



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ECONOMÍA Y NEGOCIOS

**OPTIMIZACIÓN DE MODELOS GARCH A TRAVÉS DE
ALGORITMO GENÉTICO**

Seminario para optar al título de Ingeniero Comercial
Mención Economía

Profesor guía: Dr. Antonino Parisi Fernández

Autores: Pedro Francisco Asenjo Godoy
Sebastián Praetorius Batalla

Santiago de Chile
Diciembre de 2006

A nuestras familias

OPTIMIZACIÓN DE MODELOS GARCH A TRAVÉS DE ALGORITMO GENÉTICO

Pedro Asenjo Godoy

Sebastián Praetorius Batalla

Profesor Guía: Dr. Antonino Parisi Fernández

Resumen

Utilizando valores de cierres semanales de los índices bursátiles estadounidenses Dow Jones (DJI), S&P500 (GSPC), Nasdaq (IXIC) y NYSE Composite (NYA), correspondientes al período comprendido entre el 4 de enero de 1980 al 31 de diciembre de 2005, se analiza la eficacia del *Algoritmo Genético* como técnica de optimización de estructuras de modelos GARCH para la predicción de retornos bursátiles. Los resultados obtenidos mediante *Algoritmo Genético*, considerando el Error Cuadrático Medio (ECM) como criterio de comparación, fueron contrastados con los de un modelo GARCH (1,1), un modelo GARCH especificado aleatoriamente y un modelo GARCH optimizado mediante *Fuerza Bruta* (probando todos los modelos posibles). Se efectuó un test de significancia estadística sobre la diferencia de ECM entre los modelos contrastados, además de realizar algunos test complementarios para medir el nivel de la aplicabilidad de los modelos (test LM de Engle, test Portmentau de bicorrelaciones de Hinich (test H) y test de correlaciones simples (testC)). Para todos los índices bajo análisis, los modelos GARCH optimizados por el *Algoritmo Genético* alcanzaron un ECM (para un conjunto extramuestral de 200 observaciones semanales) menor que el obtenido a través del modelo GARCH (1,1) y el modelo GARCH generado aleatoriamente. Sin embargo, y como era de esperar, el resultado en ECM fue mayor al del modelo obtenido por *Fuerza Bruta*. La diferencia entre el resultado del *Algoritmo Genético* y el de un modelo GARCH (1,1) resultó ser, en todos los casos, estadísticamente significativa a un 1% de significancia. Al comparar los resultados con el modelo GARCH especificado de manera aleatoria, sólo la diferencia entre ECM es significativa, a un 5% de nivel de significancia, para el caso del índice GSPC. Al analizar las diferencias de ECM entre los modelos obtenidos mediante *Algoritmo Genético* y *Fuerza Bruta*, éstas resultaron ser no significativas, salvo para el índice GSPC que fue significativa a un 10%. De esta manera, se puede concluir que un modelo GARCH optimizado mediante *Algoritmo Genético* podría obtener mejores resultados que una modelo GARCH (1,1) usado ampliamente en la literatura financiera. Además, el resultado obtenido mediante *Algoritmo Genético* no presenta desviaciones significativas con respecto de la mejor especificación posible. De este modo, se presenta evidencia a favor del *Algoritmo Genético* como técnica de optimización de estructuras de modelos GARCH.

Palabras Claves: Algoritmos Genéticos, Volatilidad Estocástica, Modelos GARCH, Error Cuadrático Medio.

ÍNDICE

1.	Introducción.....	5
2.	Marco Teórico.....	8
2.1	Modelos de Volatilidad Estocástica.....	8
2.2	Algoritmo Genético.....	13
3.	Metodología.....	15
3.1	Implementación del Algoritmo Genético.....	17
3.1.1	Codificación y Población Inicial.....	17
3.1.2	Evaluación de la Estimación.....	18
3.1.3	Selección y Generación de Descendencia.....	18
3.2	Modelos de Comparación.....	19
3.3	Tests Complementarios.....	20
3.3.1	Test LM de Engle.....	21
3.3.2	Test Portmentau de Bicorrelaciones de Hinich (test H) y Test C.....	22
4.	Resultados.....	25
5.	Conclusiones.....	30
	Bibliografía.....	31
	Anexos.....	34

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo busca mostrar la utilidad del *Algoritmo Genético* en la especificación de un modelo GARCH (p,q) que minimice el error cuadrático medio de un conjunto extramuestral para los índices bursátiles estadounidenses Dow Jones (DJI), S&P500 (GSPC), Nasdaq (IXIC) y NYSE Composite (NYA).

Los modelos GARCH fueron introducidos por Bollerslev (1986) con el propósito de generalizar el modelo ARCH planteado por Engle (1982). El objetivo de un modelo GARCH es determinar, a partir de la historia pasada de una serie de tiempo, el patrón de comportamiento de la volatilidad. Este proceso restringe la varianza condicional de una serie a que dependa solamente de innovaciones pasadas y valores rezagados de la varianza. De este modo, la modelación de la volatilidad mediante un proceso GARCH (p,q), estará especificado por p rezagos del componente autorregresivo (rezagos de la varianza) y q rezagos del componente de media móvil (innovaciones pasadas).

En la literatura econométrica financiera, los modelos generalizados autorregresivos con heterocedasticidad condicional (GARCH) han sido típicamente especificados de la forma GARCH ($1,1$), incluyendo sólo un rezago de cada componente en la modelación del proceso.¹ Este tipo de estructura tiene diversas ventajas desde un punto de vista estadístico, que están relacionadas principalmente con la simpleza y la parsimonia de la especificación. En numerosas ocasiones esta estructura es capaz de capturar de manera eficiente y dinámica el patrón de conducta de la varianza, no siendo necesario aumentar la especificación del modelo. Sin embargo, Engle (2001) plantea que en ciertas ocasiones modelos con más de un rezago podrían ser necesarios para encontrar mejores predicciones de la varianza. A partir de lo anterior surge la problemática acerca de cómo especificar el modelo GARCH (p,q) que mejor se ajuste a una serie de tiempo para hacer predicciones de la volatilidad, y junto con esto, encontrar una forma que permita determinar la estructura óptima del proceso. En este trabajo se plantea la posibilidad de optimizar la estructura GARCH (p,q) para cuatro series de retornos de índices bursátiles norteamericanos mediante

¹ Véase por ejemplo: Stentoft (2005), Bollerslev y Mikkelsen (1996) y Andersen et al (1999).

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

un *algoritmo genético*, y de este modo especificar de la mejor manera cada modelo a cada serie en particular

Parisi, Parisi y Cornejo (2004) utilizaron *algoritmos genéticos* para optimizar estructuras de procesos ARMA (p,q) con el objetivo de encontrar aquel modelo que maximizara el porcentaje de predicción de signo para índices bursátiles norteamericanos. Los resultados obtenidos fueron superiores a los alcanzados con un modelo ARMA $(1,1)$ y un modelo optimizado bajo la metodología de Box-Jenkins². Análogo al caso anterior, los modelos GARCH pueden ser interpretados como un modelo ARMA para determinar el comportamiento de la varianza condicional, por lo tanto, también podrían ser optimizados mediante la metodología de *algoritmos genéticos*.

El objetivo particular de este ensayo es demostrar que la estructura de un modelo GARCH (p,q) puede ser optimizada por un *algoritmo genético*, y que el resultado encontrado por dicho algoritmo, modelará de mejor manera la varianza condicional que un proceso GARCH $(1,1)$, y será cercana a la óptima (mejor de todas). Para probar esta hipótesis se contrastarán los resultados obtenidos en términos del error cuadrático medio de un conjunto extramuestral para la estructura optimizada mediante el *Algoritmo Genético* y el GARCH $(1,1)$. Adicionalmente a esto, se probarán todos los modelos posibles en base a una estructura general. El objetivo de lo anterior es comparar la estructura encontrada mediante heurística (o *Fuerza Bruta*)³ y la encontrada mediante el *Algoritmo Genético*. De este modo, se podrá conocer el sesgo existente en los resultados entregados por ambas estructuras optimizadas.

El documento se divide en cinco secciones: la sección dos contiene una primera aproximación acerca del funcionamiento y utilidad de los procesos GARCH, además de una breve reseña de los *algoritmos genéticos*; la sección tres describe la metodología utilizada y presenta algunos tests complementarios; la sección cuatro presenta los resultados de la optimización realizada mediante *algoritmos genéticos* y los compara con

² Box-Jenkins (1976)

³ Probar todas las combinaciones posibles de especificación para un modelo GARCH (p,q) .

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

un modelo GARCH $(1,1)$, un modelo GARCH (p,q) generado aleatoriamente y un modelo optimizado probando todos los modelos; finalmente, en la sección cinco se exponen las conclusiones del estudio.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Modelos de Volatilidad Estocástica

En series de tiempo, y en particular en series financieras, regularmente se pueden observar episodios de inestabilidad en la volatilidad. Es habitual para una misma serie de retornos de activos financieros encontrar periodos de alta varianza y de relativa calma (clusters de volatilidad).⁴ En la teoría clásica de series de tiempo, el desarrollo estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario (amplio o débil) que asume:

$$\begin{aligned}E(Y_t) &= \mu \\Var(Y_t) &= \sigma^2 \\Cov(Y_t, Y_{t-j}) &= Cov(Y_{t+\tau}, Y_{t+\tau-j}) = \gamma(j)\end{aligned}$$

La volatilidad estocástica se refiere a que sólo la varianza condicional (o varianza de corto plazo) es la que no se mantiene constante a lo largo de la serie. Como la varianza incondicional (o varianza de largo plazo) sí permanece constante, entonces no se estarían violando los supuestos del modelo clásico, ya que éstos se refieren a esta última y no a la varianza de corto plazo.

El hecho de que se asuma que la varianza es constante, cuando ésta efectivamente no lo es, puede acarrear diversos problemas estadísticos al momento de estimar los modelos econométricos. Estadísticamente hablando, el problema que se suscita con la presencia de volatilidad no constante es la pérdida de eficiencia de los estimadores, los cuales *ceteris paribus*, permanecen siendo insesgados. Debido a esto, el problema de volatilidad estocástica no afecta al Teorema de Gauss-Markov, ya que se seguirían cumpliendo los supuestos sobre la varianza incondicional, por lo tanto, los estimadores por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) siguen siendo los Mejores Estimadores entre los Lineales e Insesgados (MELI). Sin embargo, dado que la varianza condicional no es constante, existe algún estimador no lineal más eficiente que MCO, como por ejemplo, el estimador por Máxima Verosimilitud. En resumen, al estimar modelos de series financieras que presentan

⁴ Véase Anexo 1: “Gráficos de Volatilidad de Retornos”.

el problema de volatilidad estocástica, se debe modelar el comportamiento de la varianza condicional, con el objeto de obtener estimaciones más eficientes.

Con el propósito de determinar el patrón de comportamiento de la varianza condicional, Engle (1982) introdujo el modelo *Autorregresivo con Heterocedasticidad Condicional* (ARCH). Tal como existe una amplia variedad de modelos para el primer momento, como lo son los modelos AR, MA, ARMA, ARIMA, ARMAX, ARIMAX, etc., también existe una familia de modelos basados en el modelo ARCH, que buscan explicar, a través de sus distintas especificaciones, el comportamiento del segundo momento. Es así, que el modelo ARCH ha sido ampliado y sofisticado por varios autores a través de los años, generando una serie de modelos para modelar la volatilidad estocástica, entre los cuales se pueden mencionar los modelos: GARCH, E-GARCH, ARCH-M, IGARCH, EARCH, TARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH.

A continuación se describirá la formulación del modelo *Autorregresivo con Heterocedasticidad Condicional* (ARCH⁵) de Engle (1982). Este modelo busca estimar la varianza condicional (h_t) con una formulación similar a un proceso de Media Móvil (MA), pero considerando el segundo momento, es decir, utilizando rezagos del error al cuadrado (ε_{t-i}^2). Tsay (1987) y Bera (1992) plantean que el proceso ARCH (q) no es más que un proceso de Medias móviles, pero con parámetros cambiantes y variables. Luego de haber estimado \hat{h}_t , ésta se incluye para la formulación del residuo de la ecuación principal del retorno. Por lo tanto, se tiene que el retorno del activo se explica por su media y los desvíos a partir de ella, los cuales consideran la estimación de la volatilidad del periodo en que se desea la predicción. En resumen, la especificación de un modelo ARCH (q) puro es la siguiente:

$$\begin{aligned}R_t &= u + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \mu_t \cdot \sqrt{h_t} \\ h_t &= \alpha + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2\end{aligned}$$

⁵ Por su sigla en inglés, *Autorregresive Conditional Heterocedasticity*.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

μ_t es un cierto número aleatorio que es “ruido blanco” y generalmente se genera a través de una distribución N (0,1). También se pueden utilizar otras distribuciones, como por ejemplo una t-Student, si es que existiese *leptokurtosis* (colas anchas), o distribuciones generadas a través del método de *bootstrap*.

Utilizando esta especificación se puede demostrar que la varianza condicional ($E(\varepsilon_t^2 / I_t)$) es igual a h_t y, por lo tanto, varía en el tiempo. Del mismo modo, y asumiendo que ε_t es estacionario, la varianza incondicional ($E(\varepsilon_t^2)$) es constante.

$$E(E_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}$$

Esto deriva a que se deben cumplir las siguientes restricciones en el modelo:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &> 0 \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i &< 1 \\ \alpha_i &\geq 0, \forall i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

Donde la segunda restricción es necesaria para cumplir la condición de estacionariedad en media.

Al igual que para especificaciones sobre el primer momento se prefiere un modelo mixto del tipo ARMA a un modelo puro, como un AR o MA, debido a la ganancia en parsimonia y, por ende, en robustez. Bollerslev (1986) incorpora elementos autorregresivos en el modelo de Engle (1982), convirtiéndolo en un modelo GARCH (*Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity*). Por lo tanto, la especificación general de un modelo GARCH (p, q) es como sigue:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \mu_t \cdot \sqrt{h_t} \\ h_t &= c + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \end{aligned}$$

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Es claro notar que el modelo ARCH (q) corresponde a un caso particular de un GARCH (p, q), en que todos los coeficientes autorregresivos son iguales a 0. De este modo se deriva su apelativo de general. En este caso, la varianza condicional ($E(\varepsilon_t^2 / I_t)$) sigue siendo igual a h_t y, por lo tanto, varia en el tiempo. En cuanto a la varianza incondicional ($E(\varepsilon_t^2)$), y siguiendo con el supuesto de estacionariedad de ε_t , ésta sigue siendo constante, pero ahora es igual a:

$$E(E_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}$$

Las siguientes restricciones deben ser cumplidas dentro del modelo:

- 1) $\alpha_0 > 0$
- 2) $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$
- 3) $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$
- 4) $\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$
- 5) $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, q$
- 6) $\beta_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, p$

La segunda restricción es necesaria para que se cumpla la condición de estacionariedad en media. La tercera restricción es necesaria para que el componente de media móvil sea invertible y, por ende, convertible en un componente autorregresivo de orden infinito. En tanto, la cuarta restricción impide que el proceso sea explosivo y no estacionario.

Tal como un modelo ARCH (q) puede ser representado como un proceso de Medias móviles, un modelo GARCH (p, q) se puede interpretar como un proceso ARMA para el segundo momento condicional (Bollerslev and Mikkelsen, 1996).

Análogamente a los modelos para la media, uno de los grandes problemas que acarrear los procesos de la familia ARCH es la determinación de los rezagos a incluir, tanto

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

en el componente de media móvil como en el autorregresivo. En la literatura econométrica existen técnicas para este propósito. En el caso de un MA puro se puede analizar el gráfico de *Autocorrelación Simple* (ACF), mientras que para un proceso AR puro se utilizan los de *Autocorrelación Parcial* (PACF).⁶ En cambio, para procesos mixtos, como un ARMA, se debe centrar el análisis en criterios de selección a través de un proceso de búsqueda, como lo son los criterios de Akaike (1973), Schwarz (1978) y sus respectivas modificaciones. Aunque estas técnicas son útiles para resolver el problema de identificación, éstas no se encuentran libres de discusión, ya que no se sabe si incluir sólo el rezago recomendado según los gráficos o también considerar todos los rezagos anteriores. Otra dificultad del análisis a partir de los gráficos de autocorrelación es que puede estar sujeto a subjetividades. Para el caso de los criterios de selección avanzados, el problema es que sólo se puede determinar el número de rezagos, pero no específicamente cuales incluir.

Alternativamente a las técnicas descritas en el párrafo anterior, en la actualidad se han desarrollado metodologías avanzadas con el fin de optimizar la estructura de los modelo. Estas nuevas técnicas, basadas también en algoritmos de búsqueda, permiten establecer de forma clara, cual es la estructura óptima de un modelo en relación a un objetivo predefinido, señalando específicamente cuales variables son las que deben ser incluidas. Dentro de estas nuevas técnicas se encuentra los *algoritmos genéticos*, los cuales serán utilizados en este trabajo con el fin de determinar su aplicabilidad sobre modelos de volatilidad estocástica, como el proceso GARCH antes descrito. Dicho algoritmo se describe a continuación.

⁶ Esta metodología es la base del método de Box-Jenkins.

2.2 Algoritmo Genético

Los *algoritmos genéticos*, introducidos por Holland (1975), consisten en una función matemática o una rutina que simula el proceso evolutivo de las especies, teniendo como objetivo encontrar soluciones a problemas específicos de maximización o minimización.⁷ Así, el *algoritmo genético* recibe como entrada una generación de posibles soluciones para el problema en cuestión, y arroja como salida los especímenes más aptos (es decir, las mejores soluciones) para que se apareen y generen descendientes, los que deberían tener mejores características que las generaciones anteriores.⁸

Los *algoritmos genéticos* trabajan con códigos que representan a cada una de las posibles soluciones al problema. Por ello, es necesario establecer una codificación para todo el rango de soluciones, antes de comenzar a trabajar con el algoritmo. Al respecto, Davis (1994) señala que la codificación más utilizada es la representación de las soluciones por medio de cadenas binarias (conjuntos de ceros y unos).

Según Bauer (1994), este método puede ser utilizado fácilmente en aplicaciones financieras. Davis (1994) muestra una aplicación de *algoritmos genéticos* en la calificación de créditos bancarios, resultando mejor que otros métodos como las *redes neuronales*, debido a la transparencia de los resultados obtenidos. Kingdom and Feldman (1995), señalaron haber usado *algoritmos genéticos* para hallar reglas que pronosticaran la bancarrota de las firmas, estableciendo relaciones entre las distintas razones financieras. Bauer (1994) utilizó *algoritmos genéticos* para desarrollar técnicas de transacción que indicaran la asignación mensual de montos de inversión en dólares y marcos; Pereira (1996) los utilizó para encontrar los valores óptimos de los parámetros usados por tres reglas de transacción distintas para el tipo de cambio dólar americano/dólar australiano: los parámetros obtenidos mostraron resultados intramuestrales positivos, los cuales disminuyeron al aplicar las reglas fuera de la muestra, aún cuando siguieron siendo

⁷ Al momento de aplicar un modelo de *algoritmos genéticos*, se debe identificar correctamente el problema de maximización o minimización a tratar. Si el problema en cuestión no es de ese tipo, se deberá buscar otro método para abordarlo.

⁸ Para una explicación de la terminología usada, véase Anexo 2: “Terminología Algoritmos Genéticos”.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

rentables. Allen and Karjalainen (1999) usaron *algoritmos genéticos* para aprender reglas de transacción para el índice S&P500 y emplearlas como un criterio de análisis técnico y, una vez cubiertos los costos de transacción, encontraron que el exceso de retorno calculado sobre una estrategia *buy and hold*, durante el período de prueba extramuestral, no era consistente. Kim and Han (2000) mostraron que los *algoritmos genéticos* pueden ser usados para reducir la complejidad y eliminar factores irrelevantes, lo que resultó mejor que los métodos convencionales para predecir un índice de precios accionario. Parisi, Parisi y Cornejo (2004) utilizaron *algoritmos genéticos* para optimizar estructuras de modelos ARMA (p,q) con el objetivo de encontrar el modelo que maximizara el porcentaje de predicción de signo para índices bursátiles norteamericanos. Los modelos encontrados obtenían mejores resultados en rentabilidad que una estrategia *buy and hold* y un modelo especificado aleatoriamente.

Por otra parte, Feldman and Treleaven (1994) señalaron que la mayor desventaja de los *algoritmos genéticos* es la dificultad que presentan para escoger una técnica de codificación manejable, y para determinar el tipo de selección y las probabilidades de los operadores genéticos, ya que no hay reglas fijas en esta materia.

3. METODOLOGÍA

El objetivo de este trabajo es encontrar a través del *Algoritmo Genético* la estructura de un modelo GARCH que minimice el Error Cuadrático Medio (ECM) de un conjunto extramuestral de 200 datos semanales. El modelo GARCH es aplicado sobre los retornos semanales de los índices bursátiles estadounidenses Dow Jones (DJI), S&P500 (GSPC), Nasdaq (IXIC) y NYSE Composite (NYA). Los datos corresponden a los cierres semanales⁹ del periodo comprendido entre el 04 de enero de 1980 y el 31 de diciembre de 2005. Estos datos fueron transformados a retornos semanales de la siguiente forma: $r_j = \ln(P_t / P_{t-1})$, en donde P_t corresponde al precio de cierre del índice de la semana t . Esto puede ser interpretado como el retorno semanal desde una perspectiva de composición continua. Por último, la muestra de retornos semanales se separó en dos, en un periodo intramuestral de 1157 y otro extramuestral de 200 observaciones.

La formulación general ampliada del modelo GARCH a emplear es la siguiente¹⁰:

$$\begin{aligned}r_t &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \mu_t \cdot \sqrt{h_t} \\ h_t &= c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \dots + \beta_5 \cdot h_{t-5}\end{aligned}$$

Donde μ corresponde a la media de los retornos semanales del periodo intramuestral; y μ_t proviene de una serie generada a través del método *bootstrap* a partir de los residuos estandarizados del periodo intramuestral ($\hat{\mu}_t = \frac{e_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}$).

El *bootstrap* es un proceso de generación de observaciones ficticias a partir de datos históricos, a fin de contar con suficiente información para elaborar diferentes conjuntos extramuestrales. El método *bootstrap* utilizado fue del tipo *por bloques* (*block-bootstrap*).

⁹ Se trabajó con valores de cierres semanales debido a que los administradores de fondos tienden a recomponer sus portafolios en función de pronósticos semanales.

¹⁰ Se incorporaron sólo cinco rezagos del residuo al cuadrado y cinco rezagos de h_t , ya que, por un lado, la varianza actual (h_t) implica una memoria infinitamente larga de las innovaciones pasadas y, por otro lado, el hecho de incluir una mayor cantidad de variables al problema hacen que éste sea muy complejo debido a las restricciones que se tiene en términos de capacidad de procesamiento de datos y de tiempo.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Se utilizó el proceso por bloques debido a que se está trabajando con series de tiempo, en las cuales es necesario mantener, aún de manera débil, el orden de las series, ya que de lo contrario el proceso de remuestreo formaría series inconexas temporalmente, lo que no tiene sentido en el presente análisis. En particular, el procedimiento consistió en generar 100 series de igual tamaño que el periodo extramuestral (200 observaciones), tomando bloques aleatorios de cuatro datos (permitiendo *overlapping*). Finalmente, cada μ_k ¹¹ corresponde al promedio de sus correspondientes (misma fila) en las 100 series generadas

$$(\mu_k = \frac{1}{100} \sum_{\tau=1}^{100} \mu_{k,\tau}).$$

Cada h_t se estima mediante el método de Máxima Verosimilitud sustituyendo σ^2 por h_t en la función de verosimilitud normal y maximizando con respecto a los parámetros.

$$\text{Max}_{c,\alpha,\beta} \ln(f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2h_t} \sum_{i=1}^T \varepsilon_i^2$$

Este método es el más simple para resolver el problema, dado que la única variable con la cual se cuenta con información es R_t (Engle, 2001). En Bollerslev (1993) se demuestra que el método de Máxima Verosimilitud se puede aplicar sin problemas sobre los modelos de volatilidad condicional, si es que se cumple la hipótesis de normalidad de ε_t .¹² La estimación por Máxima Verosimilitud se realiza a través de un proceso de *rolling*¹³. Este proceso consiste en que para cada nueva estimación de h_t se incorpora el residuo ε del periodo anterior a la sumatoria de errores al cuadrado en la función de verosimilitud, perdiendo el primer residuo (más antiguo) incluido en la estimación del periodo anterior. De esta forma, el tamaño T (igual al tamaño del conjunto intramuestral) se mantiene constante a lo largo de toda la estimación.

¹¹ Donde $k = 1, \dots, 200$ y μ_k corresponde a una observación de la serie μ_t .

¹² En el caso de que no cumplirse esta hipótesis, Bollerslev and Wooldbridge (1992) propusieron el método de estimación de Cuasi-Máxima Verosimilitud.

¹³ El funcionamiento *rolling* pretende capturar el proceso de adaptación de expectativas, de manera tal que se le otorgue una mayor importancia a aquella información recientemente agregada y descartando la más antigua, simulando el hecho de que los agentes ajustan sus expectativas dando una mayor ponderación a la información más reciente.

3.1 Implementación del Algoritmo Genético

3.1.1 Codificación y Población Inicial

El modelo GARCH general presentado anteriormente, incluye un total de 11 variables, las cuales consisten en una constante, 5 rezagos del residuo al cuadrado (ε_t^2) y 5 rezagos de la variable independiente (h_t). Cada variable fue representada con un *bit* y, por lo tanto, el largo de la cadena binaria resultó igual al máximo número de variables del modelo.¹⁴ Cada bit puede tomar el valor de 0 ó 1: cuando tome el valor de 0, la variable que representa no será incluida en el modelo, mientras que cuando tome el valor de 1, la variable representada sí formará parte del modelo. Cabe señalar que el primer bit, que representa a la constante, siempre tomará el valor de uno, ya que el modelo GARCH exige la incorporación de ésta.¹⁵

De acuerdo a las matemáticas binarias, una cadena de largo “ L ” permite representar “ 2^L ” soluciones posibles. En consecuencia, y considerando que el primer bit es invariante e igual a 1, se tiene que el número total de modelos posibles para este caso es “ 2^{L-1} ”, *ergo*, se cuenta con 1.023 modelos distintos,¹⁶ entre los cuales el *algoritmo genético* realizará la búsqueda de la mejor solución.

Una vez realizada la codificación de los modelos, se comenzó a trabajar con el *Algoritmo Genético*. La primera generación de modelos (o población inicial), de un tamaño de 100, se obtuvo de forma aleatoria. De acuerdo a Bauer (1994), es importante que la población esté compuesta por un número no tan pequeño de potenciales soluciones, normalmente entre 100 y 200 individuos, de manera de garantizar que sea seleccionado un grupo amplio de individuos representativos de las mejores soluciones.

¹⁴ El primer bit de la cadena representará a la constante (c); los bit 2, 3, 4, 5, 6 representarán los rezagos del residuo al cuadrado del modelo GARCH; y los bit 7, 8, 9, 10, 11 representarán los rezagos de la variable independiente.

¹⁵ Tal como se mencionó anteriormente los modelos GARCH deben incorporar una constante, ya que en el caso de no incluirla, la varianza incondicional (largo plazo) sería determinística e igual a 0.

¹⁶ A esta cantidad de modelos se le debe restar uno, ya que éste sería el modelo en el cual todos los bit serían 0.

3.1.2 Evaluación de la Estimación

A continuación, se evaluó la calidad de cada modelo basándose en el conjunto extramuestral y utilizando el proceso de rolling¹⁷ descritos anteriormente. El criterio de evaluación utilizado fue el error cuadrático medio (ECM) calculado. El ECM es el promedio de los errores de predicción al cuadrado¹⁸ y es un criterio utilizado ampliamente en la literatura para evaluar modelos econométricos predictivos en un conjunto extramuestral. En este sentido, un modelo predictivo será mejor en la medida que tenga un menor ECM, ya que representaría una menor desviación, en términos de magnitud, del resultado predicho con respecto al valor observado. El ECM es usado también como una aproximación de la varianza de la estimación, lo que permite, por ejemplo, construir intervalos de confianza a partir de éste.

3.1.3 Selección y Generación de Descendencia

Luego de haber realizado todas las estimaciones para toda la primera generación, se determinó el ECM para cada uno de los 100 modelos calculados a partir del conjunto extramuestral. Tal como se mencionó anteriormente, la idea principal del algoritmo genético es que los individuos (modelos) más aptos (de menor ECM) sean los que pasen a la próxima generación, y sean también los padres que generen descendencia para la próxima generación de modelos. La selección de los padres de la nueva generación se realizó a través del método *ruleta truncada*, especificando que el 10% más apto de la generación actual se traspasará a la siguiente generación. De este modo, los 10 mejores modelos de cada generación de 100 especímenes pasa directamente a la siguiente, y los 90 restantes serán producto de la reproducción de los padres seleccionados de la generación anterior. Así, la reproducción de los hijos se realiza a partir de los individuos más aptos de una generación determinada.

¹⁷ Véase Anexo 5: “Funcionamiento del Rolling y Esquema del Proceso”.

¹⁸ $ECM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i - \hat{r}_i)^2$, con N igual al tamaño del conjunto extramuestral.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Para la reproducción, se seleccionaron aleatoriamente dos cromosomas padres, que luego de aplicárseles el operador de *cruce doble*¹⁹, generarán un cromosoma de descendencia. Este proceso continúa hasta completar el tamaño de población deseado. Una vez obtenida la nueva generación, se permitió que cada gen (bit), del total de individuos, mutara con una probabilidad de 8.33%²⁰. La clonación está implícita en el proceso, ya que no se restringió el cruce entre dos modelos iguales. Una vez creada la nueva población de modelos se aplicó el mismo procedimiento, continuando con el proceso de selección, y generando nuevas descendencias. Este proceso finalizó al lograr 5 generaciones.²¹

3.2 Modelos de Comparación

Los resultados obtenidos por el modelo optimizado por el *Algoritmo Genético*, en cuanto al ECM, son enfrentados con algunos modelos de comparación (*benchmark*). En primer lugar, se compara el ECM del modelo optimizado *versus* un modelo GARCH (1,1), el cual es empleado tradicionalmente en la literatura financiera econométrica. Esta comparación es fundamental, ya que permite determinar si es que realizar una optimización de la estructura de un modelo GARCH (p,q) vía *algoritmo genético* tiene algún sentido, ya que un modelo básico y parsimonioso como un GARCH (1,1) podría bastar para obtener buenos resultados de predicción de retornos. Más aún, confirmaría lo señalado en Bollerslev (1992), donde se establece que no es necesario emplear un mayor número de rezagos en los modelos GARCH, ya que la varianza actual (h_t) implica una memoria infinitamente larga de las innovaciones pasadas, por lo que bastaría un proceso GARCH (1,1).

¹⁹ Para una explicación del operador de *cruce doble*, véase Anexo 4: “Esquema del Operador de Cruce”.

²⁰ Esto quiere decir que con una probabilidad de 8.33% un gen (bit) cambia de 0 a 1, o viceversa. Es importante señalar que el primer bit para todos los modelos no puede mutar, ya que corresponde a la constante. Además el mejor modelo de cada generación pasa directamente sin mutar a la siguiente. Esto es para asegurar que el mejor modelo en cada generación se mantenga inalterado hasta encontrar un modelo más apto.

²¹ Para ver el esquema del *Algoritmo Genético*, véase Anexo 3: “Esquema de funcionamiento del Algoritmo Genético”.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

El segundo modelo de comparación es un modelo GARCH cuya estructura fue generada aleatoriamente (conservando las especificaciones del modelo general ampliado anterior).²² El uso de este *benchmark* resulta útil con el fin de analizar el poder del *Algoritmo Genético* como método de búsqueda de estructuras de modelos óptimas.

Por último, se realiza un proceso de *Fuerza Bruta (heurística)*, donde se prueban todos los modelos posibles, es decir, los $2^{(L-1)}-1=1.023$ modelos diferentes. Se compara el ECM obtenido por el modelo optimizado por *Algoritmo Genético* contra el obtenido por el mejor modelo, luego de haber probado todas las combinaciones de estructuras posibles. Lo anterior permite observar el sesgo que existe entre la solución que otorga el *Algoritmo Genético* y el modelo óptimo verdadero. Es lógico de esperar que los resultados de esta evaluación favorezcan al modelo óptimo verdadero, sin embargo la ventaja del *Algoritmo Genético versus* un proceso de *Fuerza Bruta* es el ahorro en tiempo y procesamiento que se obtiene. Por lo tanto, habría un *trade-off* entre ahorro en tiempo y calidad del resultado obtenido.

Con el fin de verificar si es que existen diferencias significativas entre el ECM obtenido a través del *Algoritmo Genético* y los obtenidos por los modelos de comparación, se realiza un *test de significancia estadística*. Para ello, se utiliza como desviación estándar la calculada en base a los ECM alcanzados por el conjunto de modelos del proceso de *Fuerza Bruta*. Lo anterior se fundamenta debido a que como el proceso de *Fuerza Bruta* prueba todos los modelos posibles, entonces al tomar la desviación estándar de los ECM obtenidos, se tendrá la desviación estándar de las estimaciones.

3.3 Test Complementarios

Si bien el objetivo principal de este trabajo es encontrar aquella estructura GARCH (p,q) que logre un menor Error Cuadrático Medio, también se realizarán algunos test complementarios a los resultados encontrados. Primero, se efectúa un test *ex ante* sobre la

²² Se mantuvo el mismo modelo generado aleatoriamente para el análisis de todos los índices.

serie de retornos de los índices bursátiles en cuestión, el cual permite identificar el grado de aplicabilidad de los modelos ARCH/GARCH (en general) sobre una serie de tiempo determinada. Para este fin, se utiliza el test Lagrange Multiplier (LM) de Engle. Este test podría dar explicación a los resultados encontrados, ya que, por ejemplo, si el ECM mínimo es un valor muy grande, entonces puede ser que los modelos ARCH/GARCH no se ajustan bien a esa serie determinada. En segundo lugar, se efectúan dos test sobre la serie extramuestral de retornos estimados por los modelos GARCH a comparar. Estos test se basan en la hipótesis nula de que la serie no presentan correlaciones simples (test C) o bicorrelaciones (test H), es decir, que la realización de la serie en análisis proviene de un proceso estacionario de ruido puro. Por lo tanto, estos test permiten observar si las distintas estructuras específicas de modelos GARCH analizadas resultan ser adecuadas para explicar el comportamiento de las series de retornos bursátiles norteamericanos en estudio. La aplicación y adaptación de estos dos últimos test para el análisis de modelos GARCH se puede encontrar en Bonilla, Romero-Meza and Hinich (2006) y Bonilla, Maquieira and Romero-Meza (2006).

3.3.1 Test LM de Engle

El objetivo de este test es ver si es que una serie de tiempo posee heterocedasticidad condicional, en otras palabras, analiza si es que tiene sentido aplicar un modelo del tipo ARCH/GARCH sobre la serie en estudio. Este test fue creado por Engle en el año 1982 y se basa en el principio del Multiplicador de Lagrange (LM²³). El método de Multiplicador de Lagrange también puede ser utilizado para realizar un contraste de especificación basado sobre la homocedasticidad, pero éste sólo puede ser aplicado en modelos ARCH (q) y no en modelos GARCH, ya que estos últimos presentarían problemas de multicolinealidad. Por lo tanto, este método será utilizado sólo como análisis *ex ante* para conocer el grado de aplicabilidad de un modelo ARCH/GARCH²⁴ sobre la serie en cuestión.

²³ Por sus siglas en ingles, *Lagrange Multiplier*.

²⁴ El test LM de Engle fue creado originalmente para un modelo ARCH (q), sin embargo, un modelo GARCH (p, q) puede ser convertido en un proceso ARCH de orden infinito, si es que se desarrolla recursivamente el componente autorregresivo.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

En primer lugar, se corre una regresión de la variable de interés con respecto a una constante, pudiéndosele agregar rezagos de la variable independiente como variables explicativas. En este caso se ocupó un modelo AR (1) con constante. Luego, se toman los residuos, $\hat{\varepsilon}_t$, y se elevan al cuadrado, lo cual representaría una estimación de la varianza condicional. Después, se estima un modelo ARCH sobre este residuo al cuadrado, es decir, se regresa con respecto a una constante y rezagos del mismo. En particular, se utilizaron siete rezagos más la constante. Por lo tanto, la hipótesis nula de este test es que todos los parámetros (excluyendo la constante) son iguales a cero. Por último, se calcula el coeficiente de Bondad de Ajuste (R^2) de esta última regresión y se realiza el test LM, el cual se define como $(T-q) \cdot R^2$, donde q es el número de rezagos empleados en el modelo ARCH. Este test se distribuye $\chi^2(q)$. Por lo tanto, en nuestro caso específico $LM = (T - 7) \cdot R^2 \rightarrow \chi^2(7)$.²⁵

3.3.2 Test *Portmentau* de Bicorrelaciones de Hinich (test H) y Test C

Estos dos test se aplicarán junto con un procedimiento de test de bloques (window). Lo que se hace en estos test es estandarizar la serie de datos²⁶ y dividirlos en ventanas no superpuestas de tamaño n . Cada dato estandarizado se representa como $Z(t_k)$, donde t representa al tiempo y k al bloque. La hipótesis nula es que los $Z(t)$ para cada bloque son una realización de un proceso estacionario de ruido puro²⁷ que tiene bicorrelaciones iguales a cero. La hipótesis alternativa es que el proceso generado dentro del bloque es aleatorio, pero con alguna bicorrelación $C_{zz}(r, s) = E(Z(t) \cdot Z(t+r) \cdot Z(t+s))$ distinta de cero.²⁸ El rango se define $0 < r < s < L$, donde L es el número de rezagos considerados según el tamaño del bloque. Para determinar L se utiliza la siguiente fórmula $L = n^b$ con $0 < b < 0,5$. El parámetro b depende del analista, sin embargo, basado en una simulación de Montecarlo se

²⁵ Cabe recordar que $T=1.356$, el cual es la cantidad de observaciones muestrales totales (intra- y extramuestral) de los retornos semanales de los índices.

²⁶ Es decir, restando su media y dividiendo esa resta por la desviación estándar.

²⁷ Stationary pure noise process.

²⁸ Para el test C se toman correlaciones simples.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

tiene que 0,4 es el valor óptimo a la hora de maximizar el poder del test al mismo tiempo que asegura una aproximación válida de acuerdo a la teoría asintótica.²⁹

A continuación se mostrarán los estadísticos H y C, sin mostrar su derivación, la cual se encuentra en Hinich (1996).

$$H = \sum_{s=2}^L \sum_{r=1}^{s-1} G^2(r, s)/(T - s) \rightarrow \chi^2((L-1)L/2)$$

donde

$$G(r, s) = \sum_{k=1}^{T-s} [Z(k) \cdot Z(k+r) \cdot Z(k+s)]$$

y

$$C = \sum_{r=1}^L C^2(r)/(T - r - 1) \rightarrow \chi^2(L)$$

donde

$$C(r) = \sum_{k=1}^{T-s} [Z(k) \cdot Z(k+r)]$$

Como se puede observar, el test H analiza la existencia de bicorrelaciones mientras que el test C analiza la existencia de correlaciones simples. Ambos test se aplican a cada bloque y se testea la hipótesis nula descrita anteriormente según el nivel de significancia especificado. Finalmente, se rechaza el test si es que el porcentaje de bloques en que éste fue rechazado supera el nivel de significancia.

Para verificar, mediante la aplicación de los test anteriores, si un modelo GARCH en particular logra una adecuada caracterización de los datos, se deben incorporar ciertas modificaciones que se encuentran señaladas en Bonilla, Romero-Meza and Hinich (2006). La serie de retornos es transformada en un set de datos binarios $\{X_p(t)\}$, donde

²⁹ Véase Hinich and Patterson (2005).

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

$X_p(t) = 1$ si $Z_p(t) > \mu$ y $X_p(t) = 0$ si $Z_p(t) < \mu$.^{30, 31} La serie $\{Z_p(t)\}$ proviene de la realización del proceso GARCH.

Con el objeto de aplicar los test descritos, se utilizaron bloques de tamaño $n=20$ y $n=10$ a partir del conjunto extramuestral, por lo que se cuenta con 10 y 20 bloques no superpuestos, respectivamente. Debido a que el tamaño n es igual a 20 o 10, y a que se tomó un valor del parámetro $b=0,4$, se tuvo que el número de rezagos empleados fue de $L=3$.

³⁰ Cabe notar que se realizó una modificación a la aplicación en Romero, Bonilla and Hinich (2005), ya que en ésta el valor crítico era 0, debido a que el modelo GARCH que se empleó era sin constante en la ecuación del retorno. Por lo tanto, para adaptar el test a la especificación del modelo GARCH presentado en el trabajo, se consideró como valor crítico al valor medio de los retornos, es decir, μ .

³¹ Para conocer detalles sobre las propiedades de ésta serie binaria generada, las cuales hacen que ésta tenga momentos que son bien comportados con respecto a la teoría asintótica, véase Romero, Bonilla and Hinich (2005) y Hinich (1996).

4. RESULTADOS

Las estructuras de modelos GARCH optimizadas a través de *Algoritmo Genético* para los cuatro índices analizados, incluyendo, además, las estructuras de los modelos de comparación (GARCH (1,1), modelo aleatorio y *Fuerza Bruta*), son las siguientes:

Dow Jones

$$GARCH(1,1) \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}$$

$$ModeloAleatorio \succ h_t = c + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_3 \cdot h_{t-3} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

$$AlgoritmoGenético \succ h_t = c + \alpha_4 \cdot \varepsilon_{t-4}^2$$

$$FuerzaBruta \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \cdot \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_2 \cdot h_{t-2} + \beta_4 \cdot h_{t-4} + \beta_5 \cdot h_{t-5}$$

Nasdaq

$$GARCH(1,1) \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}$$

$$ModeloAleatorio \succ h_t = c + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_3 \cdot h_{t-3} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

$$AlgoritmoGenético \succ h_t = c + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

$$FuerzaBruta \succ h_t = c + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_4 \cdot \varepsilon_{t-4}^2 + \beta_2 \cdot h_{t-2}$$

New York Composite

$$GARCH(1,1) \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}$$

$$ModeloAleatorio \succ h_t = c + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_3 \cdot h_{t-3} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

$$AlgoritmoGenético \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_2 \cdot h_{t-2} + \beta_5 \cdot h_{t-5}$$

$$FuerzaBruta \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \cdot \varepsilon_{t-3}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_2 \cdot h_{t-2} + \beta_4 \cdot h_{t-4} + \beta_5 \cdot h_{t-5}$$

S&P 500

$$GARCH(1,1) \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1}$$

$$ModeloAleatorio \succ h_t = c + \alpha_5 \cdot \varepsilon_{t-5}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_3 \cdot h_{t-3} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

$$AlgoritmoGenético \succ h_t = c + \alpha_1 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_2 \cdot h_{t-2} + \beta_5 \cdot h_{t-5}$$

$$FuerzaBruta \succ h_t = c + \alpha_2 \cdot \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \cdot h_{t-1} + \beta_3 \cdot h_{t-3} + \beta_4 \cdot h_{t-4}$$

Luego de conocer las estructuras de los modelos GARCH encontrados, se presenta el resumen de los resultados alcanzado para las cuatro series de retornos de índices norteamericanos analizadas, representadas cada una por una tabla en particular. En cada tabla se muestran los resultados para los cuatro modelos en comparación (mostrados en la primera columna). En la segunda columna se encuentran los ECM obtenidos. Para el caso

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

del Algoritmo Genético y de la Fuerza Bruta, el ECM que se muestra es el alcanzado por la estructura óptima encontrada por cada proceso, respectivamente. Lo mismo ocurre en la tercera columna, en donde se muestra la desviación estándar, la cual no es más que la raíz cuadrada del ECM de la columna anterior. La cuarta columna indica el valor obtenido por el test de significancia estadística en relación a la diferencia entre el ECM de los modelos de comparación y el ECM del Algoritmo Genético.³² De la quinta a la octava columna se presentan los resultados de los test H y test C para los dos tamaños de bloque (*window length*) utilizados (20 y 10).³³

Como era de esperar, los resultados obtenidos por el modelo GARCH optimizado mediante el proceso de *Fuerza Bruta* fueron superiores al resto de los modelos, presentando menores ECM para los cuatro índices bajo estudio. Lo que si es interesante de notar, es que, para todos los índices, el ECM del modelo GARCH optimizado a través del *Algoritmo Genético* es inferior al obtenido por un modelo GARCH (1,1) y uno especificado aleatoriamente.

Resumen de Resultados

DOW JONES (DJI)							
				Window length = 20		Window length = 10	
	ECM	Des. Est.	Test t	Test H	Test C	Test H	Test C
GARCH(1,1)	0,0004192	2,04743%	-3,14***	10%	10%	0%	0%
Modelo Aleatorio	0,0004121	2,02993%	-1,80*	10%	10%	0%	0%
Algoritmo Genético	0,0004025	2,00630%	0,00	10%	20%	0%	10%
Fuerza Bruta	0,0004023	2,00574%	-0,52	20%	10%	10%	0%

NASDAQ (IXIC)							
				Window length = 20		Window length = 10	
	ECM	Des. Est.	Test t	Test H	Test C	Test H	Test C
GARCH(1,1)	0,0007826	2,79742%	-3,84***	10%	20%	0%	10%
Modelo Aleatorio	0,0007447	2,72893%	-0,06	10%	20%	0%	10%
Algoritmo Genético	0,0007441	2,72789%	0,00	10%	10%	0%	20%
Fuerza Bruta	0,0007369	2,71457%	0,72	10%	10%	0%	10%

³² Los asteriscos que acompañan a los resultados del test t en todas las tablas, muestran el nivel de significancia al cual se rechaza la hipótesis nula de que la diferencia entre ECM es no significativa estadísticamente (***=1%; **=5%; *=10%).

³³ El nivel de significancia utilizado para los test H y test C es de un 10%.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

NEW YORK COMPOSITE (NYA)							
	ECM	Des. Est.	Test t	Window length = 20		Window length = 10	
				Test H	Test C	Test H	Test C
GARCH(1,1)	0,0003803	1,95019%	-4,59***	10%	30%	0%	0%
Modelo Aleatorio	0,0003644	1,90881%	-0,89	10%	20%	0%	10%
Algoritmo Genético	0,0003605	1,89875%	0,00	10%	20%	0%	10%
Fuerza Bruta	0,0003531	1,87921%	1,71*	10%	10%	0%	0%

S&P 500 (GSPC)							
	ECM	Des. Est.	Test t	Window length = 20		Window length = 10	
				Test H	Test C	Test H	Test C
GARCH(1,1)	0,0004177	2,04383%	-2,63***	20%	10%	0%	10%
Modelo Aleatorio	0,0004166	2,04119%	-2,43**	10%	10%	0%	10%
Algoritmo Genético	0,0004034	2,00851%	0,00	30%	10%	0%	0%
Fuerza Bruta	0,0004006	2,00140%	0,52	10%	10%	0%	0%

Cabe destacar que la diferencia de ECM entre el modelo obtenido por el *Algoritmo Genético* y el modelo GARCH (1,1) es estadísticamente significativa al 1% de nivel de significancia para las cuatro series. De lo anterior se desprende que tiene sentido utilizar algún método de optimización de estructuras para los modelos GARCH, como lo es el *Algoritmo Genético*, en contraposición de simplemente utilizar un modelo GARCH (1,1). Al analizar comparativamente los resultados de los test H y test C entre ambos modelos, se puede indicar que éstos no son concluyentes, en términos generales, con el fin de determinar que modelo tiene un mayor grado de aplicabilidad, ya que no presentan un patrón regular. Por ejemplo, para el caso del índice Dow Jones, no existe diferencias en el test H, pero si existe una leve ventaja en el test C a favor del modelo GARCH (1,1); mientras que para el resto de los índices las conclusiones de este análisis varían dependiendo del test (H o C) y/o el tamaño del bloque (20 o 10).

Como segundo punto de análisis, se puede señalar que los modelos alcanzados por el *Algoritmo Genético* son superiores que los obtenidos mediante un proceso de generación aleatoria (azar), lo cual se refleja en un menor ECM para todos los índices. Sin embargo, al analizar la significancia estadística de la diferencia de ECM entre estos dos modelos, se encuentra que ésta no es significativa en el caso de los índices Nasdaq y New York Composite, para los tres niveles de significancia utilizados. Para el índice Dow Jones la diferencia resulta ser significativa a un 10% de nivel de significancia, mientras que para el índice S&P500, ésta fue significativa a un 5%. Al igual que en la comparación anterior, el análisis proveniente de los resultados de los test H y C no son concluyentes.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Al comparar los resultados obtenidos por los modelos optimizados mediante el *Algoritmo Genético* versus aquellos alcanzados por los “verdaderos” modelo óptimos obtenidos por el proceso de *Fuerza Bruta*, se tiene que, para casi la totalidad de los índices, la diferencia en cuanto a ECM es no significativa estadísticamente, exceptuando el caso del índice NYA, para el cual la diferencia fue significativa al 10%. Lo anterior es clave, en vista de que la estructura de los modelos fue diferente entre ambos procesos, para todos los índices. Por lo tanto, aunque el *Algoritmo Genético* no haya encontrado la “verdadera” estructura óptima, el modelo encontrado se acerca bastante al óptimo, en términos de ECM. En otras palabras, el sesgo existente no es substancial al realizar la estimación de retornos bursátiles.

Es interesante señalar los resultados obtenidos por el test LM de Engle, efectuado sobre las series de retornos en estudio. Los resultados del test muestran que para todas las series podría ser adecuado modelarlas a través de una especificación perteneciente a la familia de los modelos ARCH/GARCH. Esto último es sólo completamente válido si se analiza la muestra total, el conjunto intramuestral o el conjunto extramuestral, sin embargo, al realizar este test por bloques no sobrepuestos de $n=100$ y $n=200$, la serie parecería no ser modelable mediante un modelo del tipo ARCH/GARCH, ya que el porcentaje de rechazo no supera el 50% de las veces (cantidad total de bloques).³⁴

Si bien es cierto que del análisis anterior se puede obtener importantes conclusiones en términos de comparación de modelos y procesos de optimización, cabe señalar que los resultados obtenidos muestran que todas las especificaciones de modelos GARCH testeadas no son capaces de realizar proyecciones correctas de los retornos semanales de estos cuatro índices bursátiles. Esto se verifica al notar que las desviaciones estándar (raíz cuadrada del ECM) son muy elevadas, ya que decir que con un 95% de probabilidad el retorno de la próxima semana estaría dentro del intervalo $[0,22+1,96*2,0063\%; 0,22-1,96*2,0063]$ ³⁵ no tiene ningún sentido práctico.

³⁴ Véase Anexo 6: “Resultados Test LM de Engle”.

³⁵ Los datos empleados en el ejemplo son del índice Dow Jones y el modelo optimizado por *Algoritmo Genético*.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

La discusión anterior sería relevante si el objetivo de este trabajo fuese realizar una buena estimación de los retornos bursátiles. Sin embargo, éste no es el objetivo principal, sino que es corroborar que el *Algoritmo Genético* es una metodología capaz de optimizar estructuras de modelos GARCH.

5. CONCLUSIONES

Amén de los resultados anteriores, es posible concluir que el *Algoritmo Genético* es una técnica eficaz como método de optimización de estructuras de modelos GARCH. En primer lugar, la estructura optimizada a través de *Algoritmo Genético*, alcanzó mejores resultados que la estructura GARCH (1,1), la cual es de común utilización dentro de la literatura financiera. Si bien el GARCH (1,1) es una estructura simple y parsimoniosa para modelar aceptablemente la volatilidad estocástica, es posible adaptar cada serie, y cada intervalo de tiempo en particular, a un modelo y estructura específica. En este sentido, no sería correcto esperar que una única y rígida especificación, como lo es el GARCH (1,1), sea capaz de ajustar y modelar una serie de retornos en distintos periodos de tiempo.

Por otra parte, se puede concluir que aunque la estructura de un modelo GARCH obtenido mediante *Algoritmo Genético* no es la “verdadera” estructura óptima, el resultado en cuanto a ECM no difiere estadísticamente de ésta última. Esta conclusión es de gran relevancia considerando las ventajas que tiene el utilizar dicha metodología versus la *heurística* (probar todos los modelos posibles), en cuanto a ahorro en tiempo y complejidad de procesamiento.

Si bien este trabajo logra demostrar la utilidad del *Algoritmo Genético* como metodología de optimización de estructuras de modelos GARCH, las conclusiones presentadas podrían ser revalidadas por futuras investigaciones, las cuales podrían incluir nuevas series de retornos o incluso probar si la utilización de este método es también eficaz sobre otros modelos de la familia ARCH.

BIBLIOGRAFÍA

Allen, F. and R. Karjalainen (1999). *Using Genetic Algorithms to Find Technical Trading Rules*, Journal of Financial Economics, vol. 51, p.p. 245-271.

Bauer, Richard J. Jr. (1994). *Genetic Algorithms and Investment Strategies*, John Wiley & Sons, Inc.

Bera, A.K.; Higgins, M.L. and S. Lee (1992). *Interaction between Autocorrelation and conditional Heterokedasticity: a Random Coefficient Approach* Journal of Business and Economic Statistics, vol. 10, p.p. 133-142.

Bollerslev, T. (1986). *Generalized Autorregresive Conditional Heterocedasticity*, Journal of Econometrics, vol. 51, p.p. 307-327.

Bollerslev, T., R. Chou, and K. Kroner (1992). *ARCH Modelling in Finance: a Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics vol. 52, N° 5, p.p. 5– 59.

Bollerslev, T. and J.M. Wooldridge (1992). *Quasi maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances*, Econometric Reviews, 11, p.p 143-172.

Bollerslev, T., and R. F. Engle (1993). *Common Persistence in Conditional Variances*, Econometrica, vol. 61, January, p.p. 167-186.

Bollerslev, T., Engle, R.F. and D.B. Nelson (1994), *ARCH Models*, Handbook of Econometrics, Chapter 49.

Bollerslev, T. and H.O. Mikkelsen (1996). *Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility*, Journal of Econometrics, vol.73, N°1, p.p.151-184.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Bonilla, C., R. Romero-Meza, and M.J. Hinich (2006). *GARCH Inadequacy for Modelling Exchange Rates: Empirical Evidence from Latin America*, Forthcoming Applied Economics.

Bonilla, C., Maquieira, C., and R. Romero-Meza (2006). *GARCH Inadequacy for Modeling Stock Market Returns: Empirical Evidence from Latin America*, Journal of Policy Modelling, ELSEVIER Science Publishing Co., forthcoming.

Davis, Lawrence (1994). *Genetic Algorithms and Financial Applications*, in: Deboeck (ed., 1994), p.p. 133-147.

De Arce, Rafael (1998). *Introducción a los Modelos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional (Arch)*, Instituto LR Klein.

Engle, R.F. (1982). *Autorregresive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the U.K. Inflation*, *Econometría*, vol. 50, p.p. 987-1008.

Engle, R. (2001). *GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics*, Journal of Economic Perspectives, vol. 15, N° 4, Primavera, p.p. 157–168.

Feldman, K. and P. Treleaven (1994). *Intelligent Systems in Finance*, Appl. Mathematical Finance, vol. 1, p.p. 195-207, Chapman & Hall, London, UK.

Hinich, M. (1996). *Testing for Dependence in the Input to a Linear Time Series Model*, Journal of Nonparametric Statistics, vol. 6, p.p. 205-221.

Hinich, M.J. and D. Patterson (2005). *Detecting Epochs of Transient Dependence in White Noise*. Money, Measurement and Computation, M. Belongia and J. Binner editors, London: Palgrave.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Holland, John H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press. Ann Arbor.

Kim, K. and I. Han (2000). *Genetic Algorithms Approach to Feature Discretization in Artificial Neural Networks for the Prediction of Stock Price Index*, Expert Systems with Applications, vol. 19, N° 2, Agosto, p.p. 125-132.

Kingdon, J. and Feldman, K. (1995). *Genetic Algorithms and Applications to Finance*, Applied Mathematical Finance, vol. 2, N°2, Junio, p.p. 89-116.

Parisi, A., Parisi, F. y E. Cornejo (2004). *Algoritmos Genéticos y Modelos Multivariados Recursivos en la Predicción de Índices Bursátiles de América del Norte: IPC, TSE, NASDAQ Y DJI*, Trimestre Económico, N° 284, p.p. 789-810.

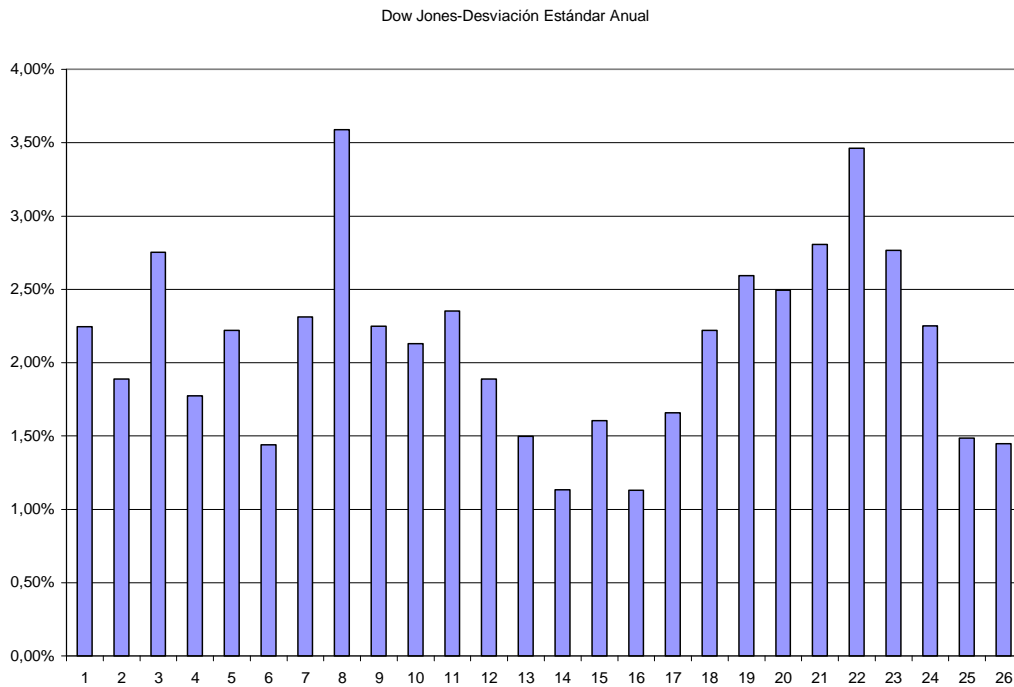
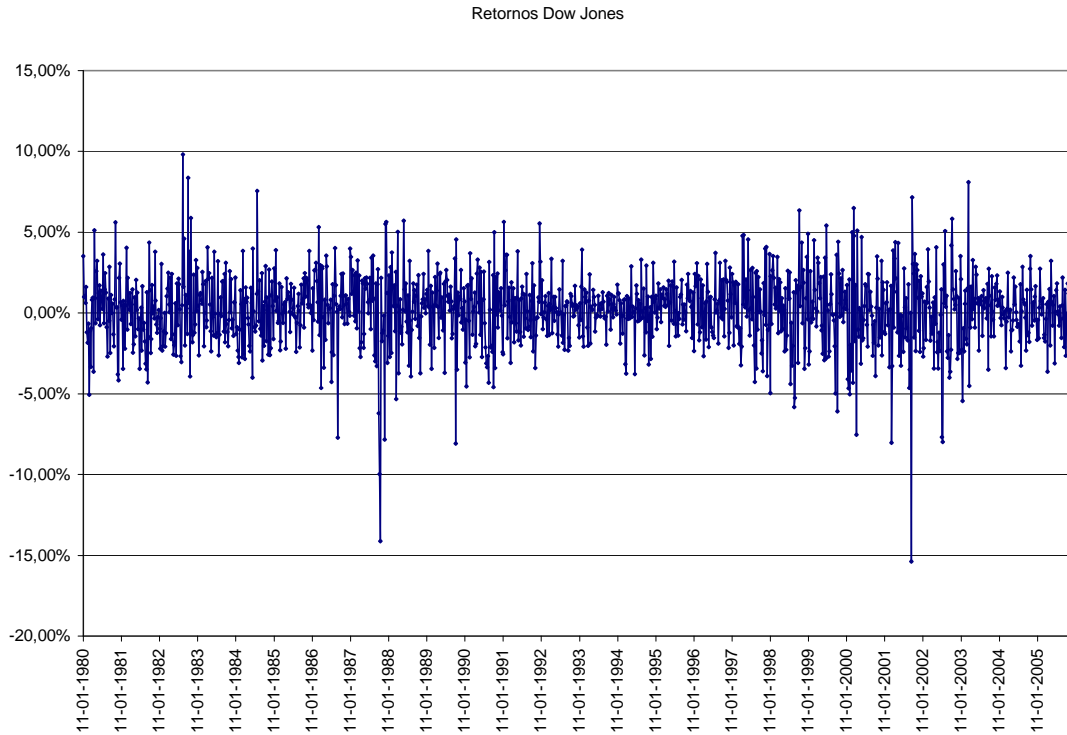
Stentoft, L. (2005). *Pricing American Options when the Underlying Asset Follows GARCH Processes*, Journal of Empirical Finance, vol. 12, p.p. 576– 611.

Tsay, S.J. (1987). *Conditional Heteroskedastic Time Series Models*, Journal of the American Statistical Association, vol. 82, p.p. 590-604.

ANEXOS

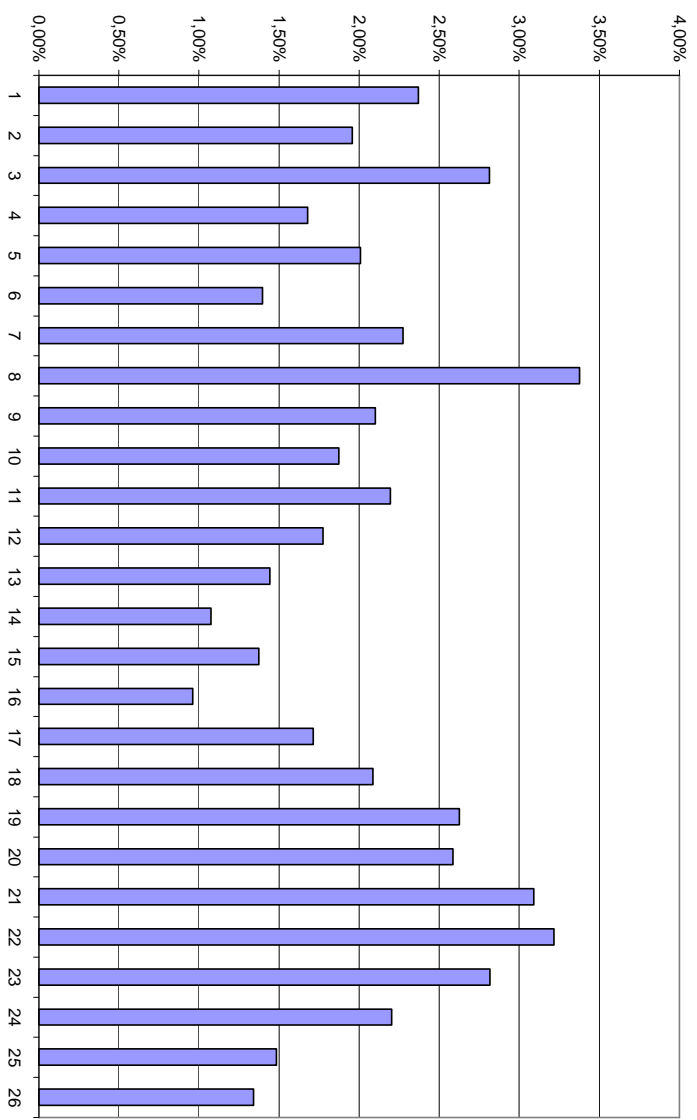
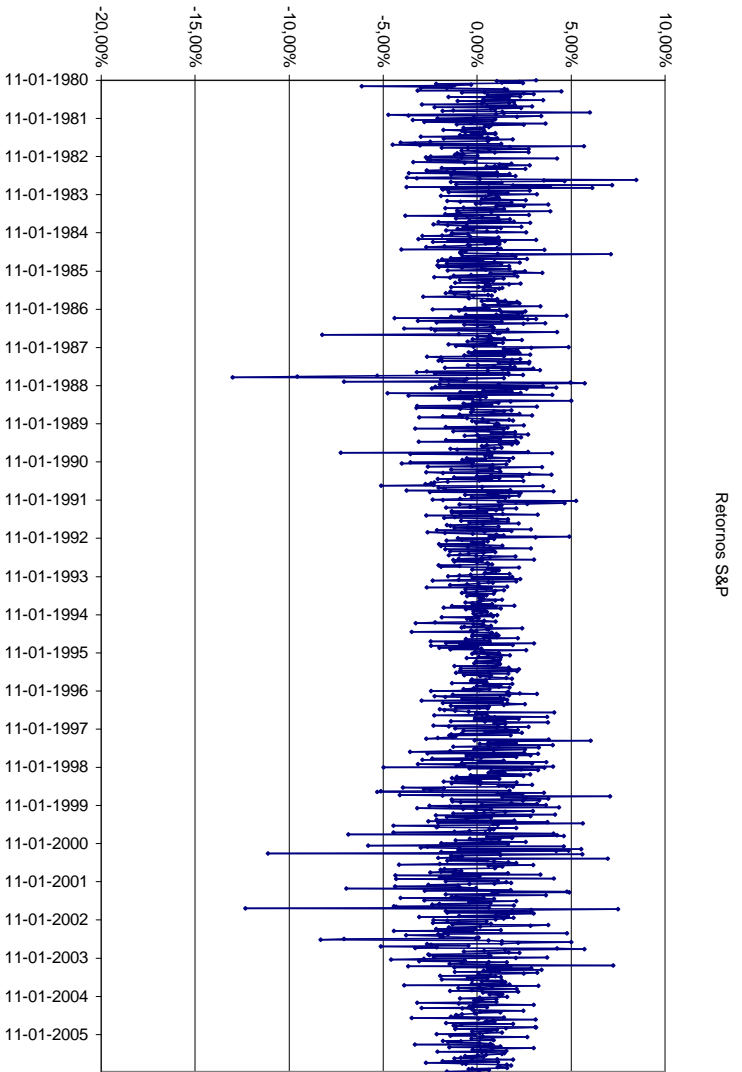
Anexo 1: Gráficos de Volatilidad de Retornos

DOW JONES



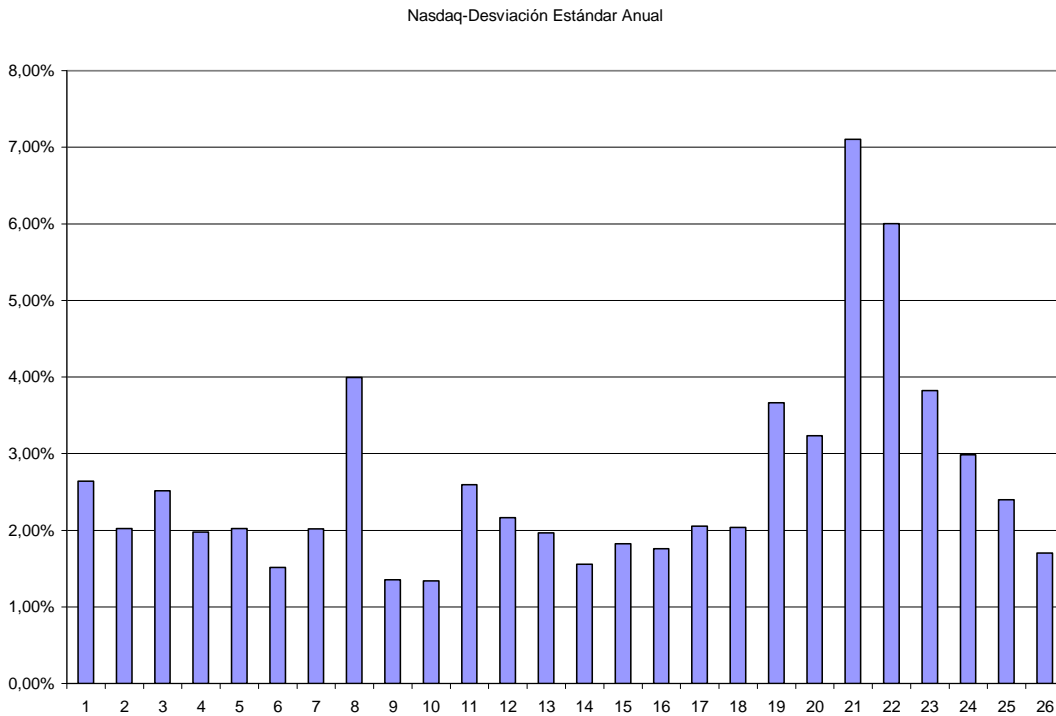
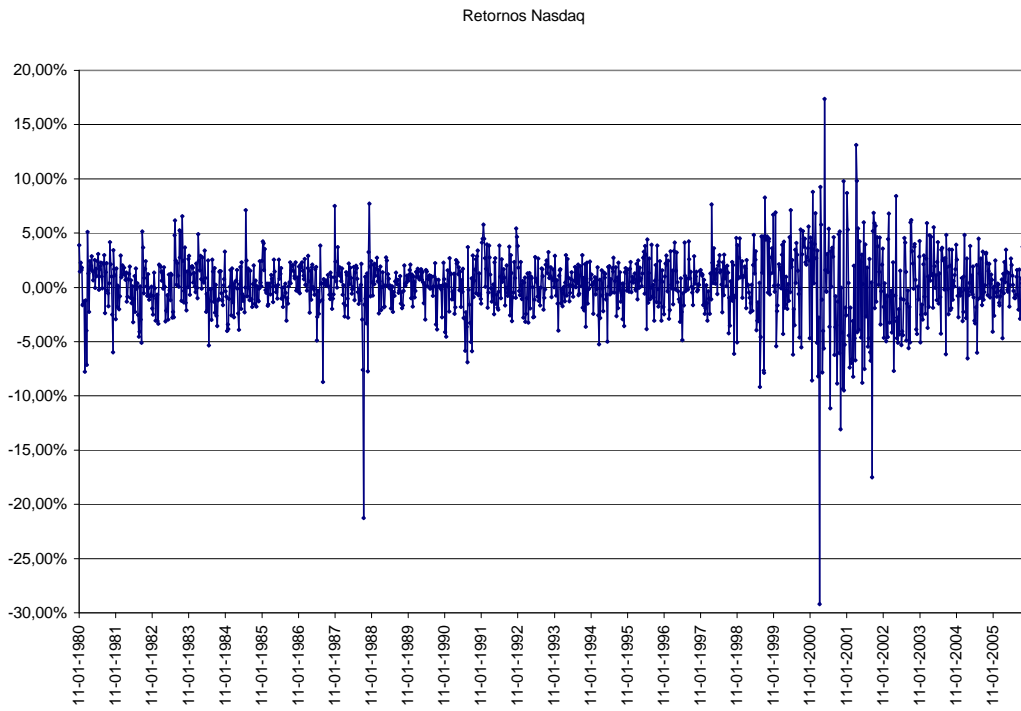
“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

S&P500



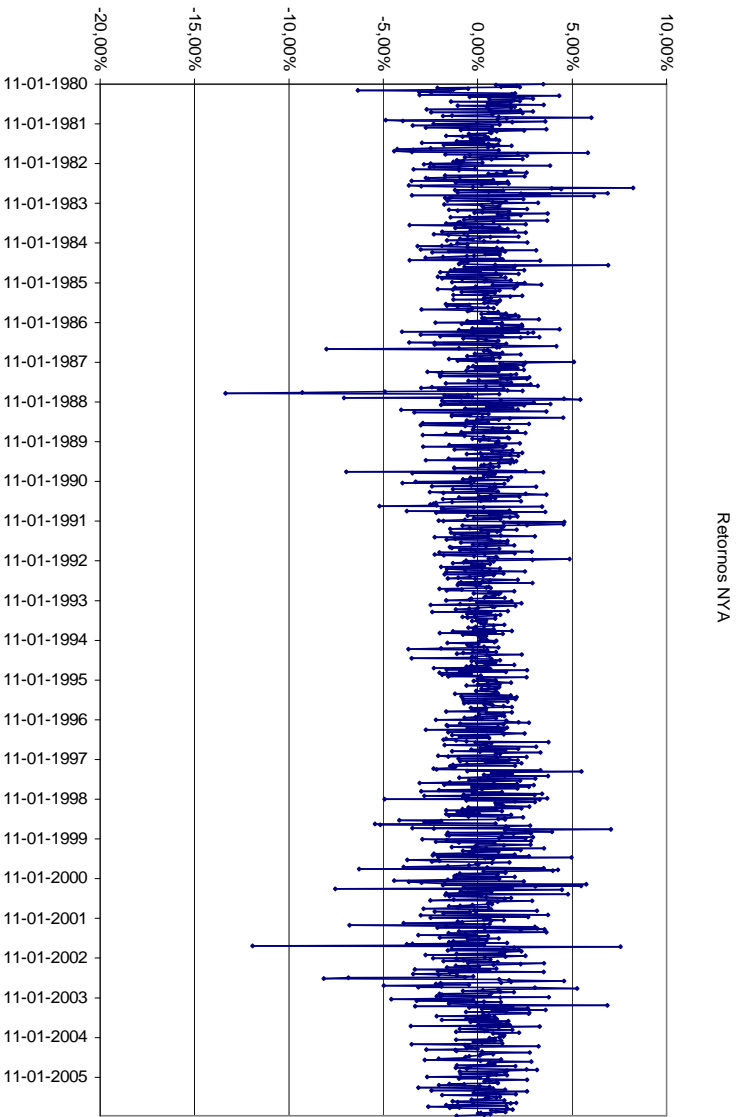
“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

NASDAQ

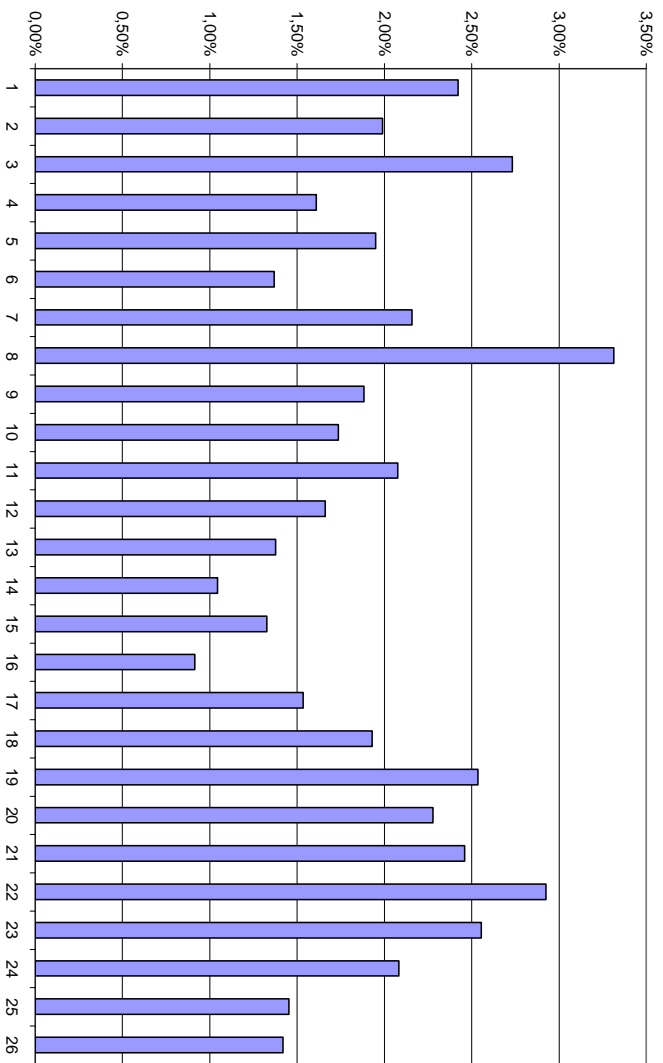


“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

NYA



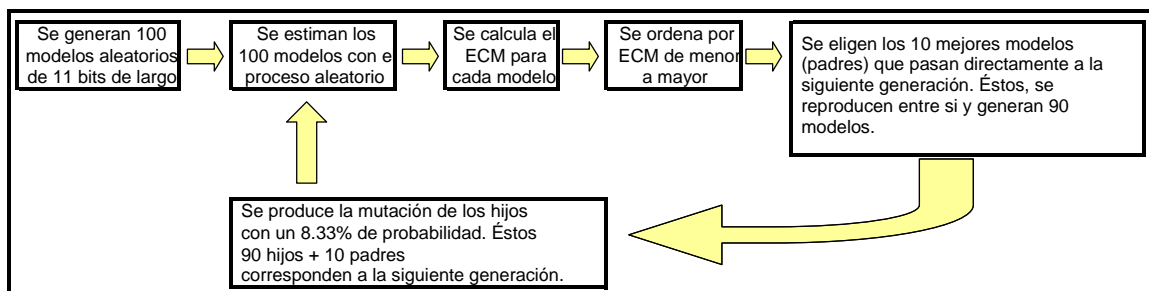
NYA-Desviación Estándar Anual



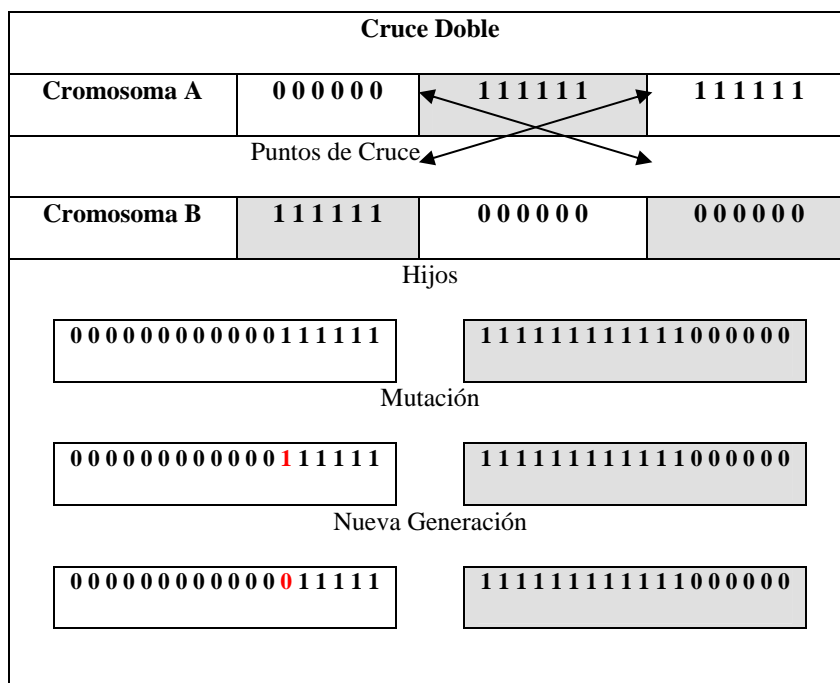
Anexo 2: Terminología Algoritmos Genéticos

Términos	Definiciones
Entorno o Medio Ambiente	Función objetivo
Individuo o Ejemplar	Una de las posibles soluciones
Población	Conjunto de soluciones en un momento determinado
Generación	Nombre que identifica a la población, en un momento determinado
Cromosoma	Código Binario
Genes	Los bits que conforman el código binario

Anexo 3: Esquema de Funcionamiento del Algoritmo Genético



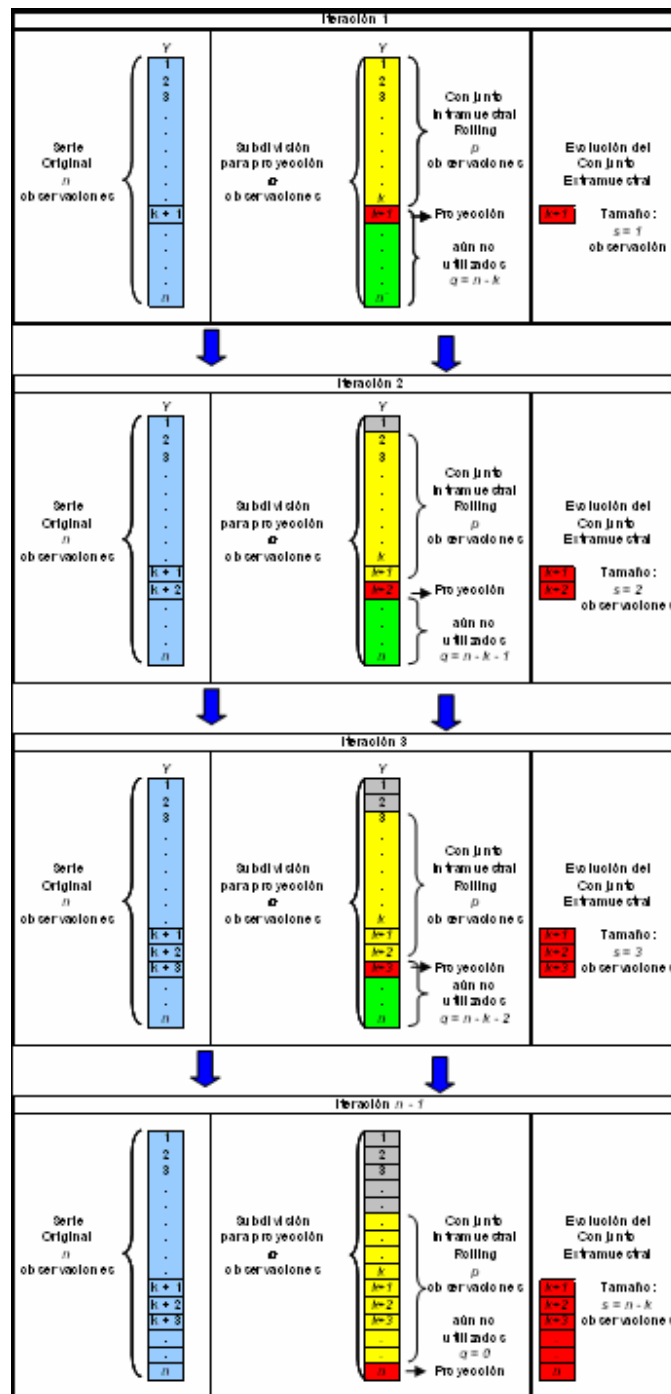
Anexo 4: Esquema del Operador de Cruce



Anexo 5: Funcionamiento del Rolling y Esquema del Proceso

El funcionamiento rolling pretende capturar el proceso de adaptación de expectativas, de manera tal que se le otorgue una mayor importancia a aquella información recientemente agregada y descartando la más antigua, simulando el hecho de que los agentes ajustan sus expectativas dando una mayor ponderación a la información más reciente. Específicamente, éste mantiene constante el tamaño del conjunto intramuestral “ p ”, pero varía desde el punto de vista de su composición, pues para cada iteración éste se va desplazando a través del conjunto total de datos, de manera que incluye la próxima observación pero a la vez elimina la más antigua ($-1+p+1=p$). Como en el caso recursivo, el proceso se repite “ $m-n$ ” veces, permitiéndole al modelo de estimación incorporar la nueva información a medida que se encuentra disponible.

“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”



“Optimización de Modelos GARCH a través de Algoritmo Genético”

Anexo 6: Resultados Test LM de Engle

Toda la muestra		Rechazo(=1)			
	R2	ML	1%	5%	10%
Dow	6,53%	88,14	1	1	1
Nasdaq	8,51%	114,84	1	1	1
S&P500	7,64%	103,01	1	1	1
NY	8,22%	110,94	1	1	1
		Niveles Críticos	18,475	14,067	12,017

Intramuestral		Rechazo(=1)			
	R2	ML	1%	5%	10%
Dow	6,15%	70,72	1	1	1
Nasdaq	8,51%	97,73	1	1	1
S&P500	7,40%	84,99	1	1	1
NY	8,25%	94,79	1	1	1
		Niveles Críticos	18,475	14,067	12,017

Extramuestral		Rechazo(=1)			
	R2	ML	1%	5%	10%
Dow	16,37%	31,59	1	1	1
Nasdaq	10,20%	19,69	1	1	1
S&P500	16,91%	32,64	1	1	1
NY	13,76%	26,56	1	1	1
		Niveles Críticos	18,475	14,067	12,017

% Rechazo n=200			
	1%	5%	10%
Dow	33,33%	50,00%	50,00%
Nasdaq	50,00%	50,00%	50,00%
S&P500	33,33%	33,33%	33,33%
NY	33,33%	33,33%	33,33%

% Rechazo n=100			
	1%	5%	10%
Dow	8,33%	16,67%	25,00%
Nasdaq	8,33%	25,00%	25,00%
S&P500	8,33%	16,67%	16,67%
NY	8,33%	8,33%	16,67%