidad $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$, tal como en el caso anterior, no implica ni es contradictoria con la identidad de Jordan. Por ejemplo, consideremos el álgebra real conmutativa A con base $\{e, u, v\}$ y tabla de multiplicación $e^2 = e$, $2eu = 2ue = u$, $ev = ve = v$ y todos los otros productos nulos, A es una train-algebra de rango 3 que satisface*

$$x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x^2)x = 0.$$

Ésta además es un álgebra de Jordan que satisface $(xy)^2 = x^2y^2$. Si consideramos, ahora, el álgebra real conmutativa A con base $\{e, u, v\}$ y tabla de multiplicación $e^2 = e$, $2eu = 2ue = u$, $ev = ve = 2v$ y todos los otros productos nulos, entonces A es una train-algebra de rango 3 que satisface

$$x^3 - 3\omega(x)x^2 + 2\omega(x^2)x = 0,$$

que no es un álgebra de Jordan y que cumple con $(xy)^2 = x^2y^2$.

Finalmente consideremos las train-algebras de rango 3 que satisfacen (3.43), para luego fusionar estos lemas en un solo teorema a modo de resumen.

Lema 3.4 *Si A una train-algebra de rango 3 sobre un cuerpo de característica distinta de 2 y de 3 que satisface la relación (3.43), entonces A es un álgebra de Jordan.*

Demostración:

Supongamos que A es como en el Lema. Consideremos $\lambda \in K - \{0\}$ y $v \in V - \{0\}$ Reemplazando $x = y = e$, $z = \lambda e + v$ y $t = e + \lambda v$ en (3.43) se tiene que

$$\lambda^2\gamma^2(\gamma - 1) = 0.$$

Como $\lambda \neq 0$ se tiene por el resultado de Ouattara (Teorema 2.3.2) que A es un álgebra de Jordan.$\square$

Las demostraciones de estos cuatro lemas son la prueba del

Teorema 3.2 *Si A es una train-algebra de rango 3 que satisface una identidad polinomial de grado 4, entonces A es un álgebra de Jordan o satisface $(xy)^2 - x^2y^2 = 0$.*

Capítulo 4

Problemas Abiertos

A modo de epílogo presentamos algunas preguntas que podemos (y debemos) hacernos naturalmente una vez leída esta tesis, o la literatura, pero siguiendo esta línea de trabajo, queremos hacerlo aquí para lograr tal vez que alguien nos ayude a responder.

Una primera pregunta que nos surge es un cuestionamiento que dejamos planteado en la introducción, ¿Cuál es la variedad de álgebras generada por las train-algebras de rango 3? Esta pregunta es crucial en la teoría y representa un desafío enorme tratar de responderla. Creemos que nuestra sección acerca de identidades polinomiales y train-algebras de rango tres, puede dar algunas luces al respecto, pero pensamos que debemos entender muy bien algunas cosas antes de dar respuesta a esta pregunta.

Una segunda pregunta es ¿Cuáles son los módulos irreducibles para train-algebras de rango 4 en general, no solamente asociativa en las potencias? Esta pregunta es muy natural, pero creemos que necesitaremos un tiempo importante en responderla, ya que sólo el caso de las train-algebras asociativa en las potencias nos tomó mucho tiempo.

Otras preguntas son ¿Cuáles son los módulos irreducibles sobre train-algebras que satisfacen $x^4 - 2\omega(x)x^3 + \omega(x)^2x^2$? ¿ Cuál es la envolvente universal de las train-algebras de rango 3 y la envolvente universal de las train-algebras de rango 4 asociativa en las potencias? ¿Será de dimensión finita como las de Jordan? ¿o Noetherianas como las de Lie? Este es el paso siguiente y obligatorio luego de leer nuestra sección acerca de train representaciones.

Una pregunta muy interesante y que nos apasiona es ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la existencia de idempotentes en train-algebra de rango n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Esperamos prontamente responder a estas preguntas, o leer algún artículo o artículos que nos ayuden a responderlas.

Capítulo 5

Bibliografía

Bibliografía

[1] R. Andrade, A. Labra. 1996. *On a class of baric algebras,* Linear Alg. and its Applic. 245,49-53.

[2] J. Bernard y col. 1994. *Bernstein representations,* Proceedings of the 3rd Int. Conference on non associative algebras. (S. González, Ed.) Kluwer Academic Publisher, 39-45.

[3] L. Carini y col. 1988. *Degree four Identities not implied by commutativity,* Comm. in Algebra, 16 (2) 339-357.

[4] I. Correa, A. Labra. 1996. *Bernstein algebras satisfying a polynomial identity,* Nova J. of Math., Game Theory, and Algebra. Vol 5. N°3 277-286.

[5] R. Costa. 1991. *On train algebras of rank 3,* Linear Algebra and its Applications 148:1-12.

[6] R. Costa, A. Suazo. 1996. *The multipication algebra of a train algebra of rank* 3, Nova J. of Math. Game Theory and Alg. vol 5. 287-298.

[7] I. M. Etheringhton. 1939. *Genetic Algebras,* Proc. Roy. Soc. Edinb. 59, 22242-258.

[8] I. M. Etherington. 1940. *Commutative train algebras of rank 2 and 3,* J. London Math. Soc. 15, 136-149.

[9] H.Guzzo Jr. 1994. *The Peirce descomposition for conmutative train algebras,* Comm. Alg., 22(14): 5745-5757.

[10] H. Guzzo Jr, P. Vicente. 1997. *Train algebras of rank n which are Bernstein or power associative algebras,* Nova J. of Math. Game Theory and Alg. Vol. 6 n 2/3, 103-112.

[11] I.R.Hentzel, G.M Piacentini-Cattaneo. 1984. *Degree three identities,* Comm.in Alg. 19, (12)2349-2399.

[12] P. Holgate. 1975. *Genetic algebras satisfying Berstein's stationarity principle,* J. London Math. Soc. (2),9: 613-623.

[13] N. Jacobson. 1954. *Structure of alternative and Jordan bimodules,* Osaka Math. Journal. 6. 1-71.

[14] N. Jacobson. 1962. *Lie Algebras,* Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 10. John Wiley & Sons, USA.

[15] N. Jacobson. 1968. *Structure and representations of Jordan algebras,* Amer. Math. Soc. Colloc. Publ Vol 39.

[16] Y.I. Lyubich. 1971. *Basic concepts and theorem of the evolutionary genetics of free populations,* Russian Mathematical Surveys, 26(5):51-123.

[17] J. López-Sánchez, E. Rodríguez Santa Maria. 1996. *On train algebras of rank 4,* Comm. in Alg. 24 (14) 4439-4445.

[18] J. M. Osborn. 1972. *Varieties of Algebras,* Advances in Math. 8, 163-369.

[19] M. Ouattara. 1991. *Sur les T-Algebres de Jordan,* Linear Algebra and its Applications 144: 11-21.

[20] R. Schafer. 1966. *Introduction to nonassociative algebras,* Academic Press New York, London.

[21] A.Wörz-Busekros. 1980. *Algebras in Genetics,* Lecture Notes in Biomathematics, vol. tg36, Springer-Verlag, New York, 1980.

[22] K. A. Zhevlakov y col. 1992. *Rings that are nearly associative,* Academic Press N. York, London.