UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Economía y Negocios
Escuela de Economía y Administración

En Busca de una Tasa de Impuesto Maximizadora del Bienestar Social

Seminario de Titulo
Ingeniero Comercial mención Economía

Profesor Guía:

Christian Belmar Castro

Autor:

Francisco Leiva Silva

Santiago, Enero 2009

Quiero agradecer a

Ignacio Espinoza, Beatriz Saavedra, Mario Elgueta y a Paulina Medina,

por toda su ayuda y apoyo, los cuales fueron fundamentales

en la realización de este Seminario de Título.

Índice

I. Introducción

Según los últimos resultados de la Encuesta CASEN 2006 existen 2.208.937 personas que se encuentran bajo la línea de la pobreza en Chile, las que corresponden al 13,7% (3,2% correspondientes a indigentes y 10,5% a pobres no indigentes) de la población total.[1]

De lo anterior se obtiene que el 3,2% de la población chilena no esta en condiciones de satisfacer sus necesidades alimenticias (los indigentes), en tanto que el 10,5% restante de pobres pueden satisfacer sus necesidades alimenticias, pero no el conjunto de sus necesidades básicas.

Si bien es cierto que la pobreza puede definirse tanto en términos cuantitativos como en términos cualitativos, en este trabajo no se hará mayor distinción entre ambos, pues se asumirá que ambos pueden agruparse bajo una misma definición.[2]

Dicha situación hace patente la necesidad de desarrollar un modelo microfundado que intente contribuir a tratar de resolver el problema de la pobreza a través de una política fiscal redistributiva. Sin embargo esta no es una tarea simple.

Si se aborda este problema desde el punto de vista de la economía (claramente pueden existir otro enfoques al mismo tópico), se puede ver que este, no es un problema desconocido por el modelo de 2x2.[3] También es conocido que si en este modelo se aplican transferencias para cambiar la situación inicial, puede lograrse un equilibrio

---

[1] El valor de la referida Línea de Pobreza se obtiene duplicando el valor de la Línea de Indigencia –calculada como la canasta alimentaria per cápita- para el caso de los habitantes de zonas urbanas, en tanto que para las zonas rurales se calcula incrementando en 75% el presupuesto básico de alimentación estimado para estas zonas.

[2] Más adelante se ahondará a lo referente a esto.

[3] Modelo de 2x2: *Hace referencia a una economía con dos bienes y dos agentes, los cuales, dada una dotación inicial, deciden individualmente como maximizar su propia utilidad, lo que los lleva a comerciar y a lograr la mejor situación para ambos. Y vuelvo a remarcar, dadas las dotaciones.*

(segundo teorema del bienestar social[4]). Pero este análisis deja fuera algo muy importante: ¿Cómo se diseña este sistema de transferencias?; ¿Cómo se sabe hasta que punto se tiene que transferir dinero de un agente a otro?; ¿Cómo se hace si el número de agentes a transferir dinero no son iguales?

Además de estas interrogantes, se sabe, tal como se mencionó previamente, que el segundo teorema del bienestar garantiza que por medio de transferencias puede encontrarse un equilibrio, así como también se sabe por el primer teorema del bienestar social[5], que este equilibrio será óptimo de Pareto[6]. Pero ¿Realmente se quiere que el equilibrio final sea óptimo de Pareto? Tal vez en la economía en general (o en una en particular), tal como se encuentra, dados los precios, no es posible asignar los recursos de una manera más eficiente de la que ya están, es decir, ya estaríamos en un punto óptimo de Pareto. Entonces, ¿qué alternativa queda?, sin duda, hacer nada no es la respuesta. Por lo tanto, si se hace alguna transferencia en este contexto, estará claro que el equilibrio final no necesariamente será óptimo de Pareto.

Si se conocen cuáles son las preferencias de la sociedad, sería posible en términos teóricos, realizar una transferencia (realizada a través de impuestos) que maximice el bienestar de la sociedad, es decir, se encontrará el monto de esta transferencia o la tasa de impuesto, y dado que no es una restricción del problema no es que sea óptimo de Pareto, sino simplemente que este sea factible. Es decir, la clave esta en conocer o estimar una función de bienestar social.

Dado todos los datos conocidos del problema, estar al tanto de las respuestas a las tres preguntas previamente planteadas, puede ser muy útil a la hora de efectuar Políticas Públicas, pues a pesar de que aquí se realiza un análisis simplificado de la realidad, se

[4] Segundo Teorema del Bienestar Social: *Todo óptimo de Pareto es implementable como equilibrio walrasiano, por medio de transferencias.*
[5] Primer Teorema del Bienestar Social: *Todo equilibrio walrasiano es óptimo de Pareto.*
[6] Óptimo de Pareto: *Es un punto en el cual no es posible beneficiar a un agente sin perjudicar a otro(s).*

tiene que al saber exactamente qué es lo que le importa a una economía en particular (y en que forma o cuantía) es posible alcanzar el máximo bienestar de la economía en su conjunto, a través de una tasa de impuesto (que representa la transferencia realizada). También, si se tiene bien identificado cuáles son los agentes que necesitan la ayuda y cuales son los agentes a quienes se les puede cobrar un impuesto, al conocer la tasa óptima impositiva, se puede realizar de manera más eficiente tanto la recaudación como el gasto de dicha recaudación (para así acercarse lo mas posible al hipotético caso de costo de administración igual a cero).

Entonces, si se considera el sistema de impuestos como trasferencias directas de un agente a otro (es decir, esta será la respuesta a la primera pregunta), se tiene que si conoce la función de bienestar de la sociedad, la segunda pregunta puede ser respondida, independiente si el número de agentes receptores es distinto al grupo emisor. Por ende, en el desarrollo de este seminario, al buscar la tasa de impuesto (o transferencia) que maximice el bienestar de la sociedad, se responden las dos últimas preguntas: ¿Cómo se sabe hasta que punto se tiene que transferir dinero de un agente a otro? Y ¿Cómo se hace si el número de agentes a transferir dinero no son iguales?

El documento se desarrolla de la siguiente forma, el punto (II) muestra una breve revisión bibliográfica relacionada con los temas relevantes para este trabajo. El punto (III) muestra la metodología empleada y una economía en particular. En el punto (IV) se resuelve el problema específico planteado en el punto previo y finalmente, en el punto (V) se concluye y se realizan algunas recomendaciones.

II. Revisión de la Literatura

Para desarrollar el presente tema de investigación, es preciso abordar estudios anteriores en distintos ámbitos, para poder comprender el desarrollo posterior. En primer lugar se revisará brevemente la relación que se le ha dado a los impuestos y al bienestar, tanto en un contexto de equilibrio parcial como de equilibrio general. Luego se revisará lo referente a la función de Bienestar Social. Finalmente se abarca, brevemente, el comportamiento de los agentes, incluyendo una pequeña referencia al paper de Torche (1982), fundamentalmente con el objeto de la determinación de umbrales mínimos en la función de consumo y de la segmentación de agentes representativos.

II.1 Relación entre Impuestos y Bienestar

Ramsey (1927), revisa los efectos de la aplicación de impuestos sobre n bienes. Dado un monto que se desea recaudar, se procede a cobrar un impuesto escalonado aplicado a los diferentes commodities de la economía, en el contexto de mercados competitivos en una economía cerrada. Metodológicamente, se asume que la función de utilidad es cuadrática, lo que significa que las curvas de oferta y la demanda pueden ser líneas rectas, pero no se excluyen las demás posibilidades de oferta y demanda conjunta (con algún grado de curvatura) -aunque en caso de que la oferta y la demanda no sean líneas rectas las estimaciones serán más inexactas, cuanto más grande sea la variación en la recaudación analizada-. En este paper se prueba que, aumentando la recaudación fiscal objetivo en una magnitud infinitesimal, a través del cobro de mayores impuestos sobre ciertos commodities dados, los impuestos serán tales que disminuirán la producción de cada commodity gravado en la misma proporción. Este resultado es válido para cualquier recaudación, con la consideración que, entre mayor sea la curvatura de las curvas de oferta y demanda y mayor el aumento de recaudación, más grandes serán los errores de las conclusiones obtenidas. Si bien, para términos de este trabajo, Ramsey brinda un primer acercamiento acerca de la recaudación tributaria, en él no se analizan los equilibrios de mercados de factores, ni el impacto de la recaudación en el bienestar social.

Por otra parte, Little, (1951) realiza una comparación entre impuestos directos e indirectos, con la finalidad de cuestionar el paradigma sostenido por la comunidad económica hasta ese entonces, acerca de la menor distorsión que supuestamente provocaban en los mercados los impuestos directos con respecto los impuestos indirectos, paradigma que estaba fundamentado en el cambio en las tasas marginales de sustitución que la aplicación de un impuesto directo provoca sobre el bien gravado y consecuentemente en las relaciones de precios entre el bien gravado y los demás bienes contenidos en la canasta. Little plantea que, considerando una oferta de trabajo que no sea completamente inelástica, las modificaciones que producen en la economía la aplicación de impuestos directos sobre el ocio (y consecuentemente sobre el consumo de bienes) pueden ser tan grandes que las modificaciones pueden destruir la suposición teórica existente hasta ese entonces de la superioridad de los impuestos directos sobre los impuestos indirectos.

Harberger (1964), sostiene que las distorsiones están presentes tanto en impuestos directos como indirectos, por lo que se debe obtener medidas relevantes de sus efectos y luego comparar estas medidas. La medida relevante en este caso es el costo para la economía, provocado por las ineficiencias resultantes de las distorsiones inducidas por las decisiones impositivas. Este costo, el cual el autor llama el costo de bienestar del sistema impositivo, ha sido tradicionalmente etiquetado como “el exceso de carga” de los impuestos. A partir de lo anterior plantea una importante conjetura (que después se conocería como la Conjetura de Superneutralidad de Harberger), la cual plantea que, aunque la teoría indica que la aplicación de impuestos provoca distorsiones y por tanto tendría efectos en el crecimiento, en la práctica los cambios en la política fiscal alrededor de la estructura tributaria actual no tienen un efecto significativo sobre la tasa de crecimiento, lo que se conoce como “superneutralidad de la política tributaria”. En su célebre paper, Harberger revisa los efectos en los consumidores, y de ahí deriva conclusiones en bienestar social, sin realizar ningún análisis sobre el equilibrio de la economía, que es lo que se pretende efectuar aquí.

En Vedder y Gallaway (1999), se plantea que una reducción impositiva en la Economía Americana de la época –año 2000- tendría un impacto positivo en el bienestar de los individuos de aquella economía. Esto tiene su fundamento en que una reducción tributaria aumenta el ingreso disponible de los individuos y en el contexto de una Economía con Superávit Fiscal en los Estados Unidos para ese período y con las proyecciones del aumento de dicho superávit, el costo de la reducción de impuestos no afectaría negativamente las Finanzas Públicas. El enfoque de esta publicación difiere del que se ha abordado en este estudio, puesto que no se considera los efectos redistributivos que pueda tener la política económica.

Angelopoulos, Malley y Philippopoulos (2008) sugieren que si el objetivo de la Política Fiscal es promover el crecimiento de largo plazo alterando las tasas de impuesto, entonces se debe reducir el impuesto al trabajo, compensando la disminución en la recaudación con incrementos en el capital y el consumo, basándose en los datos de la economía del Reino Unido entre los años 1970 y 2005. Lo relevante de este estudio para este trabajo es que, para formular las conclusiones recién referidas, se utiliza un modelo de equilibrio general, tal como se efectúa en este trabajo. El modelo de equilibrio general utilizado por estos autores es de carácter dinámico y estocástico, incorporando la estructura de la Política Fiscal, incluyendo el consumo fiscal, la inversión y los gastos en educación, por un lado; y por otra parte se usan el trabajo, el capital e impuestos al consumo.

Adicionalmente, en la literatura se encuentran algunos trabajos que realizan un análisis entre impuestos y desigualdad, estudiando la aplicación de políticas tributarias de carácter redistributivo. En esta corriente se encuentra Russo (2004), que presenta algunos métodos para distribuir las ganancias (o pérdidas) de una reforma tributaria. Este estudio se origina en la necesidad de evaluar la reforma a la legislación sobre impuesto a la renta personal presentada en Italia a fines del año 2001. En este trabajo se concluye que la redistribución debe seguir efectuándose de ricos a pobres, pero en una menor intensidad.

En la misma línea de la redistribución, Garfinkel, Rainwater y Smeeding (2006) va más lejos y plantea que los Estados Unidos presentan uno de los mayores niveles de inequidad después de la aplicación de impuestos y de transferencias, en comparación a otros países según estudios de panel, tanto en transferencias directas a las personas de menores recursos, como de transferencias indirectas a través de servicios públicos. Se establece que en los Estados Unidos realizan una transferencia directa prácticamente nula y una transferencia en servicios para las personas de menores recursos relativamente más alta. El énfasis de estas transferencias es puesto en salud pública, al nivel de los otros países desarrollados de Occidente, mientras que presenta niveles más discretos en las transferencias en educación y muy bajas en la cobertura de necesidades de los niños pequeños.

Suescun (2001), por su parte, evalúa el efecto distorsionante del impuesto a las transacciones financieras sobre la asignación de recursos, la tasa de crecimiento de la economía y el bienestar de la sociedad, en el marco de un modelo sencillo de equilibrio general dinámico para una economía cerrada y sin dinero, con la finalidad de evaluar si dicho impuesto a las transacciones es más distorsionante que otros, como impuestos al consumo, ingreso laboral, ingreso de capital y a la inversión. Se concluye que si se interpretan los resultados de la transición como las consecuencias en bienestar que en realidad tendría una reforma tributaria, la sociedad se vería beneficiada si el impuesto a las transacciones se sustituye por cualquier otro tipo de impuesto distorsionante, debido a que todos conllevan a menores costos en bienestar, pero aun así no cabría esperar importantes ganancias en crecimiento.

Otra publicación que considera en su metodología el uso de un modelo de equilibrio general dinámico es el del Banco de Finlandia efectuado por Funke & Strulik (2003), para analizar los cambios en el crecimiento a largo plazo y el bienestar en Estonia, ante cambios en la Ley del Impuesto a la Renta del Año 2000. En esta publicación se efectúan comparaciones entre mecanismos de recaudación y el crecimiento y el bienestar.

II.2 La función de Bienestar Social

Con respecto al bienestar de la sociedad, se tiene que existen tres tipos de funciones clásicas de bienestar social, estas son (1) la "Utilitarista Pura" (Jeremy Bentham) $W(u_1 \ldots u_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$; (2) la Rawlsiana ó también llamada "maximin" (John Rawls) $W(u_1 \ldots u_n) = \min\{\alpha_1 u_1 \ldots \alpha_n u_n\}$; y por último, la (3) "Utilitarista Generalizada" $W(u_1 \ldots u_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(u_i)$. La idea de estas funciones es representar el bienestar de la sociedad en función de las utilidades individuales de cada agente. La primera función es probablemente la más sencilla, es la agregación (ponderada o no) de todos los agentes de la economía. La segunda dice que el bienestar de la sociedad viene dado por la utilidad del agente con la mínima utilidad, es decir, en este caso sólo es "preocupante" el agente más pobre, lo cual no parece razonable, puesto que desconoce la posibilidad de aumentar el bienestar mediante una transferencia a cualquier agente relativamente pobre que no sea el más pobre de la economía. Por último, la función de utilidad social del tipo Utilitarista Generalizada, al igual que la primera es una agregación de las utilidades individuales, pero en este caso se les aplica una transformación creciente y cóncava para aumentar la aversión a la desigualdad. Esto permite que todos los agentes realicen un aporte[7] al bienestar de la economía (incluso cuando la función no está ponderada), y además se preocupa, aunque no exclusivamente, de los agentes más pobres, al otorgarle una importancia en la función a la desigualdad entre los agentes de la economía.

[7] Al decir "aporte", hablamos de que un aumento en la utilidad de un agente cualquiera tenga un impacto positivo en la función de bienestar social, es decir: $\frac{\partial W(u_1 \ldots u_n)}{\partial u_i} > 0$

En la literatura se ven otras funciones más específicas, como la expresada en Dolan y Tsuchiya (2005), donde se modela una función de bienestar que sea creciente en la utilidad de todos los agentes y a la vez decreciente en los términos desigualdad.

$$W_{[2]} = (H_a + H_b)^{\alpha} - c\left|H_a - H_b\right|^{\beta} \ , \quad donde \ \ \alpha > 0, \frac{\beta}{\alpha} \geq 1, c \geq 0$$

Ambas condiciones son características que debe tener la función de bienestar y que serán consideradas para la elaboración de la Metodología del presente Seminario. Sin embargo, la función de bienestrar de Dolan y Tsuchiya posee una debilidad: a saber, que considera sólo dos agentes, uno rico y uno pobre, entre los cuales eventualmente se pueden realizar las transferencias para el aumento del bienestar.

II.3 Comportamiento y Selección de Agentes

El modelo de Ocio Consumo fue planteado por primera vez por Guez y Becker (1975). Este modelo busca determinar cómo las personas deciden distribuir su tiempo, dedicándolo a una combinación de horas productivas y no productivas (ocio), y cómo distribuyen su ingreso –obtenido a partir de la dedicación a horas productivas-, consumiendo los diferentes bienes de una canasta. Además, el modelo contempla un análisis intertemporal acerca del ocio y consumo, metodología que se asocia más a la realidad, permitiendo que los agentes decidan distribuir su tiempo de modo tal de concentrar en determinados períodos las horas productivas (consumo) y por contraposición, dedicar otros períodos mayoritaria o incluso exclusivamente al ocio. Este modelo es una herramienta muy potente para representar la realidad de los consumidores de una economía determinada.

En otro ámbito, un paper que constituye un antecedente para el trabajo a desarrollar, es Torche (1982), el cual plantea ocupar la redistribución del ingreso para evaluar proyectos. En este artículo -definida una función de bienestar social-, se muestra que si ciertas redistribuciones (por ejemplo, de ricos a pobres) tienen una valoración positiva para la sociedad, entonces, si existe cierta preocupación por la desigualdad. Así, las transferencias serán deseadas en la economía, siempre que tengan la finalidad de "controlar" el consumo de los agentes receptores de dichas transferencias. En palabras más sencillas, las transferencias sólo son deseadas, si son ocupadas para consumir de los llamados bienes básicos (pueden ser bienes o males). La implicancia directa de este paper con este trabajo, que fue útil a la hora de desarrollar la metodología empleada, es que se refiere a la definición (que puede ser arbitraria, tal como dice Torche) de un agente que pueda usarse como referencia u objetivo a la hora de realizar transferencias, pues al tener claro cuál es el monto de algún bien que se define como mínimo (o máximo) en la economía, puede aplicarse una transferencia que los pueda dejar en niveles aceptables para la economía.

Como comentario final se puede decir que el trabajo pretende tratar de unir varios de los aspectos realizados por los trabajos previamente expuestos, a modo de entregar un aporte con respecto al tema del bienestar social.

III. Modelo

III.1 Análisis de los Supuestos

Para representar el comportamiento de los consumidores, se utilizará una función de utilidad en que los bienes serán el ocio y el consumo, en donde el consumo esta representado por una canasta ***x*** que representa a todos los bienes, específicamente a aquellos bienes que son relevantes a la hora de entregar ayuda a los agentes más necesitados o que no pueden acceder a cierto bienestar establecido como necesario.[8]

Dado lo que se quiere realizar, el modelo ocio consumo es el más apropiado pues entrega el comportamiento de los agentes con respecto al ofrecimiento de los factores que posee, así como su comportamiento de consumo. Otros modelos del comportamiento de los agentes como el de consumo intertemporal, si bien es capaz de mostrar como el agente elige su consumo a través del tiempo, no es capaz de mostrar su comportamiento con respecto al ofrecimiento de los factores que posee. Con respecto a otros modelos que representan al mercado del trabajo como el de Shapiro & Stiglitz (1984), de salario de eficiencia, éste solo se concentra en el ofrecimiento del factor trabajo, y la cantidad de esfuerzo que ejerce para trabajar, pero no dice nada del consumo de los agentes.

Por lo tanto, se sabe que bajo condiciones "ideales" (o normales), para un consumidor cualquiera sea su demanda por una canasta de bienes $x_i^d(y_i, w_i, p)$ dependerá (o debería depender) positivamente tanto de su salario ***w*** como de su salario no laboral ***y***, además dependerá negativamente del precio de la canasta ***p***. Su oferta de trabajo en cambio $l_i^s(y_i, w_i)$ dependerá positivamente del salario *w* que pague el mercado y negativamente de su salario no laboral. Todo lo referente al ocio tiene una implicancia inversa de lo que

[8] Más adelante se ahondará en este punto.

ocurre con el trabajo, es decir, este depende negativamente del salario ***w*** (costo de oportunidad del ocio) y positivamente del salario no laboral ***y***.

Por ende, bajo estas mismas condiciones, se tiene que la utilidad indirecta del agente $v_i(y_i, w_i, p)$ depende positivamente del salario no laboral ***y***, depende negativamente del precio de la canasta ***p***, y con respecto al salario no se puede decir nada definitivo, pues la dependencia obedecerá a los valores que tomen los distintos parámetros y de las preferencias del agente. Aún así, lo importante, para lo que se quiere analizar, es la dependencia positiva con respecto al salario no laboral.

Con respecto al comportamiento de las firmas, se utilizará una función de producción que depende (como variables) sólo de los factores que pueden ser aportados por los agentes, así al resolver el objetivo de cada firma, se maximizará su beneficio con respecto a la cantidad de factores que contrata. Se ocupará para el comportamiento de las firmas la condición de maximización de beneficios, pues se asume que existe competencia perfecta en el mercado del producto final y el suficiente número de firmas idénticas que garanticen esto. Lo anterior es un supuesto simplificador, pero hay que tener presente que para cualquier análisis más elaborado habría que considerar algún modelo de competencia imperfecta, como modelos duopólicos o competencia monopolística, etc. Tampoco se utilizara otro modelo de comportamiento de la firma como por ejemplo minimización de gasto, pues no se tratan de firmas sin fines de lucro (a pesar de que las condiciones de óptimo sean las mismas).

Dado lo anterior se tiene que los costos de la firma son crecientes, es decir, producir un número adicional de unidades resulta más costoso. Entonces, bajo las mismas condiciones "ideales" que se mencionan previamente se tiene que de aquí se encontrará una demanda de factores $l_i^d\left(p, \overrightarrow{w_i}\right)$, la cual dependerá positivamente del precio del producto final y negativamente del precio del factor en cuestión. También puede obtenerse una oferta del producto final $x^s\left(p,\overrightarrow{w_i}\right)$, la cual dependerá positivamente del precio del mercado, y negativamente del precio del mercado de factores. En base a esto pueden calcularse todos los precios relevantes de equilibrio para la economía y así como también las cantidades de equilibrio, las que indicarán la utilidad indirecta que recibirá cada agente.

De esta manera, se tomará de forma arbitraría algún agente, cuyo consumo y utilidad cumplan con ciertas características deseadas como mínimo para el resto de los agentes. Por lo tanto este agente será ocupado como referencia (Torche, 1982) a la hora de ejercer la política social, es decir, a este agente no se aplicarán impuestos, así como tampoco se entregará ayuda.

También es importante tener presente no generar incentivos perversos, por lo tanto, hay que tratar de generar una política que incentive a los agentes más ricos, a seguir "esforzándose" a la hora de ofrecer trabajo y por ende consumir mas del bien de consumo, siempre en una cantidad mayor que el agente que le sigue y así sucesivamente.

La función de bienestar social a ocupar será la función "Utilitarista Generalizada", esto es simplemente porque se ajusta mejor a las necesidades de un planificador benevolente al cual le interesan todos los agentes de la economía, aunque no necesariamente con la misma ponderación.

En contraste, las otras dos funciones de bienestar social, presentan algunos "problemas" que son resueltos por la función utilitarista generalizada. Por ejemplo, en la función utilitarista pura, las utilidades de los agentes de la economía son perfectos sustitutos (incluso cuando se realice una agregación ponderada por alguna importancia relativa), esto implica que al maximizar la función $W(u_1 \ldots u_n)$ puede ser que una solución óptima sea darle más a un agente en desmedro de otro, pues su peso relativo sea lo suficientemente grande para hacer esto "óptimo". La función rawlsiana tiene como implicancia que las utilidades de los agentes actúan como perfectos complementos, esto quiere decir, que aumentar la utilidad del segundo agente con menor utilidad, tiene un beneficio marginal de cero, por ende, en una economía de este tipo el planificador social sólo se preocupará exclusivamente del agente más pobre, lo cual no es necesariamente lo mejor, pues otros agentes (o incluso todos) también pueden estar en la necesidad de algún tipo de ayuda.

Claramente estas dos funciones tienen ventajas y desventajas, la primera se preocupa de que todas las utilidades aporten a la utilidad social, pero puede descuidar a los pobres. La segunda se preocupa exclusivamente del más pobre, pero hace que la utilidad de todos los demás no aporten al aumento de la utilidad social. En este aspecto la función de utilidad utilitarista generalizada, realiza un mejor trabajo al incorporar la desigualdad dentro del problema, es decir, logra que todos los agentes logren un aporte al bienestar social sin importar su nivel de utilidad individual, pero además tiene una sensibilidad a la desigualdad, a través de la función creciente cóncava que incorpora, así y a pesar de que todos los agentes estén igualmente ponderados, las soluciones igualitarias traerán mejores resultados que soluciones más desiguales.

Entonces, si se tiene una función de bienestar social $W\left(\vec{v_i}\right)$, se tendrá que esta dependerá positivamente del salario no laboral de cualquier agente, por lo tanto, si todos los agentes pesan lo mismo en la función ***W***, cualquier redistribución de dinero tendrá un efecto nulo en el bienestar social, pero si el peso de los agentes varía, por ejemplo, a medida que se es más pobre el peso en la función ***W*** sea mayor, la redistribución del ingreso, que puede realizarse a través de impuestos, si tendrá un impacto positivo en el bienestar social. Obviamente este impacto positivo no se dará siempre, sino que a partir de cierto punto el impacto comienza a ser negativo, por ende, existe un punto donde se encuentra un máximo.

La idea de que el agente más pobre tenga más peso puede interpretarse además como una forma en que la sociedad valora de cierta forma la igualdad (sus razones pueden ser altruistas, es decir, como una ayuda al más desprotegido, o simplemente a modo de obtener lo expuesto anteriormente).

III.2 La Economía a Resolver

Para mostrar que lo propuesto se cumple en un contexto de equilibrio general, se definirá una economía particular y sencilla, pero con la intención de que a su vez refleje (o trate de reflejar) lo mejor posible la realidad (teniendo en cuenta de que solo es un modelo):

- Una economía con *N* agentes, en la que existen tres tipos de distintos de agentes, los que se llamarán por conveniencia, *pobre*, *normal* y *rico*. De estos agentes existen una cantidad n_1, n_2 y n_3 de cada uno respectivamente. A partir de ahora los subíndices 1, 2 y 3 se referirán a estos agentes (a menos que se indique lo contrario).
- Cada agente tiene las mismas preferencias, las cuales pueden representarse a través de la siguiente función de utilidad:

  $$u_i(o,c) = o_i^{\alpha} x_i^{1-\alpha}$$

  donde $\alpha \in (0,1)$.
- Cada agente pobre solo cuenta con mano de obra no calificada, en cambio cada agente normal y rico cuentan con mano de obra calificada.
- En la economía existen ***M*** firmas idénticas, las cuales producen la canasta ***x***, y utiliza tanto mano de obra calificada como no calificada en el proceso productivo, el cual se describe a través de la siguiente función de producción:

  $$x(l_{nc}, l_c) = A l_{nc}^{\beta} l_c^{\gamma}$$

  Donde $\beta, \gamma \in (0,1)$, y además $\beta + \gamma < 1$, esto es para garantizar que la función de costos se encuentre en la zona de deseconomías de escala, es decir, cada vez es más costoso producir. El parámetro ***A***, en este caso, esta asociado tanto a la tecnología como al capital[9]

- Por último la función de bienestar social del tipo "Utilitarista Generalizada" se definirá de la siguiente forma:

$$W\left(\overrightarrow{v_i}\right)=\phi_1\sum_{j=1}^{n_1}\ln\left(v_{1j}\right)+\phi_2\sum_{j=1}^{n_1}\ln\left(v_{2j}\right)+\phi_3\sum_{j=1}^{n_1}\ln\left(v_{3j}\right)$$

dicho de manera más simple, es la suma ponderada de los logaritmos de la utilidad indirecta de cada agente. Donde se cumple que: $\phi_3<\phi_2<\phi_1$, es decir, mientras más pobre el agente, mayor es su peso dentro de la función de bienestar social.

La idea de usar logaritmos (que es la función creciente y cóncava que describe la función utilitarista generalizada) evita que algún agente quede con utilidad cero en beneficio de los demás. Se sabe, de forma matemática que esto no ocurrirá pues $\ln(0)=-\infty$, por ende no puede alcanzarse el máximo si alguno de los agentes tiene utilidad cero.

Para mayor claridad, se definirá lo que se quiere realizar:
Por el lado de los consumidores se tiene que el problema de cada agente es:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i(o,c)=o_i^{\alpha}x_i^{1-\alpha} \\ s.a. \quad & px=y_i+w_il_i \\ & 1=o_i+l_i \end{aligned}$$

[9] Por simplicidad dejamos fuera cualquier análisis referente al capital, pues así podemos enfocarnos mejor a lo que ocurre tanto con el trabajo calificado como con el no calificado. Es decir, inmediatamente ha quedado descartado cualquier análisis o explicación que incluya al capital. Esto es importante de destacar, pues todo lo que se pueda concluir, considera capital fijo. Esta es una limitación del modelo en sí.

Donde se tiene que el tiempo total está normalizado a 1 y además, se cumple lo siguiente:

$$y_1 = 0 < y_2 = \theta_2 M\pi < y_3 = \theta_3 M\pi$$
$$n_2\theta_2 + n_3\theta_3 = 1$$
$$w_1 < w_2 = w_3$$

Donde estas cuatro ecuaciones significan lo siguiente: (1) El ingreso no-laboral de cada agente pobre es cero y el ingreso no-laboral de cada agente normal y rico es una proporción de la utilidad total de todas las firmas, donde se cumple claramente que: $\theta_2 < \theta_3$, lo que implica que el ingreso no-laboral de cualquier agente rico es mayor al de cualquier agente normal. (2) La segunda ecuación simplemente indica que entre todos los agentes normales y ricos se reparten todas las utilidades obtenidas por las firmas, es decir, ellos son dueños de las firmas. (3) La tercera ecuación indica que el salario recibido por el agente pobre es menor al que reciben el agente normal y el agente rico (el cual es igual para ellos), esto quiere indicar que el trabajo entregado por los agentes pobres es no calificado, y el de los normales y ricos es calificado.

En base a esto, el objetivo es encontrar:

$$o_i^d$$
$$x_i^d \Rightarrow X^d = \sum_{i=1}^{N} x_i^d$$
$$l_i^s \Rightarrow L_{nc}^s = \sum_{i=1}^{n_1} l_1^s \;\; ; \;\; L_c^s = \sum_{i=1}^{n_2} l_2^s + \sum_{i=1}^{n_3} l_3^s$$

En tanto, por el lado de los productores se tiene que cada una de las *M* firmas resolverá el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \;\; \pi &= px - w_1 l_{nc} - w_2 l_c \\ &= pAl_{nc}^{\beta} l_c^{\gamma} - w_1 l_{nc} - w_2 l_c \end{aligned}$$

Resolviendo esto, se pretende encontrar:

$$l_{nc}^{d} \Rightarrow L_{nc}^{d} = \sum_{i=1}^{M} l_{nc}^{d}$$

$$l_{c}^{d} \Rightarrow L_{c}^{d} = \sum_{i=1}^{M} l_{c}^{d}$$

$$x^{s} \Rightarrow X^{s} = \sum_{j=1}^{M} x_{j}^{s}$$

Con estos resultados, tanto de la parte del consumo de bienes, como de la utilización de factores, se puede encontrar:

$$p^{*};\ w_{1}^{*};\ w_{2}^{*}$$

Los cuales son los precios relevantes de esta economía, y en base a estos se pueden obtener (ya dependiendo solo de los parámetros del modelo):

$$v_{i}\left(y_{i}, p, w_{i}\right)$$

Ya con esto se puede "calcular" el bienestar social de esta economía:

$$W\left(\overrightarrow{v_{i}}\right) = \phi_{1}\sum_{j=1}^{n_{1}}\ln\left(v_{1j}\right) + \phi_{2}\sum_{j=1}^{n_{1}}\ln\left(v_{2j}\right) + \phi_{3}\sum_{j=1}^{n_{1}}\ln\left(v_{3j}\right)$$

Entonces, si considera al agente normal, como una persona que consume la canasta ***x***, es decir, se utiliza (o la sociedad utiliza) a este agente como referencia como lo mínimo que debería estar consumiendo una persona para vivir de manera apropiada (o digna) y no simplemente para sobrevivir.

En base a esto, también se puede decir, que no existe perjuicio en que algún agente consuma una mayor cantidad que esta cota, pues la canasta ***x***, es considerada como un bien.

Dado a que el agente normal tiene el consumo que se considera como "ideal", a ellos no se les aplicará ningún impuesto ni tampoco un subsidio, pues no es necesario que su consumo aumente, pero no debe disminuir. Por ende, los impuestos serán cobrados a los agentes ricos, y serán entregados a los agentes pobres a modo de subsidios. También se asumirá por simplicidad que no existe un costo de administrar el dinero y puesto que todos los agentes son optimizadores, la elección de los bienes dentro de la canasta ***x***, también será la óptima, es decir, se elige la cantidad (o calidad) óptima de educación, salud, etc. Por lo tanto, el subsidio será equivalente a proveer de manera adecuada los servicios o bienes que el pobre no puede costear, y no será solo una mera entrega dinero, el cual puede ser mal aprovechado.

Entonces, a cada agente rico se le cobrará un impuesto equivalente a T_3, por ende, cada agente pobre recibirá un subsidio igual a:

$$S_1 = -T_1 = \frac{n_3 T_3}{n_1}$$

Además, se debe considerar que para que no exista ningún incentivo negativo, ya sea a la oferta laboral o a la inversión en capital (las que permitirían aumentar π, algo que no esta modelado aquí, pero no por eso es menos cierto), debe cumplirse que después de la aplicación del impuesto:

$$v_2(y_2, w_2, p) < v_3(y_3, w_2, p, T_3)$$

Lo anterior muestra que el agente rico después de impuestos seguirá siendo el más rico (aunque sea por una cantidad ínfima). Es decir, la diferencia entre ser rico y normal es mayor al impuesto cobrado, por lo tanto, para cualquier agente normal que tenga la oportunidad de convertirse en rico, por ejemplo, por medio de la educación, le convendrá hacerlo, pues aún al recibir el cobro del impuesto su utilidad será mayor.

También es una restricción del problema que:

$$v_1(w_1, p, S_1) \leq v_2(y_2, w_2, p)$$

Lo que quiere decir esto es que el agente pobre después de recibir el subsidio, no podrá tener una utilidad mayor que el agente normal, que es el utilizado de referencia (el resultado ideal sería que: $v_1(w_1, p, S_1) = v_2(y_2, w_2, p)$ pero esto no será necesariamente posible con el dinero recaudado). La idea de que el agente pobre no pueda superar en utilidad al normal después del subsidio es que, si se dice que el agente normal es el "ideal" de la economía, está consumiendo lo justo (es la referencia), por lo que no sería "correcto" tomar a un agente que se encuentre peor y dejarlo por sobre el de referencia. Esto también generaría un incentivo perverso para el agente normal.

Entonces el objetivo será:

$$\begin{aligned}
\max_{\{T_3\}} \quad & W(\vec{v_i}) = \phi_1 \sum_{j=1}^{n_1} \ln(v_{1j}(w_1, p, S_1)) + \phi_2 \sum_{j=1}^{n_1} \ln(v_{2j}(y_2, w_2, p)) + \phi_3 \sum_{j=1}^{n_1} \ln(v_{3j}(y_3, w_2, p, T_3)) \\
s.a. \quad & v_2(y_2, w_2, p) < v_3(y_3, w_2, p, T_3) \\
& v_1(w_1, p, S_1) \leq v_2(y_2, w_2, p) \\
& S_1 = \frac{n_3 T_3}{n_1}
\end{aligned}$$

Pero dada la forma en la que esta construido el problema, se sabe que será cierto para todos los valores posibles (y que cumplan las condiciones establecidas previamente) que: $\frac{\partial W(\vec{v_i})}{\partial T_3} > 0$ es decir, que el efecto de aplicar impuestos es positivo en el bienestar social.[10]

[10] Esto es posible, pues lo establecido en el problema es que el número de pobres es mayor al número de ricos, y además el peso de cada pobre es mayor al de cada rico en la función de bienestar social. Por ende, un aumento en una unidad en el monto de impuestos (disminución en una unidad en el ingreso no laboral de cada rico), tiene un efecto negativo menor, a su equivalente, que es un aumento en (n_3/n_1) unidades en el ingreso no laboral de cada pobre, el cual tiene un efecto positivo mayor. Por esta razón, el efecto total es positivo. Para mayor detalle, revisar Anexo VII.5.

Dado lo anterior el problema queda simplificado a resolver lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\{T_3\}} & S_1 = \dfrac{n_3 T_3}{n_1} \\ s.a. & v_2(y_2, w_2, p) < v_3(y_3, w_2, p, T_3) \\ & v_1(w_1, p, S_1) \leq v_2(y_2, w_2, p) \\ & 0 < T_3 \end{array}$$

Es decir, maximizar la recaudación, sujeto a las condiciones previamente descritas, cumpliendo que cada agente rico después de impuesto siga siendo rico, y que el agente pobre después de impuestos (es decir, después de recibir su subsidio) sea a lo más parecido al agente normal, y sujeto a que la transferencia es positiva estricta, por lo dicho anteriormente.

IV. Resolviendo el Problema para la Economía Específica

Se tiene que la economía planteada puede expresar sus precios, lo que se llamará $\vec{P}(p, w_1, w_2)$, en función solo de parámetros[11], los que no dependen del ingreso no-laboral de ninguno de los agentes. Por ende, es lógico suponer que dado cambios en los ingresos no-laborales de los agentes, los equilibrios de todos los mercados no se verán alterados en precios. Entonces, si se consideran los precios también como parámetros, el problema a resolver queda de la siguiente forma:

$$\max_{\{T_3\}} \quad S_1 = \frac{n_3 T_3}{n_1}$$

$$s.a. \quad \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) < \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2)$$

$$\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right) \le \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2)$$

$$0 < T_3$$

Lo cual pude reducirse a la siguiente forma:

$$\max_{\{T_3\}} \quad S_1 = \frac{n_3 T_3}{n_1}$$

$$s.a. \quad T_3 < (\theta_3 - \theta_2) M\pi$$

$$T_3 \le \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]\left(\frac{n_1}{n_3}\right)$$

$$-T_3 < 0$$

Para resolver un problema como este, es necesario aplicar las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Pero dadas las restricciones que se aplican a este problema y considerando además que no se están asumiendo valores específicos para los parámetros del problema, sino solo las condiciones que deben cumplirse, no es necesario encontrar

[11] Ver anexo VII.4.

la solución utilizando este método, sino que basta con realizar un desarrollo algebraico que simplifica ostensiblemente la resolución del problema.

Si se llama: $f_1 = (\theta_3 - \theta_2)M\pi$ y $f_2 = \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]\left(\frac{n_1}{n_3}\right)$, se tiene que será cierto lo siguiente:

$$si \;\; f_1 < f_2 \Rightarrow T_3 = \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]\left(\frac{n_1}{n_3}\right),$$
$$si \;\; f_2 < f_1 \Rightarrow T_3 = (\theta_3 - \theta_2)M\pi - \varepsilon$$

Donde ε, como es usual en toda notación, representa un valor muy pequeño.

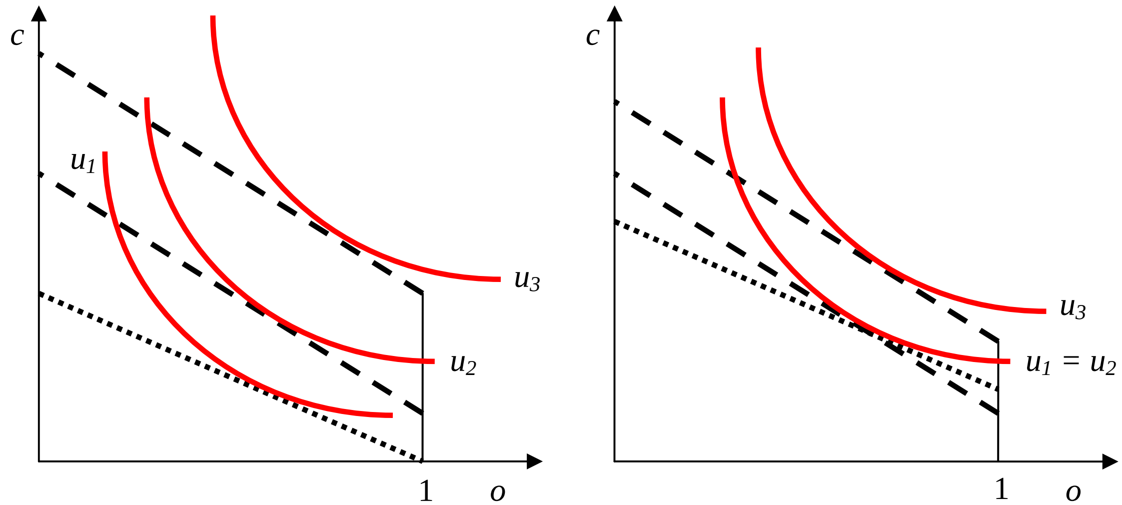
Estos dos resultados pueden interpretarse de la siguiente forma:

(1) El primero, será cierto cuando es posible en la economía que una redistribución de ricos a pobres, deje a estos últimos al nivel que se ha definido como "óptimo" (u objetivo para evitar complicaciones en términos de eficiencia). Este valor $T_3 = \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]\left(\frac{n_1}{n_3}\right)$ está estrictamente relacionado, con el ingreso no-laboral de los agentes normales y las diferencias en salarios entre trabajo no-calificado y calificado. Es decir, cada agente pobre recibiría un subsidio equivalente a: $S_1 = \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]$ que es lo que le faltaría para poder llegar al mismo nivel del agente objetivo. Nótese que compensa tanto por el ingreso laboral, como por el no-laboral.

(2) El segundo, será cierto cuando no es posible en la economía que la redistribución deje a cada agente pobre en el objetivo deseado, esto puede interpretarse de manera sencilla como que "los ricos no son tan ricos", por ende la máxima extracción que puede realizarse en ellos es: $T_3 = (\theta_3 - \theta_2)M\pi - \varepsilon$ es decir, simplemente un "épsilon" menos que la diferencia entre los ingresos no-laborales entre ricos y normales. Por lo tanto, esto implica que cada agente pobre recibirá un subsidio equivalente a: $S_1 = \dfrac{n_3[(\theta_3 - \theta_2)M\pi - \varepsilon]}{n_1}$ lo cual mejora su situación, pero dada la escasez de la economía no cumple con el objetivo de dejarlos al mismo nivel que los agentes normales. Si a cada agente rico se le grava en un monto superior a T_3, los dejarían en un nivel inferior a los agentes objetivo, es decir, quedan en peor posición de la meta que se considera mínima para todos. Por ende, la solución sería la planteada, la cual si bien no es la que se desearía es lo mejor que puede lograrse en dicha economía.

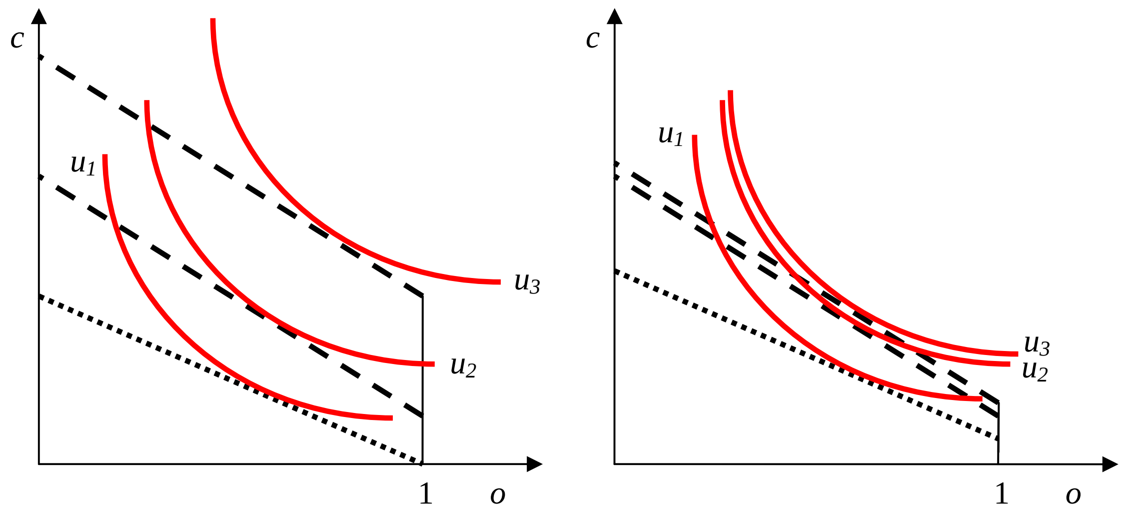
En cada caso se tendrá que el agente pobre termina mejor que en la situación inicial y el agente rico termina peor que en la situación inicial, siendo la situación inicial el caso sin impuestos.

Dado que todos los agentes son iguales en preferencias sobre ocio y consumo, se graficará la situación de los tres tipos de agentes en un mismo gráfico en orden de hacer la comparación.



En el grafico anterior se muestran los casos con y sin impuestos. En ambos la línea punteada representa la curva relevante para el agente pobre (pendiente igual a w_1/p) y la línea segmentada representa la curva relevante para el agente normal y para el agente rico (pendiente igual a w_2/p) en cada caso. Entonces, en este gráfico se muestra que ocurre en el caso (1), es decir, $T_3 = \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2) - w_1\right]\left(\frac{n_1}{n_3}\right)$ Nótese que se cumple el objetivo de que la utilidad del agente pobre se iguala a la del agente de referencia. Obviamente, la utilidad del agente rico cae, pues a ellos se les aplico el impuesto. Es importante señalar también que los agentes normal y pobre no deciden su consumo óptimo de la misma manera, esto se debe a que enfrentan precios distintos. Aún así, sus utilidades son iguales, y tal como se dijo anteriormente, como los agentes son iguales en preferencias puede hacerse el acto simplificador de compararlos de esta forma.

A continuación se muestra el caso (2).



En este caso el objetivo de lograr que $u_1 = u_2$ no es posible, pues la cantidad recaudada no lo permite, pero debe destacarse que de todas formas la utilidad de cada agente pobre aumenta. También debe ser notorio que la utilidad del agente rico disminuye hasta el punto en el que $u_3 \approx u_2$, pues después de la aplicación del impuesto $y_3 \approx y_2$.

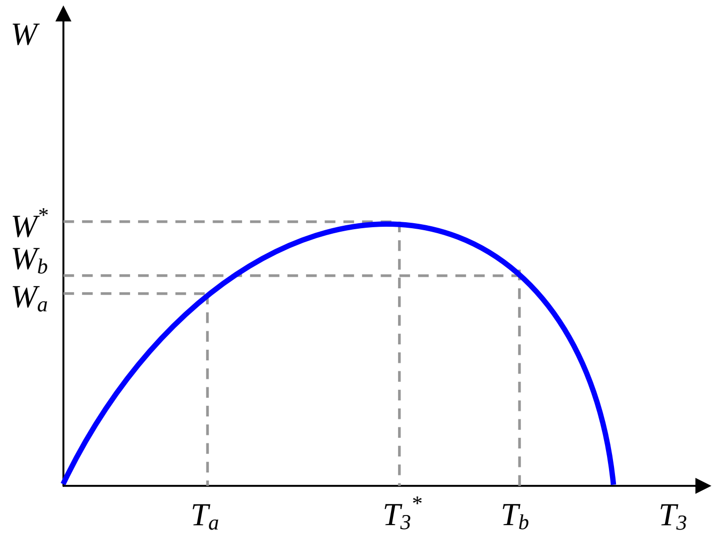
Es importante señalar que el valor de T_3 encontrado en cada caso, es el valor que logra maximizar el bienestar social, dadas las restricciones del problema. Es decir, dados ciertos valores de los parámetros sería posible encontrar un mayor bienestar social (en términos numéricos), con una tasa distinta de impuesto, pero dicha tasa no cumpliría con las restricciones dadas al problema, por ende, serían casos en donde se generen incentivos perversos a los agentes ricos o a los agentes pobres. Gráficamente hablando, se tiene que dado que la función de bienestar social es cóncava[12] existirá un valor de T_3 que hace máximo el bienestar social si se trabaja sin restricciones.[13] Pero como el problema tiene restricciones la solución encontrada entregará un bienestar social menor, pero no generará incentivos perversos de ningún tipo.

[12] Ver Anexo VII.6
[13] Ver Anexo VII.7

Esta discrepancia se explica porque para la maximización de ***W*** "conviene" extraer lo más posible a los agentes ricos para entregárselos a los agentes pobres, la maximización se logra porque las ponderaciones de los agentes en ***W*** son distintas. Es por esta razón, que las restricciones del problema son tan importantes, pues carece de sentido extraer dinero a los agentes ricos hasta el punto de dejarlos pobres, para entregárselos a los agentes pobres para volverlos ricos. Al hacer esto no se soluciona ningún problema de desigualdad o pobreza, pero el problema al estar restringido, no es (necesariamente) capaz de alcanzar el máximo (en términos numéricos) bienestar social.

Otro punto importante a destacar, es que a diferencia de la curva de Laffer[14] en esta curva de bienestar social no existe una zona prohibida. Es decir, puede ser óptimo cobrar una tasa de impuesto más allá del punto que maximiza ***W*** (previamente se explico porque no necesariamente se elegirá este punto). Es claro en el gráfico que un valor específico de bienestar social puede alcanzarse con dos tasas de impuestos distintas, las características del bienestar social alcanzado con una tasa son distintas a las que se alcanzan con otra, a pesar de tener el mismo valor numérico, en términos de igualdad o mejora en términos de los agentes pobres. Por ende, puede ser óptimo dependiendo de los valores de los parámetros y las restricciones del problema elegir una tasa que este por sobre el nivel que maximiza (numéricamente) ***W***.

[14] Curva de Laffer: *esta es una curva cóncava con respecto al origen, que muestra la relación entre la recaudación y el monto del impuesto recaudado. La idea principal de esta, es que salvo el punto de máxima recaudación, cada monto de recaudación tributaria puede lograrse con dos tasas distintas de impuestos, lo cual indica que a partir de la tasa que maximiza la recaudación existe una zona prohibida, pues cualquier recaudación lograda con una tasa superior a la que maximiza la recaudación puede lograrse también con una tasa menor.*



La figura muestra que tanto T_a como T_b, pueden ser soluciones dados los parámetros y restricciones del problema y que no necesariamente la solución será T_3^*.

V. Conclusiones y Recomendaciones

Tal como se planteó en un principio, cuando se tiene una economía específica, es posible encontrar una tasa de impuesto que maximice el bienestar de la sociedad, dada la definición que se haga sobre bienestar y considerando las restricciones planteadas en el problema.

Los resultados analíticos obtenidos son válidos para cualquier economía, siempre y cuando ésta presente funciones de utilidad, de producción, bienestar social, y una forma de recaudación iguales a las efectuadas en este modelo. Por cierto, los resultados numéricos han de variar dependiendo del valor que tengan los parámetros o la forma que tomen las funciones.

Si bien el modelamiento de la economía en este trabajo incluye una serie de supuestos que son bastante restrictivos -por lo cual su aplicación empírica puede verse dificultada-, constituye un acercamiento teórico-analítico a la redistribución de impuestos para el aumento del bienestar social que puede ser conceptualmente interesante.

También es importante señalar que el modelo planteado es estático, por lo cual los resultados obtenidos no son necesariamente extrapolables a un contexto dinámico.

A partir de lo expuesto en la metodología se desprende que el impuesto cobrado será maximizador del bienestar social y variará dependiendo de dos escenarios:

[1] En el caso de que los “ricos” no alcancen a subsidiar a todos los “pobres”, el impuesto corresponderá a la diferencia entre los ingresos de un agente “rico” y uno “normal. En un caso como éste, se alcanzaría el máximo bienestar social que permiten los recursos, pero no se alcanzará a cumplir con los objetivos de la economía, pues seguirán existiendo agentes “pobres”.

[2] En el caso de que los “ricos”, tengan suficientes recursos como para subsidiar a todos los “pobres” el impuesto cobrado será una función de las diferencias en salario (de trabajo calificado y no calificado), del número de agentes “ricos” y “pobres”, y del ingreso no-laboral de los agentes “normales”. Este impuesto entregaría un resultado, en términos de bienestar social, deseado para la economía pues transformaría a todos los agentes “pobres” en “normales”, es decir, eliminaría la pobreza al dejar a todos los agentes en, al menos, el nivel mínimo definido por la economía como “aceptable”.

Claramente se puede ver que realizar un cargo impositivo a los agentes ricos, en un monto menor a los aquí establecidos, sería ineficiente para la economía, pues no alcanzaría el máximo bienestar social, dada la construcción del problema efectuado.

Cabe señalar que el resultado final obtenido, definitivamente, ***no*** es óptimo de Pareto, pues en cualquiera de los casos, los agentes “pobres” mejorarán su situación, ya que ellos reciben los subsidios; los agentes “normales” no cambian su situación, puesto que no son ni beneficiados ni perjudicados con la norma impositiva y por último, los agentes “ricos” estarán peor que antes, pues a ellos se les aplica el impuesto. Aún habiendo agentes en la economía que sufran una disminución en su utilidad, el bienestar de la sociedad mejorará.

Otro elemento a tomar en consideración, es que, a pesar de que los ricos ven disminuidos sus ingresos, se está asumiendo que esto no afecta la cantidad de capital en la economía o incluso la inversión que pueda existir sobre la misma por parte de estos agentes. Si bien, tal como se dijo antes, cualquier análisis sobre el capital no está modelado en este trabajo, consecuencias en esta variable (que estaría representado por el parámetro $\boldsymbol{A}$ en la función de producción), efectivamente tendrán efectos en la economía, expresadas en alteraciones en la cantidad de capital, lo cual el modelo no es capaz de representar.

Como posibles extensiones de este trabajo se pueden desarrollar simulaciones que asignen valores a los parámetros definidos, de modo tal de cuantificar el monto de los impuestos pagados y de las redistribuciones efectuadas, a ricos y pobres, respectivamente. En la realización de este tipo de análisis empíricos no se debe olvidar incluir el costo económico asociado (administrativo y de oportunidad, entre otros), que en este modelo no se ha considerado, debido a que no enriquecía el análisis de búsqueda del óptimo. En efecto, la inclusión de costos no altera el óptimo encontrado, aunque sí afecta los montos de los subsidios entregados.

Como este trabajo constituye una primera aproximación al tema, en la metodología del mismo no se ha considerado efectuar el análisis de bienestar en base a un modelo de equilibrio general dinámico, que refleje de manera más realista la problemática en Política Tributaria. Tampoco se consideró el caso de una economía abierta. Nuevas investigaciones relacionadas con este trabajo pueden incluir un modelo de equilibrio general dinámico y una economía abierta.

Finalmente, el modelo de bienestar aquí expuesto plantea una economía con tres tipos de agentes representativos, a saber; “pobres”, “normales” y “ricos”. Las tres categorías de agentes presentan una misma función de utilidad y un nivel de riqueza diferente. Como supuesto simplificador no se consideró la existencia de distintos montos de riqueza dentro de cada categoría, puesto que a nuestro juicio dificultaba el modelamiento y aún más, la conceptualización de la realidad representada en este primer acercamiento al tema. Futuras investigaciones también podrían considerar una desagregación de los individuos normales, ricos y pobres.

VI. Referencias

[1] Angelopoulos, Konstantinos; Malley, James & Philippopoulos, Apostolis. “Tax Structure, Growth and Welfare in the UK”.

[2] Dolan, Paul & Tsuchiya, Aki (2005). “Determining the Parameters in a Social Welfare Function Using Stated Preference Data: An Application to Health”. Leonard Davis Institute of Health Economics.

[3] Feldstein, Martin (2006). “The Effect of Taxes on Efficincy and Growth”. National Bureau of Economic Research, May 2006.

[4] Funke, Michae & Strulik, Holger (2003). “Taxation, Growth and Welfare: Dynamic Effects of Estonia’s 2000 Income Tax Act”. Bank of Finland. Institute of Economies in Transition. BOFIT Discussion Papers n°10

[5] Garfinkel, Irwin; Rainwater, Lee & Smeeding, Timothy M. (2006). “A Re-examination of Welfare States and Inequality in Rich Nations: How In-kind Transfers and Indirect Taxes Change the Story”. Journal of Policy Analysis and Managment, Vol. 25, N°4, (2006).

[6] Ghez, Gilbert & Becker, Gary (1975). “The Allocation of Time and Goods Over the Life Cycle”. National Bureau of Economic research, New York, 1975.

[7] Harberger, Arnold (1964). “Taxation, Resource Allocation, and Welfare”. The Role of Direct and Indirect Taxes in Federal Revenue System. NBER and the Brookings Institution, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[8] Kuznets, Simon (1955). “Economic Growth and Income Innequality”. American Economic Review 45, pp 1–28.

[9] Little, I. M. D. (1951). “Direct Versus Indirect Taxes”. Economic Journal, September 1951, pp 577–584.

[10] Mirrlees, James A. (1971). “An Exploration in the Theory of Optimal Income Taxation”. Review of Economic Studies 38, 175–208.

[11] Mankiw, Gregory (2008). “Smart Taxes: an Open Invitation to Join the Pigou Club”. Based on a talk presented at the Eastern Economic Association, March 8, 2008.

[12] Mankiw, Gregory & Weinzierl, Matthew (2007). “The Optimal Taxation of Height: A Case of Study of Utilitarian Income Redistribution”. (working paper).

[13] Marfán, Manuel (1985). “El Conflicto entre la Recaudación de Impuestos y la Inversión Privada: Elementos Teóricos para una Reforma Tributaria”. Colección Estudios Cieplan n°18. Diciembre 1985, pp, 63–93. Estudio 110.

[14] Ramsey, Frank (1927). “A Controbuttion to the Theory of Taxation”. Economic Journal 37, 47–61.

[15] Russo, Felice (2004). “Italian Personal Income Tax Reform, Innequality and Welfare: IRE Redistributive Effects”.

[16] Shapiro, Carl & Stiglitz, Joseph (1984). “Equilibrium Unemployment as a Worker Discipline Device”. The Amercian Economic Review, vol. 74, n°3. (Jun., 1984) pp 433–444.

[17] Su, Qi (2001), “Economic Inequality and Economic Growth”. Humboldt-University Berlin, Institute of Management, Spaudauer Str. 1, D-10178, Berlin, Germany.

[18] Torche, Arístides (1982). “La Redistribución del Ingreso como Criterio del Valor de la Evaluación de Proyectos”. Cuadernos de Economía n°56. Universidad Católica de Chile.

[19] Encuesta CASEN, 2006. MIDELPLAN. Universidad de Chile.

VII. Anexos

Anexo VII.1) Resolviendo el problema de los consumidores

Se tiene que los agentes quieren resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & u_i(o,c) = o_i^{\alpha} x_i^{1-\alpha} \\ s.a. \quad & px = y_i + w_i l_i \\ & 1 = o_i + l_i \end{aligned}$$

Es decir, cada agente resuelve:

$$£ = o^{\alpha} x^{1-\alpha} + \lambda\left[y_i + w_i - w_i o - px\right]$$

$$\frac{\partial £}{\partial o} = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{x}{o}\right)^{1-\alpha} - \lambda w_i = 0$$

$$\frac{\partial £}{\partial o} = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)\left(\frac{o}{c}\right)^{\alpha} - \lambda p = 0$$

$$\frac{\partial £}{\partial o} = 0 \Leftrightarrow y_i + w_i - w_i o - px = 0$$

Implicando:

$$o_i^* = \frac{\alpha(y_i + w_i)}{w_i}$$

$$x_i^d = \frac{(1-\alpha)(y_i + w_i)}{p}$$

$$l_i^s = \frac{(1-\alpha)w_i - \alpha y_i}{w_i}$$

Por lo tanto, después de impuestos, cada agente pobre, tiene:

$$o_1^* = \frac{\alpha\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)}{w_1}$$

$$x_1^d = \frac{(1-\alpha)\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)}{p}$$

$$l_1^s = \frac{(1-\alpha)w_1 - \alpha\frac{n_3 T_3}{n_1}}{w_1}$$

$$v_1 = \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)$$

Cada agente normal, tiene:

$$o_2^* = \frac{\alpha(\theta_2 M\pi + w_2)}{w_2}$$

$$x_2^d = \frac{(1-\alpha)(\theta_2 M\pi + w_2)}{p}$$

$$l_2^s = \frac{(1-\alpha)w_2 - \alpha\theta_2 M\pi}{w_2}$$

$$v_2 = \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(\theta_2 M\pi + w_2)$$

Y cada agente rico tiene:

$$o_3^* = \frac{\alpha(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2)}{w_2}$$

$$x_3^d = \frac{(1-\alpha)(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2)}{p}$$

$$l_3^s = \frac{(1-\alpha)w_2 - \alpha(\theta_3 M\pi - T_3)}{w_2}$$

$$v_3 = \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2)$$

De estas relaciones se puede derivar que:

$$X^d = n_1 x_1^d + n_2 x_2^d + n_3 x_3^d$$

$$X^d = \frac{n_1(1-\alpha)\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)}{p} + \frac{n_2(1-\alpha)(\theta_2 M\pi + w_2)}{p} + \frac{n_3(1-\alpha)(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2)}{p}$$

$$X^d = \frac{(1-\alpha)[n_3 T_3 + n_1 w_1 + (n_2 + n_3)w_2 + M\pi - n_3 T_3]}{p}$$

$$X^d = \frac{(1-\alpha)[n_1 w_1 + (n_2 + n_3)w_2 + M\pi]}{p}$$

Nótese que el impuesto se ha cancelado, dejando la demanda agregada, de la misma forma que sería sin impuestos.

También se puede obtener la oferta de trabajo no calificado:

$$L_{nc}^s = \frac{n_1(1-\alpha)w_1 - \alpha n_3 T_3}{w_1}$$

Así como también la oferta de trabajo calificado:

$$L_c^s = n_2 l_2^s + n_3 l_3^s$$
$$L_c^s = \frac{n_2\left[(1-\alpha)w_2 - \alpha\theta_2 M\pi\right]}{w_2} + \frac{n_3\left[(1-\alpha)w_2 - \alpha(\theta_2 M\pi - T_3)\right]}{w_2}$$
$$L_c^s = \frac{(n_2+n_3)(1-\alpha)w_2 - \alpha M\pi + \alpha n_3 T_3}{w_2}$$

Anexo VII.2) Resolviendo el problema de las firmas

Cada firma representativa desea resolver el siguiente problema:

$$\max\ \pi = pAl_{nc}^{\beta} l_c^{\gamma} - w_1 l_{nc} - w_2 l_c$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial l_{nc}} = 0 \Leftrightarrow pA\beta l_{nc}^{\beta-1} l_c^{\gamma} - w_1 = 0$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial l_c} = 0 \Leftrightarrow pA\gamma l_{nc}^{\beta} l_c^{\gamma-1} - w_2 = 0$$

Esto implica que el óptimo esta dado en:

$$\frac{\beta}{\gamma}\frac{l_{nc}}{l_c} = \frac{w_1}{w_2}$$

Lo que conduce a que las demandas por factores vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_{nc}^d = \left(\frac{\beta}{w_1}\right)\left[pA\left(\frac{\beta}{w_1}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$
$$l_c^d = \left(\frac{\gamma}{w_2}\right)\left[pA\left(\frac{\beta}{w_1}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

Por ende, cada firma ofrecerá la siguiente cantidad del producto en la economía:

$$x^s = \left[(p)^{\beta+\gamma} A \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

Lo que implica que las utilidades de cada firma serán iguales a:

$$\pi = (1-\beta-\gamma) \left[pA \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

Por lo tanto, el mercado de factores ofrecerá la siguiente cantidad de producto y demandará las siguientes cantidades de factores:

$$X^s = M \left[(p)^{\beta+\gamma} A \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

$$X^s = \frac{M}{p} \left[pA \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

$$X^S = \frac{M\pi}{p(1-\beta-\gamma)}$$

$$L^d_{nc} = M \left(\frac{\beta}{w_1} \right) \left[pA \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

$$L^d_{c} = M \left(\frac{\gamma}{w_2} \right) \left[pA \left(\frac{\beta}{w_1} \right)^{\beta} \left(\frac{\gamma}{w_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}$$

Anexo VII.3) Encontrando los precios de equilibrio de la economía

Al buscar el equilibrio en el mercado del bien producido por la economía, se tiene:

$$X^d = X^s$$
$$\Rightarrow p^* = \left[\frac{(1-\alpha)[n_1 w_1 + (n_2 + n_3)w_2]}{[1-(1-\beta-\gamma)(1-\alpha)]M}\right]^{1-\beta-\gamma}\left(\frac{w_1}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{w_2}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{A}\right)$$

Para el mercado laboral no calificado, debe cumplirse que:

$$L_{nc}^d = L_{nc}^s$$

Por lo tanto, el salario de equilibrio queda de resolver la siguiente ecuación:

$$\beta M\left[pA\beta^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_1^*\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma-1}} - n_1(1-\alpha)\left(w_1^*\right) + \alpha n_3 T_3 = 0$$

Encontrando el equilibrio en el mercado laboral calificado, se tiene:

$$L_c^d = L_c^s$$

Por lo tanto, el salario de equilibrio del mercado laboral calificado queda dado por la resolución de la siguiente ecuación:

$$M(\gamma - \alpha(1-\beta-\gamma))\left[pA\gamma^{\gamma}\left(\frac{\beta}{w_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_2^*\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma-1}} - (n_2 + n_3)(1-\alpha)\left(w_2^*\right) - \alpha n_3 T_3 = 0$$

Nótese que las dos últimas ecuaciones pueden resolverse sin mayores dificultades, aplicando métodos numéricos, por ejemplo, si se conocieran los valores de los parámetros.

Como puede verse, cada precio de equilibrio depende de los otros dos precios, es decir, el precio del producto final depende de los precios de la mano de obra calificada y la no calificada. El salario de la mano de obra no calificada depende del precio del producto y del salario pagado a la mano de obra calificada, etc. Como se tienen tres incógnitas y tres ecuaciones, es posible encontrar los precios de equilibrio de la economía.

Anexo VII.4) Es posible determinar que los precios de equilibrio de la economía solo dependen de parámetros

Si se toman las ecuaciones que determinan el salario laboral calificado y no calificado que son las siguientes:

$$\beta M\left[pA\beta^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_1^*\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma-1}}-n_1(1-\alpha)\left(w_1^*\right)+\alpha n_3T_3=0$$

$$M\left(\gamma-\alpha(1-\beta-\gamma)\right)\left[pA\gamma^{\gamma}\left(\frac{\beta}{w_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_2^*\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma-1}}-\left(n_2+n_3\right)(1-\alpha)\left(w_2^*\right)-\alpha n_3T_3=0$$

Y se expresan de la siguiente manera:

$$\alpha n_3T_3=n_1(1-\alpha)\left(w_1^*\right)-\beta M\left[pA\beta^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_1^*\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma-1}}$$

$$\alpha n_3T_3=M\left(\gamma-\alpha(1-\beta-\gamma)\right)\left[pA\gamma^{\gamma}\left(\frac{\beta}{w_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left(w_2^*\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma-1}}-\left(n_2+n_3\right)(1-\alpha)\left(w_2^*\right)$$

Para luego igualarlas y reordenarlas:

$$(1-\alpha)\left(n_1w_1^*+\left(n_2+n_3\right)w_2^*\right)=M\left[pA\left(\frac{\beta}{w_1^*}\right)^{\beta}\left(\frac{\gamma}{w_2^*}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\beta-\gamma}}\left[(1-\alpha)(\beta+\gamma)-\alpha\right]$$

Con este resultado, podemos apreciar que es posible expresar un salario en función del otro, además del precio del producto final. Esto implica un resultado bastante importante, pues independiente del monto del impuesto la relación existente entre el salario de la mano de obra calificada y la no calificada será siempre la misma.

Y si de esta igualdad se despeja el precio del producto final, se tiene:

$$p^* = \left[\frac{(1-\alpha)\left[n_1 w_1^* + (n_2 + n_3) w_2^*\right]}{\left[1-(1-\beta-\gamma)(1-\alpha)\right] M} \right]^{1-\beta-\gamma} \left(\frac{w_1^*}{\beta} \right)^{\beta} \left(\frac{w_2^*}{\gamma} \right)^{\gamma} \left(\frac{1}{A} \right)$$

Que es exactamente lo mismo que se obtiene del equilibrio en el mercado del bien que produce la economía (lo cual es consistente con la ley de Walras[15])

Se sabe, por la forma en como se comportan las ofertas individuales de trabajo, que para un agente pobre, la oferta de trabajo depende negativamente del impuesto cobrado, y positivamente de salario ganado. Entonces, la aplicación del impuesto hará que la oferta de trabajo del agente pobre se contraiga, es decir, ofrecerá menos trabajo, lo que hará subir el salario. Esta alza en el salario hace que el agente desee ofrecer más trabajo haciendo caer el salario. Se asumirá que el efecto total de este cambio es cero. Lo que implica que no habrá cambios ni el salario ni en la cantidad de equilibrio.

Análogamente, se asume lo mismo para el caso de los agentes ricos, es decir, que el aumento en la tasa impositiva hará aumentar su oferta de trabajo. Este desplazamiento en la curva de oferta hace disminuir su salario, lo cual hará que los agentes deseen ofrecer menos trabajo, lo que hacer subir el salario. Se supondrá que el efecto final en el mercado del trabajo calificado es nulo, tanto en cantidades como en salario.

Lo anterior dice que en el agregado el monto del impuesto no tiene efecto en los salarios, lo que implica que el problema de la firma no cambia entre la situación con y sin impuestos, lo que conlleva a que las utilidades de la firma serán las mismas, por lo tanto la aplicación de un impuesto tiene efecto nulo sobre los agentes normales, lo cual era una condición que se debía cumplir desde un comienzo (pues el agente de referencia no puede cambiar su equilibrio ni su utilidad, pues de ocurrir esto sería absurdo ocuparlo

[15] Si existen *N* mercados en una economía, y *N – 1* mercados se encuentran en equilibrio, el N-ésimo mercado también estará en equilibrio.

como referencia) y el efecto que tiene sobre los agentes ricos es el de una disminución, sólo en el monto del impuesto, lo cual también era una condición planteada desde un comienzo.

Por ende, siguiendo lo dicho en el Anexo VII.3, es posible encontrar los precios de la economía, pues se tienen tres ecuaciones y tres incógnitas y por lo enunciado previamente, los salarios no dependen del monto del impuesto, por lo cual el precio del producto final tampoco lo hace. Esto lleva necesariamente a que los precios de la economía $\vec{P}(p, w_1, w_2)$, en el equilibrio, pueden expresarse en función de los parámetros del problema y no de variables.

Anexo VII.5) Efecto positivo de la aplicación de impuestos en el bienestar social

Después de la aplicación de impuestos se tiene que:

$$v_1 = \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)$$

$$v_2 = \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\theta_2 M\pi + w_2\right)$$

$$v_3 = \left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2\right)$$

Por lo tanto, se cumplirá que:

$$W\left(\vec{v_i}\right) = \phi_1 \sum_{j=1}^{n_1} \ln\left(v_{1j}\right) + \phi_2 \sum_{j=1}^{n_2} \ln\left(v_{2j}\right) + \phi_3 \sum_{j=1}^{n_3} \ln\left(v_{3j}\right)$$

$$W\left(\vec{v_i}\right) = \phi_1 n_1 \ln\left(v_1\right) + \phi_2 n_2 \ln\left(v_2\right) + \phi_3 n_3 \ln\left(v_3\right)$$

$$\frac{\partial W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3} = \frac{\phi_1 n_1}{v_1}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3}{n_1}\right) + 0 + \frac{\phi_3 n_3}{v_3}\left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}(-1)$$

$$\frac{\partial W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3} = n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{\phi_1}{w_1 v_1} - \frac{\phi_3}{w_2 v_3}\right]$$

Como se sabe que por construcción $\phi_1 > \phi_3$, y por como está definido el problema debe cumplirse siempre que $v_3 > v_1$, y que $w_2 > w_1$, por lo tanto, gserá siempre cierto que:

$$\frac{\phi_1}{w_1 v_1} > \frac{\phi_3}{w_2 v_3}$$

Al multiplicar este resultado por un valor mayor estricto que cero, por ejemplo $n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}$, se tiene que:

$$n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha} \frac{\phi_1}{w_1 v_1} > n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha} \frac{\phi_3}{w_2 v_3}$$

$$n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{\phi_1}{w_1 v_1} - \frac{\phi_3}{w_2 v_3}\right] > 0$$

$$\frac{\partial W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3} > 0$$

Anexo VII.6) Concavidad en *T_3* de la función de bienestar social

Se debe mostrar que la segunda derivada en T_3 de la función de bienestar social de negativa. Entonces si:

$$\frac{\partial W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3} = n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{\phi_1}{w_1 v_1} - \frac{\phi_3}{w_2 v_3}\right]$$

Se cumplirá que:

$$\frac{\partial^2 W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3^2} = n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left[-\frac{\phi_1}{w_1 v_1^2}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3}{n_1}\right) - \frac{\phi_3}{w_2 v_3^2}\left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\right]$$

$$= (-1) n_3 \alpha^{2\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{2-2\alpha}\left[\frac{\phi_1}{w_1^2 v_1^2}\left(\frac{n_3}{n_1}\right) + \frac{\phi_3}{w_2^2 v_3^2}\right] < 0$$

La función es negativa, pues todos los términos en ella son estrictamente positivos y se están sumando o multiplicando, lo que hace que al estar todo multiplicado por un negativo, da que el resultado final sea negativo. Esto implica que W es cóncava con respecto al origen.

Anexo VII.7) Tasa de impuesto que maximiza el bienestar social al trabajar sin restricciones

Como se vio en el punto anterior, la función de bienestar social es cóncava con respecto al origen, por lo cual, al derivar se encuentra un máximo. Por ende, basta con las condiciones de primer orden para encontrar la solución:

$$\frac{\partial W\left(\vec{v_i}\right)}{\partial T_3} = 0 \Leftrightarrow n_3 \alpha^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{\phi_1}{w_1 v_1} - \frac{\phi_3}{w_2 v_3}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\phi_1}{w_1 v_1} - \frac{\phi_3}{w_2 v_3}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_1}{w_1 v_1} = \frac{\phi_3}{w_2 v_3}$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_1}{w_1} v_3 = \frac{\phi_3}{w_2} v_1$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_1}{w_1}\left(\frac{\alpha}{w_2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2\right) = \frac{\phi_3}{w_2}\left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{p}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_1}{w_1 w_2^{\alpha}}\left(\theta_3 M\pi - T_3 + w_2\right) = \frac{\phi_3}{w_1^{\alpha} w_2}\left(\frac{n_3 T_3}{n_1} + w_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\phi_1}{w_1 w_2^{\alpha}}\left(\theta_3 M\pi + w_2\right) - \frac{\phi_3}{w_1^{\alpha} w_2} w_1 = \left[\frac{\phi_3}{w_1^{\alpha} w_2}\frac{n_3}{n_1} + \frac{\phi_1}{w_1 w_2^{\alpha}}\right] T_3$$

$$\Rightarrow T_3^{*} = \frac{\frac{\phi_1}{w_1 w_2^{\alpha}}\left(\theta_3 M\pi + w_2\right) - \frac{\phi_3}{w_1^{\alpha} w_2} w_1}{\frac{\phi_3}{w_1^{\alpha} w_2}\frac{n_3}{n_1} + \frac{\phi_1}{w_1 w_2^{\alpha}}}$$