

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Escuela de Economía

INTELIGENCIA ARTIFICIAL APLICADA AL PRONOSTICO.

Seminario para Optar al Título de Ingeniero Comercial Mención Economía

Autor :

Roberto Alexandre Otárola Estrada.

Profesor Guía : Dr. Antonino Parisi Fernández.

Santiago, Chile. 2004

AGRADECIMIENTOS .	1
RESUMEN .	3
INTRODUCCION .	5
SECCION I: METODOLOGIA .	9
SECCION II: IMPLEMENTACION . .	25
SECCION III: EVALUACION DE LOS RESULTADOS . .	29
SECCION IV: CONCLUSION .	35
BIBLIOGRAFIA .	37

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios y a mi familia, por el amor y apoyo incondicional que me han entregado toda la vida, y a todas las personas que de una u otra forma me han ayudado durante mis estudios y durante la elaboración del presente seminario de título. En especial, quisiera agradecer a mi primo Jorge Luis Estrada por intercambiar ideas y facilitarme el programa MATLAB utilizado durante la realización de este trabajo.

RESUMEN

En el presente trabajo revisaremos una novedosa técnica de inteligencia artificial, conocida como lógica difusa (*fuzzy logic*). Luego, utilizando el paquete computacional MATLAB 6 Release 13, construiremos un modelo dinámico basado en dicha técnica, el cual usaremos para pronosticar la evolución del Índice General de Precios de Acciones (IGPA) de la Bolsa de Comercio de Santiago. Posteriormente, evaluaremos los resultados entregados por la metodología propuesta, comparándolos con aquellos arrojados por un modelo multivariable dinámico más tradicional. Específicamente, comprobaremos la capacidad de estos para acertar al pronóstico del signo de la variación porcentual semanal del IGPA y simularemos una estrategia de compra-venta basada en los pronósticos de cada modelo, además de una estrategia de tipo *buy and hold*, para contrastar las rentabilidades que se obtendrían a partir de ellas.

INTRODUCCION

El proceso de globalización de la economía mundial y la relevancia que ha alcanzado el conocimiento como motor del desarrollo de los países, hacen necesario no sólo el aprovechamiento pleno de las capacidades competitivas que posee un país, sino también la búsqueda y adquisición de nuevas capacidades (Brunner 2001, Sachs, Larraín y Warner 2001). Dentro de las nuevas capacidades, las mejoras en el procesamiento de información en grandes volúmenes y a gran velocidad han ocupado un lugar destacado, permitiendo que aumente la productividad de la mayoría de las firmas existentes y que aparezcan oportunidades para crear nuevos negocios. En este contexto, surge lo que se conoce como inteligencia artificial (IA). La IA, cuando es considerada como herramienta tecnológica, puede describirse como sigue:

“El objetivo (de la IA como herramienta tecnológica) es resolver en el computador problemas "difíciles", que se sabe están al alcance de sistemas inteligentes naturales pero para los cuales no existe una descripción algorítmica satisfactoria. Los problemas incluidos dentro de esta categoría se caracterizan en general por la dificultad de disponer de toda la información necesaria para resolverlos sin ambigüedad. Ya sea hay demasiada información que considerar (ej.: ajedrez), ya sea ésta es incompleta o inconsistente (ej.: lenguaje verbal), ya sea está muy poco estructurada (ej.: análisis de imágenes). En estos casos es interesante reproducir las capacidades de procesamiento observadas en los sistemas naturales, aunque no necesariamente modelando sus mecanismos internos.”¹

El desarrollo de la IA ha permitido que el análisis de sistemas no-lineales altamente

complejos, dentro de los cuales se encuentran los precios de la mayoría de los instrumentos financieros, indicadores climáticos, etc., sea cada vez más eficaz y eficiente.

Los mercados bursátiles del mundo también han experimentado grandes progresos, que los han llevado a integrarse cada vez y a estar en sintonía con el desarrollo de los países. Es así como en Chile, desde la reforma al sistema previsional, ocurrida en 1981, la creación de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP) ha contribuido al ahorro y, por lo tanto al crecimiento del país (Corbo y Schmidt-Hebbel 2003). Además de su papel en el crecimiento del país, las AFP cumplen un importante rol en la distribución del ingreso, puesto que las pensiones que reciben y recibirán los jubilados, dependen de las cotizaciones que los afiliados realicen durante su vida activa y de los resultados que obtengan las AFP en la gestión de estos aportes. El desempeño que obtengan las AFP en la administración de las carteras de inversión, a su vez, depende de la diversificación de la cartera que hagan, para controlar el riesgo, y de la anticipación con que perciban los movimientos del mercado, para así decidir qué posición adoptar con respecto a sus inversiones.

Las características de no-linealidad y alta complejidad que presentan los precios accionarios, y por lo tanto los índices bursátiles; junto a la importancia de contar con buenos pronósticos sobre la evolución de éstos, para poder realizar con éxito operaciones de cobertura, especulación o arbitraje; y la disponibilidad de las técnicas de inteligencia artificial, han dado origen a una gran cantidad de estudios basados en la aplicación de estas técnicas para pronosticar la evolución de algunos índices bursátiles, los cuales han obtenido buenos resultados (Shapiro 2002). En el presente trabajo presentaremos y aplicaremos una novedosa técnica de inteligencia artificial, conocida como lógica difusa (*fuzzy logic*), con el objeto de pronosticar la evolución del Índice General de Precios de Acciones (IGPA) de la Bolsa de Comercio de Santiago. Luego, evaluaremos las estimaciones obtenidas con la metodología propuesta, en términos de su capacidad de predecir el signo de la variación (si sube o baja), y de la rentabilidad que obtendría una estrategia de compra-venta basada en estos pronósticos. La hipótesis consiste en que los resultados que se obtendrán a partir del modelo difuso que desarrollaremos, son significativamente mejores que aquellos derivados de un modelo lineal más convencional, que utilizaremos como *benchmark*.

Lo que resta de este trabajo se organiza de la siguiente forma. En la Sección I, titulada Metodología, haremos una revisión de la técnica de inteligencia artificial llamada lógica difusa. En la Sección II, titulada Implementación, describiremos los pasos seguidos para obtener los pronósticos sobre la evolución del IGPA. En la Sección III, titulada Evaluación de los Resultados, calcularemos la capacidad de predecir el signo de la variación del IGPA que presenta el modelo; simularemos una estrategia de compra-venta basada en las estimaciones obtenidas y calcularemos su rentabilidad; y compararemos los dos indicadores anteriores con aquellos provenientes de un modelo multivariable dinámico más tradicional, y con la rentabilidad conseguida por una estrategia *buy and hold*. En la Sección IV, se encuentra la conclusión del trabajo y la bibliografía consultada su elaboración.

¹ Ver <http://www.dcc.uchile.cl/~abassi/Cursos/IA/Apuntes/c1.html>

SECCION I: METODOLOGIA

El modelo que desarrollaremos para pronosticar la evolución del IGPA, se basa en una de las ramas de la inteligencia artificial (IA), conocida como lógica difusa (*fuzzy logic*). Para entender de qué se trata la lógica difusa, debemos partir por familiarizarnos con el concepto de conjunto difuso, el cual constituye uno de los pilares de esta metodología. Un conjunto se dice que es “difuso” cuando no posee una frontera claramente definida, es decir, este puede contener elementos que tienen un grado parcial de pertenencia a él. A diferencia de un conjunto difuso, un conjunto convencional o clásico sólo incluye o excluye a un elemento dado, o sea, este tipo de conjuntos está formado sólo por elementos que pertenecen totalmente a él. Por ejemplo, el conjunto de los días de la semana indudablemente incluye al Lunes, Martes y Sábado. Asimismo, este conjunto excluye a “mantequilla”, a “libertad”, etc., tal como se ilustra a continuación en la Figura 1.

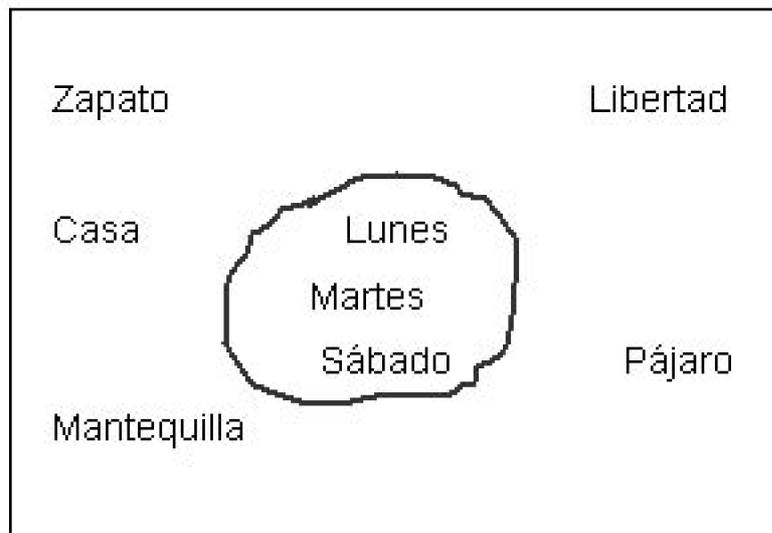


Figura 1: Días de la semana

Fuente: adaptación MATLAB ²

Llamaremos a este tipo de conjuntos “clásico”, debido a que ha estado con nosotros desde hace mucho tiempo. Aristóteles fue quien primero formuló la “Ley del Término Medio Excluido”, la cual establece que un elemento dado X debe pertenecer, ya sea al conjunto A o al conjunto complemento de A. Dicho de otra manera, *con respecto a cualquier sujeto, una cosa en particular debe ser aseverada o negada*.

Veamos como se cumple la regla anterior para un día de la semana: “con respecto a cualquier sujeto (digamos Lunes), una cosa en particular (que es un día de la semana) debe ser aseverada o negada (asevero que Lunes es un día de la semana)”. Esta ley exige que entre el conjunto A y su complemento esté contenido el conjunto universo. Cualquier elemento pertenece a un grupo o al otro. No existe ningún elemento que sea un día de la semana y a la vez no lo sea.

Consideremos ahora el conjunto de los días que conforman un fin de semana, ilustrado en la Figura 2.

² Ver Bibliografía



Figura 2: Días del fin de semana

Fuente: adaptación MATLAB³

La mayoría estará de acuerdo en que Sábado y Domingo pertenecen al conjunto Fin de Semana, pero ¿qué ocurre con el día Viernes?. Se “siente” como si fuera parte del fin de semana. Sin embargo, parece que debería estar técnicamente excluido. Así es como, en el diagrama anterior (Figura 2), Viernes se ubica sobre la frontera del conjunto Fin de Semana, situación que no se toleraría dentro de los conjuntos clásicos o “normales”. Desde el punto de vista de los conjuntos clásicos o se está adentro o se está afuera. Sin embargo, la experiencia humana sugiere que permanecer sobre la frontera es parte de la vida.

Nos encontramos ahora en un terreno complicado, porque comenzamos a tomar en cuenta las percepciones individuales y la idiosincrasia de las personas cuando intentamos definir qué constituye el fin de semana. Sin embargo, este es justamente el punto. Incluso el diccionario es impreciso, definiendo el fin de semana como: “Parte de la semana que comprende normalmente el sábado y el domingo”⁴. Estamos entrando en el terreno donde los bordes claros de la lógica booleana dejan de ser útiles. El razonamiento difuso comienza a ser valioso justamente cuando hablamos sobre cómo las personas perciben el concepto “fin de semana”, en contraste con la simple clasificación que es útil sólo para fines contables. El siguiente planteamiento constituye el cimiento de la lógica difusa:

En lógica difusa, la veracidad de cualquier planteamiento es un asunto de grado.

Cualquier planteamiento puede ser difuso. La ventaja que entrega el razonamiento difuso es la posibilidad de contestar a cualquier pregunta del tipo verdadero o falso con una respuesta ni tan verdadero o ni tan falso. Este es el tipo de cosas que los humanos hacemos todo el tiempo (pensemos en cuán a menudo recibimos una respuesta concreta a una pregunta aparentemente simple). En cambio, este es un truco nuevo para los computadores.

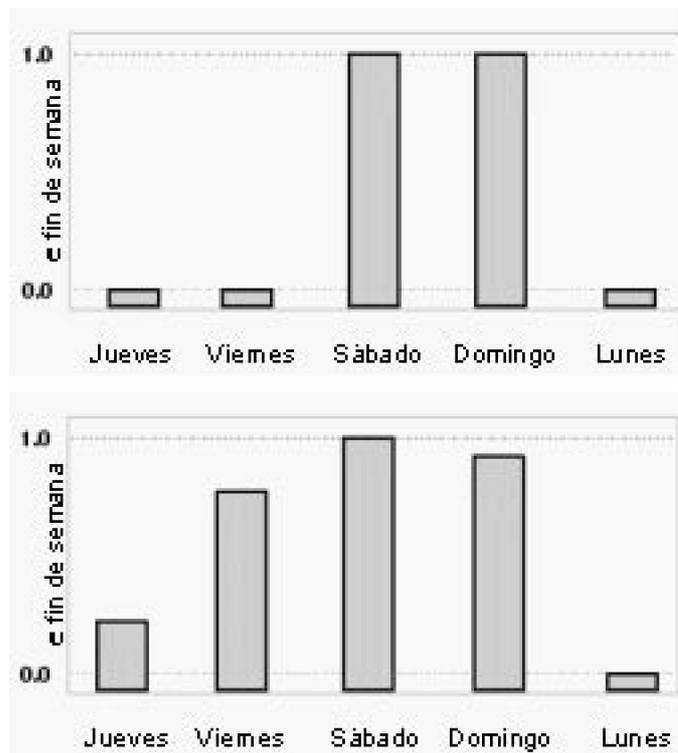
³ Ver Bibliografía

⁴ Buscar “fin de semana” en <http://www.rae.es/>

¿Cómo funciona esto?. El razonamiento difuso es sólo cuestión de generalizar la lógica booleana. Si le asignamos a “verdadero” el valor numérico 1 y a “falso” el valor numérico 0, estamos diciendo que la lógica difusa también admite la existencia de los valores intermedios, como 0,2 y 0,7453. Por ejemplo:

- Pregunta: ¿Es Sábado un día del fin de semana?
- Respuesta: 1 (sí, o verdadero)
- Pregunta: ¿ Es Martes un día del fin de semana?
- Respuesta: 0 (no, o falso)
- Pregunta: ¿ Es Viernes un día del fin de semana?
- Respuesta: 0,8 (sí, pero no completamente)
- Pregunta: ¿ Es Domingo un día del fin de semana?
- Respuesta: 0,95 (sí, pero no tanto como el Sábado)

A continuación, en la Figura 3, se encuentran graficados los valores de verdad con respecto a la pertenencia al fin de semana de un día en particular. La figura del lado izquierdo (Figura 3A), representa la situación cuando estamos obligados a responder con un rotundo sí o no. La de la derecha (Figura 3B), muestra lo que ocurre si se nos permite responder incluyendo los valores difusos intermedios.

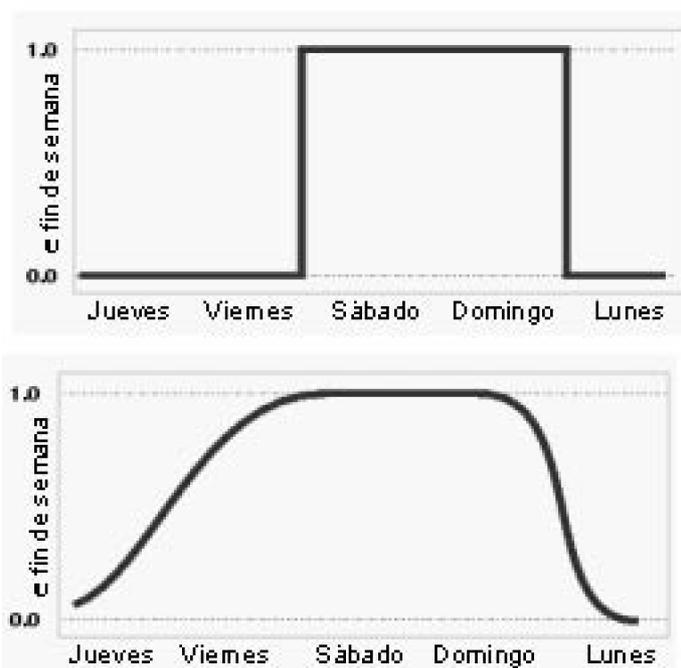


Figuras 3A y 3B: Pertenencia bivalente y multivalente al fin de semana, respectivamente

Fuente: adaptación MATLAB ⁵

Técnicamente, la representación de la derecha pertenece al dominio de la lógica multivalente. Si preguntamos “¿Pertenece X al conjunto A?”, la respuesta puede ser sí, no, o cualquiera de los miles de valores intermedios. En otras palabras, X puede pertenecer parcialmente al conjunto A. La lógica multivalente contrasta directamente con la lógica bivalente o booleana, donde sólo se admiten sí o no como respuestas. La lógica booleana ha desempeñado un papel fundamental en la historia de la ciencia desde que fue codificada por primera vez por Aristóteles. Sin embargo, ha llegado el tiempo de que comparta su rol.

Volvamos a nuestro ejemplo, considerando ahora una escala continua del tiempo y los valores de verdad con respecto a su pertenencia al fin de semana, tal como se aprecia en las Figuras 4A y 4B.



Figuras 4A y 4B: Pertenencia bivalente y multivalente al fin de semana, en escala de tiempo continua, respectivamente

Fuente: adaptación MATLAB⁶

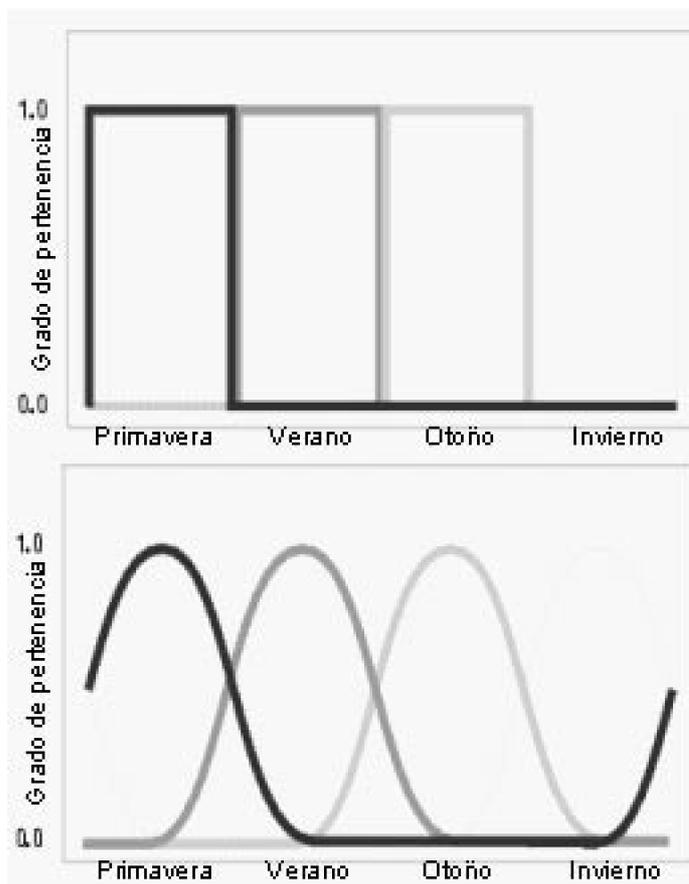
Al hacer que la escala de tiempo sea continua, estamos definiendo en qué grado pertenece al fin de semana cada instante del tiempo, en vez de considerar periodos discretos de un día. Notemos que, en el gráfico de la izquierda (Figura 4A), a la medianoche del Viernes, justo en el segundo después de las 12, el valor que representa el grado de pertenencia al fin de semana de ese instante salta discontinuamente desde 0 a 1. Esta es una forma de definir el fin de semana, y aunque puede ser útil para un contador, no se conecta realmente con nuestra experiencia en el mundo real con respecto al fin de semana.

⁵ Ver Bibliografía

⁶ Ver Bibliografía

El gráfico de la derecha (Figura 4B) muestra una curva que varía suavemente y que da cuenta del hecho de que todo el Viernes, y que en un grado menor, algunas partes del Jueves, poseen la cualidad de fin de semana y por lo tanto, merecen un grado de pertenencia al conjunto difuso de los momentos del fin de semana. La curva que define el grado de pertenencia al fin de semana, es una función que relaciona el espacio de entrada (tiempo de la semana) al espacio de salida (grado de pertenencia al fin de semana). Esta función se conoce con el nombre de función de pertenencia (FP).

Otro ejemplo de conjuntos difusos puede ser el de las estaciones del año. ¿En qué estación estamos?. En el hemisferio Sur, el verano comienza oficialmente cuando se produce el solsticio de verano, lo que acontece exactamente una vez al año, a fines de Diciembre. Usando definiciones astronómicas con respecto a las estaciones, obtenemos conjuntos con fronteras bien definidas, como se muestra a continuación en la figura de la izquierda (Figura 5A). Sin embargo, en los climas templados del hemisferio Sur experimentamos las estaciones como cambios climáticos más o menos continuos, como se ilustra a continuación a la derecha (Figura 5B).



Figuras 5A y 5B: Estaciones del año

Fuente: adaptación MATLAB ⁷

Una función de pertenencia (FP) es una curva que define cómo cada punto en el

⁷ Ver Bibliografía

espacio de entrada se relaciona con un valor de pertenencia (o grado de pertenencia) entre 0 y 1. El espacio de entrada es a veces llamado *universo de discurso*, un nombre elegante para un concepto simple.

Uno de los ejemplos de conjuntos difusos más utilizados es el de las estaturas de las personas. En este caso el universo de discurso son todas las posibles estaturas, digamos entre 0,30 m y 2,70 m. La palabra “alto” representa una curva que define en qué grado una persona es considerada alta. Si el conjunto de la gente alta estuviese definido por fronteras claras, como un conjunto clásico, podríamos decir que todas las personas sobre 1,80 m se consideran oficialmente altas. Sin embargo, esta distinción es claramente absurda. Puede tener sentido considerar como representante del conjunto “alto” el conjunto formado por todos los números reales mayores que 1,80 m, porque los números pertenecen a un plano abstracto, pero cuando hablamos sobre personas reales, no es razonable llamar a alguien bajo y a otro alto cuando la diferencia en sus alturas es del ancho de un cabello, tal como se esquematiza en la Figura 6.

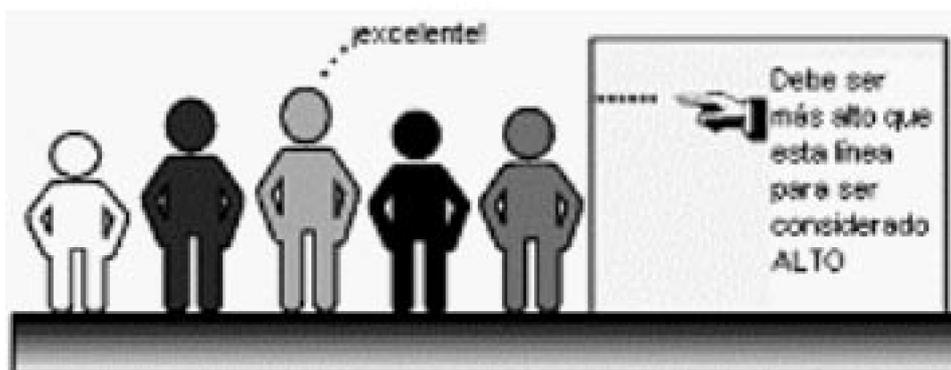


Figura 6: Estatura

Fuente: adaptación MATLAB⁸

Si la forma de distinguir a las personas altas mencionada arriba no funciona, entonces ¿cuál es la manera adecuada de definir el conjunto de las personas altas?. Muy similar al gráfico de los días del fin de semana, la Figura 7 muestra una suave curva que va desde no-alto hasta alto. El eje de salida es un número conocido como el valor de pertenencia, que varía entre 0 y 1. La curva se conoce como función de pertenencia (FP), la cual es frecuentemente denotada por μ . Esta curva define la transición desde no-alto hacia alto. Ambas personas son altas en algún grado, pero una de ellas es significativamente menos alta que la otra.

⁸ Ver Bibliografía

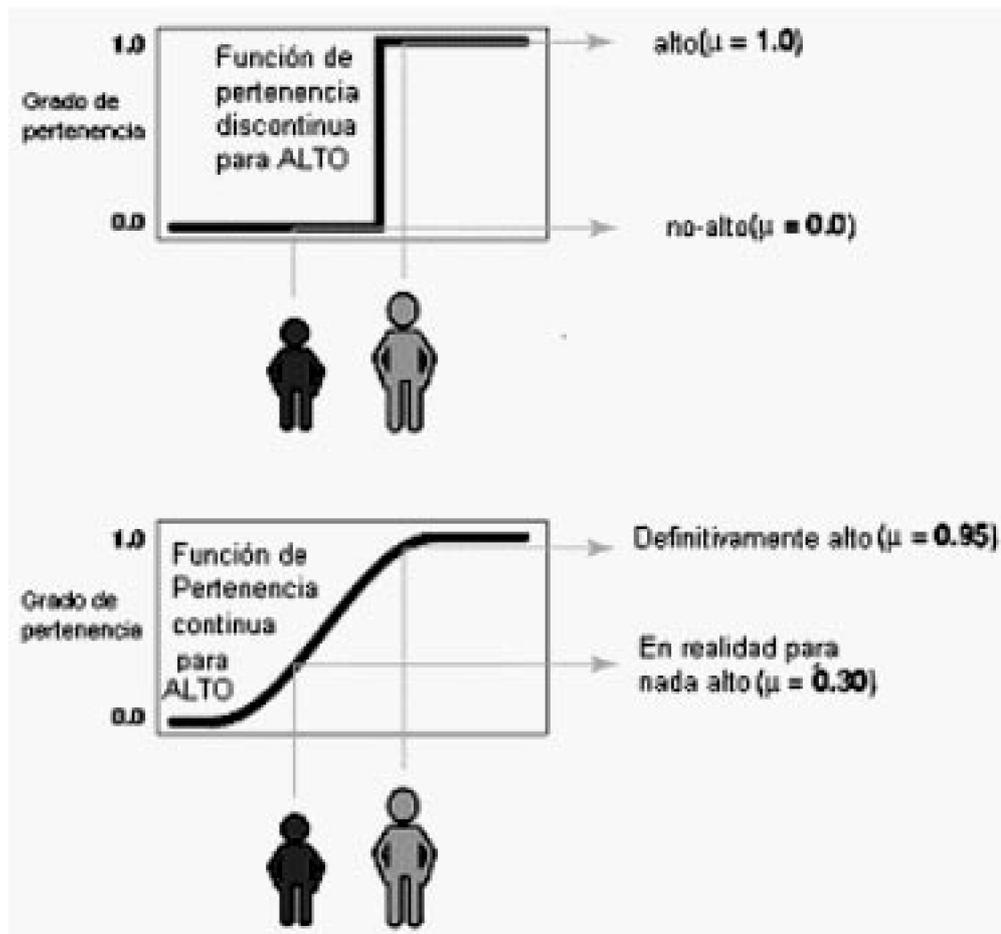


Figura 7: Estatura difusa

Fuente: adaptación MATLAB⁹

Las interpretaciones subjetivas y las unidades de medida apropiadas están incorporadas en los conjuntos difusos. Si decimos “Ella es alta”, la función de pertenencia (FP) “alto” debería de inmediato tomar en cuenta si es que nos referimos a una niña de 6 años o a una mujer adulta. Asimismo, las unidades de medida ya están incorporadas en la curva. Ciertamente no tiene sentido preguntar “¿es ella alta en pulgadas o en metros?”.

La única condición que una función de pertenencia (FP) debe satisfacer es que debe variar entre 0 y 1. La función en sí misma puede ser una curva escogida arbitrariamente, cuya forma se adapta al problema en términos de simpleza, conveniencia, velocidad y eficiencia.

En términos más formales, si expresamos un conjunto clásico de la siguiente forma:

$$A = \{x \mid x > 6\},$$

un conjunto difuso sería una extensión del conjunto clásico. Si X es el universo de discurso y sus elementos están denotados por x , entonces un conjunto difuso A en X se define como un conjunto de pares ordenados:

⁹ Ver Bibliografía

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\},$$

donde $\mu_A(x)$ se denomina la función de pertenencia (FP) de x en A . La función de pertenencia relaciona cada elemento de X a un valor de pertenencia entre 0 y 1.

Hasta ahora hemos visto la parte “difusa” de la lógica difusa. Con respecto a la parte “lógica” de la lógica difusa, lo más importante que debemos tener en cuenta es que se trata de un superconjunto de la lógica booleana tradicional. En otras palabras, si mantenemos los valores difusos en sus extremos, 1 (completa veracidad) y 0 (completa falsedad), las operaciones lógicas tradicionales se mantienen. Por ejemplo consideremos las tradicionales tablas de verdad que se muestran a continuación en la Figura 8.

A	B	A Y B	A	B	A O B	A	NO A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		
	Y			O			NO

Figura 8: Tablas de verdad

Fuente: adaptación MATLAB¹⁰

Ahora si recordamos que en lógica difusa la veracidad de cualquier planteamiento es una cuestión de grado, ¿cómo se alteran estas tablas de verdad?. Sabemos que los valores de entrada pueden ser números reales entre 0 y 1. ¿Qué función preserva los resultados de la tabla Y, por ejemplo, al mismo tiempo que es aplicable a todos los números reales entre 0 y 1?.

Una respuesta es el operador mín, el cual entrega los resultados de la tabla de verdad Y al resolver $\min(A,B)$, donde A y B están limitados al intervalo $[0,1]$. Usando el mismo razonamiento, podemos reemplazar la operación O con la función max, con lo cual $A \text{ O } B$ sería equivalente a $\max(A,B)$. Finalmente, la operación NO A resulta ser equivalente a la operación $1 - A$. Notemos como los resultados de las tablas de verdad anteriores permanecen inalterados después de realizar las sustituciones propuestas, tal como se aprecia en la Figura 9.

¹⁰ Ver Bibliografía

A	B	$\min(A,B)$	A	B	$\max(A,B)$	A	$1 - A$
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1		
1	1	1	1	1	1		
Y			O			NO	

Figura 9: Tablas de verdad difusas

Fuente: adaptación MATLAB ¹¹

Más aún, dado que ahora hay una función detrás de la tabla de verdad, en vez de sólo la tabla de verdad propiamente tal, podemos considerar valores para A y B distintos de 1 y 0.

A continuación, la Figura 10 muestra la tabla de verdad transformada en un gráfico de dos conjuntos difusos unidos en un conjunto difuso. La parte superior de la figura corresponde a las tablas de verdad de la lógica booleana, mientras que la parte inferior de la figura muestra cómo se aplican las operaciones equivalentes que hemos definido, sobre un rango continuo de variación de los valores de verdad de A y B.

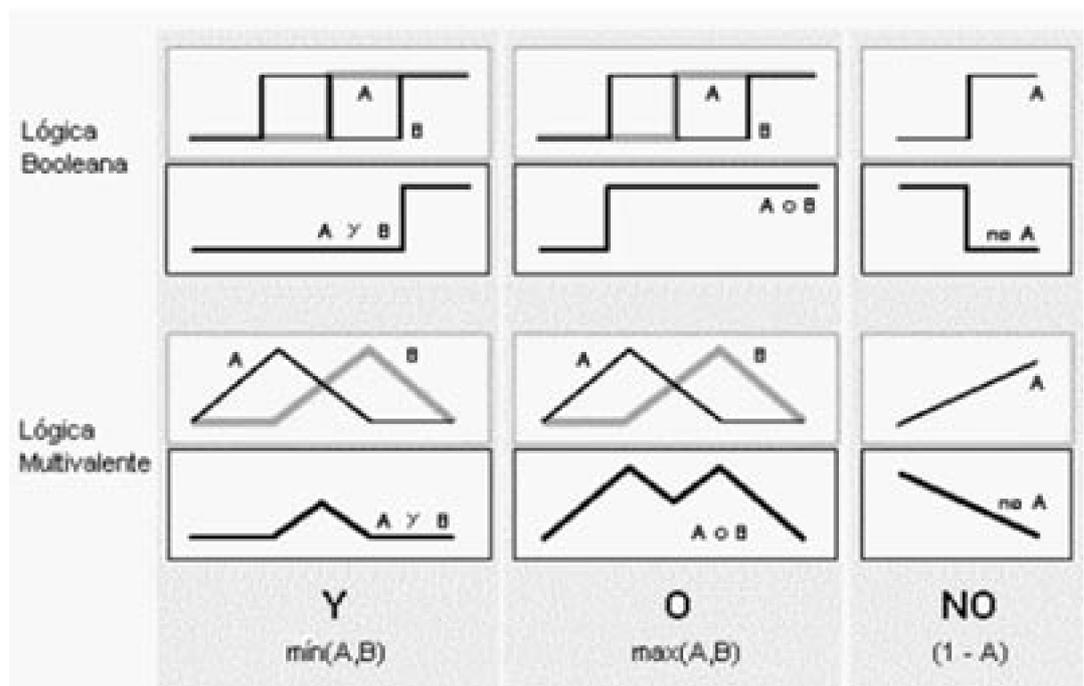


Figura 10: Gráfico basado en las tablas de verdad

¹¹ Ver Bibliografía

Fuente: adaptación MATLAB ¹²

Con estas tres funciones podemos resolver cualquier construcción usando conjuntos difusos y las operaciones de lógica difusa Y, O y NO. Sin embargo, esta es sólo uno de las posibles correspondencias entre las operaciones Y, O, y NO de la lógica booleana y de la lógica multivalente. Esta correspondencia no es de ninguna manera única. En términos más generales, estamos definiendo lo que se conoce como intersección o conjunción difusa (Y), unión o disjunción difusa (O), y complemento difuso (NO). Anteriormente hemos definido los que podríamos llamar operadores clásicos para estas funciones:

Y = mín, O = max, y NO = complemento aditivo. La mayoría de las aplicaciones de lógica difusa utilizan estas operaciones sin mayor problema. Sin embargo, estas funciones son, en general, bastante arbitrarias.

La intersección de dos conjuntos difusos A y B está especificada por una relación binaria T, la cual opera las dos funciones de pertenencia como sigue:

$$\mu_{A \llcorner B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Por ejemplo, el operador binario T puede representar la multiplicación entre $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$. Estos operadores difusos de intersección, que usualmente se conocen como operadores norma-T (norma Triangular), deben cumplir las siguientes condiciones:

- Límite: $T(0, 0) = 0$, $T(a, 1) = T(1, a) = a$
- Monotonicidad: $T(a, b) \leq T(c, d)$, si $a \leq c$ y $b \leq d$
- Conmutatividad: $T(a, b) = T(b, a)$
- Asociatividad: $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$

La primera condición impone la existencia de una correcta generalización para el caso de los conjuntos clásicos. El segundo requisito implica que una disminución en los valores de pertenencia en A o en B no puede producir un incremento en el valor de pertenencia en A intersección B. La tercera condición indica que el operador es indiferente al orden en que son operados los conjuntos difusos. Finalmente, el cuarto requisito nos permite hacer la intersección de cualquier número de conjuntos, agrupados en pares y en cualquier orden.

Tal como la intersección difusa, el operador de unión difusa está especificado en general por una relación binaria S:

$$\mu_{A \gg B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Por ejemplo, el operador binario S puede representar la adición de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$. Estos operadores difusos de unión, a los cuales comúnmente se les denomina operadores conorma-T (o norma-S), deben satisfacer los siguientes requisitos básicos:

- Límite: $S(1, 1) = 1$, $S(a, 0) = S(0, a) = a$
- Monotonicidad: $S(a, b) \leq S(c, d)$, si $a \leq c$ y $b \leq d$

¹² Ver Bibliografía

- Conmutatividad: $S(a, b) = S(b, a)$
- Asociatividad: $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$

En el pasado se han propuesto muchas normas-T y conormas-T duales, tales como las de Yager¹³, Dubois y Prade¹⁴, Schweizer y Sklar¹⁵, y Sugeno¹⁶. Cada una de ellas provee una manera de variar la “ganancia” de la función, de tal forma que esta puede ser muy restrictiva o muy permisiva.

Los conjuntos difusos y los operadores difusos son los sujetos y los verbos en la lógica difusa. Para formular las estructuras condicionales que componen la lógica difusa, se utilizan reglas de la forma *si-entonces*.

Una regla difusa *si-entonces* tiene la siguiente forma:

Si x es A , entonces y es B ,

donde A y B son valores lingüísticos definidos por conjuntos difusos sobre los rangos (universos de discurso) X e Y , respectivamente. La parte “si” de la regla, “ x es A ”, se llama *antecedente* o premisa, mientras que la parte “entonces” de la regla, “ y es B ”, se llama *consecuente* o conclusión. Un ejemplo de este tipo de reglas puede ser:

Si el servicio es bueno, entonces la propina es promedio.

Debemos notar que “*bueno*” representa un número entre 0 y 1, así que el antecedente es una interpretación que entrega un único número entre 0 y 1. Por otro lado, “*promedio*” representa un conjunto difuso, así que el consecuente es una operación que asigna completamente el conjunto difuso B a la variable de salida y . En la regla *si-entonces*, la palabra “es” se utiliza de dos maneras completamente distintas, dependiendo de si ésta aparece en el antecedente o en el consecuente.

En general, la entrada de una regla *si-entonces* es el valor que actualmente tiene la variable de entrada (en el ejemplo, *servicio*), y la salida es un conjunto difuso completo (en el ejemplo, *promedio*). Este conjunto posteriormente será *defuzzified*, asignándole un valor concreto a la salida.

El proceso de interpretar una regla *si-entonces* consta de dos partes: primero, evaluar el antecedente (lo cual implica *fuzzifying* la entrada y aplicar cualquier *operador difuso* que sea necesario), y segundo, aplicar ese resultado al consecuente (lo cual se conoce como *implication*). En el caso de la lógica booleana o binaria, las reglas *si-entonces* no representan una gran dificultad. Si relajamos las restricciones de la lógica binaria y permitimos que el antecedente sea una afirmación difusa, ¿cómo se ve afectada la conclusión?. La respuesta es bastante simple. Si el antecedente es verdadero en algún grado, entonces el consecuente también es verdadero en el mismo grado. En otras

¹³ Ver Bibliografía

¹⁴ Ver Bibliografía

¹⁵ Ver Bibliografía

¹⁶ Ver Bibliografía

palabras:

- En lógica binaria: $p \Rightarrow q$ (p y q son verdaderos o falsos)
- En lógica difusa: $0,5 p \Rightarrow 0,5 q$ (antecedentes parciales dan lugar a una implicancia parcial)

El antecedente de una regla puede tener muchas partes. Por ejemplo:

Si el cielo está gris y el viento es fuerte y el barómetro está cayendo, entonces...

En este caso, todas las partes del antecedente se calculan simultáneamente usando los operadores lógicos descritos anteriormente, obteniéndose como resultado un número. El consecuente de una regla también puede tener múltiples partes. Por ejemplo:

Si la temperatura es fría, entonces la llave del agua caliente se abre y la llave del agua fría se cierra.

En este caso, todas las partes del consecuente son afectadas por igual por el resultado del antecedente. ¿Cómo se ve afectado el consecuente por el antecedente?. El consecuente especifica un conjunto difuso que se asigna a la variable de salida. Luego, la función *implication* modifica ese conjunto difuso en el grado especificado por el antecedente. Las formas más comunes de modificar el conjunto difuso de salida son truncamiento (donde el conjunto difuso es “cortado”) o escalamiento (donde el conjunto difuso de salida es “aplastado”).

En general, una regla por sí sola no es muy relevante. Se necesitan dos o más reglas para que se eliminen unas con otras. Cada regla produce un conjunto difuso. Luego, los conjuntos difusos que genera cada regla son agregados en un solo conjunto difuso de salida. Finalmente, el conjunto resultante es *defuzzified* (i.e. transformado en un solo número).

La inferencia difusa es el proceso de formular la relación entre una entrada dada y una salida, usando lógica difusa. Luego, esta relación provee el punto de partida desde el cual se pueden tomar decisiones o reconocer patrones. El proceso de la inferencia difusa abarca todas las piezas que hemos revisado previamente: funciones de pertenencia, operadores de lógica difusa y reglas *si-entonces*. Los dos tipos más populares de sistemas de inferencia difusa son del tipo Mamdani y del tipo Sugeno.

El método de inferencia difusa del tipo Mamdani es el que más se observa en la metodología difusa y fue uno de los primeros sistemas de control construidos usando la teoría de los conjuntos difusos. Fue propuesto en 1975 por Ebrahim Mamdani, como un intento de controlar un sistema compuesto de una caldera y una turbina a vapor, a través de sintetizar un conjunto de reglas lingüísticas obtenidas de experimentados operadores humanos. El esfuerzo de Mamdani se basó, a su vez, en un trabajo escrito en 1973 por Lofti Zadeh sobre algoritmos difusos para sistemas complejos y procesos de decisión. En este tipo de sistemas de inferencia difusa, después del proceso donde se agregan los conjuntos difusos provenientes de cada regla, estos deben ser *defuzzified*. En muchos casos es posible, y también más eficiente, usar una sola “punta” como función de pertenencia, en vez de un conjunto difuso distribuido. A menudo esto se conoce como función de pertenencia de salida *singleton*, la cual es una especie de conjunto difuso

pre-defuzzified. De esta manera, se aumenta la eficiencia del proceso de *defuzzifying*, ya que se simplifica enormemente el cálculo que requiere el método de Mamdani más general, el cual busca el centroide de una función bi-dimensional. En vez de integrar sobre el dominio de una función bi-dimensional para hallar el centroide, se utiliza el promedio ponderado de sólo algunos datos.

El método de inferencia difusa de tipo Sugeno, o Takagi-Sugeno-Kang, fue introducido en 1985, y es similar en muchos aspectos al método Mamdani. Las dos primeras partes del proceso de inferencia difusa, *fuzzifying* las entradas y aplicar los operadores difusos, son exactamente iguales. La principal diferencia entre los métodos de Mamdani y Sugeno es que las funciones de pertenencia de las salidas son lineales o constantes.

Una típica regla en un modelo difuso de tipo Sugeno tiene la forma:

Si la Entrada 1 = x y la Entrada 2 = y , entonces la Salida es $z = ax + by + c$

Para un modelo de tipo Sugeno de orden cero, el nivel de la salida z es una constante (i.e. $a = b = 0$).

El nivel de la salida z_i de cada regla es ponderada por su *firing strenght*. Por ejemplo, para una regla Y con Entrada 1 = x y Entrada 2 = y , su *firing strenght* es:

$$w_i = \text{Método } Y(F_1(x), F_2(y)),$$

donde $F_{1,2}(\cdot)$ son las funciones de pertenencia de las Entradas 1 y 2, respectivamente. La salida final del sistema es el promedio ponderado de todas las salidas de las reglas, calculada como:

$$\text{Salida Final} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i z_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$

La operación de una regla en un sistema de tipo Sugeno puede esquematizarse como se muestra a continuación en la Figura 11.

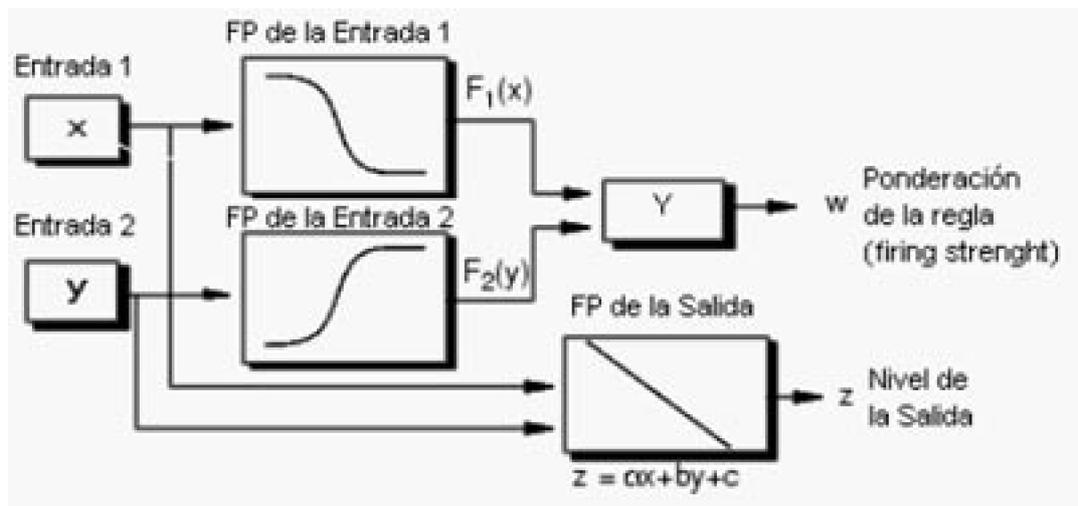


Figura 11: Diagrama de operación de un sistema difuso de tipo Sugeno

Fuente: adaptación MATLAB¹⁷

La forma más fácil de visualizar a los sistemas de tipo Sugeno de primer orden, es pensar que cada regla define la ubicación de un "singleton en movimiento". Esto es, la "punta" (FP) del singleton de salida, puede moverse de manera lineal en el espacio de salida, dependiendo de donde se ubique la entrada. También es posible desarrollar modelos difusos de tipo Sugeno de orden mayor a 1, pero con esto se genera gran complejidad sin una significativa mejora.

¹⁷ Ver Bibliografía

SECCION II: IMPLEMENTACION

Para construir el modelo difuso que nos permitirá pronosticar la evolución del Índice General de Precios de Acciones (IGPA) de la Bolsa de Comercio de Santiago, utilizaremos una herramienta llamada ANFIS (nombre que se debe a las siglas de *Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*), que se encuentra incorporada en el paquete computacional MATLAB 6 Release 13. Esta herramienta provee un método para estimar los parámetros de las funciones de pertenencia del sistema de inferencia difusa, buscando aquellos parámetros que proporcionen el mejor ajuste a los datos de entrada/salida utilizados para el entrenamiento. La estimación de estos parámetros se obtiene usando un algoritmo híbrido entre *backpropagation* y el conocido método de mínimos cuadrados (opcionalmente puede utilizarse sólo el primero de los métodos).

Para crear nuestro modelo difuso, primero construiremos una “muestra maestra”, que incluirá como datos las tasas de variaciones porcentuales semanales calculadas sobre los datos diarios de apertura y cierre del Índice General de Precios de Acciones de la Bolsa de Comercio de Santiago (IGPA), y las tasas de variaciones porcentuales semanales calculadas sobre los datos diarios de apertura y cierre de la tasa de interés de los bonos del Tesoro de EEUU con vencimiento a 10 años (TNX). Estos datos fueron recopilados desde la apertura del día 03 de Enero de 2000 hasta la apertura del día 21 de Octubre de 2003. Para construir la “muestra maestra”, hemos excluido todos los datos correspondientes a aquellos días en que las fechas no coincidían, ya sea por que era día festivo en Chile o en EEUU. De esta forma, la “muestra maestra” que utilizamos esta compuesta por 1815 datos.

El modelo difuso utilizado en esta ocasión se construyó con dos variables de entrada y una de salida, las cuales son $IGPA_{t-1}$, TNX_{t-1} e $IGPA_t$, respectivamente, donde:

- $IGPA_{t-1} = (\text{dato_igpat}+10 / \text{dato_igpat}) - 1$, con $t = 1, \dots, 1500$
- $TNX_{t-1} = (\text{dato_tnxt}+10 / \text{dato_tnxt}) - 1$, con $t = 1, \dots, 1500$
- $IGPA_t = (\text{dato_igpat}+11 / \text{dato_igpat}+1) - 1$, con $t = 1, \dots, 1500$

Es decir, a partir de la “muestra maestra”, construiremos 100 matrices de entrenamiento. Cada matriz de entrenamiento tiene dimensión 1500X3, y contiene en la primera columna a $IGPA_{t-1}$, en la segunda columna a TNX_{t-1} (las cuales son las variables de entrada), y en la tercera columna a $IGPA_t$ (que corresponde a la variable de salida). Por ejemplo, el primer dato de la primera columna de la primera matriz de entrenamiento se calcula como:

$$\frac{\text{Valor de apertura del IGPA el día Lunes 10 de Enero de 2000}}{\text{Valor de apertura del IGPA el día Lunes 3 de Enero de 2000}} - 1$$

El primer dato de la segunda columna de la primera matriz de entrenamiento se calcula como:

$$\frac{\text{Valor de apertura de TNX el día Lunes 10 de Enero de 2000}}{\text{Valor de apertura de TNX el día Lunes 3 de Enero de 2000}} - 1$$

El primer dato de la tercera columna de la primera matriz de entrenamiento se calcula como:

$$\frac{\text{Valor de cierre del IGPA el día Lunes 10 de Enero de 2000}}{\text{Valor de cierre del IGPA el día Lunes 3 de Enero de 2000}} - 1$$

Y así sucesivamente.

Luego, eliminaremos la primera fila de datos de la primera matriz de entrenamiento y agregaremos al final de ésta, los nuevos datos, creando así la segunda matriz de entrenamiento. A partir de la segunda matriz de entrenamiento, eliminaremos la primera fila de datos y agregaremos al final de ésta, los nuevos datos, creando así la tercera matriz de entrenamiento (i.e. haremos un *rolling*¹⁸ con la muestra). Repetiremos este proceso 100 veces.

Cada una de las matrices de entrenamiento tendrá asociado un sistema de inferencia difusa, el cual dará origen a un pronóstico sobre la evolución del IGPA.

El segundo paso para crear nuestro modelo difuso, consiste en especificar el tipo de función de pertenencia (FP) que se aplicará a los datos de entrada. Para efectos de nuestro modelo usaremos la FP *gbellmf*¹⁹. Además, debemos especificar el número de

¹⁸ Ver Parisi, Parisi y Guerrero 2003

intervalos en que se dividirá el rango de variación de los datos de entrenamiento. En nuestro modelo se dividirá el rango de variación de los datos de entrenamiento en 5 intervalos. También debemos indicar el tipo de FP que se aplicará a los datos de salida (que puede ser *constant* o *linear*²⁰). En nuestro modelo difuso usaremos una FP *linear* para los datos de salida.

A partir de los datos y de las especificaciones anteriores, el tercer paso consiste en crear los sistemas de inferencia difusa de tipo Sugeno asociados a cada matriz de entrenamiento. Para esto utilizamos la herramienta ANFIS, que nos permite encontrar los parámetros de las funciones de pertenencia que mejor se ajustan a los datos. Existen dos métodos para que la herramienta ANFIS ajuste los parámetros de las funciones de pertenencia: *backpropagation* para todos los parámetros de las funciones de pertenencia o un método híbrido, que consiste en aplicar *backpropagation* para ajustar los parámetros asociados a las funciones de pertenencia de las variables de entrada y estimar los parámetros asociados a las funciones de pertenencia de la variable de salida usando mínimos cuadrados. El método *backpropagation* surge de la equivalencia que existe entre sistemas difusos y redes neuronales, fenómeno que motivó el empleo de las técnicas de aprendizaje usadas en redes neuronales en los sistemas de inferencia difusa. En este sentido, uno de los algoritmos más conocidos empleados en sistemas difusos es el algoritmo de *backpropagation*, que modifica los valores de los parámetros proporcionalmente al gradiente de la función de error con objeto de alcanzar un mínimo local.²¹

Una vez concluidos los procesos anteriores, alimentaremos cada sistema de inferencia difusa con los últimos datos disponibles (i.e. en la columna $IGPA_{t-1}$ introducimos el último dato de salida incluido en cada matriz de entrenamiento, y en la columna TNX_{t-1} introducimos el dato correspondiente a la tasa de variación semanal de TNX registrada en la misma fecha), y lo evaluaremos, generando así 100 pronósticos sucesivos para la tasa de variación semanal del IGPA, los cuales serán almacenados.

¹⁹ Ver manual de MATLAB

²⁰ Ver manual de MATLAB

²¹ Ver http://www.imse.cnm.es/Xfuzzy/Xfuzzy_3.0/tools/xfsi_sp.html#ALGORITHM

SECCION III: EVALUACION DE LOS RESULTADOS

El proceso de evaluación de los resultados, que revisaremos en esta sección, está compuesto de cuatro etapas. En la primera de ellas, aplicaremos a los pronósticos obtenidos a partir de los sistemas de inferencia difusa la prueba de certeza direccional (*Directional Accuracy Test*) de Pesaran y Timmermann (1992), a fin de medir la precisión direccional de los modelos de proyección²². En la segunda etapa, simularemos una estrategia de compra-venta de una cartera de inversión idéntica al IGPA, basándonos en los pronósticos, y calcularemos la rentabilidad obtenida por esta estrategia al final del período. En la tercera etapa, aplicaremos los dos pasos anteriores a los pronósticos obtenidos a partir del siguiente modelo multivariable dinámico:

$$IGPA_t = \alpha_1 * IGPA_{t-1} + \alpha_2 * TNX_{t-1} + \epsilon_t \text{ (con } t = 1, \dots, 1500),$$

donde:

- IGPA_t (con t = 1, ... , 1500) es la variable dependiente
- IGPA_{t-1} y TNX_{t-1} (con t = 1, ... , 1500) son las variables independientes
- α_1 y α_2 son los coeficientes que acompañan a las variables independientes y son estimados por el modelo

²² Ver Parisi, Parisi y Guerrero 2003

- ϵ es la diferencia entre IGPA_t efectivo e IGPA_t estimado por el modelo

Las variables incluidas en el modelo multivariable dinámico se calcularon de la misma forma como se hizo para el modelo difuso. La estimación de los parámetros se realiza buscando aquellos que minimizan el error cuadrático medio asociado a cada muestra (que corresponden a cada una de las matrices de entrenamiento), usando el complemento SOLVER incluido en el programa Microsoft Excel. Los pronósticos se obtienen al evaluar cada modelo estimado con los últimos datos disponibles, lográndose de esta forma 100 proyecciones para los mismos periodos pronosticados por nuestro modelo difuso.

Por otro lado, compararemos la rentabilidad de ambas técnicas con una estrategia *buy and hold*, que a menudo es utilizada como *benchmark* en este tipo de trabajos.

Cuadro 1: Resultados preliminares

Técnica	Nº de pronósticos	Aciertos en la predicción del signo	Significancia estadística de los aciertos en la predicción del signo ²³	Capital inicial (en pesos)	Capital final (en pesos)	Rentabilidad de la estrategia ²⁴
Modelo Difuso	100	93%	Se Rechaza la hipótesis nula, entonces se tiene capacidad de predicción	1.000.000	1.148.504	14,85%
Modelo Multivariable	100	93%	Se Rechaza la hipótesis nula, entonces se tiene capacidad de predicción	1.000.000	1.148.504	14,85%
Buy and Hold	—	—		1.000.000	1.161.211	16,12%

Fuente: elaboración propia

Como se aprecia en el Cuadro 1, el porcentaje de aciertos al pronosticar el signo de

²³ Ver PARISI, A., PARISI, F. y GUERRERO, J. 2003. Modelos Predictivos de Redes Neuronales en Índices Bursátiles. El Trimestre Económico, Santiago – Chile. pp. 10 – 11, para una explicación del test en castellano

²⁴ Para efectos del cálculo de la rentabilidad de la estrategia no se consideraron los costos de transacción

la evolución del IGPA (93%) es idéntico al registrado por el modelo multivariable más convencional (93%). Asimismo, la rentabilidad obtenida por la estrategia basada en el modelo difuso (14,85%), es igual a aquella obtenida a partir del modelo econométrico más tradicional (14,85%). Además, la rentabilidad de la estrategia *buy and hold* (16,12%) supera tanto a la rentabilidad de la estrategia basada en el modelo difuso como a aquella asociada al modelo multivariable. Esto se debe al comportamiento alcista y relativamente regular que presentó el mercado bursátil chileno durante el periodo pronosticado (ver Gráfico 1), condición que es particularmente favorable para la estrategia *buy and hold*.

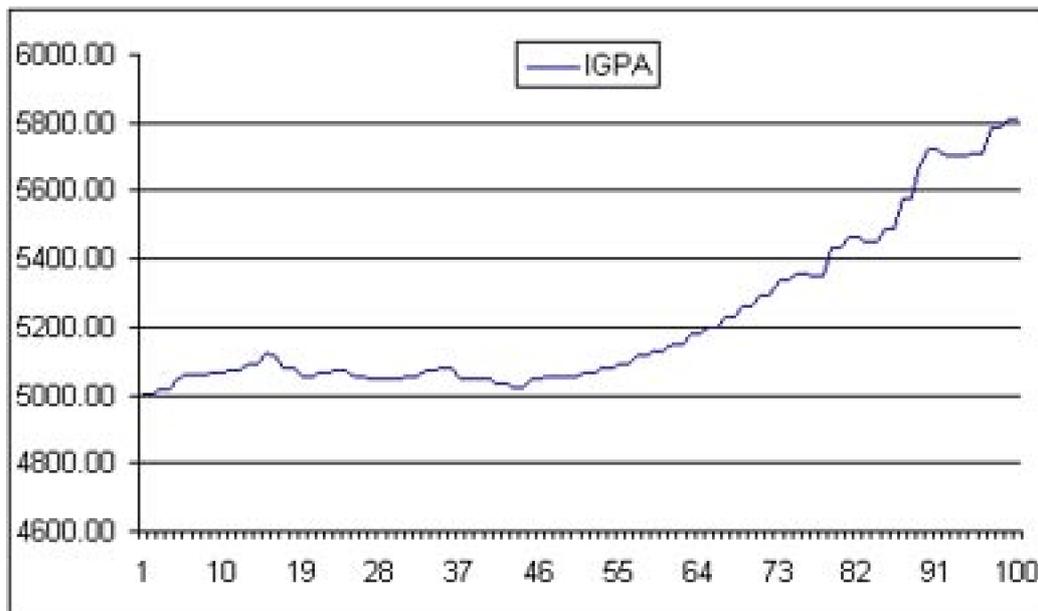


Gráfico 1: Evolución IGPA durante el periodo pronosticado (Desde el cierre del 26-02-2003 hasta la apertura del 13-05-2003)

Fuente: elaboración propia

Los resultados obtenidos a partir de las tres etapas anteriores del proceso de evaluación motivan la cuarta etapa, que revisaremos a continuación. Esta etapa consiste en ejecutar las tres etapas anteriores a los pronósticos generados por los mismos dos modelos, difuso y multivariable, que volveremos a estimar, pero usando ahora 100 “muestras maestras” distintas, las cuales provienen de aplicar la técnica *bootstrapping*²⁵, con reemplazo y en bloques semanales, a la “muestra maestra” original. Es decir, primero formaremos grupos de 11 datos, por ejemplo, el primer grupo o bloque incluirá datos de la variación porcentual semanal del IGPA y de la variación porcentual semanal de TNX, calculada como explicamos anteriormente, correspondiente al periodo comprendido entre la apertura del Lunes 10-01-2000 y la apertura del Lunes de la semana siguiente. Luego, seleccionaremos aleatoriamente uno de los grupos de la “muestra maestra” original y lo ubicaremos en la primera posición de una nueva muestra. En seguida, seleccionaremos nuevamente de manera aleatoria uno de los grupos de la “muestra maestra” original y lo ubicaremos en la segunda posición de la nueva muestra (debajo del primer grupo de datos), y así sucesivamente hasta completar una nueva muestra del mismo tamaño de la

²⁵ Ver Greene 1999 en la Bibliografía

“muestra maestra” original. Algunos bloques de datos pueden repetirse en distintas posiciones, debido a que cada vez que elegimos un grupo de la “muestra maestra” original, este permanece dentro ella, pudiendo ser elegido nuevamente con la misma probabilidad que cualquiera de los otros grupos, ya que se trata de una elección aleatoria. Utilizamos la técnica de *bootstrapping* para probar nuestros modelos bajo distintas circunstancias. Construimos cada nueva muestra a partir de bloques de datos extraídos de la “muestra maestra” original para que las estructuras de estas nuevas muestras mantengan cierta coherencia con lo que se observa en la realidad.

Cuadro 2: Resultados finales

Técnica	Nº de muestras	Promedio de aciertos en la predicción del signo	Significancia estadística de los aciertos en la predicción del signo	Rentabilidad mínima de la estrategia	Rentabilidad máxima de la estrategia	Rentabilidad promedio de la estrategia
Modelo Difuso	100	88%	Se Rechaza la hipótesis nula, entonces se tiene capacidad de predicción	-36.60%	294.07%	36.92%
Modelo Multivariable	100	89%	Se Rechaza la hipótesis nula, entonces se tiene capacidad de predicción	-28.26%	428.93%	35.36%
Buy and Hold	—	—	—	-28.26%	42.22%	2%

Fuente: elaboración propia

Como se aprecia en el Cuadro 2, ambos modelos presentan una excelente capacidad para pronosticar en signo de la variación porcentual semanal del IGPA, siendo levemente mejor en este aspecto el desempeño del modelo multivariable dinámico (que presenta en promedio una efectividad del 89%, en comparación al 88% que presenta el modelo difuso). Con respecto a la rentabilidad de las estrategias basadas en los pronósticos de cada modelo y la rentabilidad de la estrategia *buy and hold*, el modelo difuso resulta tener en promedio la más alta rentabilidad (36,92%), seguido de cerca por el modelo multivariable (35,36%). Por su parte, la estrategia *buy and hold* presenta un modesto 2% de rentabilidad promedio, demostrándose así que el éxito de este tipo de estrategia de compra-venta requiere del comportamiento alcista del mercado durante

todo el tiempo que se mantenga la inversión, situación que es bastante excepcional.

SECCION IV: CONCLUSION

Los avances que día a día se consiguen en el ámbito de la inteligencia artificial, gracias al descubrimiento de nuevas técnicas, o nuevas combinaciones de las técnicas existentes, que permiten aprovechar las ventajas de cada una y así superar las debilidades que estas pueden presentar cuando se utilizan de manera exclusiva, auguran un futuro de grandes cambios y mejoras en la ciencia en general, debido a que será posible contar con formas de abordar problemas que antes parecían imposibles y, también con formas más eficientes de resolver problemas que hoy ya tienen solución.

La aplicación de la metodología de la lógica difusa al pronóstico bursátil es bastante novedosa, por lo que los resultados obtenidos en este trabajo, aunque auspiciosos, deben considerarse como una primera aproximación en esta área, que desde luego no está exenta de errores. Hemos revisado sólo una pequeña fracción del enorme potencial que tiene la lógica difusa en el modelamiento de complejos sistemas no-lineales, como es el mercado bursátil. Por ejemplo, hemos omitido el tema de la elección óptima de las variables de entrada, del tipo de función de pertenencia óptima, y de otros parámetros, que podrían mejorar notablemente los resultados presentados. Esperamos, en un futuro no muy lejano, investigar los temas mencionados y otros importantes temas, como el uso combinado de algunas ramas de la inteligencia artificial, por ejemplo: el uso de lógica difusa combinada con redes neuronales artificiales (lo que se conoce como sistemas neuro-difusos, que poseen gran versatilidad y eficiencia), o lógica difusa combinada con algoritmos genéticos (para seleccionar las variables de entrada óptimas u otros parámetros), etc..

La masificación de este tipo de innovaciones, y el uso productivo que se haga de ellas, por ejemplo para pronosticar la evolución del mercado bursátil, o para pronosticar la evolución del tipo de cambio, etc., sin duda que contribuirá al desarrollo de Chile, al permitir que la toma de decisiones de inversión se realice contando con los mejores pronósticos disponibles.

BIBLIOGRAFIA

- BRUNNER, J. 2001. Chile: Informe e Índice sobre Capacidad Tecnológica. Universidad Adolfo Ibáñez, Instituto de Economía, Santiago – Chile
- CORBO, V. y SCHMIDT-HEBBEL, K. 2003. Efectos Macroeconómicos de la Reforma de Pensiones en Chile. Santiago – Chile.
- DUBOIS, D. y PRADE, H. 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York – USA.
- GREENE, W. 1999. Cómputo y optimización. En: Análisis Econométrico. 3ª ed. Madrid – España, Pearson Educación. pp. 155 – 191.
- MAMDANI, E. y ASSILIAN, S. 1973. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. Queen Mary College, London University, London – UK.
- MATLAB 6 Release 13 2002. Fuzzy Logic Toolbox Tutorial.
- PARISI, A., PARISI, F. y GUERRERO, J. 2003. Evaluación de Modelos de Redes Neuronales de Predicción del Signo de la Variación del IPSA. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas, Departamento de Administración, Santiago – Chile
- PARISI, A., PARISI, F. y GUERRERO, J. 2003. Modelos Predictivos de Redes Neuronales en Índices Bursátiles. El Trimestre Económico, Santiago – Chile
- PESARAN, M.H. y TIMMERMANN A. 1992. A simple nonparametric test of predictive performance. Journal of Business and Economic Statistics 10, 461-465.

- SACHS, J., LARRAIN, F. y WARNER, A. 2001. A Structural Analisis of Chile's Long Term Growth: History, Prospects and Policy Implications. Mimeo, Santiago – Chile.
- SCHWEIZER, B. y SKLAR, A. 1963. Associative functions and abstract semi-groups. Publ. Math Debrecen, 10:69-81.
- SHAPIRO, A. 2002. Soft Computing and Financial Engineering. Smeal College of Business, Penn State University, University Park, PA 16802, USA.
- SUGENO, M. 1977. Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. (M.M. Gupta, G. N. Saridis, y B.R. Gaines, editores) Fuzzy Automata and Decision Processes. pp. 89-102, North-Holland, New York – USA.
- YAGER, R. 1980. On a general class of fuzzy connectives. Fuzzy Sets and Systems. 4:235-242.
- ZADEH, L. 1988. Fuzzy Logic. University of California, Berkeley – USA.
- ZADEH, L. 1994. Soft Computing and Fuzzy Logic. University of California, Berkeley – USA.