



Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Escuela de Economía y Administración

BASE TEÓRICA DE LA ESTRUCTURA DE TASA INTERTEMPORAL A TRAVÉS DEL
MODELO MULTIFACTORIAL DE COX-INGERSOLL-ROSS GENERADO CON FILTRO
DE KALMAN BAJO EL CONTEXTO DEL MERCADO DE RENTA FIJA EN CHILE

Seminario de título INGENIERO COMERCIAL, Mención Administración

**Autores: Katherine Alexandra Garstman García
María Catalina Solari Díaz**

**Profesor Guía: Ph.D. Franco Parisi Fernández
M.F. David Díaz Solis**

Santiago, Noviembre 2006

Universidad de Chile
Facultad de Economía y Negocios
Escuela de Economía y Administración

BASE TEÓRICA DE LA ESTRUCTURA DE TASA INTERTEMPORAL A TRAVÉS DEL
MODELO MULTIFACTORIAL DE COX-INGERSOLL-ROSS GENERADO CON FILTRO
DE KALMAN BAJO EL CONTEXTO DEL MERCADO DE RENTA FIJA EN CHILE

Seminario de título INGENIERO COMERCIAL, Mención Administración

**Autores: Katherine Alexandra Garstman García
María Catalina Solari Díaz**

**Profesor Guía: Ph.D. Franco Parisi Fernández
M.F. David Díaz Solis**

Santiago, Noviembre 2006

“La propiedad intelectual de este trabajo de investigación pertenece al profesor que dirigió
este seminario”

**BASE TEÓRICA DE LA ESTRUCTURA DE TASA INTERTEMPORAL A TRAVÉS DEL
MODELO MULTIFACTORIAL DE COX-INGERSOLL-ROSS GENERADO CON FILTRO
DE KALMAN BAJO EL CONTEXTO DEL MERCADO DE RENTA FIJA EN CHILE**

Autores: Katherine Alexandra Garstman García
María Catalina Solari Díaz

Profesor Guía: Ph.D. Franco Parisi Fernández
M.F. David Díaz Solis

RESUMEN

Este seminario tiene como objetivo resaltar la relevancia que tiene la modelación de la Curva de Rendimientos o *Yield Curve*, dada su extensa aplicación en los mercados financieros, especialmente en la valoración de activos. Para ello, se muestra y describe, bajo el contexto del Mercado de Renta Fija en Chile, el modelo dinámico descrito por Cox-Ingersoll y Ross en el que se utilizan estimaciones por modelos estado-espacio y Filtro de Kalman. Se resalta dicho modelo dada las ventajas que presenta frente a otros modelos descritos con respecto a la inclusión de no negatividad de la tasa y en el supuesto que la volatilidad no es constante, consiguiendo así una modelación más realista. De esta manera se pretende que dicho marco teórico sea fuente para próximas aplicaciones.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS	iii
ÍNDICE DE TABLAS	iii
ÍNDICE DE ECUACIONES	iv
I. INTRODUCCIÓN	1
II. RENTA FIJA EN CHILE	4
2.1 Mercados de Renta Fija en Chile	4
2.2 Características Generales de los Participantes	8
2.2.1 Instrumentos y Emisores	8
2.2.2 Inversionistas	10
2.2.3 Intermediarios y Regulación	10
2.3 Nivel de Costo Eficiencia de Mercado	14
2.4 Estructura de Impuestos en el Mercado de Valores	15
2.4.1 Impuesto a la Renta	15
2.4.2 Mercado Primario	16
2.4.3 Mercado Secundario	16
2.4.4 Intereses originados de Inversión en instrumentos de Renta Fija	16
2.4.5 Ganancias de Capital en Inversión en Bonos	16
2.5 Valoración de Instrumentos de Renta Fija	17
2.5.1 Teoría del Valor Actual	17
2.5.2 Rentabilidad de Instrumentos de Renta Fija	18
2.5.3 Tasa Interna de Retorno (TIR)	18
2.6 Cobertura e Inmunización en Renta Fija	19
2.6.1 Duration	19
2.7 Yield To Maturity (YTM)	21

2.8 Medidas de Rendimiento de un Bono	22
2.9 Relación entre TIR y Precio de un IRF	22
2.10 Total Return	23
2.11 Curva de Rendimientos	24
2.11.1 Formas de la Curva	26
III. MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LA YIELD CURVE	30
Estructura General de métodos de Estimación	31
Modelos Dinámicos: Vasicek 1977 y Cox, Ingersoll y Ross	
1985	37
3.2.1 Modelo Vasicek	37
3.2.2 Modelo CIR	39
3.2.2.1 Estimación del modelo CIR por medio de un factor	39
3.2.2.2 Estimación del modelo CIR mediante una extensión multifactorial	42
IV. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA EL MODELO ESTADO-ESPACIO	49
Estimación del modelo Estado-Espacio	49
V. ESPECIFICACIONES PARA ESTIMAR EL MODELO DINÁMICO	54
Filtro de Kalman	54
5.1.1 Filtro de Kalman aplicado al Modelo CIR	56
VI. CONCLUSIÓN	61
VII. BIBLIOGRAFÍA	62

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Comparación de TIR de la transacción de PRC en la Bolsa de Santiago versus licitaciones del Banco Central (Dic 2001)	8
Figura 2.2	Estructura del Mercado de Valores	13
Figura 2.3	Relación entre TIR y Precio IRF	23
Figura 2.4	US Treasury Yield Curve	25
Figura 2.5	US Treasury Yield Curve	25
Figura 2.6	Tipos de Curvas de Rendimiento	28
Figura 3.1	Muestra la estimación de la Yield Curve mediante el método Bootstrapping.	32
Figura 3.2	Yield Curve mediante el método de Nelson y Siegel	34
Figura 3.3	Yield Curve mediante el método de Svensson	35
Figura 3.4	Construcción de una curva con secciones B-splines	36
Figura 3.5a	Proceso estocástico para la evolución del cambio en la tasa de interés de corto plazo	44
Figura 3.5b	Proceso estocástico para la evolución de la tasa de interés de corto plazo	44
Figura 3.6	Evolución del cambio de la tasa de interés con aumento de μ y variación de k	45
Figura 3.7	Evolución del cambio de la tasa de interés con variación en la desviación estándar del proceso de Wiener	45
Figura 3.8	Evolución de la tasa de interés cambiando la velocidad de ajuste	46

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1	Emisores de Renta Fija	9
Tabla 2.2	Tarifas de DCV	15

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 2.1	Valor Actual	17
Ecuación 2.2	TIR	18
Ecuación 2.3	Duration	20
Ecuación 2.4	Duration modificada	20
Ecuación 2.5	YTM o DCFY	21
Ecuación 2.6	Total Return	24
Ecuación 3.1	Método Nelson y Siegel	33
Ecuación 3.2	Método de Svensson	34
Ecuación 3.3	Método Vasicek (1977)	37
Ecuación 3.4	Proceso de Wiener	38
Ecuación 3.5	Proceso estocástico de la evolución de la tasa de interés, Modelo CIR unifactorial	39
Ecuación 3.6	Precio de un bono de descuento según modelo CIR unifactorial	40
Ecuación 3.6.1	Parámetro A del modelo CIR unifactorial	41
Ecuación 3.6.2	Parámetro B del modelo CIR unifactorial	41
Ecuación 3.6.3	Parámetro γ del modelo CIR unifactorial	41
Ecuación 3.7	Tasa de un bono según Modelo CIR unifactorial	41
Ecuación 3.8	Valor límite de la tasa de interés según Modelo CIR unifactorial	41
Ecuación 3.9	Tasa de interés nominal instantánea según Modelo CIR multifactorial	42
Ecuación 3.10	Proceso estocástico de la evolución de la tasa de interés Modelo CIR multifactorial	42
Ecuación 3.11	Proceso de difusión de raíz cuadrada de la variable Estado	46
Ecuación 3.12	Precio nominal de un bono de descuento según Modelo CIR multifactorial	47
Ecuación 3.12.1	Parámetro A de modelo CIR (multifactorial)	47
Ecuación 3.12.2	Parámetro B del modelo CIR (multifactorial)	47
Ecuación 3.12.3	Parámetro γ del modelo CIR (multifactorial)	47
Ecuación 3.13	Tasa de descuento compuesta continua spot Modelo CIR multifactorial	48
Ecuación 4.1	Ecuación de medida	50
Ecuación 4.2	Ecuación de transición	50
Ecuación 4.3	Especificación de los elementos individuales de las variables no observables del sistema	51
Ecuación 4.4	Especificación de los elementos individuales de las variables R_t	51
Ecuación 4.5	Expectativa por y_{jt} condicionado a la información en $t-1$	51

Ecuación 4.6	Varianza condicional de v_{jt}	51
Ecuación 4.7	Ecuación de Transición	52
Ecuación 4.8	Ecuación de Medida con término de error	52
Ecuación 4.9	Matriz de varianza y covarianza de los términos de error del modelo estado-espacio	52
Ecuación 5.1	Innovaciones para las tasas observadas de los bonos	57
Ecuación 5.2	Innovaciones para las variables estado	58
Ecuación 5.3	Filtro de Kalman	58
Ecuación 5.4	Minimización para encontrar estimador	58
Ecuación 5.5	Replanteamiento de Minimización para encontrar estimador	59
Ecuación 5.6	Restricción para Minimización para encontrar estimador	59

I. INTRODUCCIÓN

La estructura de la curva intertemporal de tasas de interés ha motivado a muchos por la gran utilidad que el conocimiento del comportamiento de ella entrega. Las aplicaciones fundamentales van desde la valoración de diversos instrumentos financieros, la formación de expectativas, la relación de corto y largo plazo, las señales que transmite como indicador macroeconómico y los movimientos de los agentes sujeto a la confianza percibida en el mercado, entre otros. Por otra parte, la determinación de la estructura intertemporal permite definir medidas de riesgo asociadas a variaciones de las tasas de interés, lo que admite un mejor control de la eficacia de las estrategias de gestión de las carteras de Renta Fija.

Se define como estructura intertemporal de tasas a la relación entre las tasas de interés proporcionado por los activos libres de riesgo y sus diferentes plazos en un instante determinado. El plazo de un instrumento financiero con una madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo. Es decir, es una función cuya variable dependiente es el tipo de interés al contado y cuya variable independiente es el plazo al que se refiere. La estructura intertemporal se suele representar gráficamente de forma que el eje de las ordenadas mida los diferentes tipos y en el eje de las abscisas el período de vencimiento. Esta representación gráfica de la estructura intertemporal se suele denominar curva de rendimientos, que en inglés se define como *Yield Curve*. En general, dependiendo de las características existentes en cada momento de la economía se distinguen diferentes tipos o formas de curvas.

En este seminario realizaremos un estudio de la determinación de la *Yield Curve* bajo el contexto del mercado chileno, basado en las estimaciones del modelo de Cox-Ingersoll y Ross (CIR)¹. Para explicar dicho modelo, analizaremos en primer lugar, las características del mercado de Renta Fija en Chile y así mostrar la relevancia que tiene hoy en día la *Yield Curve* para los propósitos que se utiliza.

¹ Ren-Row Chen and Louis Scott 2002

El mercado de Renta Fija en Chile representa casi el 50% de los montos transados en el mercado de valores², en consecuencia, logra la mayoría de las transacciones, seguido de los Instrumentos de Intermediación Financiera (IIF) que se diferencian de los primeros por el plazo en que son emitidos. Los IIF son de corto plazo (hasta 1 año) a diferencia de los IRF que son de largo plazo (más de 1 año).

Los instrumentos de renta fija son títulos representativos de obligaciones de mediano y largo plazo que contrae el emisor con el poseedor del instrumento. En esta categoría se incluyen los Bonos de Bancarios y de Empresas, las Letras de Crédito Hipotecario, instrumentos emitidos por el Banco Central de Chile y por instituciones del Estado, entre otros.

Las emisiones de estos instrumentos son seriadas, pueden ser reajustables en función de algún índice o unidad (IPC, UF, US\$, etc.) y, en general, son al portador o endosables. Estos instrumentos se negocian en la Bolsa de Comercio a través de un sistema de remate electrónico, en que las ofertas, posturas y adjudicaciones se efectúan a través de terminales conectados a una red computacional.

Desde el punto de vista del inversionista, estos instrumentos son una alternativa de ahorro, cuyo pago es conocido con antelación, pero no por ello su rentabilidad. Además, es importante agregar que el riesgo asumido depende en parte, por la capacidad de pago de la obligación del emisor.

Como lo mencionamos anteriormente, nosotras ahondaremos en el estudio realizado por Cox-Ingersoll y Ross (CIR). El cual explica un modelo de equilibrio de precio del activo para la estructura intertemporal de la tasa de interés. Entregando soluciones para determinar los precios de los bonos y caracterizar la estructura intertemporal. La estructura de tasas incorpora tanto un premio por riesgo como las expectativas futuras de la tasa de interés. El modelo es usualmente presentado como de un factor, pero en dicho artículo, Chen y Scott incorporan un modelo multifactorial para aplicar el modelo para los valores nominales de los bonos y de las demandas

² Bolsa de Santiago 2005

nominales. Este modelo provee un nexo entre la teoría de estructura intertemporal de valoración de acciones y la estructura intertemporal de la tasa de interés, bajo la restricción que la tasa no puede ser negativa y considera una relativa cercanía a los precios de los bonos.

Estudiaremos el modelo multifactorial del modelo CIR haciendo uso de un modelo estado-espacio. En éste se estiman las variables estado inobservables que son generadas por el Filtro de Kalman. En donde se encuentran los parámetros del modelo multifactorial a través de Máxima Verosimilitud.

La estructura del seminario es la siguiente. En la parte II analizaremos el mercado de Renta Fija en Chile, con sus mercados, inversionistas y rendimiento. En la parte III realizaremos un marco teórico de los modelos de estimación de la *Yield Curve*. En la parte IV se describe el método de estimación de los parámetros del modelo estado-espacio. En la parte V las especificaciones para estimar el modelo dinámico para el caso CIR a través del Filtro de Kalman. Finalmente en la parte VI, expondremos las conclusiones finales y perspectivas futuras.

II. RENTA FIJA EN CHILE

Para entender el mercado de Renta Fija en Chile y posteriormente la relevancia de la *Yield Curve* en base a los papeles que la conforman, realizaremos una breve explicación del mismo.

2.1 Mercados de Renta Fija en Chile

Para entender cuál es el mercado de renta fija es necesario hacer la distinción entre fijo y variable. En general, los activos financieros son agrupados en dos categorías: Renta Fija (bonos gubernamentales, bonos corporativos) y Renta Variable (acciones y monedas). La diferencia de fijo o variable hace relación a que en los primeros, se tiene la capacidad de conocer con antelación los pagos del instrumento en un período determinado a diferencia de los segundos.

Por otro lado, el mercado se divide en dos; el mercado primario y secundario. El mercado primario de Instrumentos de Renta Fija corresponde a las licitaciones de venta y de compra por primera vez de bonos que hace el Banco Central (BC), en las cuales pueden participar las Instituciones Bancarias, Sociedades Financieras, Administradoras de Fondos de Pensión, Administradoras de Fondos Mutuos y Compañías de Seguros.

Las licitaciones son competitivas entregando el oferente el monto que desea adjudicarse y la tasa de interés o descuento sobre el precio. Para ello se emplean procedimientos previamente determinados e información pública conocida, tendientes a garantizar la transparencia de las transacciones que se efectúan en él. El modo de licitación es de tipo *holandés*, donde se ordenan las posturas recibidas privilegiando a las que presentan la mejor tasa o precio de compra, y en caso de igualdad de tasa o precio entre una o más posturas, se asigna mayor prioridad a aquéllas ingresadas con

antelación. Una vez ordenadas se suman sus cantidades hasta completar la cantidad ofrecida en la oferta de venta, asignándose la oferta a todas aquellas posturas que quedaron seleccionadas dentro de la suma anterior. Por último, la tasa o precio de adjudicación es única para la oferta rematada, correspondiendo a la tasa o precio de la última postura considerada en la adjudicación. Los IRF se liquidan bajo la modalidad *T+1*, es decir, al día siguiente hábil bursátil de materializada la operación.

El mercado secundario de renta fija corresponde a toda transacción de bonos emitidos tanto por el Banco Central como por privados realizadas en Bolsa (Bolsa de Comercio de Santiago, Bolsa Electrónica y Bolsa de Valores de Valparaíso) y también en el mercado *Over the Counter* (OTC), es decir, entre privados.

En el mercado OTC existen transacciones tanto de venta definitiva como transacciones de venta con pacto de retrocompra entre empresas facultadas a operar en el mercado y personas jurídicas o naturales cualesquiera. Las ventas con pacto de retrocompra a personas naturales o jurídicas que no sean instituciones financieras podrán efectuarse desde cuatro días hábiles y las ventas con pacto de retrocompra a instituciones financieras controladas por la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (SBIF) podrán efectuarse desde 1 día hábil. Para el caso de compra y venta definitiva, la institución financiera estará obligada a obtener del inversionista una carta en que éste último declare su conformidad en el sentido que la institución vendedora no asuma responsabilidad futura de ninguna naturaleza a la operación que se realiza; en el caso de omitirse esta carta, se considerará que la operación se realizó con retrocompra. Esta carta no se exigirá para las operaciones que se realicen con el Banco Central de Chile.

El mercado secundario comprende dos mercados diferentes en relación a “naturaleza y función de los instrumentos” y “modalidades de transacción y riesgos involucrados”. El primero se refiere al mercado de deuda de corto plazo (hasta un año de vencimiento), que en Chile se conoce como *Mercado de Instrumentos de Intermediación Financiera* (IIF). El segundo, se refiere al mercado de deuda de largo plazo o de bonos denominado *Mercado de Renta Fija*. La principal diferencia entre

ambos mercados, reside en su plazo al vencimiento al momento de emisión. Se justifica esta división debido a los distintos propósitos de los instrumentos como necesidad de financiamiento de corto y largo plazo del sistema financiero y de las empresas.

La operatoria bursátil consiste en que las órdenes de compra y venta se desarrollan en los Sistemas Electrónicos y en el Salón de Ruedas. El salón cuenta con tres redondeles para efectuar las operaciones diarias, dentro de cada uno hay un pregonero que indica las transacciones realizadas a los digitadores, los cuales ingresan las operaciones a los sistemas computacionales en tiempo real. En el sistema electrónico se ingresan las ofertas de ventas en un período especialmente condicionado y el remate se realiza en otro período en el que se efectúan posturas de compra sobre las ofertas existentes. Al término del remate, el sistema adjudica el instrumento a quien realice la mejor postura.

En el mercado bursátil, cualquier persona puede efectuar inversiones, sin consideración de rango social o monto a invertir. Sin embargo, se requiere ser mayor de edad y tener derecho a propiedad y transferencia, plenamente establecido sobre los títulos a liquidar.

Compradores y vendedores deben concurrir donde un corredor de la Bolsa de Comercio de Santiago para establecer las condiciones con las cuales se llevará a cabo la orden. Estas condiciones pueden ser: precio (precio de mercado o precio límite), forma de pago (pagadera hoy, mañana, normal o a plazo), entre otras.

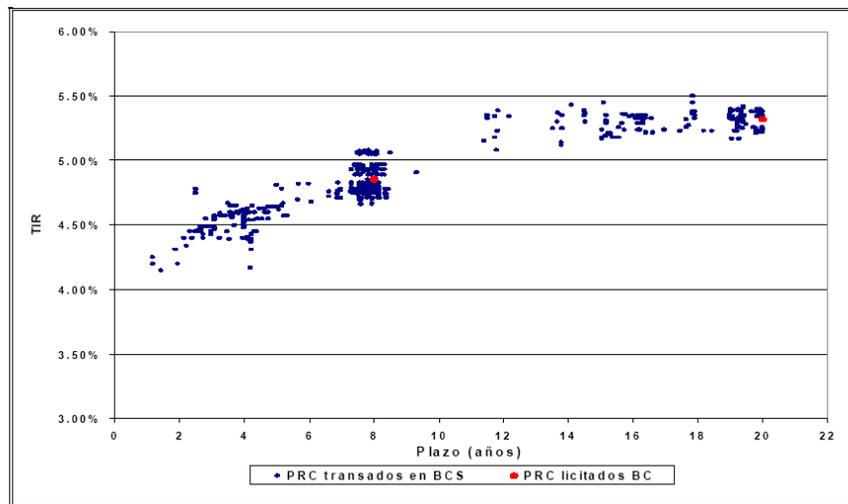
La Bolsa Electrónica (creada en 1989) opera exclusivamente a través de sistemas electrónicos de negociación, con un sistema de ruedas que funciona de forma continua existiendo precios de compra y de venta para cada categoría de bonos. Esta rueda de renta fija es para papeles de renta fija emitidos por el Banco Central (los que representan aproximadamente el 50% del total transado en renta fija en las bolsas locales), ya que al ser conocido el factor de riesgo relacionado con el emisor, aísla una de las variables que deben tomarse en cuenta a la hora de optar por estos

instrumentos y, de esta manera, centrar la negociación en la variable precio. El Terminal de Renta Fija entrega información en tiempo real de las ofertas, transacciones, montos, precios y tasas TIR (Tasa Interna de Retorno) del mercado de Renta Fija e Intermediación Financiera de la Bolsa de Comercio. Además contiene las tablas de desarrollo de estos instrumentos, permitiendo, a su vez, la valorización de ellos.

En OTC se opera mediante vía telefónica, donde tanto las transacciones de compra y venta se realizan en su mayoría con pacto.

La importancia del mercado secundario reside en su influencia directa sobre la eficacia del financiamiento directo, el manejo de cartera de los inversionistas institucionales, el financiamiento del gobierno, la ejecución de la política monetaria y el financiamiento a corto plazo de empresas y agentes financieros. La principal ventaja del mercado secundario sobre el primario, es la frecuencia en que se puede obtener información de las tasas de los instrumentos, debido a que el movimiento se refleja día a día, entregando información importante sobre las expectativas económicas y los precios de mercado de los activos. Además, se puede ver que el mercado secundario sigue fielmente al primario lo que se puede observar en la figura 2.1, donde los PRC licitados por el Banco Central caen dentro de la banda de los papeles licitados en el mercado secundario.

Figura 2.1: Comparación de TIR de la transacción de PRC en la Bolsa de Santiago versus licitaciones del Banco Central (Diciembre 2001)



Fuente: Banco Central

2.2 Características Generales de los Participantes

2.2.1 Instrumentos y Emisores

El mercado de renta fija incluye los bonos del Banco Central y del Gobierno de Chile (Tesorería General de la República), las emisiones de deuda de las empresas o bonos corporativos, las letras hipotecarias emitidas por bancos, los bonos bancarios y los bonos securitizados. Con respecto al número de emisores, la bolsa electrónica cuenta con aproximadamente 275 y en la tabla 2.1 se puede ver el número de emisores por categoría correspondientes a la Bolsa de Comercio de Santiago.

Tabla 2.1 Emisores de Renta Fija

Renta Fija	Nº de Emisores
Bonos Bancarios	25
Letras Hipotecarias	240
Bonos Empresas	148
Bonos Tesorería Y Banco Central	18

Fuente: Bolsa de Comercio de Santiago

Los Instrumentos financieros son las diversas alternativas de crédito que están disponibles en la economía en un determinado momento. Se diferencian entre sí de acuerdo a la exigibilidad de devolver el capital y/o pagar intereses que adquiere el emisor, a la reajustabilidad que ofrecen, al riesgo y a la liquidez que presentan, al tipo de tributación al que están afectos, al plazo de vencimiento, entre otros. Dentro de los instrumentos de renta fija (deuda a largo plazo) se encuentra: los *Bonos Bancarios* que son instrumentos de deuda emitidos por entidades bancarias para financiar proyectos diversos; *Bonos de Sociedades Anónimas*, emitidas ocasionalmente por corporaciones privadas para financiar proyectos de inversión o para reestructurar deuda; *Letras Hipotecarias*, emitidas por Bancos e Instituciones Financieras para financiar hipotecas o actividades productivas diversas; *Bonos Subordinados*, emitidos por bancos, se caracterizan por poseer una prioridad mas baja para el acreedor; *Pagarés del Banco Central*, emitidos por el Banco Central para regular la oferta monetaria, apoyar la política cambiaria, financiar los proyectos del Estado o reemplazar la deuda externa. Entre ellos están: PRC (pagarés reajustables con cupones en U.F.), CERO (cupones de emisión reajustables opcionales en U.F), PRD (pagarés reajustables en dólares), ZERO (cupones de emisión reajustables opcionales en dólares); por último los *Bonos Convertibles*, emitidos por corporaciones privadas para financiar proyectos de inversión, convertibles en acciones de la compañía emisora.

Por otro lado, dentro de los instrumentos de intermediación financiera (deuda de corto plazo) tenemos: *Pagarés Reajustables y Descontables del Banco Central* (PRBC

y PDBC), cuyo propósito es regular la oferta monetaria a través del mercado abierto; *Depósitos a Plazo*, emitidos por instituciones bancarias y corporaciones financieras para captar dinero que permita el financiamiento de corto plazo del emisor; y los *Efectos de Comercio*, documentos de deuda de corto plazo emitidos por compañías.

El Banco Central ha emitido una nueva familia de instrumentos; BCP (no reajutable, en pesos), BCU (reajutable en UF) y BCD (reajutable en dólares); con la finalidad de reemplazar a los instrumentos del mismo emisor, PDBC, PRC y PRD, respectivamente, que circulan actualmente en el mercado financiero local, procurando, entre otros objetivos, estandarizar los instrumentos a formato Bullet, es decir, con estructura de pagos con cupones de intereses y un cupón al final del período de interés más capital.

Los instrumentos formulados por la Tesorería General de la República son los Bonos del Gobierno (BTU), con estructura bullet, emitidos a más largo plazo que los BCU (20 años) siendo más líquidos que éstos, por lo que el Banco Central dejó de emitir BCU a 20 años; por consiguiente éstos son los verdaderos referentes de la tasa larga.

2.2.2 Inversionistas

Corresponde a una Persona Natural o Jurídica que desea aportar sus recursos financieros a fin de obtener un beneficio futuro, y se dividen en Inversionistas Nacionales, entre los cuales se encuentran inversionistas institucionales como los bancos, sociedades financieras, compañías de seguros, administradoras de fondos de pensiones, los fondos mutuos, los fondos de inversión; y los Inversionistas Extranjeros que participan activamente en el mercado.

2.2.3 Intermediarios y Regulación

El mercado de valores (ver figura 2.2) esta compuesto por reguladores correspondientes al Banco Central de Chile, Superintendencia de Valores y Seguros

(SVS), Superintendencia de AFP (SAFP) y Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (SBIF).

El Banco Central de Chile es una organización autónoma, con estatus constitucional, de naturaleza técnica; entidad legal imparcial y de duración indefinida. Su objetivo es velar por la estabilidad de la moneda nacional y por el normal desenvolvimiento de los pagos internos y externos. Está autorizado para regular la masa monetaria y crediticia en circulación; para realizar créditos y operaciones de cambios internacionales; y dictar normas en materia monetaria, crediticia, financiera y de cambios internacionales. Tiene amplia autoridad para regular el sistema financiero y el mercado de capitales, y está habilitado para dictar normas y condiciones. Puede aplicar variadas sanciones, siendo la más común la multa y dada una infracción, puede suspender hasta 60 días la autorización al banco comercial o a la persona autorizada para operar en el Mercado Cambiario Formal, o revocar dicha autorización si la parte responsable no es una compañía bancaria.

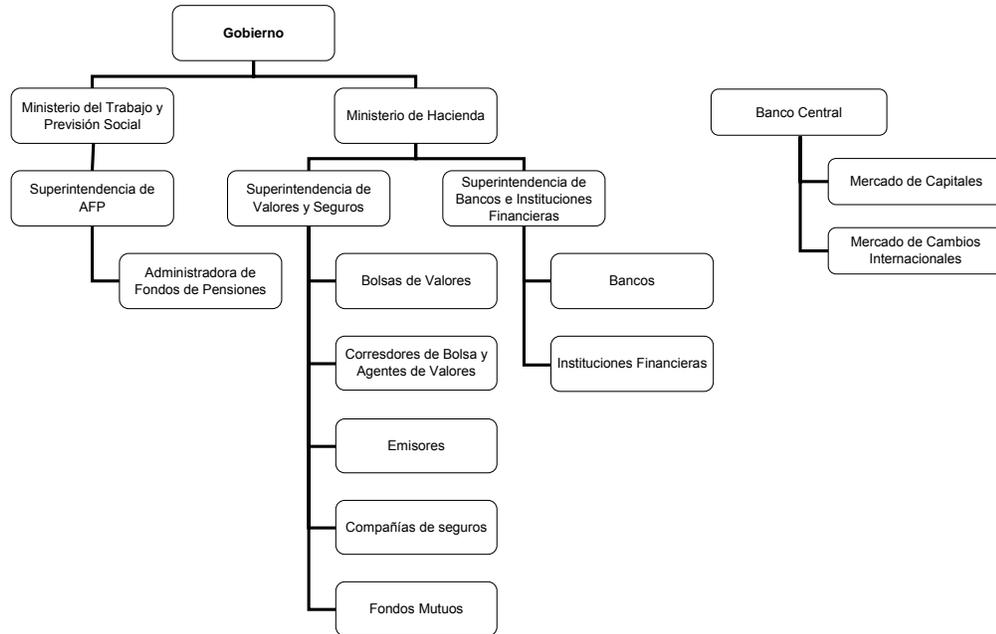
La SVS es una institución autónoma con personalidad jurídica y patrimonio propio que se relaciona con el Gobierno a través del Ministerio de Hacienda. Tiene por objeto la fiscalización de las actividades y entidades que participan de los mercados de valores y de seguros en Chile. Le corresponde velar porque las personas o instituciones supervisadas, desde su iniciación hasta el término de su liquidación, cumplan con las leyes, reglamentos, estatutos y otras disposiciones que rijan el funcionamiento de estos mercados.

La SAFP es el organismo controlador que representa al Estado al interior del sistema chileno de pensiones, basado en la capitalización individual. Se relaciona con el gobierno a través del Ministerio del Trabajo y previsión Social. Vela por la seguridad de los ahorros provisionales para la vejez, invalidez, sobrevivencia y por ahorros de cesantía, pertenecientes a los trabajadores y pensionados chilenos. Además promueve el desarrollo y perfeccionamiento del sistema de pensiones de capitalización individual y de seguro de cesantía vigentes en Chile.

La SBIF es una institución autónoma y una entidad legal, conectada al gobierno a través del Ministerio de Hacienda. Tiene como responsabilidades la inspección de compañías bancarias y entidades financieras cuyo control no esté asignado por ley a otra institución, el Banco Central está exento de esta inspección; debe aplicar e interpretar las leyes; puede advertir, censurar o multar; entre otras funciones.

Por último, se puede establecer la existencia de Autorregulación. Una manera de regulación cuestionable. Pues cada una velará por sus propios intereses y manejo de cuentas a favor de ellas. Por ejemplo, en el caso de las AFPs, al rankearlas no se sabe a qué precio valorarlas porque éstas no transan todos los días y no es correcto utilizar el precio anterior para tal efecto. Frente a este problema, la Superintendencia ideó un método para valorar los instrumentos no transados y de alguna manera estandarizar los procesos de valoración. Sin embargo, éste no es muy bueno en términos de estimación precisa. Lo que su empleo realiza es más bien un sistema común para todas, así como todos utilizan este sistema, todos se equivocan en la misma dirección y, de esta manera, se puede establecer cuál es el mejor, pero no en qué proporción.

Figura 2.2 Estructura del Mercado de Valores



Fuente: Elaboración propia.

Los Intermediarios de Valores son personas naturales o jurídicas que se dedican a las operaciones de corretaje de valores, los intermediarios que actúan como miembros de una bolsa de valores, se denominan “corredores de bolsa” y aquéllos que operan fuera de bolsa, “agentes de valores”. Así una Corredora de Bolsa de Valores juega un papel de intermediario con un giro exclusivo de corretaje, autorizado para la compra y venta de valores bursátiles entres demandantes y oferentes, a favor de terceros o a cuenta propia; sin embargo, pueden dar servicios complementarios con previa autorización de la SVS tales como: la asesoría a los inversionistas, el manejo de la custodia de valores, la administración de cartera de terceros, promoción de los nuevos valores que se lanzan al mercado y la representación de personas naturales o jurídicas.

Existen aproximadamente 40 corredores de bolsa que constan con tres Bolsas de Valores; la Bolsa de Comercio de Santiago (1983), la Bolsa Electrónica (1989) y la Bolsa de Valores de Valparaíso (1898).

2.3 Nivel de Costo Eficiencia del Mercado

La *demanda de Valores* comprende a inversionistas nacionales y extranjeros. Los inversionistas nacionales se agrupan en dos tipos: institucionales y privados. La Ley de Mercado de Valores señala que los inversionistas institucionales son los bancos, sociedades financieras, compañías de seguros, entidades nacionales de reaseguro y administradoras de fondos autorizados por ley. La mayoría del mercado de renta fija en Chile está constituido por Inversionistas Institucionales, de esta manera los inversionistas individuales establecen una pequeña porción, no significativa de transacciones. Por lo tanto, los costos de mayor importancia enfrentados por los inversionistas institucionales corresponden al costo de acceso al sistema tradicional y el costo de liquidar sus operaciones a través del Depósito Central de Valores (DCV).

El costo de acceso al sistema tradicional corresponde al costo de transacción, donde toda operación de compra o venta de títulos, está sujeta a gastos tales como: comisión del corredor (libre), derechos de bolsa (varían según el instrumento) y el impuesto al valor agregado (IVA) sobre la suma de las partidas precedentes. Sin embargo, tanto los IRF como los IIF se encuentran exentos de los derechos de bolsa.

La segunda fuente de costos está dada por el depósito de los instrumentos en la cartera del DCV (ver tarifas en tabla 2.2) que es una sociedad constituida que tiene como objeto recibir en depósito de valores de oferta pública de las entidades autorizadas y facilitar las operaciones de transferencia de dichos valores; dispone de medios físicos, computacionales y humanos para cumplir adecuadamente el objeto para el cual ha sido constituido. Dentro de los servicios que presta están: servicio de custodia (dirigido a inversionistas y custodios); servicio de registro de emisiones desmaterializadas (emisores de RF y IF); servicio de pago de emisores (Pagadores) y servicio de administración de registros de accionistas.

Es importante mencionar que los papeles en el DCV se encuentran respaldados, no así los papeles que no pertenecen a él y éstos son considerados de

segunda categoría. Entonces, cuando pertenecen al DCV refleja que corresponden a los originales. Sin embargo, pertenecer al DCV no es obligatorio, pero entrega transparencia.

Tabla 2.2 Tarifas de DCV

I.1	Cuota de Incorporación	360	UF
I.2	Cuota Fija Mensual	16	UF
I.3	Administración de Seguridad	2,5	UF
I.4	Habilitación del Sistema Computacional en las oficinas del DCV	1,5	UF
I.5	Extensión de Jornada	30	UF hora
I.6	Servicio de Enrutamiento	0,3	UF día
I.7	Despacho de traspasos de títulos de Renta Variable	0,1	UF traspasos
I.8	Canje electrónico de PRC y PRD por títulos C.E.R.O	0,002	% monto abonado

Fuente: Depósito Central de Valores.

Es importante mencionar que existen costos indirectos de transar, los cuales están relacionados con la liquidez del mercado; mientras más líquido sea éste, menores serán los costos producto del impacto de transacciones grandes sobre el precio. En instrumentos poco líquidos, los participantes buscan minimizar las transacciones necesarias.

2.4 Estructura de Impuestos en el Mercado de Valores

2.4.1 Impuesto a la Renta

Para el caso de Personas Naturales Residentes: según el tramo de ingreso, el Impuesto a la Renta va desde un 0% hasta un máximo de 43%. Si se tratase de

personas Naturales/Jurídicas No Residentes, se aplica el llamado Impuesto Adicional de 35%. Por último, para Empresas (Personas Jurídicas) constituidas en Chile, sus ingresos percibidos están sujetos al Impuesto de Primera Categoría, con una tasa del 17%.

2.4.2 Mercado Primario

Cada colocación de una emisión de bonos o de títulos de deuda de corto plazo, independiente del plazo del programa, está afecta a un pago máximo del Impuesto de Timbres y Estampillas equivalente a un 1.6% del monto registrado. En cuanto a la emisión de otros valores, no están afectas al pago de este impuesto.

2.4.3 Mercado Secundario

No existe impuesto a la transferencia de valores. Sí se exige el pago del Impuesto al Valor Agregado (IVA), sobre la Comisión del Corredor y del Derecho de Bolsa, para todo inversionista, sin importar su origen.

2.4.4 Intereses originados de Inversión en Instrumentos de Renta Fija

Para el caso de inversionistas residentes que perciben intereses producto de una inversión en Instrumentos de Renta Fija, éstos deben declarar dichos intereses como renta y pagar el impuesto correspondiente según el tramo de ingreso en que se encuentren. En el caso de Inversionistas Institucionales Extranjeros, se establece un pago del 4%.

2.4.5 Ganancias de Capital en Inversión en Bonos

Las ganancias de capital obtenidas por la enajenación de bonos emitidos por el Banco Central de Chile, el Estado o por empresas constituidas en el país, realizadas en bolsa o mediante algún otro sistema autorizado por la Superintendencia de Valores

y Seguros, están exentas del pago de impuestos en el caso de inversionistas institucionales extranjeros, tales como fondos mutuos, fondos de pensiones u otros.

2.5 Valoración de Instrumentos de Renta Fija

Los instrumentos son vendidos por primera vez a inversionistas (por ejemplo Fondos Mutuos), quienes previo pago de comisiones y derechos de bolsa, pueden adquirirlos en el mercado a un precio que no necesariamente es el Valor Nominal. Una vez colocado el Bono, éste puede ser adquirido en el mercado secundario.

2.5.1 Teoría del Valor Actual

El Valor Actual (VA) es la corriente de flujos generada por un activo descontado a una determinada tasa (tasa de descuento o costo de oportunidad).

La teoría del Valor Actual nos permite determinar el precio de un activo en base a la capacidad generadora de ingresos que éste posea en el futuro, en relación a otros activos de similares características. La fórmula se puede apreciar en la ecuación (2.1).

$$VA = \sum_{t=0}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} \quad (2.1)$$

Donde:

F_t : Flujo de dinero en el periodo t .

r : Tasa descuento.

La tasa de descuento estará reflejando tanto el riesgo de recibir el dinero en un futuro desconocido, como además el valor relativo.

Dentro de los factores que determinan el valor de un bono están: tasa de mercado o tasa de descuento, valor de los cupones (calendario de pago) y el plazo de vencimiento. En la práctica; los factores que complican la valoración corresponden a: calendarios de pagos difíciles de entender, diferentes nomenclaturas para medir el tiempo, la determinación de las tasas de descuento de mercado apropiadas, el entendimiento de las expectativas con respecto a éstas últimas, entre otras.

2.5.2 Rentabilidad de Instrumentos de Renta Fija

Dado que el bono corresponde a una obligación contractual, el inversionista tiene relativamente asegurado el pago del calendario establecido. Así también, la rentabilidad que él obtenga por su inversión queda expuesta mayormente a lo que suceda en el mercado y sus comparables.

El rendimiento o rentabilidad implícita en la compra de un IRF se le denomina TIR (Tasa Interna de Retorno), calculándose según la ecuación 2.2.

$$- Inversión = \sum_{t=0}^n \frac{i \cdot Valor_No\ min\ al}{(1 + TIR)^t} + \frac{Valor_No\ min\ al}{(1 + TIR)^{t=n}}$$

(2.2)

Donde:

i : Tasa cupón.

n : Períodos al vencimiento.

t : Período del pago.

2.5.3 Tasa Interna de Retorno (TIR)

Los supuestos en que se basa la afirmación que la TIR representa el rendimiento generado por un bono son los siguientes: la tasa de interés de mercado puede ser representada como un promedio; la tasa de interés de mercado es la misma

para todos los períodos (estructura plana); los flujos de caja siempre pueden reinvertirse a la tasa de interés de mercado.

Dado lo anterior, la TIR es una buena medida de rentabilidad promedio, si suponemos que las condiciones de mercado no variarán de manera significativa durante el período que dure mi inversión. Sin embargo, en la vida real, la tasa de mercado está constantemente siendo afectada por factores como: la oferta de dinero (liquidez), actividad real (PIB), tasa de inflación (IPC), rentabilidad del capital (ROE), la propensión del ahorro versus consumo, tasas de mercados internacionales, tipo de cambio, déficit o superávit en cuenta corriente, entre otros.

Los inversionistas deben entender los IRF como un activo financiero más, el cual le permite conocer un calendario de pago determinado, pero no la rentabilidad que se obtendrá al venderlo antes de su madurez, a priori. Por lo tanto, una importante implicancia es que los IRF pueden ser iguales o más riesgosos que un Instrumento de Renta Variable.

2.6 Cobertura e Inmunización en Renta Fija

2.6.1 Duration

Duration es un método diseñado para gestionar el riesgo de tasa de interés de modo general y permite diseñar coberturas totales o parciales de modo sistemático. Además permite medir la volatilidad de los títulos de renta fija en respuesta a las variaciones del tipo de interés.

La duration es una metodología que le permite conocer al inversionista cuánto tiempo será necesario mantener el IRF antes de venderlo, para lograr obtener la TIR que él esperaba alcanzar. Es una especie de vida media del IRF, y por ende, puede ser entendida también como una medida de riesgo del IRF.

Por lo tanto, la duration (ecuación 2.3) posee tres características fundamentales: es una buena medida de comparación; inmuniza una cartera, es decir, determina el momento del tiempo en que el inversionista se aísla del riesgo e indica cuanto rentará; y por último, sirve para medir, determinando cuán sensible es el valor de un IRF ante un cambio en la tasa de interés de mercado, correspondiente a la “Duration Modificada” (ecuación 2.4).

$$Duration = \frac{\frac{c_1 \cdot t_1}{(1+TIR)^1} + \frac{c_2 \cdot t_2}{(1+TIR)^2} + \dots + \frac{c_n \cdot t_n}{(1+TIR)^n} + \frac{N}{(1+TIR)^n}}{V_B} \quad (2.3)$$

$$Duration_Modificada = \frac{Duration}{(1+Td)} \quad (2.4)$$

Donde:

c_t : Valor monetario del pago de cupón en t .

N : Valor monetario de un pago al vencimiento.

n : Períodos al vencimiento.

t : Período del pago.

Td : Tasa de descuento.

Algunos de los factores que afectan la duration de un título y la relación que ellos tienen, son los siguientes: el cupón, tasa de interés y el vencimiento. Mientras más alto sea el cupón, más corta será su duration, ya que será mayor la proporción de los flujos que se recibirán antes del reembolso del principal al vencimiento. Luego, ante un aumento del tipo de interés, el valor de los pagos más distantes disminuye más que el de los pagos más cercanos, con lo que pierden peso relativo, disminuyendo la duration. Por último, el vencimiento se relaciona con la duration de forma positiva.

2.7 Yield to Maturity (YTM)

La *Yield to Maturity* (YTM), descrita también como *Discounted Cash-Flow Yield* (DCFY) o TIR, es la tasa de rendimiento que iguala el valor presente de los flujos (intereses + amortizaciones parciales) con el precio corriente del bono (inversión inicial), lo cual se puede ver en la ecuación (2.5).

$$P = \frac{c_1}{(1+TIR)^{1/m}} + \frac{c_2}{(1+TIR)^{2/m}} + \dots + \frac{c_n}{(1+TIR)^{n/m}} \quad (2.5)$$

Donde:

P : Precio del bono.

C_t : Cupones o pagos de amortizaciones e intereses.

n : Cantidad de períodos desde el momento actual hasta la madurez.

m : Cantidad de pagos de cupones de intereses anuales.

TIR : Tasa interna de retorno anual.

La YTM es la TIR de un bono que amortiza capital al vencimiento y la DCFY es la TIR de bonos con amortizaciones parciales hasta el vencimiento. Generalmente se utilizan como sinónimos. Además, es convención expresar la TIR en términos anuales.

Es importante tener claro que ninguna de las anteriores es representativa como medida de rendimiento si se vende antes de su vencimiento. Por lo tanto, son medidas de retorno al vencimiento (*settlement*).

2.8 Medidas de Rendimiento de un Bono

Para poder medir el rendimiento de un bono es necesario conocer las variables que le afectan. El inversionista conoce con certeza el valor del cupón, el valor par y la fecha de vencimiento de un bono. Mientras que son variables endógenas y fluctuantes a condiciones de mercado tanto el precio del instrumento como la TIR. De esta manera, los componentes de la rentabilidad de corto plazo de un bono son las ganancias de capital, el cobro de cupones y los intereses por la reinversión de cupones.

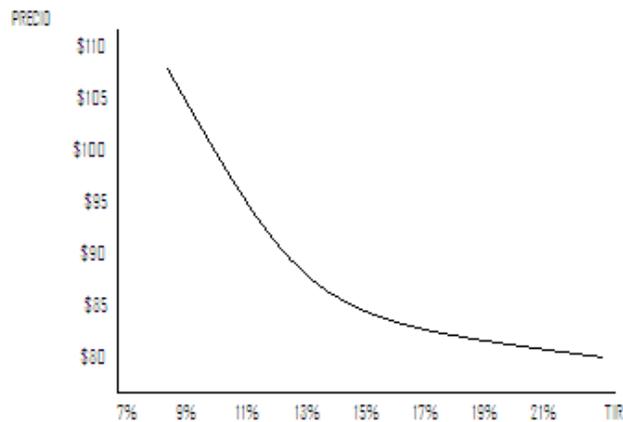
Es importante considerar, como se detalló anteriormente, que la TIR de un bono supone mantener el bono a término, es decir, hasta el vencimiento. Éste no considera las futuras ganancias o pérdidas de capital originadas por su venta anticipada ni considera las posibles ganancias o pérdidas de capital originadas por su rescate anticipado. Supone que la tasa de reinversión de los cupones es igual a la TIR; en el caso de bonos nominales no considera las variaciones en el precio del instrumento motivado por variaciones en la inflación. Además, no considera las variaciones en el valor de otras monedas distintas a las de origen de denominación y por último, tampoco considera las ganancias o pérdidas de capital que pueden generarse por modificaciones en la solvencia del emisor (rating crediticio).

2.9 Relación entre TIR y Precio de IRF

El precio de un bono o IRF varía siempre en la dirección contraria a cambios en la tasa de descuento (ver figura 2.3). Es decir, mientras más alta sea la tasa de descuento, menor es el precio del instrumento. Sin embargo, esta relación no es lineal sino que existe una relación convexa entre la TIR y el precio del bono, entonces, a niveles altos de TIR, los cambios en la TIR (en esos rangos) tienen relativamente poco

impacto en el precio y a niveles bajos de TIR, variaciones en la TIR, tienen un significativo impacto en el precio (en dichos rangos).

Figura 2.3 Relación entre TIR y Precio IRF



Fuente: Elaboración propia.

Donde a niveles bajos de TIR, frente al cambio de una unidad de TIR, representa mayor impacto en el precio (valor presente descrito por la curva), que lo contrario frente a niveles altos de TIR.

Se supone que la TIR se mantiene *ceteris paribus*. Si el bono se cotiza a la par, la maduración del IRF no afecta su cotización. Si el bono se cotiza con un descuento (premio) respecto de su valor par, a medida que va madurando, su precio irá subiendo (cayendo) hasta converger a su valor par a la fecha de vencimiento.

2.10 Total Return

A diferencia de la TIR, el *Total Return* o Retorno Total (ecuación 2.6) hace un supuesto explícito con respecto a la curva de tasas a la que serán reinvertidos los cupones futuros y el precio de venta al final del período.

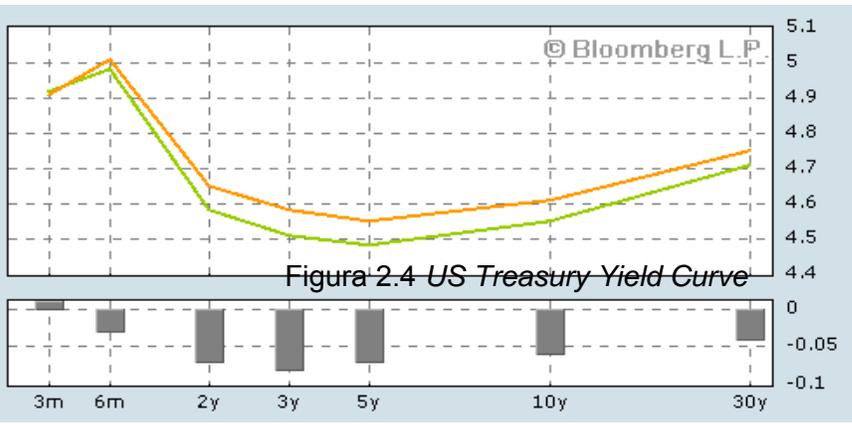
$$\text{Retorno}_{total} = (\text{totales}_{a_{futuro}} / \text{precio}_{de_{compra}})^{1/h} - 1 \quad (2.6)$$

Donde:

h : es el número de años del horizonte de inversión.

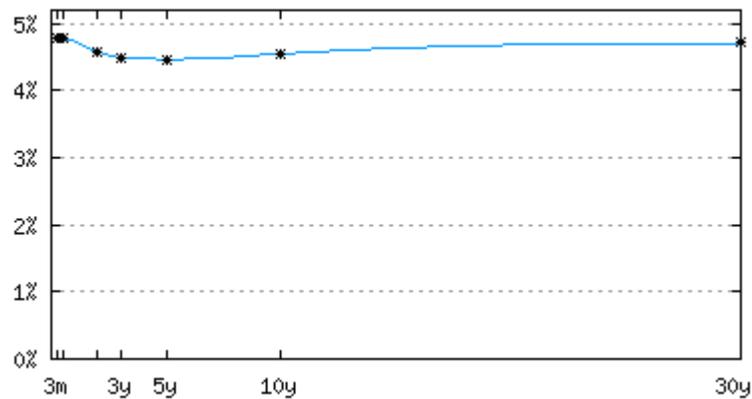
2.11 Curva de Rendimientos

Una de las principales utilidades de la curva de rendimientos es que permite, entre otras funciones, valorar los instrumentos de Renta Fija, como lo mencionamos anteriormente, y para poder valorar dichos instrumentos la curva de rendimientos ha sido definida de diversas maneras. Dada la importancia de esta curva, ya se han utilizado y planteado distintos modelos y supuestos, los cuales han intentado acercarse a la real y verdadera curva de rendimientos de mercado. Sin embargo, ésta es sin duda muy difícil de encontrar. El carácter estocástico de las tasas de interés hace que su solución sea compleja de hallar. Más aún, todavía no existe consenso sobre cual modelo es el más adecuado. En la figura 2.4 y 2.5 podemos ver, de dos fuentes, los gráficos que definen la curva de rendimientos para los bonos del tesoro de Estados Unidos (US Treasury Yield Curve). Siendo el eje de las ordenadas donde se mide las diferentes tasas y el eje de las abscisas el período de vencimiento o plazo.



Fuente: *Bloomberg*³

Figura 2.5 US Treasury Yield Curve



Fuente: *Yahoo Finance*⁴

Hasta ahora hemos visto la función y la representación gráfica de la curva, pero ¿qué es la estructura de tasas de interés?. Bueno, ésta se ha definido como la relación entre las tasas de interés proporcionado por los activos libres de riesgo (bonos el Banco Central) y sus diferentes plazos en un instante determinado. El plazo de un instrumento financiero con una madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo. Es decir, es una función cuya variable dependiente es el

³ www.bloomberg.com

⁴ <http://finance.yahoo.com>

tipo de interés al contado y cuya variable independiente es el plazo al que se refiere. Esta representación gráfica de la estructura intertemporal es la que denominamos curva de rendimientos o en inglés, *Yield Curve*. En la práctica poder resolver dicha curva no es trivial. En el caso de Chile, los papeles existentes de los bonos del Banco Central no son muchos y los vacíos producidos por la no transacción dificultan más aún la resolución de la curva. Sólo se poseen puntos en la curva, y es esa la discusión de cómo se encuentran los puntos intermedios y qué método es el más adecuado para “unirlos”, así como también la proyección de ella. Como explicamos anteriormente, los papeles tienen distintos plazos y características por lo que para cada tramo de la curva se requerirán distintos papeles, así como también si se quiere estimar del tipo nominal o real. Además, en general, dependiendo de las características existentes en cada momento de la economía se distinguen diferentes tipos o formas de curvas.

2.11.1 Formas de la Curva

La estructura intertemporal es la relación entre los tipos de interés proporcionados por los activos libres de riesgo y sus diferentes plazos en un instante determinado. El plazo de un instrumento financiero con una madurez fija se define como el tiempo hasta el día del vencimiento de dicho activo. Se trata, por tanto, de una función cuya variable dependiente es el tipo de interés al contado y cuya variable independiente es el plazo al que se refiere.

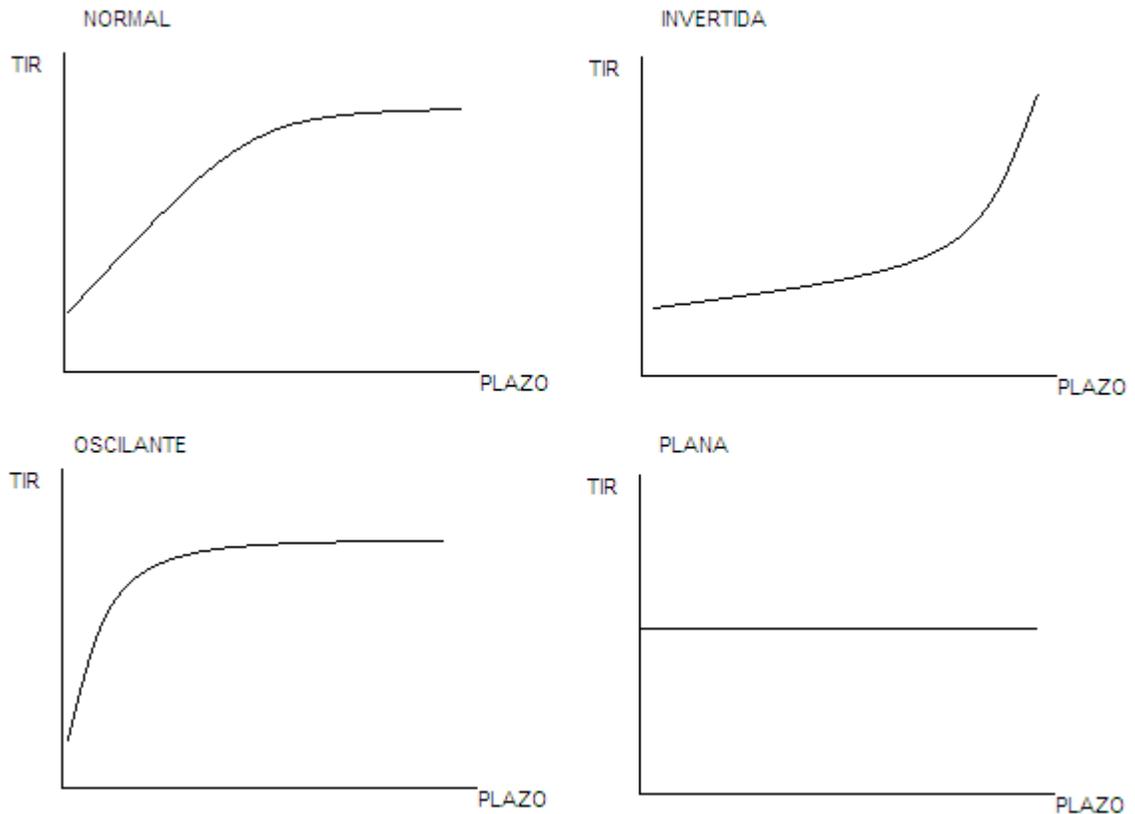
La estructura intertemporal se suele representar gráficamente de forma que el eje de ordenadas se miden diferentes tipos y en el eje de abscisas el período de vencimiento. Es así como esta representación gráfica de la estructura intertemporal se suele denominar curva de rendimientos, (*Yield Curve*). Para ella se pueden definir los siguientes tipos de curvas que se muestran en la figura 2.6.

- Normal, creciente o positiva: La relación existente entre tasa y plazo se define cuando las tasas de interés son mayores a medida que el plazo al que se refieren se va ampliando. Muchos autores argumentan que ésta es la situación que se puede calificar de normal, ya que a mayor plazo el riesgo también es

mayor y por tanto, los tipos de interés han de reflejar una valoración creciente respecto del plazo.

- Invertida, decreciente o negativa: Esta relación se da cuando las tasas de interés al contado a corto plazo son más elevadas que los tipos a largo plazo, lo que se conoce también como curva invertida. Esta situación se suele considerar como especial y ocurre cuando el mercado apuesta a corto o medio plazo por un descenso de las tasas de interés que se negocian en el mercado son elevados.
- Oscilante o con jorobas: Esta relación se da cuando la curva presenta unos tramos ascendentes y otros descendentes. Se suele dar en el mercado en situaciones de inestabilidad por diferentes causas y, ante la incertidumbre de los agentes participantes, el mercado presenta continuas variaciones.
- Plana: Es una relación en la que las tasas de interés son iguales, o con escasas diferencias, independientemente del plazo. Esta situación se puede calificar de anómala y no estable, y se suele emplear como hipótesis de trabajo poco realista en determinados análisis.

Figura 2.6 Tipos de Curvas de Rendimiento



Fuente: Elaboración propia.

Desafortunadamente, la estructura intertemporal de las tasas de interés no se puede observar directamente en el mercado, dado que ésta informa exclusivamente la relación tipo-plazo, y en el mercado no se dispone de esta información para todos los plazos que se pueden considerar en un horizonte temporal determinado. Además, es posible encontrar diferentes tasas de interés asociados a un mismo plazo por la variedad de factores que influyen en su determinación. Esto es ocasionalmente porque los tipos observados reflejan efectos diferentes en el plazo. Uno de los más importantes es el riesgo de insolvencia del emisor que hace referencia al riesgo de impago que comporta el título. Los agentes de mercado valoran este riesgo, en el caso de considerarlo elevado, solo están dispuestos a prestar su financiación si se les compensa a través de un mayor rendimiento. Para no incorporar el riesgo de

insolvencia en la estimación de la estructura intertemporal se utilizan rendimientos de títulos de renta fija emitidos por el estado para obtener, en la medida de lo posible, tasas de interés libres de riesgo. En definitiva, se trata de disponer de rendimientos de títulos de renta fija estables, cupón cero o emitidos al descuento, que sean lo más homogéneos posible y que estén libres de otros posibles factores (fiscalidad, liquidez, características propias del título, etc.) que distorsionen la relación tipo-plazo. La ventaja de utilizar Deuda del Estado es que, aparte de proporcionar tipos libres de riesgo de insolvencia, se negocia en mercados secundarios, lo cual son suficientemente líquidos como para una amplia gama de plazos.

La negociación en los mercados financieros, considera que se realiza en tiempo continuo, por lo que por otra parte, se puede analizar la estructura intertemporal desde un punto de vista dinámico en vez de estático. Por ello, es de nuestro interés enfocarnos en este seminario en un modelo dinámico de estimación desarrollado por Cox-Ingersoll y Ross. Para continuar, explicaremos a modo general los modelos utilizados para finalmente llegar al modelo antes señalado.

III. MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LA *YIELD CURVE*

Ahora veremos en mayor detalle el modelamiento de la *Yield Curve*. El punto de partida para poder comenzar a trazar la curva es la tasa de interés a corto plazo, pues es una variable fundamental para caracterizar la *Yield Curve*. En la curva se pueden observar las expectativas del mercado y a partir de la tasa corta su proyección, que en definitiva, es la tasa de largo plazo del mercado. Si no conocemos esta variable ni tampoco su distribución y propiedades podemos obtener otras informaciones del mercado para tratar de acertarle a la verdadera curva. Es posible, a partir de los bonos cupón cero reconstruir la curva de rendimiento en un instante t , de tal forma que la curva en su totalidad se caracterice por una única variable r , representando la tasa de interés. De esta manera, dependiendo del modelo que se elija para representar la evolución de r , será la calidad del modelo para describir la evolución de la curva de rendimientos.

Existen ciertas características que se desearían encontrar en el comportamiento de las tasas de interés que un modelo predice. Entre ellas están:

- La dispersión de los valores de los tipos de interés debe ser consistente con ciertas propiedades en el largo plazo, una de ellas es que los tipos de interés no deben ser negativos o alcanzar valores demasiado elevados.
- Históricamente se observa que los valores muy elevados de los tipos de interés van seguidos más a menudo de bajadas que de subidas en los mismos, la inversa es válida únicamente para valores muy bajos de tipos de interés, lo que hace que los procesos con reversión a la media parecieran ser adecuados para recoger este comportamiento.
- Los tipos de interés para distintos vencimientos no están perfectamente correlacionados; la correlación debería disminuir a medida que disminuye el vencimiento, siendo este descenso más acentuado para vencimientos cortos.

- La volatilidad de los tipos con distintos vencimientos deberían ser diferentes, siendo los títulos a corto plazo los que mayor volatilidad posean.

- Numerosos estudios empíricos han demostrado que la volatilidad del tipo de interés a corto plazo no es constante (Chan et al. (1992) y Tse (1995)).

Éstas son algunas de las características que un proceso considerado como razonable para modelar los tipos de interés, debería verificar. Sin embargo, no existe ningún modelo unifactorial o multifactorial que las recoja todas, por lo que en la elección de uno u otro, será necesario considerar aquéllas más importantes en cada momento.

3.1 Estructura general de métodos de estimación

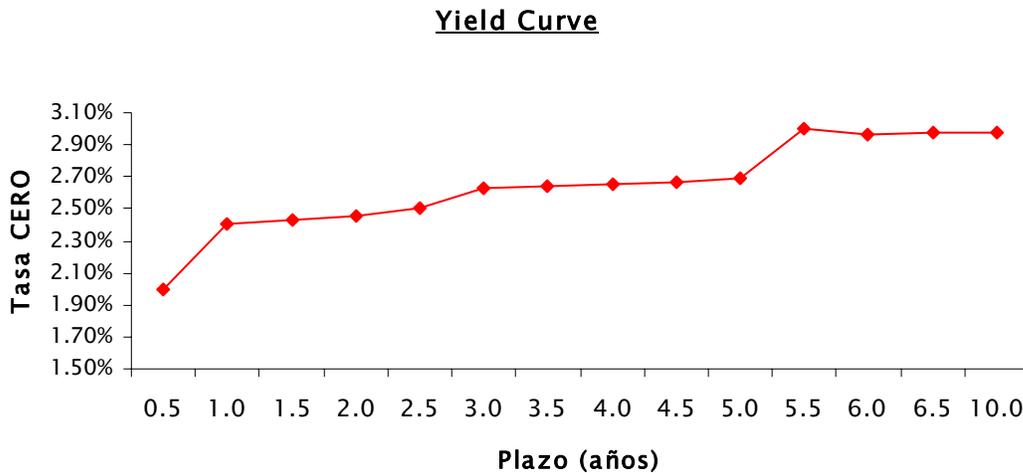
El estudio de la dinámica que siguen las tasas de interés busca no sólo explicar la estructura de las tasas, sino además, el comportamiento de las volatilidades de dichas tasas y los efectos que relacionan los tipos de interés de plazos diferentes. Para esto, los modelos dinámicos son generalmente calibrados con datos históricos, a partir de los cuales pueden ser inferidos los distintos efectos mencionados.

Existen diversos métodos para construir la *Yield Curve*. Uno de ellos es el método *Bootstrapping*, el cual se realiza a partir de la observación de los rendimientos de los bonos “centrales”, y los cupones de dichos bonos. Éste se basa en que si es posible observar un precio de mercado para un bono central con cupones (BCU o *Treasury Bonds*, por ejemplo), este precio puede ser “separado” en la suma de sus cupones descontados a la tasa cero cupón que corresponda. Sin embargo, si bien el bootstrapping es un método efectivo, a veces puede ser difícil obtener información de los plazos necesarios para obtener estimaciones confiables. En el caso chileno, dada las pocas transacciones, esta data es muy difícil de obtener. Debido a que no siempre existen datos, se puede esperar que la estructura revierta a la media o pueda ser

atractivo encontrar formas funcionales que cumplan con las características que los agentes esperan.

Para ejemplificar el método *Bootstrapping*, ilustrado en la figura 3.1, supongamos que para construir la *Yield Curve* tenemos información de mercado de las TIR respectivas a un PRBC con vencimiento en 0.5 años y cupones cero con vencimientos semestrales de 1 a 4.5 años. Para encontrar la tasa cero cupón a 5 años, tenemos un BCU a dicho vencimiento con su respectiva TIR. El procedimiento a seguir consiste en encontrar aquella tasa de descuento que haga que el precio de mercado⁵ del BCU iguale al precio teórico⁶, con el fin que no existan oportunidades de arbitraje. Para seguir encontrando las tasas cero cupón hasta 10 años se utiliza el mismo procedimiento.

Figura 3.1 Muestra la estimación de la *Yield Curve* mediante el método *Bootstrapping*.



Fuente: Elaboración propia.

⁵ Precio de mercado de un bono se obtiene utilizando la TIR como tasa de descuento para los respectivos cupones.

⁶ Precio teórico de un bono se obtiene utilizando la tasa cero cupón para descontar los respectivos cupones.

Se presentan otras formas alternativas de estimación para la *Yield Curve*, dichos modelos son agrupados en dos tipos:

- *Modelos Dinámicos (Vasicek 1977 y Cox, Ingersoll y Ross 1985).*

Son modelos que describen la evolución en el tiempo de la relación tipo-plazo. Los cuales se basan en un conjunto de parámetros y restricciones que permiten determinar y proyectar la tasa de interés de corto plazo; ofreciendo una alternativa a los tradicionales modelos teóricos en donde las variables de estado y su dinámica se suelen fijar de forma apropiada.

- *Modelos Estáticos*

Conocidos como modelos de ajuste de la curva tipo-plazo; los cuales permiten extraer la información de tasas para un momento dado del tiempo. Se utilizan modelos Paramétricos, tales como Nelson y Siegel (1987) y Svensson (1994) y no Paramétricos o *Splines*, como el de Fisher, Nychka y Zervos (1994) y una extensión del modelo de Waggoner (1997). Para ejemplificar los modelos paramétricos podemos observar las figuras 3.2 para el método de Nelson y Siegel y 3.3 para Svensson.

Nelson y Siegel, ecuación (3.1), consiste en encontrar la curva que mejor se ajuste a los datos con el menor ECM⁷ mediante la estimación de los parámetros y con ellos obtener las TIR de las respectivas duraciones.

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{m}{t}}\right) \cdot \frac{t}{m} + \beta_2 \cdot \left(\left(1 - e^{-\frac{m}{t}}\right) \cdot \frac{t}{m} - e^{-\frac{m}{t}} \right) \quad (3.1)$$

Donde:

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, t$ son parámetros del modelo.

⁷ Error Cuadrático Medio: corresponde al promedio de las desviaciones, es equivalente a la varianza del error de predicción, permite crear intervalos de confianza para la proyección.

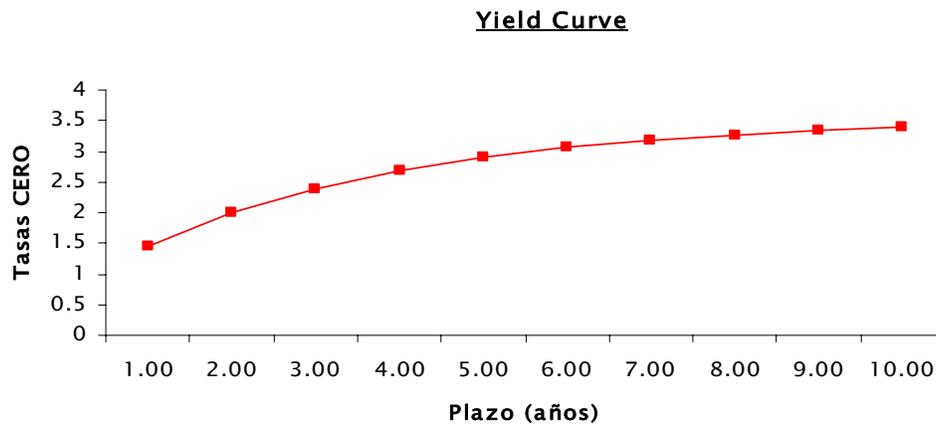
β_0 : representa el nivel de la curva de rendimiento.

β_1 : representa la pendiente de la curva de rendimiento.

β_2 : representa la curvatura de la curva de rendimiento.

m : madurez.

Figura 3.2 *Yield Curve* mediante el método de Nelson y Siegel.



Fuente: Elaboración propia

Svensson es una extensión del método de Nelson y Siegel, que busca generar curvas con mayor flexibilidad al incorporar más parámetros al modelo, ilustrados en la ecuación (3.2); con el fin de minimizar el error en el precio de los bonos y por ende, minimizar el error en las tasas de interés.

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}\right) \cdot \frac{\tau_1}{m} + \beta_2 \cdot \left(\left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}\right) \cdot \frac{\tau_1}{m} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left(\left(1 - e^{-\frac{m}{\tau_2}}\right) \cdot \frac{\tau_2}{m} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \right) \quad (3.2)$$

Donde:

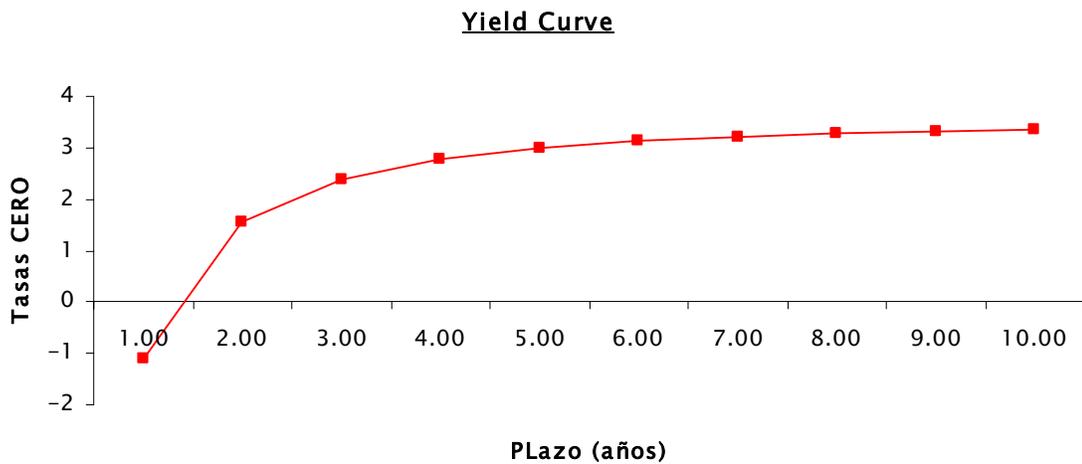
β_0 : Valor asintótico de la curva cuando la madurez tiende a infinito.

β_1 : Valor inicial de la curva.

β_2, β_3 : determinan la dirección y magnitud del primer y segundo valle de la curva.

τ_1, τ_2 : Parámetros que determinan la posición del primer y segundo valle de la curva.

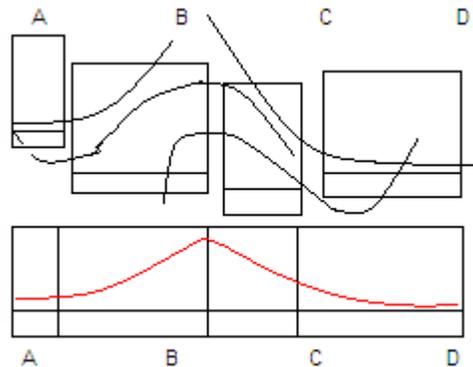
Figura 3.3 *Yield Curve* mediante el método de Svensson



Fuente: Elaboración propia.

Para ejemplificar los modelos no paramétricos o *splines*, métodos consistentes en un conjunto de polinomios de algún orden que están unidos para conformar una curva que cumple una cierta condición de suavidad, podemos observar la figura 3.4, donde se ilustra la construcción de una curva con secciones *B-splines* a, b, c y d. Donde estos polinomios son definidos para ciertos intervalos separados por nodos, puntos en cuales cambia de una función a otra.

Figura 3.4 Construcción de una curva con secciones B-splines a, b, c y d.



Fuente: Elaboración propia.

La diferencia entre ambos tipos de modelos, Estáticos y Dinámicos, radica principalmente, que en general, se espera que un modelo estático se pueda ajustar mejor a los datos que un modelo dinámico. Sin embargo, el modelo dinámico puede describir la evolución de la estructura de tasas de interés en el tiempo y no en un momento dado. Esto permite simular el comportamiento futuro de tasas de interés, generando distribuciones que sirven para valorar instrumentos complejos (ej. Derivados). Además, el modelo estático está caracterizado por el supuesto de que las interrelaciones entre los tipos de interés permanecen inalteradas a lo largo del tiempo; ello implica que los factores de riesgo son los mismos de un periodo a otro y que el impacto de cada factor sobre la estimación de la estructura de la tasa de interés permanece invariable.

Actualmente, los modelos dinámicos ocupan un lugar destacado en el ámbito de la gestión del riesgo de interés por su mayor flexibilidad, simplicidad y capacidad de adaptación a la verdadera dinámica de los tipos de interés; mientras que los modelos estáticos son ampliamente utilizados para la valoración de activos.

3.2 Modelos Dinámicos: Vasicek 1977 y Cox, Ingersoll y Ross 1985

3.2.1 Modelo Vasicek

El Modelo de Vasicek corresponde a un modelo dinámico de tasa de interés de corto plazo. En el cuál especifica una relación lineal entre tasa de interés y sus variables explicativas.

Concretamente es un modelo de un factor con parámetro invariante en el tiempo, explicando así la evolución de la tasa de corto plazo a través de un factor de riesgo, el cual está relacionado con la tasa instantánea.

Vasicek (1977), postuló que la tasa instantánea sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck⁸ de elasticidad random walk para la valorización de bonos descontables, caracterizado por una ecuación del tipo (3.3):

$$dr(t) = \alpha(\theta - r(t))dt + \sigma dw_t \quad (3.3)$$

Donde:

r : Tasa de interés.

t : Tiempo.

α : Parámetro.

σ : Desviación estándar del cambio continuo de la tasa libre de riesgo.

w_t : Variable con un proceso Wiener⁹.

$dr(t)$: Cambio en la tasa de interés de corto plazo.

θ : Nivel de largo plazo de la tasa.

⁸ Esta especificación implica reversión a la media, a un valor de "largo plazo" de θ

⁹ Un proceso Wiener tiene las siguientes características: incrementos independientes y está distribuido, $dw \sim N(0, dt)$. En la ecuación (3.4) se explica en detalle este proceso.

Para ejemplificar este proceso de *Ornstein – Uhlenbeck* tenemos que si $r(t) < \theta$ el componente tendencial es positivo, es decir, el cambio en la tasa de interés de corto plazo posee un comportamiento positivo. Si $r(t) > \theta$ el componente tendencial es negativo. Por consiguiente, el proceso tiende siempre hacia su nivel normal o de largo plazo, θ . El parámetro α , controla el tamaño o la velocidad del ajuste hacia el nivel de largo plazo, y se denomina el parámetro de reversión a la media o velocidad de ajuste.

Este es un proceso estocástico con reversión a la media de largo plazo y volatilidad constante. De esta manera, se recoge la experiencia empírica, que indicaba que el nivel de las tasas de interés sigue un ciclo y no diverge. Vasicek encontró fórmulas analíticas para expresar el precio de un bono, y con ello, caracterizar la estructura de tasas.

Por otra parte, un proceso de Wiener a su vez se define según la ecuación (3.4).

$$dw = \mu_t dt + \sigma dn \quad (3.4)$$

Donde:

μ : Es un componente tendencial definido como el cambio esperado en el proceso por unidad de tiempo.

dt : Cambio por unidad de tiempo.

σ : Volatilidad del proceso.

dn : Variable aleatoria que se distribuye $N(0, dt)$.

Vasicek es uno de los modelos dinámicos más utilizados, por su simplicidad analítica y capacidad de producir variadas formas para la estructura intertemporal de tasas. Su desventaja teórica, radica en que este modelo puede llegar a predecir tasas de interés negativas. Además, el hecho de que posea reversión a la media es una característica ampliamente defendida y argumentada en la literatura. Sin embargo, en

cuanto a la volatilidad parece más adecuado que dependa del nivel de los tipos de interés en alguna medida, en lugar de ser constante.

3.2.2 Modelo CIR

Cox, Ingersoll y Ross (CIR 1985a), desarrollan un modelo de equilibrio general, en el cual la estimación de la tasa de interés es derivada endógenamente, como producto de un problema general de maximización de la utilidad de los agentes económicos.

El modelo desarrollado presenta una evolución de la tasa de corto plazo de acuerdo a un *proceso estocástico de raíz cuadrada*¹⁰ con reversión a la media, el cual impedirá que la tasa sea negativa y bajo ciertas condiciones siempre será positiva. Además, incorpora en la volatilidad una dependencia del nivel de la tasa, lo cual es una hipótesis más realista que la volatilidad constante planteado por Vasiceck (1977).

Este modelo presenta extensiones que van desde unifactorial hasta multifactorial, las cuales se desarrollarán a continuación.

3.2.2.1 Estimación del modelo CIR por medio de un factor

Cox, Ingersoll y Ross derivan un proceso estocástico para la evolución de la tasa de interés de corto plazo, representada por la ecuación (3.5)

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW \quad (3.5)$$

Donde:

r : Tasa de interés de corto plazo.

κ, θ : son parámetros que cumplen la condición de $\kappa, \theta > 0$.

t : Tiempo.

¹⁰ Son aquellos donde se asume que el valor inicial del proceso es positivo, de modo de poder aplicar raíz cuadrada. Además, exhiben reversión a la media y el proceso no puede tomar valores negativos.

σ : Desviación estándar del cambio continuo de la tasa libre de riesgo

w : Variable con un proceso Wiener.

dr : Cambio en la tasa de interés de corto plazo.

La ecuación (3.5) representa un proceso continuo AR(1)¹¹, debido a que es la versión en tiempo continuo de un proceso AR(1); en concreto es el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ ¹². En esta ecuación la tasa de interés de corto plazo, r , es llevada a un valor de largo plazo, representado por el parámetro θ . La velocidad de ajuste del proceso hacia el nivel de largo plazo, se representa por el parámetro κ , el cual se denomina parámetro de reversión a la media. Por último, σ representa la volatilidad instantánea de los movimientos de la tasa de interés.

Este proceso posee características consistentes en que la tasa de interés no puede ser negativa, si la tasa se hace cero, el drift¹³ será capaz de hacerla tomar valores positivos; la varianza absoluta de la tasa de interés aumenta con el nivel de la misma y existe una distribución estacionaria para la tasa de interés.

En este modelo, el precio de un bono de descuento sigue la forma mostrada en la ecuación (3.6).

$$N(r, t, S) = A(t, S)e^{-B(t, S)r} \quad (3.6)$$

Donde:

$N(\cdot)$: Representa el precio de un bono

r : tasa de interés

t : tiempo

S : Madurez del bono

¹¹ Autorregresivo de orden 1, es decir, presenta un rezago de la variable dependiente como variable explicativa.

¹² Para mayor detalle de este proceso véase Dixit y Pindyck (1994, cap. 3, sección 3.B)

¹³ Diferencial de tasas de largo y corto plazo.

Además, $A(t, s)$ y $B(t, s)$ tienen una forma dada por el modelo CIR ilustrada en las ecuaciones (3.6.1), (3.6.2) y (3.6.3).

$$A(t, s) = \left[\frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}(\kappa + \lambda - \gamma)(s-t)}}{2\gamma + (\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(s-t)} - 1)} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \quad (3.6.1)$$

$$B(t, s) = \frac{2(e^{\gamma(s-t)} - 1)}{2\gamma + (\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(s-t)} - 1)} \quad (3.6.2)$$

$$\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \quad (3.6.3)$$

De esta manera, el precio de un bono es una función convexa decreciente de la tasa de interés. A su vez, es una función decreciente con respecto a la madurez y creciente con respecto al tiempo. Entonces para encontrar la tasa de un bono basta hacer ecuación (3.7):

$$R(r, t, S) = \frac{rB(t, S) - \ln A(t, S)}{S - t} \quad (3.7)$$

Podemos apreciar que a medida que el plazo del bono se acerca a 0, la tasa se aproxima a la tasa de corto plazo, r . A su vez, cuando el plazo tiende a infinito, la tasa de interés se aproxima a su valor límite, en la ecuación (3.8):

$$R(r, t, \infty) = \frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \lambda} \quad (3.8)$$

Este modelo es más sencillo porque impide que las tasas de interés sean negativas y a la vez es consistente con una valoración libre de arbitraje. Sin embargo, supone que los retornos de todos los bonos están perfectamente correlacionados, lo

cual puede no ser apropiado para describir adecuadamente la estimación de la tasa de interés y su variación en el tiempo.

3.2.2.2 Estimación del modelo CIR mediante una extensión multifactorial.

La tasa de interés nominal instantánea es asumida como la suma de las k variables estado, de las cuales depende la tasa de interés de corto plazo en la ecuación (3.9):

$$r = \sum_{j=1}^K y_j \quad (3.9)$$

En esta ecuación r representa la tasa de interés de corto plazo e y_j representa las variables estado.

La variable r incorpora dependencia de la volatilidad a la variable de estado en un modelo con reversión a la media¹⁴, ilustrado en la ecuación (3.10):

$$dr_j = \kappa_j (\theta_j - r_j) dt + \sigma_j \sqrt{r_j} dw_j \quad (3.10)$$

Donde:

r_j : Tasas de interés de corto plazo.

κ, θ : son parámetros que cumplen la condición de $\kappa, \theta > 0$.

t : Tiempo.

σ : Desviación estándar del cambio continuo de la tasa libre de riesgo.

w : Variable con un proceso *Wiener*.

dr : Cambio en la tasa de interés de corto plazo.

¹⁴ Proceso que tiende siempre hacia su nivel normal o de largo plazo (θ)

De esta manera, el proceso de la evolución de la tasa de interés de corto plazo se ve afectado por el proceso de *Wiener* (detallado en la ecuación 3.4) y cada uno de sus componentes. Ejemplificaremos en las figuras 3.5a, 3.5b, 3.6a, 3.6b, 3.7a, 3.7b, 3.8a y 3.8b el proceso, simulando cambios en las variables.

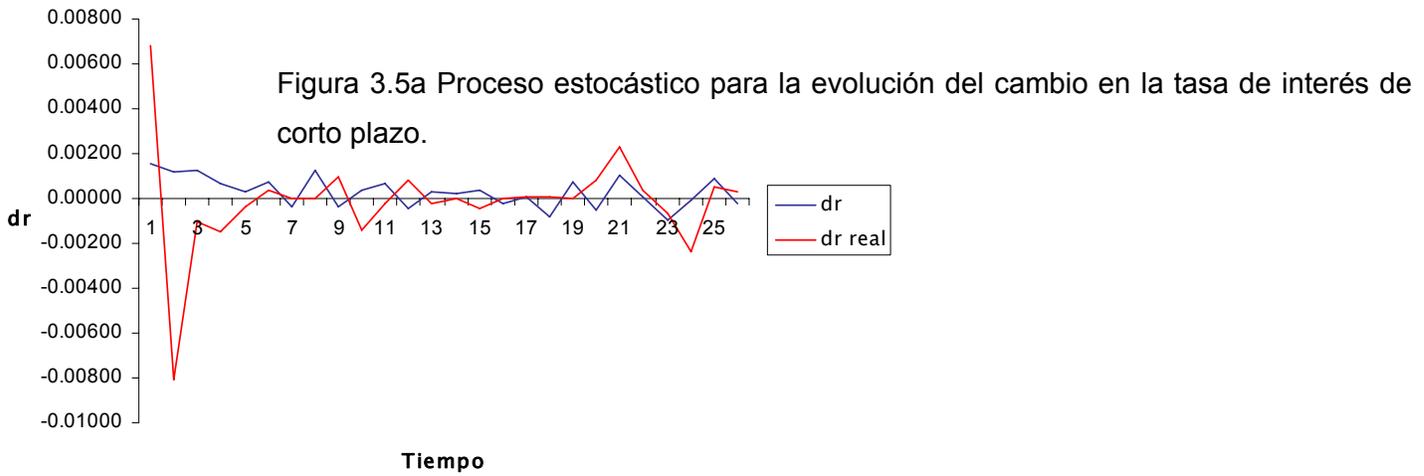
Caso 1: Minimizando el error al cuadrado entre la tasa real y la tasa proyectada se obtienen las figuras 3.5a y 3.5b.

Caso 2: Si aumentamos el componente tendencial, es decir μ , la curva aumenta su nivel y existe un menor ajuste con respecto a dr real, entonces cuanto rápido converja a la variación real dependerá de la velocidad de ajuste, es decir k . La figura 3.6a se construyó con $k = 0.2$ y la figura 3.6b con un $k = 1$.

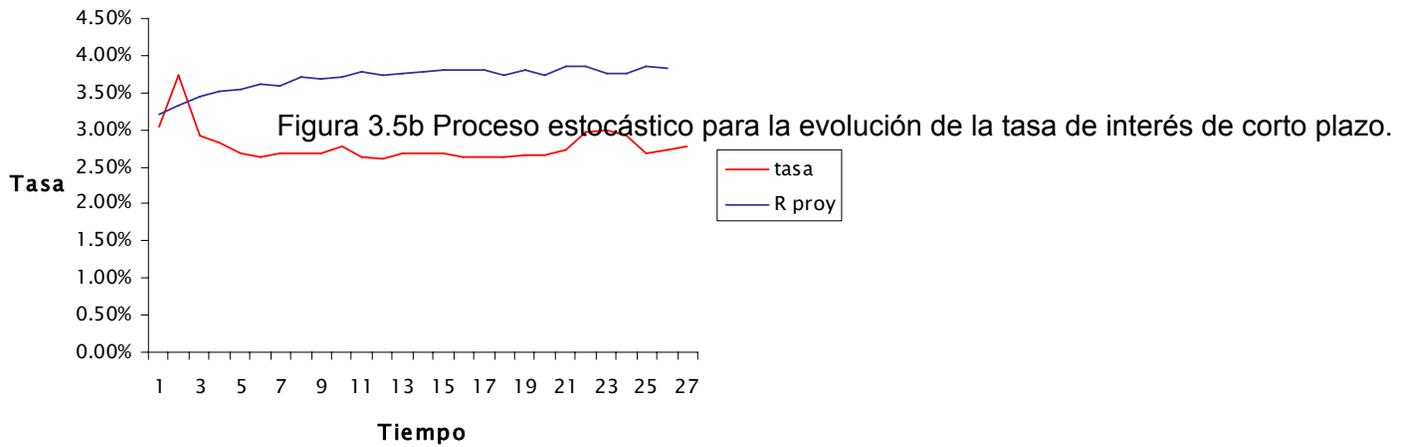
Caso 3: Si aumentamos la desviación estándar del proceso de *Wiener*, la volatilidad aumenta. Por otro lado, si la desviación estándar disminuye la curva adquiere un forma más plana, es decir, la volatilidad disminuye y su trayecto se ajusta más a la real. Esto lo podemos ver en las figuras 3.7a y 3.7b respectivamente.

Caso 4: Si variamos la velocidad de ajuste y analizamos la evolución estocástica de la tasa de interés, podemos ver las figuras 3.8a y 3.8b, donde la primera figura fue construida con un $k = 0.01$ y la segunda con un $k = 1$, mostrándonos una mayor convergencia a medida que aumenta el k .

Evolución del Cambio de la Tasa de Interés



Evolución de la Tasa de Interés



Fuente: Elaboración propia

Evolución del Cambio de la Tasa de Interés

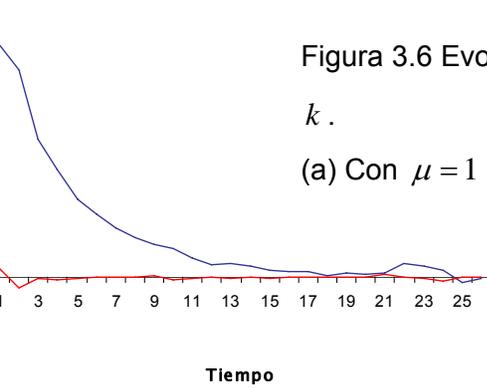
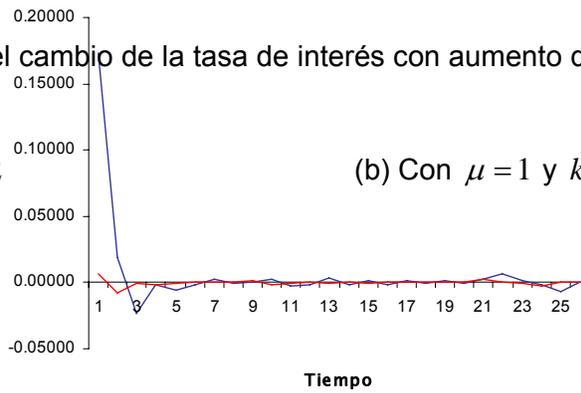


Figura 3.6 Evolución del cambio de la tasa de interés con aumento de μ y variación de k .

(a) Con $\mu = 1$ y $k = 0.2$

Evolución del Cambio de la Tasa de Interés



(b) Con $\mu = 1$ y $k = 1$

Fuente: Elaboración propia.

Evolución del Cambio de la Tasa de Interés

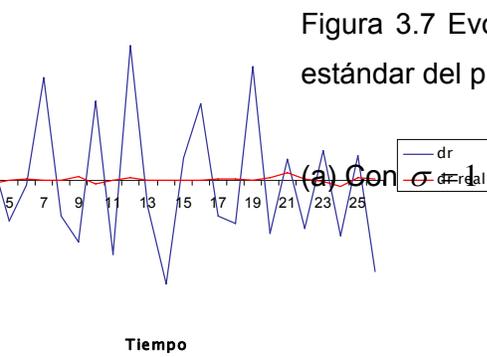
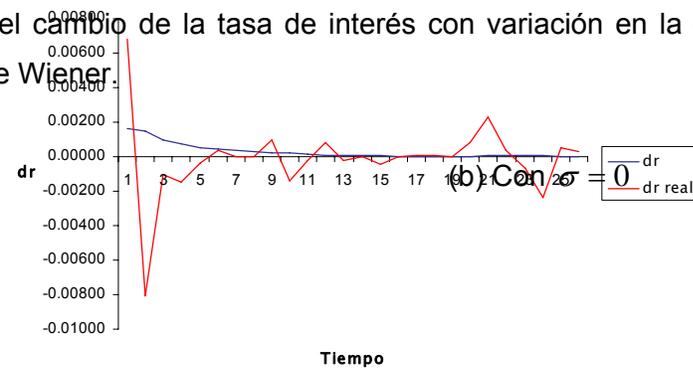


Figura 3.7 Evolución del cambio de la tasa de interés con variación en la desviación estándar del proceso de Wiener.

(a) Con $\sigma = 1$

Evolución del Cambio de la Tasa de Interés

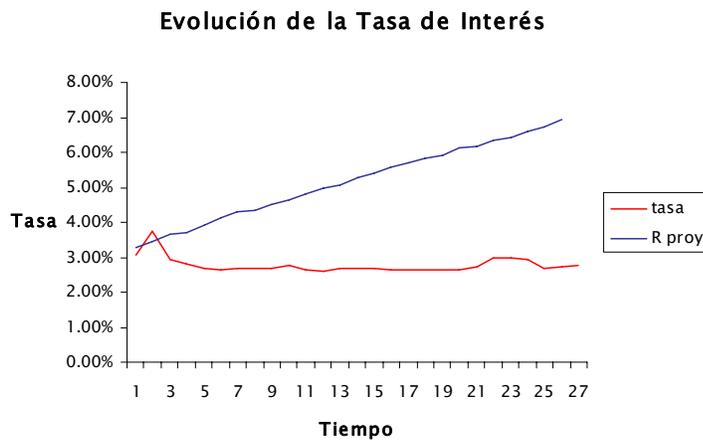


(b) Con $\sigma = 0$

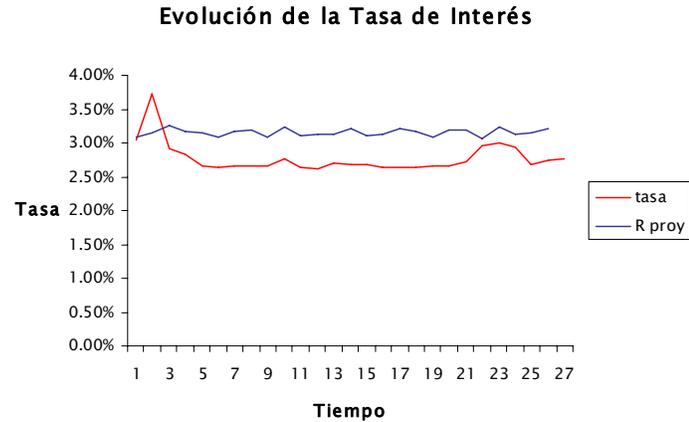
Fuente: Elaboración propia.

Figura 3.8 Evolución de la tasa de interés cambiando la velocidad de ajuste.

(a) Con $k = 0.01$



(b) Con $k = 1$



Fuente: Elaboración propia.

Luego, la ecuación recién descrita puede ser redefinida y, por consiguiente, la variable estado se asume independiente y generada como un proceso de difusión de raíz cuadrada ilustrado en la ecuación (3.11)

$$dy_j = \kappa_j(\theta_j - y_j)dt + \sigma_j\sqrt{y_j}dw_j \quad \text{para } j = 1, \dots, K \quad (3.11)$$

Donde:

κ : Velocidad de ajuste de los procesos.

θ : Las medias de largo plazo de cada factor.

σ : La volatilidad instantánea de los movimientos de y .

w : Variable con un proceso Wiener.

Además se asume que el valor inicial del proceso, y_0 es positivo, de modo de poder aplicar raíz cuadrada.

La única diferencia de este proceso con respecto al de Ornstein- Uhlenbeck radica en el término $\sqrt{y_j}$ en la volatilidad.

Al igual que en el caso de los procesos Ornstein- Uhlenbeck, los procesos de raíz cuadrada exhiben reversión a la media, aunque en este caso particular el proceso no puede tomar valores negativos.

La solución para el precio nominal al tiempo t de un bono libre de riesgo que paga un peso nominal al tiempo s es determinado por la ecuación (3.12):

$$N_T(s) = A_1(t, s) \cdots A_K(t, s) \exp\{-B_1 y_{1t} - \cdots - B_K y_{Kt}\} \quad (3.12)$$

Se considera cualquier bono que venza en s , como una inversión renovable en sucesivos bonos de vencimiento instantáneo. Con N_T convexa decreciente con respecto a y , creciente con respecto a t y decreciente con respecto a s .

Donde $A_j(t, s)$ y $B_j(t, s)$ tienen una forma dada por el modelo CIR, ilustradas en las ecuaciones (3.12.1), (3.12.2) y (3.12.3).

$$A_j(t, s) = \left[\frac{2\gamma_j e^{\frac{1}{2}(\kappa_j + \lambda_j - \gamma_j)(s-t)}}{2\gamma_j e^{-\gamma_j(s-t)} + (\kappa_j + \lambda_j + \gamma_j)(1 - e^{-\gamma_j(s-t)})} \right]^{\frac{2\kappa_j \theta_j}{\sigma_j^2}} \quad (3.12.1)$$

$$B_j(t, s) = \frac{2(1 - e^{-\gamma_j(s-t)})}{2\gamma_j e^{-\gamma_j(s-t)} + (\kappa_j + \lambda_j + \gamma_j)(1 - e^{-\gamma_j(s-t)})} \quad (3.12.2)$$

$$y \quad \gamma_j = \sqrt{(\kappa_j + \lambda_j)^2 + 2\sigma_j^2} \quad (3.12.3)$$

Cada variable estado tiene un premio por riesgo, $\lambda_j y_j$, y cada λ_j es un parámetro fijo. De esta manera la tasa de descuento compuesta continua spot a un plazo s para un bono es definida como se muestra en la ecuación (3.13);

$$R_t(s) = \frac{-\ln N_t(s)}{s-t} \quad (3.13)$$

La cual es una función lineal de las variables estado inobservables, es decir, la tasa de interés se representa como una función del plazo al vencimiento. Dado el set de tasas de los K bonos descontables, uno puede conceptualmente invertirlos para inferir los valores de las variables estado.

IV. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO ESTADO-ESPACIO

4.1 Estimación del Modelo Estado- Espacio

Para poder aplicar el modelo es necesario entender el modelo estado-espacio. El tratamiento estadístico de los modelos estructurales de series temporales está basado en su representación en el espacio de los estados. Esta es una herramienta de enorme potencial que permite el tratamiento de un amplio rango de modelos de series temporales. El artículo de Kalman (1960) significó un importante salto cualitativo, ya que mostró que una extensa clase de problemas podía representarse mediante un modelo lineal simple en el espacio de los estados, cuya naturaleza markoviana¹⁵ permite los cálculos necesarios para su aplicación práctica efectuándose de forma recursiva.

El estado o situación de un sistema en un momento dado del tiempo se describe a través de un conjunto de variables que forman el llamado vector estado. El espacio de los estados es, por tanto, el espacio donde los sucesivos vectores de estado describen la evolución del sistema como función del tiempo. En un modelo estructural de series temporales los elementos del vector de estado son los componentes no observables de la serie.

Para estimar el modelo CIR, se usa el modelo estado-espacio, el cual cuenta con una representación matricial del sistema en observación, descrito por las dos ecuaciones. Las variables estado inobservables están distribuidas condicional como

¹⁵ Los procesos de Markov son ampliamente utilizados en los modelos financieros para describir la evolución de los precios de los activos, ya que la propiedad de Markov es consistente con la denominada "forma débil" de eficiencia de mercado, que establece que no pueden obtenerse retornos extraordinarios mediante la utilización de información acerca de la evolución histórica del precio de un activo.

una χ^2 , donde los ajustes deben estar hechos por el Filtro de Kalman. Si se consideran observaciones para variables estado y las tasas de los bonos son muestreadas en intervalos de tiempo discretas, el modelo continuo de tiempo puede ser expresado como se muestra en la ecuación (4.1).

Ecuación de Medida

$$R_t = A + By_t \quad (4.1)$$

En esta ecuación y_t , vector estado, es no observable en el instante t y puede ser escrito de forma recursiva como se muestra en la ecuación (4.2).

Ecuación de Transición

$$y_t = a + \phi y_{t-1} + v_t \quad (4.2)$$

Esta ecuación explica la evolución de las variables no observables del sistema.

Donde:

y_t , v_t y a son vectores $K \times 1$.

R_t y A son vectores $M \times 1$.

R_t es un vector que contiene las variables observadas, tasas compuestas continuas de varios bonos descontables, $R_t(s_i)$, $i = 1, \dots, M$.

ϕ es una matriz diagonal de transición del vector estado en $t-1$, que relaciona los estados de la variable no observable y determina los vectores de estado siguientes.

B es una matriz $M \times K$. Relaciona linealmente a las variables no observadas y observadas.

y_t representa el vector estado en t , contiene las variables estado inobservables. Debe recoger la información más relevante del sistema en cada momento del tiempo, tratando de considerar el menor número de variables.

v_t , el término de error, se asume normalmente distribuido.

A, B, a y ϕ son funciones de parámetros fijos en el proceso estocástico para las variables estado. Los elementos individuales de y_t y R_t son los siguientes que se muestran en las ecuaciones (4.3) y (4.4).

$$y_{jt} = \theta_j \left(1 - e^{-\kappa_j \Delta t}\right) + e^{-\kappa_j \Delta t} y_{j,t-1} + v_{jt} \quad , \quad j = 1, \dots, K \quad (4.3)$$

$$R_t(s_i) = - \sum_{k=1}^K \frac{\ln A_k(t, s_i)}{s_i - t} + \sum_{k=1}^K \frac{B_k(t, s_i)}{s_i - t} y_{kt} \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad (4.4)$$

Donde Δt es el tamaño del intervalo de la muestra discreta. Las ecuaciones para las variables estado siguen directamente una distribución χ^2 . La expectativa por y_{jt} condicionado a la información en $t-1$ está dada por la ecuación (4.5).

$$\theta_j \left(1 - e^{-\kappa_j \Delta t}\right) + e^{-\kappa_j \Delta t} y_{j,t-1} \quad (4.5)$$

El término de error v_{jt} representa el cambio inesperado en y_{jt} y tiene un valor esperado igual a 0 y una varianza condicional igual a la ecuación (4.6).

$$\sigma_j^2 \left(\frac{1 - e^{-\kappa_j \Delta t}}{\kappa_j} \right) \left(\frac{1}{2} \theta_j \left(1 - e^{-\kappa_j \Delta t}\right) + e^{-\kappa_j \Delta t} y_{j,t-1} \right) \quad (4.6)$$

No hay correlación serial en v_{jt} , pero hay una dependencia serial en la varianza.

El modelo descrito hasta este punto es una representación exacta de tiempo discreto del modelo CIR. Este modelo puede ser expresado en forma de estado espacio agregando términos de error a las ecuaciones de tasas de bonos observables, observándose en las ecuaciones (4.7) y (4.8).

$$y_t = a + \Phi y_{t-1} + v_t \quad (4.7)$$

$$R_t = A + B y_t + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

Donde $\varepsilon_t' = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Mt})$. Cada término de error es una medida de error, o término de ruido; esto se introduce para permitir pequeños errores e imperfecciones en las tasas de bonos observadas. Las tasas de los bonos son típicamente calculadas como el promedio de los bid y los ask (precio de oferta y demanda), y en muchas muestras, la tasa de descuento de largo plazo debe ser tomada de varios bonos cupón. Esta estructura simple para la medida de error es impuesta, por lo que la correlación serial y la correlación transversal en las tasas de los bonos son atribuidas a la variación de las variables estado inobservables. Con estos supuestos, la matriz de covarianza para los términos de error de las ecuaciones recién descritas puede ser escrita como sigue en la ecuación (4.9):

$$E_{t-1} \begin{pmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q_t & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

Donde Q_t es una matriz diagonal con las varianzas condicionales de las variables estado en la diagonal, y U es una matriz diagonal con las varianzas de la medida de error en la diagonal.

La representación en el espacio de estados posee una serie de ventajas, entre ellas tenemos: permite un completo control sobre la dinámica del modelo y no lleva a una pérdida de generalidad dado que las variables pueden ser definidas con rezagos o

con adelantos; se realiza una separación de las fuentes de errores y por ello permite que la parte estocástica del modelo tenga diferentes efectos; no es necesario utilizar proxies de las variables estimadas; es posible extraer series de tiempo de las variables no observadas; es posible estimar todos los parámetros del modelo directamente y no sólo funciones de ellos; los errores de medición están incluidos explícitamente y siendo innecesario restringirlos.

Una vez que el modelo ha sido formulado en el espacio de los estados, el filtro de Kalman proporciona el medio para estimar el estado inobservable a partir de alguna magnitud observable relacionada con éste, de forma que la estimación se actualice cada vez que se dispone de nueva información. Se pueden emplear varios algoritmos de alisado, que constituyen extensiones de la formulación original diseñada por Kalman para obtener una estimación óptima del estado en cualquier punto de la muestra.

V. ESPECIFICACIONES PARA ESTIMAR EL MODELO DINÁMICO

La estimación de procesos estocásticos de tasas de interés, tradicionalmente ha seguido dos caminos. El primero, es el uso de información de corte transversal, como en los modelos estáticos para lo cual se intenta ajustar las ecuaciones de valorización de bonos entregadas por el modelo a los precios observados; esta forma de estimación típicamente calibra parámetros que no son constantes en el tiempo. El segundo camino, consiste en utilizar un enfoque de series de tiempo para la estimación, donde se ajustan las ecuaciones de modelos dinámicos, típicamente de un factor, a la serie de valores de una variable proxy observable; este enfoque ignora la información contenida en las observaciones de distintos plazos y no es posible obtener a partir de ella una estimación para los procesos ajustados por riesgo.

El filtro de Kalman permite combinar ambos enfoques, corte transversal y series de tiempo, y posee una formulación analítica simple y una metodología sencilla de adaptar a casos que se desvían de la normalidad, sin que por ello sus resultados pierdan validez. Además como señala Schwartz (1997), es especialmente útil cuando se quiere estimar las variables no observadas en el sistema.

5.1 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman¹⁶ es un conjunto de ecuaciones matemáticas que proveen una solución eficiente del método de mínimos cuadrados. Esta solución permite calcular un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un proceso en cada momento del tiempo en base a la información disponible en el momento $t-1$, y, actualizar con la información adicional disponible en el momento t , dichas estimaciones

¹⁶ Kalman (1960)

(mínimos cuadrados recursivos). En otras palabras, Kalman es una solución recursiva para el problema de filtrado lineal de datos discretos. Permite determinar las variables no observables de un sistema, a partir de la información que entregan otras variables, que sí son posibles de observar, y que a su vez dependen linealmente de las primeras.

Este filtro es el principal algoritmo para estimar sistemas dinámicos específicos en la forma de estado-espacio. La representación estado-espacio es esencialmente una notación conveniente para la estimación de los modelos estocásticos donde se asumen errores en la medición del sistema, lo que permite abordar el manejo de un amplio rango de modelos de series de tiempo. Por esta condición, es posible utilizarlo como un proceso que se adapta en el tiempo. La manera de operar es por medio de un mecanismo de predicción y corrección, es decir, pronostica el nuevo estado a partir de la estimación previa incorporando un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este error de predicción se minimiza estadísticamente. Pues, a medida que se incorpora información va modificando la ponderación que entrega a las nuevas observaciones y a las estimaciones históricas que realiza. Los parámetros que se calibran son optimizados hasta encontrar el que mejor represente el fenómeno observado.

Dentro de la notación estado-espacio, la derivación del filtro de Kalman descansa en el supuesto de normalidad del vector de estado inicial y de las perturbaciones del sistema. De tal forma que es posible calcular la función de verosimilitud sobre el error de predicción. Se conoce como estado de un sistema dinámico al vector de menor tamaño que logre resumir la historia del sistema. El conocimiento del sistema supone, en teoría, poder predecir futuros resultados y dinámicas en ausencia de ruido.

El procedimiento de estimación completo es el siguiente: el modelo es formulado en estado-espacio y para un conjunto inicial de parámetros dados, los errores de predicción del modelo son generados por el filtro. Estos son utilizados para evaluar recursivamente la función de verosimilitud hasta maximizarla.

Entre las ventajas del filtro de Kalman tenemos: al igual que los demás métodos recursivos, utiliza toda la historia de la serie pero con la ventaja de que intenta estimar una trayectoria estocástica de los coeficientes en lugar de una determinística, con lo cual soluciona el posible sesgo de la estimación ante la presencia de cambios estructurales. El filtro además, está en línea con el teorema de Gauss-Markov y esto le da al filtro de Kalman su enorme poder para resolver un amplio rango de problemas en inferencia estadística. Por último, se distingue por su habilidad para predecir el estado de un modelo en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida; la modelación dinámica de un sistema es una de las características claves que distingue este método.

Por otro lado, el filtro de Kalman también posee desventajas, tales como: requiere condiciones iniciales de la media y varianza del vector estado para iniciar el algoritmo recursivo; en cuanto a la forma de determinar estas condiciones iniciales no existe consenso. Además el desarrollo de este filtro supone un conocimiento amplio de teoría de probabilidades, lo cual puede originar una limitante para su estudio y aplicación. Por último, cuando se desarrolla para modelos autorregresivos, los resultados están condicionados a la información pasada de la variable en cuestión; en este sentido el pronóstico con series de tiempo representa la fuerza o inercia que actualmente tiene el sistema y son eficientes únicamente en el corto plazo.

5.1.1 Filtro de Kalman aplicado al modelo CIR

Los parámetros determinados en el Modelo Estado Espacio son estimados por el método de Máxima Verosimilitud usando el filtro de Kalman para calcular estimaciones de las variables estado no observable.

Cuando las innovaciones de las variables estado están normalmente distribuidas, el filtro de Kalman es capaz de obtener estimadores consistentes, eficientes y con una distribución asintótica normal. Además, es posible obtener la función de verosimilitud del conjunto de parámetros del modelo. Aunque la distribución

de las innovaciones no sea Gaussiana, el filtro de Kalman produce el mejor estimador lineal.

En el modelo CIR, las innovaciones para las variables estado no están normalmente distribuidas. Si las innovaciones en el modelo estado espacio no están normalmente distribuidas el filtro de Kalman estándar lineal es más condicionalmente imparcial como un estimador de las variables estado inobservables. Los parámetros fijos en el modelo estado espacio están típicamente estimados usando el filtro de Kalman para calcular innovaciones en las variables estado inobservables y maximizar la función de verosimilitud que impone distribuciones normales para todas las innovaciones. Hay modelos en que los supuestos de normalidad pueden ser relajados y el estimador de máxima verosimilitud sigue siendo consistente. Esos estimadores son conocidos como estimadores de cuasi máxima verosimilitud. En esta aplicación para el modelo CIR, la estimación de cuasi máxima verosimilitud no es consistente por la existencia de tendencia en el filtro de Kalman. Para desarrollar un estimador de cuasi máxima verosimilitud, hay que desarrollar un estimador imparcial para las variables estado inobservables.

Primero revisaremos el modelo lineal, donde las innovaciones para las tasas observadas de los bonos están definidas en la ecuación (5.1)

$$u_t = R_t - (A + B(a + \Phi \hat{y}_{t-1})) \quad (5.1)$$

Donde:

\hat{y}_{t-1} es un estimador de y_{t-1} basado sobre u_{t-1} y \hat{y}_{t-2} .

El carácter recursivo del filtro de Kalman exige obtener una distribución del estado inicial y su varianza para iniciar dicho proceso recursivo. La situación ideal es cuando la distribución y tanto el parámetro inicial como su varianza inicial, son conocidos, pero en general esto no se da; entonces lo que haremos es que para el estimador inicial \hat{y}_0 , se puede utilizar la media incondicional para las variables estado.

Otras posibilidades hubiesen sido derivar la distribución inicial a partir de información externa al modelo, estableciendo una determinada distribución a priori, o bien, considerando la estacionariedad del estado.

Las innovaciones son útiles porque cuando la nueva información, R_t , aparece; es posible actualizar las variables estado y mejorar su estimación a posteriori; esta característica adaptativa es la que permite corregir la estimación cuando se recibe nueva información.

Las innovaciones para las variables estado, dada la estimación previa, están definidas en la ecuación (5.2).

$$\eta_t = y_t - a - \Phi \hat{y}_{t-1} \quad (5.2)$$

El filtro de Kalman es un modelo lineal para calcular estimadores de las variables estado, lo cual se muestra en la ecuación (5.3)

$$\hat{y}_t = a + \Phi \hat{y}_{t-1} + D_t u_t \quad (5.3)$$

Donde:

D_t es una matriz de coeficientes de $M \times K$ que minimizan el error cuadrático medio entre y_t y \hat{y}_t .

Si las innovaciones están normalmente distribuidas, este estimador es también la esperanza condicional sobre los valores corrientes y pasados de las variables observables. En la estimación de las variables estado inobservables, el parámetro fijo de este modelo es asumido como conocido. El estimador se forma resolviendo la minimización dada en la ecuación (5.4).

$$\min_{\hat{y}_t} E(y_t - \hat{y}_t)'(y_t - \hat{y}_t) = \sum_{j=1}^K E(y_{jt} - \hat{y}_{jt})^2 \quad (5.4)$$

Tomando en cuenta que $y_t - \hat{y}_t = \eta_t - D_t u_t$, la minimización puede ser replanteada como se muestra en la ecuación (5.5)

$$\min_{D_t} E(\eta_t - D_t u_t)' (\eta_t - D_t u_t) \quad (5.5)$$

Aquí, la esperanza es condicional a las observaciones disponibles al momento t ($R_t, \hat{y}_{t-1}, R_{t-1}, \dots$). El filtro de Kalman usa una proyección de mínimos cuadrados de η_t sobre u_t para estimar los coeficientes en D_t , que determinan las innovaciones actuales para cada variable estado.

El modelo debe considerar una restricción extra sobre las variables estado, $y_t \geq 0$. Si el filtro de Kalman produce un estimador negativo para y_{jt} , podría generar un mejor estimador, en el sentido de minimizar el error cuadrático medio, ajustando \hat{y}_{jt} igual a 0. Uno puede adherir esta no negatividad contrayendo la minimización del error cuadrático medio y utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker; esto se realiza minimizando la ecuación (5.5) sujeto a la restricción que se muestra en la ecuación (5.6).

$$\text{s.a } \hat{y}_t = a + \Phi \hat{y}_{t-1} + D_t u_t \geq 0. \quad (5.6)$$

Si un elemento de \hat{y}_t es negativo, iguala este estimador a 0 y baja a la correspondiente fila del sistema de ecuaciones.

El resultado neto es el estimador lineal del filtro de Kalman estándar, con alguna estimación negativa reemplazada con ceros. Nos referimos a este filtro de Kalman como un cuasi filtro de Kalman lineal, pero éste es no lineal.

El cuasi filtro de Kalman lineal minimiza el error cuadrático medio sujeto a la restricción que las estimaciones podrían ser no negativas. Incluso aunque conservemos la estructura lineal del filtro de Kalman lineal, los resultados filtrados son no lineales en dos aspectos: la restricción de no negatividad y la dependencia de los coeficientes en D_t sobre \hat{y}_{t-1} . Porque el estimador no es estrictamente lineal, este no es el mejor estimador lineal que minimiza el error cuadrático medio, y es posible que haya otro estimador no lineal que produce un menor error cuadrático medio. Este estimador, como el filtro de Kalman estándar, está calculado invirtiendo una matriz y realizando varias multiplicaciones matriciales, esto no requiere una solución iterativa para una representación de ecuaciones no lineales.

VI. CONCLUSIÓN

En este seminario hemos descrito las características generales del mercado de Renta Fija en Chile con el propósito de esclarecer la importancia de la Curva de Rendimientos o *Yield Curve*. Para ello, nos hemos enfocado en un modelo dinámico desarrollado por Cox-Ingersoll y Ross, a través de estimaciones por modelos estado-espacio y Filtro de Kalman.

En Chile, el mercado de Renta Fija aún no es muy profundo, por lo que los vacíos ocasionados por la no transacción de los papeles libres de riesgo emitidos por el Banco Central generan deficiencias para la estimación de la correcta y real Curva de Rendimientos. La motivación de los agentes para desarrollar dicha curva, es dada principalmente por la utilidad en la valoración de activos, con ello su mejor actuación en el mercado.

La importancia del modelo CIR, radica en la ventaja que proporciona su estructura dinámica, en la inclusión de no negatividad de la tasa y en el supuesto que la volatilidad no es constante; por ello es más realista que otros modelamientos. Para su aplicación, es necesario entender el modelo estado-espacio, el cual consiste básicamente en la determinación de las variables inobservables a través de un modelo recursivo AR(1), expresado de tal manera que la interrelación de las variables es tanto transversal como de panel; y es ajustado por el Filtro de Kalman. El Filtro proporciona el medio para estimar el estado inobservable a partir de alguna magnitud observable relacionada con éste, de forma que la estimación se actualice cada vez que se dispone de nueva información. Así por medio de algoritmos se puede obtener una estimación óptima del estado en cualquier punto de la muestra.

La aplicación de datos para el caso chileno se presenta como futura extensión al seminario y próximas observaciones al método.

VII. BIBLIOGRAFÍA

Banco Central de Chile, www.bcentral.cl

Bolsa de Comercio de Santiago, Características del Mercado Bursátil en Chile (2003).

Bolsa de Comercio de Santiago. La Bolsa de Comercio de Santiago y el Mercado Bursátil (1999).

Bolsa de Comercio de Santiago. La Bolsa de Comercio de Santiago y los instrumentos del Mercado (1999).

Chen, Ren-Row y Scott, Louis (2002), Multi-Factor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure: Estimates and Tests From a Kalman Filter Model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*.

Depósito Central de Valores, www.dcv.cl.

Fernández M, Viviana (1999). Estructura de Tasas de Interés en Chile: La Vía No-Paramétrica. Cuadernos de Economía.

Frache, Serafín y Katz, Gabriel (Nota Docente N°13), Aplicación del Cálculo Estocástico al Análisis de la Estructura Temporal de las Tasas de Interés, Universidad de la República, Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Economía.

García Riesco, Javier Ignacio (2003), Estructuras de tasas de interés Nominales y Reales en Chile: Estimación de Modelos Estáticos y de Modelos Dinámicos Mediante Filtro de Kalman Aplicado sobre Paneles de Datos Incompletos. Universidad Católica, Escuela de Ingeniería.

Gómez Del Valle, María Lourdes (2004), Nuevos Planteamientos en Modelos Unifactoriales de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés. Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.

Kikut V, Ana Cecilia (2003), Uso del Filtro de Kalman para Estimar la Tendencia de una Serie. División Económica, Departamento de Investigaciones Económicas Informe Informe Técnico DIE-87-2003-IT.

Lazen, Vicente (2005), Mercado Secundario de Deuda en Chile, Superintendencia de Valores y Seguros.

Ljung, Lennart. System Identification toolbox, for use with MatLab.

Martín Rodríguez, Gloria (2002-05), Representación en el espacio de los estados y filtro de Kalman en el contexto de las series temporales económicas. Universidad de La Laguna. Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría.

Molinare Navarrete, Alfonso (2002), Estructura y Dinámica de Tasas de Interés Reales en Chile: Información Contendida en los Pagarés Reajustables con Pagos en Cupones del Banco Central.

Parisi Fernández, Franco (1998), Tasas de Interés Nominal de Corto Plazo en Chile: Una Comparación Empírica de sus Modelos. Cuadernos de Economía, Año 35, n°105, pp.161-182.

Solera Ramírez, Álvaro (2003), El Filtro de Kalman. Banco Central de Costa Rica, División económica, Departamento de Investigaciones Económicas, nota técnica.

Superintendencia de Valores y Seguros, www.svs.cl.

Venegas Martínez, Francisco y González- Aréchiga, Bernardo, Cobertura de Tasas de Interés con Futuros del mercado Mexicano de Derivados: Un Modelo Estocástico de Duración y Convexidad. Oxford University y Grupo Financiero Bancomer.

Welch, Greg y Bishop, Gary (2006), An Introduction to the Kalman Filter. Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC 27599-3175.