UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

UTILIZACIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO VARIACIONAL EN PROBLEMAS DE DISEÑO DE MECANISMOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

NICOLÁS IVÁN HERNÁNDEZ SANTIBÁÑEZ

PROFESOR GUÍA:
NICOLÁS FIGUEROA GONZÁLEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI
JUAN ESCOBAR CASTRO
RENÉ ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: NICOLÁS HERNÁNDEZ SANTIBÁÑEZ
FECHA: 07 / 05 / 2012
PROF. GUÍA: NICOLÁS FIGUEROA G.

UTILIZACIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO VARIACIONAL EN PROBLEMAS DE DISEÑO DE MECANISMOS

El objetivo del presente trabajo es desarrollar técnicas de cálculo variacional que permitan resolver problemas de diseño de mecanismos. En particular, se aborda con este enfoque el problema de diseño óptimo de subastas, para el caso de uno y dos jugadores. Usando estas técnicas se caracterizan las soluciones del problema resuelto por Myerson [5], agregándose además el desarrollo de un algoritmo que no requiere utilizar de forma explícita la técnica de "ironing".

En el caso de un jugador se caracteriza completamente la solución del problema y se demuestra que esta caracterización es equivalente a la encontrada por Myerson. En el caso de dos jugadores, asumiendo que las valoraciones virtuales de ambos jugadores tienen una cantidad finita de cambios de crecimiento y son constantes en una cantidad finita de intervalos maximales, se desarrolla un algoritmo que permite encontrar la solución. El problema se caracteriza como el de encontrar la frontera entre los conjuntos de asignación propios de cada jugador (lo que es posible debido a la existencia de una solución bang-bang al problema) y se encuentran las condiciones necesarias que debe satisfacer esta frontera en el óptimo. Además, se muestra que la frontera que induce la solución de Myerson satisface las condiciones necesarias encontradas.

Las condiciones de optimalidad indican que los puntos que pertenecen a una zona estrictamente creciente de la frontera son tales que las valoraciones virtuales de ambos jugadores son las mismas. Por otro lado, las zonas donde la frontera es un segmento horizontal o vertical corresponden a intervalos de tipos distintos que son tratados de forma idéntica por el diseñador. Estos intervalos pueden ser precisamente caracterizados de forma variacional y corresponden a intervalos donde la integral de la valoración virtual es igual al valor que tendría la integral si esta función fuera constante.

Este trabajo deja abierta la caracterización para el caso general de N jugadores. Por otro lado, la caracterización variacional se basa en la existencia de una solución del tipo bang-bang. Queda abierta la pregunta de cómo demostrar que esto es cierto sin conjeturar un problema relajado cuya solución termine siendo la solución del problema original (como en Myerson [5]).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Jocelyn por ser mi acompañante en esta vida y entregarme día a día, mediante su amor, la fuerza necesaria para enfrentar los obstáculos que constantemente aparecen en nuestro camino. De la misma forma a Sofía, quien sin ser capaz de darse cuenta, genera alegría en mí y ganas de ir logrando cosas que supongan un mejor futuro para la familia que estamos formando.

Agradezco a mi madre Lucy por su ayuda incondicional y el constante amor que se encarga de hacerme sentir siempre. Agradezco a mi padre Juan Carlos por guiarme en la vida y enseñarme que podemos conseguir todo lo que nos propongamos.

Agradezco a mis amigos más cercanos por estar siempre conmigo, pasándolo bien y en situaciones en las que no es posible, dándome su apoyo. Por orden de antigüedad a Wilson, Pancho, Orly, Marce, Emilio, Pipe y Pasti.

También agradezco a mi familia postiza: Jaime, Sara, Jimmy, Jas y Kokín; por haberme aceptado en su hogar, haber cuidado a las personas más importantes para mí cuando nadie más podía hacerlo, y ayudarnos ahora que hemos comenzado nuestra propia aventura.

Por último, en lo referente a este trabajo, quiero agradecer a Nicolás Figueroa por ser mi profesor guía y por motivarme constantemente con su entusiasmo, actitud y simpatía. También a los profesores Roberto Cominetti, Jaime Escobar y Alejandro Jofré, por acceder a formar parte de la comisión evaluadora.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Planteamiento del problema **4**
2.1. Definiciones 4
2.2. Un resultado importante 6
2.3. Objetivos 7

3. Solución de Myerson **8**

4. Caso de un comprador **11**
4.1. Solución 11
4.2. Comparación con solución de Myerson 14

5. Caso de dos compradores: Condiciones necesarias **17**
5.1. Simplificación 17
5.2. Condiciones necesarias 26
5.3. Comparación con solución de Myerson 47

6. Caso de dos compradores: Algoritmo **49**
6.1. Algoritmo 49
6.2. Justificación del Algoritmo 64
6.2.1. Justificación de las etapas 1-4 65
6.2.2. Justificación etapa 5 68
6.2.3. Justificación etapa 6 76
6.2.4. Justificación de que etapa 6 itera correctamente 79
6.2.5. Justificaciones restantes etapa 5 100
6.3. El algoritmo encuentra una solución 103
6.4. Ejemplos 105

7. Conclusiones **121**

Bibliografía **123**

Capítulo 1

Introducción

Las subastas se inventaron hace mucho tiempo, según Krishna [2] existen registros de que ya se usaban en Babilonia por el año 500 A.C. y han perdurado hasta el día de hoy como un medio para vender objetos. Sin embargo, no fue hasta la década de 1960 que comenzó a desarrollarse la teoría económica de las subastas, los orígenes de ésta se encuentran en el trabajo de Vickrey [7], quien las analizó como juegos de información incompleta.

En la actualidad casi cualquier cosa puede ser subastada. Obras de arte y antigüedades son probablemente lo primero que se nos viene a la cabeza, pero muchos objetos y también bienes intangibles como acciones, derechos de propiedad, licencias, etc. pueden ser, y son, subastados.

Uno de los recientes fenómenos a nivel mundial son las subastas de espectros (3G), en las que compañías de telecomunicaciones compran al gobierno licencias que les permitan transmitir señales en una determinada banda del espectro electromagnético. Se considera que la aplicación práctica de la teoría de subastas comienza en los años 1993-1994, precisamente con el diseño de las subastas de espectro de Estados Unidos. La necesidad de asignar una gran cantidad de licencias a compañías de teléfonos celulares había sobrepasado el aparato regulador, basado en ese entonces en la comparación de cada una de las propuestas recibidas, y el país había llegado a la situación en que las licencias simplemente se sorteaban en una lotería. Se necesitaba cambiar la forma de asignar las licencias y se abría la pregunta de cómo diseñar el mercado de subastas de espectro. Desde esa fecha, expertos en teoría de subastas han diseñado subastas de espectro para países en todos los continentes (para más detalles ver Milgrom [4]).

Diseñar una subasta consiste en decidir las reglas bajo las cuales ésta operará. Probablemente el tipo de subasta más conocida sea la inglesa, en la que el vendedor anuncia un precio inicial bajo para el objeto, llamado precio de reserva, y a continuación lo va incrementando continuamente en pequeñas cantidades. Los compradores expresan su interés en comprar el objeto levantando su mano y cuando se enfrentan a un precio que no están dispuestos a pagar, la bajan. La subasta termina cuando se llega a un precio para el que hay sólo un interesado, quien compra el objeto y el precio que paga es el anunciado en el momento en que se retiró el último competidor.

Otro tipo de subasta es la holandesa, en la que el subastador comienza anunciando un precio alto para el objeto y luego lo disminuye continuamente hasta que alguien anuncie su interés. El objeto se vende entonces al interesado y al precio establecido. También existe la subasta a primer precio cerrada, en la cual los compradores declaran un precio en sobres cerrados y el objeto lo compra la persona que declara el mayor valor, pagando el precio que declaró. Por último, en la subasta a segundo precio cerrada los compradores igualmente declaran un precio en sobres cerrados y el objeto lo compra la persona que declara el mayor valor, esta vez pagando el precio del segundo valor más alto declarado.

Cuando se desea subastar un bien, la elección de las reglas de la subasta puede afectar en gran medida su resultado. Un ejemplo de esto data de 1990 en Nueva Zelanda, cuando el gobierno realizó las primeras subastas de espectro donde se vendían licencias idénticas para señales de televisión. La decisión de los especialistas, para las cuatro primeras subastas, fue la de realizar simultáneamente una subasta a segundo precio cerrada para cada licencia, lo que tuvo resultados desastrosos. Con estas reglas ni siquiera se tenía claridad de la estrategia que cada comprador debía utilizar y ocurrió que las apuestas de los compradores se repartieron entre las licencias de forma tal que las diferencias entre el mayor y el segundo mayor valor declarado eran impredecibles.

En la primera subasta, una de las agencias compradoras apostó NZ$401.000 en seis de las licencias y consiguió sólo una a un precio de NZ$100.000, mientras que otra que apostó NZ$255.000 a una única licencia la compró en NZ$200.000. En otra subasta un comprador que declaró un precio de NZ$100.000 terminó pagando NZ$6 y otro que declaró NZ$7 millones pagó NZ$5.000. Las ganancias totales, que los asesores habían proyectado en NZ$250 millones terminaron siendo de NZ$36 millones. La reacción del gobierno fue cambiar las reglas a una subasta a primer precio cerrada, lo que en principio no garantizaba mejores resultados. Finalmente, este cambio no pudo revertir el problema mayor, cada comprador se veía forzado a elegir entre el riesgo de obtener muchas licencias y el riesgo de obtener pocas, por lo que se formaba un juego de adivinanzas en el que la suerte jugaba un rol importante (para más información ver Milgrom [4]).

El diseño de la subasta también debe adaptarse a las circunstancias en las que se realizará. Según Klemperer [1], en el año 2000 el Reino Unido realizó una subasta ascendente de licencias de espectro para teléfonos celulares de tercera generación, las cuales se vendieron a un precio sobre los 600 euros por persona. Igualmente, Suiza debía realizar la subasta de 4 de estas licencias y simplemente imitó la subasta ascendente efectuada en el Reino Unido. Inicialmente habían muchos interesados en participar en la subasta, pero las pequeñas compañías se dieron cuenta de que bajo estas reglas no podían competir contra rivales más fuertes y decidieron no participar. Cuando se llevó a cabo la subasta, habían sólo 4 compradores, de los cuales ninguno podía obtener más de una licencia, compitiendo por las 4 licencias. Naturalmente cada compañía obtuvo una licencia pagando el precio de reserva, que por lo demás era increíblemente bajo, un treintavo de lo conseguido en el Reino Unido y un cincuentavo de lo que los Suizos esperaban obtener.

Sabiendo que el diseño de la subasta es muy importante, un vendedor que desea subastar un objeto entre varios compradores puede preguntarse qué procedimiento le reportará un mayor ingreso o una mayor utilidad. Un estudio detallado del problema le permitiría diseñar la subasta de mejor manera. Sin embargo, el problema parece imposible de abordar pues existen demasiadas variantes y factores que controlar.

El artículo seminal de Myerson [5] muestra que, a partir del Principio de la Revelación, es posible escribir un problema matemático con suficiente estructura para tratar de resolverlo. En el presente trabajo se abordará el problema desde esa mirada, que pertenece a una de las ramas de la Teoría de Juegos llamada Diseño de Mecanismos, y se usarán adicionalmente técnicas de Cálculo Variacional en el desarrollo de ideas y búsqueda de resultados.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Definiciones

Consideremos el problema que enfrenta una persona, cuyo deseo es vender un objeto de la manera más conveniente, sin saber lo que los posibles compradores están dispuestos a pagar por ese objeto.

Para comenzar a definir el problema llamemos N el conjunto de todos los posibles n compradores del objeto, es decir:

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

Cada comprador $i \in N$ tiene una valoración t_i del objeto, que es lo máximo que está dispuesto a pagar por éste. Como ya mencionamos, el vendedor desconoce estos valores y su información sobre cada uno de los compradores $i \in N$ consiste en una densidad de probabilidad continua sobre un intervalo finito, es decir $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^+$ donde asumimos:

$$-\infty < a_i < b_i < \infty$$

$$f_i(s_i) > 0 \quad \forall s_i \in [a_i, b_i]$$

$$f_i(\cdot) \text{ continua}$$

Por lo tanto las funciones de distribución $F_i : [a_i, b_i] \to [0, 1]$ definidas por:

$$F_i(t_i) = \int_{a_i}^{t_i} f_i(s_i) ds_i$$

Nos dan la probabilidad (según el vendedor) de que la valoración del comprador i sea menor o igual a t_i. Definamos los siguientes conjuntos de valoraciones conjuntas:

$$T = \mathop{\times}_{i \in N} [a_i, b_i]$$
$$T_{-i} = \mathop{\times}_{j \neq i} [a_j, b_j] \quad \forall i \in N$$

Para un vector de valoraciones $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T$, supondremos que los jugadores son independientes y por lo tanto la densidad conjunta que percibe el vendedor será:

$$f(t) = \prod_{i \in N} f_i(t_i)$$

También supondremos que cada comprador percibe a los demás de la misma forma en que lo hace el vendedor, por lo tanto la densidad conjunta en T_{-i} para el vendedor y para el jugador i será:

$$f_{-i}(t_{-i}) = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} f_j(t_j)$$

Además, la valoración del vendedor por el objeto t_0, será conocida por todos los compradores.

El vendedor busca el mecanismo que le reporte la máxima utilidad esperada. Gracias al Principio de Revelación (ver Myerson [5]), basta considerar solamente mecanismos directos, es decir un par (p, x) con $p : T \to \mathbb{R}^n$, $x : T \to \mathbb{R}^n$ donde para cada $t = (t_1, \ldots, t_n) \in T$ vector de valoraciones reveladas por los compradores, $p_i(t)$ será la probabilidad de que el jugador i se quede con el objeto y $x_i(t)$ será el pago esperado del comprador i al vendedor.

Si la valoración del comprador i es t_i, pero éste miente y revela al vendedor que su valoración es s_i, su utilidad esperada será:

$$t_i \int_{T_{-i}} p_i(s_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i} - \int_{T_{-i}} x_i(s_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

Por lo tanto definimos U_i, la utilidad esperada al decir la verdad, como:

$$U_i(p, x, t_i) = t_i \int_{T_{-i}} p_i(t) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i} - \int_{T_{-i}} x_i(t) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

Un mecanismo (p, x) será compatible en incentivos si los jugadores tienen incentivos a decir la verdad, es decir si:

$$\forall i \in N \quad \forall t_i \in [a_i, b_i] \quad \forall s_i \in [a_i, b_i]$$

$$U_i(p, x, t_i) \geq t_i \int_{T_{-i}} p_i(s_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i} - \int_{T_{-i}} x_i(s_i, t_{-i}) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

Un mecanismo (p, x) será individualmente racional si los jugadores tienen incentivos a participar, es decir si:

$$U_i(p, x, t_i) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall t_i \in [a_i, b_i]$$

Finalmente un mecanismo (p, x) será factible si es compatible en incentivos, individualmente racional y además:

$$\sum_{i \in N} p_i(t) \leq 1 \ \wedge \ \ p_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall t \in T$$

Notemos que la utilidad esperada del vendedor para un mecanismo (p, x) es:

$$U_0(p, x) = \int_T \left(t_0(1 - \sum_{i \in N} p_i(t)) + \sum_{i \in N} x_i(t) \right) f(t) dt$$

Por último, diremos que un mecanismo (p, x) es óptimo si maximiza U_0 dentro de todos los mecanismos factibles.

2.2. Un resultado importante

Dado un mecanismo (p,x) definamos $\forall i \in N$ la cantidad $Q_i(p,t_i)$ como la probabilidad de que el comprador i se quede con el objeto, habiendo revelado una valoración t_i, es decir:

$$Q_i(p,t_i) = \int_{T_{-i}} p_i(t) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

A continuación enunciamos un Lema cuya demostración se encuentra en Myerson [5].

Lema 2.2.1. *Supongamos que $p : T \to \mathbb{R}^n$ maximiza:*

$$\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} - t_0 \right) p_i(t) f(t) dt$$

Sujeto a las restricciones.

$$Q_i(p,\cdot) \quad \textit{creciente} \quad \forall i \in N$$

$$\sum_{i \in N} p_i(t) \leq 1 \ \wedge \ \ p_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall t \in T$$

Y supongamos que:

$$x_i(t) = p_i(t) t_i - \int_{a_i}^{t_i} p_i(t_{-i}, s_i) ds_i \quad \forall i \in N \quad \forall t \in T$$

Entonces (p,x) es un mecanismo óptimo.

La importancia del Lema 2.2.1 es que nos dice que para encontrar el mecanismo óptimo (p,x) solamente debemos resolver el problema:

$$(P) \begin{cases} \text{máx} \quad \displaystyle\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(c_i(t_i) - t_0 \right) p_i(t) f(t) dt \\ \\ \text{s.a.} \quad Q_i(p,\cdot) \text{ creciente} \quad \forall i \in N \\ \qquad\quad p_i(t) \geq 0 \qquad \forall t \in T \quad \forall i \in N \\ \qquad\quad \displaystyle\sum_{i \in N} p_i(t) \leq 1 \qquad \forall t \in T \end{cases}$$

Donde hemos definido las siguientes funciones, a las que nos referiremos como las valoraciones virtuales de cada jugador.

$$c_i(t_i) = t_i - \frac{1 - F_i(t_i)}{f_i(t_i)} \quad \forall i \in N \ \ \forall t_i \in T_i$$

Diremos que (P) es *regular* si la función c_i es estrictamente creciente para todo i en N. En caso contrario, diremos que (P) es *no-regular*.

2.3. Objetivos

El problema (P) ya ha sido resuelto. Myerson [5] propuso una función factible para el problema, tanto en el caso regular como en el no-regular, y demostró que tal función era solución. En este problema, en particular en el caso no-regular, la función solución es bastante complicada y por lo tanto el procedimiento seguido por Myerson tiene el defecto de dejarnos con la duda acerca de cómo pudo Myerson conjeturar la solución. Por lo mismo, tampoco nos ilumina el camino para abordar poblemas similares al que resolvió, puesto que no sabemos como construir la solución al problema original y mucho menos a un problema distinto, por muy parecido que sea. Por estas razones se decidió realizar el presente trabajo, donde los objetivos principales son los siguientes:

(1) Caracterizar, mediante técnicas de cálculo variacional, las soluciones del problema.

(2) Generar un algoritmo que permita construir una de las soluciones encontradas.

(3) Estudiar la función solución de Myerson y compararla con la solución construida.

Tras estos objetivos se encuentra la idea de desarrollar técnicas que permitan enfrentar a futuro problemas similares al abordado, donde aún no se haya podido conjeturar una solución.

Capítulo 3

Solución de Myerson

Recordemos que, como $\forall i \in N$ la función de densidad f_i es continua y $f_i(\cdot) > 0$, se tiene que $F_i : [a_i, b_i] \to [0, 1]$ es continua y estrictamente creciente. Luego F_i es invertible y además ${F_i}^{-1} : [0, 1] \to [a_i, b_i]$ es continua y estrictamente creciente.

Sean $h_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ y $H_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$h_i(q) = {F_i}^{-1}(q) - \tfrac{1-q}{f_i({F_i}^{-1}(q))} = c_i({F_i}^{-1}(q))$$

$$H_i(q) = \int_0^q h_i(r)dr$$

Definamos ahora $G_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como la envoltura convexa de H_i, que al ser una función convexa es derivable c.t.p. Por lo tanto es posible definir $g_i(q) = {G_i}'(q)$ en los puntos donde existe la derivada y como el resultado es una función creciente en su dominio, es posible extender, continuamente a la derecha, la función g_i a todo el intervalo $[0, 1]$. Definamos por último las funciones $\bar{c}_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ como:

$$\bar{c}_i(t_i) = g_i(F_i(t_i))$$

Y notemos que en caso de que (P) sea regular se cumple que $\bar{c}_i = c_i \quad \forall i \in N$. Finalmente, para un vector de valoraciones $t \in T$ definimos:

$$M(t) = \{i \in N \mid t_0 \leq \bar{c}_i(t_i) = \max_{j \in N} \bar{c}_j(t_j)\}$$

Teorema 3.0.1. *Sea $\bar{p} : T \to \mathbb{R}^n$ definido por:*

$$\bar{p}_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{|M(t)|} & si \;\; i \in M(t) \\ 0 & si \;\; i \notin M(t) \end{cases}$$

Entonces $\bar{p}$ es solución de (P).

Demostración. Por definición de las funciones h_i y g_i se tiene que:

$$\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(c_i(t_i) - t_0\right) p_i(t) f(t) dt$$

$$= \int_T \sum_{i=1}^{n} \left(h_i(F_i(t_i)) - t_0\right) p_i(t) f(t) dt$$

$$= \int_T \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{c}_i(t_i) - t_0\right) p_i(t) f(t) dt + \int_T \sum_{i=1}^{n} \left[h_i(F_i(t_i)) - g_i(F_i(t_i))\right] p_i(t) f(t) dt$$

Pero, reordenando las integrales y usando integración por partes, se tiene que:

$$\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(\ h_i(F_i(t_i)) - g_i(F_i(t_i))\ \right) p_i(t) f(t) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left(\ h_i(F_i(t_i)) - g_i(F_i(t_i))\ \right) Q_i(p, t_i) f_i(t_i) dt_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\right] Q_i(p, t_i) f_i(t_i) \Big|_{t_i=a_i}^{t_i=b_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left[H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\right] dQ_i(p, t_i)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left[H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\right] dQ_i(p, t_i)$$

Esto último ya que como G_i es la envoltura convexa de H_i, se cumple que $H_i(0) = G_i(0)$ y $H_i(1) = G_i(1)$. Por lo tanto obtenemos que las soluciones de (P) maximizan la cantidad:

$$\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{c}_i(t_i) - t_0\right) p_i(t) f(t) dt - \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left(\ H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\ \right) dQ_i(p, t_i)$$

Ahora, notemos que para cualquier función p que sea (P)-factible, todas las integrales que se están restando son positivas, esto pues $H_i(\cdot) \geq G_i(\cdot)$ por definición de envoltura convexa y $Q_i(p, \cdot)$ es creciente $\forall i \in N$. Notando que $\bar{p}$ es tal que maximiza $\forall t \in T$ la cantidad:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{c}_i(t_i) - t_0\right) p_i(t) f(t)$$

Es claro que $\bar{p}$ maximiza el término:

$$\int_T \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{c}_i(t_i) - t_0\right) p_i(t) f(t) dt$$

Así que demostrando que:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left(\ H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\ \right) dQ_i(\bar{p}, t_i) = 0$$

Y que $\bar{p}$ es (P)-factible se tendrá que $\bar{p}$ es solución de (P). En efecto, primero notemos que $\forall i \in N$ la función $\bar{c}_i(\cdot)$ es creciente pues $F_i(\cdot)$ es creciente y $g_i(\cdot)$ también, por lo tanto $\bar{p}_i(\cdot)$ resulta creciente y $Q_i(\bar{p}, \cdot)$ también. Las condiciones:

$$\sum_{i \in N} \bar{p}_i(t) \leq 1 \ \wedge \ \ \bar{p}_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in N \quad \forall t \in T$$

Se cumplen claramente y por lo tanto $\bar{p}$ es (P)-factible. En segundo lugar, como G_i es la envoltura convexa de H_i, $\forall r \in [a_i, b_i]$ tal que $G_i(r) < H_i(r)$ necesariamente $g_i{}'(r) = G_i{}''(r) = 0$. Luego, si $H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i)) > 0$, se tiene que $g_i{}'(F_i(t_i)) = 0$ y como $\bar{c}_i(t_i) = g_i(F_i(t_i))$ se tiene que $\bar{c}_i(\cdot)$ es constante en una vecindad de t_i, por lo tanto $\bar{p}(\cdot)$ es constante y en consecuencia $Q_i(\bar{p}, \cdot)$ también es constante en esa vecindad. Así:

$$\int_{a_i}^{b_i} (\ H_i(F_i(t_i)) - G_i(F_i(t_i))\ )\, dQ_i(\bar{p}, t_i) = 0 \quad \forall i \in N$$

Y se cumple lo deseado.

$\square$

Capítulo 4

Caso de un comprador

4.1. Solución

Sin pérdida de generalidad supondremos que $t_0 = 0$. Por lo tanto el problema para el caso de un único comprador es encontrar la función de probabilidades p, solución de:

$$
(P_1) \begin{cases} v_1 = \text{máx} & \displaystyle\int_a^b c(t)p(t)f(t)dt \\ \\ \text{s.a.} & p \text{ creciente} \\ & 0 \leq p(t) \leq 1 \qquad \forall t \in [a,b] \end{cases}
$$

Sea p una función creciente y tal que $\forall x \in [a,b]$ $0 \leq p(x) \leq 1$. Notemos que $p \in L^1(a,b)$ pues:

$$
\int_a^b |p(x)|\, dx = \int_a^b p(x)dx \leq b - a
$$

Llamemos $\bar{p}$ a la extensión natural de p a todo $\mathbb{R}$, es decir:

$$
\bar{p}(x) = \begin{cases} p(x) & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}
$$

Consideremos la función $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$
\rho(x) = \begin{cases} \alpha e^{\frac{1}{|x|-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}
$$

Donde α es una constante tal que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1$. Consideremos también las funciones regularizantes $\rho_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$
\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)
$$

Es sabido que definiendo $p_\epsilon = \rho_\epsilon * \bar{p}$ se tiene que:

$$
\lim_{\epsilon \to 0} \|p_\epsilon - p\|_{L^1(a,b)} = 0
$$

Además:

$$p_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{p}(x-y)\rho_\epsilon(y)dy = \int_{x-b}^{x-a} p(x-y)\rho_\epsilon(y)dy$$

Y como $\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(y)dy = 1$ se tiene que $0 \leq p_\epsilon(x) \leq 1$ $\forall x \in [a,b]$.

Por último si $x, z \in [a, b-\epsilon]$ con $x > z$, notemos que $x - b \leq -\epsilon$, $z - b \leq -\epsilon$ y por lo tanto:

$$p_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^{x-a} p(x-y)\rho_\epsilon(y)dy \geq \int_{-\epsilon}^{z-a} p(x-y)\rho_\epsilon(y)dy \geq \int_{-\epsilon}^{z-a} p(z-y)\rho_\epsilon(y)dy = p_\epsilon(z)$$

Pues p y ρ_ϵ son positivas y p es creciente. Por lo tanto cada función ρ_ϵ es creciente en $[a, b-\epsilon]$.

Todos estos hechos nos sirven para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Consideremos el problema:*

$$(\bar{P}) \begin{cases} \overline{v} = \sup \quad \displaystyle\int_a^b c(t)p(t)f(t)dt \\ \\ \qquad s.a. \;\; p \text{ diferenciable} \\ \qquad\qquad p \text{ creciente} \\ \qquad\qquad 0 \leq p(t) \leq 1 \qquad \forall t \in [a,b] \end{cases}$$

Entonces se tiene que:

$$\overline{v} = v_1$$

Demostración. Notemos que toda función factible en $(\bar{P})$ es factible en (P_1) y por lo tanto $\overline{v} \leq v_1$. Para la desigualdad inversa mostraremos que para cualquier función factible en (P_1) existe una función factible en $(\bar{P})$ tal que los valores del funcional a maximizar evaluado en dichas funciones están tan cerca como se quiera. Sea $\bar{\delta} > 0$ y consideremos $\delta = \frac{\bar{\delta}}{3\hat{M}}$, donde $\hat{M} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)c(x)|$. También escojamos ϵ_0 tal que:

$$\|p_\epsilon - p\|_{L^1(a,b)} < \delta \quad \forall \epsilon < \epsilon_0$$

Notemos que $\forall \epsilon < min(\epsilon_0, \delta)$ la función p_ϵ es creciente en $[a, b-\epsilon]$ y por lo tanto es creciente en $[a, b-\delta]$. Definamos $\bar{p}_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ como:

$$\bar{p}_\epsilon(x) = \begin{cases} p_\epsilon(x) & \forall x \in [a, b-\delta] \\ g_\epsilon(x) & \forall x \in [b-\delta, b] \end{cases}$$

Donde g_ϵ es una función tal que $\bar{p}_\epsilon$ es creciente, diferenciable y se cumple que $0 \leq \bar{p}_\epsilon(x) \leq 1$ $\forall x \in [a,b]$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \|\bar{p}_\epsilon - p\|_{L^1(a,b)} &= \int_a^b |\bar{p}_\epsilon(x) - p(x)|\, dx \\ &= \int_a^{b-\delta} |p_\epsilon(x) - p(x)|\, dx + \int_{b-\delta}^b |\bar{p}_\epsilon(x) - p(x)|\, dx < \delta + 2\delta \\ &= 3\delta \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left|\int_a^b c(t)p(t)f(t)dt - \int_a^b c(t)\bar{p}_\epsilon(t)f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)c(t)|\,|p(t)-\bar{p}_\epsilon(t)|\,dt < 3\hat{M}\delta = \bar{\delta}$$

Observación: Notemos que $\forall d \in \mathbb{R}$ la función:

$$g_\epsilon(x) = \frac{p'_\epsilon(b-\delta)}{d}(1-e^{-d(x-b+\delta)}) + p_\epsilon(b-\delta)$$

Es tal que $\bar{p}_\epsilon$ resulta creciente y diferenciable. Además si $p_\epsilon(b-\delta) \neq 1$ y $p'_\epsilon(b-\delta) \neq 0$ tomando

$$d > \frac{p'_\epsilon(b-\delta)}{1-p_\epsilon(b-\delta)} > 0$$

Se asegura que $0 \leq \bar{p}_\epsilon(x) \leq 1\ \forall x \in [a,b]$. En el caso en que $p'_\epsilon(b-\delta) = 0$ la función constante $g_\epsilon(x) = p_\epsilon(b-\delta)$ cumple todo lo necesario y por último si $p_\epsilon(b-\delta) = 1$ se tiene que $p'_\epsilon(b-\delta) = 0$ pues p_ϵ es creciente y $0 \leq p_\epsilon(x) \leq 1\ \forall x \in [a,b]$. □

Proposición 4.1.2. *Sea*

$$M = \max_{t\in[a,b]} \int_t^b c(s)f(s)ds$$

Entonces se tiene que:

$$\overline{v} \leq M$$

Demostración. Sea p una función diferenciable, creciente y tal que $0 \leq p(t) \leq 1\ \ \forall t \in [a,b]$. Notemos que como c y f son continuas, la función $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$v(t) = -\int_t^b c(s)f(s)ds$$

Es diferenciable y

$$v'(t) = c(t)f(t)$$

Por lo tanto, haciendo integración por partes se obtiene que:

$$\int_a^b p(t)c(t)f(t)dt = \int_a^b p(t)v'(t)dt = v(t)p(t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b v(t)p'(t)dt$$

Notando que $v(b) = 0$ y reemplazando los demás valores se tiene:

$$\int_a^b p(t)c(t)f(t)dt = p(a)\int_a^b c(s)f(s)ds + \int_a^b \left(\int_t^b c(s)f(s)ds\right)p'(t)dt$$

Por último notando que $p(a) \geq 0$ y $\forall t \in [a,b]$ se cumplen:

$$\int_t^b c(s)f(s)ds \leq M, \quad p'(t) \geq 0$$

Se obtiene:

$$\int_a^b p(t)c(t)f(t)dt \leq M\left(p(a) + \int_a^b p'(t)dt\right) = M\ p(b) \leq M$$

□

Proposición 4.1.3. *La cota anterior se alcanza, es decir:*

$$v_1 = \overline{v} = M$$

Demostración. De las proposiciones anteriores sabemos que $v_1 = \overline{v} \leq M$. Además, como c y f son continuas, es posible escoger $t^* \in \underset{t\in[a,b]}{\operatorname{argmax}} \int_t^b c(s)f(s)ds$. Luego, definiendo:

$$p^*(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [a, t^*) \\ 1 & \forall x \in [t^*, b] \end{cases}$$

Se tiene que p^* es factible para (P_1) y es una solución pues:

$$\int_a^b c(t)p^*(t)f(t)dt = \int_{t^*}^b c(t)f(t)dt = M$$

□

4.2. Comparación con solución de Myerson

Recordemos que dada una función convexa G, se tiene que G es derivable c.t.p. y la función G' resulta creciente en su dominio. Por lo tanto es posible definir G' en todo $[a, b]$ de modo que resulte ser continua a la derecha (y creciente). Por último se tiene que:

$$G(x) - G(y) = \int_x^y G'(z)dz \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

Proposición 4.2.1. *Sea* $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *convexa, entonces* t *es mínimo local (global) de* G *sí y sólo sí:*

$$G'(r) \leq 0 \ \forall r \in [0, t) \ \wedge \ G'(r) \geq 0 \ \forall r \in (t, 1]$$

Demostración. Para la primera implicancia. Sea t mínimo global de G, se tiene

$$\forall r \in [0, t) \quad 0 \geq G(t) - G(r) = \int_r^t G'(x)dx \geq G'(r)(t - r)$$

$$\forall r \in (t, 1] \quad 0 \leq G(r) - G(t) = \int_t^r G'(x)dx \leq G'(r)(r - t)$$

Y se concluye que:

$$\forall r \in [0, t) \ \ G'(r) \leq 0$$
$$\forall r \in (t, 1] \ \ G'(r) \geq 0$$

Para la recíproca, supongamos que $G'(r) \leq 0 \ \forall r \in [0, t)$, entonces:

$$\forall r \in [0, t) \quad G(t) - G(r) = \int_r^t G'(x)dx \leq 0$$

Si $G'(r) \geq 0 \ \forall r \in (t, 1]$, entonces:

$$\forall r \in (t, 1] \quad G(r) - G(t) = \int_t^r G'(x)dx \geq 0$$

□

Proposición 4.2.2. *Sea* $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua y sea* $\alpha = \inf\{t : t \in \operatorname{argmin} co(H)\}$. *Entonces* $\alpha \in \operatorname{argmin} H$.

Demostración. Por la continuidad de $co(H)$ es directo que:

$$\alpha \in \operatorname{argmin} co(H)$$

Como además $\min H = \min co(H)$ se tiene que:

$$co(H)(\alpha) = \min co(H) = \min H$$

Notando que $\operatorname{argmin} H \subseteq \operatorname{argmin} co(H)$ se tiene que:

$$x < \alpha \Rightarrow \ x \notin \operatorname{argmin} H$$

Supongamos ahora por contradicción que $H(\alpha) > \min H$. Debido a lo anterior se tiene que:

$$\alpha_0 := \min_{x\in[0,\alpha]} H(x) > \min H$$

Notemos que $\forall x \leq \alpha \leq y$ y $\beta \in [0,1]$ tal que $\alpha = \beta x + (1-\beta)y$, se tiene que:

$$\beta H(x) + (1-\beta)H(y) \geq \beta\alpha_0 + (1-\beta)\min H > \min H$$

Luego, recordando que:

$$co(H)(\alpha) = \inf_{\substack{x\leq\alpha\leq y \\ \beta\in[0,1] \\ \beta x+(1-\beta)y=\alpha}} \beta H(x) + (1-\beta)H(y) = \min H$$

Necesariamente existe una sucesión minimizante (x_n, y_n, β_n), tal que:

$$\alpha = \beta_n x_n + (1-\beta_n)y_n$$

$$x_n \leq \alpha \leq y_n$$

Y:

$$\beta_n H(x_n) + (1-\beta_n)H(y_n) \to \min H$$

Como:

$$\beta_n H(x_n) + (1-\beta_n)H(y_n) > \beta_n\alpha_0 + (1-\beta_n)\min H > \min H$$

Se tiene que $\beta_n \to 0$ y por lo tanto $H(y_n) \to \min H$, $y_n \to \alpha$. Pero esto contradice el supuesto debido a la continuidad de H y por lo tanto se concluye que:

$$H(\alpha) = \min H$$

□

Con la ayuda de estas proposiciones mostraremos que la solución de Myerson cumple con nuestra sencilla caracterización de las soluciones de (P_1). Primero recordemos que $\bar{c} : [a,b] \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$\bar{c}(x) = g(F(x)) = G'(F(x))$$

La función $\bar{c}$ resulta ser creciente y la solución de Myerson viene dada por:

$$p^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{c}(x) < 0 \\ 1 & \text{si } \bar{c}(x) \geq 0 \end{cases}$$

De acuerdo a lo anterior, definimos:

$$t^* := \text{ínf}\{t \in [a,b] : \bar{c}(r) \leq 0 \ \forall r \in [a,t) \ \wedge \ \bar{c}(r) \geq 0 \ \forall r \in (t,b]\}$$

Como $\bar{c}$ es continua a la derecha, $\bar{c}(t^*) \geq 0$ y la solución vendrá dada por:

$$p^*(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [a,t^*) \\ 1 & \forall x \in [t^*,b] \end{cases}$$

Proposición 4.2.3. $t^* \in \underset{t\in[a,b]}{\text{argmax}} \int_t^b c(s)f(s)ds$

Demostración. Notemos que $t \in (a,b)$ es tal que:

$$\begin{aligned} & \bar{c}(r) \leq 0 \ \forall r \in [a,t) \ \wedge \ \bar{c}(r) \geq 0 \ \forall r \in (t,b] \\ \iff \quad & G'(F(r)) \leq 0 \ \forall r \in [a,t) \ \wedge \ G'(F(r)) \geq 0 \ \forall r \in (t,b] \\ \iff \quad & G'(s) \leq 0 \ \forall s \in [0,F(t)) \ \wedge \ G'(s) \geq 0 \ \forall s \in (F(t),1] \end{aligned}$$

Esto último pues $F : [a,b] \to [0,1]$ es estrictamente creciente y biyectiva. Luego, usando la proposición 4.2.1 se tiene que:

$$t^* = \text{ínf}\{t \in [a,b] : F(t) \in \text{argmin}\, G\}$$

Como F es continua a la derecha se tiene que:

$$F(t^*) = \text{ínf}\{F(t) : t \in [a,b], F(t) \in \text{argmin}\, G\}$$

Y como $G = co(H)$ usando la proposición 4.2.2 tenemos que:

$$F(t^*) \in \text{argmin}\, H$$

Y esto que implica que:

$$t^* \in \text{argmin}\, H \circ F$$

Por último, recordemos que:

$$H(q) = \int_0^q h(r)dr = \int_0^q c(F^{-1}(r))dr = \int_a^{F^{-1}(q)} c(s)f(s)ds$$

Por lo tanto:

$$H \circ F(t) = \int_a^t c(s)f(s)ds$$

Y de esta manera se concluye que:

$$t^* \in \underset{t\in[a,b]}{\text{argmin}} \int_a^t c(s)f(s)ds = \underset{t\in[a,b]}{\text{argmax}} \int_t^b c(s)f(s)ds$$

□

Capítulo 5

Caso de dos compradores: Condiciones necesarias

5.1. Simplificación

Recordemos que para el caso en que hay dos posibles compradores se definen las funciones:

$$Q_1(p,t_1) = \int_{a_2}^{b_2} p_1(t_1,t_2) f_2(t_2) dt_2$$

$$Q_2(p,t_2) = \int_{a_1}^{b_1} p_2(t_1,t_2) f_1(t_1) dt_1$$

Y el problema consiste en encontrar la función de probabilidades $p = (p_1, p_2)$ solución de:

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{lll} v_2 = & \text{máx} & I(p) = \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[p_1(t) c_1(t_1) + p_2(t) c_2(t_2) \right] f_1(t_1) f_2(t_2) dt_2 dt_1 \\ & & \\ & \text{s.a.} & \begin{array}{cc} Q_1(p,\cdot) \text{ creciente} & \\ Q_1(p,\cdot) \text{ creciente} & \\ p_1(t_1,t_2) + p_2(t_1,t_2) \leq 1 & \forall (t_1,t_2) \in T \\ p_1(t_1,t_2) \geq 0 & \forall (t_1,t_2) \in T \\ p_2(t_1,t_2) \geq 0 & \forall (t_1,t_2) \in T \end{array} \end{array} \right.$$

donde $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Consideremos el siguiente problema, que es una versión más restrictiva de (P_2).

$$\left(\widehat{P_2}\right) \left\{ \begin{array}{lll} \widehat{v_2} = & \text{máx} & I(p) = \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left[p_1(t) c_1(t_1) + p_2(t) c_2(t_2) \right] f_1(t_1) f_2(t_2) dt_2 dt_1 \\ & & \\ & \text{s.a.} & \begin{array}{cc} p_1(\cdot,t_2) \text{ creciente} & \forall t_2 \in [a_2,b_2] \\ p_2(t_1,\cdot) \text{ creciente} & \forall t_1 \in [a_1,b_1] \\ p_1(t_1,t_2) + p_2(t_1,t_2) \leq 1 & \forall (t_1,t_2) \in T \\ p_1(t_1,t_2) \geq 0 & \forall (t_1,t_2) \in T \\ p_2(t_1,t_2) \geq 0 & \forall (t_1,t_2) \in T \end{array} \end{array} \right.$$

De acuerdo con Manelli y Vincent [3], para cualquier función p que sea (P_2)-facible, existe una función $\widehat{p}$ que es $(\widehat{P_2})$-factible y tal que $I(p) = I(\widehat{p})$. Por lo tanto, a partir de ahora intentaremos resolver $(\widehat{P_2})$.

Proposición 5.1.1. *Sea $\widehat{p}$ solución de $(\widehat{P_2})$ y sean ${t_1}^*$, ${t_2}^*$ tales que:*

$$ {t_1}^* \in \underset{t_1 \in [a_1, b_1]}{\operatorname{argmax}} \int_{t_1}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 $$

$$ {t_2}^* \in \underset{t_2 \in [a_2, b_2]}{\operatorname{argmax}} \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 $$

Sea $p^* : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como:

$$ p^*(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \in [a_1, {t_1}^*) \times [a_2, {t_2}^*) \\ (0,1) & \forall (t_1, t_2) \in [a_1, {t_1}^*) \times [{t_2}^*, b_2] \\ (1,0) & \forall (t_1, t_2) \in [{t_1}^*, b_1] \times [a_2, {t_2}^*) \\ \widehat{p}(t_1, t_2) & \forall (t_1, t_2) \in [{t_1}^*, b_1] \times [{t_2}^*, b_2] \end{cases} $$

Entonces p^* es solución de $(\widehat{P_2})$.

Demostración. Partamos notando que p^* es una función de probabilidades. Además como $\widehat{p}$ es solución de $(\widehat{P_2})$, se tiene que $\forall t_2 \in [a_2, b_2]$ $\widehat{p_1}(\cdot, t_2)$ es creciente y $\forall t_1 \in [a_1, b_1]$ $\widehat{p_2}(t_1, \cdot)$ es creciente. De esta manera es claro que $\forall t_2 \in [a_2, b_2]$ ${p_1}^*(\cdot, t_2)$ es creciente y que $\forall t_1 \in [a_1, b_1]$ ${p_2}^*(t_1, \cdot)$ es creciente, por lo tanto p^* es $(\widehat{P_2})$-factible.

Ahora notemos que en la región $[a_1, b_1] \times [a_2, {t_2}^*]$ se tiene que:

$$ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{{t_2}^*} [p_1(t_1, t_2) c_1(t_1) + p_2(t_1, t_2) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 $$

$$ = \int_{a_2}^{{t_2}^*} f_2(t_2) \int_{a_1}^{b_1} p_1(t_1, t_2) c_1(t_1) f_1(t_1)\ dt_1\ dt_2 + \int_{a_1}^{b_1} f_1(t_1) \int_{a_2}^{{t_2}^*} p_2(t_1, t_2) c_2(t_2) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 $$

Además, para cualquier $t_2 \in [a_2, b_2]$ fijo, la función $p_1(\cdot, t_2)$ es creciente y también:

$$ 0 \leq p_1(t_1, t_2) \leq 1 \qquad \forall t_1 \in [a_1, b_1] $$

Luego, por el resultado obtenido en el problema de un único comprador, se tiene que:

$$ \forall t_2 \in [a_2, b_2] \qquad \int_{a_1}^{b_1} p_1(t_1, t_2) c_1(t_1) f_1(t_1)\ dt_1 \leq \int_{{t_1}^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 $$

Por otro lado, como ${t_2}^* \in \underset{t_2 \in [a_2, b_2]}{\operatorname{argmax}} \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2$, necesariamente:

$$ \int_{t_2}^{{t_2}^*} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0 \qquad \forall t_2 \in [a_2, {t_2}^*] $$

Y también se tiene que, para cualquier $t_1 \in [a_1, b_1]$ fijo, la función $p_2(t_1, \cdot)$ es creciente y:

$$0 \leq p_2(t_1, t_2) \leq 1 \qquad \forall t_2 \in [a_2, b_2]$$

De esta manera, aplicando el resultado obtenido en el problema de un comprador, se obtiene:

$$\forall t_1 \in [a_1, b_1] \qquad \int_{a_2}^{t_2{}^*} p_2(t_1, t_2) c_2(t_2) f_2(t_2)\ dt_2 \leq \max_{t_2 \in [a_2, t_2{}^*]} \int_{t_2}^{t_2{}^*} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0$$

Por lo tanto se concluye que en esta región:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{t_2{}^*} [p_1(t) c_1(t_1) + p_2(t) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 \leq \left(\int_{a_2}^{t_2{}^*} f_2(t_2)\ dt_2 \right) \left(\int_{t_1{}^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \right)$$

Ahora consideremos la región $[a_1, t_1{}^*] \times [t_2{}^*, b_2]$ y notemos que se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{t_1{}^*} \int_{t_2{}^*}^{b_2} [p_1(t) c_1(t_1) + p_2(t) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 \\ = & \int_{t_2{}^*}^{b_2} f_2(t_2) \int_{a_1}^{t_1{}^*} p_1(t_1, t_2) c_1(t_1) f_1(t_1)\ dt_1\ dt_2 + \int_{a_1}^{t_1{}^*} f_1(t_1) \int_{t_2{}^*}^{b_2} p_2(t_1, t_2) c_2(t_2) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 \end{aligned}$$

Repitiendo el análisis realizado en la región anterior, sigue que $\forall t_2 \in [a_2, b_2]$ y $\forall t_1 \in [a_1, b_1]$ se cumple:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{t_1{}^*} p_1(t_1, t_2) c_1(t_1) f_1(t_1)\ dt_1 \quad & \leq \quad \max_{t_1 \in [a_1, t_1{}^*]} \int_{t_1}^{t_1{}^*} c_1(s_1) f_2(s_1)\ ds_1 \quad \leq \quad 0 \\ \int_{t_2{}^*}^{b_2} p_2(t_1, t_2) c_2(t_2) f_2(t_2)\ dt_2 \quad & \leq \quad \max_{t_2 \in [t_2{}^*, b_2]} \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \quad = \quad \int_{t_2{}^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \end{aligned}$$

Así, usando estas desigualdades se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{t_1{}^*} \int_{t_2{}^*}^{b_2} [p_1(t) c_1(t_1) + p_2(t) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2)\ dt_2\ dt_1 \\ \leq \quad & \left(\int_{a_1}^{t_1{}^*} f_1(t_1)\ dt_1 \right) \left(\int_{t_2{}^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \right) \end{aligned}$$

Para concluir sólo hay que notar que la función p^* alcanza las cotas obtenidas en ambas regiones y que en el resto del dominio coincide con $\widehat{p}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [\widehat{p_1}(t) c_1(t_1) + \widehat{p_2}(t) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2) dt_2 dt_1 \\ \leq \quad & \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} [p_1{}^*(t) c_1(t_1) + p_2{}^*(t) c_2(t_2)]\, f_1(t_1) f_2(t_2) dt_2 dt_1 \end{aligned}$$

Lo que implica que p^* también es solución de $(\widehat{P_2})$. □

La importancia de la proposición 5.1.1 es que permite olvidarnos de una región de T. Para el resto del trabajo, definimos los puntos $t_1^* \in [a_1, b_1], t_2^* \in [a_2, b_2]$ como:

$$t_1{}^* = \max\{\widetilde{t_1} : \widetilde{t_1} \in \underset{t_1 \in [a_1,b_1]}{\operatorname{argmax}} \int_{t_1}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1\}$$

$$t_2{}^* = \max\{\widetilde{t_2} : \widetilde{t_2} \in \underset{t_2 \in [a_2,b_2]}{\operatorname{argmax}} \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2\}$$

Y a partir de ahora buscaremos soluciones p^* que cumplan las siguientes condiciones:

$$p_1{}^*(t_1,t_2) = 0, \quad p_2{}^*(t_1,t_2) = 0 \qquad \forall (t_1,t_2) \in [a_1, t_1{}^*) \times [a_2, t_2{}^*)$$

$$p_1{}^*(t_1,t_2) = 1, \quad p_2{}^*(t_1,t_2) = 0 \qquad \forall (t_1,t_2) \in [t_1{}^*, b_1] \times [a_2, t_2{}^*]$$
$$p_1{}^*(t_1,t_2) = 0, \quad p_2{}^*(t_1,t_2) = 1 \qquad \forall (t_1,t_2) \in [a_1, t_1{}^*] \times [t_2{}^*, b_2]$$

Ahora realizaremos las últimas simplificaciones del problema que serán referentes a la imagen de las funciones factibles. Sabemos de Myerson [5], que existe una solución $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ de $(\widehat{P_2})$ que satisface:

$$p^*(t_1,t_2) \in \{(0,0), (1/2,1/2), (1,0), (0,1)\} \quad \forall (t_1,t_2) \in T$$

A partir de este hecho, en la siguiente proposición se demuestra que existe una solución $\widehat{p}$ de $(\widehat{P_2})$ que es del tipo bang-bang, es decir, tal que las funciones $\widehat{p_1}$ y $\widehat{p_2}$ sólo toman los valores 0 y 1.

Proposición 5.1.2. *Sea p^* solución de $(\widehat{P_2})$ y tal que:*

$$p^*(t_1,t_2) \in \{(0,0), (1/2,1/2), (1,0), (0,1)\} \quad \forall (t_1,t_2) \in T$$

Entonces existe $\widehat{p}$ solución de $(\widehat{P_2})$ y tal que:

$$\widehat{p}(t_1,t_2) \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\} \quad \forall (t_1,t_2) \in T$$

Demostración. Definamos el conjunto A como:

$$A = \{(t_1,t_2) \in T : \ p_1^*(t_1,t_2) = p_2^*(t_1,t_2) = 1/2\}$$

Y la función de probabilidades $\widehat{p} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\widehat{p}(t_1,t_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall (t_1,t_2) \in A \\ p^*(t_1,t_2) & \forall (t_1,t_2) \notin A \end{cases}$$

Se tiene que $\widehat{p}$ es $(\widehat{P_2})$-factible, además como p^* es $(\widehat{P_2})$-óptima, se tiene que:

$$I(p^*) - I(\widehat{p}) = \frac{1}{2}\int_A c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 - \frac{1}{2}\int_A c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 \geq 0$$

Por lo tanto si A tiene medida (de Lebesgue) no nula, sigue que:

$$\int_A c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \geq \int_A c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1$$

Por otro lado, definiendo $\widetilde{p} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\widetilde{p}(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,1) & \forall (t_1, t_2) \in A \\ p^*(t_1, t_2) & \forall (t_1, t_2) \notin A \end{cases}$$

También se tiene que $\widetilde{p}$ es $(\widehat{P_2})$-factible y la optimalidad de p^* implica:

$$\int_A c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \leq \int_A c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1$$

Así, concluimos que:

$$\int_A c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 = \int_A c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_1\ ds_2$$

Y esto tiene como consecuencia que tanto $\widehat{p}$ como $\widetilde{p}$ son $(\widehat{P_2})$-óptimas. Obviamente esto también ocurre en el caso en que A tiene medida nula y se concluye el resultado. □

Como última simplificación, demostraremos que existe una solución de $(\widehat{P_2})$ tal que la imagen del conjunto $[t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$ es simplemente $\{(1,0), (0,1)\}$.

Proposición 5.1.3. *Sea p^* solución de $(\widehat{P_2})$ y tal que:*

$$p^*(t_1, t_2) \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\} \quad \forall (t_1, t_2) \in T$$

Entonces existe p^{**} solución de $(\widehat{P_2})$ y tal que:

$$p^{**}(t_1, t_2) \in \{(1,0), (0,1)\} \quad \forall (t_1, t_2) \in [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$$

Demostración. Definamos el conjunto B como:

$$B = \{(t_1, t_2) \in T : \ p_1^*(t_1, t_2) = p_2^*(t_1, t_2) = 0\}$$

Y supongamos que B tiene medida no nula (pues en caso contrario el resultado es trivial). Luego, sea C una componente conexa de B de medida no nula, y definamos los siguientes puntos:

$$\begin{aligned} t_1^1 &= \text{ínf}\{t_1 \in [t_1^*, b_1] : \exists\ t_2 \in [t_2^*, b_2], (t_1, t_2) \in C\} \\ t_1^2 &= \sup\{t_1 \in [t_1^*, b_1] : \exists\ t_2 \in [t_2^*, b_2], (t_1, t_2) \in C\} \\ t_2^1 &= \text{ínf}\{t_2 \in [t_2^*, b_2] : \exists\ t_1 \in [t_1^*, b_1], (t_1, t_2) \in C\} \\ t_2^2 &= \text{ínf}\{t_2 \in [t_2^*, b_2] : \exists\ t_1 \in [t_1^*, b_1], (t_1, t_2) \in C\} \end{aligned}$$

Notemos que $(t_1^1, t_1^2) \in C$. Si llamamos Γ_C a la frontera de C, es posible definir dos funciones $g_1, g_2 : [t_1^1, t_1^2] \to [t_2^*, b_2]$ que intenten parametrizar Γ_C, es decir que satisfagan lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} (t_1, t_2) \in C & \text{si } g_1(t_1) < t_2 < g_2(t_1) \\ (t_1, t_2) \notin C & \text{si no} \end{array}$$

Antes de continuar notemos que g_1 debe ser creciente y que no pueden existir $t_1, t_3 \in [t_1^*, b_1]$, con $t_1 < t_3$, y $t_2 \in (t_2^*, b_2]$ tales que $(t_1, t_3) \times (t_2^*, t_2) \subset C$, pues en este caso definiendo el conjunto C' como:

$$C' = \{(s_1, s_2) \in [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2] : t_1^1 \leq s_1 \leq t_3, s_2 \leq g_2(s_1)\}$$

Y definiendo $p' : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$p'(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,1) & \forall (t_1, t_2) \in C' \\ p^*(t_1, t_2) & \forall (t_1, t_2) \notin C' \end{cases}$$

Se tendría que p' es $(\widehat{P_2})$-factible y además:

$$I(p') - I(p^*) = \int_{t_1^1}^{t_3} \int_{t_2^*}^{g_2(s_1)} c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\, ds_2\, ds_1$$

Lo que contradice la optimalidad de p^* (ya que esta cantidad es estrictamente positiva debido a la definición de t_2^*). Por lo tanto asumimos sin pérdida de generalidad que $t_2^1 > t_2^*$, análogamante asumimos también que $t_1^1 > t_1^*$.

Ahora veamos que en los intervalos donde g_1 es estrictamente creciente necesariamente c_1 es nula y en los intervalo donde g_2 es estrictamente monótona $c_2 \circ g_2$ es nula. Supongamos que existe $I_1 \subset (t_1^1, t_1^2)$ tal que g_1 es estrictamente creciente en I_1 y que existe $t_1 \in I_1$ tal que $c_1(t_1) > 0$, por continuidad de c_1 entonces escojamos $\epsilon > 0$ tal que:

$$c_1(s_1) > 0 \quad \forall s_1 \in [t_1, t_1 + \epsilon]$$

A continuación escojamos $\epsilon' < \epsilon$ tal que:

$$C'' = \{(s_1, s_2) : s_1 \in [t_1, t_1 + \epsilon'], s_2 \in [g_1(s_1), g_1(t_1 + \epsilon')]\} \subset C$$

Y definamos $\widehat{C}$ como:

$$\widehat{C} = \{(s_1, s_2) : s_1 \in [t_1, t_1 + \epsilon'], s_2 \in [g_1(t_1), g_1(s_1)]\}$$

Notemos que $p_2^*(s_1, s_2) = 0 \quad \forall (s_1, s_2) \in \widehat{C}$ y que no existe ningún subconjunto de $\widehat{C}$, con medida mayor que cero, donde p^* es $(0,0)$ (pues C es un conexo maximal). Por lo tanto $p^*(s_1, s_2) = (1,0)$ c.t.p. en $\widehat{C}$. Finalmente, definamos $p'' : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$p''(t_1, t_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall (t_1, t_2) \in C'' \cup \widehat{C} \\ p^*(t_1, t_2) & \forall (t_1, t_2) \notin C'' \cup \widehat{C} \end{cases}$$

Y se tiene que p'' es $(\widehat{P_2})$-factible, además:

$$I(p'') - I(p^*) = \int_{C''} c_1(s_1) f_2(s_2) f_1(s_1)\, ds_2\, ds_1 > 0$$

Lo que contradice la optimalidad de p^*. Análogamente, si exisiera $t_1 \in I_1$ tal que $c_1(t_1) < 0$, sería posible encontrar un conjunto (el equivalente a $\widehat{C}$) que esté bajo la curva g_1 y donde c_1 sea negativa. Definiendo una función que difiera de p^* sólo en esta zona y valga $(0,0)$ se contradice la optimalidad de p^*. Por lo tanto c_1 es nula en intervalo donde g_1 es estrictamente creciente. De la misma forma, en intervalos donde g_2 es estrictamente creciente o decreciente, en caso de que existiera un punto t_1 tal que $c_2(g_2(t_1)) > 0$, sería posible encontrar un conjunto bajo la curva g_2 donde c_2 es positiva y definir una función que difiera de p^* sólo en esa zona y valga $(0,1)$ (en caso que $c_2(g_2(t_1)) < 0$ es posible encontrar un conjunto por sobre la curva g_2 donde c_2 es negativa y definir una función que difiera de p^* sólo en esa zona y valga $(0,0)$), esto también contradice la optimalidad de p^* y concluímos que c_1 es nula en intervalos donde g_2 es estrictamente monótona.

Debido a estos resultados, si existe un intervalo $I = [\widetilde{t_1^1}, \widetilde{t_1^2}] \subset (t_1^1, t_1^2)$ tal que g_1 estrictamente creciente en I, podemos definir la función $p_I : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$p_I(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \in \; [\widetilde{t_1^1}, \widetilde{t_1^2}] \times [g_1(\widetilde{t_1^1}), g_1(\widetilde{t_1^2})] \\ p^*(t_1, t_2) & \forall (t_1, t_2) \notin \; [\widetilde{t_1^1}, \widetilde{t_1^2}] \times [g_1(\widetilde{t_1^1}), g_1(\widetilde{t_1^2})] \end{cases}$$

Y es claro que esta función es $(\widehat{P_2})$-óptima y el conjunto de puntos tales que p_I es $(0,0)$ tiene una componente conexa que contiene a C, cuya frontera inferior restringida a I es un segmento horizontal. Procediendo de forma análoga en intervalos donde g_2 sea estrictamente monótona, podemos suponer sin pérdida de generalidad que las funciones g_1 y g_2 son constantes por trozos.

Asumiendo esto identifiquemos los puntos importantes de C, sabemos que $g_2(t_1^2) = t_2^2$ por lo tanto definamos t_1^3 como:

$$t_1^3 = \text{ínf}\{t_1 \in [t_1^1, t_1^2] : g_2(t_1) = t_2^2\}$$

También definamos $t_2^3 = g_1(t_2^2)$ y t_1^4 como:

$$t_1^4 = \text{ínf}\{t_1 \in [t_1^1, t_1^2] : g_1(t_1) = t_2^3\}$$

Por último, definimos $t_1^5 = \text{mín}\{t_1^3, t_1^4\}$ y se tiene que $[t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3, t_2^2] \subset C$. Supongamos ahora que ocurre lo siguiente:

$$\exists\ (t_1, t_2) \in [t_1^2, b_1] \times [t_2^3, t_2^2] \quad \exists r > 0,\ p^*(s_1, s_2) = (0,1) \quad \forall (t_1, t_2) \in B_r((t_1, t_2))$$

Notemos que una consecuencia de este hecho es la siguiente:

$$p^*(s_1, s_2) = (0,1) \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1 - r, t_1 + r] \times [t_2, b_2]$$

Lo cual tiene como consecuencia que:

$$p_1^*(s_1, s_2) = 0 \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1^* t_1 + r] \times [t_2, b_2]$$

En particular, lo anterior se cumple en la región $[t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2, b_2]$. Recordando que C es conexo maximal, necesariamente debe existir $\epsilon_1 > 0$ tal que:

$$p^*(s_1, s_2) = (0,1) \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2, t_2^2 + \epsilon_1]$$

Lo cual implica que para cualquier $\epsilon > 0$ y $\epsilon < t_2^2 - t_2^3$, la función $p_\epsilon : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ definida como:

$$p_\epsilon(s_1, s_2) = \begin{cases} (0,1) & \forall (s_1, s_2) \in \; [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2 - \epsilon, t_2^2] \\ p^*(s_1, s_2) & \forall (s_1, s_2) \notin \; [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2 - \epsilon, t_2^2] \end{cases}$$

Es $(\widehat{P_2})$-factible, además:

$$I(p_\epsilon) - I(p^*) = \int_{t_1^5}^{t_1^2} \int_{t_2^2-\epsilon}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1$$

Por lo que debido a la optimalidad de p^* se cumple:

$$\int_{t_2^2-\epsilon}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0$$

Si la integral anterior es cero es posible redefinir p^* en la región $[t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2 - \epsilon, t_2^2]$ sin que cambie $I(p^*)$, el caso de interés entonces ocurre cuando:

$$\int_{t_2^2-\epsilon}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 < 0 \quad \forall \epsilon \in (0, t_2^2 - t_2^3]$$

En este caso volvamos al intervalo $[t_1 - r, t_1 + r]$ y definamos la función $g_3 : [t_1 - r, t_1 + r] \to [a_2, b_2]$ como:

$$g_3(s_1) = \inf\{s_2 \in [t_2^3, t_2^2] : p^*(s_1, s_2) = (0,1)\}$$

Notemos que como C es conexo maximal, necesariamente existe $\epsilon_2 > 0$ tal que:

$$p^*(s_1, s_2) = (1,0) \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3 - \epsilon_2, t_2^3]$$

Lo cual implica que:

$$p^*(s_1, s_2) = (1,0) \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1^5, b_1] \times [t_2^3 - \epsilon_2, t_2^3]$$

Por lo tanto, definiendo el conjunto C''' como:

$$C''' = \{(s_1, s_2) : s_1 \in [t_1 - r, t_1 + r], s_2 \in [g_3(s_1), t_2^2]\}$$

La función $p''' : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ definida a continuación será $(\widehat{P_2})$-factible:

$$p'''(s_1, s_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (s_1, s_2) \in\ C''' \\ p^*(s_1, s_2) & \forall (s_1, s_2) \notin\ C''' \end{cases}$$

Además:

$$I(p^*) - I(p''') = \int_{t_1 - r}^{t_1 + r} \int_{g_3(s_1)}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 < 0$$

Lo que contradice la optimalidad de p^*, por lo tanto asumimos sin pérdida de generalidad que $p^*(s_1, s_2) = (1,0)$ c.t.p. en $[t_1^2, b_1] \times [t_2^3, t_2^2]$. De forma análoga podemos asumir también que $p^*(s_1, s_2) = (0,1)$ c.t.p. en $[t_1^5, t_1^2] \times [t_2^2, b_2]$. Bajo estos supuestos definimos las funciones $\widehat{p}, \widetilde{p} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\widehat{p}(s_1, s_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall (s_1, s_2) \in\ [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3, t_2^2] \\ p^*(s_1, s_2) & \forall (s_1, s_2) \notin\ [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3, t_2^2] \end{cases}$$

$$\widetilde{p}(s_1, s_2) = \begin{cases} (0,1) & \forall (s_1, s_2) \in\ [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3, t_2^2] \\ p^*(s_1, s_2) & \forall (s_1, s_2) \notin\ [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3, t_2^2] \end{cases}$$

Y se tiene que $\widehat{p}$ y $\widetilde{p}$ son $(\widehat{P_2})$-factibles, por lo tanto:

$$I(\widehat{p}) - I(p^*) = \int_{t_1^5}^{t_1^2}\int_{t_2^3}^{t_2^2} c_1(s_1)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 \leq 0$$

$$I(\widetilde{p}) - I(p^*) = \int_{t_1^5}^{t_1^2}\int_{t_2^3}^{t_2^2} c_2(s_2)f_2(s_2)f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \leq 0$$

A continuación demostraremos que debe cumplirse que $\int_{t_1^5}^{t_1^2} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 = 0$ o que $\int_{t_2^3}^{t_2^2} c_2(s_2)f_2(s_2)\ ds_2 = 0$, de esta forma $\widehat{p}$ o bien $\widetilde{p}$ será $(\widehat{P_2})$-óptima y siempre distinta a $(0,0)$ en la región $[t_1^5, t_1^2] \times [t_3^2, t_2^2]$, a partir de esto podemos repetir el argumento en todos los rectángulos que componen C y podremos concluir que existe una solución p^{**} de $(\widehat{P_2})$ que satisface:

$$p^{**}(t_1, t_2) \in \{(1,0),(0,1)\} \quad \forall (t_1,t_2) \in [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$$

En efecto, supongamos que $\int_{t_1^5}^{t_1^2} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 < 0$ y que $\int_{t_2^3}^{t_2^2} c_2(s_2)f_2(s_2)\ ds_2 < 0$. Recordemos que $t_1^5 \geq t_1^1 > t_1^*$ y que $t_2^3 \geq t_2^1 > t_2^*$ y notemos que hay tres situaciones posibles en las vecindades convenientes de (t_1^5, t_2^3). La primera es que existan $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que:

$$p_1^*(s_1, s_2) = 0 \quad \text{c.t.p. en } [t_1^5 - \epsilon_1, t_1^5] \times [t_2^3 - \epsilon_2, t_2^3]$$

En este caso definimos la función $\widehat{p} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\widehat{p}(s_1, s_2) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0,0) & \forall (s_1,s_2) \in & [t_1^5, t_1^2] \times [t_2^3 - \epsilon_2, t_2^3] \\ p^*(s_1,s_2) & \forall (s_1,s_2) \notin & [t_1^5, t_1^2] \times [t_3^2, t_2^2] \end{array} \right.$$

Se tiene que $\widehat{p}$ es $(\widehat{P_2})$-factibles y además:

$$I(p^*) - I(\widehat{p}) = \int_{t_1^5}^{t_1^2}\int_{t_2^3-\epsilon_2}^{t_2^3} c_1(s_1)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 < 0$$

Lo que contradice la optimalidad de p^*. La segunda situación posible es que existan $\epsilon_3, \epsilon_4 > 0$ tales que:

$$p_2^*(s_1, s_2) = 0 \quad \text{c.t.p. en } [t_1^5 - \epsilon_3, t_1^5] \times [t_2^3 - \epsilon_4, t_2^3]$$

Este caso es análogo al anterior y contradice la optimalidad de p^*. La última situación posible es que $(\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0)$ $(\exists\ (t_1,t_2),(t_3,t_4) \in [t_1^5 - \epsilon_1, t_1^5] \times [t_2^3 - \epsilon_2, t_2^3])$ $(\exists\ r_1, r_2 > 0)$ tales que:

$$p^*(s_1, s_2) = (1,0) \quad \forall (s_1,s_2) \in B_{r_1}((t_1,t_2))$$

$$p^*(s_3, s_4) = (0,1) \quad \forall (s_1,s_2) \in B_{r_2}((t_3,t_4))$$

Notemos que para que esto ocurra debe cumplirse que $t_1^5 = t_1^1$ y $t_2^3 = t_2^1$, dado que C es conexo maximal escojamos entonces $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ suficientemente pequeños para que además $p^*(s_1, s_2) \neq (0,0)$ c.t.p. en $[t_1^1 - \epsilon_1, t_1^1] \times [t_2^1 - \epsilon_2, t_2^1]$. Luego, en esta región es posible definir una función que intente parametrizar la frontera entre los conjuntos de asignación para los jugadores 1 y 2. Es decir, consideremos $g_4 : [t_1^1 - \epsilon_1, t_1^1] \to [t_2^1 - \epsilon_2, t_2^1]$ tal que se satisface:

$$p^*(s_1, s_2) = \begin{cases} (1,0) & \forall (s_1, s_2) : s_2 < g_4(s_1) \\ (0,1) & \forall (s_1, s_2) : s_2 > g_4(s_1) \end{cases}$$

Sea ahora $\epsilon_3 \in (0, \epsilon_1)$ tal que $\displaystyle\int_{t_1^1-\epsilon_3}^{t_1^2} c_1(s_1) f_1(s_1)\, ds_1 < 0$ y definamos el conjunto C_{ϵ_3} como:

$$C_{\epsilon_3} = \{(s_1, s_2) \in [t_1^1 - \epsilon_3, t_1^1] \times [t_2^1 - \epsilon_2, t_2^1] : s_2 \leq g_4(s_1)\} \cup [t_1^1, t_1^2] \times [t_2^1 - \epsilon_2, t_2^1]$$

También definamos la función $p_{\epsilon_3} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ como:

$$p_{\epsilon_3}(s_1, s_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (s_1, s_2) \in C_{\epsilon_3} \\ p^*(s_1, s_2) & \forall (s_1, s_2) \notin C_{\epsilon_3} \end{cases}$$

Se cumple que p_{ϵ_3} es $(\widehat{P_2})$-factible y además:

$$I(p^*) - I(p_{\epsilon_3}) = \int_{t_1^1-\epsilon_3}^{t_1^2} \int_{t_2^1-\epsilon_2}^{t_2^1} c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 < 0$$

Lo que contradice la optimalidad de p^*. Concluímos que $\displaystyle\int_{t_1^5}^{t_1^2} c_1(s_1) f_1(s_1)\, ds_1 = 0$ o bien $\displaystyle\int_{t_2^3}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2)\, ds_2 = 0$ y como se explicó anteriormente, esto implica que existe una solución p^{**} de $(\widehat{P_2})$ que satisface:

$$p^{**}(s_1, s_2) \in \{(1,0), (0,1)\} \quad \forall (s_1, s_2) \in [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$$

□

La importancia de las proposiciones 5.1.2 y 5.1.3 es que permite buscar soluciones de $(\widehat{P_2})$ en un conjunto más reducido, de ahora en adelante sólo nos preocuparemos de las soluciones de $(\widehat{P_2})$ que en la región $[t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$ toman valores en el conjunto $\{(0,1), (1,0)\}$.

5.2. Condiciones necesarias

Supongamos que p^* es solución de $(\widehat{P_2})$ y que existe $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in T$ tal que ${p_1}^*(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) = 1$. Dado que ${p_1}^*(\cdot, \widehat{t_2})$ es creciente, se tiene que:

$${p_1}^*(t_1, \widehat{t_2}) = 1 \qquad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, b_1]$$

Además, necesariamente ${p_2}^*(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) = 0$. Luego, como ${p_2}^*(\widehat{t_1}, \cdot)$ es creciente se tiene que:

$${p_2}^*(\widehat{t_1}, t_2) = 0 \qquad \forall t_2 \in [a_2, \widehat{t_2}]$$

Y todo lo anterior implica que:

$${p_1}^*(t_1, t_2) = 1 \quad \forall (t_1, t_2) \in [\widehat{t_1}, b_1] \times [a_2, \widehat{t_2}]$$

$${p_2}^*(t_1, t_2) = 0 \quad \forall (t_1, t_2) \in [\widehat{t_1}, b_1] \times [a_2, \widehat{t_2}]$$

De la misma manera se tiene que si $(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in T$ es tal que $p_2{}^*(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) = 1$, entonces:

$$p_1{}^*(t_1, t_2) = 0 \qquad \forall (t_1, t_2) \in [a_1, \widetilde{t_1}] \times [\widetilde{t_2}, b_2]$$
$$p_2{}^*(t_1, t_2) = 1 \qquad \forall (t_1, t_2) \in [a_1, \widetilde{t_1}] \times [\widetilde{t_2}, b_2]$$

Lo anterior se representa en la siguiente figura:

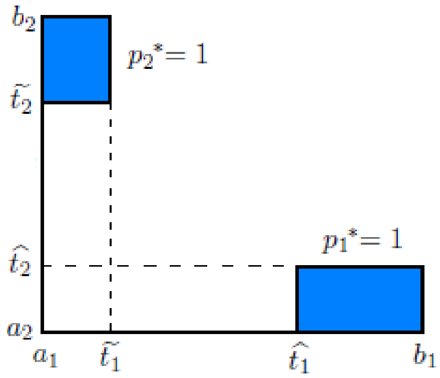


Figura 5.1: Regiones dominadas por un jugador.

Por lo tanto, para el análisis en la región $[t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$ supondremos que para p^* solución de $(\widehat{P_2})$, la frontera entre los conjuntos de asignación para los jugadores 1 y 2 es una curva que llamaremos Γ. Notemos que en este caso es posible definir una función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que es creciente y tal que:

$$p^*(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \notin [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2] \\ (1,0) & \forall (t_1, t_2) : t_2 < h(t_1) \\ (0,1) & \forall (t_1, t_2) : t_2 > h(t_1) \end{cases}$$

Un ejemplo de dicha función h sería el siguiente:

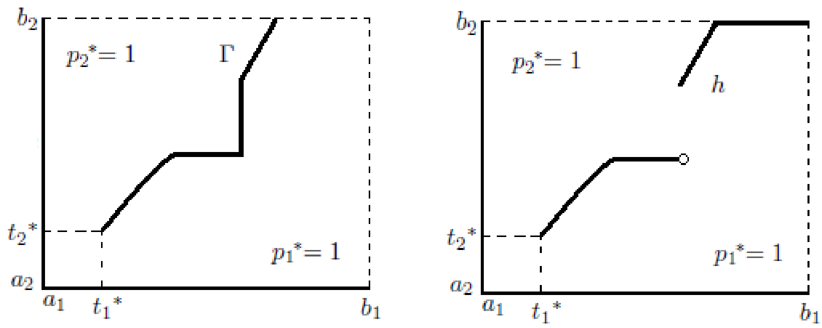


Figura 5.2: Curva Γ y función h.

Igualmente, notemos que también se puede definir una función, llamada por conveniencia h^{-1}, con $h^{-1} : [t_2^*, b_2] \to [t_1^*, b_1]$, que es creciente y que satisface:

$$p^*(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \notin [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2] \\ (1,0) & \forall (t_1, t_2) : t_1 > h^{-1}(t_2) \\ (0,1) & \forall (t_1, t_2) : t_1 < h^{-1}(t_2) \end{cases}$$

Un ejemplo de dicha función h^{-1} sería el siguiente:

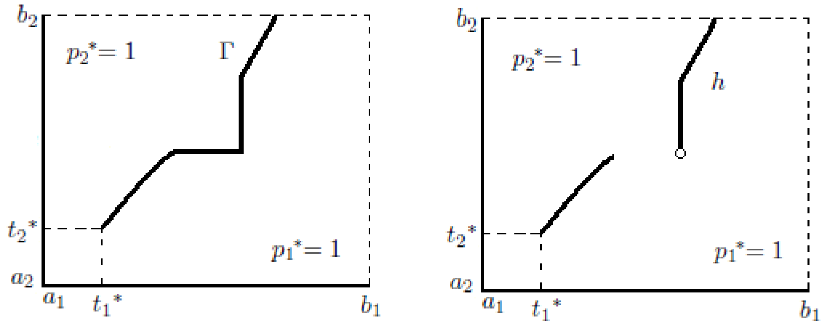


Figura 5.3: Curva Γ y función h^{-1}.

A partir de ahora abordaremos el problema de forma inversa, pues centraremos nuestro interés en estas últimas funciones que intentan parametrizar la frontera. Dada cualquier función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ creciente, diremos que h 'induce' la función de probabilidades p_h, definida c.t.p. como:

$$p_h(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \notin [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2] \\ (1,0) & \forall (t_1, t_2) : h(t_1) > t_2 \\ (0,1) & \forall (t_1, t_2) : h(t_1) < t_2 \end{cases}$$

Además, diremos que h es $(\widehat{P_2})$-óptima si se cumple que p_h es solución de $(\widehat{P_2})$. También definiremos, en el conjunto correspondiente, la función J como $J(h) = I(p_h)$ y por último, llamaremos h^{-1} a cualquier función $h^{-1} : [t_2^*, b_2] \to [t_1^*, b_1]$ creciente y que cumpla c.t.p:

$$p_h(t_1, t_2) = \begin{cases} (0,0) & \forall (t_1, t_2) \notin [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2] \\ (1,0) & \forall (t_1, t_2) : t_1 > h^{-1}(t_2) \\ (0,1) & \forall (t_1, t_2) : t_1 < h^{-1}(t_2) \end{cases}$$

Para comenzar el análisis de la frontera, analizaremos qué condiciones sobre las funciones c_1 y c_2 nos garantizan cierta regularidad de la función parametrizadora. Esto para asegurarnos que, posteriormente, a toda función $(\widehat{P_2})$-óptima será posible aplicarle las desviaciones variacionales mínimas que permitan obtener condiciones para caracterizarla. Comenzaremos demostrando que si h es $(\widehat{P_2})$-óptima y constante en un intervalo maximal, entonces c_1 no puede ser monótona en ese intervalo (a menos que sea constante).

Proposición 5.2.1. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima tal que h es constante en un intervalo maximal $I_1 = [t_1^1, t_1^2]$ y $h(I_1) = \{t_2\} \subset (t_2^*, b_2)$. Entonces c_1 es constante en $[t_1^1, t_1^2]$ o existen $t_1^3, t_1^4, t_1^5 \in [t_1^1, t_1^2]$ tales que $t_1^3 < t_1^4 < t_1^5$ y $\min\{c_1(t_1^3), c_1(t_1^4)\} < c_1(t_1^5) < \max\{c_1(t_1^3), c_1(t_1^4)\}$*

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que c_1 es creciente en $[t_1^1, t_1^2]$ y que $c_1(t_1^1) < c_1(t_1^2)$ (el caso en que c_1 es decreciente es análogo). Si $c_2(t_2) \geq c_1(t_1^2)$ entonces existe $\widehat{t_1} \in (t_1^1, t_1^2)$ tal que $c_2(t_2) > c_1(\widehat{t_1}) > c_1(t_1^1)$, por continuidad de c_2 existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$c_2(s_2) > c_1(\widehat{t_1}) \quad \forall s_2 \in [t_2 - \epsilon, t_2]$$

A continuación definiremos el conjunto C_ϵ como:

$$C_\epsilon = \{s_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}] : \ h(t_1) \geq t_2 - \epsilon\}$$

Y notamos que como h es creciente, el conjunto C_ϵ es un intervalo de la forma $[t_1^\epsilon, \widehat{t_1}]$. Si h es continua en t_1^1 entonces $t_1^\epsilon < t_1^1$, por lo tanto, por continuidad de c_1 consideremos $t_1' \in [t_1^\epsilon, t_1^1)$ tal que:

$$c_1(s_1) < c_1(\widehat{t_1}) \quad \forall s_1 \in [t_1', t_1^1]$$

Y definamos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\widehat{h}(t_1) = \begin{cases} h(t_1') & , \forall t_1 \in [t_1', \widehat{t_1}] \\ h(t_1) & , \forall t_1 \notin [t_1', \widehat{t_1}] \end{cases}$$

Se tiene entonces que:

$$J(h) - J(\widehat{h}) = \int_{t_1'}^{\widehat{t_1}} \int_{h(t_1')}^{h(s_1)} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 < 0$$

Lo que contradice la optimalidad de h. En caso que h no sea continua en t_1^1 consideramos $\epsilon' < \epsilon$ tal que:

$$C_{\epsilon'} = \{s_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}] : \ h(t_1) \geq t_2 - \epsilon'\} = [t_1^1, \widehat{t_1}]$$

Y definimos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\widehat{h}(t_1) = \begin{cases} t_2 - \epsilon' & , \forall t_1 \in [t_1^1, \widehat{t_1}] \\ h(t_1) & , \forall t_1 \notin [t_1^1, \widehat{t_1}] \end{cases}$$

Se tiene entonces que:

$$J(h) - J(\widehat{h}) = \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \int_{t_2-\epsilon'}^{h(s_1)} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 < 0$$

Lo que también contradice la optimalidad de h.

Analicemos ahora el caso en que $c_2(t_2) < c_1(t_1^2)$. Esta vez consideraremos $\widehat{t_1} \in (t_1^1, t_1^2)$ tal que $c_2(t_2) < c_1(\widehat{t_1}) < c_1(t_1^2)$, por continuidad de c_2 existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$c_2(s_2) < c_1(\widehat{t_1}) \quad \forall s_2 \in [t_2, t_2 + \epsilon]$$

Así que definiremos el conjunto C_ϵ como:

$$C_\epsilon = \{s_1 \in [\widehat{t_1}, b_1] : \ h(t_1) \leq t_2 + \epsilon\}$$

Y el conjunto C_ϵ será un intervalo de la forma $[\widehat{t_1}, t_1^\epsilon]$. Si h es continua en t_1^2 entonces $t_1^\epsilon > t_1^2$, por lo tanto, por continuidad de c_1 consideremos $t_1' \in (t_1^2, t_1^\epsilon]$ tal que:

$$c_1(s_1) > c_1(\widehat{t_1}) \quad \forall s_1 \in [t_1^2, t_1']$$

Y definimos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\widehat{h}(t_1) = \begin{cases} h(t_1') & , \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, t_1'] \\ h(t_1) & , \forall t_1 \notin [\widehat{t_1}, t_1'] \end{cases}$$

Se tiene entonces que:

$$J(h) - J(\widehat{h}) = \int_{\widehat{t_1}}^{t_1'} \int_{h(s_1)}^{h(t_1')} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\; ds_2\; ds_1 < 0$$

Lo que contradice la optimalidad de h. En caso que h no sea continua en t_1^2 consideramos $\epsilon' < \epsilon$ tal que:

$$C_{\epsilon'} = \{s_1 \in [\widehat{t_1}, b_1] :\; h(t_1) \leq t_2 + \epsilon'\} = [\widehat{t_1}, t_1^2]$$

Y definimos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\widehat{h}(t_1) = \begin{cases} t_2 + \epsilon' & , \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, t_1^2] \\ h(t_1) & , \forall t_1 \notin [t_1^1, \widehat{t_1}] \end{cases}$$

Se tiene entonces que:

$$J(h) - J(\widehat{h}) = \int_{\widehat{t_1}}^{t_1^2} \int_{h(s_1)}^{t_2+\epsilon'} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\; ds_2\; ds_1 < 0$$

Lo que también contradice la optimalidad de h. Concluímos finalmente que c_1 cumple la propiedad enunciada. □

La proposición anterior se resume en que, a no ser que c_1 sea constante en $[t_1^1, t_1^2]$, c_1 tiene al menos un cambio de crecimiento en $[t_1^1, t_1^2]$. Intercambiando los jugadores, deducimos también que si h^{-1} es constante en un intervalo maximal $I = [t_2^1, t_2^2]$ y $h^{-1}(I) = \{t_1\} \subset (t_1^*, b_1)$, entonces c_2 es constante en $[t_2^1, t_2^2]$ o c_2 tiene al menos un cambio de crecimiento en ese intervalo. Notando que los puntos donde h es discontinua son los valores en los cuales h^{-1} permanece constante en algún intervalo, de ahora en adelante consideraremos la siguiente hipótesis adicional.

HIPÓTESIS: c_1 y c_2 tienen una cantidad finita de cambios de crecimiento y son constantes en una cantidad finita de intervalos.

Bajo esta hipótesis, cualquier función h que sea $(\widehat{P_2})$-óptima será constante en una cantidad finita de intervalos maximales y será discontinua en una cantidad finita de puntos. Esto facilitará el tipo de análisis que realizaremos a continuación.

Lema 5.2.2. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) Si h es constante en un intervalo maximal $I = [t_1^1, t_1^2]$ y $h(I) = \{t_2\} \neq \{b_2\}$, entonces[1]:

$$\int_{t_1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

[1]El resultado también es válido para $I = [t_1^1, t_1^2)$, $I = (t_1^1, t_1^2]$ o $I = (t_1^1, t_1^2)$

2) Si h es constante en un intervalo maximal $I = [t_1^1, t_1^2]$ y $h(I) = \{t_2\} \neq \{t_2^*\}$, entonces[2]*:*

$$\int_{t_1^1}^{t_1} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

3) Si h^{-1} es constante en un intervalo maximal $I = [t_2^1, t_2^2]$ y $h^{-1}(I) = \{t_1\} \neq \{b_1\}$, entonces[3]*:*

$$\int_{t_2}^{t_2^2} [c_1(t_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^1, t_2^2]$$

4) Si h^{-1} es constante en un intervalo maximal $I = [t_2^1, t_2^2]$ y $h(I) = \{t_1\} \neq \{t_1^*\}$, entonces[3]*:*

$$\int_{t_2^1}^{t_2} [c_1(t_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\, ds_2 \leq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^1, t_2^2]$$

Demostración.

1) Sea $t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$ cualquiera y supongamos primero que $t_1^2 < b_1$ y que h es continua en t_1^2. Definamos para ϵ positivo y pequeño, la función Δ_1 como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_1^2} \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \\
&+ \int_{t_1^2}^{h^{-1}(t_2+\epsilon)} \int_{h(s_1)}^{t_2+\epsilon} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \\
&= \int_{t_1}^{t_1^2} \widetilde{G_1}(s_1, \epsilon)\, ds_1 + \int_{t_1^2}^{h^{-1}(t_2+\epsilon)} \widetilde{G_2}(s_1, \epsilon)\, ds_1
\end{aligned}$$

La función Δ_1 representa la diferencia entre evaluar la función objetivo en p_h y en un vector p que difiere de p_h solo en la zona indicada en la siguiente figura.

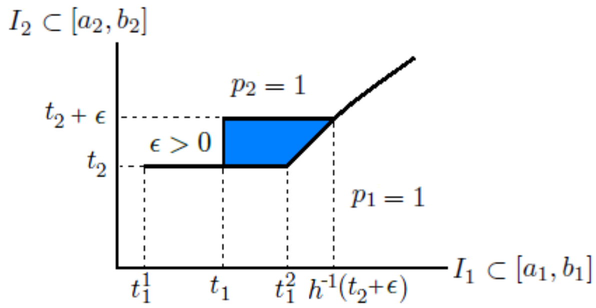


Figura 5.4: h constante y continua en t_1^2.

Notemos que como h es estrictamente creciente en $(t_1^2, h^{-1}(t_2 + \epsilon))$, h es derivable c.t.p. en ese intervalo y h' será estrictamente positiva en su dominio, por lo tanto es

[2]El resultado también es válido para $I = [t_1^1, t_1^2)$, $I = (t_1^1, t_1^2]$ o $I = (t_1^1, t_1^2)$

[3]El resultado también es válido para $I = [t_2^1, t_2^2)$, $I = (t_2^1, t_2^2]$ o $I = (t_2^1, t_2^2)$

posible definir h' en todo el conjunto $(t_1^2, h^{-1}(t_2+\epsilon))$ de modo que h' resulte continua a la derecha y estrictamente positiva. Luego, Δ_1 es diferenciable y su derivada es:

$$\Delta_1{}'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_1^2} \frac{\partial \widetilde{G_1}}{\partial \epsilon}(s_1, \epsilon)\ ds_1 + \int_{t_1^2}^{h^{-1}(t_2+\epsilon)} \frac{\partial \widetilde{G_2}}{\partial \epsilon}(s_1, \epsilon)\ ds_1 + \frac{\widetilde{G_2}(h^{-1}(t_2+\epsilon), \epsilon)}{h'(h^{-1}(t_2+\epsilon))}$$

Pues la igualdad es clara en los puntos donde Δ_1 es derivable y en los restantes se debe a que $\widetilde{G_2}(h^{-1}(t_2+\epsilon), \epsilon) = 0$. Desarrollando la expresión se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta_1{}'(\epsilon) &= \int_{t_1}^{t_1^2} [c_2(t_2+\epsilon) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(t_2+\epsilon)\ ds_1 \\
&+ \int_{t_1^2}^{h^{-1}(t_2+\epsilon)} [c_2(t_2+\epsilon) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(t_2+\epsilon)\ ds_1 \\
&= \int_{t_1}^{h^{-1}(t_2+\epsilon)} [c_2(t_2+\epsilon) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(t_2+\epsilon)\ ds_1
\end{aligned}$$

Además, de la optimalidad de p_h se tiene que:

$$\Delta_1(\epsilon) \geq 0 \qquad \forall \epsilon > 0$$

Y por lo tanto:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \Delta_1'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_2(t_2) f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

Este resultado también es cierto cuando h no es continua en t_1^2 y cuando $t_1^2 = b_1$, para desmostrarlo basta definir para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño:

$$\Delta_1(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_1^2} \int_{t_2}^{t_2+\epsilon} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1$$

Esta vez la función Δ_1 representa la diferencia entre evaluar la función objetivo en p_h y en un vector p que difiere de p_h solo en la zona indicada en la siguiente figura.

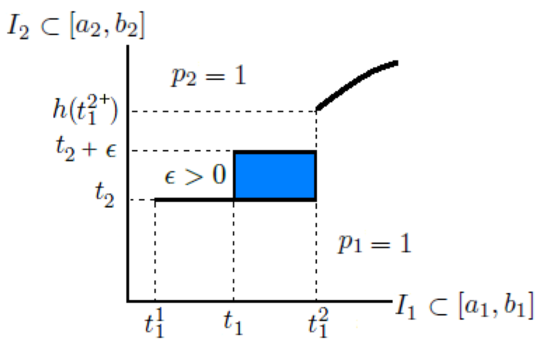


Figura 5.5: h constante y discontinua en t_1^2.

Y del desarrollo anterior sigue que:

$$\Delta_1'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_1^2} [c_2(t_2+\epsilon) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(t_2+\epsilon)\ ds_1$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \widetilde{\Delta_1}'(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_2(t_2) f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

2) Sea $t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$ cualquiera y supongamos primero que $t_1^1 > t_1^*$ y que h es continua en t_1^1. Definamos, para $\epsilon > 0$ y pequeño, la función Δ_2 como:

$$\begin{aligned}\Delta_2(\epsilon) &= \int_{h^{-1}(t_2-\epsilon)}^{t_1^1} \int_{t_2-\epsilon}^{h(s_1)} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 \\ &+ \int_{t_1^1}^{t_1} \int_{h(t_2-\epsilon)}^{t_2} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 \\ &= \int_{h^{-1}(t_2-\epsilon)}^{t_1^1} \widetilde{G_3}(s_1,\epsilon)\ ds_1 + \int_{t_1^1}^{t_1} \widetilde{G_4}(s_1,\epsilon)\ ds_1\end{aligned}$$

La función Δ_2 representa la diferencia entre evaluar la función objetivo en p_h y en un vector p que difiere de p_h solo en la zona indicada en la siguiente figura.

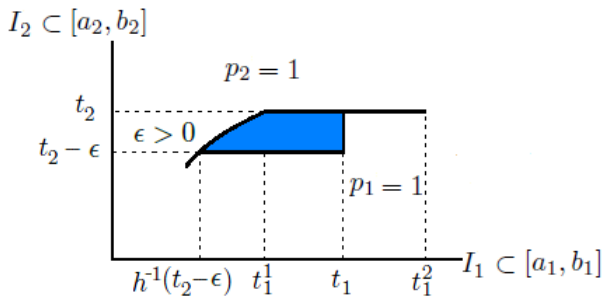


Figura 5.6: h constante y continua en t_1^1.

Como h es estrictamente creciente en $(h^{-1}(t_2-\epsilon), t_1^1)$, h es derivable c.t.p. en ese intervalo y h' será estrictamente positiva en su dominio, por lo tanto es posible definir h' en todo el conjunto $(h^{-1}(t_2-\epsilon), t_1^1)$ de modo que h' resulte continua a la derecha y estrictamente positiva. Luego, Δ_2 es diferenciable y su derivada es:

$$\Delta_2{}'(\epsilon) = \int_{h^{-1}(t_2-\epsilon)}^{t_1^1} \frac{\partial \widetilde{G_3}}{\partial \epsilon}(s_1,\epsilon)\ ds_1 + \frac{\widetilde{G_3}(h^{-1}(t_2-\epsilon),\epsilon)}{h'(h^{-1}(t_2-\epsilon))} + \int_{t_1^1}^{t_1} \frac{\partial \widetilde{G_4}}{\partial \epsilon}(s_1,\epsilon)\ ds_1$$

Pues la igualdad es clara en los puntos donde Δ_2 es derivable y en los restantes se debe a que $\widetilde{G_3}(h^{-1}(t_2-\epsilon),\epsilon)=0$. Desarrollando entonces se obtiene que:

$$\begin{aligned}
{\Delta_2}'(\epsilon) &= \int_{h^{-1}(t_2-\epsilon)}^{t_1^1} \left[c_2(t_2-\epsilon)-c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(t_2-\epsilon)\; ds_1 \\
&+ \int_{t_1^1}^{t_1} \left[c_2(t_2-\epsilon)-c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(t_2-\epsilon)\; ds_1 \\
&= \int_{h^{-1}(t_2-\epsilon)}^{t_1} \left[c_2(t_2-\epsilon)-c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(t_2-\epsilon)\; ds_1
\end{aligned}$$

Además, de la optimalidad de p_h se tiene que:

$$\Delta_2(\epsilon) \leq 0 \qquad \forall \epsilon > 0$$

Y por lo tanto:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \Delta_2'(\epsilon) = \int_{t_1^1}^{t_1} \left[c_2(t_2)-c_1(s_1)\right] f_2(t_2) f_1(s_1)\; ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

Este resultado también es cierto cuando h no es continua en t_1^1 y cuando $t_1^1 = t_1^*$, para desmostrarlo basta definir para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño:

$$\Delta_2(\epsilon) = \int_{t_1^1}^{t_1} \int_{t_2-\epsilon}^{t_2} \left[c_2(s_2)-c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(s_2)\; ds_2\; ds_1$$

Esta vez la función Δ_2 representa la diferencia entre evaluar la función objetivo en p_h y en un vector p que difiere de p_h solo en la zona indicada en la siguiente figura.

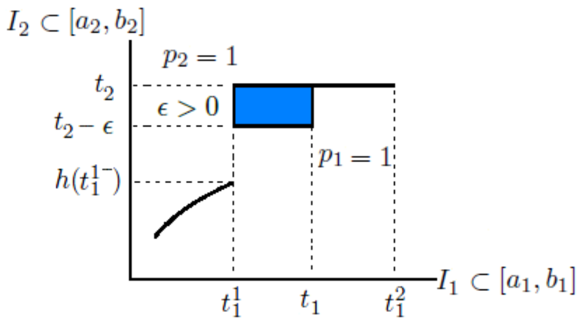


Figura 5.7: h constante y discontinua en t_1^1.

Y del desarrollo anterior sigue que:

$$\Delta_2'(\epsilon) = \int_{t_1^1}^{t_1} \left[c_2(t_2-\epsilon)-c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(t_2-\epsilon)\; ds_1$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \Delta_2'(\epsilon) = \int_{t_1^1}^{t_1} \left[c_2(t_2)-c_1(s_1)\right] f_2(t_2) f_1(s_1)\; ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

3) Análogo a 1), intercambiar jugadores.

4) Análogo a 2), intercambiar jugadores.

□

Observación: Como consecuencia del Lema 5.2.2 se tiene que si h es constante en un intervalo maximal $I = [t_1^1, t_1^2]$ y $h(I) = \{t_2\} \subset (t_2^*, b_2)$, entonces[4]:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 = 0$$

Además, si h^{-1} es constante en un intervalo maximal $I = [t_2^1, t_2^2]$ y $h^{-1}(I) = \{t_1\} \subset (t_1^*, b_1)$, entonces[5]:

$$\int_{t_2^1}^{t_2^2} [c_1(t_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\; ds_2 = 0$$

En el siguiente Lema buscaremos condiciones necesarias sobre los intervalos donde una función $(\widehat{P_2})$-óptima es estrictamente creciente.

Lema 5.2.3. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) Si h es estrictamente creciente y continua en un intervalo (t_1^1, t_1^2) entonces:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \qquad \forall t_1 \in (t_1^1, t_1^2)$$

2) Si h es estrictamente creciente y continua en un intervalo I, entonces c_1 es creciente en I y c_2 es creciente en $h(I)$.

Demostración.

1) Primero demostraremos que la igualdad se cumple c.t.p. en (t_1^1, t_1^2). Notemos que como h es estrictamente creciente en este intervalo, entonces h es derivable c.t.p. y además h es invertible y h^{-1} es continua. Consideremos un punto $t_1 \in (t_1^1, t_1^2)$ tal que h es diferenciable en t_1 y definamos la función Δ, para valores suficientemente pequeños de ϵ, como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon) &= \int_{t_1}^{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)} \int_{h(s_1)}^{h(t_1)+\epsilon} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\; ds_2\; ds_1 \\ &= \int_{t_1}^{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)} G(s_1, \epsilon)\; ds_1 \end{aligned}$$

Donde adicionalmente se ha definido la función G de forma tal que se cumpla la última igualdad. La función Δ corresponde a la diferencia entre la función objetivo

[4]El resultado también es válido para $I = [t_1^1, t_1^2)$, $I = (t_1^1, t_1^2]$ o $I = (t_1^1, t_1^2)$

[5]El resultado también es válido para $I = [t_2^1, t_2^2)$, $I = (t_2^1, t_2^2]$ o $I = (t_2^1, t_2^2)$

evaluada en p_h y en un vector de probabilidades p que es igual a p_h, excepto en una única zona donde se invierte la asignación de los jugadores. Dicha zona depende del signo de ϵ y ambos casos se muestran en la siguiente figura.

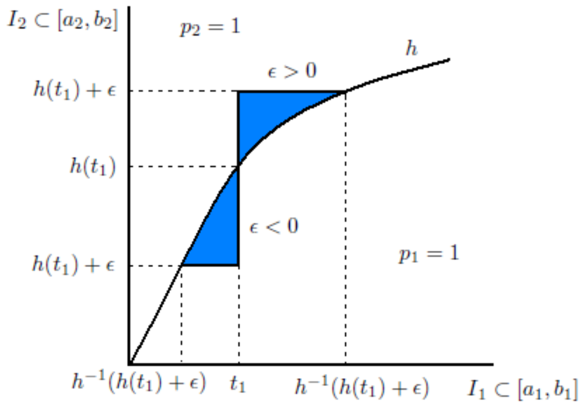


Figura 5.8: h estrictamente creciente y continua

De la optimalidad de p_h se tiene que:

$$\Delta(\epsilon) \geq 0 \qquad \forall \epsilon > 0$$

$$\Delta(\epsilon) \leq 0 \qquad \forall \epsilon < 0$$

Además, como h es estrictamente creciente en $(h^{-1}(t_2-\epsilon), h^{-1}(t_2+\epsilon))$, h es derivable c.t.p. en ese intervalo y h' será estrictamente positiva en su dominio, por lo tanto es posible definir h' en todo $(h^{-1}(t_2-\epsilon), h^{-1}(t_2+\epsilon))$ de modo que h' resulte continua a la derecha y estrictamente positiva. Luego, Δ es diferenciable y su derivada es:

$$\Delta'(\epsilon) = \int_{t_1}^{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)} \frac{\partial G}{\partial \epsilon}(s_1, \epsilon)\ ds_1 + \frac{G(h^{-1}(h(t_1)+\epsilon), \epsilon)}{h'(h^{-1}(h(t_1)+\epsilon))}$$

Pues esta igualdad es clara en los puntos donde Δ es derivable y en los restantes se debe a que $G(h^{-1}(h(t_1)+\epsilon), \epsilon) = 0$. Desarrollando entonces se obtiene que:

$$\Delta'(\epsilon) = \int_{t_1}^{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)} \left[c_2(h(t_1)+\epsilon) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(h(t_1)+\epsilon)\ ds_1$$

De donde se obtiene que $\Delta'(0) = 0$, por lo tanto hay dos posibles opciones. La primera es que el punto $\epsilon = 0$ sea mínimo o máximo local de Δ, lo cual ocurre sí y solamente si se cumple alguna de las siguientes propiedades:

i) $\exists\ \epsilon_1 > 0$ tal que $\Delta(\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_1]$

ii) $\exists\ \epsilon_2 > 0$ tal que $\Delta(\epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon \in [-\epsilon_2, 0]$

Si se cumple i), entonces las variaciones de p_h dibujadas en la figura 5.8 son soluciones de $(\widehat{P_2})$ y por lo tanto cumplen la siguiente condición necesaria del Lema 5.2.2.

$$\int_{h(t_1)}^{h(t_1)+\epsilon} \left[c_1(t_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 = 0 \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_1]$$

Lo que implica necesariamente que $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$. Análogamente, si se cumple ii), entonces las variaciones de p_h dibujadas en la figura 5.8 son soluciones de $(\widehat{P_2})$ y se cumple:

$$\int_{h(t_1)+\epsilon}^{h(t_1)} [c_1(t_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\, ds_2 = 0 \quad \forall \epsilon \in [-\epsilon_2, 0]$$

Lo que también implica que $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$. Se concluye entonces el resultado en este caso.

La segunda opción es que $\epsilon = 0$ no sea mínimo ni máximo local de Δ. Recordando que h es derivable en t_1, se tiene que Δ' es derivable en $\epsilon = 0$, en efecto, por el teorema del valor medio integral se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Delta''(0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\Delta'(\epsilon)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{t_1}^{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)} [c_2(h(t_1)+\epsilon) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(h(t_1)+\epsilon)\, ds_1 \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \tfrac{h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)-t_1}{\epsilon} [c_2(h(t_1)+\epsilon) - c_1(\xi)]\, f_1(\xi) f_2(h(t_1)+\epsilon),\ \xi \in [t_1, h^{-1}(h(t_1)+\epsilon)] \\
&= \frac{1}{h'(t_1)} [c_2(h(t_1)) - c_1(t_1)]\, f_1(t_1) f_2(h(t_1))
\end{aligned}$$

Y como $\epsilon = 0$ no es mínimo ni máximo local, necesariamente $\Delta''(0) = 0$, esto implica que:

$$[c_2(h(t_1)) - c_1(t_1)]\, f_1(t_1) f_2(h(t_1)) = 0$$

Y como f_1 y f_2 son estrictamente positivas, se concluye que:

$$c_2(h(t_1)) = c_1(t_1)$$

Se tiene entonces que $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$ c.t.p. en (t_1^1, t_1^2), como c_1, c_2 y h son continuas en (t_1^1, t_1^2) se concluye que:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \quad \forall t_1 \in (t_1^1, t_1^2)$$

2) Sabemos que h es solución de la ecuación $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$ en I. Como h es estrictamente creciente se tiene entonces que si c_1 es creciente (decreciente) en $\widehat{I} \subset I$ entonces c_2 debe ser creciente (decreciente) en $h(\widehat{I})$. Supongamos entonces que existe algún $\widehat{t_1} \in I$ y algún $\epsilon > 0$ tal que c_1 es decreciente en $\widehat{I} = [\widehat{t_1}, \widehat{t_1} + \epsilon]$ y c_2 es decreciente en $h(\widehat{I})$. Definamos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\widehat{h}(t_1) = \begin{cases} h(\widehat{t_1}) & \forall t_1 \in \widehat{I} \\ h(t_1) & \forall t_1 \notin \widehat{I} \end{cases}$$

Entonces $\widehat{h}$ es $(\widehat{P_2})$-factible y se tiene que:

$$\begin{aligned}
I(\widehat{h}) - I(h) &= \int_{\widehat{t_1}}^{\widehat{t_1}+\epsilon} \int_{h(\widehat{t_1})}^{h(s_1)} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \\
&\geq \int_{\widehat{t_1}}^{\widehat{t_1}+\epsilon} \int_{h(\widehat{t_1})}^{h(s_1)} [c_2(h(s_1)) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si descartamos el caso trivial en que c_1 y c_2 son constantes en todos los posibles conjuntos $\widehat{I}$ y $h(\widehat{I})$ respectivamente, se tiene que $I(\widehat{h}) > I(h)$ lo que contradice la optimalidad de h. Luego, necesariamente h es creciente en I y c_2 es creciente en $h(I)$.

□

Antes de continuar, detengámonos en el ítem 2) del Lema 5.2.3, donde se establece que si h es $(\widehat{P_2})$-óptima, c_1 es creciente en cada intervalo I donde h es estrictamente creciente y continua. Para obtener un resultado más fuerte supongamos que existe un intervalo $I' = [t_1^1, t_1^2] \subseteq I$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $c_1(t_1) = c \quad \forall t_1 \in I'$. Se tiene entonces que:

$$c = c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \quad \forall t_1 \in I'$$

Por lo tanto c_1 es constante en I' y c_2 es constante en $h(I')$, luego definiendo $h' : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$h'(t_1) = \begin{cases} h(t_1^1) & \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2] \\ h(t_1) & \forall t_1 \notin [t_1^1, t_1^2] \end{cases}$$

Se tiene que h' también será $(\widehat{P_2})$-óptima pues:

$$J(h) - J(h') = \int_{t_1^1}^{t_1^2} \int_{h(t_1^1)}^{h(s_1)} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 = 0$$

Reemplazando h por h', podemos suponer de ahora en adelante que si c_1 es constante en algún intervalo, entonces toda función h' $(\widehat{P_2})$-óptima será constante en ese intervalo. Bajo este supuesto el ítem 2) del Lema 5.2.3 nos dice que si h es estrictamente creciente y continua en un intervalo I, entonces c_1 es <u>estrictamente creciente</u> en I y c_2 es <u>estrictamente creciente</u> en $h(I)$.

A continuación presentamos un Lema que será de gran utilidad para posteriores demostraciones.

Lema 5.2.4. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) Si h es constante en un intervalo maximal $I = [t_1^1, t_1^2] \subset (t_1^*, b_1)$, entonces[6] $c_1(t_1^1) = c_1(t_1^2)$.

2) Si h^{-1} es constante en un intervalo maximal $I = [t_2^1, t_2^2] \subset (t_2^*, b_2)$ entonces[7] $c_2(t_2^1) = c_2(t_2^2)$.

Demostración.

1) Notemos que la maximalidad de I implica que $h(I) \subset (t_2^*, b_2)$, digamos entonces que $h(I) = \{t_2\} \subset (t_2^*, b_2)$. Supongamos que $c_1(t_1^1) < c_2(t_2)$, por continuidad de c_1 se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\left|s_1 - t_1^1\right| < \epsilon \Rightarrow c_1(s_1) < c_2(t_2)$$

[6] El resultado también es válido para $I = [t_1^1, t_1^2)$, $I = (t_1^1, t_1^2]$ o $I = (t_1^1, t_1^2)$

[7] El resultado también es válido para $I = [t_2^1, t_2^2)$, $I = (t_2^1, t_2^2]$ o $I = (t_2^1, t_2^2)$

Ajustando ϵ de modo que $t_1^1 + \frac{\epsilon}{2} < t_1^2$ se tiene que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^1+\frac{\epsilon}{2}} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 > 0$$

Lo cual contradice la condición necesaria 3) del Lema 5.2.2, por lo tanto $c_1(t_1^1) \geq c_2(t_2)$. Análogamente y haciendo uso de la condición necesaria 2) del mismo Lema, es fácil demostrar que $c_2(t_2) \geq c_1(t_1^2)$ y por lo tanto se tiene que:

$$c_1(t_1^1) \geq c_2(t_2) \geq c_1(t_1^2)$$

Demostremos ahora que $c_2(t_2) = c_1(t_1^1)$. Si h es continua en t_1^1 se tiene que $h(t_1^1) = t_2$, por la maximalidad de I, necesariamente existe $\widetilde{t_1} < t_1^1$ tal que h es estrictamente creciente en $(\widetilde{t_1}, t_1^1)$. Por lo tanto, sabemos que se satisface:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \qquad \forall t_1 \in (\widetilde{t_1}, t_1^1)$$

Luego, por continuidad de c_1, c_2 y h se concluye que $c_1(t_1^1) = c_2(t_2)$. Por otro lado, si h no es continua en t_1^1 digamos que $h(t_1^1) = t_0 < t_2$. Como esta discontinuidad de h corresponde a un intervalo maximal $\widehat{I} = \{t_0, t_2\}$ donde h^{-1} es constante, sabemos que:

$$\int_{t_0}^{t_2} \left[c_1(t_1^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 = 0$$

Consideremos ahora una función de probabilidades $\widehat{p}$ que es distinta a p_h solamente en la zona indicada en la siguiente figura:

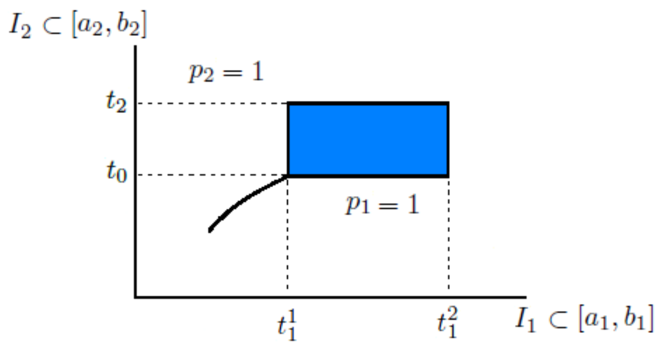


Figura 5.9: h discontinua en t_1^1.

Como $\widehat{p}$ es $(\widehat{P_2})$-factible, de la optimalidad de p_h sigue que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_0}^{t_2} c_1(s_1)\; f_1(s_1)\; f_2(s_2)\; ds_1 ds_2 \geq \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_0}^{t_2} c_2(s_2)\; f_1(s_1)\; f_2(s_2)\; ds_1 ds_2$$

Así, recordando que h es constante en I, se cumple:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 = 0$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_0}^{t_2} c_2(t_2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2 \geq \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_0}^{t_2} c_1(t_1^1)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2$$

Y se concluye la desigualdad que faltaba:

$$c_2(t_2) \geq c_1(t_1^1)$$

Ahora demostremos que $c_2(t_2) = c_1(t_1^2)$. Si h es continua en t_1^2 se tiene que $h(t_1^2) = t_2$, por la maximalidad de I, necesariamente existe $\widehat{t_1} > t_1^2$ tal que h es estrictamente creciente en $(t_1^2, \widehat{t_1})$. Luego:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \qquad \forall t_1 \in (t_1^2, \widehat{t_1})$$

Y por continuidad de c_1, c_2 y h se concluye que $c_1(t_1^2) = c_2(t_2)$. Si h no es continua en t_1^2, digamos que $h(t_1^2) = t_4 > t_2$. Como esta discontinuidad de h corresponde a un intervalo maximal $\widetilde{I} = \{t_2, t_4\}$ donde h^{-1} es constante, se tiene que:

$$\int_{t_2}^{t_4} \left[c_1(t_1^2) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 = 0$$

Consideremos ahora una función de probabilidades $\widetilde{p}$ que es distinta a p_h solamente en la zona indicada en la siguiente figura:

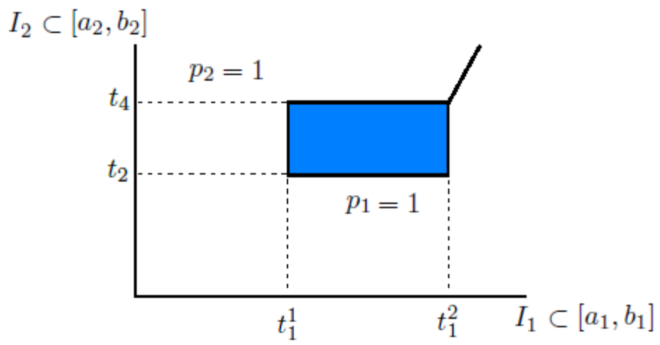


Figura 5.10: h discontinua en t_1^2.

Como $\widetilde{p}$ es $(\widehat{P_2})$-factible, de la optimalidad de p_h sigue que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} c_2(s_2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2 \geq \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} c_1(s_1)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2$$

Además, como h es constante en I, se cumple:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\ f_1(s_1)\ ds_1 = 0$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} c_1(t_1^2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2 \geq \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} c_2(t_2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_1 ds_2$$

Y concluímos que:

$$c_1(t_1^2) \geq c_2(t_2)$$

2) Análoga a la demostración de 1)

□

Para terminar, enunciamos el último Lema con condiciones necesarias.

Lema 5.2.5. *Sea* $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$*-óptima, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1a) Sea $t_1^M = \text{ínf}\{t_1 \in [t_1^*, b_1] : h(t_1) = b_2\}$ *y supongamos que este valor es finito. Entonces se cumple que* $c_2(b_2) \leq c_1(t_1^M)$ *y además, si* $t_1^M > t_1^*$ *se cumple:*

$$\int_{t_1^M}^{t_1} \left[c_1(t_1^M) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^M, b_1]$$

1b) Sea $t_2^M = \text{ínf}\{t_2 \in [t_2^*, b_2] : h^{-1}(t_2) = b_1\}$ *y supongamos que este valor es finito. Entonces se cumple que* $c_1(b_1) \leq c_2(t_2^M)$ *y además, si* $t_2^M > t_2^*$ *se cumple:*

$$\int_{t_2^M}^{t_2} \left[c_2(t_2^M) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^M, b_2]$$

2a) Sea $t_1^m = \sup\{t_1 \in [t_1^*, b_1] : h(t_1) = t_2^*\}$ *y supongamos que este valor es finito. Entonces se cumple que* $c_2(t_2^*) \geq c_1(t_1^m)$ *y además, si* $t_1^m < b_1$ *se cumple:*

$$\int_{t_1}^{t_1^m} [c_1(t_1^m) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^m]$$

2b) Sea $t_2^m = \sup\{t_2 \in [t_2^*, b_2] : h^{-1}(t_2) = t_1^*\}$ *y supongamos que este valor es finito. Entonces se cumple que* $c_1(t_1^*) \geq c_2(t_2^m)$ *y además, si* $t_2^m < b_2$ *se cumple:*

$$\int_{t_2}^{t_2^m} [c_2(t_2^m) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\ ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, t_2^m]$$

Demostración.

1a) Del Lema 5.2.2 sabemos que:

$$\int_{t_1^M}^{t_1} [c_2(b_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^M, b_1]$$

Partamos suponiendo que $c_2(b_2) > c_1(t_1^M)$. Como c_1 es continua, escojamos $\widetilde{t_1} > t_1^M$ tal que:

$$c_2(b_2) > c_1(t_1) \quad \forall t_1 \in [t_1^M, \widetilde{t_1}]$$

De esta manera se tendría que:

$$\int_{t_1^M}^{\widetilde{t_1}} [c_2(b_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 > 0$$

Lo cual es una contradicción. Para la desigualdad integral, supongamos que $t_1^M > t_1^*$ y analicemos primero el caso en que h es continua en t_1^M. Se tiene entonces que $h(t_1^M) = b_2$ y además existe $\widetilde{t_1} < t_1^M$ tal que h es estrictamente creciente en $(\widetilde{t_1}, t_1^M)$. Esto último implica que:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \qquad \forall t_1 \in (\widetilde{t_1}, t_1^M)$$

Y por la continuidad de c_1, c_2 y h se tiene que $c_1(t_1^M) = c_2(h(t_1^M)) = c_2(b_2)$. Recordando nuevamente que del Lema 5.2.2 sabemos que:

$$\int_{t_1^M}^{t_1} [c_2(b_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^M, b_1]$$

Se concluye lo deseado. En el caso en que h no es continua en t_1^M, digamos que:

$$\lim_{t_1 \to t_1^{M-}} h(t_1) = t_2 < b_2$$

Tomemos $t_1 \in [t_1^M, b_1]$ cualquiera y consideremos una función de probabilidades p_{t_1} que es distinta de p_h solamente en la zona indicada en la siguiente figura:

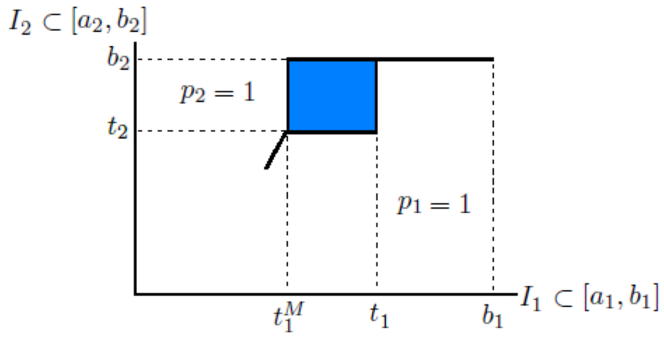


Figura 5.11: h discontinua en t_1^M.

Como p_{t_1} es $(\widehat{P_2})$-factible, de la optimalidad de p_h sigue que:

$$\int_{t_1^M}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} c_1(s_1)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1 \geq \int_{t_1^M}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1$$

De la discontinuidad de h en t_1^M se tiene que:

$$\int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2)\ f_2(s_2)\ ds_2 = \int_{t_2}^{b_2} c_1(t_1^M)\ f_2(s_2)\ ds_2$$

Y por lo tanto:

$$\int_{t_1^M}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} \left[c_1(t_1^M) - c_1(s_1)\right]\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1 \leq 0$$

Lo que implica que necesariamente:

$$\int_{t_1^M}^{t_1} \left[c_1(t_1^M) - c_1(s_1)\right]\ f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0$$

1b) Análogo a la demostración de 1a).

2a) Del Lema 5.2.2 sabemos que:

$$\int_{t_1}^{t_1^m} [c_2(t_2^*) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^m]$$

Partamos suponiendo que $c_2(t_2^*) < c_1(t_1^m)$ y escojamos $\widetilde{t_1} < t_1^m$ tal que:

$$c_2(t_2^*) < c_1(t_1) \quad \forall t_1 \in [\widetilde{t_1}, t_1^m]$$

Por lo tanto se cumple:

$$\int_{\widetilde{t_1}}^{t_1^m} [c_2(t_2^*) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 < 0$$

Lo que es una contradicción. Para la desigualdad integral, supongamos que $t_1^m < b_1$ y analicemos primero el caso en que h es continua en t_1^m. Se tiene entonces que $h(t_1^m) = t_2^*$ y además existe $\widetilde{t_1} > t_1^m$ tal que h es estrictamente creciente en $(t_1^m, \widetilde{t_1})$. Luego, se cumple:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \qquad \forall t_1 \in (t_1^m, \widetilde{t_1})$$

Por continuidad de c_1, c_2 y h se tiene que $c_1(t_1^m) = c_2(h(t_1^m)) = c_2(t_2^*)$. Lo que junto a la desigualdad inicial derivada del Lema 5.2.2 permite concluir. En el caso en que h no sea continua en t_1^m, digamos que:

$$\lim_{t_1 \to t_1^{m+}} h(t_1) = t_2 > t_2^*$$

Tomemos $t_1 \in [t_1^*, t_1^m]$ cualquiera y consideremos una función de probabilidades p_{t_1} que es distinta de p_h solamente en la zona indicada en la siguiente figura:

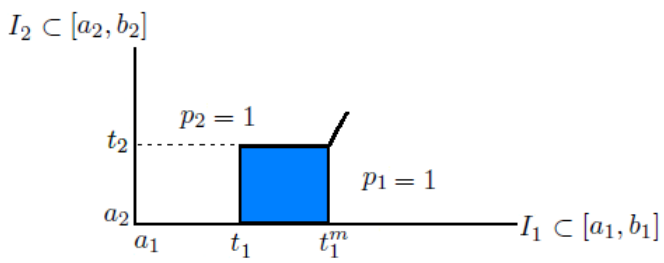


Figura 5.12: h discontinua en t_1^m.

Como p_{t_1} es $(\widehat{P_2})$-factible, de la optimalidad de p_h se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_1^m} \int_{t_2^*}^{t_2} c_2(s_2)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1 \geq \int_{t_1}^{t_1^m} \int_{t_2^*}^{t_2} c_1(s_1)\ f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1$$

De la discontinuidad de h en t_1^m se tiene que:

$$\int_{t_2^*}^{t_2} c_2(s_2)\ f_2(s_2)\ ds_2 = \int_{t_2^*}^{t_2} c_1(t_1^m)\ f_2(s_2)\ ds_2$$

Y por lo tanto:

$$\int_{t_1}^{t_1^m}\int_{t_2^*}^{t_2} [c_1(t_1^m) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ f_2(s_2)\ ds_2 ds_1 \geq 0$$

Lo que implica que necesariamente:

$$\int_{t_1}^{t_1^m} [c_1(t_1^m) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

2b) Análogo a la demostración de 2a).

□

Corolario 5.2.6. *Sea* $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$*-óptima y definamos los conjunto* λ_h^1 *y* λ_h^2 *como:*

$$\lambda_h^1 = \{t_1 \in (t_1^*, b_1) : \exists\ t_1^1, t_1^2 \in (t_1^*, b_1),\ t_1^1 < t_1 < t_1^2,\ h \text{ constante en } (t_1^1, t_1^2)\}$$

$$\lambda_h^2 = \{t_2 \in (t_2^*, b_2) : \exists\ t_2^1, t_2^2 \in (t_2^*, b_2),\ t_2^1 < t_2 < t_2^2,\ h^{-1} \text{ constante en } (t_2^1, t_2^2)\}$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

i) La restricción de c_1 *al conjunto* $\Lambda_h^1 = (t_1^*, b_1)\setminus\lambda_h^1$ *es una función creciente. Además si existe* $\epsilon_1 > 0$ *tal que* h *es estrictamente creciente y continua en* $[t_1^*, t_1^* + \epsilon_1]$ *lo mismo vale también en* $\Lambda_h^1 = [t_1^*, b_1) \setminus \lambda_h^1$*, y si existe* $\epsilon_2 > 0$ *tal que* h *es estrictamente creciente y continua en* $[b_1 - \epsilon_2, b_1]$ *lo mismo vale también en* $\Lambda_h^1 = (t_1^*, b_1] \setminus \lambda_h^1$*.*

ii) La restricción de c_2 *al conjunto* $\Lambda_h^2 = (t_2^*, b_2)\setminus\lambda_h^2$ *es una función creciente. Además si existe* $\epsilon_3 > 0$ *tal que* h^{-1} *es estrictamente creciente y continua en* $[t_2^*, t_2^* + \epsilon_3]$ *lo mismo vale también en* $\Lambda_h^2 = [t_2^*, b_2) \setminus \lambda_h^2$*, y si existe* $\epsilon_4 > 0$ *tal que* h^{-1} *es estrictamente creciente y continua en* $[b_2 - \epsilon_4, b_2]$ *lo mismo vale también en* $\Lambda_h^2 = (t_2^*, b_2] \setminus \lambda_h^2$*.*

Demostración.

i) Consideremos simplemente $\Lambda_h^1 = (t_1^*, b_1) \setminus \lambda_h^1$ y notemos que Λ_h^1 es una unión finita de intervalos (o singletons) disjuntos que llamaremos ordenadamente por $\{I_j\}_{j=1}^N$.

Si $N = 1$, por el Lema 5.2.3 la conclusión es directa y si $N > 1$ se tiene que I_j es cerrado $\forall j \in \{2, \ldots, N-1\}$, I_1 es cerrado por la derecha e I_N es cerrado por la izquierda.

Si denotamos $I_j = [d_j, D_j]$ (con las respectivas cerraduras para I_1 e I_N), por el Lema 5.2.3 sabemos que c_1 es creciente en I_j $\forall j \in \{1, \ldots, N\}$ y además por el Lema 5.2.4 se tiene que $c_1(D_j) = c_1(d_{j+1})$ $\forall j \in \{1, \ldots, N-1\}$. La conclusión entonces es directa.

Además, si existe $\epsilon_1 > 0$ tal que h es estrictamente creciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ se tiene que $I_1 = (t_1^*, D_1]$, entonces podemos redefinir $I_1 = [t_1^*, D_1]$ y análogamente se concluye lo deseado. Igualmente en el caso en que exista $\epsilon_2 > 0$ tal que h es estrictamente creciente en $[b_1 - \epsilon_2, b_1]$ se tiene que $I_N = [d_N, b_1)$, redefiniendo ahora $I_N = [d_N, b_1]$ análogamente se concluye lo deseado.

ii) Análogo a i), intercambiar jugadores.

$\square$

Observación: En términos de h es posible escribir λ_h^2 como:

$$\begin{aligned}\lambda_h^2 \;=\; \{t_2 \in (t_2^*, b_2) \;:\; & [\exists\, \widehat{t_1} \in (t_1^*, b_1) \text{ tal que } \lim_{t_1 \to \widehat{t_1}^-} h(t_1) < t_2 < \lim_{t_1 \to \widehat{t_1}^+} h(t_1)] \vee \\ & [t_2^* < t_2 < \lim_{t_1 \to t_1^{*+}} h(t_1)] \;\vee\; [\lim_{t_1 \to b_1^-} h(t_1) < t_2 < b_2]\}\end{aligned}$$

Además, que h^{-1} sea estrictamente creciente y continua en una vecindad de t_2^* es equivalente a que exista $t_1^1 \in [t_1^*, b_1)$ tal que $h(t_1^1) = t_2^*$ y h sea estrictamente creciente y continua en $[t_2^1, t_2^1 + \epsilon_1]$, para algún $\epsilon_1 > 0$. Por último, que h^{-1} sea estrictamente creciente y continua en una vecindad de b_2 es equivalente a que exista $t_1^2 \in (t_1^*, b_1]$ tal que $h(t_1^2) = b_2$ y h sea estrictamente creciente y continua en $[t_2^2 - \epsilon_2, t_2^2]$, para algún $\epsilon_2 > 0$.

Corolario 5.2.7. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima y sea $(t_1, t_2) \in [t_1^*, b_1] \times [t_2^*, b_2]$ tal que $t_2 = h(t_1)$ y existe un intervalo I_h donde h es estrictamente creciente y tal que $t_1 \in I_h$. Entonces se cumplen:*

1a)
$$\int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \geq 0$$

1b)
$$\int_{t_2^*}^{t_2} [c_2(t_2) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \geq 0$$

2a)
$$\int_{t_1}^{b_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \leq 0$$

2b)
$$\int_{t_2}^{b_2} [c_2(t_2) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \leq 0$$

Demostración. Consideremos $\Lambda_h^1 = (t_1^*, b_1) \setminus \lambda_h^1$ y los intervalos $\{I_j\}_{j=1}^N$ como en la demostración del Corolario 5.2.6. Se tiene entonces que existe un índice i_0 tal que $I_h \subseteq I_{i_0}$ y por la optimalidad de h se cumple lo siguiente:

$$\int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, N-1\}$$

$$c_1(t_1) \leq c_1(s_1) \quad \forall s_1 \in \Lambda_h^1 \cap [t_1, b_1]$$

$$c_1(t_1) \geq c_1(s_1) \quad \forall s_1 \in \Lambda_h^1 \cap [t_1^*, t_1]$$

Luego, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & \int_{t_1^*}^{d_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{d_i}^{D_i} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
+ \; & \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \int_{d_{i_0}}^{t_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
\geq \; & \int_{t_1^*}^{d_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + 0 + \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + 0 \\
\geq \; & \int_{t_1^*}^{d_1} \left[c_1(d_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(D_i) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

Y también se cumple:

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{b_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & \int_{t_1}^{D_{i_0}} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=i_0}^{N-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
+ \; & \sum_{i=i_0+1}^{N} \int_{d_i}^{D_i} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \int_{D_N}^{b_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
\leq \; & 0 + \sum_{i=i_0}^{N-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + 0 + \int_{D_N}^{b_1} \left[c_1(t_1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
\leq \; & \sum_{i=i_0}^{N-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} \left[c_1(D_i) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \int_{D_N}^{b_1} \left[c_1(D_N) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

Las desigualdades $2a)$ y $2b)$ son análogas. □

5.3. Comparación con solución de Myerson

Consideremos un intervalo maximal $[t_1^1, t_1^2]$ donde $\bar{c_1}$ es constante, es decir $G_1' \circ F_1$ es constante en el intervalo maximal $[t_1^1, t_1^2]$. Diremos entonces que:

$$G_1'(F_1(t_1)) = l \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

Esto implica que G_1 es lineal en $[F_1(t_1^1), F_1(t_1^2)]$ y además, por la maximalidad del intervalo, que $G_1(F_1(t_1^1)) = H_1(F_1(t_1^1))$ y $G_1(F_1(t_1^2)) = H_1(F_1(t_1^2))$. Luego, se cumple que:

$$H_1(F_1(t_1^2)) = H_1(F_1(t_1^1)) + l\left(F_1(t_1^2) - F_1(t_1^1)\right)$$

Lo que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\int_{a_1}^{t_1^2} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 &= \int_{a_1}^{t_1^1} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{t_1}^{t_1^2} l\ f_1(s_1)\ ds_1 \\
\iff \int_{t_1}^{t_1^2} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 &= \int_{t_1}^{t_1^2} l\ f_1(s_1)\ ds_1 \\
\iff \qquad 0 &= \int_{t_1}^{t_1^2} [l - c_1(s_1)]\ \ f_1(s_1)\ ds_1
\end{aligned}$$

Ahora bien, excepto cuando $t_1^1 = a_1$, la maximalidad de $[t_1^1, t_1^2]$ implica que existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$G_1(q) = H_1(q) \quad \forall q \in [F_1(t_1^1) - \epsilon, F_1(t_1^1)]$$

Por lo tanto se tiene que $G_1'(F_1(t_1^1)) = H_1'(F_1(t_1^1))$, lo que es equivalente a que $l = c_1(t_1^1)$. Análogamente deducimos que, salvo cuando $t_1^2 = b_1$, la maximalidad de $[t_1^1, t_1^2]$ implica que $l = c_1(t_1^2)$. Además, notemos que para los puntos t_1 al interior del intervalo $[t_1^1, t_1^2]$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
G_1'(F_1(t_1^1)) &\leq \frac{H_1(F_1(t_1)) - H_1(F_1(t_1^1))}{F_1(t_1) - F_1(t_1^1)} \\
\iff \quad l\ (F_1(t_1) - F_1(t_1^1)) &\leq H_1(F_1(t_1)) - H_1(F_1(t_1^1)) \\
\iff \quad \int_{t_1^1}^{t_1} l\ f_1(s_1)\ ds_1 &\leq \int_{a_1}^{t_1} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 - \int_{a_1}^{t_1^1} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 \\
\iff \quad \int_{t_1^1}^{t_1} (l - c_1(s_1))\ \ f_1(s_1)\ ds_1 &\leq 0
\end{aligned}$$

Luego, las condiciones que resumen los resultados integrales son:

$$\int_{t_1^1}^{t_1} (l - c_1(s_1))\ \ f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

$$\int_{t_1}^{t_1^2} (l - c_1(s_1))\ \ f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

Con estos resultados, es directo demostrar que si $h^* : [t_1^*, b_1] \rightarrow [t_2^*, b_2]$ es la función $(\widehat{P_2})$-óptima asociada a la solución de Myerson, en cada situación posible de intervalos donde h^* sea constante se cumplen las condiciones necesarias de optimalidad obtenidas en este capítulo. Haciendo un análisis análogo con la función $\bar{c_2}$, concluímos que en cada situación posible para intervalos donde h^{*-1} sea constante, también se cumplen las condiciones necesarias de optimalidad.

Por último, si existe un intervalo maximal $[t_1^3, t_1^4]$ donde $\bar{c_1}$ es estrictamente creciente, se tiene que $G_1' \circ F_1$ es estrictamente creciente en $[t_1^3, t_1^4]$. Luego, necesariamente se debe cumplir:

$$G_1(q) = H_1(q) \quad \forall t_1 \in [t_1^3, t_1^4]$$

Pues de lo contrario, G_1 sería lineal en algún subintervalo de $[t_1^3, t_1^4]$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} & G_1'(q) = H_1'(q) && \forall q \in [F_1(t_1^3), F_1(t_1^4)] \\ \iff \quad & G_1'(F_1(t_1)) = H_1'(F_1(t_1)) && \forall t_1 \in [t_1^3, t_1^4] \\ \iff \quad & \bar{c_1}(t_1) = c_1(t_1) && \forall t_1 \in [t_1^3, t_1^4] \end{aligned}$$

Por lo tanto, es claro también que en intervalos donde h^* sea estrictamente creciente se cumplen las condiciones necesarias de optimalidad encontradas en este capítulo.

Capítulo 6

Caso de dos compradores: Algoritmo

6.1. Algoritmo

Las condiciones necesarias obtenidas en el capítulo anterior sugieren un algoritmo natural para la búsqueda de soluciones del problema $(\widehat{P_2})$ mediante la búsqueda de alguna función h que sea $(\widehat{P_2})$-óptima. Éste consiste en ir chequeando cuáles grupos de condiciones necesarias es posible satisfacer y saber así qué forma puede tener la función h en el intervalo $[t_1^*, b_1]$.

Antes de proponer un algoritmo que permita encontrar la función $(\widehat{P_2})$-óptima, analizaremos aún más los casos extremos del problema, que son cuando la solución de $(\widehat{P_2})$ es $p_1^* \equiv 1$ o $p_2^* \equiv 1$, y encontraremos condiciones necesarias más generales que las del capítulo anterior. A continuación haremos notar que hay una clase de funciones $(\widehat{P_2})$-factibles que no es necesario que sean consideradas en la búsqueda del algoritmo. Esto se debe a que la optimalidad de alguna de ellas implica la optimalidad de otra función que no pertenece a dicha clase y por lo tanto bastará considerar solamente el conjunto de las funciones que no están en esa clase.

Por último motraremos, para mejor entendimiento, un cuadro resumen con todas las situaciones que el algoritmo sí considera y las condiciones necesarias conocidas en cada una de ellas.

Comenzaremos analizando el caso en que la solución del problema es $p_1^* \equiv 1$, lo que es equivalente a que $h^1 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como sigue sea $(\widehat{P_2})$-óptima.

$$h^1(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

Las condiciones necesarias obtenidas en el capítulo anterior y que aplican en este caso son las siguientes:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} [c_2(b_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

$$\int_{t_2}^{b_2} [c_1(t_1^*) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\; ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

Para obtener una condición necesaria más general, consideraremos, para algunos $t_1 \in [t_1^*, b_1]$, $t_2 \in [t_2^*, b_2]$, la función $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como:

$$\widetilde{h}(s_1) = \begin{cases} t_2 & \forall s_1 \in [t_1^*, t_1] \\ b_2 & \forall s_1 \in (t_1, b_1] \end{cases}$$

Dado que h^1 es $(\widehat{P_2})$-óptima, se cumple necesariamente que:

$$J(h^1) - J(\widetilde{h}) = \int_{t_1^*}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} \left[c_1(s_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \geq 0$$

Y por supuesto lo anterior es válido para cualquier t_1 y t_2, se tiene entonces la siguiente condición necesaria de optimalidad para h^1:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} \left[c_1(s_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1] \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

En caso de que la solución del problema sea $p_2^* \equiv 1$, o equivalentemente $h^2 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como:

$$h^2(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

Sea $(\widehat{P_2})$-óptima, las condiciones necesarias del capítulo anterior que aplican son las siguientes:

$$\int_{t_1}^{b_1} \left[c_2(t_2^*) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

$$\int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_1(b_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

Para obtener una condición necesaria más general, consideraremos la función $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como:

$$\widetilde{h}(s_1) = \begin{cases} t_2^* & \forall s_1 \in [t_1^*, t_1] \\ t_2 & \forall s_1 \in (t_1, b_1] \end{cases}$$

Para algunos $t_1 \in [t_1^*, b_1]$, $t_2 \in [t_2^*, b_2]$, y la optimalidad de h^2 implicará entonces que:

$$J(h^2) - J(\widetilde{h}) = \int_{t_1}^{b_1} \int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_2(s_2) - c_1(s_1)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \geq 0$$

Obteniéndose la condición necesaria de optimalidad siguiente para h^2:

$$\int_{t_1}^{b_1} \int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_2(s_2) - c_1(s_1)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1] \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

Notemos que, tanto en este caso como en al anterior, la condición necesaria recién obtenida implica a las que se habían obtenido en el capítulo anterior. Por esta razón y por otras que mostraremos más adelante, para los casos extremos del problema trabajeremos solamente con estas últimas condiciones obtenidas.

La siguiente proposición justifica el hecho de que dentro de las parametrizaciones de la frontera de los conjuntos de asignación que son constantes en un intervalo maximal (t_1^*, t_1^2), solamente consideraremos aquellas que son continuas en el extremo derecho t_1^2.

Proposición 6.1.1. *Sea* $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ *creciente para la cual existen* $t_1^2 \in (t_1^*, b_1)$ *y* $t_2 \in (t_2^*, b_2)$ *tales que:*

$$h(t_1) = t_2 \quad \forall t_1 \in (t_1^*, t_1^2)$$
$$t_4 := \lim_{t_1 \to t_1^{2+}} h(t_1) > t_2$$

Entonces, si h *es* $(\widehat{P_2})$*-óptima, se tiene que* $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ *definida por:*

$$\widetilde{h}(t_1) = \begin{cases} t_4 & \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^2] \\ h(t_1) & \forall t_1 \in (t_1^2, b_1] \end{cases}$$

También es $(\widehat{P_2})$*-óptima.*

Demostración. Como h es $(\widehat{P_2})$-óptima, del Lema 5.2.2 sabemos que:

$$\int_{t_1^*}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 = 0$$
$$\int_{t_2}^{t_4} \left[c_1(t_1^2) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 = 0$$
$$\int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_1(t_1^2) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 \le 0 \quad \forall \widetilde{t_2} \in [t_2, t_4]$$

De la última condición se deduce que $c_1(t_1^2) \le c_2(t_2)$ y por lo tanto:

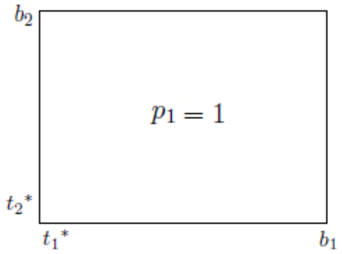
$$\begin{aligned}
J(h) - J(\widetilde{h}) &= \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \\
&\le \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_4} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \\
&= \int_{t_2}^{t_4}\int_{t_1^*}^{t_1^2} [c_2(t_2) - c_1(s_1)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_1\; ds_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Así, como h es $(\widehat{P_2})$-óptima, necesariamente $\widetilde{h}$ también es $(\widehat{P_2})$-óptima. □

Gracias al resultado anterior, y a la regularidad de las funciones que son $(\widehat{P_2})$-óptimas, podemos considerar una cantidad reducida de formas de las soluciones de $(\widehat{P_2})$. Si existe un intervalo maximal $[t_1^*, t_1^2) \subset [t_1^*, b_1)$ donde h es constante y $h([t_1^*, t_1^2)) = \{\widehat{t_2}\} \subset (t_2^*, b_2)$, podemos asumir que h es continua en t_1^2 y por lo tanto estrictamente creciente en $[t_1^2, t_1^2 + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$. Podemos hacer lo mismo con h^{-1} y asumir que si existe un intervalo maximal $[t_2^*, t_2^2) \subset [t_2^*, b_2)$ donde h^{-1} es constante y $h^{-1}([t_2^*, t_2^2)) = \{\widehat{t_1}\} \subset (t_1^*, b_1)$, entonces h^{-1} es continua en t_2^2 y por lo tanto estrictamente creciente en $[t_2^2, t_2^2 + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$. Esto extiende la primera situación al caso en que $t_2 = t_2^*$ y recíprocamente la segunda situación también es válida cuando $\widehat{t_1} = t_1^*$.

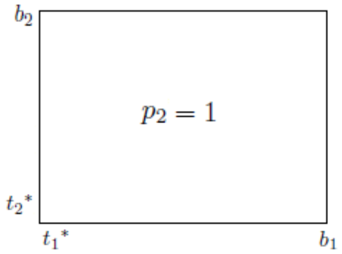
De esta manera, todas las formas que puede tener h en las vecindades de t_1^* y t_2^* y por lo tanto, todas las situaciones que considerará el algoritmo, además de las condiciones necesarias para cada una de ellas, se resumen en el cuadro siguiente.

1. Jugador 1 dominante:



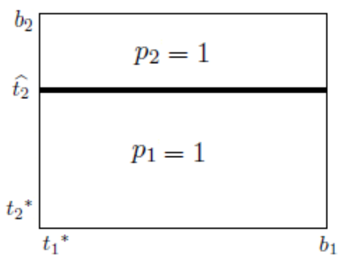
$$(1.1)\quad \int_{t_1^*}^{t_1} \int_{t_2}^{b_2} \left[c_1(s_1) - c_2(s_2)\right] f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1] \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

2. Jugador 2 dominante:



$$(2.1)\quad \int_{t_1}^{b_1} \int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_2(s_2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_2\, ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1] \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

3. Recta horizontal:



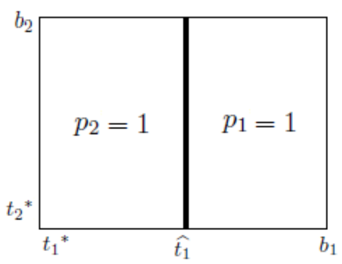
$$(3.1)\quad \int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

$$(3.2)\quad \int_{t_1}^{b_1} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

$$(3.3)\quad \int_{t_2}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$$

$$(3.4)\quad \int_{\widehat{t_2}}^{t_2} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [\widehat{t_2}, b_2]$$

4. Recta vertical:



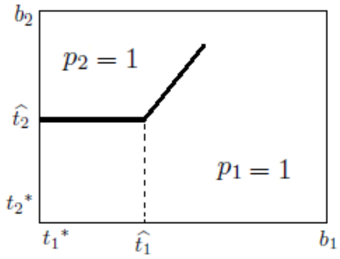
$$(4.1)\quad \int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

$$(4.2)\quad \int_{t_2}^{b_2} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$$

$$(4.3)\quad \int_{t_1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$$

$$(4.4)\quad \int_{\widehat{t_1}}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, b_1]$$

5. Jugador 1 parte constante:



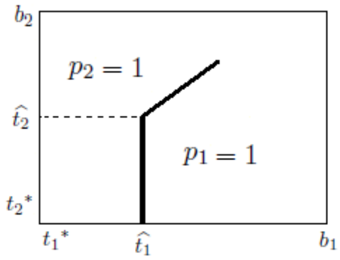
(5.1) $c_1(\widehat{t_1}) = c_2(\widehat{t_2})$

(5.2) $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

(5.3) $\displaystyle\int_{t_1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

(5.4) $\displaystyle\int_{t_2}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$

6. Jugador 2 parte constante:



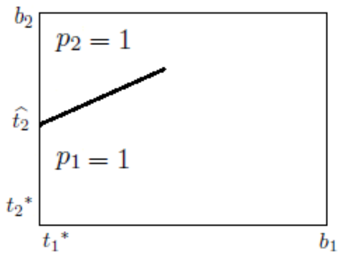
(6.1) $c_2(\widehat{t_2}) = c_1(\widehat{t_1})$

(6.2) $\displaystyle\int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$

(6.3) $\displaystyle\int_{t_2}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$

(6.4) $\displaystyle\int_{t_1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

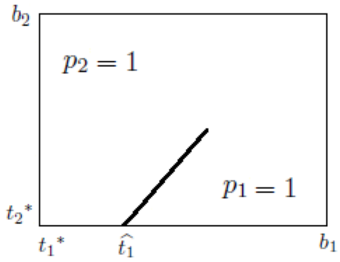
7. Jugador 1 parte creciente:



(7.1) $c_2(\widehat{t_2}) = c_1(t_1^*)$

(7.2) $\displaystyle\int_{t_2}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$

8. Jugador 2 parte creciente:



(8.1) $c_1(\widehat{t_1}) = c_2(t_2^*)$

(8.2) $\displaystyle\int_{t_1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Sabemos que $(\widehat{P_2})$ tiene solución y además, una de ellas tiene alguna de las formas mostradas en el resumen. Por lo tanto, el algoritmo de búsqueda de soluciones está basado en la construcción iterativa de una función cuya forma se determina en consecutivos intervalos mediante el descarte de todas las restantes alternativas posibles. De esta forma, el algoritmo que construye una función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ creciente y $(\widehat{P_2})$-óptima es el siguiente:

Algoritmo:

1) *% Chequear si la solución es de la forma 1 %*

   Chequear si se cumple (1.1)

   Si se cumple:
   Definir $h(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$
   FIN

   Si no se cumple:
   Ir a 2)

2) *% Chequear si la solución es de la forma 2 %*

   Chequear si se cumple (2.1)

   Si se cumple:
   Definir $h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$
   FIN

   Si no se cumple:
   Ir a 3)

3) *% Chequear si la solución es de la forma 3 %*

   Chequear si existe $\widehat{t_2} \in [t_2^*, b_2]$ que satisfaga (3.1) - (3.4)

   Si existe:
   Definir $h(t_1) = \widehat{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$
   FIN

   Si no existe:
   Ir a 4)

4) *% Chequear si la solución es de la forma 4 %*

   Chequear si existe $\widehat{t_1} \in [t_1^*, b_1]$ que satisfaga (4.1) - (4.4)

   Si existe:
   Definir $h(t_1) = \begin{cases} t_2^* & \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}] \\ b_2 & \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, b_1] \end{cases}$
   FIN

   Si no existe:
   Ir a 5)

5) *% A_1 contiene los pares que satisfacen las condiciones (5.1)-(5.4) del resumen y A_2 los pares que satisfacen las condiciones (6.1)-(6.4). %*

Definir

$$\begin{aligned}
A_1 \;= \{ \;& (\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in (t_1^*, b_1) \times (t_2^*, b_2) : \; c_1(\widetilde{t_1}) = c_2(\widetilde{t_2}) \;, \\
& \int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}] \;, \\
& \int_{t_1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}] \;, \\
& \int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}] \quad \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 \;= \{ \;& (\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in (t_1^*, b_1) \times (t_2^*, b_2) : \; c_2(\widetilde{t_2}) = c_1(\widetilde{t_1}) \;, \\
& \int_{t_2^*}^{t_2} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 \leq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}] \;, \\
& \int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}] \;, \\
& \int_{t_1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}] \quad \}
\end{aligned}$$

% Cuando ambos conjuntos son no vacíos, la forma de la frontera será del tipo 5 o 6, dependiendo de si el valor más pequeño de c_1 o c_2 se alcanza en A_1 o A_2 respectivamente. %

Si $A_1 \neq \emptyset \;\wedge\; A_2 \neq \emptyset$:

Si $\min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \;<\; \min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_2} c_2(\widetilde{t_2})$ **:**

%En este caso la frontera será del tipo 5. Dentro de los puntos que minimizan c_1 se elegirá como extremo derecho del segmento horizontal aquel que tenga la mayor altura y posición. Este punto también se toma como inicial para las iteraciones de la etapa 6). %

Definir $B_1 = \operatorname*{argmin}\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \;,\; \widehat{t_1} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in B_1} \widetilde{t_1} \;,\; \widehat{t_2} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in B_1} \widetilde{t_2}$

Definir[1] $h(t_1) = \widehat{t_2} \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1} \;,\; \dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

[1]La proposición 6.2.9 nos asegura que $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in B_1$

Si $\min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \;>\; \min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_2} c_2(\widetilde{t_2})$ **:**

%En este caso la frontera será del tipo 6. Dentro de los puntos que minimizan c_2 se elegirá como extremo superior del segmento vertical aquel que tenga la mayor posición y altura. Este punto también se toma como inicial para las iteraciones de la etapa 6). %

Definir $B_2 = \operatorname*{argmin}\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_1} c_2(\widetilde{t_2})$, $\widehat{t_1} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in B_2} \widetilde{t_1}$, $\widehat{t_2} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in B_2} \widetilde{t_2}$

Definir[2] $h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1}$, $\dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

Si $\min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \;=\; \min\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_2} c_2(\widetilde{t_2})$ **:**

%En este caso es posible que la frontera sea del tipo 5 o del tipo 6. %

Definir $B = \operatorname*{argmin}\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_1} c_2(\widetilde{t_2}) \bigcup \operatorname*{argmin}\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in A_1} c_2(\widetilde{t_2})$,

$\widehat{t_1} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in B} \widetilde{t_1}$, $\widehat{t_2} = \max\limits_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2})\in B} \widetilde{t_2}$

Si $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_1$:

%Frontera tipo 5. %

Definir $h(t_1) = \widehat{t_2} \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1}$, $\dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

Si no[3]:

%Frontera tipo 6. %

Definir $h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1}$, $\dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

[2] La proposición 6.2.9 nos asegura que $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in B_2$

[3] La proposición 6.2.33 nos asegura que si $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \notin A_1$ entonces $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_2$

Si $A_1 \neq \emptyset \ \wedge \ A_2 = \emptyset$ **:**

% D_2 contiene los puntos de $[t_1^*, b_1]$ que satisfacen las concidiones (8.1)-(8.2). %

Si c_2 es creciente en $[t_2^*, t_2^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

$$\text{Definir} \quad D_2 = \Big\{ \ \widetilde{t_1} \in [t_1^*, b_1) : \ c_2(t_2^*) = c_1(\widetilde{t_1}) \ , \ \int_{t_1}^{\widetilde{t_1}} \big[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\big] f_1(s_1) \ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}] \ \Big\}$$

Si no:

Definir $D_2 = \emptyset$

Si c_1 es decreciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

Redefinir $D_2 = D_2 \setminus \{t_1^*\}$

% En este caso la forma de la frontera será del tipo 5 u 8, dependiendo de si el valor más pequeño de c_1 o c_2 se alcanza en A_1 o D_2 respectivamente. %

Si $\displaystyle\min_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \ \leq c_2(t_2^*) \quad \vee \quad D_2 = \emptyset$ **:**

%Frontera tipo 5. %

$$\text{Definir} \quad B_1 = \operatorname*{argmin}_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \ , \ \widehat{t_1} = \max_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in B_1} \widetilde{t_1} \ , \ \widehat{t_2} = \max_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in B_1} \widetilde{t_2}$$

Definir[4] $h(t_1) = \widehat{t_2} \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1} \ , \ \dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

Si $\displaystyle\min_{(\widetilde{t_1},\widetilde{t_2}) \in A_1} c_1(\widetilde{t_1}) \ > c_2(t_2^*)$ **:**

%En este caso la frontera será del tipo 8. Se elegirá el mayor punto de D_2, que junto a t_2^* formará el par inicial para las iteraciones de la etapa 6). %

$$\text{Definir} \quad \widehat{t_1} = \max_{\widetilde{t_1} \in D_2} \widetilde{t_1}$$

Definir $h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1} \ , \ \dot{t_2} = t_2^*$

Ir a 6)

[4] La proposición 6.2.9 nos asegura que $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in B_1$

Si $A_1 = \emptyset \ \wedge \ A_2 \neq \emptyset$ **:**

% D_1 contiene los puntos de $[t_2^*, b_2]$ que satisfacen las condiciones (7.1)-(7.2). %

Si c_1 es creciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

$$\text{Definir} \quad D_1 = \{ \ \widetilde{t_2} \in [t_2^*, b_2) : \ c_1(t_1^*) = c_2(\widetilde{t_2}) \ , \quad \int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2) \right] f_2(s_2) \, ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}] \ \}$$

Si no:

Definir $D_1 = \emptyset$

Si c_2 es decreciente en $[t_2^*, t_2^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

Redefinir $D_1 = D_1 \setminus \{t_2^*\}$

% En este caso la forma de la frontera será del tipo 7 o 6, dependiendo de si el valor más pequeño de c_1 o c_2 se alcanza en D_1 o A_2 respectivamente. %

Si $c_1(t_1^*) < \min\limits_{(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_2} c_2(\widetilde{t_2}) \quad \wedge \quad D_1 \neq \emptyset$ **:**

%En este caso la frontera será del tipo 7. Se elegirá el mayor punto de D_1, que junto a t_1^* formará el par inicial para las iteraciones de la etapa 6). %

Asignar $\dot{t_1} = t_1^* \ , \dot{t_2} = \max\limits_{\widetilde{t_2} \in D_1} \widetilde{t_2}$

Ir a 6)

Si $c_1(t_1^*) \geq \min\limits_{(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_2} c_2(\widetilde{t_2})$ **:**

%Frontera tipo 6 %

Definir $\quad B_2 = \underset{(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_1}{\operatorname{argmin}} c_2(\widetilde{t_2}) \ , \ \widehat{t_1} = \max\limits_{(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in B_2} \widetilde{t_1} \ , \ \widehat{t_2} = \max\limits_{(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in B_2} \widetilde{t_2}$

Definir[5] $\quad h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1} \ , \ \dot{t_2} = \widehat{t_2}$

Ir a 6)

[5] La proposición 6.2.9 nos asegura que $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in B_2$

Si $A_1 = A_2 = \emptyset$:

Si c_1 es creciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

$$\text{Definir} \quad D_1 = \{ \quad \widetilde{t_2} \in [t_2^*, b_2) : \ c_1(t_1^*) = c_2(\widetilde{t_2}) \ , \quad \int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2) \right] f_2(s_2) \ ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}] \quad \}$$

Si no:

Definir $D_1 = \emptyset$

Si c_2 es decreciente en $[t_2^*, t_2^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

Redefinir $D_2 = D_2 \setminus \{t_2^*\}$

Si c_2 es creciente en $[t_2^*, t_2^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

$$\text{Definir} \quad D_2 = \{ \quad \widetilde{t_1} \in [t_1^*, b_1) : \ c_2(t_2^*) = c_1(\widetilde{t_1}) \ , \quad \int_{t_1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1) \right] f_1(s_1) \ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}] \quad \}$$

Si no:

Definir $D_2 = \emptyset$

Si c_1 es decreciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$ **:**

Redefinir $D_2 = D_2 \setminus \{t_1^*\}$

% En este caso la frontera será del tipo 7 u 8 dependiendo del valor de $c_1(t_1^*)$ *y* $c_2(t_2^*)$ *%*

Si $c_1(t_1^*) < c_2(t_2^*) \quad \wedge \quad D_1 \neq \emptyset$ **:**

%Frontera tipo 7%

Asignar $\dot{t_1} = t_1^*$, $\dot{t_2} = \max_{\widetilde{t_2} \in D_1} \widetilde{t_2}$

Ir a 6)

Si $c_1(t_1^*) > c_2(t_2^*) \quad \wedge \quad D_2 \neq \emptyset$ **:**

%Frontera tipo 8%

Definir $\widehat{t_1} = \max_{\widetilde{t_1} \in D_2} \widetilde{t_1}$

Definir $h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1}$, $\dot{t_2} = t_2^*$

Ir a 6)

Si $c_1(t_1^*) = c_2(t_2^*) \quad \wedge \quad D_1 \neq \emptyset \quad \wedge \quad D_2 \neq \emptyset$ **:**[6]

%Frontera tipo 7, 8 o ambas simultáneamente%

Si $D_1 = \{t_2^*\} \ \wedge \ \exists\, t_1 \in D_2,\ t_1 > t_1^*$ **:**

%Frontera tipo 8%

Definir $\widehat{t_1} = \max\limits_{\widetilde{t_1} \in D_2} \widetilde{t_1}$

Definir $h(t_1) = t_2^* \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$
Asignar $\dot{t_1} = \widehat{t_1}\ ,\ \dot{t_2} = t_2^*$
Ir a 6)

Si $D_2 = \{t_1^*\} \ \wedge \ \exists\, t_2 \in D_1,\ t_2 > t_2^*$ **:**

%Frontera tipo 7%

Asignar $\dot{t_1} = t_1^*\ ,\ \dot{t_2} = \max\limits_{\widetilde{t_2} \in D_1} \widetilde{t_2}$
Ir a 6)

Si $D_2 = \{t_1^*\} \ \wedge \ D_1 = \{t_2^*\}$ **:**

%Frontera tipo 7 y 8 a la vez%

Asignar $\dot{t_1} = t_1^*\ ,\ \dot{t_2} = t_2^*$
Ir a 6)

6) *% En esta etapa, el algoritmo itera hasta terminar. En cada iteración se define h continua y estrictamente creciente en un cierto intervalo y, a menos que el algoritmo termine, se determina o bien otro intervalo donde definir h constante, o bien un punto donde h será discontinua. Cada iteración comienza buscando el primer instante en que alguna de las dos opciones mencionadas es posible. %*

Definir:

$$\widehat{t_1} = \inf\Big\{\ t_1^1 \in [\dot{t_1}, b_1] :\ \exists t_1^2 \in (t_1^1, b_1]\ ,\ \int_{t_1^1}^{t_1} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]\ ,$$
$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\, ds_1 = 0 \ \wedge\ \big(c_1(t_1^2) = c_1(t_1^1)\ \vee\ t_1^2 = b_1\big)\ \Big\}$$

$$\widehat{t_2} = \inf\Big\{\ t_2^1 \in [\dot{t_2}, b_2] :\ \exists t_2^2 \in (t_2^1, b_2]\ ,\ \int_{t_2^1}^{t_2} \big[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\big]\, f_2(s_2)\, ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^1, t_2^2]\ ,$$
$$\int_{t_2^1}^{t_2^2} \big[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\big]\, f_2(s_2)\, ds_2 = 0 \ \wedge\ \big(c_2(t_2^2) = c_2(t_2^1)\ \vee\ t_2^2 = b_2\big)\ \Big\}$$

[6]Notemos que cuando $c_1(t_1^*) = c_2(t_2^*)$, $D_1 = \emptyset \Leftrightarrow D_2 = \emptyset$

Si $(\widehat{t_1} < \infty \ \wedge \ \widehat{t_2} = \infty) \ \vee \ (\widehat{t_1} < \infty \ \wedge \ \widehat{t_2} < \infty \ \wedge \ c_1(\widehat{t_1}) \leq c_2(\widehat{t_2}))$ **:**[7]

% Si la parte estrictamente creciente de h pasa antes por $\widehat{t_1}$, es posible que la frontera entre ambos jugadores posea un segmento horizontal. %

Ir a 6.1)

Si $(\widehat{t_1} = \infty \ \wedge \ \widehat{t_2} < \infty) \ \vee \ (\widehat{t_1} < \infty \ \wedge \ \widehat{t_2} < \infty \ \wedge \ c_1(\widehat{t_1}) > c_2(\widehat{t_2}))$ **:**

% Si la parte estrictamente creciente de h pasa antes por $\widehat{t_2}$, es posible que la frontera entre ambos jugadores posea un segmento vertical. %

Ir a 6.2)

Si $\widehat{t_1} = \infty \ , \widehat{t_2} = \infty$ **:**

% En este caso la frontera no tiene más segmentos horizontales ni verticales. %

Ir a 6.3)

6.1) *% Dependiendo de si la parte estrictamente creciente de h pasa antes por $\widehat{t_1}$ o por b_2 la frontera tendrá o no tendrá un segmento horizontal. %*

Si $c_1(\widehat{t_1}) < c_2(b_2)$ **:**

% Hay segmento horizontal. %

Definir

$$\begin{aligned}\breve{t_1} \quad = \sup\{ \quad & t_1^2 \in (\widehat{t_1}, b_1] : \int_{\widehat{t_1}}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, t_1^2] \ , \\ & \int_{\widehat{t_1}}^{t_1^2} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 = 0 \ \wedge \ \big(c_1(t_1^2) = c_1(\widehat{t_1}) \ \vee \ t_1^2 = b_1\big)\}\end{aligned}$$

Definir h en $[\dot{t_1}, \widehat{t_1}]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$

Definir $h(t_1) = h(\widehat{t_1}) \quad \forall t_1 \in (\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$

Asignar $\dot{t_1} = \breve{t_1} \ \ \dot{t_2} = h(\widehat{t_1})$

Si $\dot{t_1} = b_1$ **:**

FIN

Si no:

Ir a 6)

[7] La proposición 6.2.12 nos permite arbitrariamente preferir el segmento horizontal en el caso en que $c_1(\widehat{t_1}) = c_2(\widehat{t_2})$.

Si $c_1(\widehat{t_1}) \geq c_2(b_2)$ **:**

% No hay segmento horizontal. %

Definir $\ddot{t_1} = \text{ínf}\{t_1 \in [\dot{t_1}, b_1] : \; c_1(t_1) = c_2(b_2)\}$
Definir h en $[\dot{t_1}, \ddot{t_1}]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$
Definir $h(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in (\ddot{t_1}, b_1]$
FIN

6.2) *% Dependiendo de si la parte estrictamente creciente de h pasa antes por* $\widehat{t_2}$ *o por* b_1 *la frontera tendrá o no tendrá un segmento vertical. %*

Si $c_1(b_1) > c_2(\widehat{t_2})$ **:**

% Hay segmento vertical. %

Definir

$$\breve{t_2} \;\; = \sup\{ \;\; t_2^2 \in (\widehat{t_2}, b_2] : \; \int_{\widehat{t_2}}^{t_2} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [\widehat{t_2}, t_2^2] \; , \\ \int_{\widehat{t_2}}^{t_2^2} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 = 0 \; \wedge \; \left(c_2(t_2^2) = c_2(\widehat{t_2}) \; \vee \; t_2^2 = b_2\right)\}$$

Definir $\ddot{t_1} = \text{ínf}\{t_1 \in [\dot{t_1}, b_1] : \; c_1(t_1) = c_2(\widehat{t_2})\}$
Definir h en $[\dot{t_1}, \ddot{t_1}]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$
Asignar $\dot{t_1} = \ddot{t_1} \;\; \dot{t_2} = \breve{t_2}$

Si $\dot{t_2} = b_2$ **:**
FIN

Si no:
Ir a 6)

Si $c_1(b_1) \leq c_2(\widehat{t_2})$ **:**

% No hay segmento vertical. %

Definir h en $[\dot{t_1}, b_1]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$
FIN

6.3) *% En este caso la frontera no tiene más segmentos y el algoritmo terminará. %*

Si $c_1(b_1) \leq c_2(b_2)$ **:**

Definir h en $[\dot{t_1}, b_1]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$

FIN

Si $c_1(b_1) > c_2(b_2)$ **:**

Definir $\ddot{t_1} = \text{ínf}\{t_1 \in [\dot{t_1}, b_1] : \ c_1(t_1) = c_2(b_2)\}$

Definir h en $[\dot{t_1}, \ddot{t_1}]$ como la solución continua de la ecuación

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$$

que cumple con $h(\dot{t_1}) = \dot{t_2}$

Definir $h(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in (\ddot{t_1}, b_1]$

FIN

6.2. Justificación del Algoritmo

A continuación enunciaremos una serie de proposiciones que posteriormente nos permitirán demostrar que el algoritmo efectivamente construye una función h que es $(\widehat{P_2})$-óptima. Para comenzar presentaremos una proposición que será muy útil en futuras demostraciones.

Proposición 6.2.1. *Supongamos que existe $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ constante por trozos y $(\widehat{P_2})$-óptima. Entonces existe $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$, que tiene alguna de las formas que se enumeran a continuación, y que es $(\widehat{P_2})$-óptima.*

1) $\widetilde{h}(t_1) = t_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$ *para algún* $t_2 \in (t_2^*, b_2)$

2) $\widetilde{h}(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$

3) $\widetilde{h}(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$

4) $\widetilde{h}(t_1) = \left\{ \begin{array}{ll} t_2^* & \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^2) \\ b_2 & \forall t_1 \notin (t_1^2, b_2] \end{array} \right.$ *para algún* $t_1^2 \in (t_1^*, b_1)$

Demostración. Si h no es constante, consideremos $t_1^1, t_1^2, t_1^3 \in [t_1^*, b_1]$ tales que:

$$h(t_1) = t_2^1 \quad \forall t_1 \in (t_1^1, t_1^2)$$

$$h(t_1) = t_2^2 \quad \forall t_1 \in (t_1^2, t_1^3)$$

Donde $t_2^2 > t_2^1$. Sabemos entonces que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\int_{t_1}^{t_1^2} \left[c_2(t_2^1) - c_1(s_1) \right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

$$\int_{t_1^3}^{t_1} \left[c_2(t_2^2) - c_1(s_1) \right] f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^2, t_1^3]$$

$$\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_1(t_1^2) - c_2(s_2) \right] f_2(s_2)\ ds_2 = 0$$

Y además la primera y segunda desigualdad implican que $c_2(t_2^1) \geq c_1(t_1^2) \geq c_2(t_2^2)$. Ahora bien, si h no es de la forma 4), se tiene que $t_2^1 \in (t_2^*, b_2)$ o bien $t_2^2 \in (t_2^*, b_2)$. En el primer caso, del Lema 5.2.2 sabemos que también se cumple:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_2(t_2^1) - c_1(s_1) \right] f_1(s_1)\ ds_1 = 0$$

Luego, podemos definir $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\overline{h}(t_1) = \left\{ \begin{array}{ll} t_2^2 & \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2] \\ h(t_1) & \forall t_1 \notin [t_1^1, t_1^2] \end{array} \right.$$

Y se tiene que $\overline{h}$ es $(\widehat{P_2})$-óptima pues:

$$\begin{aligned}
J(h) - J(\overline{h}) &= \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_2(s_2) - c_1(s_1)\right] f_2(s_2)f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_1(t_1^2) - c_2(t_2^1)\right] f_2(s_2)f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

En el segundo caso, sabemos esta vez que:

$$\int_{t_1^2}^{t_1^3} \left[c_2(t_2^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 = 0$$

Luego, podemos definir $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$\overline{h}(t_1) = \begin{cases} t_2^1 & \forall t_1 \in [t_1^2, t_1^3] \\ h(t_1) & \forall t_1 \notin [t_1^2, t_1^3] \end{cases}$$

Y se tiene que $\overline{h}$ es $(\widehat{P_2})$-óptima pues:

$$\begin{aligned}
J(h) - J(\overline{h}) &= \int_{t_1^2}^{t_1^3}\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_1(s_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^2}^{t_1^3}\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_2(t_2^2) - c_1(t_1^2)\right] f_2(s_2)f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Por último, si $\overline{h}$ no tiene alguna de las formas $1) - 4)$, se puede hacer una modificación análoga a la realizada y así sucesivamente ir disminuyendo la cantidad de trozos constantes. Es claro que en algún momento se obtiene una curva $\widetilde{h}$ con alguna de las formas $1) - 4)$ dependiendo de si originalmente h alcanzaba los valores t_1^* y b_1. □

6.2.1. Justificación de las etapas 1-4

A continuación presentamos una proposición que justifica los pasos 1) y 2) del algoritmo pues nos dice que las condiciones necesarias que encontramos en los casos extremos son también condiciones suficientes de optimalidad.

Proposición 6.2.2.

i) Si se cumple (1.1) entonces $h^1 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como sigue es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$$h^1(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

ii) Si se cumple (2.1) entonces $h^2 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como sigue es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$$h^2(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

Demostración.

i) Primero demostremos que si se cumple la hipótesis entonces existe $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que es $(\widehat{P_2})$-óptima y constante por trozos. Consideremos $h^* : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima cualquiera y supongamos que existe un intervalo $I_h = [t_1^1, t_1^2] \subseteq [t_1^*, b_1]$ donde h^* es estrictamente creciente. Por el Corolario 5.2.7 sabemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_2}^{b_2}\int_{t_1^*}^{t_1^2} c_1(s_1)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_1\ ds_2 &\leq \int_{t_2}^{b_2}\int_{t_1^*}^{t_1^2} c_1(t_1^2)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_1\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{b_2} c_2(h^*(t_1^2))f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 \\
&\leq \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1
\end{aligned}$$

Lo que junto con la hipótesis implica que:

$$\int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{b_2} c_1(s_1)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 = \int_{t_1^*}^{t_1^2}\int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2)f_1(s_1)f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1$$

Más aún, todas las desigualdades anteriores son igualdades. Luego, viendo la demostración del Corolario 5.2.7 esto implica necesariamente que $c_1(s_1) = c_1(t_1^2)\ \forall s_1 \in [t_1^*, t_1^2]$ y que $c_2(s_2) = c_2(h^*(t_1^2))\ \forall s_2 \in [h^*(t_1^2), b_2]$. Como además $c_1(s_1) = c_2(h^*(s_1))$ $\forall s_1 \in [t_1^1, t_1^2]$ sigue que $c_2(s_2) = c_2(h^*(t_1^2))\ \forall s_2 \in [h^*(t_1^1), b_2]$. Por lo tanto, podemos definir $h^{**} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$h^{**}(t_1) = \begin{cases} h^*(t_1^1) & \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2] \\ h^*(t_1) & \forall t_1 \notin [t_1^1, t_1^2] \end{cases}$$

Y se tiene que h^{**} es constante en $[t_1^1, t_1^2]$ y $(\widehat{P_2})$-óptima pues:

$$J(h^*) - J(h^{**}) = \int_{t_1^1}^{t_1^2}\int_{h^*(t_1^1)}^{h^*(s_1)} [c_1(s_1) - c_2(s_2)] = 0$$

Por lo tanto iterativamente podemos construir $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que es $(\widehat{P_2})$-óptima y tal que no es estrictamente creciente en ningún intervalo, lo que implica que $\overline{h}$ es constante por partes.

Luego, gracias a la proposición 6.2.1 sabemos que existe $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que es $(\widehat{P_2})$-óptima y que tiene alguna de las siguientes formas:

1) $\widetilde{h}(t_1) = t_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$ para algún $t_2 \in (t_2^*, b_2)$
2) $\widetilde{h}(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$
3) $\widetilde{h}(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$

4) $\widetilde{h}(t_1) = \begin{cases} t_2^* & \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^2) \\ b_2 & \forall t_1 \notin (t_1^2, b_2] \end{cases}$ para algún $t_1^2 \in (t_1^*, b_1)$

Si $\widetilde{h}$ tiene la forma 1), por la hipótesis se tiene que:

$$J(h^1) - J(\widetilde{h}) = \int_{t_1^*}^{b_1} \int_{t_2}^{b_2} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \geq 0$$

Lo que implica que h^1 es $(\widehat{P_2})$-óptima. En caso de que $\widetilde{h}$ tenga la forma 2), por la hipótesis se tiene que:

$$J(h^1) - J(\widetilde{h}) = \int_{t_1^*}^{b_1} \int_{t_2^*}^{b_2} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \geq 0$$

Lo que también implica que h^1 es $(\widehat{P_2})$-óptima. Por último, si $\widetilde{h}$ tiene la forma 4), la hipótesis implica que:

$$J(h^1) - J(\widetilde{h}) = \int_{t_1^*}^{t_1^2} \int_{t_2^*}^{b_2} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \geq 0$$

Por lo tanto en todos los casos se tiene que h^1 es $(\widehat{P_2})$-óptima y se conlcuye lo deseado.

ii) Análogo a i).

□

La siguiente proposición justifica los pasos 3) y 4) del algoritmo, ya que demuestra que las condiciones necesarias de los casos en los que la frontera entre ambos jugadores es una recta horizontal en el interior de $[t_2^*, b_2]$ o una recta vertical en el interior de $[t_1^*, b_1]$, son también condiciones suficientes de optimalidad.

Proposición 6.2.3. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Si existe $\widehat{t_2} \in (t_2^*, b_2)$ tal que se satisfacen (3.1) - (3.4), entonces $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como $h(t_1) = \widehat{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$, es $(\widehat{P_2})$-óptima.

ii) Si existe $\widehat{t_1} \in (t_1^*, b_1)$ tal que se satisfacen (4.1) - (4.4), entonces $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como sigue, es $(\widehat{P_2})$-óptima:

$$h(t_1) = \begin{cases} t_2^* & \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}) \\ b_2 & \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, b_1] \end{cases}$$

Demostración.

i) Consideremos cualquier función $\widetilde{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ creciente y notemos que:

$$\begin{aligned}
J(h) - J(\widetilde{h}) &= \int_{t_2^*}^{\widehat{t_2}} \int_{t_1^*}^{\widetilde{h}^{-1}(s_2)} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_1\; ds_2 \\
&+ \int_{\widehat{t_2}}^{b_2} \int_{\widetilde{h}^{-1}(s_2)}^{b_1} [c_2(s_2) - c_1(s_1)]\, f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_1\; ds_2 \\
&\geq \int_{t_2^*}^{\widehat{t_2}} \int_{t_1^*}^{\widetilde{h}^{-1}(s_2)} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_1\; ds_2 \\
&+ \int_{\widehat{t_2}}^{b_2} \int_{\widetilde{h}^{-1}(s_2)}^{b_1} \left[c_2(s_2) - c_2(\widehat{t_2})\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_1\; ds_2 \\
&= \int_{t_1^*}^{\widetilde{h}^{-1}(\widehat{t_2})} \int_{\widetilde{h}(s_1)}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \\
&+ \int_{\widetilde{h}^{-1}(\widehat{t_2})}^{b_1} \int_{\widehat{t_2}}^{\widetilde{h}(s_1)} \left[c_2(s_2) - c_2(\widehat{t_2})\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\; ds_2\; ds_1 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ii) Análogo a i).

□

6.2.2. Justificación etapa 5

La siguiente proposición justifica el hecho que en la etapa 5) del algoritmo se busquen primero elementos en los conjuntos A_1 y A_2, y solamente cuando alguno de estos conjuntos es vacío se consideren elementos de los conjuntos D_1 o D_2 respectivamente. La proposición nos dice que si existe un punto que satisface (5.1)-(5.4), entonces ninguna curva del tipo 7) del resumen es $(\widehat{P_2})$-óptima y que si existe un punto que satisface (6.1)-(6.4), entonces ninguna curva del tipo 8) del resumen es $(\widehat{P_2})$-óptima.

Proposición 6.2.4. *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) Si existe $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_1$ entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que sea estrictamente creciente y continua en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$, para algún $\epsilon > 0$, es $(\widehat{P_2})$-óptima.

ii) Si existe $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_2$ entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla lo siguiente es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$, *para algún* $\widetilde{t_1} \in [t_1^*, b_1]$

h *estrictamente creciente y continua en* $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ *para algún* $\epsilon > 0$.

Demostración.

i) Primero notemos que la condición (5.2) implica que $c_1(\widehat{t_1}) \leq c_1(t_1^*)$, luego consideremos h como en el enunciado y supongamos que h es $(\widehat{P_2})$-óptima. Notemos que $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))\ \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^*+\epsilon]$, por lo tanto el Corolario 5.2.6 nos dice que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo maximal donde h es constante, que supondremos SPG de la forma $I = [t_1^1, t_1^2]$ y llamaremos t_2' al punto tal que $h(t_1) = t_2' \quad \forall t_1 \in I$. Además, $c_1(t_1^1) \geq c_1(t_1^* + \epsilon) > c_1(t_1^*) \geq c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto usando (5.3) se tiene:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2(t_2') \geq c_2(h(t_1^* + \epsilon)) > c_2(h(t_1^*)) = c_1(t_1^*) \geq c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2(t_2') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

ii) Análogo a i), intercambiar jugadores.

□

En la etapa 5) del Algoritmo, luego de definir los conjuntos A_1 y A_2 establecemos que si ambos conjuntos son no vacíos, la frontera tendrá la forma de la situación 5) o 6) del resumen, dependiendo de en cual de estos conjuntos se alcanza el menor valor para c_1 (o igualmente c_2). La siguiente proposición justifica lo anterior pues nos muestra que cualquier punto de A_1, para el cual exista un punto en A_2 con menor valor de c_1, induce una frontera del tipo 5) que no es óptima. Igualmente, cualquier punto de A_2 para el cual exista un punto en A_1 con menor valor de c_1, induce una frontera del tipo 6) que no es óptima.

Proposición 6.2.5. *Sean $(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_1$, $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_2$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) Si $c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$, entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla las siguientes propiedades es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$h(t_1) = \widetilde{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$

h estrictamente creciente y continua en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

ii) Si $c_1(\widetilde{t_1}) < c_1(\widehat{t_1})$, entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla las siguientes propiedades es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$h^{-1}(t_2) = \widehat{t_1} \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \widehat{t_2}]$

h^{-1} estrictamente creciente y continua en $[\widehat{t_2}, \widehat{t_2} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

Demostración.

i) Partamos notando que $\widetilde{t_1} < \widehat{t_1}$, pues en caso contrario se tendría que $\widehat{t_1} \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$ y además:

$$\int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Y esto no es posible pues $\widetilde{t_1}$ y $\widetilde{t_2}$ satisfacen la correspondiente condición (5.2). Ahora supongamos que h es óptima, como $c_1(\widehat{t_1}) < c_1(\widetilde{t_1})$, por el Corolario 5.2.6 sabemos que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_1^1, t_1^2]$, también llamemos $t_2{}'$ al punto tal que $h(t_1) = t_2{}' \quad \forall t_1 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(t_1^1) \geq c_1(\widetilde{t_1})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2(t_2{}') > c_2(\widetilde{t_2}) = c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2(t_2{}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

ii) Análogo a i), intercambiar jugadores.

□

En caso que A_1 sea no vacío y A_2 sea vacío, se define el conjunto D_2 y el algoritmo establece que la frontera tendrá la forma de la situación 5) u 8) del resumen, dependiendo de si el menor valor para c_1 (igualmente c_2) se alcanza en el conjunto A_1 o D_2 respectivamente. La siguiente proposición justifica lo anterior pues nos muestra que cualquier punto de A_1, cuyo valor de c_1 sea mayor a $c_2(t_2^*)$, induce una frontera del tipo 5) que no es óptima. Además, si existe un punto de A_1 cuyo valor de c_1 sea menor o igual a $c_2(t_2^*)$, entonces cualquier punto de D_2 induce una frontera del tipo 8) que no es óptima.

Proposición 6.2.6. *Sean $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_1$, $\widetilde{t_1} \in D_2$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) Si $c_1(\widehat{t_1}) > c_2(t_2^*)$, entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla las siguientes propiedades es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$h(t_1) = \widehat{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$

h estrictamente creciente y continua en $[\widehat{t_1}, \widehat{t_1} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

ii) Si $c_1(\widehat{t_1}) \leq c_2(t_2^*)$, entonces ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla las siguientes propiedades es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$$h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$$

h estrictamente creciente y continua en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

Demostración.

i) Partamos notando que $\widetilde{t_1} > \widehat{t_1}$, pues en caso contrario se tendría que $\widetilde{t_1} \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$ y además:

$$\int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Y esto no es posible pues $\widehat{t_1}$ y $\widehat{t_2}$ satisfacen la condición (5.2). Ahora supongamos que h es óptima, como $c_1(\widehat{t_1}) > c_1(\widetilde{t_1})$, por el Corolario 5.2.6 sabemos que $\widetilde{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_1^1, t_1^2]$, también llamemos ${t_2}'$ al punto tal que $h(t_1) = {t_2}' \quad \forall t_1 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(t_1^1) \geq c_1(\widehat{t_1}) > c_1(\widetilde{t_1})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2({t_2}') > c_2(\widehat{t_2}) = c_1(\widehat{t_1}) > c_1(\widetilde{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_2({t_2}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

ii) Supongamos que h es óptima, como $c_2(t_2^*) \geq c_1(\widehat{t_1}) = c_2(\widehat{t_2})$ y h^{-1} es estrictamente creciente en una vecindad de t_2^*, por el Corolario 5.2.6 se tiene que $\widehat{t_2}$ pertenece al interior de un intervalo donde h^{-1} es constante, llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_2^1, t_2^2]$, también llamemos ${t_1}'$ al punto tal que $h^{-1}(t_2) = {t_1}' \quad \forall t_2 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_2(t_2^1) \geq c_2(h(\widetilde{t_1} + \epsilon)) > c_2(t_2^*) \geq c_2(\widehat{t_2})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 > \int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_2^1, t_2^2]$ en el caso que $t_1' = b_1$. Igualmente, en caso que $t_1' < b_1$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_1({t_1}') \geq c_1(\widetilde{t_1} + \epsilon) > c_1(\widetilde{t_1}) = c_2(t_2^*) \geq c_2(\widehat{t_2})$, por lo tanto:

$$\int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_1({t_1}') - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 > \int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_2^1, t_2^2]$. Concluímos que h no es óptima. $\square$

Notemos que, intercambiando los roles de cada jugador, la proposición anterior también justifica la forma en que el algoritmo decide el tipo de frontera en el caso en que A_1 es vacío y A_2 es no vacío. Por lo tanto falta ver el último caso posible que es cuando $A_1 = A_2 = \emptyset$. El algoritmo nos dice que cuando D_1 y D_2 son no vacíos, la frontera será del tipo 7) u 8) dependiendo de si $c_1(t_1^*)$ es menor o mayor a $c_2(t_2^*)$ respectivamente (obviamente si alguno de los conjuntos es vacío el algoritmo elige el tipo contrario de frontera). La siguiente proposición justifica lo anterior pues nos dice que: (suponiendo D_1 y D_2 no vacíos) si $c_1(t_1^*) > c_2(t_2^*)$ ninguna función del tipo 7) puede ser $(\widehat{P_2})$-óptima y si $c_1(t_1^*) < c_2(t_2^*)$ entonces ninguna función del tipo 8) puede ser $(\widehat{P_2})$-óptima.

Proposición 6.2.7. *Sean $\widetilde{t_2} \in D_1$, $\widehat{t_1} \in D_2$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Si $c_1(t_1^*) > c_2(t_2^*)$, ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ tal que $h(t_1^*) = \widetilde{t_2}$ y tal que h es estrictamente creciente y continua en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$, para algún $\epsilon > 0$, es $(\widehat{P_2})$-óptima.

ii) Si $c_1(t_1^*) < c_2(t_2^*)$, ninguna función $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ que cumpla las siguientes condiciones es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$

h estrictamente creciente y continua en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

Demostración.

i) Sea h cualquiera como en el enunciado, como $c_1(t_1^*) > c_1(\widehat{t_1})$, por el Corolario 5.2.6 sabemos que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_1^1, t_1^2]$, también llamemos $t_2{}'$ al punto tal que $h(t_1) = t_2{}' \quad \forall t_1 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(t_1^1) \geq c_1(t_1^*)$ y por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2(t_2{}') \geq c_2(\widehat{t_2}) = c_1(t_1^*) > c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2(t_2{}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

ii) Análogo a i), intercambiar jugadores.

$\square$

En el Algoritmo, una vez decidido que la frontera será del tipo 5), el paso siguiente es encontrar un par $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ tal que podamos definir $h(t_1) = \widehat{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$. Lo primero que hacemos es descartar los puntos de A_1 que no minimizan c_1 y a continuación elegimos el par $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ como aquel de los restantes que maximiza ambas coordenadas. La siguiente proposición justifica en parte lo anterior pues nos dice que cualquier punto de A_1 que no minimice c_1 induce una frontera que no es óptima, también nos dice que dentro de los puntos de A_1 que sí minimizan c_1, cualquier punto que no maximiza cada una de sus coordenadas induce una frontera que no es óptima. Notemos que esto no es suficiente para justificar el algoritmo, pero la proposición 6.2.9 completa la justificación al decirnos que dentro de los puntos de A_1 que minimizan c_1 siempre existe uno que maximiza ambas coordenadas. Ahora presentamos ambas proposiciones.

Proposición 6.2.8. *Sean $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}), (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_1$. Entonces, bajo cualquiera de las condiciones que a continuación se enumeran, si $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ es creciente y tal que:*

$$h(t_1) = \widetilde{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$$

h estrictamente creciente y continua en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$.

Se tiene que h no es $(\widehat{P_2})$-óptima.

1) $c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$.

2) $c_1(\widetilde{t_1}) = c_1(\widehat{t_1})$ y $\widetilde{t_2} < \widehat{t_2}$.

3) $c_1(\widetilde{t_1}) = c_1(\widehat{t_1})$ y $\widetilde{t_1} < \widehat{t_1}$.

Demostración.

1) Partamos notando que en este caso $\widetilde{t_1} < \widehat{t_1}$, pues si no se tendría que $\widehat{t_1} \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$ y además:

$$\int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 = 0$$

Y esto no es posible pues $\widetilde{t_1}$ y $\widetilde{t_2}$ cumplen las correspondiente condición (5.2). Ahora consideremos h como en el enunciado y supongamos que h es $(\widehat{P_2})$-óptima, como $c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$, por el Corolario 5.2.6 sabemos que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_1^1, t_1^2]$, también llamemos ${t_2}'$ al punto tal que $h(t_1) = {t_2}' \quad \forall t_1 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(t_1^1) \geq c_1(\widetilde{t_1})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2({t_2}') > c_2(\widetilde{t_2}) = c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2({t_2}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

2) Supongamos que h es óptima, como $c_2(\widehat{t_2}) = c_2(\widetilde{t_2}) = c_1(\widetilde{t_1})$ y h es estrictamente creciente en una vecindad de $\widetilde{t_1}$, por el Corolario 5.2.6 se tiene que $\widehat{t_2}$ pertenece al interior de un intervalo donde h^{-1} es constante, llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_2^1, t_2^2]$, también llamemos $t_1{}'$ al punto tal que $h^{-1}(t_2) = t_1{}' \quad \forall t_2 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_2(t_2^1) \geq c_2(\widetilde{t_2}) > c_2(\widehat{t_2})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 > \int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_1' = b_1$. Igualmente, en caso que $t_1' < b_1$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_1(t_1{}') > c_1(\widetilde{t_1}) = c_2(\widetilde{t_2}) > c_2(\widehat{t_2})$, por lo tanto:

$$\int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_1(t_1{}') - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 > \int_{t_2^1}^{\widehat{t_2}} \left[c_2(\widehat{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_2^1, t_2^2]$. Concluímos que h no es óptima.

3) Supongamos que h es óptima, como $c_1(\widehat{t_1}) = c_1(\widetilde{t_1})$ y $c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \ \forall t_1 \in (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon)$ sabemos que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos I al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $I = [t_1^1, t_1^2]$, también llamemos $t_2{}'$ al punto tal que $h(t_1) = t_2{}' \quad \forall t_1 \in I$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(t_1^1) \geq c_1(\widetilde{t_1})$ y por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2(t_2{}') > c_2(\widetilde{t_2}) = c_1(\widetilde{t_1}) > c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2(t_2{}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

□

Proposición 6.2.9. *Sean* $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}), (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_1$ *tales que* $c_1(\widehat{t_1}) = c_1(\widetilde{t_1})$*, entonces si* ${t_1}' = \max\{\widehat{t_1}, \widetilde{t_1}\}$ *y* ${t_2}' = \max\{\widehat{t_2}, \widetilde{t_2}\}$*, se tiene que* $({t_1}', {t_2}') \in A_1$*.*

Demostración. Se debe simplemente a que $c_1(t_1') = c_1(\widehat{t_1}) = c_1(\widetilde{t_1}) = c_2(\widehat{t_2}) = c_2(\widetilde{t_2}) = c_2(t_2')$. Es claro que si $t_1' = \widehat{t_1}$ o si $t_1' = \widetilde{t_1}$ se cumplen:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1') - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1']$$

$$\int_{t_1}^{t_1'} [c_1(t_1') - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1']$$

Igualmente, si $t_2' = \widehat{t_2}$ o si $t_2' = \widetilde{t_2}$ se cumple:

$$\int_{t_2}^{t_2'} [c_2(t_2') - c_1(s_1)]\, f_2(s_2)\, ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, t_2']$$

Y por lo tanto $({t_1}', {t_2}') \in A_1$. □

Volviendo al algoritmo, notemos que si se ha decidido que la frontera será del tipo 6), la elección del par $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ que permite definir $h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$ y tomar $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ como partida para las iteraciones de la etapa 6), es análoga a la que se realiza cuando se decide que la frontera será del tipo 5). Por lo tanto, intercambiando los jugadores, las proposiciones anteriores también justifican la elección que se establece en el algoritmo para este caso.

Por último, cuando el algoritmo decide que la frontera será del tipo 7), define $\widehat{t_2}$ como el punto más grande de D_1 y considera el par $(t_1^*, \widehat{t_2})$ como el inicial para las iteraciones de la etapa 6). Análogamente, cuando el algoritmo decide que la frontera será del tipo 6), define $\widehat{t_1}$ como el punto más grande de D_2 y considera el par $(\widehat{t_1}, t_2^*)$ como el inicial para las iteraciones de la etapa 6). La siguiente proposición justifica lo anterior pues nos dice que cuando D_2 tiene más de un elemento, cualquier punto que no sea el mayor de ese conjunto, induce una función del tipo 8) que no es $(\widehat{P_2})$-óptima e igualmente, cuando D_1 tiene más de un elemento, cualquier punto que no sea el mayor de dicho conjunto, induce una función del tipo 7) que no es $(\widehat{P_2})$-óptima.

Proposición 6.2.10. *Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

i) *Sean* $\widehat{t_1}, \widetilde{t_1} \in D_2$*, con* $\widetilde{t_1} < \widehat{t_1}$*. Entonces ninguna función* $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ *que cumpla las siguientes condiciones es* $(\widehat{P_2})$*-óptima.*

   $h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$

   h estrictamente creciente y continua en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon]$ *para algún* $\epsilon > 0$*.*

ii) *Sean* $\widehat{t_2}, \widetilde{t_2} \in D_1$*, con* $\widetilde{t_2} < \widehat{t_2}$*. Entonces ninguna función* $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ *tal que* $h(t_1^*) = \widetilde{t_2}$ *y h es estrictamente creciente y continua en* $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$*, para algún* $\epsilon > 0$*, es* $(\widehat{P_2})$*-óptima.*

Demostración.

i) Consideremos h como en el enunciado y supongamos que h es $(\widehat{P_2})$-óptima. Notemos que $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))\ \forall t_1 \in [\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1}+\epsilon]$, por lo tanto el Corolario 5.2.6 nos dice que $\widehat{t_1}$ pertenece al interior de un intervalo maximal donde h es constante, que supondremos SPG de la forma $I = [t_1^1, t_1^2]$ y llamaremos t_2' al punto tal que $h(t_1) = t_2' \quad \forall t_1 \in I$. Además, $c_1(t_1^1) \geq c_1(\widetilde{t_1}+\epsilon) > c_1(\widetilde{t_1}) = c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto usando (8.2) se tiene:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$ en el caso que $t_2' = b_2$. Igualmente, en caso que $t_2' < b_2$, el Corolario 5.2.6 nos entrega las desigualdades $c_2(t_2') \geq c_2(h(\widetilde{t_1}+\epsilon)) > c_2(t_2^*) = c_1(\widehat{t_1})$, por lo tanto:

$$\int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_2(t_2') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{t_1^1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad de h en $[t_1^1, t_1^2]$. Concluímos que h no es óptima.

ii) Análogo a i), intercambiar jugadores.

□

6.2.3. Justificación etapa 6

Una vez llegado a la etapa 6) el algoritmo empieza a iterar, en cada iteración define h como la solución de la ecuación $c_1(t_1) = c_2(h(t_1))$ en un intervalo que estará determinado por la existencia o no de puntos que cumplan las condiciones necesarias para definir h constante en un intervalo o h discontinua en algún punto. Apenas es posible realizar cualquiera de las dos opciones, el algoritmo lo hace y esto se debe a que si se ignoraran intervalos donde la frontera puede ser constante o puntos donde puede ser discontinua y se definiera simplemente h estrictamente creciente o h continua respectivamente, se construiría una frontera que no es óptima. Todo esto se justifica en la siguiente proposición.

Proposición 6.2.11. *Sea $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ creciente y sea I un intervalo donde h es estrictamente creciente. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) Si $\exists\ t_1^1 \in Int(I)$, $t_1^2 \in (t_1^1, b_1]$ tales que:

$$\int_{t_1^1}^{t_1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

$$\int_{t_1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

$$c_1(t_1^1) = c_1(t_1^2) \text{ o bien } t_1^2 = b_1$$

Entonces, se tiene que h no es $(\widehat{P_2})$-óptima.

ii) Si h es continua en I pero $\exists\ t_2^1 \in h(Int(I))$, $t_2^2 \in (t_2^1, b_2]$ tales que:

$$\int_{t_2^1}^{t_2} \left[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 \leq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^1, t_2^2]$$

$$\int_{t_2}^{t_2^2} \left[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^1, t_2^2]$$

$$c_2(t_2^1) = c_2(t_2^2) \text{ o bien } t_2^2 = b_2$$

Entonces, se tiene que h no es $(\widehat{P_2})$-óptima.

Demostración.

i) Sin pérdida de generalidad supongamos que $I = [\widetilde{t_1^1}, \widetilde{t_1^2}]$. Supongamos ahora que h es $(\widehat{P_2})$-óptima, entonces por el Corolario 5.2.6 se tiene que $c_1(\widetilde{t_1^2}) > c_1(t_1^1)$ y por lo tanto, si $t_1^2 < b_1$, nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que t_1^2 pertenece al interior de un intervalo donde h es constante. Llamemos $\widehat{I}$ al intervalo maximal que cumple lo anterior y supongamos sin pérdida de generalidad que $\widehat{I} = [\widehat{t_1^1}, \widehat{t_1^2}]$, también llamemos $t_2{}'$ al punto tal que $h(t_1) = t_2{}' \quad \forall t_1 \in \widehat{I}$. Nuevamente por el Corolario 5.2.6, sabemos que $c_1(\widehat{t_1^1}) \geq c_1(\widetilde{t_1^2}) > c_1(t_1^1)$ y por lo tanto:

$$\int_{\widehat{t_1^1}}^{t_1^2} \left[c_1(\widehat{t_1^1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{\widehat{t_1^1}}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Y esto contradice las condiciones necesarias de optimalidad en el caso en que $t_2{}' = b_2$, por lo tanto $t_2{}' < b_2$. En este caso por el Corolario 5.2.6 se tiene que $c_2(t_2{}') > c_2(h(\widetilde{t_1^2})) = c_1(\widetilde{t_1^2}) > c_1(t_1^1)$, por lo tanto:

$$\int_{\widehat{t_1^1}}^{t_1^2} \left[c_2(t_2') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > \int_{\widehat{t_1^1}}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0$$

Lo que también contradice las condiciones necesarias de optimalidad. Ahora sigamos suponiendo que h es $(\widehat{P_2})$-óptima y analicemos el caso en que $t_1^2 = b_1$. Reescribiendo una de las condiciones que satisface t_1^2, se tiene que:

$$\int_{t_1^2}^{b_1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^2, b_1]$$

Y esto implica que $c_1(b_1) \leq c_1(t_1^1)$, por lo tanto debido al Corolario 5.2.6 sabemos que b_1 es el extremo de un intervalo donde h es constante. El análisis que sigue es idéntico al del caso anterior (cambiar t_1^2 y $\widehat{t_1^2}$ por b_1) y sigue que en este caso h también contradice las condiciones necesarias de optimalidad. Concluímos que h no es $(\widehat{P_2})$-óptima.

ii) Análogo a i).

□

La siguiente proposición justifica uno de los casos de la etapa 6) del algoritmo. Se trata de cuando existe un par (t_1^1, t_1^2) sobre la parte estrictamente creciente de la frontera, en el cual es posible definir h constante hasta algún otro punto y h discontinua en este punto. Notemos que a priori, si eligiéramos cualquiera de las dos alternativas y siguiéramos iterando, en la iteración siguiente inmediatamente tendríamos que elegir la alternativa que no elegimos antes, pues a menos que hayamos terminado (llegando a b_1 o b_2) el algoritmo se habrá movido a un punto que sigue cumpliendo las condiciones necesarias del caso no elegido. Lo incierto entonces es cual de las dos alternativas elegir primero. La siguiente proposición nos dice que esto no importa en términos de optimalidad y nos permite decidir arbitrariamente pues afirma que siguiendo las opciones 6.1) y 6.2) se obtienen soluciones con el mismo valor objetivo. Además esta proposición también aplica al caso en que con alguna de las alternativas el algoritmo llega a b_1 o b_2 y por lo tanto también se tiene que eligiendo primero cualquiera de las dos opciones se obtienen soluciones con el mismo valor objetivo.

Proposición 6.2.12. *Sea $(t_1^1, t_2^1) \in T$ un punto que cumple $c_1(t_1^1) = c_2(t_2^1)$ y tal que existen $t_1^2 \in [t_1^1, b_1]$, $t_2^2 \in [t_2^1, b_2]$ que satisfacen:*

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 = 0$$

$$\int_{t_2^1}^{t_2^2} \left[c_2(t_2^1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 = 0$$

Entonces:

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 = \int_{t_2^1}^{t_2^2} \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_2(s_2) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1$$

Demostración. Simplemente calculamos:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1^1}^{t_1^2} \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_2(s_2) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1 &= \int_{t_1^1}^{t_1^2} f_1(s_1)\ ds_1 \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} f_1(s_1)\ ds_1 \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_2(t_2^1) f_2(s_2)\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} f_1(s_1) c_2(t_2^1)\ ds_1 \int_{t_2^1}^{t_2^2} f_2(s_2)\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} f_1(s_1) c_1(t_1^1)\ ds_1 \int_{t_2^1}^{t_2^2} f_2(s_2)\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} f_1(s_1) c_1(s_1)\ ds_1 \int_{t_2^1}^{t_2^2} f_2(s_2)\ ds_2 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} \int_{t_2^1}^{t_2^2} c_1(s_1) f_1(s_1) f_2(s_2)\ ds_2\ ds_1
\end{aligned}$$

□

6.2.4. Justificación de que etapa 6 itera correctamente

La presente sección tiene como objetivo demostrar que cada vez que el algoritmo entra en la etapa 6), itera correctamente y termina el proceso o en su defecto encuentra un par de puntos con los cuales volver a comenzar esta etapa. Para lograr esto necesitaremos algunas definiciones y proposiciones nuevas que nos permitirán ver con mayor claridad las distintas situaciones que iremos encontrando. Comenzaremos definiendo una función que será útil en futuras demostraciones y algunas propiedades básicas sobre ella.

Definición 6.2.13. Se define $\Phi_h : [t_1^*, b_1] \to \mathbb{R}$ como:

$$\Phi_h(t_1) = \int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1$$

Proposición 6.2.14. Φ_h *es continua.*

Demostración. Trivial pues c_1 es una función continua. □

Proposición 6.2.15. *Si c_1 es creciente en $[\alpha, \beta] \subseteq [t_1^*, b_1]$, entonces Φ_h es creciente en $[\alpha, \beta]$.*

Demostración. Sean $t_1^1 < t_1^2$, con $\{t_1^1, t_1^2\} \subset [\alpha, \beta]$. Entonces $c_1(t_1^1) \leq c_1(s_1) \leq c_1(t_1^2) \quad \forall s_1 \in [t_1^1, t_1^2]$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_h(t_1^2) &= \int_{t_1^*}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 + \int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \\
&\geq \int_{t_1^*}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 + 0 \\
&= \Phi_h(t_1^1)
\end{aligned}$$

□

La siguiente definición resumirá todas las condiciones que se satisfacen cuando el algoritmo está comenzando una iteración de la etapa 6). Hasta ese momento se ha definido h estrictamente creciente en algunos intervalos y h constante en otros, centraremos la definición en los primeros intervalos, pero sin olvidar que entre medio de ellos h es constante.

Definición 6.2.16. Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$ una unión finita de intervalos cerrados, tales que $\mathcal{D} \subset [t_1^*, b_1)$. Diremos que $\mathcal{D}$ es 1-factible si se cumplen:

1) $d_1 = t_1^*$.

2) $D_i < d_{i+1} < D_{i+1} \quad \forall i \in \{1, \ldots, M-1\}$.

3) c_1 es estrictamente creciente en $[d_i, D_i] \quad \forall i \in \{1, \ldots, M\}$.

4) $\forall i \in \{2, \ldots, M-1\}$ se cumplen:

   - $c_1(D_i) = c_1(d_{i+1})$
   - $\displaystyle\int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$
   - $\displaystyle\int_{D_i}^{t_1} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [D_i, d_{i+1}]$

5) Si $D_1 > d_1$, las tres condiciones anteriores también se cumplen para $i = 1$. En cambio, si $D_1 = d_1 = t_1^*$, se satisfacen:

   - $\displaystyle\int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$
   - $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, d_2]$

Observación: Notemos que si $\mathcal{D}$ es un conjunto 1-factible y $D_1 > t_1^*$, se tiene que c_1 es creciente y continua en $\mathcal{D}$ y además $c_1(s_1) > l_0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$. En cambio, si $\mathcal{D}$ es 1-factible y $D_1 = t_1^*$, se tiene que c_1 es creciente y continua en $\mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ y además $c_1(s_1) > l_0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*, d_2\}$. También se cumple en este caso, debido a la segunda condición del punto 5, que $c_1(t_1^*) \geq c_1(d_2)$.

Ahora haremos definiciones en los puntos donde aún no se ha definido la función h. Para $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$ 1-factible, definimos los puntos $\{\alpha_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$ y $\{\lambda_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$ como los posteriores mínimos y máximos locales de c_1 tales que la función no es constante en una vecindad por la derecha. Es decir, si llamamos $\lambda_0^{\mathcal{D}} = D_M$ (solo por notación), definimos:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}^{\mathcal{D}} &= \inf\{t_1 \in (\lambda_i^{\mathcal{D}}, b_1) : \ t_1 \text{ es mínimo local de } c_1,\ c_1(t_1) < c_1(D_M), \\ &\qquad \forall \epsilon > 0\ \exists s_1 \in [t_1, t_1 + \epsilon] \text{ tq } c_1(s_1) > c_1(t_1)\ \} \end{aligned}$$

En caso que c_1 sea creciente en $[\alpha_i^{\mathcal{D}}, b_1]$ definimos $\lambda_i^{\mathcal{D}} = b_1$ y en caso contrario:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{\mathcal{D}} &= \inf\{t_1 \in (\alpha_i^{\mathcal{D}}, b_1) : \ t_1 \text{ es máximo local de } c_1, \\ &\qquad \forall \epsilon > 0\ \exists s_1 \in [t_1, t_1 + \epsilon] \text{ tq } c_1(s_1) < c_1(t_1)\ \} \end{aligned}$$

Hasta un L tal que $\lambda_L^{\mathcal{D}} = b_1$ o tal que c_1 es decreciente en $[\lambda_L^{\mathcal{D}}, b_1]$. Dado que para los pares de puntos $(t_1^1, t_1^2) \in (t_1^*, b_1) \times (t_1^*, b_1)$ el algoritmo sólo puede definir h constante entre aquellos que cumplan $c_1(t_1^1) = c_1(t_1^2)$, no es necesario chequear las condiciones necesarias en todos los puntos de los intervalos $[\alpha_i^{\mathcal{D}}, \lambda_i^{\mathcal{D}}]$. Definimos entonces $\beta_i^{\mathcal{D}}$ como los últimos puntos a chequear dentro de cada intervalo, es decir $\beta_i^{\mathcal{D}} = \lambda_i^{\mathcal{D}}$ cuando $c_1(\lambda_i^{\mathcal{D}}) < c_1(D_M)$ y en caso contrario:

$$\beta_i^{\mathcal{D}} = \sup\{t_1 \in [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \lambda_i^{\mathcal{D}}] : c_1(t_1) \leq c_1(D_M)\}$$

Con todo lo anterior podemos definir una función que será muy importante para el cumplir el propósito de la sección, puesto que buscar un cero de esta función será equivalente a buscar una de las condiciones necesarias para definir h constante en un intervalo.

Definición 6.2.17. Para $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$ 1-factible, se define $\Phi_{\mathcal{D}} : \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{P}}, \beta_i^{\mathcal{P}}] \to \mathbb{R}$ como:

$$\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma(t_1)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 & \text{si } c_1(t_1) > l_0 \\ \\ \Phi_h(t_1) & \text{si } c_1(t_1) \leq l_0 \end{cases}$$

Donde $l_0 = \text{mín}\ \{c_1(t_1^*), c_1(d_2)\}$ y $\gamma(t_1) = \sup\ \{s_1 \in \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i] : c_1(s_1) = c_1(t_1)\}$.

Observación: La función γ está bien definida. En efecto, en cada uno de los intervalos $[\alpha_i^{\mathcal{P}}, \beta_i^{\mathcal{P}}]$ la función c_1 es creciente, continua y $c_1(\beta_i^{\mathcal{P}}) \leq c_1(D_M)$. Si $c_1(t_1^*) \geq c_1(d_2)$ se tiene que $l_0 = c_1(d_2)$ y dado que c_1 es creciente en continua en $\bigcup_{i=2}^{M} [d_i, D_i]$, γ está bien definida. Por otro lado, si $c_1(t_1^*) < c_1(d_2)$ entonces sabemos que $D_1 > d_1$ y $l_0 = c_1(t_1^*)$. Se tiene entonces que c_1 es continua y creciente en $\mathcal{D}$ por lo tanto γ también está bien definida.

Proposición 6.2.18. *$\Phi_{\mathcal{D}}$ es continua en $[\alpha_i^{\mathcal{P}}, \beta_i^{\mathcal{P}}] \quad \forall i \in \{1, \ldots, L\}$.*

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, L\}$ cualquiera, demostremos que $\Phi_{\mathcal{D}}$ es continua en $[\alpha_i^{\mathcal{P}}, \beta_i^{\mathcal{P}}]$. Como c_1 es creciente en $[\alpha_i^{\mathcal{P}}, \beta_i^{\mathcal{P}}]$, el conjunto de los puntos t_1 tales que $c_1(t_1) < l_0$ es un intervalo donde Φ_h es continua. Consideremos ahora un punto t_1 tal que $c_1(t_1) > l_0$. Si γ es continua en t_1 es claro que $\Phi_{\mathcal{D}}$ será continua en t_1. Si γ no es continua en t_1, dado que c_1 es continua en $[t_1^*, b_1]$, necesariamente $c_1(t_1) = c_1(D_i) = c_1(d_{i+1})$ para algún $i \in \{1, \ldots, M-1\}$ y por lo tanto $\gamma(t_1^-) = D_i$, $\gamma(t_1^+) = d_{i+1}$ y se cumple:

$$\int_{\gamma(t_1^-)}^{\gamma(t_1^+)} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{D}}(t_1^-) &= \int_{\gamma(t_1^-)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\ &= \int_{\gamma(t_1^-)}^{\gamma(t_1^+)} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{\gamma(t_1^+)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\ &= 0 + \int_{\gamma(t_1^+)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\ &= \Phi_{\mathcal{D}}(t_1^+) \end{aligned}$$

Así, $\Phi_{\mathcal{D}}$ es continua en t_1. Por último, consideremos un punto t_1 tal que $c_1(t_1) = l_0$. Para demostrar que $\Phi_{\mathcal{D}}$ es continua en t_1 demostraremos que:

$$\int_{\gamma(t_1)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = \Phi_h(t_1)$$

Si $D_1 > t_1^*$, se tiene que $l_0 = c_1(t_1^*)$ y por lo tanto:

$$\int_{\gamma(t_1)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = \int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = \Phi_h(t_1)$$

En caso de que $D_1 = t_1^*$, se tiene que:

$$\int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$$

Además, $c_1(d_2) = l_0 = c_1(t_1)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_h(t_1) &= \int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{d_2}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{\gamma(t_1)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{\gamma(t_1)}^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1
\end{aligned}$$

Concluímos que $\Phi_{\mathcal{D}}$ es continua en $[\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$. □

A continuación presentamos dos proposiciones que establecen desigualdades que serán útiles en las posteriores demostraciones, seguidas de la última propiedad básica de $\Phi_{\mathcal{D}}$.

Proposición 6.2.19. *Se cumple la correspondiente desigualdad según sea el caso.*

$$\text{Si } D_1 > t_1^*\ , \quad \int_{t_1^*}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 < 0 \quad \forall t_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$$

$$\text{Si } D_1 = t_1^*\ , \quad \int_{t_1^*}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 < 0 \quad \forall t_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*, d_2\}$$

Demostración. Supongamos que $D_1 > t_1^*$ y sea $t_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ cualquiera. Llamemos k al índice tal que $t_1 \in [d_k, D_k]$ y recordemos que $\int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, M\}$. Además, c_1 es creciente en $\mathcal{D}$ y se tiene que $c_1(s_1) > l_0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
= \;& \sum_{i=1}^{k-1} \int_{d_i}^{D_i} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
+ \;& \int_{d_k}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
< \;& 0 + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + 0 \\
< \;& \sum_{i=1}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

Si $D_1 = t_1^*$, sea $t_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*, d_2\}$ cualquiera y llamemos k al índice tal que $t_1 \in [d_k, D_k]$. Se cumple que $\int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 = 0$ y $l_0 = c_1(d_2)$. Además, c_1 es creciente en $\mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ y se tiene que $c_1(s_1) > l_0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*, d_2\}$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1^*}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
= \;& \int_{t_1^*}^{d_2} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=2}^{k-1} \int_{d_i}^{D_i} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
+ \;& \sum_{i=2}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + \int_{d_k}^{t_1} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
< \;& \int_{t_1^*}^{d_2} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=2}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
< \;& \int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=2}^{k-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.20. *Sean $t_1^1, t_1^2 \in \mathcal{D}$ con $t_1^1 < t_1^2$. Entonces se tiene que:*

$$\int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0$$

Demostración. Sean $k_1, k_2 \in \{1, \ldots, M\}$ tales que $t_1^1 \in [d_{k_1}, D_{k_1}]$ y $t_1^2 \in [d_{k_2}, D_{k_2}]$. Recordemos que $\forall i \in \{1, \ldots, M\}$ se cumple que $\displaystyle\int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 = 0$, además como c_1 es creciente en $\displaystyle\bigcup_{i=2}^{M} [d_i, D_i]$, se tiene que:

$$c_1(s_1) \geq c_1(t_1^1) \quad \forall s_1 \in \left(\bigcup_{i=k_1+1}^{k_2-1} [d_i, D_i] \right) \cup [d_{k_2}, t_1^2]$$

También se cumple que $\displaystyle\int_{t_1^1}^{D_{k_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0$. En efecto, si $D_{k_1} \neq D_1$ lo anterior es cierto porque c_1 es creciente en $[t_1^1, D_{k_1}]$, si $D_{k_1} = D_1$ y $D_1 > t_1^*$ también se tiene que c_1 es creciente en $[t_1^1, D_1]$ y por último, si $D_{k_1} = D_1 = t_1^*$, necesarimente $t_1^1 = t_1^*$ y la afirmación es trivialmente cierta. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & \int_{t_1^1}^{D_{k_1}} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
+ \; & \sum_{i=k_1+1}^{k_2-1} \int_{d_i}^{D_i} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \int_{d_{k_2}}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
\leq \; & 0 + \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 + 0 + 0 \\
\leq \; & \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1) ds_1 \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.21. *Si c_1 es creciente en $[\alpha, \beta] \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$, entonces $\Phi_{\mathcal{D}}$ es creciente en $[\alpha, \beta]$.*

Demostración. Sean $t_1^1 < t_1^2$ con $\{t_1^1, t_1^2\} \subset [\alpha, \beta]$. Se tiene entonces que $c_1(t_1^1) \leq c_1(t_1^2)$ y hay tres posibles situaciones:

i) Si $c_1(t_1^1) \leq c_1(t_1^2) < l_0$ se tiene que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^1) = \Phi_h(t_1^1)$ y $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) = \Phi_h(t_1^2)$. Gracias a la proposición 6.2.15 sabemos que Φ_h es creciente en $[\alpha, \beta]$ y por lo tanto $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^1) \leq \Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2)$.

ii) Si $c_1(t_1^1) \leq l_0 \leq c_1(t_1^2)$ se tiene que:

$$\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^1) = \Phi_h(t_1^1) = \int_{t_1^*}^{t_1^1} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1$$

$$\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) = \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^2} \big[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1$$

Además, es claro que $t_1^* \leq \gamma(t_1^2)$ y que $\forall s_1 \in [t_1^*, \gamma(t_1^2)] \quad c_1(s_1) \leq c_1(\gamma(t_1^2)) = c_1(t_1^2)$. Luego, usando la proposición 6.2.19 tenemos que:

$$\int_{t_1^*}^{\gamma(t_1^2)} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq \int_{t_1^*}^{\gamma(t_1^2)} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) &= \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \big[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{t_1^1}^{t_1^2} \big[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&\geq \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \big[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 + 0 \\
&\geq \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&\geq \int_{t_1^*}^{\gamma(t_1^2)} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \Phi_{\mathcal{D}}(t_1^1)
\end{aligned}$$

iii) Si $l_0 \leq c_1(t_1^1) \leq c_1(t_1^2)$, se tiene que $\gamma(t_1^1) \leq \gamma(t_1^2)$ y también que $c_1(s_1) \leq c_1(\gamma(t_1^2)) = c_1(t_1^2)\ \forall s_1 \in [\gamma(t_1^1), \gamma(t_1^2)]$. Por la proposición 6.2.20 tenemos que:

$$\int_{\gamma(t_1^1)}^{\gamma(t_1^2)} \big[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\big]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0$$

Y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) &= \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 + \int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&\geq \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 + 0 \\
&\geq \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&\geq \int_{\gamma(t_1^1)}^{\gamma(t_1^2)} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 + \int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1^1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&= \Phi_{\mathcal{D}}(t_1^1)
\end{aligned}
$$

□

La siguiente proposición es muy importante pues nos dice que encontrar un valor positivo de $\Phi_{\mathcal{D}}$ es una condición suficiente para la existencia de algún cero.

Proposición 6.2.22. *Si* $t_1' \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ *es tal que* $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1') > 0$*, entonces existe* $\widehat{t_1} \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$*, con* $\widehat{t_1} < t_1'$*, tal que* $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$ *y* $c_1(\widehat{t_1}) < c_1(t_1')$*.*

Demostración. En esta demostración, para hacer menos engorrosa la notación, denotaremos los puntos $\{\alpha_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$ y $\{\beta_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$ simplemente como $\{\alpha_i\}_{i=1}^{L}$ y $\{\beta_i\}_{i=1}^{L}$ respectivamente. Partamos definiendo $m_0 \in \{1, \ldots, L\}$ como el índice tal que $t_1' \in [\alpha_{m_0}, \beta_{m_0}]$. Si $\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{m_0}) \leq 0$, por la continuidad de $\Phi_{\mathcal{D}}$ y por el T.V.I. se tiene que $\exists\, \widehat{t_1} \in [\alpha_{m_0}, t_1')$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$. Además, como c_1 es creciente en $[\alpha_{m_0}, \beta_{m_0}]$ se tiene que $c_1(\widehat{t_1}) \leq c_1(t_1')$, pero si $c_1(\widehat{t_1}) = c_1(t_1')$, necesariamente c_1 es constante en $[\widehat{t_1}, t_1']$ y esto implica que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = \Phi_{\mathcal{D}}(t_1')$. Por lo tanto $c_1(\widehat{t_1}) < c_1(t_1')$. Por otro lado, si $\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{m_0}) > 0$, escojamos un índice i_0 tal que:

$$\alpha_{i_0} \in \underset{t_1 \in [D_M, t_1']}{\operatorname{argmin}}\ c_1(t_1)$$

Y definamos la siguiente indexación que determinará un subconjunto de $\{\alpha_i\}_{i=1}^{L}$.

$$\alpha_{i_{m+1}} = \min\{t_1 \in \{\alpha_i\}_{i=1}^{L} : t_1 > \alpha_{i_m}\ \wedge\ t_1 \in \underset{s_1 \in [t_1, t_1']}{\operatorname{argmin}} c_1(s_1)\}$$

Hasta M_0 tal que $\alpha_{i_{M_0}} = \alpha_{m_0}$. Notemos que $\forall m \in \{1, \ldots, M_0\}$, si $l(m)$ denota el índice del conjunto original tal que $\alpha_{i_m} = \alpha_{l(m)}$, se cumple que $\exists t_1 \in [\alpha_{l(m)}, \beta_{l(m)}]$ tal que $c_1(t_1) = c_1(\alpha_{i_{m+1}})$.
Por lo tanto definimos los puntos l_m, para $m \in \{2, \ldots, M_0\}$, como:

$$l_m = \inf\{t_1 \in [\alpha_{l(m-1)}, \beta_{l(m-1)}] : c_1(t_1) = c_1(\alpha_{i_m})\}$$

Y a continuación notemos que se cumplen las siguientes propiedades:

- La restricción de c_1 al conjunto $\left(\bigcup_{m=1}^{M_0}[\alpha_{i_{m-1}}, l_m]\right) \cup [\alpha_{m_0}, t_1']$ es creciente y continua.
- $c_1(s_1) \geq c_1(\alpha_{i_m}) \quad \forall s_1 \in [l_m, \alpha_{i_m}] \quad \forall m \in \{1, \ldots, M_0\}$

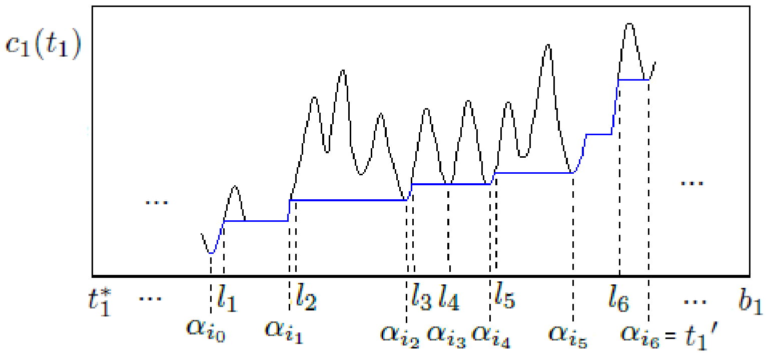


Figura 6.1: Ejemplo de los puntos α_{i_m} y l_m.

Estas propiedades implican que $\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_m}) \leq \Phi_{\mathcal{D}}(l_m) \quad \forall m \in \{2, \ldots, M_0\}$. En efecto, si se cumple que $c_1(\alpha_{i_{m_0}}) \leq l_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_m}) &= \Phi_h(\alpha_{i_m}) \\
&= \int_{t_1^*}^{\alpha_{i_m}} [c_1(\alpha_{i_m}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{l_m} [c_1(\alpha_{i_m}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 + \int_{l_m}^{\alpha_{i_m}} [c_1(\alpha_{i_m}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 \\
&\leq \int_{t_1^*}^{l_m} [c_1(\alpha_{i_m}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1 + 0 \\
&= \Phi_{\mathcal{D}}(l_m)
\end{aligned}$$

Y si se cumple que $c_1(\alpha_{i_{m_0}}) > l_0$ la demostración es análoga (cambiando t_1^* por $\gamma(\alpha_{i_m})$). Así, para $m \in \{2, \ldots, M_0\}$ la función $\Phi_{\mathcal{D}}$ es creciente y continua en $[\alpha_{i_{m-1}}, l_m]$ y además $\Phi_{\mathcal{D}}(l_m) \geq \Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_m})$. Gracias al T.V.I. podemos definir entonces $r_m \in [\alpha_{i_{m-1}}, l_m]$ como:

$$r_m = \sup\{t_1 \in [\alpha_{i_{m-1}}, l_m] : \Phi_{\mathcal{D}}(t_1) = \Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_m})\}$$

De modo que la restricción de $\Phi_{\mathcal{D}}$ al conjunto $\mathcal{D}' = \left(\bigcup_{m=1}^{M_0}[\alpha_{i_{m-1}}, r_m]\right) \cup [\alpha_{m_0}, t_1']$ será creciente y continua. Para continuar, notemos que $\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_0}) \leq 0$. En efecto, se tiene que:

$$c_1(s_1) \geq c_1(\alpha_{i_0}) \quad \forall s_1 \in [D_M, \alpha_{i_0}]$$

Luego, si $c_1(\alpha_{i_0}) \leq l_0$, por la proposición 6.2.19 sabemos que:

$$\int_{t_1^*}^{D_M} [c_1(\alpha_{i_0}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq \int_{t_1^*}^{D_M} [l_0 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_0}) &= \int_{t_1^*}^{\alpha_{i_0}} [c_1(\alpha_{i_0}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{D_M} [c_1(\alpha_{i_0}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{D_M}^{\alpha_{i_0}} [c_1(\alpha_{i_0}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&\leq 0 + 0
\end{aligned}$$

En cambio si $c_1(\alpha_{i_0}) > l_0$, por la proposición 6.2.20 sabemos que:

$$\int_{\gamma(\alpha_{i_0})}^{D_M} [c_1(\alpha_{i_0}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0$$

Y la demostración es análoga (cambiando t_1^* por $\gamma(\alpha_{i_0})$). Dado que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1') > 0$, por el T.V.I. concluímos que $\exists \widehat{t_1} \in \mathcal{D}'$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$. Para demostrar que $c_1(\widehat{t_1}) < c_1(t_1')$ recordemos que c_1 es creciente (aunque eventualmente discontinua) en $\mathcal{D}'$ y por lo tanto, llamando k al índice tal que $\widehat{t_1} \in [\alpha_{i_{k-1}}, r_k]$, si $c_1(\widehat{t_1}) = c_1(t_1')$ se tiene que:

$$c_1(t_1) = c_1(t_1') \quad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, r_k] \cup \left(\bigcup_{m=k+1}^{M_0} [\alpha_{i_{m-1}}, r_m] \right) \cup [\alpha_{m_0}, t_1']$$

Como por definición c_1 no puede ser constante a la derecha de α_{m_0} se tiene que $t_1' = \alpha_{m_0}$. Ahora notemos que $c_1(r_m) = c_1(\alpha_{i_m})$ implica que $r_m = l_m$, esto sumado a que $\Phi_{\mathcal{D}}(r_m) = \Phi_{\mathcal{D}}(\alpha_{i_m})$ y que $c_1(t_1) \geq c_1(\alpha_{i_m}) \quad \forall t_1 \in [l_m, \alpha_{i_m}]$ implica que:

$$c_1(t_1) = c_1(\alpha_{i_m}) \quad \forall t_1 \in [r_m, \alpha_{i_m}] \quad \forall m \in \{k, \ldots, M_0\}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
& c_1(t_1) = c_1(t_1') \quad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, r_k] \cup \left(\bigcup_{m=k+1}^{M_0} [\alpha_{i_{m-1}}, r_m] \right) \cup \{t_1'\} \cup \left(\bigcup_{m=k}^{M_0} [r_m, \alpha_{i_m}] \right) \\
\Longleftrightarrow \quad & c_1(t_1) = c_1(t_1') \quad \forall t_1 \in [\widehat{t_1}, t_1']
\end{aligned}$$

Y esto implica que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = \Phi_{\mathcal{D}}(t_1')$ lo que es una contradicción. $\square$

La siguiente proposición, en conjunto con la anterior, es de suma importancia pues nos dice que si $\Phi_{\mathcal{D}}$ tiene un cero, entonces existe un intervalo que cumple todas las condiciones necesarias para definir h constante en él.

Proposición 6.2.23. *Si* $\widehat{t_1} \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ *es tal que* $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$, *entonces existe* $t_1^2 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ *tal que* $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) = 0$, $c_1(t_1^2) \leq c_1(\widehat{t_1})$ *y se cumple, si* $c_1(t_1^2) \leq l_0$*:*

$$\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^2]$$

O en caso de que $c_1(t_1^2) > l_0$ *se cumple:*

$$\int_{\gamma(t_1^2)}^{t_1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\gamma(t_1^2), t_1^2]$$

Demostración. Analicemos primero el caso en que $c_1(\widehat{t_1}) \leq l_0$. Es obvio que si:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$$

Entonces $t_1^2 = \widehat{t_1}$. Si esto no ocurre, significa que existe $t_1 \in (t_1^*, \widehat{t_1})$ tal que:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 > 0$$

Sea $\overline{t_1} = \inf\{t_1 \in (t_1^*, \widehat{t_1}) : \int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 > 0\}$. Entonces, por continuidad se cumplen las siguientes:

- $\int_{t_1^*}^{\overline{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 = 0$
- $\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \overline{t_1}]$

Estas dos condiciones implican que:

$$\int_{t_1}^{\overline{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \overline{t_1}]$$

Y esto último implica que $c_1(\widehat{t_1}) \geq c_1(\overline{t_1})$. Notemos que $D_M < \overline{t_1} < \widehat{t_1}$ pues por la proposición 6.2.19 se tiene que:

$$\int_{t_1^*}^{D_M} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq \int_{t_1^*}^{D_M} \left[l_0 - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 < 0$$

Luego, si $c_1(\widehat{t_1}) = c_1(\overline{t_1})$, por la definición de $\overline{t_1}$ necesariamente c_1 es estrictamente decreciente a la derecha de $\overline{t_1}$. Si esto sucede, o si $c_1(\widehat{t_1}) > c_1(\overline{t_1})$, no puede ocurrir que

$c_1(s_1) \leq c_1(\widehat{t_1}) \quad \forall s_1 \in [\overline{t_1}, \widehat{t_1}]$ (pues esto implicaría que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) > 0$). Luego, definimos $\breve{t_1}$ como:

$$\breve{t_1} = \text{ínf} \left\{ t_1 \in (\overline{t_1}, \widehat{t_1}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}] \right) : c_1(t_1) = c_1(\widehat{t_1}) \right\}$$

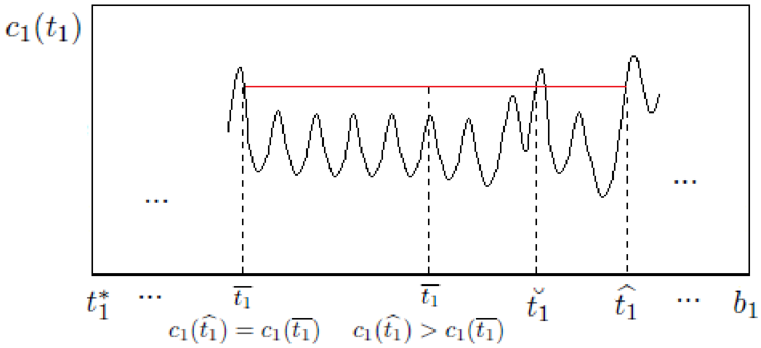


Figura 6.2: Las 2 situaciones posibles.

Y notemos que $D_M < \overline{t_1} < \breve{t_1} < \widehat{t_1}$. Es claro que $c_1(\breve{t_1}) = c_1(\widehat{t_1})$ y que $c_1(s_1) \leq c_1(\widehat{t_1})$ $\forall s_1 \in [\overline{t_1}, \breve{t_1}]$. También se tiene que $\breve{t_1} \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ y luego:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(\breve{t_1}) &= \int_{t_1^*}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{\overline{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
&= 0 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Como $(t_1^*, \breve{t_1})$ es no vacío, debido a la proposición 6.2.22, se tiene que $\exists\ \widehat{t_1}^2 \in (t_1^*, \breve{t_1})$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}^2) = 0$ y $c_1(\widehat{t_1}^2) < c_1(\breve{t_1}) \leq l_0$. Ahora, si se cumple que:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} \left[c_1(\widehat{t_1}^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}^2]$$

Es claro que $t_1^2 = \widehat{t_1}^2$. Si esto no se cumple, repitiendo todo lo hecho hasta ahora, se puede encontrar un punto $\widehat{t_1}^3 < \widehat{t_1}^2$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}^3) = 0$ y en general si $\widehat{t_1}^k$ es tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}^k) = 0$ pero $\widehat{t_1}^k$ no cumple la condición necesaria para que $t_1^2 = \widehat{t_1}^k$, entonces $\exists\ \widehat{t_1}^{k+1} < \widehat{t_1}^k$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}^{k+1}) = 0$ y $c_1(\widehat{t_1}^{k+1}) < c_1(\widehat{t_1}^k)$. Notando que $\Phi_{\mathcal{D}}$ tiene finitos ceros salvo intervalos donde c_1 es constante (pues c_1 tiene finitas oscilaciones), este proceso es finito y por lo tanto en algún momento se encontrará el punto t_1^2 buscado.

Para terminar la demostración, sólo hay que notar que el caso en que $c_1(\widehat{t_1}) \geq l_0$ es análogo, basta considerar $\gamma(\widehat{t_1})$ en vez de t_1^* en todo lo hecho. $\square$

Juntando las dos proposiciones anteriores, tenemos que la existencia de un valor positivo de $\Phi_{\mathcal{D}}$ implica que existe un intervalo donde se puede definir h constante. Para abordar ahora el caso en que esto no ocurre, pues $\Phi_{\mathcal{D}}$ es siempre negativa, definiremos antes una nueva función y mostraremos algunas propiedades que ésta satisface. La alternativa que esta función nos dará será la de definir h constante hasta el punto b_1, la ventaja es que para hacer esto no se necesita la condición de que c_1 tenga el mismo valor en los extremos del intervalo.

Definición 6.2.24. Se define $\Phi_{b_1} : [t_1^*, b_1] \to \mathbb{R}$ como:

$$\Phi_{b_1}(t_1) = \int_{t_1}^{b_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\, ds_1$$

Proposición 6.2.25. Φ_{b_1} *es continua.*

Demostración. Trivial pues c_1 es una función continua. $\square$

Proposición 6.2.26. *Si c_1 es creciente en $[\alpha, \beta] \subseteq [t_1^*, b_1]$, entonces Φ_{b_1} es creciente en $[\alpha, \beta]$.*

Demostración. Sean $t_1^1 < t_1^2$, con $\{t_1^1, t_1^2\} \subset [\alpha, \beta]$. Entonces $c_1(t_1^1) \leq c_1(s_1) \leq c_1(t_1^2) \quad \forall s_1 \in [t_1^1, t_1^2]$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\Phi_{b_1}(t_1^1) &= \int_{t_1^1}^{b_1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&= \int_{t_1^1}^{t_1^2} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 + \int_{t_1^2}^{b_1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&\leq 0 + \int_{t_1^2}^{b_1} \left[c_1(t_1^1) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&\leq \int_{t_1^2}^{b_1} \left[c_1(t_1^2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\
&= \Phi_{b_1}(t_1^2)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 6.2.27. *Sea $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$ 1-factible. Si $D_1 > t_1^*$, la restricción de Φ_{b_1} al conjunto $\mathcal{D}$ es creciente y continua y si $D_1 = t_1^*$, se tiene que $\Phi_{b_1}(t_1^*) \geq \Phi_{b_1}(d_2)$ y la restricción de Φ_{b_1} al conjunto $\mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ es creciente y continua.*

Demostración. Por las proposiciones 6.2.25 y 6.2.26, sabemos que Φ_{b_1} es creciente y continua en $[d_i, D_i]$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, M\}$. Notemos que $\Phi_{b_1}(D_i) = \Phi_{b_1}(d_{i+1}) \quad \forall i \in \{2, \ldots, M\}$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{b_1}(D_i) &= \int_{D_i}^{b_1} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{D_i}^{d_{i+1}} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{d_{i+1}}^{b_1} [c_1(D_i) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= 0 + \int_{d_{i+1}}^{b_1} [c_1(d_{i+1}) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \Phi_{b_1}(d_{i+1})
\end{aligned}
$$

Ahora, si $D_1 > t_1^*$ lo anterior también se cumple para $i = 1$ y la conclusión es directa. En cambio, si $D_1 = t_1^*$, recordemos que $c_1(t_1^*) \geq c_1(d_2)$ y $\int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$. Por lo tanto, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{b_1}(t_1^*) &= \int_{t_1^*}^{b_1} [c_1(t_1^*) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&\geq \int_{t_1^*}^{b_1} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{d_2} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{d_2}^{b_1} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= 0 + \int_{d_2}^{b_1} [c_1(d_2) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \Phi_{b_1}(d_2)
\end{aligned}
$$

□

A continuación, una definición sencilla con el objetivo de resumir proposiciones posteriores.

Definición 6.2.28. Se definen $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \mathbb{R}$ como:

$$\mathcal{I}_1 = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2$$

Finalmente, la siguiente proposición nos entrega consecuencias de que $\Phi_{\mathcal{D}}$ sea siempre negativa.

Proposición 6.2.29. *Sea* $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$ *1-factible y tal que* $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) < 0 \quad \forall t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$. *Entonces se cumplen las siguientes:*

i) Si $\exists\ \xi \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ *tal que* $\Phi_{b_1}(\xi) = 0$ *entonces se cumple que:*

$$\int_{\xi}^{t_1} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\xi, b_1]$$

ii) Si $\Phi_{b_1}(t_1) \geq 0\ \forall t_1 \in \mathcal{D}$*, entonces se cumple que:*

$$\int_{t_1^*}^{t_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

Demostración.

i) Sea $\xi \in \mathcal{D} \setminus \{t_1^*\}$ tal que $\Phi_{b_1}(\xi) = 0$ y supongamos que $\exists\ t_1 \in [\xi, b_1]$ tal que $\int_{\xi}^{t_1} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 > 0$. Definamos entonces:

$$\overline{t_1} = \text{ínf}\left\{ t_1 \in [\xi, b_1] : \int_{\xi}^{t_1} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 > 0 \right\}$$

Como c_1 es continua, se cumple que:

- $\int_{\xi}^{\overline{t_1}} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 = 0$
- $\int_{\xi}^{t_1} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\xi, \overline{t_1}]$

Y estas condiciones implican que:

$$\int_{t_1}^{\overline{t_1}} [c_1(\xi) - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [\xi, \overline{t_1}]$$

Por lo tanto $c_1(\xi) \geq c_1(\overline{t_1})$. Si $c_1(\xi) = c_1(\overline{t_1})$, por la definición de $\overline{t_1}$, necesariamente c_1 es estrictamente decreciente a la derecha de $\overline{t_1}$, si esto sucede o si $c_1(\xi) > c_1(\overline{t_1})$, no puede ocurrir que $c_1(s_1) < c_1(\xi)\ \forall t_1 \in (\overline{t_1}, b_1)$ pues en ese caso se tendría que $\Phi_{b_1}(\xi) > 0$. Por lo tanto, definimos $\breve{t_1}$ como:

$$\breve{t_1} = \text{ínf}\left\{ t_1 \in (\overline{t_1}, b_1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}] \right) : c_1(t_1) = c_1(\xi) \right\}$$

Es claro que $c_1(\breve{t_1}) = c_1(\xi)$ y que $c_1(s_1) < c_1(\breve{t_1}) \quad \forall s_1 \in (\xi, \breve{t_1})$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(\breve{t_1}) &= \int_{\gamma(\breve{t_1})}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{\xi}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= \int_{\xi}^{\overline{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \\
&= 0 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Lo que es una contradicción. Se concluye entonces el resultado.

ii) Notemos primero que:

$$\Phi_{b_1}(t_1^*) = \int_{t_1^*}^{b_1} \left[c_1(t_1^*) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 = c_1(t_1^*)\left[1 - F_1(t_1^*)\right] - \mathcal{I}_1 \geq 0$$

Por lo tanto $c_1(t_1^*)\left[1 - F_1(t_1^*)\right] \geq \mathcal{I}_1$ y necesariamente $c_1(t_1^*) > 0$. Esto tiene como consecuencia que $t_1^* = a_1$ y por lo tanto $F_1(t_1^*) = 0$. Demostremos que $\mathcal{I}_1 \leq l_0$, en efecto, si $D_1 > t_1^*$ se tiene que $l_0 = c_1(t_1^*)$ y $c_1(t_1^*) \geq \mathcal{I}_1$, por otro lado, si $D_1 = t_1^*$ sabemos que $l_0 = c_1(d_2)$ y como $\Phi_{b_1}(d_2) \geq 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1^*}^{b_1} \left[c_1(d_2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 &= \int_{t_1^*}^{d_2} \left[c_1(d_2) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{d_2}^{b_1} \left[c_1(d_2) - c_1(s_1)\right] f_1(s
\\
&= 0 + \Phi_{b_1}(d_2) \geq 0
\end{aligned}$$

Luego $c_1(d_2)\left[1 - F_1(t_1^*)\right] \geq \displaystyle\int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1$, es decir, $c_1(d_2) \geq \mathcal{I}_1$. Ahora, supongamos que $\exists\ t_1 \in [t_1^*, b_1]$ tal que $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > 0$. Definamos entonces:

$$\overline{t_1} = \inf\left\{t_1 \in [t_1^*, b_1] : \int_{t_1^*}^{t_1} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > 0\right\}$$

Como c_1 es continua, se cumple que:

- $\displaystyle\int_{t_1^*}^{\overline{t_1}} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 = 0$
- $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \overline{t_1}]$

Y estas condiciones implican que:

$$\int_{t_1}^{\overline{t_1}} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \overline{t_1}]$$

Por lo tanto $\mathcal{I}_1 \geq c_1(\overline{t_1})$. Si $\mathcal{I}_1 = c_1(\overline{t_1})$, por la definición de $\overline{t_1}$, necesariamente c_1 es estrictamente decreciente a la derecha de $\overline{t_1}$, si esto sucede o si $\mathcal{I}_1 > c_1(\overline{t_1})$, no puede ocurrir que $c_1(s_1) < \mathcal{I}_1$ $\forall t_1 \in (\overline{t_1}, b_1)$ pues en ese caso se tendría que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1^*}^{b_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 &= \int_{t_1^*}^{\overline{t_1}} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 + \int_{\overline{t_1}}^{b_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \\
&= 0 + \int_{\overline{t_1}}^{b_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 > 0
\end{aligned}$$

Lo que contradice la definición de $\mathcal{I}_1$. Por lo tanto, definimos $\breve{t_1}$ como:

$$\breve{t_1} = \text{ínf}\left\{ t_1 \in (\overline{t_1}, b_1) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}] \right) : c_1(t_1) = \mathcal{I}_1 \right\}$$

Es claro que $c_1(\breve{t_1}) = \mathcal{I}_1 \leq l_0$ y que $c_1(s_1) < c_1(\breve{t_1}) \quad \forall s_1 \in (\overline{t_1}, \breve{t_1})$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{D}}(\breve{t_1}) = \Phi_h(\breve{t_1}) &= \int_{t_1^*}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\breve{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 \\
&= \int_{t_1^*}^{\overline{t_1}} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \\
&= 0 + \int_{\overline{t_1}}^{\breve{t_1}} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Lo que es una contradicción. Se concluye entonces el resultado.

□

Ahora para terminar el caso en que $\Phi_{\mathcal{D}}$ es siempre negativa, entenderemos la importancia de la proposición anterior.

Proposición 6.2.30. *Supongamos que se cumple:*

$$\int_{t_1^*}^{t_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\; ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

Entonces existe $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ *constante, que es* $(\widehat{P_2})$*-óptima.*

Demostración. Comencemos notando que la desigualdad implica que $c_1(t_1^*) \geq \mathcal{I}_1$, lo cual tiene como consecuencia que $c_1(t_1^*) > 0$ y por lo tanto $t_1^* = a_1$ y así $F_1(t_1^*) = 0$. Consideremos ahora $h^* : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima cualquiera y supongamos que existen $t_1^1, t_1^2 \in [t_1^*, b_1]$ tales que h^* es estrictamente creciente y continua en $[t_1^1, t_1^2]$. Demostremos que $c_1(t_1) \geq \mathcal{I}_1 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$, en efecto, si h^* es estrictamente creciente en $[t_1^*, t_1^* + \epsilon]$ para algún $\epsilon > 0$, del Corolario 5.2.6 se tiene que:

$$c_1(t_1) \geq c_1(t_1^*) \geq \mathcal{I}_1 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

En caso contrario, si existen $\widehat{t_1} \in (t_1^*, t_1^1]$, $\widehat{t_2} \in [t_2^*, b_2)$ y $\epsilon > 0$ tales que: $h^*(t_1) = \widehat{t_2} \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$ y h^* estrictamente creciente y continua en $[\widehat{t_1}, \widehat{t_1} + \epsilon]$, del Lema 5.2.2 se tiene que:

$$\int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} c_2(\widehat{t_2}) f_1(s_1)\ ds_1 \geq \int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \geq \int_{t_1^*}^{\widehat{t_1}} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1$$

Por lo tanto $c_2(\widehat{t_2}) \geq \mathcal{I}_1$, como $c_1(\widehat{t_1}) = c_2(\widehat{t_2})$, por el Corolario 5.2.6 se tiene que:

$$c_1(t_1) \geq c_1(\widehat{t_1}) \geq \mathcal{I}_1 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$$

Ahora consideremos $t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$ cualquiera y notemos que se cumple:

$$\int_{t_1^*}^{t_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \geq \int_{t_1^*}^{t_1} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1$$

$$\int_{t_1}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \geq \int_{t_1}^{b_1} c_1(t_1) f_1(s_1)\ ds_1 \geq \int_{t_1}^{b_1} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_{t_1^*}^{t_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{t_1}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \\ &\geq \int_{t_1^*}^{t_1} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1 + \int_{t_1}^{b_1} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1 \quad = \mathcal{I}_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto las desigualdades anteriores son igualdades, lo que implica que:

$$\int_{t_1}^{b_1} c_1(t_1) f_1(s_1)\ ds_1 = \int_{t_1}^{b_1} \mathcal{I}_1 f_1(s_1)\ ds_1$$

Y necesariamente $c_1(t_1) = \mathcal{I}_1$. Por lo tanto se tiene que $c_1(t_1) = \mathcal{I}_1 \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$, dado que $c_2(h^*(t_1)) = c_1(t_1) \quad \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2]$, también se tiene que $c_2(t_2) = \mathcal{I}_1 \quad \forall t_1 \in h^*(\mathcal{I}_1)$ y podemos definir $h^{**} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ como:

$$h^{**}(t_1) = \begin{cases} h^*(t_1^1) & \forall t_1 \in [t_1^1, t_1^2] \\ h^*(t_1) & \forall t_1 \notin [t_1^1, t_1^2] \end{cases}$$

Y se tiene que h^{**} es constante en $[t_1^1, t_1^2]$ y $(\widehat{P_2})$-óptima pues:

$$J(h^*) - J(h^{**}) = \int_{t_1^1}^{t_1^2} \int_{h^*(t_1^1)}^{h^*(s_1)} \left[c_1(s_1) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) f_1(s_1)\ ds_2\ ds_1 = 0$$

Luego, es claro que repitiendo el proceso encontramos $\widehat{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ constante por trozos y que es $(\widehat{P_2})$-óptima, luego, usando la Proposición 6.2.1 se tiene que existe $\overline{h} : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-óptima que es constante o tal que:

$$\overline{h}(t_1) = \begin{cases} t_2^* & \forall t_1 \in [t_1^*, t_1^2) \\ b_2 & \forall t_1 \notin (t_1^2, b_2] \end{cases} \quad \text{para algún } t_1^2 \in (t_1^*, b_1)$$

Demostremos que en este último caso también se cumple lo deseado. En efecto, si $c_1(t_1^2) \leq \mathcal{I}_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1^*}^{t_1^2} \int_{t_2^*}^{b_2} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_1(s_1)\, ds_1 &= \int_{t_1^*}^{t_1^2} \int_{t_2^*}^{b_2} \left[c_1(s_1) - c_1(t_1^2)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\ &\geq \int_{t_1^*}^{t_1^2} \int_{t_2^*}^{b_2} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(t_1^2)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto $h^1 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como $h^1(t_1) = b_2 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$ es $(\widehat{P_2})$-óptima. En caso de que $c_1(t_1^2) \geq \mathcal{I}_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1^2}^{b_1} \int_{t_2^*}^{b_2} [c_1(s_1) - c_2(s_2)]\, f_1(s_1)\, ds_1 &= \int_{t_1^2}^{b_1} \int_{t_2^*}^{b_2} \left[c_1(s_1) - c_1(t_1^2)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\ &\leq \int_{t_1^2}^{b_1} \int_{t_2^*}^{b_2} \left[\mathcal{I}_1 - c_1(t_1^2)\right] f_1(s_1)\, ds_1 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Y por lo tanto $h^2 : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como $h^2(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$ es $(\widehat{P_2})$-óptima. □

Para terminar la sección, usaremos todos los resultados obtenidos en ésta para mostrar que el algoritmo itera correctamente en la etapa 6). Supongamos que el algoritmo está comenzando una iteración cualquiera de la etapa 6). Entonces, el algoritmo ha encontrado entre otras cosas, un conjunto $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M-1} [d_i, D_i]$ que es 1-factible y un punto $\dot{t_1}$ tal que nos gustaría definir h estrictamente creciente en un intervalo $(\dot{t_1}, \dot{t_1} + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

Si el sistema $\begin{cases} c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \\ h(\dot{t_1}) = \dot{t_2} \end{cases}$ tiene como solución una función $\widehat{h}$ que es creciente en el intervalo $[\dot{t_1}, b_1]$, o bien en un intervalo $[\dot{t_1}, \ddot{t_1}]$ donde $\ddot{t_1}$ es tal que $\widehat{h}(\ddot{t_1}) = b_2$, sabemos que el algoritmo termina. En caso contrario, podemos suponer S.P.G. (intercambiando jugadores) que $\widehat{h}$ no es creciente en un domino como los recién mencionados debido a que c_1 no lo es. Es decir, existe $\widetilde{t_1} \in (\dot{t_1}, b_1)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- c_1 es creciente en $[\dot{t_1}, \widetilde{t_1}]$
- c_2 es creciente en $[\dot{t_2}, \widehat{h}(\widetilde{t_1})]$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists t_1 \in (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_1} + \epsilon)$ tal que c_1 es estrictamente decreciente en $[\widetilde{t_1}, t_1]$

A continuación demostraremos que estas condiciones implican que el algoritmo encontrará $\widehat{t_1}$ y $\breve{t_1}$ tal que puede definir h constante en el intervalo $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$. Si $\breve{t_1} = b_1$ el algoritmo termina y si no, regresará a la etapa 6).

Para eso primero definamos $d_M = \dot{t_1}$ y $D_M = \widetilde{t_1}$, luego, re-definiendo $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{M} [d_i, D_i]$, se tiene que $\mathcal{D}$ es 1-factible. Para este nuevo conjunto $\mathcal{D}$ consideremos los puntos asociados $\{\alpha_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$, $\{\beta_i^{\mathcal{D}}\}_{i=1}^{L}$ y la respectiva función $\Phi_{\mathcal{D}}$.

Notemos que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) < 0 \quad \forall t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ tal que $c_1(t_1) \leq c_1(d_M)$. En efecto, si existiera algún t_1 tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) \geq 0$, por las proposiciones 6.2.22 y 6.2.23 sabemos que existiría $t_1^2 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$, con $c_1(t_1^2) \leq c_1(t_1) \leq c_1(d_m)$, tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1^2) = 0$ y que cumple las condiciones necesarias para que el algoritmo hubiera definido la función h constante en $[t_1^*, t_1^2]$ o en $[\gamma(t_1^2), t_1^2]$, dependiendo de si $c_1(t_1^2)$ es mayor o menor a l_0. Obviamente el algoritmo no hizo esto en las etapas anteriores y la única razón es porque dicho t_1^2 no existe.

Ahora bien, si $\exists\ t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$, con $c_1(t_1) > c_1(d_M)$ y tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) \geq 0$, se tendrá que existe $\widehat{t_1}$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$ y también se cumplen las condiciones necesarias para que se pueda definir h constante en $[\gamma(\widehat{t_1}), \widehat{t_1}]$.

Por lo tanto analicemos el caso en que $\forall\ t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ con $c_1(t_1) > c_1(d_M)$ se tiene que $\Phi_{\mathcal{D}}(t_1) < 0$. Necesariamente en este caso D_M es el único máximo de c_1 en $[D_M, b_1]$. En efecto, si esto no fuera cierto existiría $t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}]$ tal que $c_1(t_1) = c_1(D_M)$, definiendo entonces:

$$\breve{t_1} = \inf \left\{ t_1 \in \bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}] : c_1(t_1) = c_1(D_M) \right\}$$

Se cumpliría que $c_1(s_1) < c_1(D_M) \quad \forall s_1 \in (D_M, \breve{t_1})$ y esto implicaría que $\Phi_{\mathcal{D}}(\breve{t_1}) > 0$. Por la maximalidad de D_M sigue entonces que $\Phi_{b_1}(D_M) > 0$.

Ahora veremos que este último hecho nos asegura que el algoritmo itera correctamente. Para esto dividamos el análisis en casos, suponiendo primero que $D_1 > t_1^*$. Si $\Phi_{b_1}(t_1^*) < 0$ gracias a la proposiciones 6.2.27 y 6.2.29 sabemos que $\exists\ \xi \in (t_1^*, D_M)$ tal que $\Phi_{b_1}(\xi) = 0$ y que también cumple las condiciones necesarias para que el algoritmo pueda definir h constante en $[\xi, b_1]$. Además $\xi \neq \bigcup_{i=1}^{M-1} [d_i, D_i]$, pues si así fuera el algoritmo habría definido en etapas anteriores h constante en $[\xi, b_1]$, cosa que no sucedió, por lo tanto $\xi \in [d_M, D_M]$ y el algoritmo tiene la opción de terminar.

Por otro lado, si $\Phi_{b_1}(t_1^*) \geq 0$ las proposiciones 6.2.27 y 6.2.29 dicen que $\Phi_{b_1}(t_1) \geq 0$ $\forall t_1 \in \mathcal{D}$ y por lo tanto $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$. Esto no puede ocurrir pues la proposición 6.2.30 nos dice que en este caso existe una solución constante que el algoritmo hubiera encontrado en las etapas (1)-(4).

Ahora en caso de que $D_1 = t_1^*$, si $\Phi_{b_1}(d_2) < 0$, las proposiones 6.2.27 y 6.2.29 nos dicen que $\exists\ \xi \in (d_2, D_M)$ tal que $\Phi_{b_1}(\xi) = 0$ y que también cumple las condiciones necesarias para que el algoritmo pueda definir h constante en $[\xi, b_1]$, obviamente la conclusión es la misma que se explicó en el caso que $D_1 > t_1^*$ y el algoritmo tiene la opción de terminar. En cambio, si $\Phi_{b_1}(d_2) \geq 0$, las proposiciones 6.2.27 y 6.2.29 nos dicen que $\Phi_{b_1}(t_1^*) \geq \Phi_{b_1}(d_2)$, luego $\Phi_{b_1}(t_1) \geq 0 \quad \forall t_1 \in \mathcal{D}$ y por lo tanto $\displaystyle\int_{t_1^*}^{t_1} [\mathcal{I}_1 - c_1(s_1)]\, f_1(s_1)\ ds_1 \leq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$. Lo que ya sabemos que no puede ocurrir.

Para terminar, notemos que falta analizar el caso en que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{L} [\alpha_i^{\mathcal{D}}, \beta_i^{\mathcal{D}}] = \emptyset$. En el contexto en el que nos encontramos, esto es posible solamente si c_1 es decreciente en $[D_M, b_1]$, pero esto implica que D_M es el único máximo de c_1 en $[D_M, b_1]$ y luego $\Phi_{b_1}(D_M) > 0$. Como ya vimos, este hecho nos asegura que el algoritmo continúa. Por lo tanto hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 6.2.31. *Cada vez que el algoritmo comience la etapa 6) ocurrirá alguna de las siguientes opciones:*

1) *El algoritmo definirá h estrictamente creciente en $[\dot{t}_1, b_1]$ o en un intervalo de la forma $[\dot{t}_1, \ddot{t}_1]$ tal que $h(\ddot{t}_1) = b_2$ y finalizará.*

2) *El algoritmo definirá h estrictamente creciente en un intervalo de la forma $[\dot{t}_1, \widehat{t_1}]$ y h constante en un intervalo de la forma $[\widehat{t_1}, \breve{t}_1]$. Después de esto el algoritmo finalizará si $\breve{t}_1 = b_1$ y en caso contrario volverá a comenzar la etapa 6).*

3) *El algoritmo definirá h estrictamente creciente en un intervalo de la forma $[\dot{t}_1, \widehat{t_1}]$ y h discontinua en $\widehat{t_1}$, donde la discontinuidad será de la forma $[h(\widehat{t_1})^-, h(\widehat{t_1})^+] = [\widehat{t_2}, \breve{t}_2]$. Después de esto el algoritmo finalizará si $\breve{t}_2 = b_2$ y en caso contrario volverá a comenzar la etapa 6).*

Observación: Cuando demostramos la existencia de puntos que satisfacen las condiciones necesarias para definir h constante en un intervalo, no aseguramos que el algoritmo hará esto, si no que simplemente existe una alternativa para hacerlo y por lo tanto itera correctamente. Ahora bien, al decir que existe un punto $\widehat{t_1} \in \mathcal{D}$ tal que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{t_1}) = 0$ y se satisfacen las condiciones necesarias para definir h constante en $[\gamma(\widehat{t_1}), \widehat{t_1}]$, estamos omitiendo una condición adicional que debe cumplirse para el correcto funcionamiento del algoritmo, y es que $\widehat{t_1}$ no sea un máximo local de c_1. Si esto fuera así, no se podría comenzar la siguiente iteración pues no se podría definir h estrictamente creciente en ningún intervalo de la forma $[\widehat{t_1}, \widehat{t_1} + \epsilon]$.

Sin embargo, esto no es problema pues en caso de que $\widehat{t_1}$ sea máximo local de c_1 y además máximo global de c_1 en el conjunto $[\widehat{t_1}, b_1]$, se tendrá que $\Phi_{b_1}(\gamma(\widehat{t_1})) > 0$ y por lo tanto $\Phi_{b_1}(D_M) > 0$. Ya sabemos que este hecho nos asegura que el algoritmo continúa.

En caso de que $\widehat{t_1}$ sea máximo local de c_1, pero no sea máximo global de c_1 en el conjunto $[\widehat{t_1}, b_1]$, definimos:

$$\widehat{\widehat{t_1}} = \text{ínf}\left\{t_1 \in (\widehat{t_1}, b_1] : \; c_1(t_1) = c_1(\widehat{t_1})\right\}$$

Y se tendrá que $\Phi_{\mathcal{D}}(\widehat{\widehat{t_1}}) > 0$, esto implica la existencia de otro punto que será un cero de $\Phi_{\mathcal{D}}$ y cumplirá las condiciones necesarias para definir h constante en un respectivo intervalo. No es posible obtener iterativamente máximos locales de c_1 en este proceso pues $\Phi_{\mathcal{D}}$ tiene una cantidad finita de ceros. De esta forma, sí existe una real opción para que el algoritmo continúe.

6.2.5. Justificaciones restantes etapa 5

En esta sección justificaremos los aspectos de la etapa 5) del algoritmo que no fueron respaldados en la sección 6.2.2. pero han sido indicados como notas en el algoritmo. Comenzaremos con una proposición que será consecuencia de la sección anterior y nos ayudará a probar las siguientes proposiciones.

Proposición 6.2.32. *Sea $\widetilde{t_1} \in [t_1^*, b_1]$ tal que $c_1(\widetilde{t_1}) \leq c_1(t_1^*)$ y además $\Phi_h(\widetilde{t_1}) > 0$, entonces existe $\widehat{t_1} \in (t_1^*, \widetilde{t_1})$ tal que $\Phi_h(\widehat{t_1}) = 0$ y además:*

$$\int_{t_1}^{\widehat{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \widehat{t_1}]$$

Demostración. Consideremos $t_1' \in \operatorname*{argmin}_{s_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]} c_1(s_1)$, dado que $\Phi_h(\widetilde{t_1}) > 0$, necesariamente se tiene que $c_1(t_1') < c_1(\widetilde{t_1}) \leq c_1(t_1^*)$. Luego, $\Phi_h(t_1') < 0$ y es posible reproducir las técnicas de las demostraciones de las proposiciones 6.2.22 y 6.2.23 para concluir el resultado. □

Proposición 6.2.33. *Sean $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2}) \in A_1$ y $(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_2$ tales que $c_1(\widehat{t_1}) = c_2(\widetilde{t_2})$, entonces definiendo $t_1{}' = \max\{\widehat{t_1}, \widetilde{t_1}\}$ y $t_2{}' = \max\{\widehat{t_2}, \widetilde{t_2}\}$, se tiene que $(t_1{}', t_2{}') \in A_1 \cup A_2$ o existe $(t_1{}'', t_2{}'') \in A_1 \cup A_2$ tal que $c_1(t_1{}'') < c_1(t_1')$.*

Demostración. Si $(t_1', t_2') = (\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ o bien si $(t_1', t_2') = (\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2})$ el resultado es trivial. Luego, supongamos primero que $t_1' = \widehat{t_1}$ y que $t_2' = \widetilde{t_2}$, en este caso se cumplen:

$$c_1(t_1') = c_2(t_2')$$

$$\int_{t_1^*}^{t_1} [c_1(t_1') - c_1(s_1)] \, f_1(s_1) \; ds_1 \leq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1']$$

$$\int_{t_1}^{t_1'} [c_1(t_1') - c_1(s_1)] \, f_1(s_1) \; ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, t_1']$$

$$\int_{t_2^*}^{t_2} [c_2(t_2') - c_2(s_2)] \, f_2(s_2) \; ds_2 \leq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, t_2']$$

$$\int_{t_2}^{t_2'} [c_2(t_2') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2)\; ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, t_2']$$

Por lo tanto en este caso se tiene que $(t_1', t_2') \in A_1 \cap A_2$. Por último analicemos el caso en que $t_1' = \widetilde{t_1}$ y $t_2' = \widehat{t_2}$, si $\displaystyle\int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 = 0$, entonces $(t_1', t_2') \in A_1$ e igualmente, si $\displaystyle\int_{t_2^*}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 = 0$, entonces $(t_1', t_2') \in A_2$. En cambio, si se tiene que:

$$\Phi_h(\widetilde{t_1}) = \int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\; ds_1 > 0$$

Por la proposición 6.2.32 sabemos que existe $\overline{t_1} \in (t_1^*, \widetilde{t_1})$ tal que $\Phi_h(\overline{t_1}) = 0$ y además:

$$\int_{t_1}^{\overline{t_1}} \left[c_1(\overline{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, \overline{t_1}]$$

Análogamente, si además:

$$\int_{t_2^*}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\; ds_2 > 0$$

Deducimos que existe $\overline{t_2} \in (t_2^*, \widetilde{t_2})$ tal que:

$$\int_{t_2^*}^{\overline{t_2}} \left[c_2(\overline{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 = 0$$

$$\int_{t_2}^{\overline{t_2}} \left[c_2(\overline{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, \overline{t_2}]$$

Ahora, supongamos SPG que $c_1(\overline{t_1}) \geq c_2(\overline{t_2})$, en este caso definiendo:

$$t_2'' = \inf\{s_2 \in [\overline{t_2}, \widetilde{t_2}] : c_2(s_2) = c_1(\overline{t_1})\}$$

Se tiene que $c_2(t_2'') = c_1(\overline{t_1})$ y además $c_2(s_2) \leq c_2(t_2'')$ $\forall s_2 \in [\overline{t_2}, t_2'']$, por lo tanto se tiene:

$$\int_{t_2}^{t_2''} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \geq 0 \quad \forall t_2 \in [\overline{t_2}, t_2'']$$

Y además, para todo $t_2 \in [t_2^*, \overline{t_2}]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_{t_2}^{t_2''} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \\ = \; & \int_{t_2}^{\overline{t_2}} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 + \int_{\overline{t_2}}^{t_2''} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \\ \geq \; & \int_{t_2}^{\overline{t_2}} \left[c_2(\overline{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 + 0 \\ \geq \; & 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones implican que $(\overline{t_1}, t_2'') \in A_1$. □

Proposición 6.2.34. *Supongamos que $c_1(t_1^*) = c_2(t_2^*)$ y que $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$. Entonces se tiene que $D_1 = \{t_2^*\} \ \vee \ D_2 = \{t_1^*\}$ o bien $A_1 \neq \emptyset \ \vee \ A_2 \neq \emptyset$.*

Demostración. Por definición, si se cumplen las hipótesis entonces $t_2^* \in D_1$ y $t_1^* \in D_2$. Supongamos ahora que $D_1 \neq \{t_2^*\}$ y $D_2 \neq \{t_1^*\}$, esto implica que existen $\widetilde{t_2} \in D_1$, $\widetilde{t_1} \in D_2$, con $\widetilde{t_1} > t_1^*$ y $\widetilde{t_2} > t_2^*$. Luego, se cumplen las siguientes propiedades:

$$c_1(t_1^*) = c_2(\widetilde{t_2}) = c_2(t_2^*) = c_1(\widetilde{t_1})$$

$$\int_{t_2}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 \geq 0 \qquad \forall t_2 \in [t_2^*, \widetilde{t_2}]$$

$$\int_{t_1}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 \geq 0 \qquad \forall t_1 \in [t_1^*, \widetilde{t_1}]$$

Por lo tanto, si $\displaystyle\int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 = 0$, entonces $(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_1$ e igualmente, si $\displaystyle\int_{t_2^*}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 = 0$, entonces $(\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}) \in A_2$. En cambio, si se tiene que:

$$\Phi_h(\widetilde{t_1}) = \int_{t_1^*}^{\widetilde{t_1}} \left[c_1(\widetilde{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\ ds_1 > 0$$

Por la prop 6.2.32 sabemos que existe ${t_1}' \in (t_1^*, \widetilde{t_1})$ tal que $\Phi_h({t_1}') = 0$ y además:

$$\int_{t_1}^{{t_1}'} \left[c_1({t_1}') - c_1(s_1)\right] f_1(s_1) ds_1 \geq 0 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, {t_1}']$$

Análogamente, si además:

$$\int_{t_2^*}^{\widetilde{t_2}} \left[c_2(\widetilde{t_2}) - c_2(s_2)\right] f_2(s_2)\ ds_2 > 0$$

Deducimos que existe ${t_2}' \in (t_2^*, \widetilde{t_2})$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{t_2^*}^{{t_2}'} \left[c_2({t_2}') - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 &= 0 \\ \int_{t_2}^{{t_2}'} \left[c_2({t_2}') - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 &\geq 0 \quad \forall t_2 \in [t_2^*, {t_2}'] \end{aligned}$$

Ahora, supongamos SPG que $c_1(t_1') \geq c_2(t_2')$, en este caso definiendo

$${t_2}'' = \inf\{s_2 \in [t_2', \widetilde{t_2}] : c_2(s_2) = c_1(t_1')\}$$

Claramente $c_2({t_2}'') = c_1(t_1')$ y además $c_2(s_2) \leq c_2({t_2}'')\ \forall s_2 \in [{t_2}', {t_2}'']$, por lo tanto, para $t_2 \in [{t_2}', {t_2}'']$ se tiene:

$$\int_{t_2}^{{t_2}''} \left[c_2({t_2}'') - c_2(s_2)\right] f_2(s_2) ds_2 \geq 0$$

Y para $t_2 \in [t_2^*, t_2']$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_2}^{t_2''} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \\
= & \int_{t_2}^{t_2'} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 + \int_{t_2'}^{t_2''} [c_2(t_2'') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 \\
\geq & \int_{t_2}^{t_2'} [c_2(t_2') - c_2(s_2)]\, f_2(s_2) ds_2 + 0 \\
\geq & \ 0
\end{aligned}
$$

Luego, $(t_1', t_2'') \in A_1$. □

6.3. El algoritmo encuentra una solución

En esta sección mostraremos que el algoritmo comienza, termina y encuentra una solución de cualquier problema en el que las funciones c_1 y c_2 satisfagan las hipótesis correspondientes.

El hecho que el algoritmo comienza, se debe a que bajo la hipótesis de que c_1 y c_2 tienen una cantidad finita de cambios de crecimiento y son constantes en una cantidad finita de intervalos, la frontera entre los conjuntos de asignación de los jugadores 1 y 2 tiene una forma que puede ser capturada por una función $h^* : [t_1^*, b_2] \to [t_2^*, b_2]$ creciente, que es constante en una cantidad finita de intervalos maximales y es discontinua en una cantidad finita de puntos. Esta función obviamente satisface las condiciones necesarias de optimalidad, en particular en las vecindades de t_1^* y t_2^*, por lo tanto existirá al menos una opción para que al algoritmo comience en alguna de las etapas 1)-6) dependiendo de la forma que tenga h^*.

Para demostrar que el algoritmo finaliza demostraremos que existe una constante $\epsilon > 0$ tal que cada vez que el algoritmo define h constante en algún intervalo de la forma $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$, se tiene que $\breve{t_1} - \widehat{t_1} > \epsilon$ y cada vez que el algoritmo define h discontinua en un punto t_1, donde la discontinuidad es de la forma $[h(t_1)^-, h(t_1)^+] = [\widehat{t_2}, \breve{t_2}]$, se tiene que $\breve{t_2} - \widehat{t_2} > \epsilon$. Como en cada iteración el algoritmo: define h constante en un intervalo, define h discontinua en un punto o finaliza; sólo podrá iterar una cantidad finita de veces. Como ya se demostró que las iteraciones se suceden correctamente, necesariamente finalizará en alguna iteración.

Proposición 6.3.1. *Si c_1 y c_2 tienen una cantidad finita de cambios de crecimiento y son constantes en una cantidad finita de intervalos, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que:*

i) Si la etapa 6) del algoritmo define h constante en $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$ entonces $\breve{t_1} - \widehat{t_1} \geq \epsilon$

ii) Si la etapa 6) del algoritmo define h discontinua en t_1 y la discontinuidad es de la forma $[h(t_1)^-, h(t_1)^+] = [\widehat{t_2}, \breve{t_2}]$ entonces $\breve{t_2} - \widehat{t_2} \geq \epsilon$

Demostración. Consideremos $N > 0$ y $\{t_i^1\}_{i=1}^N$ tales que: $t_1^1 = t_1^*$, $t_N^1 = b_1$, $t_i^1 < t_{i+1}^1$ $\forall i \in \{1, \ldots, N-1\}$ y en cada intervalo de la forma $[t_i^1, t_{i+1}^1]$ c_1 es estrictamente monótona o c_1 es constante (estos puntos existen debido a la hipótesis que satisface c_1). A continuación definamos ϵ_1 como la menor distancia entre dos puntos sucesivos:

$$\epsilon_1 = \min_{i=1,\ldots,N} (t_{i+1}^1 - t_i^1)$$

Y supongamos que la etapa 6) del algoritmo define h constante en algún intervalo $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$. Recordemos que para que esto ocurra debe cumplirse que:

$$\int_{\widehat{t_1}}^{\breve{t_1}} \left[c_1(\widehat{t_1}) - c_1(s_1)\right] f_1(s_1)\, ds_1 = 0$$

Analizaremos dos casos posibles, el primero es que c_1 sea constante en $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$. En este caso existe un índice $j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}] \subseteq [t_j^1, t_{j+1}^1]$ y dado que la etapa 6) del algoritmo determina el intervalo más grande en el cual definir h constante, se tiene que $\breve{t_1} = t_{j+1}^1$. Además, la etapa 6) comienza con un punto que pertenece al interior de un intervalo donde c_1 es estrictamente creciente, en este caso digamos $\dot{t_1}$, y determina el primer instante en que puede definir h constante en un intervalo, por lo tanto $\dot{t_1} < \widehat{t_1}$ y necesariamente $\widehat{t_1} = t_j^1$. Luego, por definición, se tiene en este caso que $\breve{t_1} - \widehat{t_1} \geq \epsilon_1$.

Si c_1 no es constante en $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$, debe tener al menos un cambio de crecimiento en este intervalo, más precisamente, debe existir $k \in \{2, \ldots, N\}$ tal que $t_k^1 \in (\widehat{t_1}, \breve{t_1})$ y c_1 es estrictamente creciente en $[\widehat{t_1}, t_k^1] \subset [t_{k-1}^1, t_k^1]$. Si $\breve{t_1} \neq b_1$, notemos que para que el algoritmo defina h constante en $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$ también debe cumplirse que $c_1(\breve{t_1}) = c_1(\widehat{t_1})$ y c_1 es estrictamente creciente en $\breve{t_1}$, por lo tanto $\breve{t_1} > t_k^1$ y sigue que $\breve{t_1} - \widehat{t_1} > t_k^1 - t_{k-1}^1 \geq \epsilon_1$. Por último, si $\breve{t_1} = b_1$, se tiene que $\breve{t_1} = t_N^1 \geq t_k^1$ y por lo tanto $\breve{t_1} - \widehat{t_1} \geq t_k^1 - t_{k-1}^1 \geq \epsilon_1$.

Por lo tanto hemos demostrado que si la etapa 6) del algoritmo define h constante en $[\widehat{t_1}, \breve{t_1}]$ entonces $\breve{t_1} - \widehat{t_1} \geq \epsilon_1$. Análogamente se demuestra que existe $\epsilon_2 > 0$ tal que, si la etapa 6) del algoritmo define h discontinua en t_1 y la discontinuidad es de la forma $[h(t_1)^-, h(t_1)^+] = [\widehat{t_2}, \breve{t_2}]$, entonces $\breve{t_2} - \widehat{t_2} \geq \epsilon_2$. Definiendo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ se concluye el resultado. □

Gracias a la proposición anterior, sabemos que el algoritmo siempre construye una función $h : [t_1^*, b_2] \to [t_2^*, b_2]$ $(\widehat{P_2})$-factible, la optimalidad de esta función se debe a la construcción del algoritmo. Cuando el algoritmo empieza, determina dentro de todas las formas posibles que puede tener la frontera en las vecindades de t_1^* y t_2^*, aquella que cumple las condiciones necesarias de optimalidad y que asegura que siguiendo el resto de las opciones no se construiría una frontera óptima. Posteriormente, en cada iteración de la etapa 6) se sigue la misma idea: cada opción no elegida construiría una frontera peor que la(s) que está(están) en curso. Por lo tanto, la(s) curva(s) que el algoritmo construye, al ser mejor(es) que todas las demás, es(son) $(\widehat{P_2})$-óptima(s).

6.4. Ejemplos

En esta sección resolveremos algunos problemas que mostrarán los distintos tipos de soluciones que puede tener el problema. Antes de proceder, desarrollaremos una técnica que nos permitirá chequear de forma relativamente sencilla si se cumplen las condiciones (1.1) o (2.1), en cuyo caso sabemos que el problema tendrá una solución extrema.

Notemos que desarrollando la condición (1.1), esta es equivalente a que se cumpla $\forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$ y $\forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$ la desigualdad:

$$(1 - F_2(t_2)) \int_{t_1^*}^{t_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 \geq (F_1(t_1) - F_1(t_1^*)) \int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2$$

Como la desigualdad se satisface trivialmente cuando $t_1 = t_1^*$ o cuando $t_2 = b_2$, podemos definir las funciones $\Phi^1 : (t_1^*, b_1] \to \mathbb{R}$ y $\Phi^2 : [t_2^*, b_2) \to \mathbb{R}$ como:

$$\Phi^1(t_1) = \frac{\int_{t_1^*}^{t_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1}{F_1(t_1) - F_1(t_1^*)}$$

$$\Phi^2(t_2) = \frac{\int_{t_2}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2}{1 - F_2(t_2)}$$

Y la solución será extrema y favorable al jugador 1 sí y solamente sí se cumple:

$$\inf_{t_1 \in (t_1^*, b_1]} \Phi^1(t_1) \geq \sup_{t_2 \in [t_2^*, b_2)} \Phi^2(t_2)$$

De la misma forma, definiendo las funciones $\Psi^1 : [t_1^*, b_1) \to \mathbb{R}$ y $\Psi^2 : (t_2^*, b_2] \to \mathbb{R}$ como:

$$\Psi^1(t_1) = \frac{\int_{t_1}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1}{1 - F_1(t_1)}$$

$$\Psi^2(t_2) = \frac{\int_{t_2^*}^{t_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2}{F_2(t_2) - F_2(t_2^*)}$$

Se deduce que la solución será extrema y favorable al jugador 2 sí y solamente sí se cumple:

$$\sup_{t_1 \in [t_1^*, b_1)} \Psi^1(t_1) \leq \inf_{t_2 \in (t_2^*, b_2]} \Psi^2(t_2)$$

Con estos resultados, procedemos a la resolución de los problemas.

1. Comencemos considerando el problema en que $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$, ambos jugadores tienen una distribución uniforme y las funciones c_1 y c_2 están definidas como:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = &\ {t_1}^3 - \tfrac{7}{5}{t_1}^2 + \tfrac{2}{5}t_1 + 1 \\ c_2(t_2) = &\ {t_2}^3 - \tfrac{8}{5}{t_2}^2 + \tfrac{3}{5}t_2 + 1 \end{aligned}$$

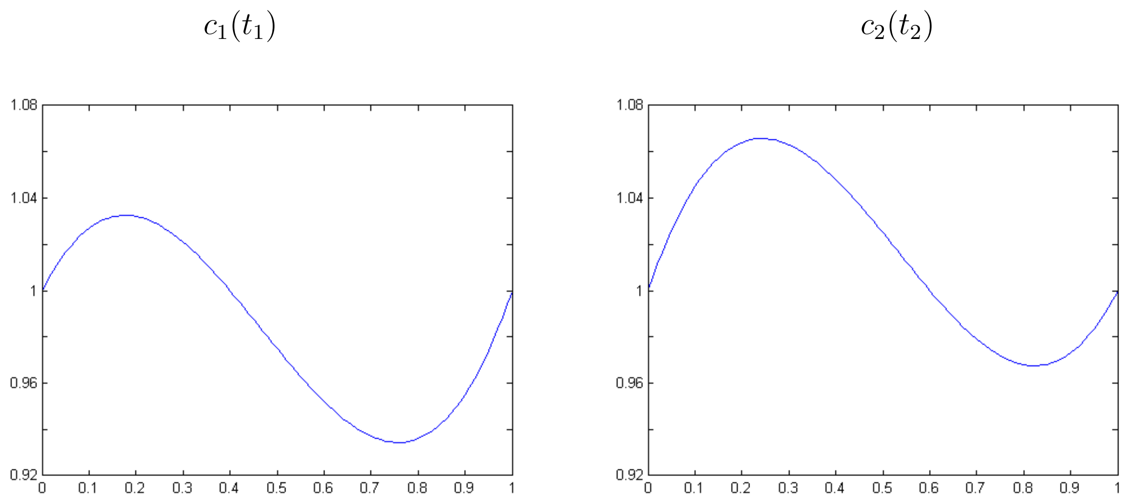


Figura 6.3: Funciones c_1 y c_2

En este caso es directo que $t_1^* = t_2^* = 0$. Comenzaremos chequeando si se cumplen los casos extremos, para eso primero notemos que:

$$\int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 < \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2)f_2(s_2)\ ds_2$$

Por lo tanto, como $F_1(t_1^*) = F_2(t_2^*) = 0$, sabemos inmediatamente que no se cumple (1.1). Por otro lado, haciendo unos pequeños cálculos se obtiene que:

$$\begin{aligned}\Psi^1(t_1) &= \tfrac{1}{4}(1 + t_1 + {t_1}^2 + {t_1}^3) - \tfrac{7}{15}(1 + t_1 + {t_1}^2) + \tfrac{1}{5}(1 + t_1) + 1 \\ \Psi^2(t_2) &= \tfrac{1}{4}{t_2}^3 - \tfrac{8}{15}{t_2}^2 + \tfrac{3}{10}t_2 + 1\end{aligned}$$

Y además:

$$\sup_{t_1 \in [t_1^*, b_1)} \Psi^1(t_1) = \inf_{t_2 \in (t_2^*, b_2]} \Psi^2(t_2) = 1$$

Lo que implica que la curva $h : [t_1^*, b_1] \to [t_2^*, b_2]$ definida como sigue es $(\widehat{P_2})$-óptima.

$$h(t_1) = t_2^* \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$$

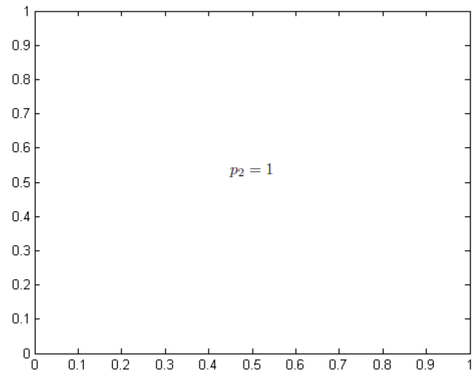


Figura 6.4: Solución del problema.

2. Consideremos de nuevo $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$, ambos jugadores tienen una distribución uniforme y las funciones c_1 y c_2 están definidas como:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = &\ 8{t_1}^3 - 6{t_1}^2 + \tfrac{2}{3} \\ c_2(t_2) = &\ \tfrac{2}{5}e^{t_2} \end{aligned}$$

$c_1(t_1)$ $c_2(t_2)$

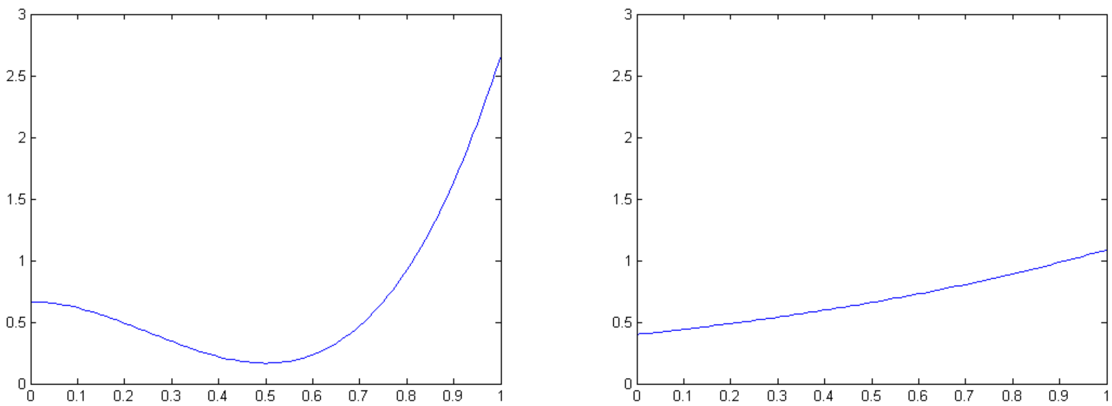


Figura 6.5: Funciones c_1 y c_2

Nuevamente $t_1^* = t_2^* = 0$. Comencemos chequeando los casos extremos, dado que:

$$\frac{2}{3} = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1)f_1(s_1)\ ds_1 < \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2)f_2(s_2)\ ds_2 = \frac{2}{5}(e-1)$$

Y además $F_1(t_1^*) = F_2(t_2^*) = 0$, sabemos inmediatamente que no se cumple (1.1). Por otro lado, calculando las funciones Ψ^1 y Ψ^2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Psi^1(t_1) &= 2(1 + t_1 + {t_1}^2 + {t_1}^3) - 2(1 + t_1 + t_1^2) + \tfrac{2}{3} \\ \Psi^2(t_2) &= \frac{2(e^{t_2} - 1)}{5t_2} \end{aligned}$$

Pero como $\Phi^2(0^+) = \frac{2}{5} < \Phi^1(0) = \frac{2}{3}$, tampoco se cumple la condición (2.1). Continuemos chequeando ahora si la frontera puede ser horizontal, para esto debe existir $\widehat{t_2} \in [t_2^*, b_2]$ que cumpla (3.1)-(3.4), las condiciones (3.1) y (3.2) implican que se debe cumplir $c_2(\widehat{t_2}) = \frac{2}{3}$, pero esto implica que (3.2) no puede cumplirse ya que $c_1(b_1) > \frac{2}{3}$. Para que la frontera sea vertical debe existir $\widehat{t_1} \in [t_1^*, b_1]$ que cumpla (4.1)-(4.4), nuevamente (4.1) y (4.2) implican que se debe cumplir $c_1(\widehat{t_1}) = \frac{2}{5}(e-1)$, pero esto implica que (4.2) no se cumple ya que $c_2(b_2) > \frac{2}{5}(e-1)$.

A continuación, dado que c_2 es estrictamente creciente, ningún $t_2 \in [0, 1]$ puede satisfacer la condición (6.2) y se tiene que $A_2 = \emptyset$. En el caso de A_1, todo punto

$\widehat{t_1} \in (0,1]$ que satisfaga (5.2) y (5.3) debe cumplir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\widehat{t_1}} \left(8{s_1}^3 - 6{s_1}^2 + \frac{2}{3}\right) ds_1 &= \int_0^{\widehat{t_1}} \left(8\widehat{t_1}^3 - 6\widehat{t_1}^2 + \frac{2}{3}\right) ds_1 \\
\Longleftrightarrow \qquad 2\widehat{t_1}^4 - 2\widehat{t_1}^3 + \tfrac{2}{3}\widehat{t_1} &= 8\widehat{t_1}^4 - 6\widehat{t_1}^3 + \tfrac{2}{3}\widehat{t_1} \\
\Longleftrightarrow \qquad 4\widehat{t_1}^3 &= 6\widehat{t_1}^4 \\
\Longleftrightarrow \qquad \widehat{t_1} &= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Sin embargo $c_2(t_2) > c_1(\frac{2}{3}) \quad \forall t_2 \in [t_2^*, b_2]$, por lo tanto no existe un par $(\widehat{t_1}, \widehat{t_2})$ que satisfaga (5.1)-(5.4) y se concluye que $A_1 = \emptyset$.

Por último, c_1 es decreciente en una vecindad de t_1^* por lo que $D_2 = \emptyset$. Además, es fácil ver que $D_1 = \{\widetilde{t_1}\} \neq \emptyset$, donde $\widetilde{t_1} \sim 0{,}261$ es tal que $c_1(\widetilde{t_1}) = c_2(t_2^*) = \frac{2}{5}$ y c_1 es creciente en $\widetilde{t_1}$. De esta manera, comenzamos la etapa 6) del algoritmo con $\dot{t_1} = \widetilde{t_1}$ y $\dot{t_2} = t_2^* = 0$. Notando que c_1 y c_2 son estrictamente crecientes en $[\widetilde{t_1}, b_1]$ y en $[t_2^*, b_2]$ respectivamente, se tiene que $\widehat{t_1} = \infty$ y $\widehat{t_2} = \infty$, por lo tanto la etapa 6) terminará en la primera iteración. Como $c_1(1) > c_2(1)$, la curva h estará definida en $[\widetilde{t_1}, \widetilde{\widetilde{t_1}}]$ como la solución de la siguiente ecuación:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \Longleftrightarrow 8{t_1}^3 - 6{t_1}^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{5}e^{h(t_1)} \Longleftrightarrow h(t_1) = \ln\left(20{t_1}^3 - 15{t_1}^2 + \frac{5}{3}\right)$$

Donde $\widetilde{\widetilde{t_1}} \sim 0{,}827$ es tal que $c_1(\widetilde{\widetilde{t_1}}) = c_2(1)$. Por lo tanto, la curva h resulta ser:

$$h(t_1) = \begin{cases} 0 & \forall t_1 \in [0, \widetilde{t_1}] \\ \ln\left(20{t_1}^3 - 15{t_1}^2 + \frac{5}{3}\right) & \forall t_1 \in [\widetilde{t_1}, \widetilde{\widetilde{t_1}}] \\ 1 & \forall t_1 \in [\widetilde{\widetilde{t_1}}, 1] \end{cases}$$

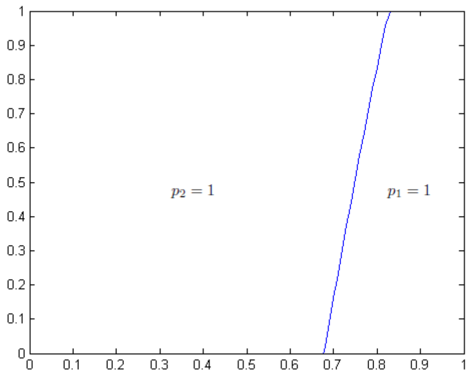


Figura 6.6: Solución del problema.

3. Consideremos el problema en que nuevamente $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$, ambos jugadores tienen una distribución uniforme y las funciones c_1 y c_2 están definidas como:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = & \ t_1 - {t_1}^2 \\ c_2(t_2) = & \ 2t_2 \end{aligned}$$

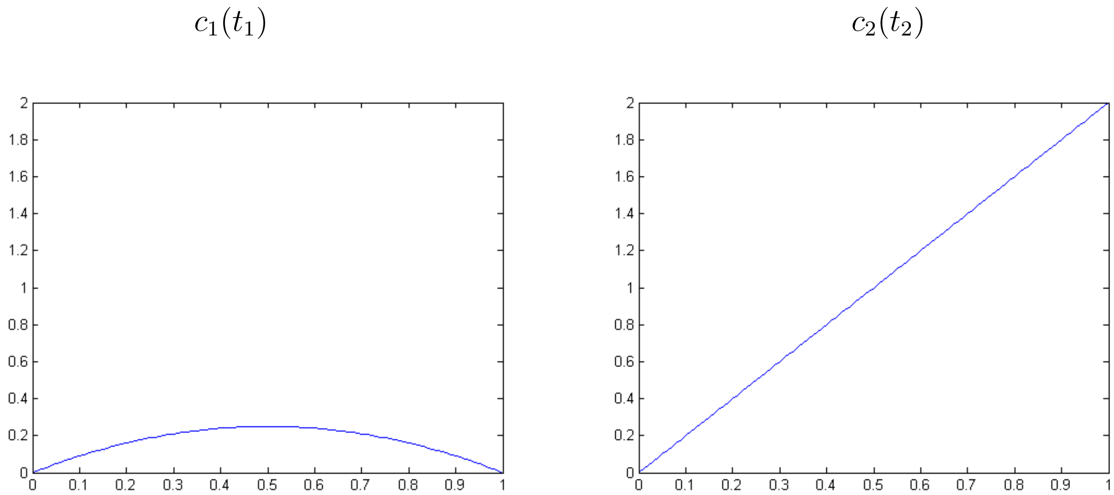


Figura 6.7: Funciones c_1 y c_2

En este caso es directo que $t_1^* = t_2^* = 0$. Dado que:

$$\frac{1}{6} = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1) \ ds_1 < \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2) \ ds_2 = 1$$

Y además $F_1(t_1^*) = F_2(t_2^*) = 0$, sabemos inmediatamente que no se cumple (1.1). Además, calculando las funciones Ψ^1 y Ψ^2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Psi^1(t_1) &= -\tfrac{1}{3}{t_1}^2 + \tfrac{1}{6}t_1 + \tfrac{1}{6} \\ \Psi^2(t_2) &= t_2 \end{aligned}$$

Como $\Psi^1(0) = \frac{1}{6}$ y $\Psi^2(\frac{1}{12}) = \frac{1}{12}$, tampoco se cumple la condición (2.1). Para chequear si la frontera es horizontal, notemos que:

$$c_2(t_2) = \frac{1}{6} \iff t_2 = \frac{1}{3}$$

Así que solamente este punto podría satisfacer (3.1) y (3.2), sin embargo, (3.1) no se satisface ya que $c_1(t_1^*) = 0 < c_2(\frac{1}{3})$ y la frontera no es horizontal. Por otro lado, dado que $c_1(t_1) \neq 1 \quad \forall t_1 \in [t_1^*, b_1]$, ningún punto satisface (4.1)-(4.2) y la frontera no es vertical.

Como c_2 es estrictamente creciente, ningún $t_2 \in [0, 1]$ puede satisfacer la condición (6.2) y se tiene que A_2 es vacío, igualmente, como c_1 es estrictamente creciente en

$[0, \frac{1}{2}]$ ningún $t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ satisface (5.2), mientras que como c_1 es estrictamente decreciente en $[\frac{1}{2}, 1]$ ningún $t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ satisface (5.3). Concluímos que A_1 también es vacío.

Un rápido chequeo nos entrega que $D_1 = \{t_2^*\}$ y $D_2 = \{t_1^*\}$. Por lo tanto el algoritmo comienza en la etapa 6) con $\dot{t_1} = t_1^*$ y $\dot{t_2} = t_2^*$. Como c_2 es estrictamente creciente, se tiene que $\widehat{t_2} = \infty$. Para calcular $\widehat{t_1}$ definimos la función Φ como sigue:

$$\Phi(t_1, \epsilon) = \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, ds_1$$

Una de las condiciones que debe cumplir $\widehat{t_1}$ es que $\Phi(\widehat{t_1}, \epsilon) = 0$, para algún $\epsilon > 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1, \epsilon) &= \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} \left(t_1 - {t_1}^2\right) + \left({s_1}^2 - s_1\right) ds_1 \\
&= t_1\epsilon - {t_1}^2\epsilon + \frac{{t_1}^3 + 3{t_1}^2\epsilon + 3t_1\epsilon^2 + \epsilon^3 - {t_1}^3}{3} - \frac{{t_1}^2 + 2t_1\epsilon + \epsilon^2 - {t_1}^2}{2} \\
&= t_1\epsilon^2 + \tfrac{\epsilon^3}{3} - \tfrac{\epsilon^2}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Phi(t_1, \epsilon) = 0 \Longleftrightarrow \epsilon = \frac{3}{2} - 3t_1 \Longleftrightarrow t_1 + \epsilon = \frac{3}{2} - 2t_1$$

Así, el primer instante en que es posible que exista un intervalo constante se obtiene cuando:

$$\frac{3}{2} - 2t_1 = 1 \Longleftrightarrow t_1 = \frac{1}{4}$$

Siempre que se cumpla también la otra condición necesaria. Para chequearla, definimos $\widehat{\Phi}$ como:

$$\widehat{\Phi}(t_1) = \int_{\frac{1}{4}}^{t_1} \left[c_1(\frac{1}{4}) - c_1(s_1)\right] ds_1$$

Y por los crecimientos de c_1 es claro que $\widehat{\Phi}$ es negativa en $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ y estrictamente creciente en $[\frac{3}{4}, 1]$, por lo tanto sí se cumple la condición:

$$\widehat{\Phi}(t_1) \leq 0 \quad \forall t_1 \in [\frac{1}{4}, 1]$$

Y se obtiene que h será constante en $[\frac{1}{4}, 1]$. Finalmente, calculemos la ecuación de h en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \Longleftrightarrow t_1 - {t_1}^2 = 2h(t_1) \Longleftrightarrow h(t_1) = \frac{t_1}{2} - \frac{{t_1}^2}{2}$$

Por lo que la curva h resulta ser:

$$h(t_1) = \begin{cases} \dfrac{t_1}{2} - \dfrac{{t_1}^2}{2} & \forall t_1 \in [0, \frac{1}{4}] \\[2ex] \dfrac{3}{32} & \forall t_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

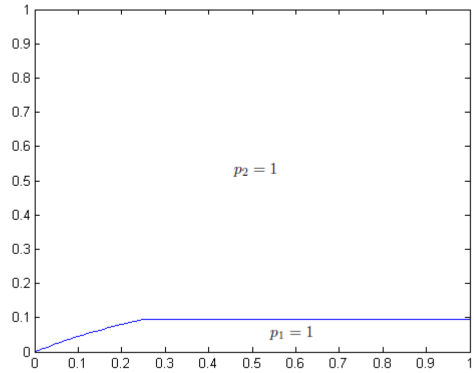


Figura 6.8: Solución del problema.

4. Consideremos el problema en que $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$, ambos jugadores tienen una distribución uniforme y las funciones c_1 y c_2 están definidas como:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = & \; -{t_1}^2 + \tfrac{1}{4}t_1 + 1 \\ c_2(t_2) = & \; {t_2}^3 \end{aligned}$$

$c_1(t_1)$ $c_2(t_2)$

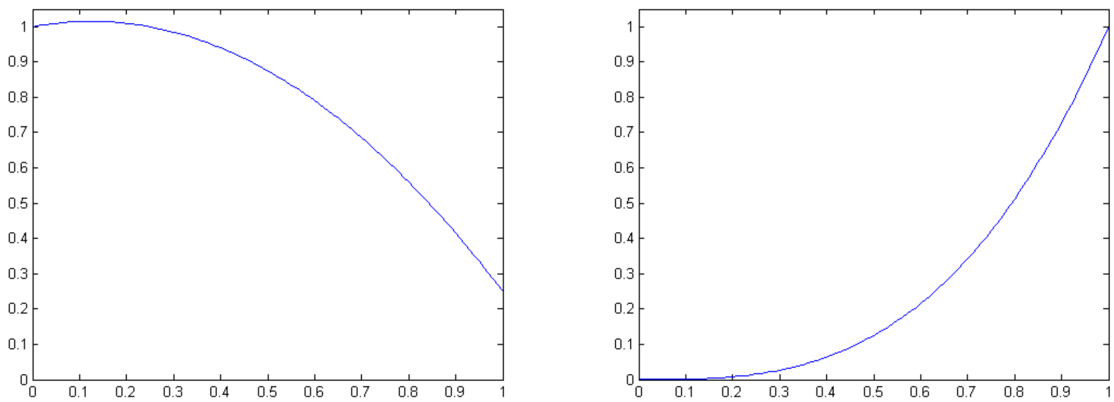


Figura 6.9: Funciones c_1 y c_2

En este caso es directo que $t_1^* = t_2^* = 0$. Dado que:

$$\frac{19}{24} = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\; ds_1 > \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\; ds_2 = \frac{1}{4}$$

Y además $F_1(t_1^*) = F_2(t_2^*) = 0$, sabemos que no se cumple (2.1). Ahora, calculamos Φ^1 y Φ^2 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi^1(t_1) &= -\tfrac{1}{3}{t_1}^2 + \tfrac{1}{8}t_1 + 1 \\ \Phi^2(t_2) &= \tfrac{1}{4}(1 + t_2 + {t_2}^2 + {t_2}^3) \end{aligned}$$

Como $\Phi^1(1) = \frac{19}{24} < \Phi^2(1^-) = 1$, tampoco se cumple la condición (1.1). Para chequear si la frontera es horizontal, notemos que:

$$c_2(t_2) = \frac{19}{24} \Longleftrightarrow t_2 = \sqrt[3]{\frac{19}{24}}$$

Así que solamente este punto podría satisfacer (3.1) y (3.2). Por los crecimientos de c_1, es claro que se satisfacen (3.1) y (3.2), además c_2 es creciente por lo tanto también se satisfacen (3.3) y (3.4). Se conluye entonces que la función h $(\widehat{P_2})$-óptima es:

$$h(t_1) = \sqrt[3]{\frac{19}{24}} \quad \forall t_1 \in [0,1]$$

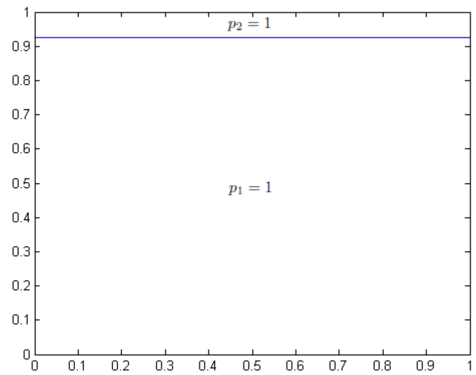


Figura 6.10: Solución del problema.

5. Consideremos el problema en que ambos jugadores tienen distribución uniforme, pero esta vez $[a_1, b_1] = [0,1]$, $[a_2, b_2] = [-1,1]$ y las funciones c_1 y c_2 son:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = &\ \sin(4\pi t_1 - \pi) + \tfrac{1}{2} \\ c_2(t_2) = &\ t_2 + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

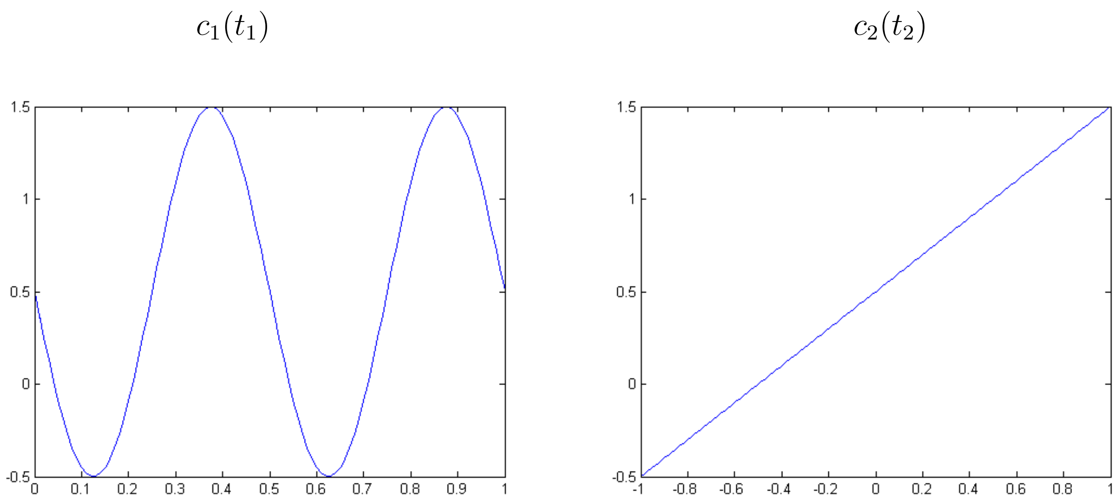


Figura 6.11: Funciones c_1 y c_2

En este caso se tiene que $t_1^* = \frac{5}{24}$, $t_2^* = -\frac{1}{2}$. Luego, sigue que:

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{32\pi} + \frac{19}{64} = \left(1 - \frac{t_2^*+1}{2}\right)\int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1)f_1(s_1)\;ds_1 < (1-t_1^*)\int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2)f_2(s_2)\;ds_2 = \frac{57}{128}$$

Y se tiene que no se cumple (1.1). Ahora, calculando Ψ^1 y Ψ^2 se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} \Psi^1(t_1) & = & \frac{1+\cos(4\pi t_1-\pi)}{4\pi(1-t_1)} \\ \Psi^2(t_2) & = & t_2 + \frac{1}{2} \end{array}$$

Entonces $\Psi^2(0) = \frac{1}{2} < \frac{2}{\pi} = \Psi^1(\frac{3}{4})$ y tampoco se cumple (2.1). Para que la frontera sea horizontal debe existir $\widehat{t_2} \in [-\frac{1}{2}, 1]$ que cumpla (3.1) y (3.2) y entonces $\frac{19}{24}c_2(\widehat{t_2}) = \frac{1}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{19}{48}$ es decir $c_2(\widehat{t_2}) = \frac{6}{19\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{19\pi} + \frac{1}{2} > c_1(t_1^*)$ lo que implica que no se puede cumplir (3.1). Para que la frontera sea vertical debe existir $\widehat{t_1} \in [\frac{5}{24}, 1]$ que cumpla (4.1) y (4.2) y entonces $\frac{3}{4}c_1(\widehat{t_1}) = \frac{9}{16}$ es decir $c_1(\widehat{t_1}) = \frac{3}{4} < c_2(b_2)$, lo que implica que no se puede cumplir (4.2).

Como c_2 es estrictamente creciente sigue que $A_2 = \emptyset$, como c_1 es estrictamente creciente en $[\frac{5}{24}, \frac{3}{8}]$ ningún $t_1 \in [\frac{5}{24}, \frac{3}{8}]$ satisface (5.2) y como c_1 es estrictamente decreciente en $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ ningún $t_1 \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$ satisface (5.3). Además, es claro que:

$$\int_{\frac{5}{24}}^{t_1} c_1(t_1)\;ds_1 < \int_{\frac{5}{24}}^{t_1} c_1(s_1)\;ds_1 \quad \forall t_1 \in [\frac{5}{8}, \frac{5}{24}]$$

Por lo que estos puntos no satisfacen (5.1)-(5.2), por último $c_1(t_1^*) < c_1(t_1) \quad \forall t_1 \in (\frac{5}{24}, 1]$ y estos puntos no satisfacen (5.2). Concluímos que $A_1 = \emptyset$.

Es rápido chequear que $D_1 = \{t_2^*\}$ y $D_2 = \{t_1^*\}$. Por lo tanto el algoritmo comienza en la etapa 6) con $\dot{t_1} = t_1^*$ y $\dot{t_2} = t_2^*$. Como c_2 es estrictamente creciente, se tiene que $\widehat{t_2} = \infty$. Para calcular $\widehat{t_1}$, aprovecharemos el hecho que para $t_1^1 < t_1^2$, se cumplen que $c_1(t_1^1) = c_1(t_1^2)$ y que c_1 es creciente en t_1^1 y t_1^2 solamente si $t_1^2 = t_1^1 + \frac{1}{2}\pi$, luego, para detectar intervalos donde h puede ser constante definimos las funciones Φ y Φ_{b_1} en $[\frac{5}{24}, \frac{3}{8}]$ como:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t_1) & = & \displaystyle\int_{t_1}^{t_1+1/2} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\,ds_1 \\ \Phi_{b_1}(t_1) & = & \displaystyle\int_{t_1}^{1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\,ds_1 \end{array}$$

Y notemos que:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi(t_1) = 0 & \iff \displaystyle\int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{2}} c_1(t_1)\;ds_1 & = & \displaystyle\int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{2}} c_1(s_1)\;ds_1 \\ & \iff \frac{1}{2}\sin(4\pi t_1 - \pi) + \frac{1}{4} & = & \frac{1}{4} \\ & \iff \sin(4\pi t_1 - \pi) & = & 0 \end{array}$$

Por lo que el primer cero de Φ en $[\frac{5}{24},\frac{3}{8}]$ está en $t_1=\frac{1}{4}$. Además, por los crecimientos de c_1 es claro que en el intervalo $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ también se satisface la segunda condición necesaria para definir h constante. Por otro lado:

$$\begin{array}{lrcl}
 & \Phi_{b_1}(t_1)=0 & & \\
\Longleftrightarrow & \int_{t_1}^{1} c_1(t_1)\ ds_1 & = & \int_{t_1}^{1} c_1(s_1)\ ds_1 \\
\Longleftrightarrow & (1-t_1)\sin(4\pi t_1-\pi)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t_1 & = & \frac{1}{4\pi}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t_1-\pi)-\frac{1}{2}t_1 \\
\Longleftrightarrow & -\cos(4\pi t_1)+t_1\cos(4\pi t_1) & = & \frac{1}{4\pi}-\frac{1}{4\pi}\cos(4\pi t_1) \\
\Longleftrightarrow & \cos(4\pi t_1)\left(t_1-1+\frac{1}{4\pi}\right) & = & \frac{1}{4\pi}
\end{array}$$

Y las soluciones de esta ecuación están en $t_1^1\sim 0{,}134$, $t_1^2\sim 0{,}363$, $t_1^3\sim 0{,}649$, $t_1^4\sim 0{,}810$. Esto nos dice que primero debemos definir h constante en $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ y luego en $[t_1^4,1]$ (es fácil chequear que en este intervalo se cumple la segunda condición necesaria). Por último, en los intervalos donde h es estrictamente creciente se satisface:

$$c_1(t_1)=c_2(h(t_1)) \Longleftrightarrow \sin(4\pi t_1-\pi)+\frac{1}{2}=h(t_1)+\frac{1}{2} \Longleftrightarrow h(t_1)=\sin(4\pi t_1-\pi)$$

De esta manera, la función h $(\widehat{P_2})$-óptima es:

$$h(t_1)=\begin{cases} \sin(4\pi t_1-\pi) & \forall t_1\in[\frac{5}{24},\frac{1}{4}] \\ 0 & \forall t_1\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}] \\ \sin(4\pi t_1-\pi) & \forall t_1\in[\frac{3}{4},t_1^4] \\ \sim 0{,}68454 & \forall t_1\in[t_1^4,1] \end{cases}$$

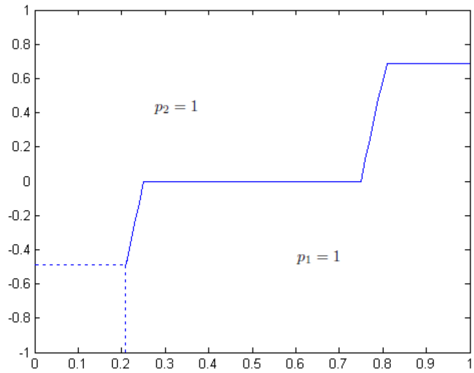


Figura 6.12: Solución del problema.

6. Consideremos el problema en que $[a_1,b_1]=[a_2,b_2]=[0,1]$, ambos jugadores tienen una distribución uniforme y las funciones c_1 y c_2 están definidas como:

$$c_1(t_1)= t_1-{t_1}^2$$

$$c_2(t_2)=\begin{cases} t_2 & \forall t_2\in[0,\frac{3}{8}] \\ -3t_2+\frac{3}{2} & \forall t_1\in[\frac{3}{8},\frac{1}{2}] \\ t_2-\frac{1}{2} & \forall t_1\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

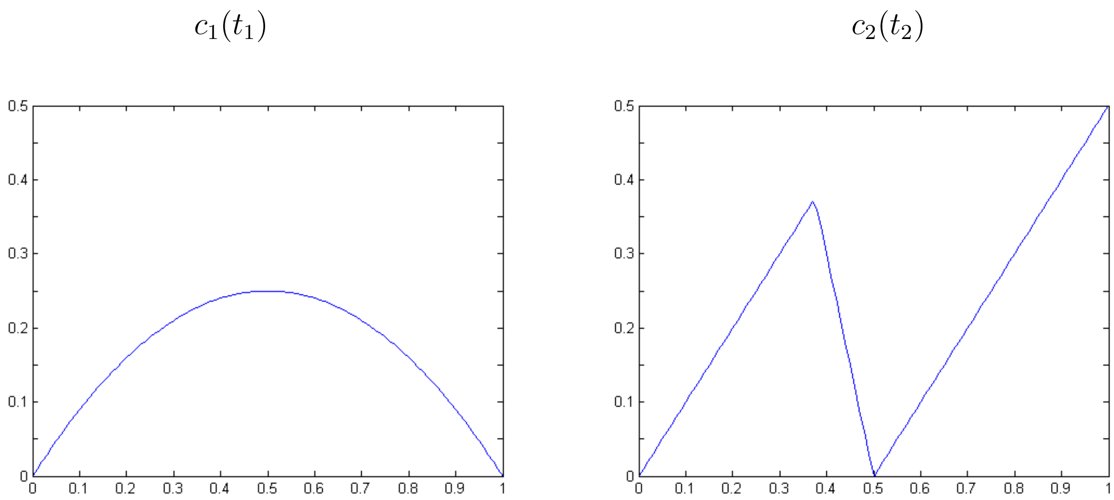


Figura 6.13: Funciones c_1 y c_2

En este caso es directo que $t_1^* = t_2^* = 0$. Dado que:

$$\frac{1}{6} = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\ ds_1 < \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\ ds_2 = \frac{7}{32}$$

Sabemos inmediatamente que no se cumple (1.1). Además, calculando las funciones Ψ^1 y Ψ^2 se obtiene que:

$$\begin{array}{rcl} \Psi^1(t_1) & = & -\frac{1}{3}{t_1}^2 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6} \\ \Psi^2(t_2) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}t_2 & \forall t_2 \in [0, \frac{3}{8}] \\ \frac{3}{2}t_2 - \frac{9}{8} + \frac{9}{32t_2} & \forall t_1 \in [\frac{3}{8}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2} + \frac{7}{32t_2} & \forall t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{array} \right. \end{array}$$

Como $\Psi^1(0) = \frac{1}{6} > \frac{1}{16} = \Psi^2(\frac{1}{8})$, tampoco se cumple la condición (2.1). Para que la frontera sea horizontal debe existir $\widehat{t_2} \in [0,1]$ que cumpla (3.1) y (3.2) y entonces $c_2(\widehat{t_2}) = \frac{1}{6} > c_1(t_1^*)$ lo que implica que no se puede cumplir (3.1). Para que la frontera sea vertical debe existir $\widehat{t_1} \in [0,1]$ que cumpla (4.1) y (4.2) y entonces $c_1(\widehat{t_1}) = \frac{7}{32} > c_2(t_2^*)$, lo que implica que no se puede cumplir (4.2).

Como c_1 es estrictamente creciente en $[0, \frac{1}{2}]$ ningún $t_1 \in [0, \frac{1}{2}]$ satisface (5.2), mientras que como c_1 es estrictamente decreciente en $[\frac{1}{2}, 1]$ ningún $t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ satisface (5.3). Concluímos que A_1 es vacío. Además, como c_2 es estrictamente creciente en $[0, \frac{3}{8}]$ ningún $t_1 \in [0, \frac{3}{8}]$ cumple (6.2), el punto $t_2 = \frac{1}{2}$ no satisface (6.3) pues es mínimo de c_2 y el resto de los puntos en $[\frac{3}{8}, 1]$ no cumplen (6.1) pues cumplen $c_2(t_2) > c_2(t_2^*)$. Concluímos que A_2 también es vacío.

Un rápido chequeo nos entrega que $D_1 = \{t_2^*\}$ y $D_2 = \{t_1^*\}$. Por lo tanto el algoritmo comienza en la etapa 6) con $\dot{t_1} = t_1^*$ y $\dot{t_2} = t_2^*$. Para calcular $\widehat{t_1}$ definimos la función Φ como sigue:

$$\Phi(t_1, \epsilon) = \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, ds_1$$

Una de las condiciones que debe cumplir $\widehat{t_1}$ es que $\Phi(\widehat{t_1}, \epsilon) = 0$, para algún $\epsilon > 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1, \epsilon) &= \int_{t_1}^{t_1+\epsilon} \left(t_1 - {t_1}^2\right) + \left({s_1}^2 - s_1\right) ds_1 \\
&= t_1\epsilon - {t_1}^2\epsilon + \frac{{t_1}^3 + 3{t_1}^2\epsilon + 3t_1\epsilon^2 + \epsilon^3 - {t_1}^3}{3} - \frac{{t_1}^2 + 2t_1\epsilon + \epsilon^2 - {t_1}^2}{2} \\
&= t_1\epsilon^2 + \tfrac{\epsilon^3}{3} - \tfrac{\epsilon^2}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\Phi(t_1, \epsilon) = 0 \Longleftrightarrow \epsilon = \frac{3}{2} - 3t_1 \Longleftrightarrow t_1 + \epsilon = \frac{3}{2} - 2t_1$$

Así, el primer instante en que es posible que exista un intervalo constante se obtiene cuando:

$$\frac{3}{2} - 2t_1 = 1 \Longleftrightarrow t_1 = \frac{1}{4}$$

Y por los crecimientos de c_1 es claro que se cumple la otra condición necesaria para definir h constante en $[\frac{1}{4}, 1]$. Para calcular $\widehat{t_2}$, aprovechamos el hecho de que para $t_1^1 \in [0, \frac{3}{16}]$ y $t_1^2 \in [\frac{1}{2}, 1]$ se tiene que $c_1(t_1^1) = c_1(t_1^2)$ solamente si $t_1^2 = t_1^1 + \frac{1}{2}$. Por otro lado, h no puede ser constante hasta el punto b_1 pues $c_1(b_1) > c_1(t_1) \quad \forall t_1 \in [0, \frac{3}{16}]$ y esto contradice una de las condiciones necesarias, por lo tanto definimos $\widehat{\Phi}$ como sigue:

$$\widehat{\Phi}(t_2) = \int_{t_2}^{t_2+\frac{1}{2}} \left[c_2(t_2) - c_2(s_2)\right] ds_2$$

Y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(t_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{t_2}^{t_2+\frac{1}{2}} c_2(t_2)\ ds_2 &= \int_{t_2}^{t_2+\frac{1}{2}} c_2(s_2)\ ds_2 \\
\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}t_2 &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{8} - t_2)^2 + \tfrac{3}{128} + \tfrac{1}{2}{t_2}^2 \\
\Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}t_2 &= \tfrac{3}{32} - \tfrac{3}{8}t_2 \\
\Longleftrightarrow \quad t_2 &= \tfrac{3}{16}
\end{aligned}$$

Y por los crecimientos de c_2 también es claro que se satisface la otra condición necesaria para que h tenga una discontinuidad desde $t_2^1 = \frac{3}{16}$ hasta $t_2^2 = \frac{11}{16}$. Para decidir si h llega primero al intervalo constante o a la discontinuidad calculamos: $c_1(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16} = c_2(\frac{3}{16})$, y nos enfrentamos a la situación en que el algoritmo arbitrariamente decide definir h constante, sin embargo, debido a la proposición 6.2.12 sabemos que las dos opciones son igualmente válidas y por eso construiremos dos funciones $(\widehat{P_2})$-óptima. Antes de eso, calculemos la ecuación de h cuando es estrictamente creciente en el intervalo $[0, \frac{1}{4}]$:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \Longleftrightarrow t_1 - {t_1}^2 = h(t_1)$$

Por lo que si preferimos definir h constante antes de la discontinuidad, la curva h resulta ser:

$$h(t_1) = \begin{cases} t_1 - {t_1}^2 & \forall t_1 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{3}{16} & \forall t_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

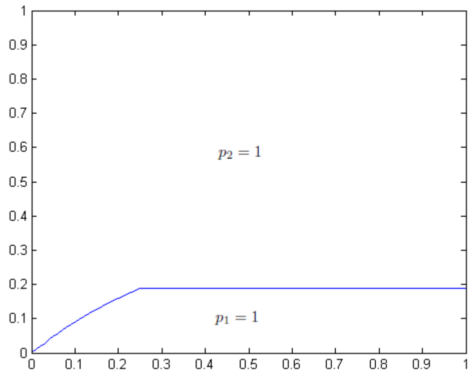


Figura 6.14: Solución del problema.

En cambio, si preferimos definir antes la discontinuidad, la curva h resulta ser:

$$h(t_1) = \begin{cases} t_1 - {t_1}^2 & \forall t_1 \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{11}{16} & \forall t_1 \in [\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

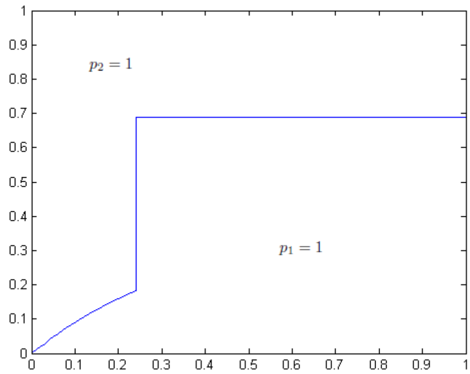


Figura 6.15: Solución del problema.

7. Consideremos el problema en que ambos jugadores tienen distribución uniforme, $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = [0, 1]$ y las funciones c_1 y c_2 son:

$$\begin{aligned} c_1(t_1) = & \ \cos(4\pi t_1) + 1 \\ c_2(t_2) = & \ 3t_2 \end{aligned}$$

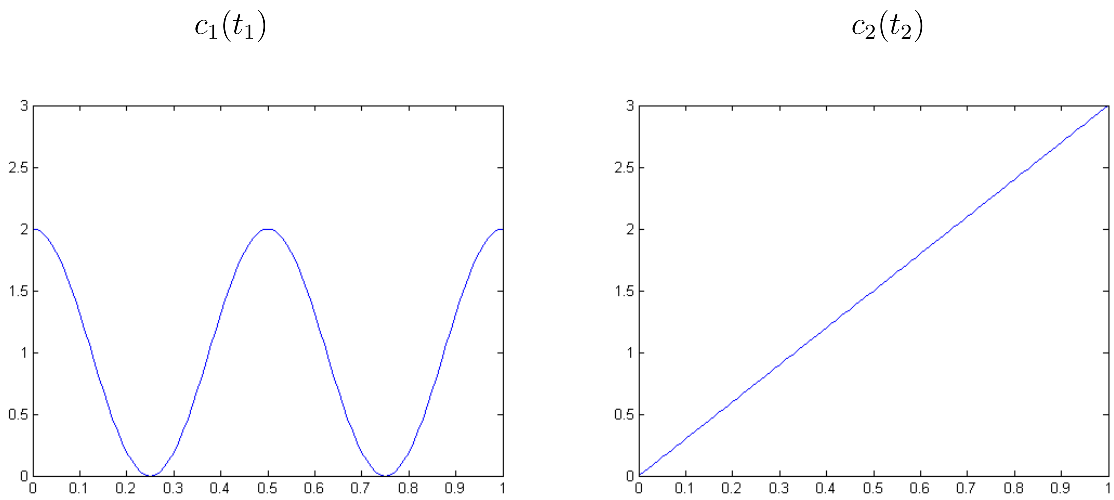


Figura 6.16: Funciones c_1 y c_2

Es claro que $t_1^* = t_2^* = 0$. Además como:

$$1 = \int_{t_1^*}^{b_1} c_1(s_1) f_1(s_1)\, ds_1 < \int_{t_2^*}^{b_2} c_2(s_2) f_2(s_2)\, ds_2 = \frac{3}{2}$$

Y se tiene que no se cumple (1.1). Ahora, calculando Ψ^1 y Ψ^2 se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} \Psi^1(t_1) & = & -\frac{\sin(4\pi t_1)}{4\pi(1-t_1)} + 1 \\ \Psi^2(t_2) & = & \frac{3}{2} t_2 \end{array}$$

Entonces $\Psi^2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} < 1 = \Psi^1(\frac{1}{2})$ y tampoco se cumple (2.1). Para que la frontera sea horizontal debe existir $\widehat{t_2} \in [0,1]$ que cumpla (3.1) y (3.2) y entonces $c_2(\widehat{t_2}) = 1 < c_1(b_1)$ lo que implica que no se puede cumplir (3.2). Para que la frontera sea vertical debe existir $\widehat{t_1} \in [0,1]$ que cumpla (4.1) y (4.2) y entonces $c_1(\widehat{t_1}) = \frac{3}{2} < c_2(b_2)$, lo que implica que no se puede cumplir (4.2).

Como c_2 es estrictamente creciente sigue que $A_2 = \emptyset$, para calcular A_1 definimos la función Φ_h como:

$$\Phi_h(t_1) = \int_0^{t_1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, ds_1$$

Y buscamos los ceros de Φ_h donde además c_1 sea creciente, se tiene entonces que:

$$\begin{array}{rrcl} \Phi(t_1) = 0 & \Longleftrightarrow \displaystyle\int_0^{t_1} c_1(t_1)\, ds_1 & = & \displaystyle\int_0^{t_1} c_1(s_1)\, ds_1 \\ & \Longleftrightarrow \cos(4\pi t_1) t_1 + t_1 & = & \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t_1) + t_1 \\ & \Longleftrightarrow \cos(4\pi t_1) t_1 & = & \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t_1) \\ & \Longleftrightarrow 4\pi t_1 & = & \tan(4\pi t_1) \end{array}$$

De las cuatro soluciones de esta ecuación en $[0,1]$ los únicos puntos en los cuales c_1 es creciente (y por lo tanto cumplirán las condiciones necesarias para definir h constante en un intervalo) son $t_1^1 \sim 0{,}357574$ $t_1^2 \sim 0{,}8677224$, por lo tanto $A_1 = \{(t_1^1, \frac{c_1(t_1^1)}{3}), (t_1^2, \frac{c_1(t_1^2)}{3})\}$, a continuación calculamos $c_1(t_1^1) \sim 0{,}782764$ y

$c_1(t_1^2) \sim 0{,}908674$ por lo que el algoritmo nos dice que definamos h constante en $[0, t_1^1]$ y comencemos la etapa 6) con $\dot{t_1} = t_1^1$ y $\dot{t_2} = \frac{c_1(t_1^1)}{3}$. Como c_2 es estrictamente creciente, se tiene que en cada iteración $\widehat{t_2} = \infty$. Para calcular $\widehat{t_1}$ aprovecharemos que c_1 tiene período $\frac{1}{2}$, luego, para detectar intervalos donde h puede ser constante definimos las funciones Φ y Φ_{b_1} en $[t_1^1, \frac{1}{2}]$ como:

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_1+1/2} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, ds_1 \\
\Phi_{b_1}(t_1) &= \int_{t_1}^{1} [c_1(t_1) - c_1(s_1)]\, ds_1
\end{aligned}$$

Y notemos que:

$$\begin{aligned}
\Phi(t_1) = 0 \iff \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{2}} c_1(t_1)\ ds_1 &= \int_{t_1}^{t_1+\frac{1}{2}} c_1(s_1)\ ds_1 \\
\iff \tfrac{1}{2}\cos(4\pi t_1) + \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \\
\iff \cos(4\pi t_1) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que el primer cero de Φ en $[t_1^1, \frac{1}{2}]$ está en $t_1 = \frac{3}{8}$. Por los crecimientos de c_1 es claro que en el intervalo $[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}]$ también se satisface la segunda condición necesaria para definir h constante. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\Phi_{b_1}(t_1) = 0 \iff \int_{t_1}^{1} c_1(t_1)\ ds_1 &= \int_{t_1}^{1} c_1(s_1)\ ds_1 \\
\iff (1 - t_1)\cos(4\pi t_1) + (1 - t_1) &= 1 - t_1 - \tfrac{1}{4\pi}\sin(4\pi t_1) \\
\iff 4\pi(t_1 - 1) &= \tan(4\pi t_1)
\end{aligned}$$

Y esta ecuación no tiene solución en $[\frac{7}{8}, 1)$. Por último, en los intervalos donde h es estrictamente creciente se satisface:

$$c_1(t_1) = c_2(h(t_1)) \iff \cos(4\pi t_1) + 1 = 3h(t_1) \iff h(t_1) = \frac{1}{3}\cos(4\pi t_1) + \frac{1}{3}$$

De esta manera, la función h $(\widehat{P_2})$-óptima es:

$$h(t_1) = \begin{cases} \sim 0{,}260921 & \forall t_1 \in [0, t_1^1] \\ \frac{1}{3}\cos(4\pi t_1) + \frac{1}{3} & \forall t_1 \in [t_1^1, \frac{3}{8}] \\ \frac{1}{3} & \forall t_1 \in [\frac{3}{8}, \frac{7}{8}] \\ \frac{1}{3}\cos(4\pi t_1) + \frac{1}{3} & \forall t_1 \in [\frac{7}{8}, 1] \end{cases}$$

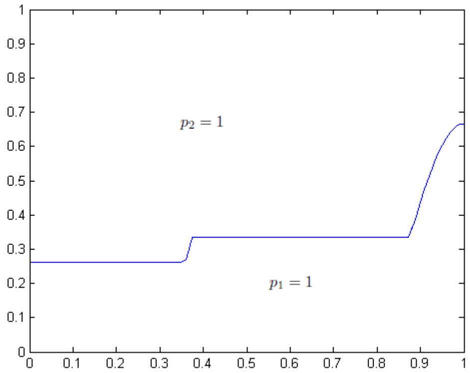


Figura 6.17: Solución del problema.

Capítulo 7

Conclusiones

A continuación exponemos las conclusiones obtenidas de este trabajo y los problemas abiertos de interés.

En el caso de un jugador, se ha caracterizado completamente la solución del problema, esto se ha hecho usando técnicas de cálculo variacional que también podrían ser aplicadas en otros problemas unidimensionales, similares al abordado. Además, se ha demostrado que la caracterización obtenida es equivalente a la encontrada por Myerson, siendo la primera mucho más sencilla.

En el caso de dos jugadores, se ha heredado un resultado obtenido por Myerson: existe una solución del problema tal que las funciones de probabilidades de cada jugador toman solamente los valores 0 y 1. A partir de esto se ha simplificado el problema y luego, considerando la hipótesis adicional de que las funciones c_1 y c_2 tienen una cantidad finita de cambios de crecimiento y son constantes en una cantidad finita de intervalos maximales, se ha caracterizado el problema como el de encontrar la mejor frontera entre los conjuntos de asignación propios de cada jugador. Se han encontrado condiciones necesarias de optimalidad para las soluciones del problema y también se ha desarrollado un algoritmo que encuentra esta frontera óptima. Se ha demostrado que el algoritmo efectivamente comienza, finaliza y construye una solución. Por último, se ha demostrado que la frontera asociada a la solución de Myerson satisface las condiciones de optimalidad.

La primera pregunta que queda abierta en el caso de dos jugadores es: ¿es posible demostrar mediante técnicas de cálculo variacional que existe una solución del problema tal que las funciones de probabilidades de cada jugador toman solamente los valores 0 y 1? Esta pregunta es importante ya que si la respuesta fuera afirmativa, se podría intentar usar esas técnicas para demostrar lo mismo en problemas que son similares al tratado en este trabajo y para los cuales no se conoce la respuesta a la interrogante.

Inmediatamente surge una pregunta más general que la anterior: ¿bajo qué condiciones sobre la función objetivo y sobre el conjunto de funciones factibles es posible afirmar que un problema posee una solución tal que las funciones de probabilidades de cada jugador toman solamente los valores 0 y 1?

Resolver estas preguntas constituye un eventual trabajo a futuro, al igual que caracterizar las soluciones del problema en el caso general de N jugadores.

Bibliografía

[1] P. Klemperer. What Really Matters in Auction Design, *Journal of Economic Perspectives*, 16(1):169-189, 2002.

[2] V. Krishna. *Auction Theory*. New York, Elsevier, 2002.

[3] A. Manelli and D. Vincent. Bayesian and Dominant Strategy Implementation in the Independent Private Values Model, *Econometrica* , 78(6):1905-1938, 2010.

[4] P. Milgrom. *Putting Auction Theory to Work*. Cambridge, University Press, 2004.

[5] R. Myerson. Optimal Auction Design, *Mathematics of operations researchs*, 6(1):58-73, 1981.

[6] J. San Martin. *Teoría de la medida*. 7ma Ed. Santiago, Universidad de Chile, 2008.

[7] W. Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders, *The Journal of Finance*, 16(1):8-37, 1961.