



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

FLUIDOS DE BINGHAM EN CANALETAS RECTANGULARES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FRANCISCO UNDA SURAWSKI

SANTIAGO DE CHILE
11 DE JULIO DE 2012



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

FLUIDOS DE BINGHAM EN CANALETAS RECTANGULARES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FRANCISCO UNDA SURAWSKI

PROFESOR GUÍA:
RAÚL GORMAZ ARANCIBIA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
CARLOS CONCA ROSENDE
RAMÓN FUENTES AGUILAR

SANTIAGO DE CHILE
11 DE JULIO DE 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FRANCISCO UNDA SURAWSKI
FECHA: 11 DE JULIO DE 2012
PROF. GUÍA: RAÚL GORMAZ ARANCIBIA

FLUIDOS DE BINGHAM EN CANALETAS RECTANGULARES

El primer objetivo de este trabajo es desarrollar un algoritmo que resuelva la EDP asociada al modelo de Bingham, en un dominio particular, una canaleta. La dificultad se centra en que este modelo introduce una no linealidad al problema. Como segundo objetivo, una vez obtenido este algoritmo, se quiere validar usando mediciones obtenidas mediante experimentos sobre fluidos que se cree se comportan como el modelo de Bingham indica.

Con esto en mente, se estudia el modelo de Bingham y problemas asociados equivalentes en formulación débil. Esto permite concluir características de las soluciones y también encontrar un algoritmo, que nace de la formulación del problema como punto silla.

El algoritmo resuelve la no linealidad de las ecuaciones de Cauchy mediante una simplificación nacida de la geometría especial de las canaletas, y la no linealidad de Bingham mediante un astuto algoritmo iterativo debido a Glowinski, que resuelve en cada paso un problema lineal. Se utilizó Matlab para el desarrollo de los algoritmos puesto que debemos utilizar matrices y operaciones de matrices de forma repetida, y Matlab está optimizado para ello.

Una vez obtenido un algoritmo, se usan los datos de la tesis de Jorge Martínez, para validar el modelo, y reobtener algunos datos intrínsecos del fluido, a saber, su tensión de fluencia τ y su viscosidad μ y compararlos con las versiones obtenidas experimentalmente. Esto se hace mediante una minimización de cuadrados de la diferencia entre datos locales de la velocidad y la solución obtenida por el algoritmo.

Dedicado a mi familia, que me puso donde estoy.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer primero a mis padres que a través de los años siempre se han esforzado por darme las mejores posibilidades de estudiar. Segundo me gustaría agradecer a mis profesores guías, tanto al profesor Raúl Gormaz, como al profesor Ramón Fuentes, que de la mano me llevaron durante estos meses para completar la memoria y aprender mucho más, y al profesor Carlos Conca, de quien nació la posibilidad de trabajar en este tema, y siempre tuvo su puerta abierta.

Índice general

Índice de figuras	3
Índice de cuadros	6
1. Introducción	7
1.1. Motivación	7
1.2. Alcances y Objetivo General	8
1.3. Objetivos Específicos	8
1.4. Estructura de la Memoria	8
2. Antecedentes	9
2.1. Fluidos de Bingham	9
2.1.1. Modelo	9
2.1.2. Buscando un Modelo adecuado	11
3. Desarrollo Teórico	12
3.1. Reducción a dos dimensiones	12
3.1.1. Formulaciones casi equivalentes	13
3.2. Problemas en una dimensión	16
3.2.1. Problema regularizado en una dimensión	19
3.2.2. Algoritmos de resolución en una dimensión	21
3.3. Resultados tipo dualidad para el problema en dos dimensiones	36

3.3.1.	Algoritmo tipo Uzawa para dos dimensiones	40
3.3.2.	Ejemplos del Algoritmo tipo Uzawa	43
4.	Desarrollo Experimental	51
4.1.	Análisis de datos experimentales	51
4.1.1.	Detalle de experimentos	51
4.1.2.	Cálculo del Caudal	52
4.1.3.	Cálculo mediante el método de Simpson	61
4.1.4.	Cálculo de μ y τ a partir de las velocidades locales	63
5.	Conclusiones	69
6.	Bibliografía	70
A.	Algoritmo Volúmenes Finitos-Método de Newton y Punto Fijo 1-D	I
B.	Algoritmo Predictor Corrector 1-D	VI
C.	Algoritmo Uzawa 2-D	XI
D.	Algoritmo de Minimización de μ y τ	XV
E.	Datos Experimentales	XIX

Índice de figuras

3.1. Velocidad en la tubería, para $\mu = 0.1$, $C = -1$, $R = 1$, $\tau = 0.2$. Se han marcado el radio de la tubería, y el radio donde el fluido cambia de comportamiento.	19
3.2. H_ε para $\varepsilon = 0.2$	20
3.3. Comparación entre la solución exacta y la solución del problema regularizado para $\mu = 0.4$, $\tau = 0.2$, $R = 1$, $C = -1$ y $\varepsilon = 0.5$	21
3.4. Para $\varepsilon = 0.2$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente.	23
3.5. Para $\varepsilon = 0.02$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente.	24
3.6. Para $\varepsilon = 0.002$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente. Se ve que la solución del problema numérico, se superpone a la solución teórica a medida que ε disminuye hacia cero.	25
3.7. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. El valor de aproximación ε se mueve entre 0.2 y 0.002.	26
3.8. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. El valor de aproximación ε se mueve entre 0.2 y 0.002.	27
3.9. La función ϕ_4 , para $N = 20$ y $R = 1$	29
3.10. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_1 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.1}$	33

3.11. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_1 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.3}$	34
3.12. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_2 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.1}$	35
3.13. Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_2 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.3}$	36
3.14. La solución u del algoritmo en el primer paso para el caso de un círculo de radio 1.	44
3.15. La variable dual γ en el primer paso para el caso de un círculo de radio 1.	44
3.16. La solución u del algoritmo en el segundo y último paso.	45
3.17. La variable dual γ en el segundo y último paso.	46
3.18. La solución u del algoritmo en el primer paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	47
3.19. La variable dual γ en el primer paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	47
3.20. La solución u del algoritmo en el segundo paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	48
3.21. La variable dual γ en el segundo paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	49
3.22. La solución u del algoritmo en el quinto y último paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	50
3.23. La variable dual γ en el primer quinto y ultimo paso para el caso de un cuadrado de lado 2.	50
4.1. Caso de una pendiente del 1.2 %, cada punto rojo corresponde a $(Q_{\text{exp}}, Q_{\text{calc}})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.	53
4.2. Caso de una pendiente del 2 %, cada punto rojo corresponde $(Q_{\text{exp}}, Q_{\text{calc}})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.	54
4.3. Caso de una pendiente del 3 %, cada punto rojo corresponde $(Q_{\text{exp}}, Q_{\text{calc}})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.	55
4.4. Caso de una pendiente del 1.2 %, cada punto rojo corresponde $(Fr, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	56

4.5. Caso de una pendiente del 2 %, cada punto rojo corresponde ($Fr, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}}$), para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	57
4.6. Caso de una pendiente del 3 %, cada punto rojo corresponde ($Fr, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}}$), para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	58
4.7. Caso de una pendiente del 1.2 %, cada punto rojo corresponde ($Re_2, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}}$), para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	59
4.8. Caso de una pendiente del 2 %, cada punto rojo corresponde ($Re_2, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}}$), para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	60
4.9. Caso de una pendiente del 3 %, cada punto rojo corresponde ($Re_2, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}}$), para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.	61
4.10. Comparación en los casos de una pendiente de 1.2 % del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de simpson y el método del trapecio.	62
4.11. Comparación en los casos de una pendiente de 2 % del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de simpson y el método del trapecio.	62
4.12. Comparación en los casos de una pendiente de 3 % del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de simpson y el método del trapecio.	63
4.13. Comparamos para todos los casos de 1.2% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	65
4.14. Comparamos para todos los casos de 2% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	65
4.15. Comparamos para todos los casos de 3% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	66
4.16. Comparamos para todos los casos de 1.2% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	66
4.17. Comparamos para todos los casos de 2% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	67
4.18. Comparamos para todos los casos de 3% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.	67
4.19. Mostramos aquí para el experimento J2 los perfiles de velocidad en rojo, generados por los parámetros calculados, y los círculos azules son los valores experimentales de estas velocidades.	68

Índice de cuadros

E.1. Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 1.2 %	XX
E.2. Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 2 %	XXI
E.3. Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 3 %	XXII

Capítulo 1

Introducción

En esta memoria estudiaremos el modelo de fluidos de Bingham fluyendo por una canaleta. Un Bingham es un modelo no Newtoniano de un fluido que ante la ausencia de tensiones altas, se comporta como un sólido. La teoría de los fluidos de Bingham tiene casi cien años. Desde que Eugene C. Bingham (E.C. Bingham U.S. Bureau of Standards Bulletin, 13, 309-353 An Investigation of the Laws of Plastic Flow(1916)) propuso su modelo, se han hecho numerosos avances en la materia y los fluidos de Bingham han sido exitosamente aplicados a diversos materiales, por ejemplo la pasta de dientes, la mayonesa y la lava. En nuestro caso particular, el problema viene motivado por la industria minera, que empieza a encontrarse con este tipo de fluidos en sus relaves, y por esto nace la necesidad de estudiarlos.

1.1. Motivación

En la industria minera, se utilizan relaves para el transporte de material a través de tuberías. Para utilizar estas canaletas, se debe controlar la concentración de la solución. Si el lugar donde se origina el transporte no tiene grandes cantidad de este recurso, o incluso si la tiene, se debe minimizar su utilización. Esto ha llevado a la empresa a utilizar cada vez soluciones más y más espesas, y entonces lo que se modelaba con un fluido de Newton, deja de comportarse de esa forma. El estudio que se realiza en esta memoria es intentar dilucidar si lo que se obtiene en estos relaves espesados se modela correctamente como un fluido del tipo Bingham. Un fluido de Bingham es aquel que además de tener una viscosidad asociada, se comporta como un sólido bajo tensiones pequeñas. Este problema es de gran importancia, pues entenderemos como se deben construir las canaletas que transportan este tipo de fluidos, ahorrando una gran cantidad de agua, energía y recursos. Una vez validado el modelo, sería interesante poder predecir las velocidades y tensiones que se generan dentro de la canaleta, por ejemplo, para evitar que se rompan las válvulas por el así llamado efecto de “golpe de ariete”.

1.2. Alcances y Objetivo General

Nuestro objetivo es estudiar el modelo de Bingham a cabalidad en el caso de una canaleta, y generar un algoritmo que resuelva las ecuaciones en derivadas parciales, para poder comparar con datos obtenidos experimentalmente. Para esto, utilizaremos los datos obtenidos en la tesis de Jorge Martínez, que incluyen velocidades locales dentro de una canaleta rectangular. Esta comparación nos ayudará a validar el modelo de Bingham para los fluidos estudiados en esa tesis, que son los que nos competen.

1.3. Objetivos Específicos

- Encontrar un modelo adecuado para el estudio matemático de los fluidos de Bingham en canaletas
- Construir y comparar algoritmos de resolución de las ecuaciones
- Tratar matemáticamente los datos experimentales, validarlos y normalizarlos
- Comparar los datos obtenidos experimentalmente con los resultados computacionales
- Decidir si el modelo de Bingham es adecuado para los relaves espesados

1.4. Estructura de la Memoria

La estructura utilizada en este documento para exponer el trabajo realizado es la siguiente:

- **Capítulo 1. Introducción:** Descripción del tema, la motivación de éste y los alcances y objetivos del trabajo realizado.
- **Capítulo 2. Antecedentes:** Revisión bibliográfica o antecedentes. En este capítulo se explican los conceptos necesarios para la comprensión y contextualización del trabajo.
- **Capítulo 3. Desarrollo Teórico:** Resultados teóricos utilizados para la resolución numérica. Propuestas e implementaciones de métodos, resultados computacionales.
- **Capítulo 4. Desarrollo Experimental:** Resultados experimentales, validación de datos, utilización práctica del algoritmo y comparación de datos con resultados obtenidos por este.
- **Capítulo 5. Conclusiones:** Conclusiones del trabajo realizado y posibles líneas de trabajos a realizar en el futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Fluidos de Bingham

2.1.1. Modelo

Estudiaremos el modelo de Bingham, que es un modelo de fluidos con una viscosidad y además una tensión de fluencia. El fluido ocupa una región dada por un abierto conexo $Q \subseteq \mathbb{R}^3$. El modelo es el siguiente:

$$(2.1) \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = f + \nabla \sigma \text{ en } Q$$

lo que corresponde a la ecuación de transferencia de momentum de Cauchy, donde ρ es la densidad local del medio, v es la velocidad del fluido, f es una fuerza externa por unidad de volumen, y σ es el tensor de esfuerzos. Notemos que la derivada temporal que aparece es la derivada material, que es dada por

$$(2.2) \quad \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v.$$

Notemos que todos los términos que aparecen en esta ecuación pueden, en principio, depender de las coordenadas espaciales y del tiempo. En el contexto que nos interesa a nosotros, podremos hacer varias simplificaciones. Como el caso que nos interesa es el de una canaleta, será suficiente trabajar con la condición de adherencia al borde

$$(2.3) \quad v = 0 \text{ en } \partial Q$$

En las aplicaciones, consideraremos una canaleta abierta, pero la solución de este problema puede ser encontrada mediante una manipulación astuta del problema, sin usar condiciones de borde diferentes. Para hacer esto, se refleja la canaleta con respecto a la cara abierta, y las fuerzas en ella, por lo que el nuevo dominio sólo tiene condiciones Dirichlet, y la cara inferior resuelve el problema que queremos, pues la cara restante que quedo dentro del fluido cumple la condición

Neumann homogénea por paridad de la solución. Por otro lado, la condición de borde Dirichlet homogénea, nos permitirá encontrar la solución de manera mucho más rápida.

Hasta ahora no hemos más que escrito una ley constitutiva dada por el comportamiento de un fluido, pero la descripción no está completa sin una relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de velocidad de deformación

$$(2.4) \quad D(v)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \right), \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Para los fluidos de Bingham la relación es no lineal:

$$(2.5) \quad \sigma = -pI + \sqrt{2}\tau \frac{D(v)}{|D(v)|} + 2\mu D(v) \text{ en } Q_0(v)$$

donde p es la presión, I es la matriz identidad, μ es la viscosidad, τ es la tensión de fluencia, y

$$(2.6) \quad Q_0(v) = \{x \in Q \mid |D(v)| \neq 0\}$$

con $|\cdot|$ la norma de Frobenius, es decir, si A es una matriz

$$(2.7) \quad |A| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}.$$

Adicionalmente, supondremos que el fluido es incompresible, esto quiere decir que para una partícula fluida moviéndose con velocidad v , la densidad debe permanecer constante. Matemáticamente:

$$(2.8) \quad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\rho = 0.$$

La ecuación de conservación de la masa nos dice que si $V \subseteq Q$, la variación de la masa que contiene es 0. Como la única forma en que puede cambiar la cantidad de masa es por transporte a través de la frontera, tenemos que:

$$\frac{dm}{dt} = - \oint_{\partial V} (\rho v) \cdot dS.$$

Por otro lado

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

y como V es arbitrario

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \text{ en } Q$$

Esto se puede reescribir como

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0$$

y por lo tanto una condición equivalente a la incompresibilidad, y la que usaremos de aquí en adelante es

$$(2.9) \quad \nabla \cdot v = 0.$$

2.1.2. Buscando un Modelo adecuado

No resolveremos este problema en toda su generalidad, sino que haremos las siguientes suposiciones.

1. La densidad es una constante que no depende ni de la variable espacial ni temporal.
2. El fluido es incompresible.
3. La canaleta es de sección constante y paralela a uno de los ejes coordenados.
4. El fluido se encuentra en estado estacionario.
5. La fuerza externa es un dato conocido.

Capítulo 3

Desarrollo Teórico

3.1. Reducción a dos dimensiones

Bajo las suposiciones de la sección anterior, podemos hacer una reducción de la dimensionalidad del problema. Este es el caso de una canaleta de la forma $Q = \Omega \times \mathbb{R}$, con Ω un círculo. Usaremos la notación canónica $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supondremos ahora que la solución tiene la forma $v = (0, 0, u)$. En este caso, la condición de incompresibilidad se traduce en

$$(3.1) \quad \nabla \cdot v = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

y así, $u = u(x, y)$. El tensor de velocidades de deformación tiene la forma

$$(3.2) \quad D(v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

y además, si llamamos

$$(3.3) \quad \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$(3.4) \quad |D(v)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana. Por otro lado, la derivada material (2.2) queda

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Si suponemos que

$$f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

y reemplazamos en (2.5) y (2.1), obtenemos tres ecuaciones

$$(3.5) \quad 0 = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\|\nabla u\|} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(3.6) \quad 0 = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\|\nabla u\|} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$(3.7) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\|\nabla u\|} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\|\nabla u\|} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

que son válidas en

$$Q_0(v) = Q_0(u) = \{(x, y, z) \in Q \mid \|\nabla u\| \neq 0\}.$$

En aplicaciones, la única derivada que podemos conocer de p es la derivada con respecto a la coordenada longitudinal de la canaleta. Por esto las primeras dos ecuaciones son útiles para conocer cómo se relaciona la fuerza externa con estos gradientes. La ecuación más interesante es la última, que se puede reescribir

$$(3.8) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \tau \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \mu \Delta u \text{ en } \Omega_0(u)$$

o en el caso estacionario

$$(3.9) \quad -\mu \Delta u = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \tau \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \text{ en } \Omega_0(u)$$

donde

$$(3.10) \quad \Omega_0(u) = \{(x, y) \in \Omega \mid \|\nabla u\| \neq 0\}$$

3.1.1. Formulaciones casi equivalentes

Veremos formulaciones equivalentes en el sentido débil al problema estacionario en dos dimensiones derivado en la sección anterior, y estas formulaciones nos permitirán concluir resultados de existencia y unicidad de las soluciones. Notemos, además, que algunos algoritmos se basan en estas formulaciones equivalentes. La ecuación con la que partimos es

$$-\mu \Delta u = f + \tau \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \text{ en } \Omega_0(u)$$

donde f es una función conocida, y τ y μ son constantes positivas. Las condiciones de borde son

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

La formulación débil de este problema corresponde a encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(P) \quad \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \tau \int_{\Omega} \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_0(u)).$$

Notemos que en este contexto, no tiene sentido la definición que habíamos dado de $\Omega_0(u)$, por lo que usaremos

$$(3.11) \quad H_0^1(\Omega_0(u)) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \text{supp } \nabla v \subset \text{supp } \nabla u\}$$

donde

$$(3.12) \quad \text{supp } \nabla v = \bigcup \left\{ U \subset \Omega \mid \forall \phi \in (\mathcal{C}_0^\infty(U))^2 \int_U \phi \nabla v dx = 0 \right\}$$

Veamos que la única solución del problema de minimización

$$(Q) \quad \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla u| dx - \int_{\Omega} f u dx$$

es solución de la formulación débil. Para esto definamos los problemas aproximados

$$(P_\varepsilon) \quad \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \tau \int_{\Omega} \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$(Q_\varepsilon) \quad \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2} dx - \int_{\Omega} f u dx.$$

Notemos primero que el problema (Q_ε) tiene una única solución. En efecto, el funcional

$$L_\varepsilon(u) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2} dx - \int_{\Omega} f u dx$$

es convexo, pues $f(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ lo es. Más aún, es estrictamente convexo, por lo que si tiene solución, ésta será única. Además, claramente esta función es coerciva y continua, por lo que el problema de minimización admite una única solución. Notemos que esta función para $\varepsilon > 0$ es derivable y la solución está caracterizada por las condiciones de primer orden. Es decir, u_ε es la solución de (Q_ε) ssi

$$DL_\varepsilon(u_\varepsilon)[v] = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Un cálculo simple nos muestra que

$$DL_\varepsilon(u)[v] = \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + g \int_{\Omega} \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}} dx - \int_{\Omega} f v dx$$

Así, u_ε es solución de (Q_ε) ssi es solución de (P_ε) , y por lo tanto (P_ε) tiene una solución única. Consideremos entonces esta familia de soluciones $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, y notemos que es una familia acotada. En efecto, si tomamos $v = u_\varepsilon$ en la condición de primer orden, obtenemos

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\sqrt{|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2}} dx = \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx$$

y por lo tanto si despreciamos el segundo término

$$\mu \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donde en la primera desigualdad hemos usado Cauchy-Schwarz, y en la segunda la desigualdad de Poincaré para dominios acotados. Por lo tanto

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

y como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y por lo tanto reflexivo, debe existir $\{\varepsilon_n\}_n$ tendiendo a cero y $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ en la topología débil de $H_0^1(\Omega)$.

Veamos ahora que u es solución de (P). Para alivianar un poco la notación, llamaremos simplemente Ω_1 a $\Omega_1(u)$. Tomemos $v \in H_0^1(\Omega_0(u)) \subset H_0^1(\Omega)$, y veamos qué pasa cuando tratamos de pasar al límite en (P_ε) .

Primero, notemos que la convergencia $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$, implica que $\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u$ en $(L^2(\Omega))^2$, y por lo tanto

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon_n} \nabla v dx = \int_{\Omega_1} \nabla u_{\varepsilon_n} \nabla v dx \rightarrow \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx.$$

Por otro lado, dado que la inclusión $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, tenemos que para una subsucesión, que llamaremos igual para no recargar la notación, $\nabla u_{\varepsilon_n}(x) \rightarrow \nabla u(x)$ c.t.p. Y por lo tanto

$$\frac{\nabla u_{\varepsilon_n}(x) \nabla v}{\sqrt{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \varepsilon_n^2}} \rightarrow \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

como además tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{|\nabla u_{\varepsilon_n} \nabla v|}{\sqrt{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \varepsilon_n^2}} \leq |\nabla v|,$$

y por el teorema de convergencia dominada,

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla u_{\varepsilon_n} \nabla v}{\sqrt{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \varepsilon_n^2}} dx = \int_{\Omega_1} \frac{\nabla u_{\varepsilon_n} \nabla v}{\sqrt{|\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 + \varepsilon_n^2}} dx \rightarrow \int_{\Omega_1} \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} dx.$$

En conclusión, tenemos que u satisface (P). Ahora veamos que u también satisface (Q). La función u_{ε_n} satisface

$$\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}| dx - \int_{\Omega} f u_{\varepsilon_n} dx \leq \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla v|^2 + \varepsilon_n^2} dx - \int_{\Omega} f v dx$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, por la condición de mínimo, junto a que $|x| \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$. El lado derecho converge a

$$\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla v| dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

por convergencia monótona, por ejemplo. Por otro lado, el funcional del lado izquierdo, L_0 , es débil semicontinuo inferior. En efecto, este funcional, como habíamos visto, es continuo y convexo, y por lo tanto, semicontinuo inferior. Así, se tiene

$$L_0(u) \leq \liminf_n L_0(u_{\varepsilon_n}) \leq \liminf_n L_{\varepsilon_n}(v) = \lim_n L_{\varepsilon_n}(v) = L_0(v).$$

Por lo tanto, u resuelve el problema (Q). Así, hemos probado que la única solución del problema (Q) es solución de (P). Falta ver que el problema (P) tiene solución única, pues todavía es posible que este problema tenga múltiples soluciones.

Existencia y Unicidad de la solución

Ya hemos visto que el problema (P) tiene solución. Veamos que (P) tiene solución única, si asumimos que $\text{supp } u = \text{supp } \bar{u}$. Para esto, supongamos que tenemos dos soluciones de (P), u y \bar{u} . En este caso, podemos afirmar restando las ecuaciones dadas por (P) que

$$\mu \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla \bar{u}) \nabla v dx + \tau \int_{\Omega} \frac{\nabla u \nabla v}{|\nabla u|} dx - \tau \int_{\Omega} \frac{\nabla \bar{u} \nabla v}{|\nabla \bar{u}|} dx = 0.$$

Ahora notemos que $\text{supp } \nabla(u - \bar{u}) \subset \text{supp } \nabla u \cap \text{supp } \nabla \bar{u} = \text{supp } \nabla u = \text{supp } \nabla \bar{u}$, y por lo tanto podemos tomar $v = u - \bar{u}$. En este caso obtenemos:

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \bar{u}|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \bar{u}| |\nabla u|^2 - |\nabla \bar{u}| \nabla u \nabla \bar{u} - |\nabla u| \nabla u \nabla \bar{u} + |\nabla u| |\nabla \bar{u}|^2}{|\nabla u| |\nabla \bar{u}|} \right) dx = 0$$

Que se puede reescribir como

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \bar{u}|^2 dx + \tau \int_{\Omega} (\nabla u - \nabla \bar{u}) \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - \frac{\nabla \bar{u}}{|\nabla \bar{u}|} \right) dx = 0$$

Notemos por el término en la segunda integral es positivo, pues es igual a

$$|\nabla u| + |\nabla \bar{u}| - \frac{\nabla u \nabla \bar{u}}{|\nabla u|} - \frac{\nabla u \nabla \bar{u}}{|\nabla \bar{u}|} \geq |\nabla u| + |\nabla \bar{u}| - \frac{|\nabla u| |\nabla \bar{u}|}{|\nabla u|} - \frac{|\nabla u| |\nabla \bar{u}|}{|\nabla \bar{u}|} \geq 0$$

y por lo tanto $\nabla u = \nabla \bar{u}$ en Ω . Pero puesto que $u, \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$, se debe tener que $u = \bar{u}$ en $H_0^1(\Omega)$. Así, nos falta ver que $\text{supp } u = \text{supp } \bar{u}$. Para ver el resultado completo se puede consultar [2].

3.2. Problemas en una dimensión

Los problemas que queremos abordar admiten razonablemente las suposiciones que hemos hecho y permiten la reducción a dos dimensiones. Si queremos resolver el problema en canaletas

rectangulares, no podemos reducir más la dimensionalidad del problema. Sin embargo, el estudio del problema en una dimensión sigue siendo interesante tanto teóricamente como en términos prácticos. Por un lado, en una dimensión se puede derivar una solución explícita del problema. Por otro lado si construimos algoritmos que resuelvan el problema en una dimensión, podemos primero chequear la solución encontrada algorítmicamente con la solución teórica y así verificar la correctitud de nuestros algoritmos. Luego podemos intentar extender estos algoritmos al problema en dos dimensiones.

Nuestro punto de partida es la ecuación (3.8) junto con la condición de borde

$$(3.13) \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

de la condición de borde (2.3) del problema original. Para poder resolver, buscaremos una solución en régimen permanente, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

y supondremos que

$$\frac{\partial p}{\partial z} - f_z = C \in \mathbb{R}.$$

La ecuación queda

$$(3.14) \quad \tau \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) + \mu \Delta u = C$$

y buscaremos una solución

$$w(r) = u(x, y).$$

En este caso, la ecuación se reduce a

$$(3.15) \quad \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = C \text{ para } r \in \Omega_0(w)$$

donde

$$\Omega_0(w) = \left\{ r \in (0, R) \mid \frac{\partial w}{\partial r} \neq 0 \right\}$$

y donde R es el radio del círculo Ω . La condición de borde se reduce a

$$(3.16) \quad w(R) = 0.$$

Por otro lado se debe tener que

$$(3.17) \quad \frac{\partial w}{\partial r}(0) = 0,$$

pues w es par. La ecuación se puede reescribir como

$$(3.18) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau r \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} + \mu r \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{Cr^2}{2} \right) = 0 \text{ para } r \in \Omega_0(w)$$

y por lo tanto

$$(3.19) \quad \tau \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} + \mu \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{Cr}{2} = \frac{A}{r} \text{ para } r \in \Omega_0(w)$$

donde $A \in \mathbb{R}$ es una constante desconocida. Pero esto significa que

$$(3.20) \quad \mu \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| = \left| \frac{A}{r} + \frac{Cr}{2} - \tau \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} \right| \geq \frac{|A|}{r} - \left| \frac{Cr}{2} - \tau \right| \rightarrow +\infty \text{ si } A \neq 0$$

Como $\frac{\partial w}{\partial r}$ es una cantidad física, debemos esperar que sea acotada cerca de 0. Así $A = 0$, y tenemos que

$$(3.21) \quad \tau \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} + \mu \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{Cr}{2} = 0 \text{ para } r \in \Omega_0(w)$$

Notemos que

$$(3.22) \quad \text{sgn} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) = \text{sgn} \left(\tau \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|} + \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \text{sgn} \left(\frac{Cr}{2} \right) = \text{sgn}(C)$$

Podemos orientar las canaletas en el sentido del flujo y suponer $C \leq 0$. Con esto, $\frac{\partial w}{\partial r} \leq 0$, y por lo tanto

$$(3.23) \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{Cr}{2\mu} + \frac{\tau}{\mu} \text{ para } r \in \Omega_0(w).$$

Así, podemos calcular explícitamente $\Omega_0(w)$ por la fórmula

$$(3.24) \quad \frac{Cr}{2\mu} + \frac{\tau}{\mu} < 0$$

obteniendo

$$(3.25) \quad \Omega_0(w) = \left(-\frac{2\tau}{C}, R \right)$$

con la convención $\Omega_0(w) = \emptyset$ si $-\frac{2\tau}{C} \geq R$. Entonces si $r \in \left(-\frac{2\tau}{C}, R \right)$,

$$(3.26) \quad w(R) - w(r) = \int_r^R \frac{\partial w}{\partial r}(s) ds = \int_r^R \left(\frac{Cs}{2\mu} + \frac{\tau}{\mu} \right) ds = \frac{C}{4\mu} (R^2 - r^2) + \frac{\tau}{\mu} (R - r),$$

y gracias a la condición de borde

$$(3.27) \quad w(r) = \frac{C}{4\mu} (r^2 - R^2) + \frac{\tau}{\mu} (r - R) \text{ si } r \in \left(-\frac{2\tau}{C}, R \right).$$

Como en el resto del espacio se tiene $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$, tenemos que para $r < -\frac{2\tau}{C}$,

$$(3.28) \quad w(r) = \frac{C}{4\mu} \left(\left(-\frac{2\tau}{C} \right)^2 - R^2 \right) + \frac{\tau}{\mu} \left(-\frac{2\tau}{C} - R \right) = -\frac{(2\tau + CR)^2}{4\mu C}$$

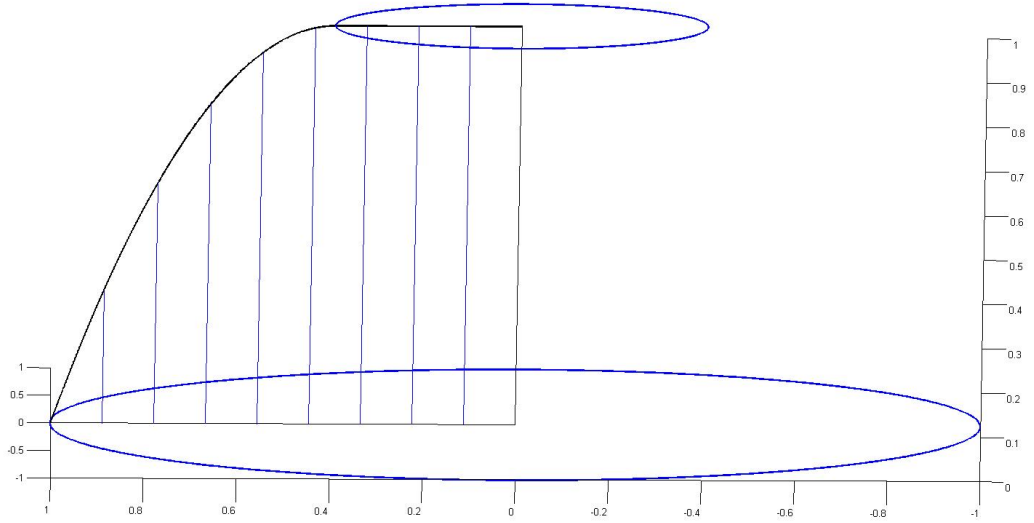


Figura 3.1: Velocidad en la tubería, para $\mu = 0.1$, $C = -1$, $R = 1$, $\tau = 0.2$. Se han marcado el radio de la tubería, y el radio donde el fluido cambia de comportamiento.

Ahora que tenemos una solución explícita, nos volcamos al problema de encontrar una solución de manera algorítmica. Antes de elegir un algoritmo e implementarlo, estudiamos un problema aproximado, que resulta de regularizar el anterior.

3.2.1. Problema regularizado en una dimensión

Notemos que el problema unidimensional se puede escribir como

$$(3.29) \quad \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = C \text{ para } r \in \Omega_0(w),$$

donde sgn es la función signo, definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Justamente la complicación de este problema se encuentra en esa función, pues no está definida en 0, y por eso debemos aplicarla sólo en algunos puntos. Notemos que no hay problema en derivar la función sgn pues en $\Omega_0(w)$ esta función es constante, suponiendo que $\frac{\partial w}{\partial r}$ es continua. Lo que haremos es cambiar la función sgn por una función H_ε , que la aproxime pero que este definida en todo \mathbb{R} , y que sea por lo menos continua. Resolveremos la familia de problemas indexada por ε .

$$(3.30) \quad \tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{Cr}{2} = \frac{A}{r} \text{ para } r \in \Omega$$

Si pedimos que $|H_\varepsilon(x)| \leq 1$, podemos, por el mismo argumento que en la parte anterior, concluir que $A = 0$ y por lo tanto

$$(3.31) \quad \tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} - \frac{Cr}{2} = 0 \text{ para } r \in \Omega$$

En este caso, no necesitamos restringir el dominio, pues H_ε está definida en todo el espacio. Resolveremos esto para el caso particular de

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -\varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon < x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon \end{cases}$$

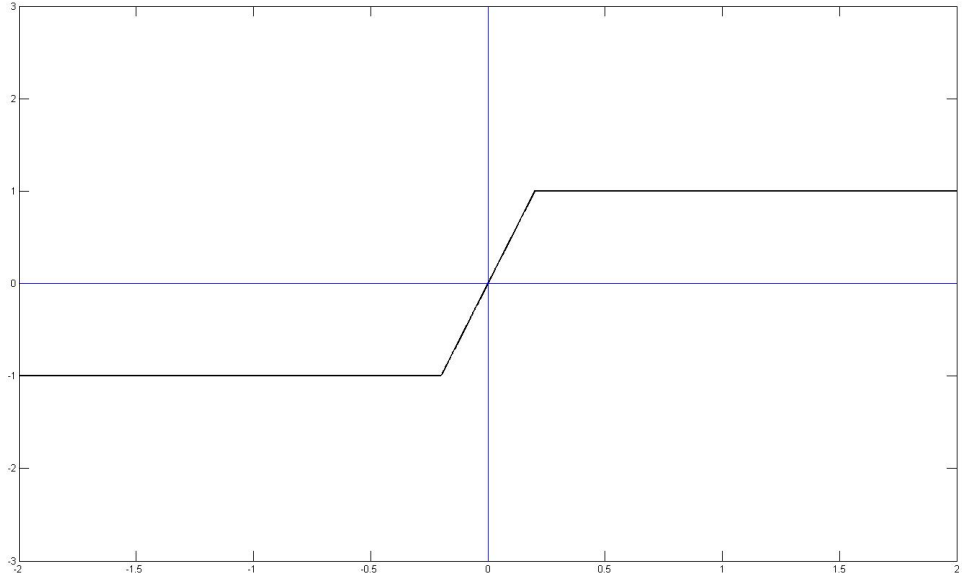


Figura 3.2: H_ε para $\varepsilon = 0.2$.

En este caso, en $\{r \in (0, R) \mid |\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r}| \leq \varepsilon\}$ tenemos que

$$(3.32) \quad \left(\frac{\tau}{\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} = \frac{Cr}{2}$$

y por lo tanto

$$(3.33) \quad 0 \leq r \leq \frac{2}{C} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} + \mu \right) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} = \frac{2}{|C|} \left(\frac{\tau}{\varepsilon} + \mu \right) \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right| \leq \frac{2}{|C|} (\tau + \mu \varepsilon)$$

Para $r > \frac{2}{|C|}(\tau + \mu\varepsilon)$, tenemos que la solución w_ε se comporta igual que antes por lo que

$$(3.34) \quad w_\varepsilon(r) = \frac{C}{4\mu}(r^2 - R^2) + \frac{\tau}{\mu}(r - R) \text{ si } r \in \left[-\frac{2(\tau + \mu\varepsilon)}{C}, R\right)$$

y ahora podemos calcular para $r \leq -\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)$

$$(3.35) \quad w_\varepsilon\left(-\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)\right) - w_\varepsilon(r) = \int_r^{-\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r}(s) ds = \frac{C\varepsilon}{2(\tau + \varepsilon\mu)} \int_r^{-\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)} s ds$$

y por lo tanto

$$(3.36) \quad w_\varepsilon(r) = w_\varepsilon\left(-\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)\right) + \frac{C\varepsilon r^2}{4(\tau + \varepsilon\mu)} - \frac{\varepsilon(\tau + \mu\varepsilon)}{C} \text{ si } r \in \left[0, -\frac{2}{C}(\tau + \mu\varepsilon)\right)$$

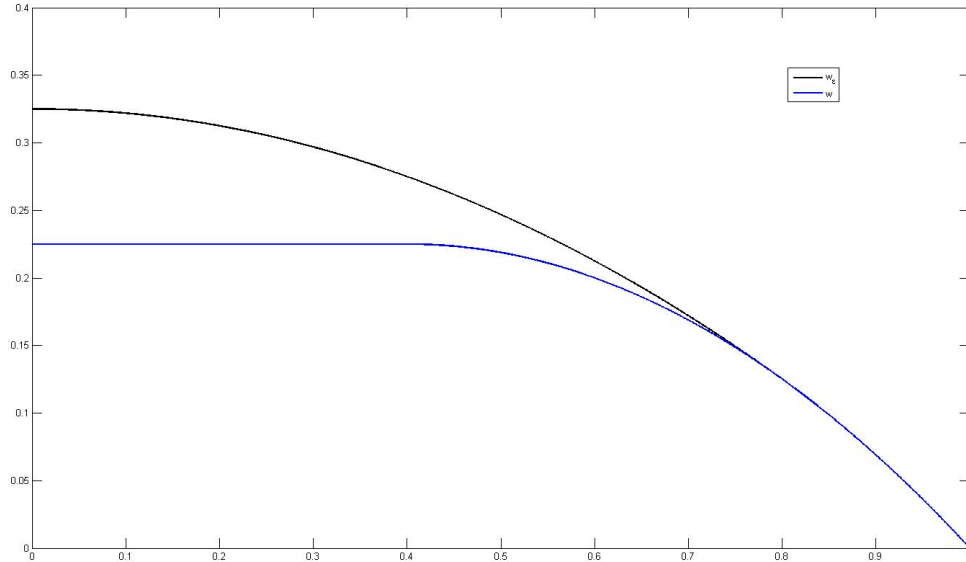


Figura 3.3: Comparación entre la solución exacta y la solución del problema regularizado para $\mu = 0.4$, $\tau = 0.2$, $R = 1$, $C = -1$ y $\varepsilon = 0.5$.

3.2.2. Algoritmos de resolución en una dimensión

Volúmenes finitos

Definimos una malla equiespaciada en $[0, R]$ de $N + 1$ puntos. Definimos $h = \frac{R}{N}$, $x_k = hk$ y $w_k = w_\varepsilon(hk)$ para $k = 0, 1, \dots, N$. Definimos la variable auxiliar $r_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$, y para cada $j \in$

$\{1, \dots, N-1\}$ integramos

$$\int_{r_j}^{r_{j+1}} r C dr = \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} \right) \right) dr$$

de lo cual obtenemos

$$\frac{C}{2} (r_{j+1}^2 - r_j^2) = r_{j+1} \tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_{j+1}) \right) + r_{j+1} \mu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_{j+1}) - r_j \tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_j) \right) - r_j \mu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_j).$$

Las condiciones de borde nos dicen por un lado que $w_N = 0$ pues

$$w_N = w_\varepsilon(Nh) = w_\varepsilon(R) = 0$$

y $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r}(0) = 0$ no se utiliza, pues desaparece al integrar, porque va multiplicada por $r_0 = 0$. Así la primera ecuación queda

$$\frac{C}{2} r_1^2 = r_1 \tau H_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_1) \right) + r_1 \mu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r} (r_1).$$

Aproximando $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial r}(r_j)$ por $\frac{w_j - w_{j-1}}{h}$, tenemos un problema discretizado para el vector w . Definimos el vector $b \in \mathbb{R}^{N+1}$, $A \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$, y $F(w) \in \mathbb{R}^{N+1}$ de la manera siguiente:

$$b_j = \begin{cases} \frac{C}{2} r_1^2 & : j = 0 \\ \frac{C}{2} (r_{j+1}^2 - r_j^2) & : j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & : j = N \end{cases}$$

$$A_{ij} = \frac{\mu}{2} \begin{cases} 2j-1 & : j = i-1 \\ -4j & : j = i \\ 2j+1 & : j = i+1 \\ 0 & : \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F_j(w) = \begin{cases} r_1 \tau H_\varepsilon \left(\frac{w_1 - w_0}{h} \right) & : j = 0 \\ r_{j+1} \tau H_\varepsilon \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right) - r_j \tau H_\varepsilon \left(\frac{w_j - w_{j-1}}{h} \right) & : j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & : j = N \end{cases}$$

Y por lo tanto nuestro problema discretizado es encontrar $w \in \mathbb{R}^{N+1}$ tal que

$$b = F(w) + Aw$$

Aplicaremos el método de Newton, es decir, en el paso k resolveremos:

$$b = F(w_k) + DF(w_k)\delta + Aw_k + A\delta_k$$

para encontrar

$$\delta_k = (DF(w_k) + A)^{-1} (b - F(w_k) - Aw_k)$$

y entonces actualizamos el valor de $w_{k+1} = w_k + \delta_k$. Para eso, necesitamos calcular $DF(w)$:

$$DF_{ij}(w) = \begin{cases} r_1 \tau H'_\varepsilon \left(\frac{w_1 - w_0}{h} \right) \left(\frac{\delta_{i,1} - \delta_{i,0}}{h} \right) & : j = 0 \\ r_{j+1} \tau H'_\varepsilon \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right) \left(\frac{\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}}{h} \right) - r_j \tau H'_\varepsilon \left(\frac{w_j - w_{j-1}}{h} \right) \left(\frac{\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}}{h} \right) & : j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & : j = N \end{cases}$$

Usando este método con la aproximación

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -\varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon < x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon \end{cases}$$

y las constantes: $C = -1$, $\tau = 0.2$, $\mu = 1$, $R = 1$, $N = 1000$, obtenemos los siguientes resultados:

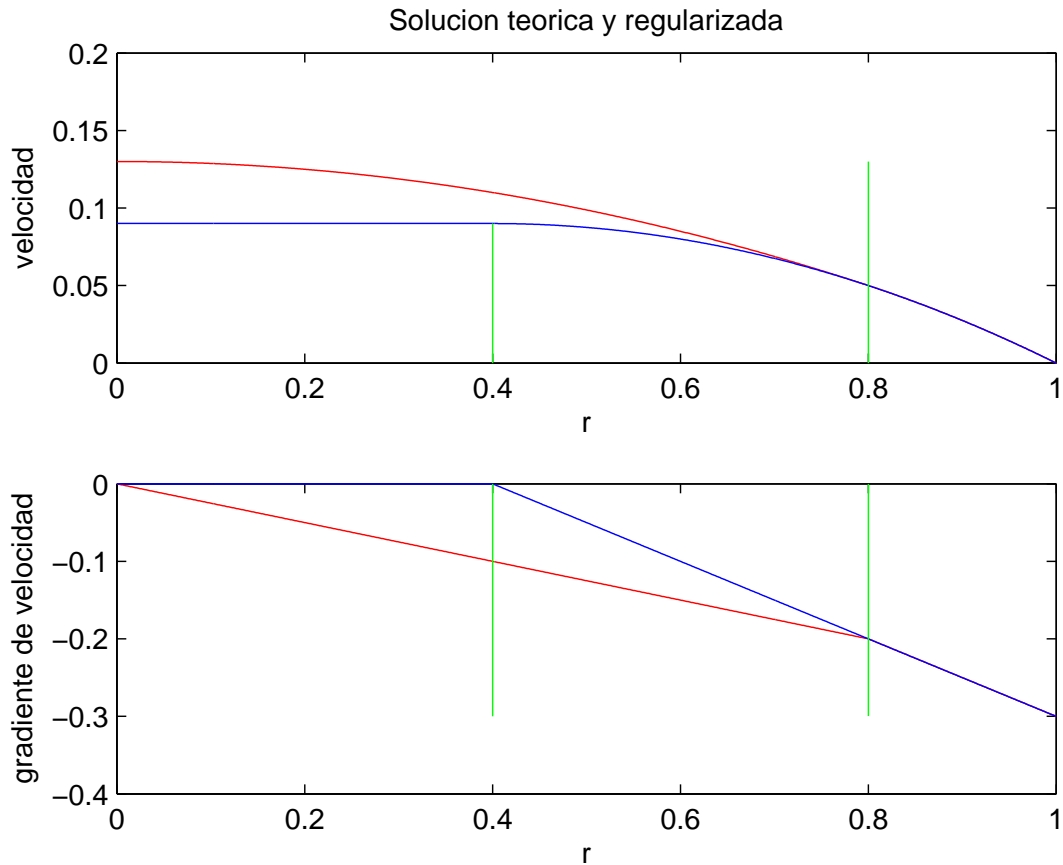


Figura 3.4: Para $\varepsilon = 0.2$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente.

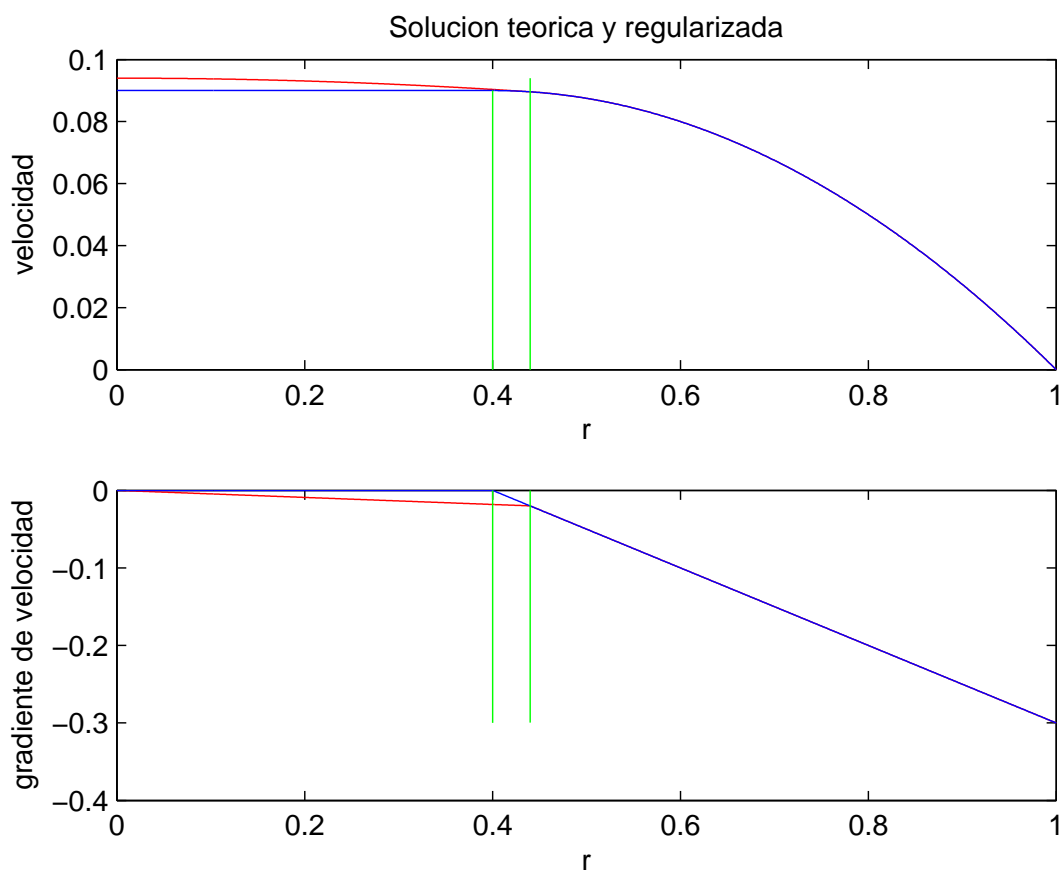


Figura 3.5: Para $\varepsilon = 0.02$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente.

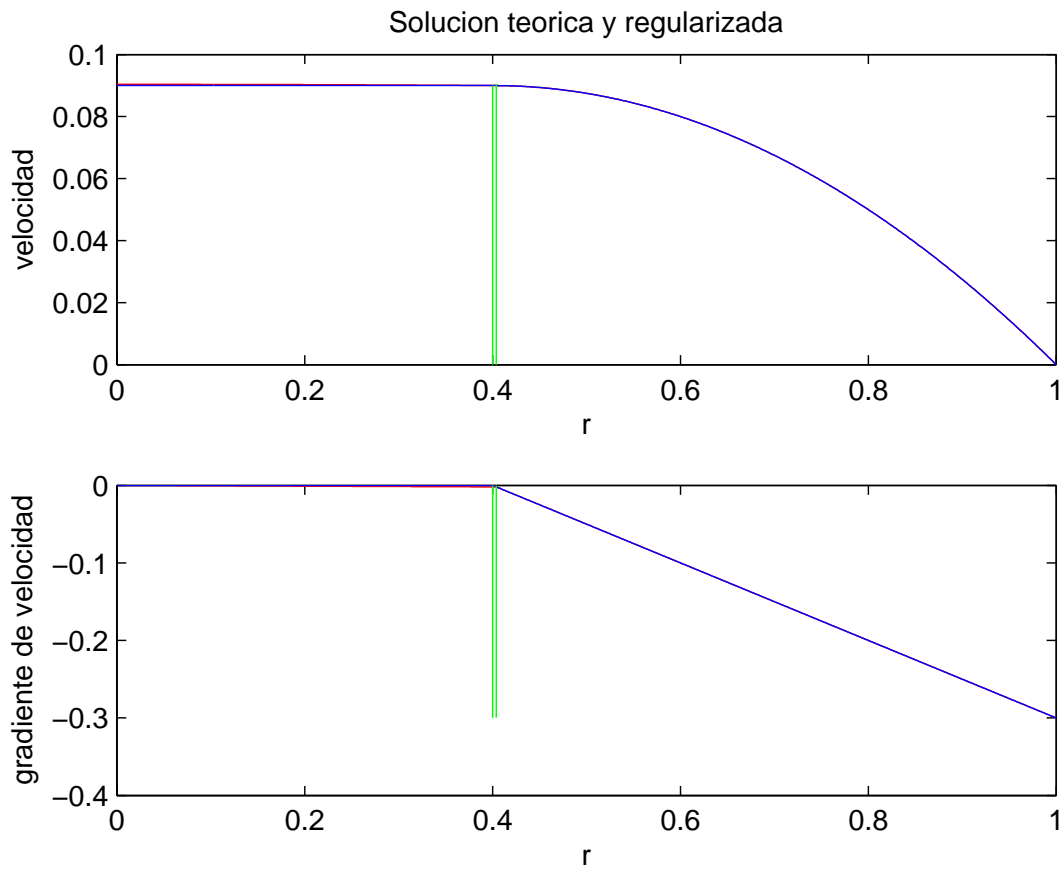


Figura 3.6: Para $\varepsilon = 0.002$. Obtenemos como solución la función en rojo. La función en azul es la solución teórica sin regularizar. Los radios marcados en verde son de izquierda a derecha donde cambia el comportamiento de la solución teórica y donde cambia el comportamiento de la solución regularizada teórica respectivamente. Se ve que la solución del problema numérico, se superpone a la solución teórica a medida que ε disminuye hacia cero.

Usando el mismo método, pero usando ahora

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & : x \leq -\varepsilon \\ \frac{x}{2\varepsilon} \left(3 - \frac{x^2}{\varepsilon^2} \right) & : -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & : \varepsilon \leq x \end{cases}$$

tenemos que la solución numérica se acerca a la solución teórica de la siguiente manera:

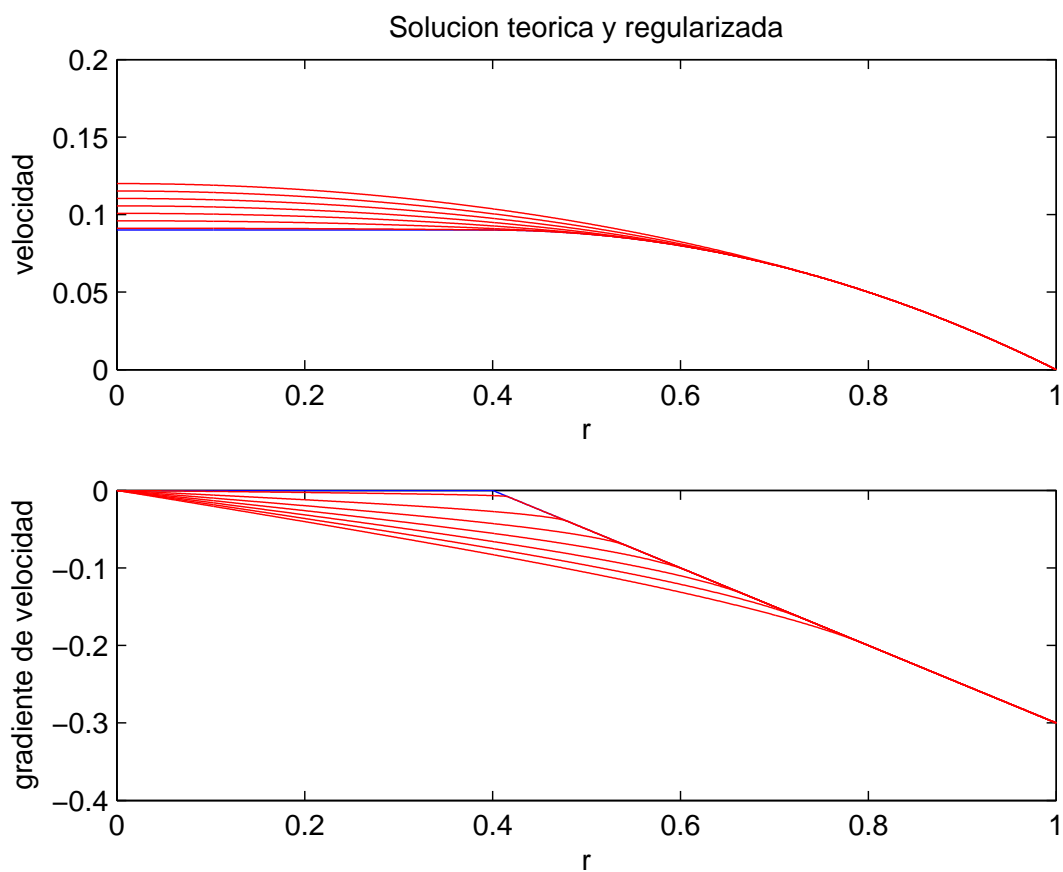


Figura 3.7: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. El valor de aproximación ε se mueve entre 0.2 y 0.002.

Gracias a que H_ε se pega suavemente a -1 y a 1 , se obtiene lo mismo que en la derivada de w_ε . Usando

$$H_\varepsilon(x) = \frac{x}{(\varepsilon^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

obtenemos que la figura anterior cambia a

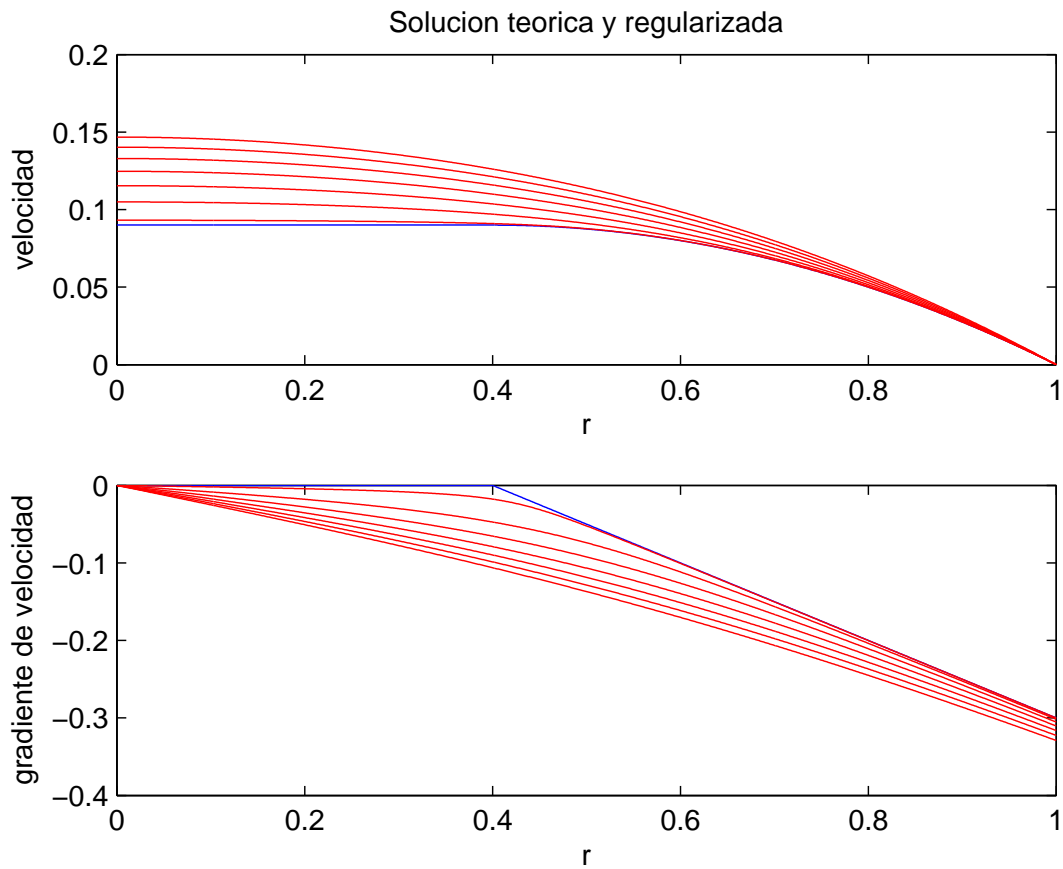


Figura 3.8: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. El valor de aproximación ε se mueve entre 0.2 y 0.002.

La aproximación también converge a lo deseado, pero notamos que $H_\varepsilon(x) \neq \frac{x}{|x|}$, y lo mismo ocurre cuando comparamos w_ε con w , a diferencia de los casos anteriores, donde se tenía igualdad en una zona mayor.

Método Predictor-Corrector

El inconveniente del algoritmo anterior es que para cada $\varepsilon > 0$ resolvemos un problema, que no es el que queremos realmente resolver, es decir el caso $\varepsilon = 0$. La idea del siguiente algoritmo es resolver el problema para $\varepsilon > 0$ parcialmente y utilizar esta solución parcial para comenzar el problema para un ε' entre 0 y ε , y así sucesivamente. Es decir, trataremos de diagonalizar el método anterior, pues no tiene sentido resolver el problema completamente para un ε fijo, ya que esa no es la solución al problema que buscamos. Lo que sí tiene sentido es usar las aproximaciones de la solución para un ε para encontrar mejores aproximaciones con ε más pequeño. Usaremos la formulación equivalente (Q) del problema:

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla u| dx - C \int_{\Omega} u dx.$$

Para el caso radial que estamos estudiando, el problema nos queda

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mu}{2} \int_0^R \left(\frac{du}{dr} \right)^2 r dr + \tau \int_0^R \left| \frac{du}{dr} \right| r dr - C \int_0^R u r dr$$

Para resolver este problema, aproximaremos la función valor absoluto por una función $H(\cdot, \varepsilon)$, donde ε es un parámetro de regularización. Así obtenemos el siguiente problema:

$$(3.37) \quad \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mu}{2} \int_0^R \left(\frac{du}{dr} \right)^2 r dr + \tau \int_0^R H \left(\frac{du}{dr}, \varepsilon \right) r dr - C \int_0^R u r dr$$

Ahora, para un N fijo, discretizamos este problema, definiendo $x_i = \frac{Ri}{N}$ y buscando funciones de la forma

$$u(r) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i \phi_i(r)$$

donde $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ y $\phi_i[x_j, x_{j+1}]$ es lineal afín para todo $j = 0, \dots, N-1$.

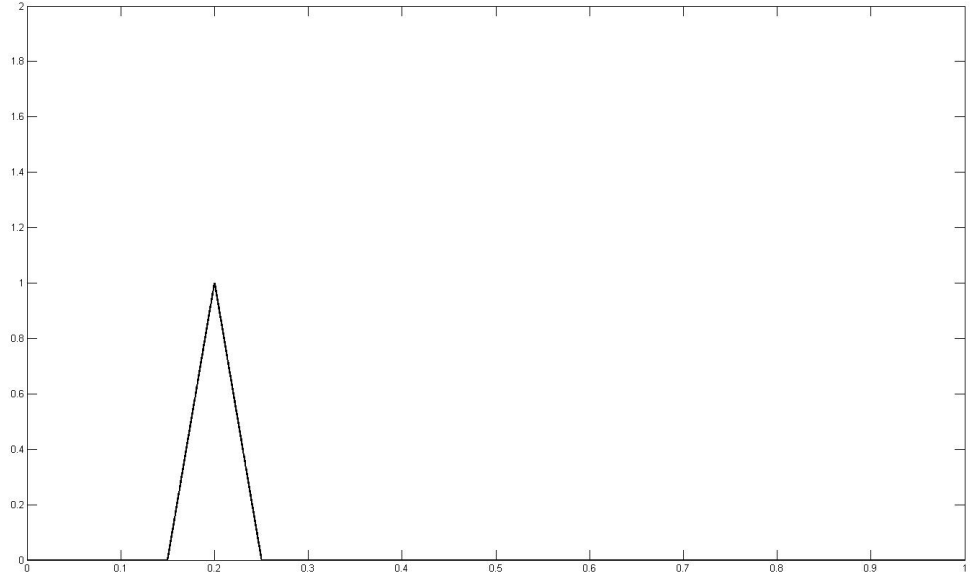


Figura 3.9: La función ϕ_4 , para $N = 20$ y $R = 1$.

Al reemplazar esta función en (3.37), obtenemos para el primer término

$$\int_0^R \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i \phi_i'(r) \right)^2 r dr = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_i u_j \int_0^R \phi_i'(r) \phi_j'(r) r dr$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^R \phi_0'(r) \phi_0'(r) r dr &= \frac{1}{h^2} \int_0^h r dr = \frac{1}{2} \\ \int_0^R \phi_i'(r) \phi_i'(r) r dr &= \frac{1}{h^2} \int_{x_i-h}^{x_i+h} r dr = \frac{1}{h^2} \frac{(x_i+h)^2 - (x_i-h)^2}{2} = \frac{2x_i}{h} = 2i \text{ para } > 0 \\ \int_0^R \phi_i'(r) \phi_{i+1}'(r) r dr &= -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r dr = -\frac{1}{h^2} \frac{(x_i+h)^2 - x_i^2}{2} = -\frac{x_i}{h} - \frac{1}{2} = -\left(i + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

y el resto de los términos son 0. Para calcular el tercer término

$$\int_0^{RN-1} \sum_{i=0}^{N-1} u_i \phi_i(r) r dr = \sum_{i=0}^{N-1} u_i \int_0^R \phi_i(r) r dr$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_0^R \phi_0(r) dr &= \int_0^h \frac{h-r}{h} r dr = \frac{h^2}{2} - \frac{1}{h} \frac{h^3}{3} = \frac{h^2}{6} \\
\int_0^R \phi_i(r) dr &= \int_{h(i-1)}^{hi} \frac{r-h(i-1)}{h} r dr + \int_{hi}^{h(i+1)} \frac{h(i+1)-r}{h} r dr \\
&= \int_{h(i-1)}^{hi} \left(\frac{r-h(i-1)}{h} + \frac{hi-r}{h} \right) r dr + \int_{hi}^{hi} (hi-r) dr \\
&= \frac{h^2}{2} (i^2 - (i-1)^2) + h^2 i - \frac{1}{2} h^2 (i^2 - (i-1)^2) \\
&= h^2 i \text{ para } i > 0.
\end{aligned}$$

Para el término del medio, calculamos

$$\int_0^R H \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i \phi_i'(r), \varepsilon \right) r dr = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{hj}^{h(j+1)} H \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h}, \varepsilon \right) r dr = \frac{h^2}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1) H \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{h}, \varepsilon \right)$$

donde $u_N = 0$ por definición. Así, definiendo

$$G(u, \varepsilon) = \frac{\tau h^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (2i+1) H \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \varepsilon \right)$$

$$A_{ii} = \begin{cases} \frac{\mu}{2} & : i = 0 \\ 2\mu i & : i = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{\mu}{2} (2i+1)$$

$$b_i = \begin{cases} \frac{Ch^2}{6} & : i = 0 \\ Ch^2 i & : i = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

donde la matriz A es tridiagonal y simétrica, el problema queda

$$\min_{u \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} u^T A u + G(u, \varepsilon) - b^T u.$$

Supondremos que la aproximación H es convexa y C^2 en la primera variable, y C^1 en la variable ε . Definiendo

$$F(u, \varepsilon) = \frac{1}{2} u^T A u + G(u, \varepsilon) - b^T u$$

notamos ahora que la ecuación

$$\nabla_u F(u, \varepsilon) = r$$

tiene solución única para todo $r \in \mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$, pues es equivalente a

$$\nabla_u (F(u, \varepsilon) - r \cdot u) = 0$$

donde $F(\cdot, \varepsilon)$ es una función estrictamente convexa.

Así, existe una función $u(\varepsilon, r)$, que está definida por la ecuación anterior y

$$\nabla_u F(u(\varepsilon, r), \varepsilon) = r$$

Nuestro objetivo es encontrar $u(0, 0)$. Notemos que

$$u(\varepsilon_1, r_1) = u(\varepsilon_2, r_2) + \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_2, r_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \nabla_r u(\varepsilon_2, r_2)(r_1 - r_2) + O(\|r_1 - r_2\|^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2)$$

Derivando implícitamente la ecuación anterior, tenemos que

$$H_u F(u(\varepsilon, r), \varepsilon) \nabla_r u(\varepsilon, r) = I$$

y

$$H_u F(u(\varepsilon, r), \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, r) + \nabla_u \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u(\varepsilon, r), \varepsilon) = 0$$

de lo cual, obtenemos las derivadas parciales de u :

$$\nabla_r u(\varepsilon, r) = H_u F(u(\varepsilon, r), \varepsilon)^{-1}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = -H_u F(u(\varepsilon, r), \varepsilon)^{-1} \nabla_u \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u(\varepsilon, r), \varepsilon).$$

Reemplazando esto en la expansión de Taylor de u , obtenemos que

$$u(\varepsilon_1, r_1) = u(\varepsilon_2, r_2) - H_u F(u(\varepsilon_2, r_2), \varepsilon_2)^{-1} \left(\nabla_u \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u(\varepsilon_2, r_2), \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (r_1 - r_2) \right) + O(\|r_1 - r_2\|^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \nabla_u F(u, \varepsilon) &= Au + \nabla_u G(u, \varepsilon) - b \\ \nabla_u \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u, \varepsilon) &= Au + \nabla_u \frac{\partial G}{\partial \varepsilon}(u, \varepsilon) \\ H_u F(u, \varepsilon) &= A + H_u G(u, \varepsilon) \end{aligned}$$

Más aún, tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial u_k}(u, \varepsilon) = \begin{cases} -\frac{\tau h}{2} H'_\varepsilon \left(\frac{u_1 - u_0}{h}, \varepsilon \right) & \text{si } k = 0 \\ \frac{\tau h}{2} (2k - 1) H'_\varepsilon \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}, \varepsilon \right) - \frac{\tau h}{2} (2k + 1) H'_\varepsilon \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}, \varepsilon \right) & \text{si } k = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_k \partial \varepsilon}(u, \varepsilon) = \begin{cases} -\frac{\tau h}{2} \frac{\partial H'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \left(\frac{u_1 - u_0}{h}, \varepsilon \right) & \text{si } k = 0 \\ \frac{\tau h}{2} (2k - 1) \frac{\partial H'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}, \varepsilon \right) - \frac{\tau h}{2} (2k + 1) \frac{\partial H'_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}, \varepsilon \right) & \text{si } k = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_k^2}(u, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\tau}{2} H_\varepsilon''\left(\frac{u_1 - u_0}{h}, \varepsilon\right) & \text{si } k = 0 \\ \frac{\tau}{2}(2k - 1) H_\varepsilon''\left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}, \varepsilon\right) + \frac{\tau}{2}(2k + 1) H_\varepsilon''\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}, \varepsilon\right) & \text{si } k = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_k \partial u_{k+1}}(u, \varepsilon) = -\frac{\tau}{2}(2k + 1) H_\varepsilon''\left(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}, \varepsilon\right) \quad \forall k = 0, \dots, N - 2$$

Donde H'_ε y H''_ε denotan la primera y segunda derivada de H_ε con respecto a la primera variable. Como además, la matriz Hessiana es tridiagonal, podemos con lo anterior escribirla.

Podemos ahora escribir el algoritmo Predictor-Corrector. Dados un punto inicial $u_0 \in \mathbb{R}^N$ y una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tendiendo a cero, y que cumplen que $\|\nabla_u F(u_0, \varepsilon_0)\| \leq \varepsilon_0$,

Algoritmo 1 Algoritmo Predictor-Corrector

$r \leftarrow \nabla_u F(u_0, \varepsilon_0)$

$u \leftarrow u_0$

$\varepsilon \leftarrow \varepsilon_0$

while $\varepsilon \geq \text{precision}$ **do**

 {Paso Predictor}

$\hat{u} \leftarrow u - H_u F(u, \varepsilon)^{-1} \left(\nabla_u \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(u, \varepsilon)(\text{next}(\varepsilon) - \varepsilon) + r \right)$

$\varepsilon \leftarrow \text{next}(\varepsilon)$

if $\|\nabla_u F(u, \varepsilon)\| \geq \|\nabla_u F(\hat{u}, \varepsilon)\|$ **then**

$u \leftarrow \hat{u}$

end if

$r \leftarrow \nabla_u F(u, \varepsilon)$

 {Paso Corrector}

while $\|r\| > \varepsilon$ **do**

$u \leftarrow u - H_u F(u, \varepsilon)^{-1} r$

$r \leftarrow \nabla_u F(u, \varepsilon)$

end while

end while

Para tener un algoritmo completo, falta ver ejemplos de $H(u, \varepsilon)$ y sucesiones ε_k . Las siguientes dos opciones fueron usadas en la práctica.

$$H_1(x, \varepsilon) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$$

$$H_2(x, \varepsilon) = \varepsilon \log \left(\cosh \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)$$

Ambas aproximaciones fueron usadas, y produjeron los siguientes resultados.

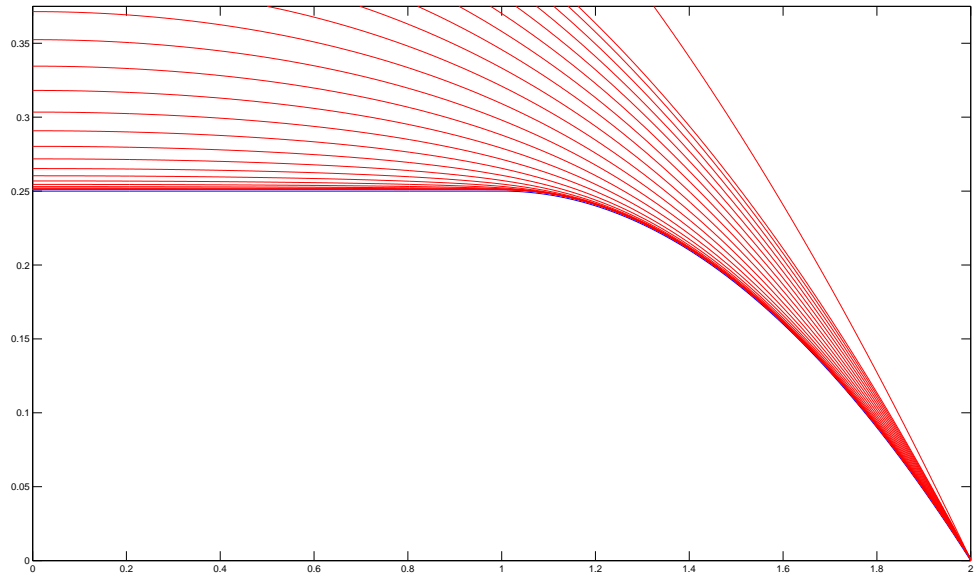


Figura 3.10: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_1 , con $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k^{1.1}$.

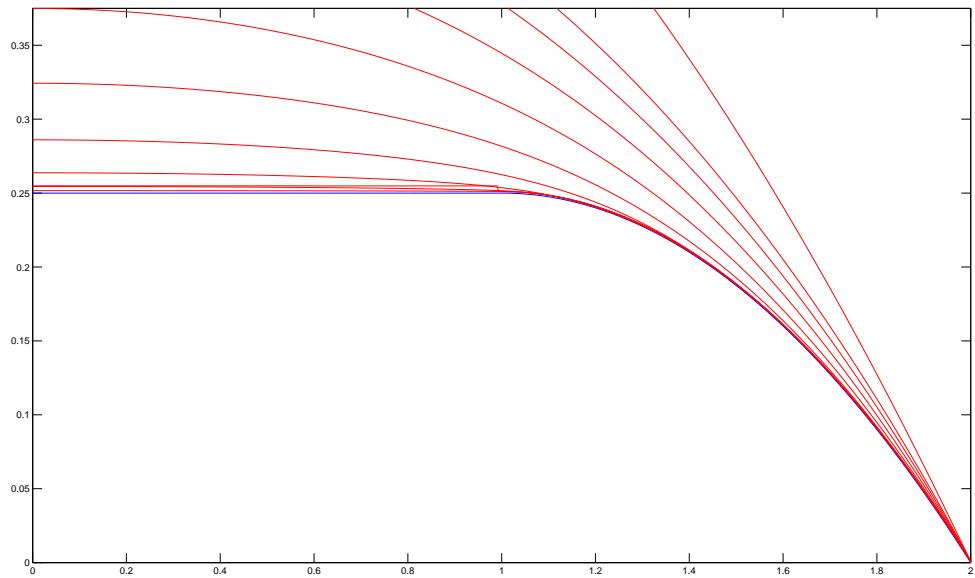


Figura 3.11: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_1 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.3}$.

Notamos que hay una relación entre cuanto le pedimos al paso predictor avanzar, con respecto a cuantas veces tiene que recurrir al paso corrector. Es así como, en el segundo caso, en que estamos pidiendo que el error disminuya mas rápido, tenemos problemas al acercarnos a la solución generándose un gran número de llamadas al paso corrector.

Por otro lado, si usamos los mismos $\{\varepsilon_k\}_k$, pero usamos la aproximación H_2 obtenemos los siguientes resultados:

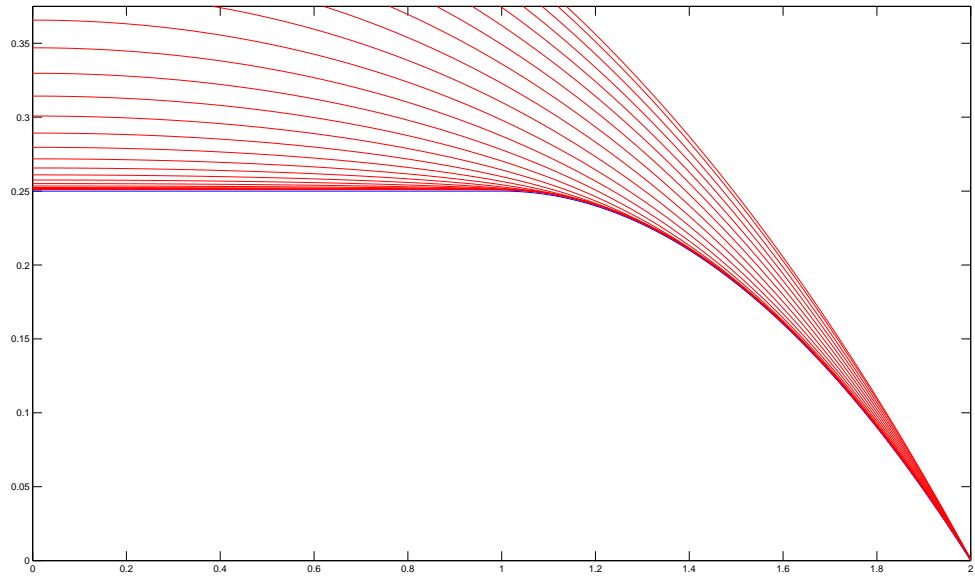


Figura 3.12: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_2 , con $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^{1.1}$.

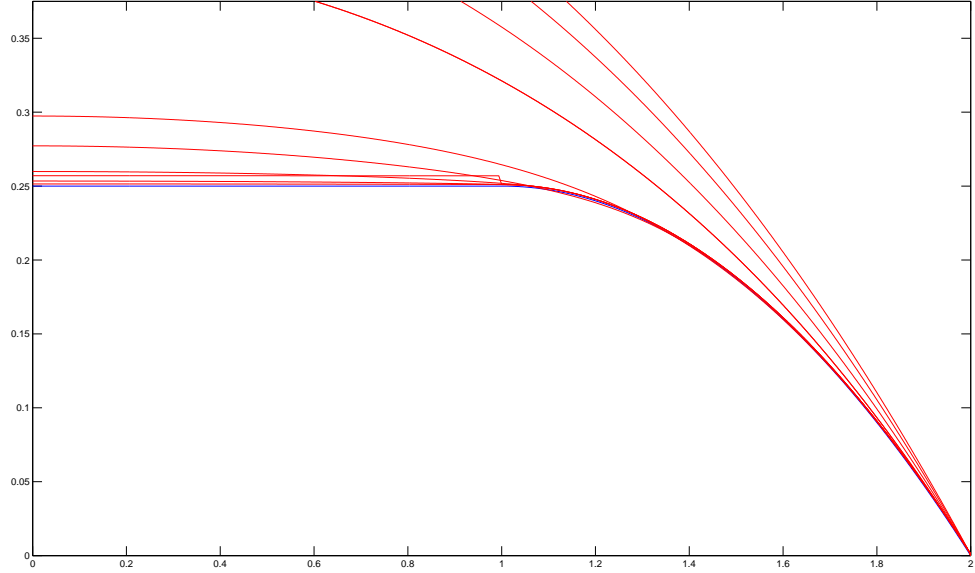


Figura 3.13: Las curvas rojas son las soluciones numéricas del problema, que se acercan a la solución teórica en azul. Hemos utilizado en este caso H_2 , con $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k^{1.3}$.

3.3. Resultados tipo dualidad para el problema en dos dimensiones

Veamos ahora una propiedades de dualidad. Estos resultados fueron obtenidos de [1]. Sea el conjunto siguiente

$$\Lambda = \{ \gamma | \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in (L_2(\Omega))^2, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq 1 \text{ c.t.p. en } \Omega \}$$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1. Si u es solución del problema de minimización (Q), y definimos:

$$\mathcal{L}(v, \eta) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \tau \int_{\Omega} \eta \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

entonces existe $\gamma \in \Lambda$ tal que

$$\mathcal{L}(u, \eta) \leq \mathcal{L}(u, \gamma) \leq \mathcal{L}(v, \gamma) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall \eta \in \Lambda$$

y además

$$\gamma \nabla u = |\nabla u|.$$

Definiendo

$$J(v) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \tau \int_{\Omega} |\nabla v| dx - \int_{\Omega} f v dx$$

deducimos un importante corolario.

Corolario 1. El par (u, γ) del teorema verifican:

$$\mathcal{L}(u, \gamma) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \max_{\eta \in \Lambda} \mathcal{L}(v, \eta) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

y

$$\mathcal{L}(u, \gamma) = \max_{\eta \in \Lambda} \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, \eta) = -\frac{1}{2} \min_{\eta \in \Lambda} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

donde en la última expresión se cumple que

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx - \tau \int_{\Omega} \eta \nabla \phi dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Queremos ahora aplicar este corolario, para encontrar un método iterativo. Antes de esto, veamos un método iterativo general.

Sea L un espacio de Hilbert con producto escalar (\cdot, \cdot) y norma $|\cdot|$. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(L, L)$ operador autoadjunto y semidefinido positivo, es decir

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$$

y

$$(\mathcal{A}\mu, \mu) \geq 0 \quad \forall \mu \in L.$$

Sea \mathcal{F} un elemento dado de L , y definamos

$$M(\mu) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu) - (\mathcal{F}, \mu).$$

Sea K un conjunto convexo, cerrado de L . Supongamos que $M(\mu) \geq C > -\infty \quad \forall \mu \in K$. Queremos resolver el problema

$$\min_{\mu \in K} M(\mu).$$

Utilizamos un algoritmo dado por A. A. Goldstein en [5]. Sea P el operador de proyección en K , definido en L . Sea λ_0 dado, en L , y $\rho > 0$ un parámetro. Construimos la sucesión siguiente

$$(3.38) \quad \lambda_{m+1} = P(\lambda_m - \rho(\mathcal{A}\lambda_m - \mathcal{F}))$$

y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2. Para $\rho > 0$ que verifica

$$0 < \rho < \frac{2}{\|\mathcal{A}\|}$$

tenemos

1. La sucesión $M(\lambda_m)$ es decreciente.
2. Todo punto adherente débil a la sucesión $\{\lambda_m\}_m$, de existir, es solución del problema.

Y un caso particular

Corolario 2. Si K es acotado, tenemos

1. Existe al menos un punto λ^* adherente débil a la sucesión $\{\lambda_m\}_m$.
2. λ^* es una solución del problema.
3. $M(\lambda^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} M(\lambda_m)$

Veamos una aplicación de este resultado, a un contexto que se parece a nuestro problema original. Sea V un espacio de Hilbert con producto escalar $((\cdot, \cdot))$ y norma $\|\cdot\|$ y L como antes. Sea $A \in \mathcal{L}(L, V)$ y $F \in V$. Definamos

$$M(\eta) = \frac{1}{2} \|A\eta - F\|^2,$$

que también se puede escribir

$$M(\eta) = \frac{1}{2} (A^*A\eta, \eta) - (A^*F, \eta) + \frac{1}{2} \|F\|^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\eta, \eta) - (\mathcal{F}, \eta) + \frac{1}{2} \|F\|^2$$

donde

$$\mathcal{A} = A^*A \text{ y } \mathcal{F} = A^*F.$$

Sea K un conjunto convexo, cerrado y acotado en L . Podemos aplicar el corolario anterior, al problema de la minimización de $M(\eta)$, $\eta \in K$. Resulta interesante formular el problema de la forma siguiente:

$$\min_{\eta \in K} \frac{1}{2} \|v\|^2$$

donde

$$v = A\eta - F.$$

Llamemos solución dual del problema anterior a los $\gamma \in K$ tal que

$$\|A\gamma - F\| \leq \|A\eta - F\| \quad \forall \eta \in K,$$

y solución primal a todo elemento u que verifica:

1. Existe $\gamma \in K$ tal que $u = A\gamma - F$
2. $\|u\| \leq \|v\|$ para todo v definido mediante algún $\eta \in K$ por $v = A\eta - F$.

Además la sucesión (3.38) se escribe

$$\begin{aligned} u_m &= A\gamma_m - F \\ \gamma_{m+1} &= P(\gamma_m - \rho A^* u_m) \end{aligned}$$

Del teorema sobre soluciones deducimos que existe al menos una solución dual de este problema, y una única solución primal. Además, la sucesión primal converge fuerte a la solución primal.

Como vimos, el problema de minimización original, tiene como dual el problema

$$\min_{\eta \in \Lambda} \frac{1}{2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

donde

$$\mu((v, \phi))_{H_0^1(\Omega)} = (f, \phi)_{L^2(\Omega)} - \tau(\eta, \nabla \phi)_{(L^2(\Omega))^2} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

con

$$((v, \phi))_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \phi dx,$$

Ahora, si fijamos $\eta \in \Lambda$, $f \in L^2(\Omega)$ y definimos

$$T_{\eta, f} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

por

$$T_{\eta, f}(\phi) = (f, \phi)_{L^2(\Omega)} - \tau(\eta, \nabla \phi)_{(L^2(\Omega))^2}$$

tenemos que $T_{\eta, f} \in (H_0^1(\Omega))^*$. Por el teorema de representación de Riesz, existe $G \in \mathcal{L}((L^2(\Omega))^3, H_0^1(\Omega))$, tal que

$$T_{\eta, f}(\phi) = ((G(f, \eta_1, \eta_2), \phi))_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Definiendo

$$A_0 = G(\cdot, 0, 0), \tau A_1 = G(0, \cdot, 0), \tau A_2 = G(0, 0, \cdot),$$

tenemos que

$$\mu v = A_0 f + \tau(A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2)$$

Notemos que esto es también equivalente a que

$$\begin{aligned} -\mu \Delta v &= f + \tau \nabla \cdot \eta \\ v|_{\partial \Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, para aplicar el algoritmo anterior, definimos

$$V = H_0^1(\Omega), L = (L^2(\Omega))^2, F = \frac{A_0 f}{\mu}, A \eta = \frac{\tau}{\mu} (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2)$$

y notamos que

$$v = A \eta - F$$

y

$$A^* \phi = -\frac{\tau}{\mu} \nabla \phi, \quad \phi \in H_0^1(\Omega).$$

y entonces el algoritmo se escribe de la forma

$$-\mu \Delta u_m = f + \tau \nabla \cdot \gamma_m$$

$$u_m|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\gamma_{m+1} = P_\Lambda\left(\gamma_m + \frac{\rho\tau}{\mu}\nabla u_m\right).$$

Para poder aplicar el teorema necesitamos ρ entre 0 y $\frac{2}{\|\mathcal{A}\|}$. Veamos una condición suficiente para esto. De la definición de A , tenemos

$$((A\eta, \phi))_{H_0^1(\Omega)} = -\frac{\tau}{\mu}(\eta, \nabla\phi)_{(L^2(\Omega))^2},$$

que si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y $\phi = A\eta$, nos da

$$\|A\eta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\tau}{\mu}|\eta|_{(L^2(\Omega))^2},$$

y por lo tanto

$$\|A\| \leq \frac{\tau}{\mu},$$

y de aquí

$$\|\mathcal{A}\| = \|A^*A\| \leq \frac{\tau^2}{\mu^2}.$$

Por esto, basta escoger ρ tal que

$$0 < \rho < \frac{2\mu^2}{\tau^2},$$

por ejemplo (y será nuestra elección en la versión definitiva)

$$\rho = \frac{\mu^2}{\tau^2}.$$

3.3.1. Algoritmo tipo Uzawa para dos dimensiones

Veamos ahora la implementación de este algoritmo. Cada iteración consiste en dos pasos:

1. Resolver un problema lineal de tipo Dirichlet para el Laplaciano.
2. Hacer una proyección en Λ .

Notemos que el paso de la proyección es fácil, pues

$$\Lambda = \{\gamma \mid \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in (L_2(\Omega))^2, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \leq 1 \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

entonces

$$P_\Lambda(\gamma)(x) = \frac{\gamma(x)}{\max\{1, \|\gamma(x)\|\}}.$$

Pasemos a consideraciones numéricas. Necesitamos, como punto de partida, una triangulación (P, T) de Ω . Es decir, P es una lista de N puntos, y T es una lista de 3 – tuplas de índices, donde los

índices de cada tupla se refieren a 3 puntos en P , que forman un triángulo, y los índices aparecen en el orden contrario a las manecillas del reloj. En nuestra discretización buscaremos una solución $(u = \{u_i\}_{i=1}^N, \gamma = \{\gamma_t\}_{t \in T})$. La razón para buscar soluciones de este tipo quedará claro cuando veamos como se traducen los pasos del algoritmo al caso discretizado. Abusaremos la notación y llamaremos u tanto a la definición dada, como a

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$$

donde las funciones $\{\phi_i\}_{i=1}^N$, son funciones que valen 1 en el i -ésimo punto de P , cero en el resto de esos puntos, y son lineales afines en cada triángulo $t \in T$. Notemos que de esta manera, $u \in H_0^1(\Omega)$. De manera similar, γ será también por abuso de notación, la función que es constante e igual a γ_t en cada triángulo $t \in T$. Así, $\gamma \in (L^2(\Omega))^2$.

Veamos la proyección. Notemos que

$$\nabla u = \sum_{i=1}^N u_i \nabla \phi_i,$$

que es constante por triángulo. De esta manera, el paso de la proyección, es simplemente

$$\gamma_{m+1,t} = \frac{\gamma_{m,t} + \frac{\mu}{\tau} (\nabla u_m)|_t}{\max \left\{ 1, \left\| \gamma_{m,t} + \frac{\mu}{\tau} (\nabla u_m)|_t \right\| \right\}}$$

donde todos los términos que aparecen son constantes, $|_t$ denota la restricción al triángulo t y hemos usado $\rho = \frac{\mu^2}{\tau^2}$. Notemos que

$$(\nabla u)|_{t=(i,j,k)} = u_i (\nabla \phi_i)|_t + u_j (\nabla \phi_j)|_t + u_k (\nabla \phi_k)|_t.$$

Ahora notemos que

$$(\nabla \phi_i)|_t = \frac{M(P_k - P_j)}{\|P_k - P_j\|} \|(\nabla \phi_i)|_t\|$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puesto que $\nabla \phi_i$ debe ser perpendicular a la curva de nivel 0, y además sabemos la orientación correcta por el orden en que aparecen los índices en t . Por otro lado, tenemos que si h es la altura correspondiente a la base $P_k P_j$, tenemos que $\|\nabla \phi_i\| h = 1$, y por lo tanto

$$(\nabla \phi_i)_t = \frac{M(P_k - P_j)}{2 \text{Area}(t)}.$$

Veamos ahora la resolución del problema tipo Dirichlet. Como estamos trabajando con $u \in H_0^1(\Omega)$, nos conviene trabajar con la formulación variacional discreta del problema, es decir queremos encontrar u_m tal que

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i dx = \int_{\Omega} f \phi_i dx + \tau \int_{\Omega} \nabla \cdot \gamma_m \phi_i dx \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Notemos un par de cosas. Primero, el sistema que queremos resolver es en realidad sobre los índices $I = \{j \in \{1, \dots, N\} | P_j \text{ es punto interior}\}$, pues sabemos que $u_j = 0$ si $j \notin I$. Usando esto un cálculo nos da

$$\tau \int_{\Omega} \nabla \cdot \gamma_m \phi_i dx = \tau \int_{\partial\Omega} \gamma_m \phi_i \mathbf{n} dl - \tau \int_{\Omega} \gamma_m \cdot \nabla \phi_i dx = -\tau \int_{\Omega} \gamma_m \cdot \nabla \phi_i dx \quad \forall i \in I$$

formalmente, pues $\gamma_m \in (L^2(\Omega))^2$. Y más aún

$$-\tau \int_{\Omega} \gamma_m \cdot \nabla \phi_i dx = -\tau \sum_{t: j \in t} \gamma_{m,t} \cdot (\nabla \phi_i)|_t \text{Area}(t) = -\frac{\tau}{2} \sum_{t: i \in t} \gamma_{m,t} \cdot M(P_k - P_j)$$

donde $t = (i, j, k)$, $t = (k, i, j)$ o $t = (j, k, i)$. Definamos por lo tanto

$$F(\gamma)_i = -\frac{\tau}{2} \sum_{t: i \in t} \gamma_{m,t} \cdot M(P_k - P_j) \text{ para } i \in I$$

donde $t = (i, j, k)$, $t = (k, i, j)$ o $t = (j, k, i)$. Veamos ahora el término

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u_m \nabla \phi_i dx = \mu \sum_{l=1}^N u_l \int_{\Omega} \nabla \phi_l \nabla \phi_i dx = (Au)_i$$

donde A es una matriz tal que

$$A_{il} = A_{li} = \mu \int_{\Omega} \nabla \phi_l \nabla \phi_i dx$$

Notemos que esto es igual a

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_l dx = \mu \sum_{t: i, j \in t} \int_t \nabla \phi_i \nabla \phi_l dx = \mu \sum_{t: i, j \in t} \frac{M(P_{k_t, i} - P_{j_t, i}) \cdot M(P_{k_t, l} - P_{j_t, l})}{4\text{Area}(t)}.$$

Además, notemos que

$$M^t M = I$$

por lo tanto

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_l dx = \mu \sum_{t: i, j \in t} \frac{(P_{k_t, i} - P_{j_t, i}) \cdot (P_{k_t, l} - P_{j_t, l})}{4\text{Area}(t)}.$$

Por último analizemos el término

$$\int_{\Omega} f \phi_i dx.$$

Este cálculo depende de que información tengamos sobre f . Para nuestro caso particular de aplicación

$$f \equiv C \in \mathbb{R}$$

por lo que debemos calcular

$$C \int_{\Omega} \phi_i dx = C \sum_{t: i \in t} \int_t \phi_i dx = C \sum_{t: i \in t} \frac{\text{Area}(t)}{3}.$$

Así, definiendo

$$b_i = C \sum_{t:i \in t} \frac{\text{Area}(t)}{3} \text{ para } i \in I$$

tenemos que el sistema a resolver es

$$Au_m = b + F(\gamma_m).$$

Entonces el algoritmo queda así:

Algoritmo 2 Algoritmo Uzawa

```

 $\gamma_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{|T|}$ 
 $k \leftarrow 0$ 
 $err \leftarrow \infty$ 
while  $err \geq \text{threshold}$  do
   $u_k \leftarrow A^{-1}(b + F(\gamma_k))$ 
   $\gamma_{k+1} \leftarrow \frac{\gamma_k + \frac{\mu}{\tau} \nabla u_k}{\max\{1, \|\gamma_k + \frac{\mu}{\tau} \nabla u_k\|\}}$ 
   $err = \|\gamma_{k+1} - \gamma_k\|$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
end while

```

3.3.2. Ejemplos del Algoritmo tipo Uzawa

Caso 1: Círculo de radio 1

Veremos primero la aplicación de este algoritmo para el caso en que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Usaremos las siguientes constantes: $\mu = 1$, $C = 1$ y $\tau = 0.3$. El primer paso del algoritmo nos entrega la solución de $\mu \Delta u = C$, es decir, la solución al modelo de fluido tipo Newtoniano. Por otro lado γ será en este paso la proyección de $\frac{\mu}{\tau} \nabla u$ en Λ .

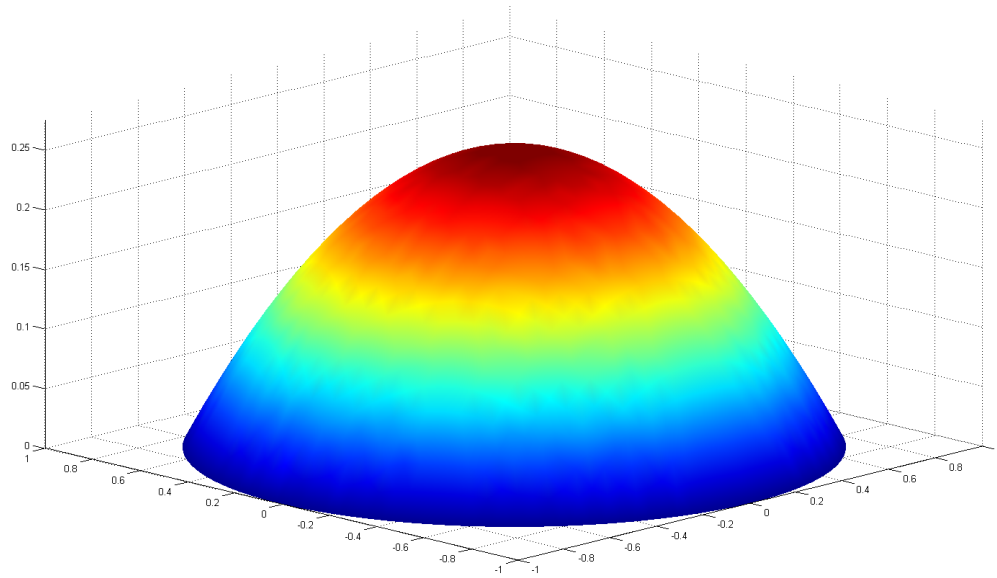


Figura 3.14: La solución u del algoritmo en el primer paso para el caso de un círculo de radio 1.

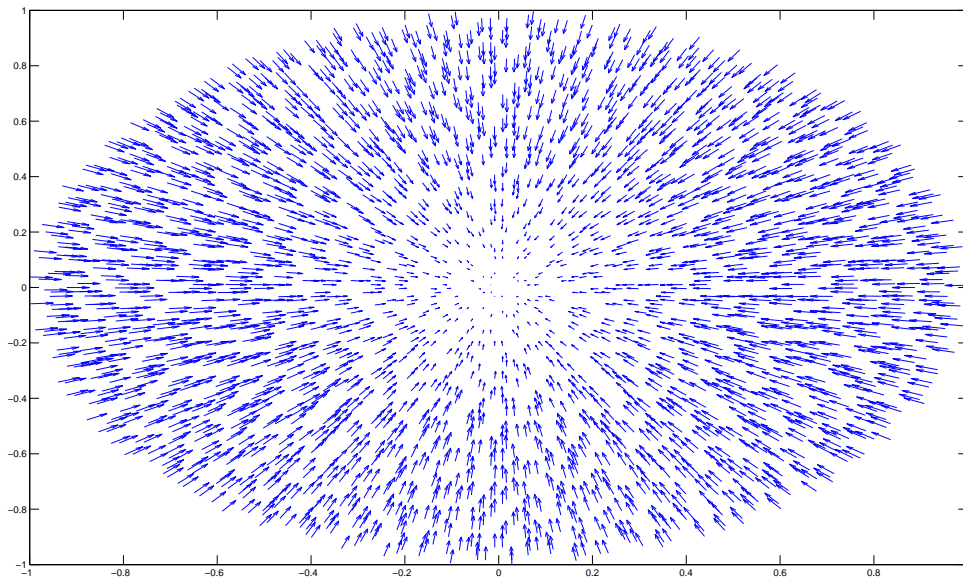


Figura 3.15: La variable dual γ en el primer paso para el caso de un círculo de radio 1.

En este caso, el algoritmo se ha estabilizado ya al segundo paso y tenemos la solución. Notemos que se ha formado el tapón de gradiente 0 en la región del medio, como calculamos cuando vimos este problema en una dimensión.

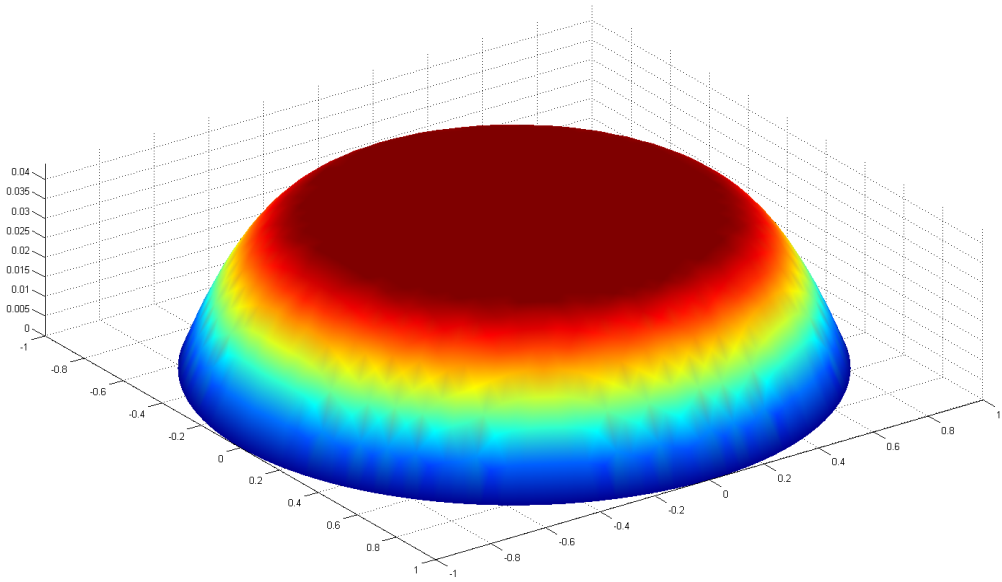


Figura 3.16: La solución u del algoritmo en el segundo y último paso.

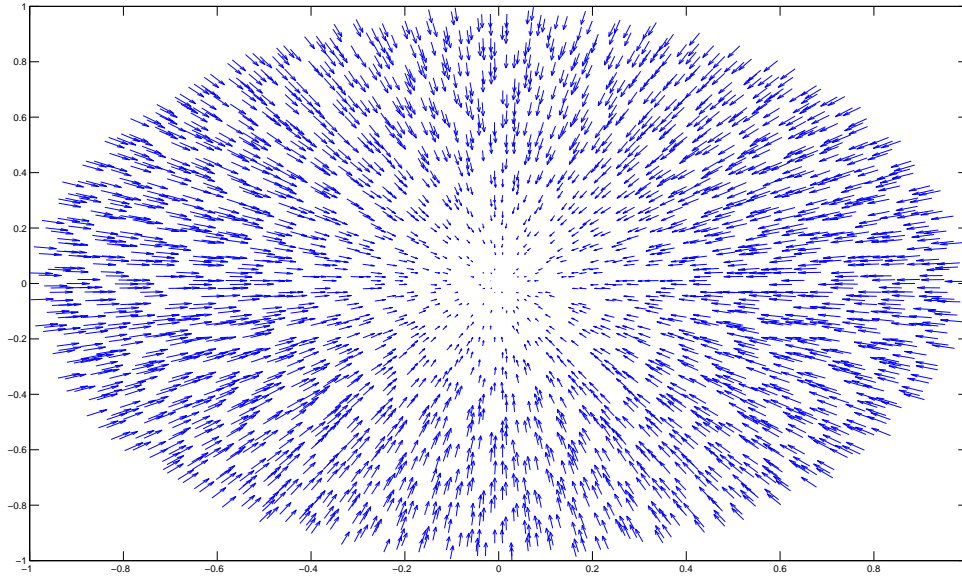


Figura 3.17: La variable dual γ en el segundo y último paso.

Caso 2: Cuadrado de lado 2

Veamos ahora una aplicación más interesante del algoritmo, a un dominio rectangular de lados $a = 2$ y $b = 2$. Este problema ya no puede ser resuelto en una dimensión y justifica entonces el uso de este algoritmo. Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq |x| \leq 2 \text{ y } 0 \leq |y| \leq 2\}$. Usaremos las siguientes constantes: $\mu = 1$, $C = 1$ y $\tau = 0.3$.

En la primera iteración obtenemos la solución al problema $\mu \Delta u = C$, al igual que en el caso anterior, esta es la solución al modelo Newtoniano de fluidos. Por otro lado γ es la proyección de $\frac{\mu}{\tau} \nabla u$ en Λ .

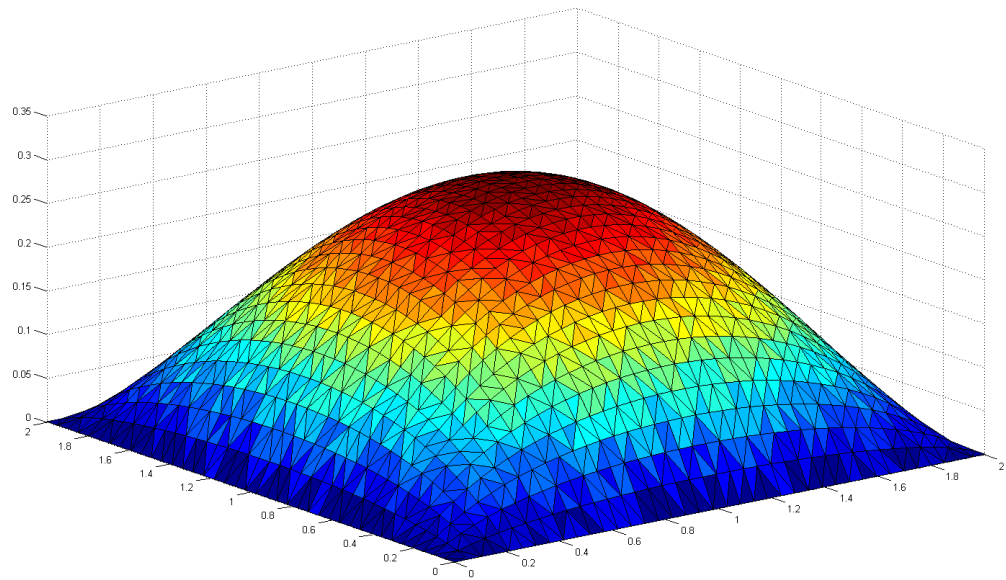


Figura 3.18: La solución u del algoritmo en el primer paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

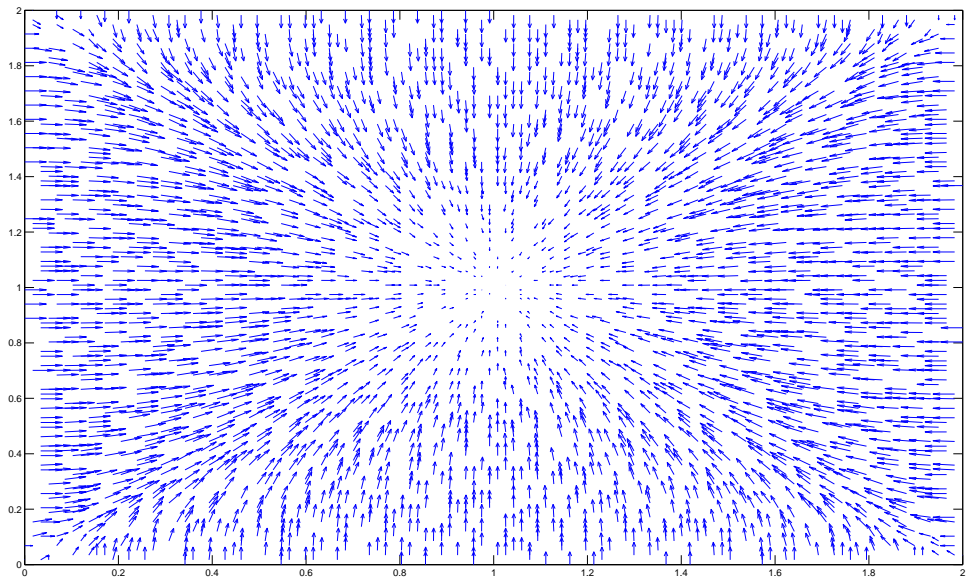


Figura 3.19: La variable dual γ en el primer paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

Al segundo paso empezamos a ver cosas distintas al caso anterior, causa de esta nueva geometría menos simétrica.

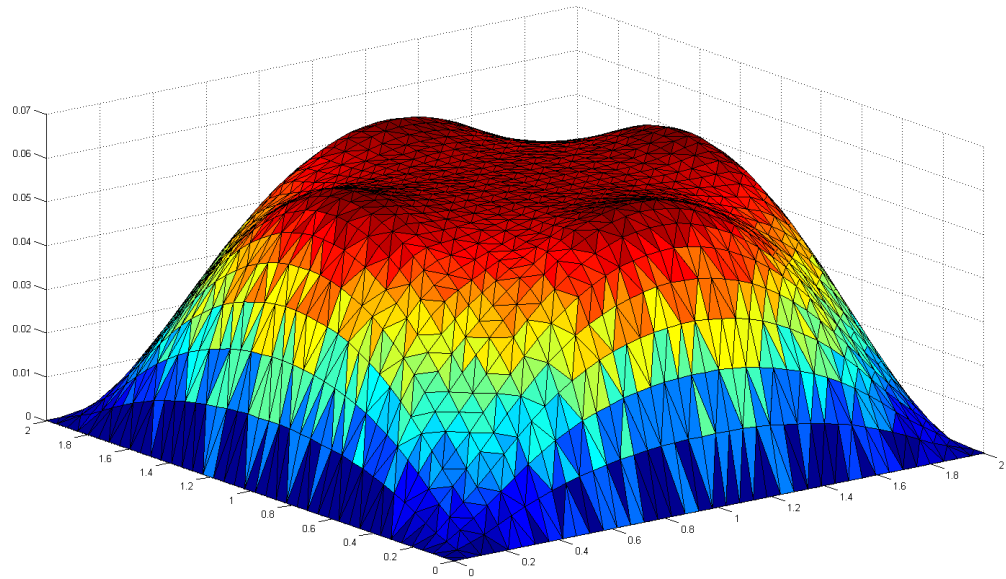


Figura 3.20: La solución u del algoritmo en el segundo paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

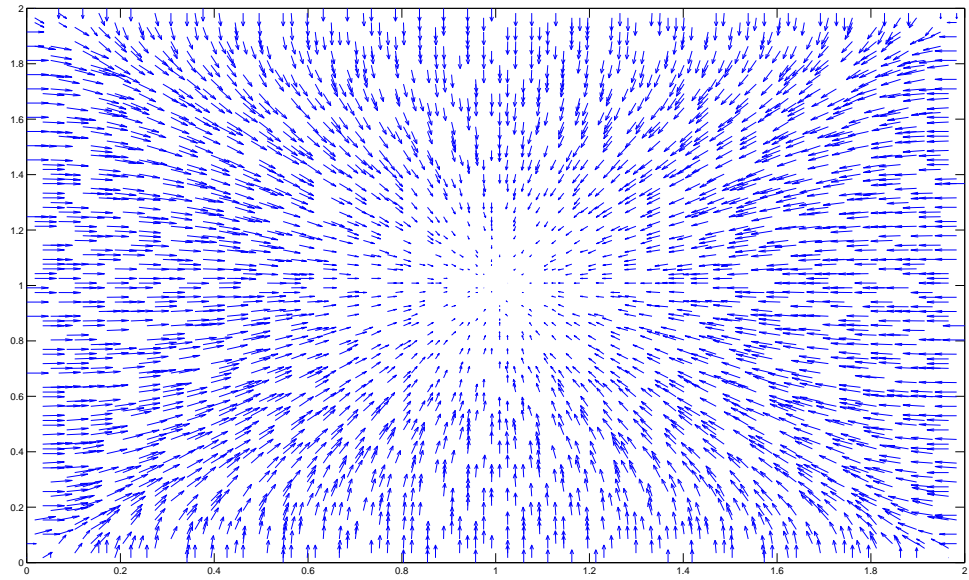


Figura 3.21: La variable dual γ en el segundo paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

Para esta geometría, el algoritmo le lleva un poco más tiempo estabilizarse, pero ya al quinto paso ha llegado a la solución final. Notamos que al igual que en el caso anterior se ha formado una región de gradiente nulo al centro de la canaleta.

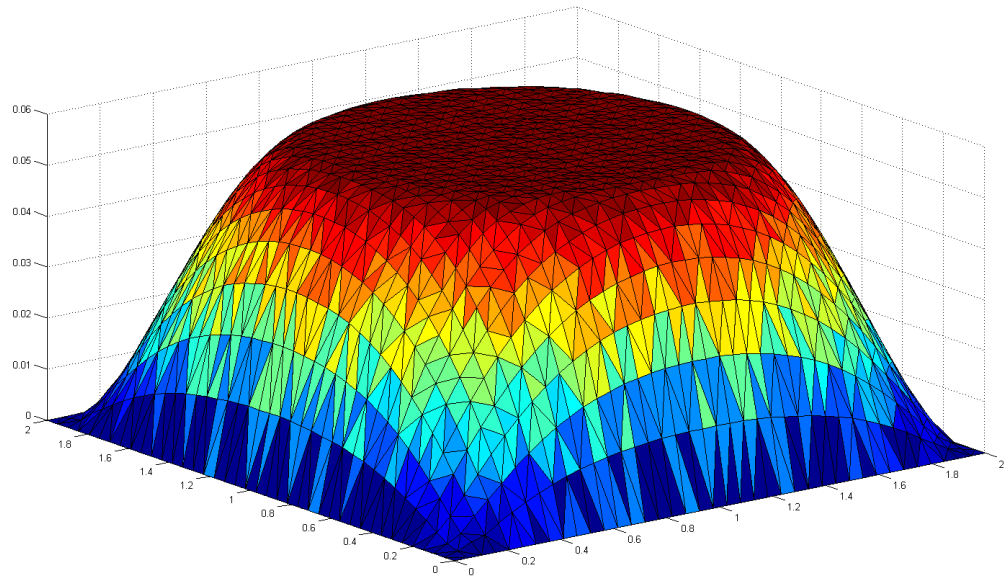


Figura 3.22: La solución u del algoritmo en el quinto y último paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

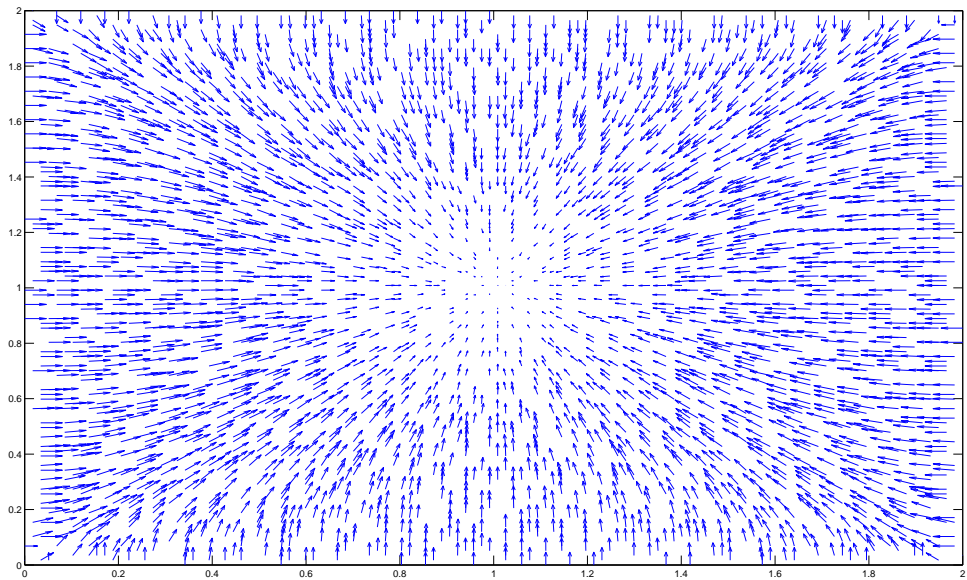


Figura 3.23: La variable dual γ en el primer quinto y último paso para el caso de un cuadrado de lado 2.

Capítulo 4

Desarrollo Experimental

4.1. Análisis de datos experimentales

4.1.1. Detalle de experimentos

De la tesis de Jorge Martínez [6] se obtuvieron los siguientes datos experimentales, que se compararon con los resultados teóricos y computacionales obtenidos en las secciones anteriores. Estos datos fueron facilitados por el Profesor Ramón Fuentes.

En una canaleta abierta (es decir sin tapa) y rectangular de 0.56 metros de ancho, se hicieron experimentos para tres pendientes distintas: 1.2%, 2% y 3%, donde 100% equivale a una inclinación de $\frac{\pi}{4}$, 0% equivale a una canaleta horizontal, y la relación es lineal.

En cada uno de estos casos se hicieron varias experiencias variando la concentración del fluido. Cada una de estas experiencias se denota por una letra y un número. Se midió el caudal del fluido, y de manera independiente las velocidades locales en una malla de cinco por cinco. Para esto se usó el método del tubo de Pitot. Se decidió usar solamente las experiencias que tuvieran un número de Reynolds 2 mayor a 2000, pues los modelos usados asumen que no hay fenómenos como vórtices, etc.

Mediante un ajuste hecho previamente, se aproximaron la tensión de fluencia τ y la viscosidad μ en función de la densidad. Lo importante para este trabajo, es que estos tres grupos de mediciones: los caudales, las velocidades y los parámetros del fluido, fueron encontrados independientemente. Esto es fundamental pues queremos validar un sistema nacido totalmente de la teoría, y esto se puede hacer usando por ejemplo los datos del caudal para predecir las medidas de los parámetros o alguna combinación similar.

Sin embargo, para que lo anterior sea válido, debemos tener confianza en nuestros experimentos, y por lo tanto se hicieron unas validaciones que aparecen en la siguiente sección. Estos nos permitieron verificar que los caudales medidos fueran consistentes con las velocidades medidas.

4.1.2. Cálculo del Caudal

La validación que se hizo fue la siguiente. Suponemos que los experimentos se hicieron cuando se alcanzaba el estado estacionario, y por lo tanto las mediciones de caudal y de velocidades locales deben ser consistentes. Más específicamente, si tenemos el campo de velocidades $u(x)$ con $x \in \Omega$, donde Ω es la sección del canal, el caudal Q_{exp} es

$$Q_{\text{exp}} = \int_{\Omega} u(x) dx.$$

El problema, es que no se conoce u en todos los puntos de Ω , pero sí en las paredes del canal, por la condición de borde, y en la malla rectangular medida. Usando que en la superficie libre, la parte perpendicular del gradiente a esa superficie es nula, completamos la malla rectangular repitiendo los datos.

Así, se tiene que $\Omega = \dot{\bigcup}_i R_i$, donde R_i es un rectángulo, y se conoce el valor de u en cada uno de sus vértices. Así, se aproxima la integral del lado derecho mediante

$$Q_{\text{calc}} = \sum_i u(R_i) |R_i|$$

donde $|\cdot|$ denota la función área, y $u(R_i)$ es el promedio de los valores de u en los vértices de R_i . La fórmula anterior es una extensión del método del trapecio a dominios en dos dimensiones, y es uno de los métodos más simples de integración numérica.

En las figuras siguientes, se muestran los valores de Q_{calc} y Q_{exp} para los diferentes experimentos. Los datos pueden ser encontrados en el apéndice.

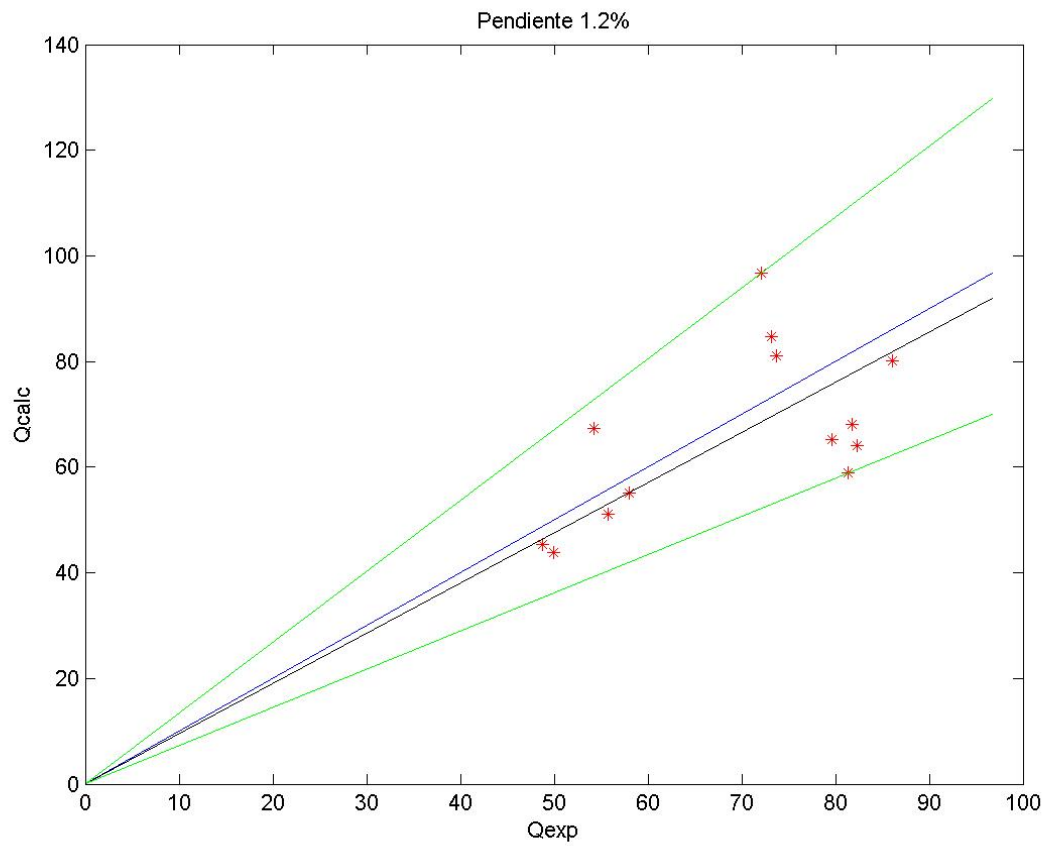


Figura 4.1: Caso de una pendiente del 1.2%, cada punto rojo corresponde a (Q_{exp}, Q_{calc}) , para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.

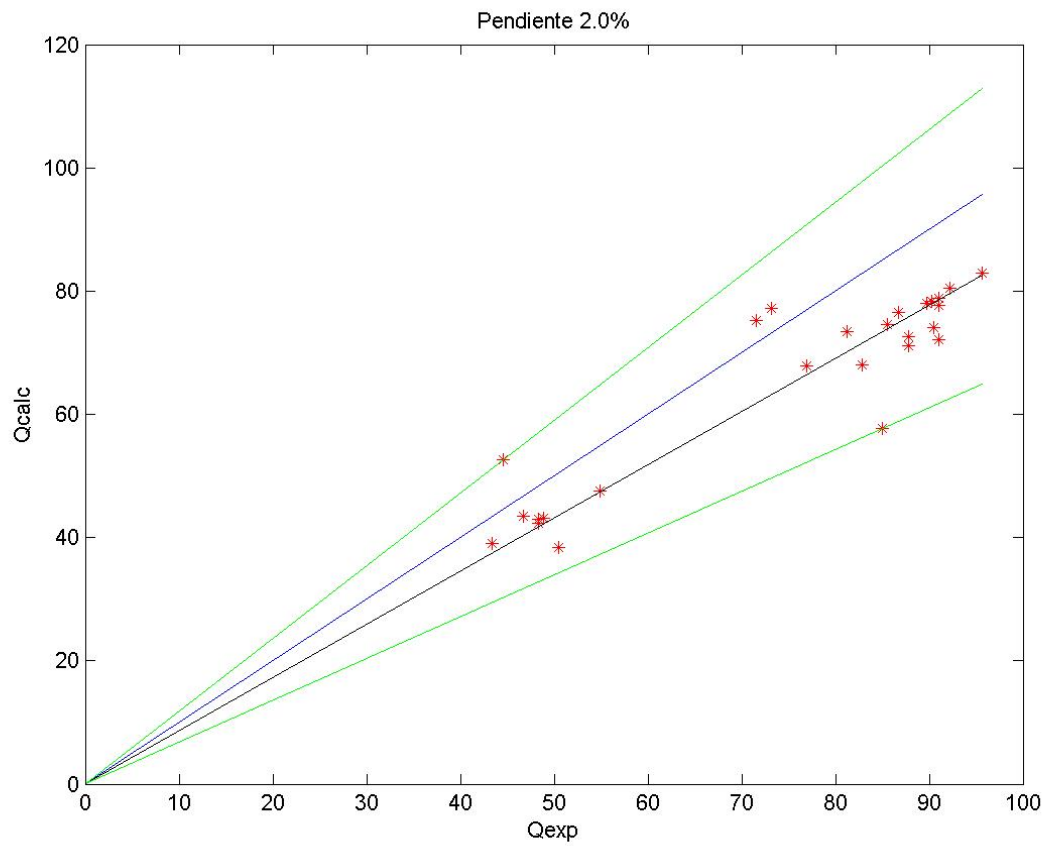


Figura 4.2: Caso de una pendiente del 2%, cada punto rojo corresponde (Q_{exp}, Q_{calc}) , para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.

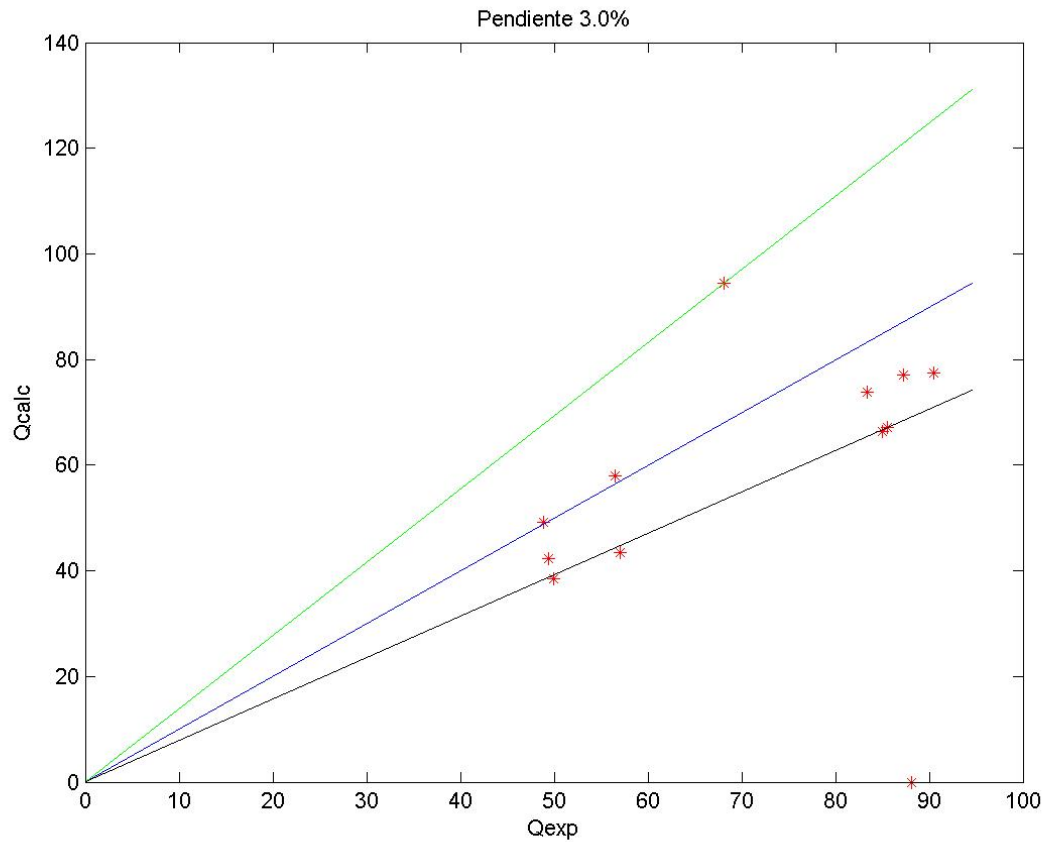


Figura 4.3: Caso de una pendiente del 3%, cada punto rojo corresponde (Q_{exp}, Q_{calc}) , para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la identidad, la recta negra es el mejor ajuste de una función lineal, y las rectas verdes son las funciones lineales límites.

Las discrepancias, aunque significativas, están en acuerdo con lo esperado, pues aunque existe una gran confianza en las mediciones del caudal, las mediciones con el tubo de Pitot no son tan precisas, puesto que el método se usa en un contexto no familiar. Lo importante es que tenemos una medida de la discrepancia que podemos esperar al tratar de reproducir ciertos datos usando otros.

A continuación y a modo de buscar una forma de explicar errores sistemáticos entre los dos caudales, se calcularon los números de Froude y Reynolds.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}, \quad Re_2 = \frac{8\rho_m V^2}{\tau + \frac{2\mu V}{R_h}}$$

donde V es la velocidad media del fluido, calculada con el caudal, $g = 9.80665m/s^2$ es la aceleración de gravedad, h es la altura normal del fluido, es decir, la altura que alcanza el

fluido en la canaleta abierta. Además ρ_m es la densidad de la mezcla, τ y μ son la tensión de fluencia y la viscosidad respectivamente, obtenidas mediante un ajuste a la concentración en peso independientemente. Por último, R_h es el radio hidráulico y se calcula

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h}$$

donde b es el largo de la base de la canaleta y h es la altura normal. El denominador en la fórmula se denomina perímetro mojado. A continuación mostramos los resultados de estas comparaciones. Con el número de Froude

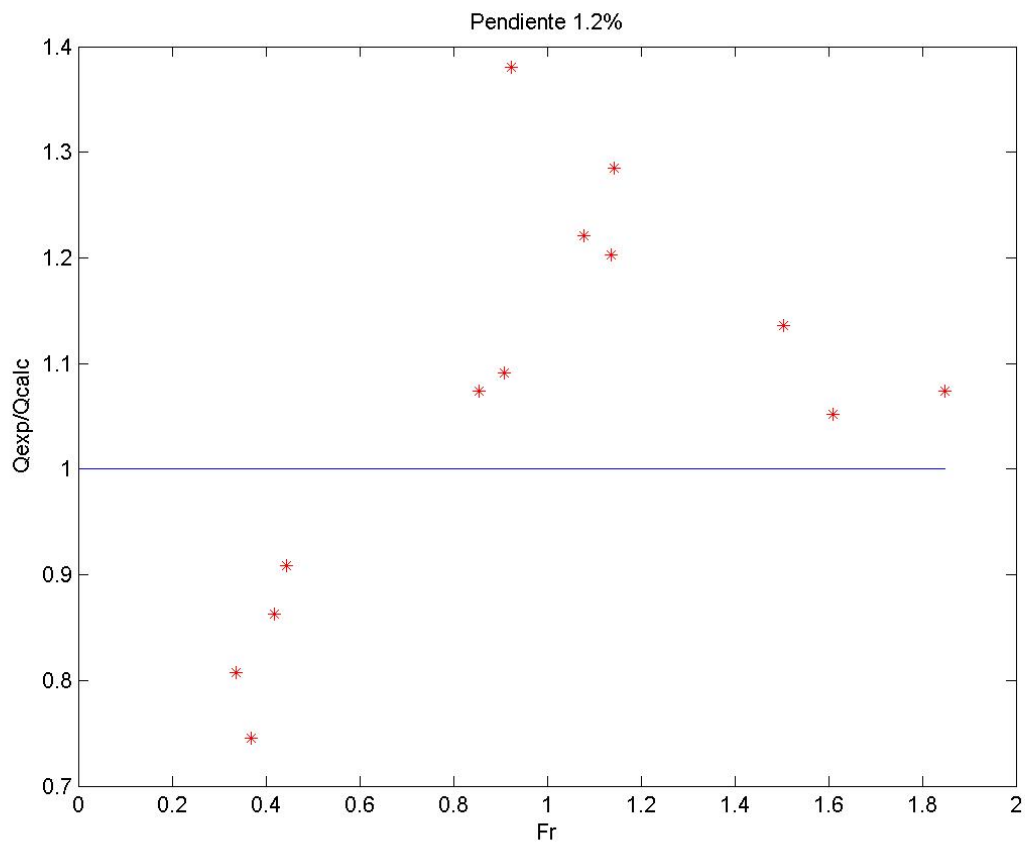


Figura 4.4: Caso de una pendiente del 1.2%, cada punto rojo corresponde $(Fr, Q_{calc}/Q_{exp})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

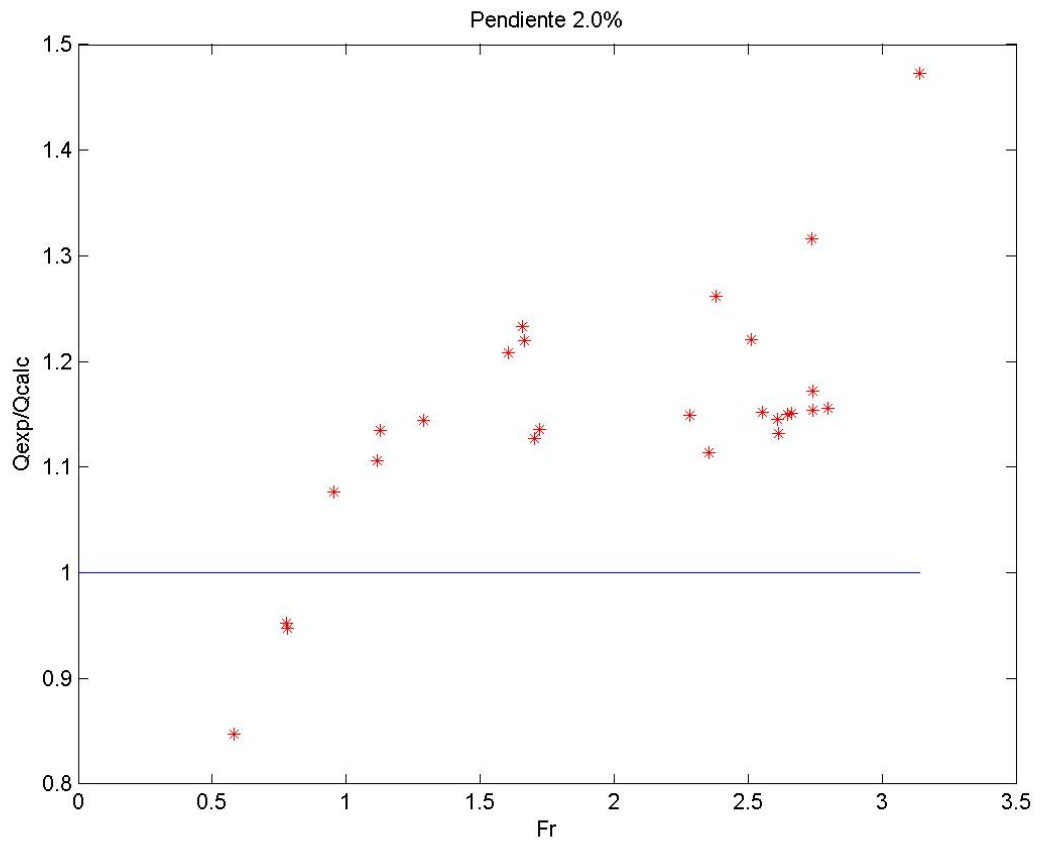


Figura 4.5: Caso de una pendiente del 2%, cada punto rojo corresponde $(Fr, Q_{\text{calc}}/Q_{\text{exp}})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

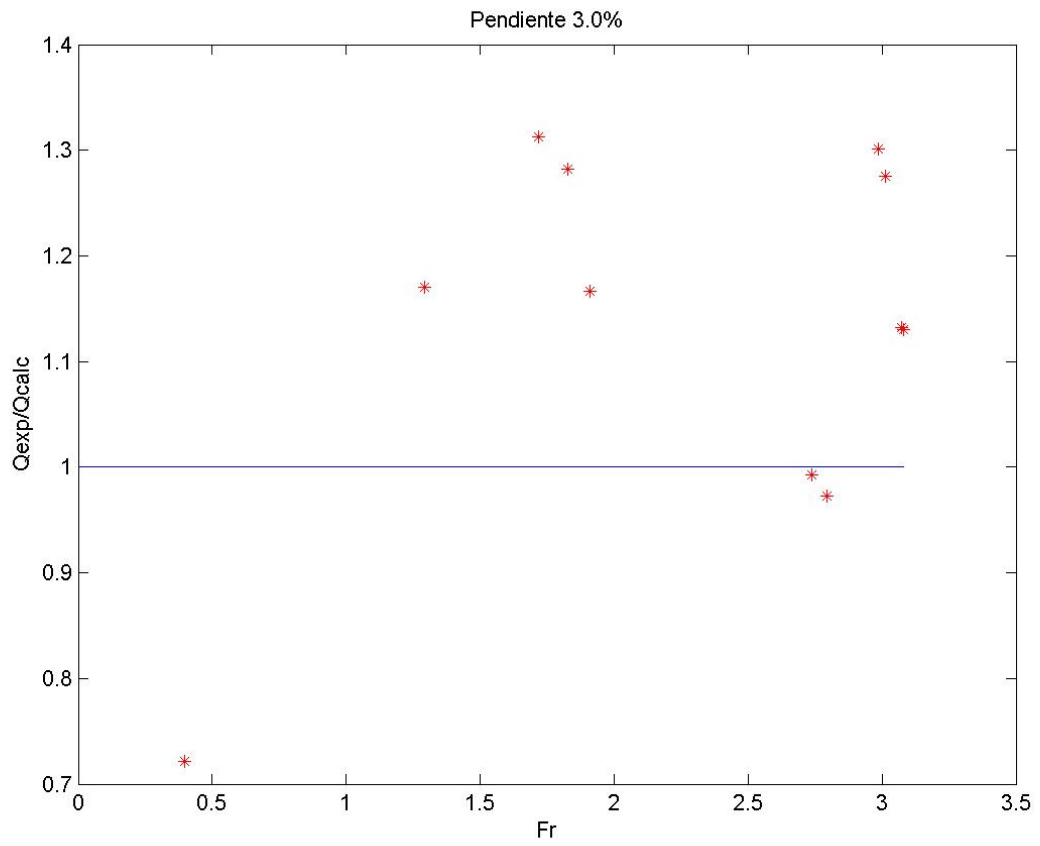


Figura 4.6: Caso de una pendiente del 3 %, cada punto rojo corresponde $(Fr, Q_{calc}/Q_{exp})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

y con el número de Reynolds

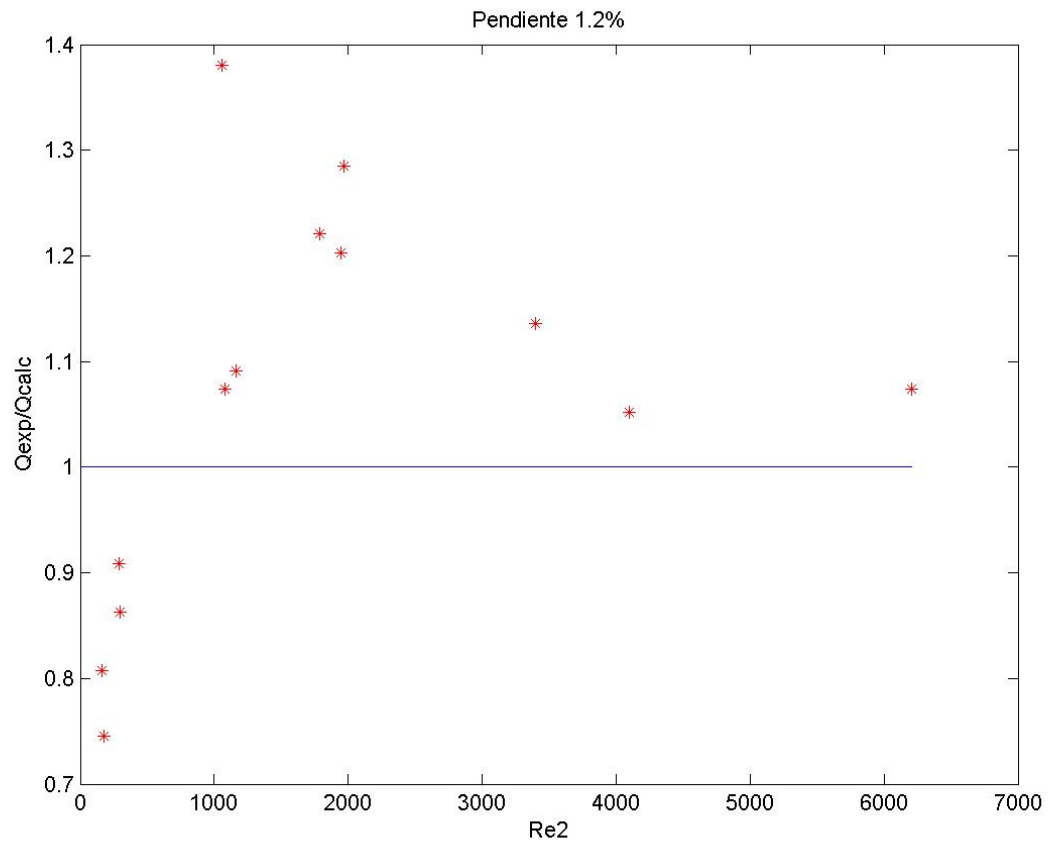


Figura 4.7: Caso de una pendiente del 1.2%, cada punto rojo corresponde $(Re_2, Q_{calc}/Q_{exp})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

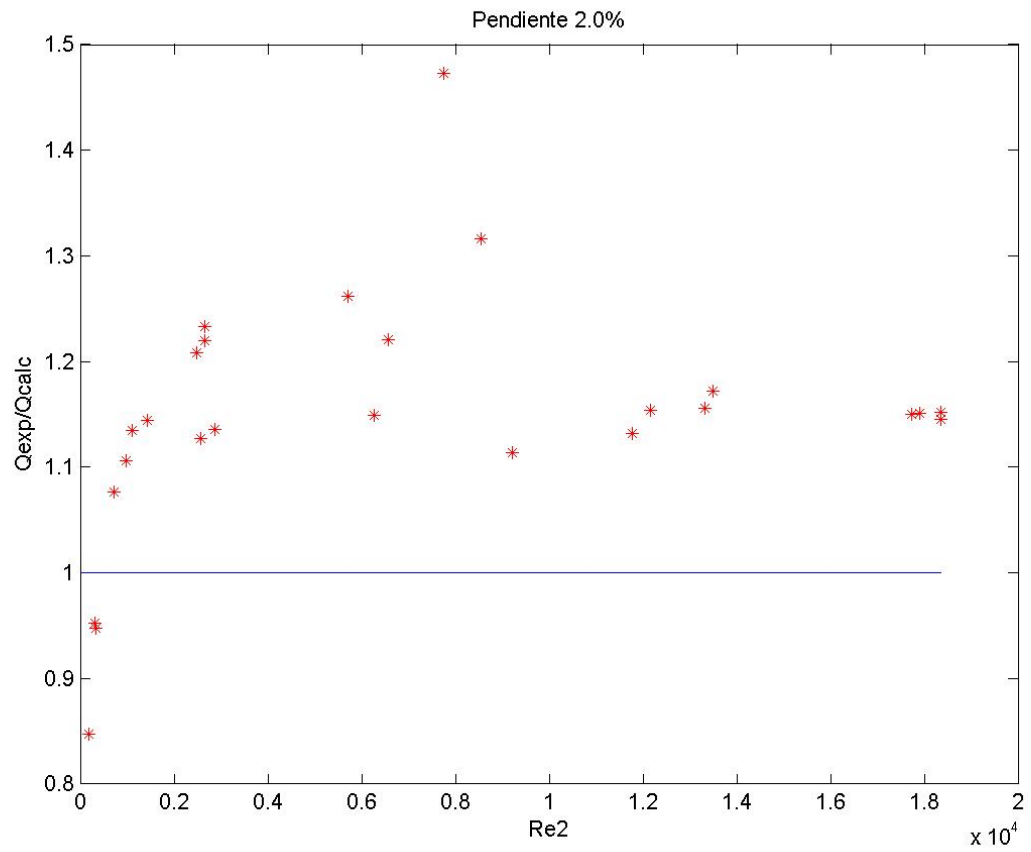


Figura 4.8: Caso de una pendiente del 2%, cada punto rojo corresponde $(Re_2, Q_{calc}/Q_{exp})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

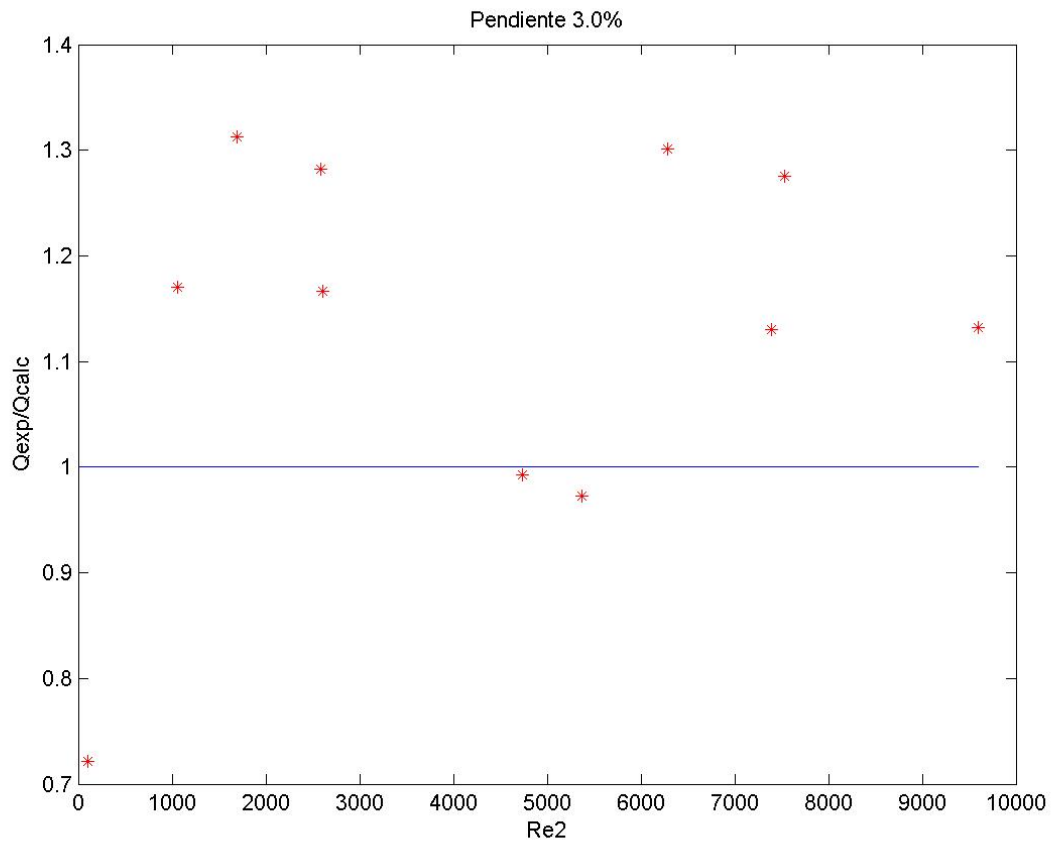


Figura 4.9: Caso de una pendiente del 3%, cada punto rojo corresponde $(Re_2, Q_{calc}/Q_{exp})$, para una experiencia distinta. La recta azul corresponde a la función 1, que es el ideal.

Se ve un comportamiento parecido para las dos cantidades, pero más que eso no se puede concluir y por lo tanto las discrepancias se las atribuimos a errores de medición. Lo más importante es que obtenemos una medida de las discrepancias que podemos esperar entre los dos tipos de mediciones.

4.1.3. Cálculo mediante el método de Simpson

Puesto que se aproxima el caudal mediante la integral numérica I_1 , que usa el método del trapecio en dos dimensiones, cabe preguntarse si la aproximación mejoraría en caso de usar un método de orden mayor, como el método de Simpson. La respuesta, es que al menos en este caso no se observa una mejora, y la razón conjeturada para esto es que el precio que se paga para obtener este mayor orden es que se usan más puntos para calcular la integral. Puesto que los datos no son muchos, esto quiere decir que en efecto quedamos con muy pocos datos para hacer una buena aproximación e incluso se han encontrado peores resultados en algunos casos. A continuación

mostramos los mismos gráficos que antes, pero generados con el método de Simpson.

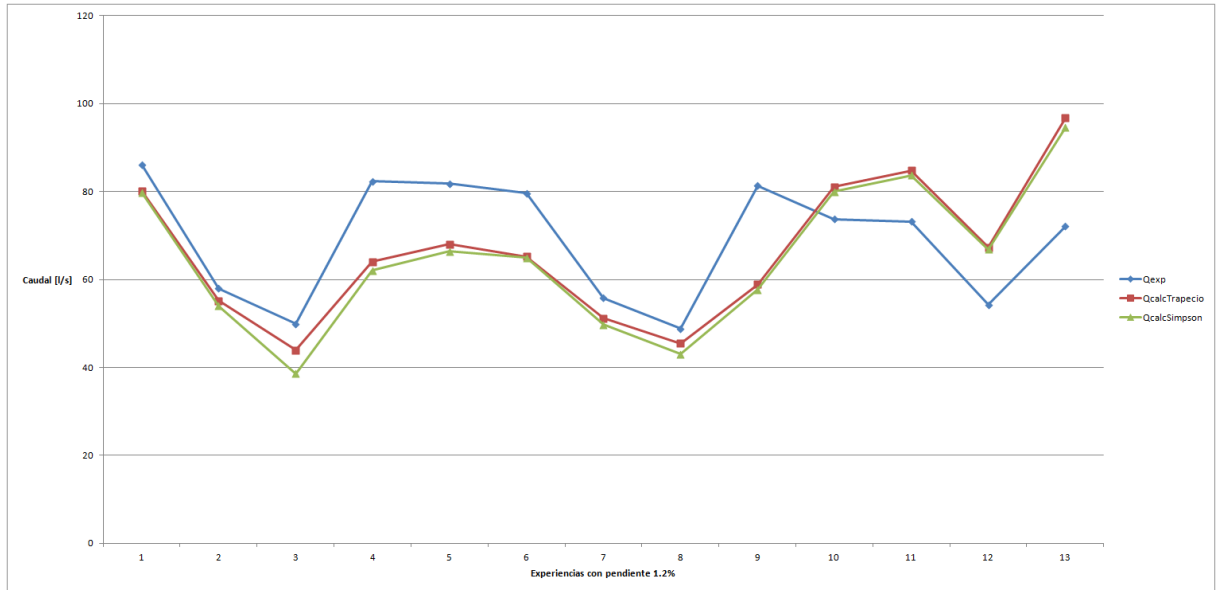


Figura 4.10: Comparación en los casos de una pendiente de 1.2% del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de simpson y el método del trapecio.

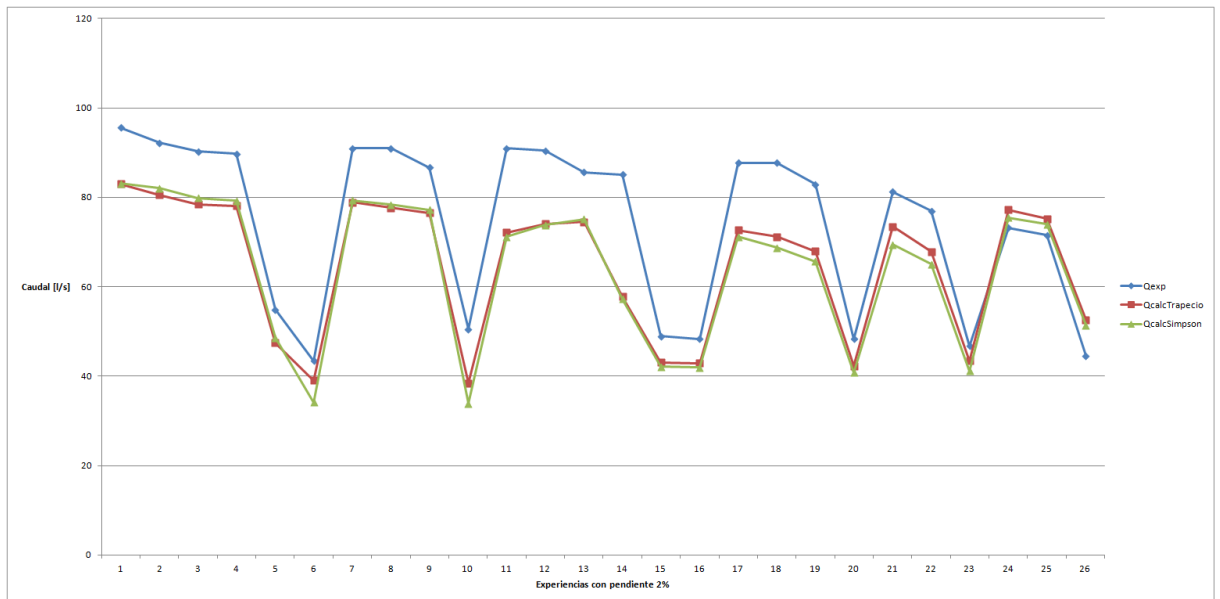


Figura 4.11: Comparación en los casos de una pendiente de 2% del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de simpson y el método del trapecio.

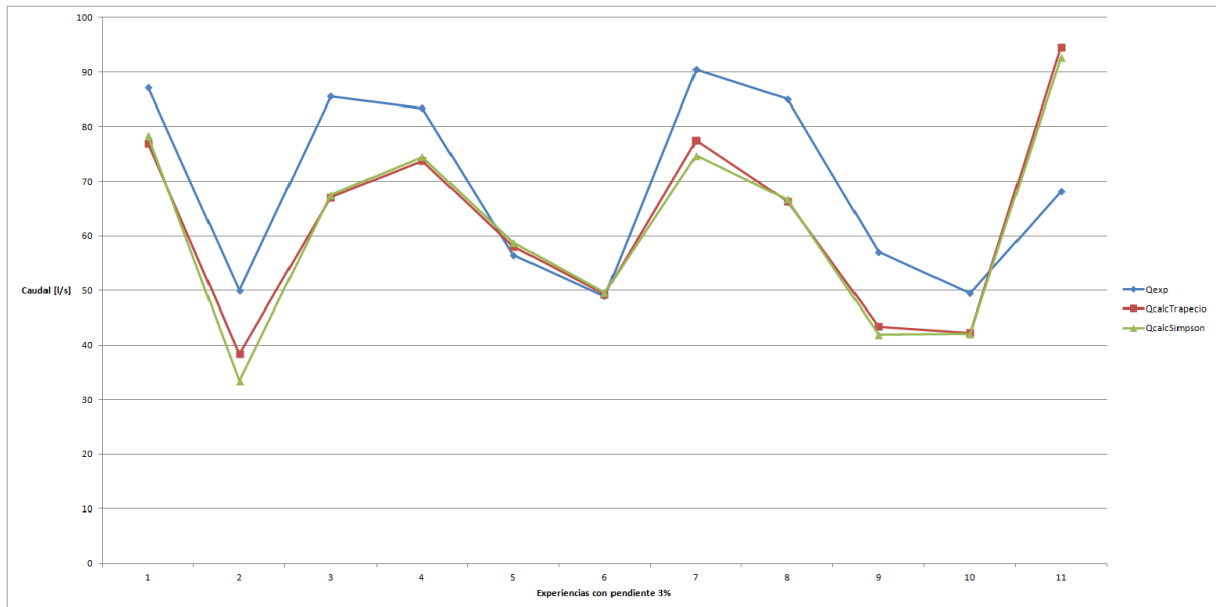


Figura 4.12: Comparación en los casos de una pendiente de 3% del caudal calculado experimentalmente, y los caudales calculados a partir de las velocidades, usando el método de Simpson y el método del trapecio.

Estos gráficos dicen al menos un par de cosas. Primero, es claro que no hay mucha diferencia entre usar el método de Simpson y el método del trapecio, puesto que no se aprecian diferencias significativas entre ambos. Esto se debe probablemente a que no hay suficientes puntos para sacarle provecho a la aproximación de Simpson. Por esta razón y puesto que el método del trapecio es más simple, este es el que se usa de aquí en adelante. Segundo, podemos confirmar que las aproximaciones de las integrales hacen en efecto su trabajo, aunque es notable que la aproximación parece ser casi siempre por abajo. Se conjetura que esto puede ser porque estamos aproximando una función cóncava.

4.1.4. Cálculo de μ y τ a partir de las velocidades locales

Puesto que se ha visto que las velocidades locales medidas son al menos consistentes con una medida experimental independiente del caudal, usaremos esta información para recuperar los datos intrínsecos del fluido, es decir sus parámetros fundamentales μ y τ . Para hacer esto, se usa el trabajo de las secciones anteriores, en que desarrollamos un algoritmo que dada una geometría, μ y τ , entrega una solución aproximada de la ecuación de movimiento para un fluido de Bingham. Se busca en el espacio de los parámetros, unos tal que la solución encontrada por el algoritmo se ajuste a los datos experimentales obtenidos para las velocidades. La gracia de esto, es que también se han medido independientemente μ y τ , por lo que se podrán verificar nuestros resultados.

Para empezar, se usará la notación $u_{\mu,\tau}$, para referirnos a la solución de (P), para explicitar la dependencia de μ y τ . Aquí se supone que Ω está fijo. Se quiere resolver para cada experimento,

el problema

$$(4.1) \quad \min_{\mu \geq 0, \tau \geq 0} \sum_{i \in I} (u_{\mu, \tau}(x_i) - u_i)^2$$

donde $\{(x_i, u_i)\}_{i \in I}$ son los datos de las velocidades locales para la experiencia. Pero notemos de (P) que si $\mu, \eta \geq 0$, tenemos que

$$(4.2) \quad \mu u_{\mu, \tau} = \eta u_{\eta, \tau}$$

para cualquier τ . Esto permite simplificar el problema anterior, pues usando como notación $u_\tau = u_{1, \tau}$, el problema se escribe

$$\min_{\mu \geq 0, \tau \geq 0} \sum_{i \in I} (\mu u_\tau(x_i) - u_i)^2.$$

Se puede resolver parcialmente este problema, pues la solución para μ se puede explicitar. En efecto, si fijamos τ , el mínimo en μ es la solución de igualar la derivada a cero. Esto es

$$\frac{\partial \sum_{i \in I} (\mu u_\tau(x_i) - u_i)^2}{\partial \mu} = 2 \sum_{i \in I} (\mu u_\tau(x_i) - u_i) u_\tau(x_i) = 0$$

es decir

$$\mu(\tau) = \frac{\sum_{i \in I} u_\tau(x_i) u_i}{\sum_{i \in I} u_\tau^2(x_i)}$$

y entonces podemos resolver

$$(4.3) \quad \min_{\tau \geq 0} \sum_{i \in I} (\mu(\tau) u_\tau(x_i) - u_i)^2.$$

Este problema se puede resolver usando una búsqueda lineal. A continuación se muestran los resultados de esta búsqueda, y se comparan con los parámetros obtenidos experimentalmente. Primero veamos lo que se obtuvo para el parámetro μ . Notamos que hay una discrepancia mayor en este caso.

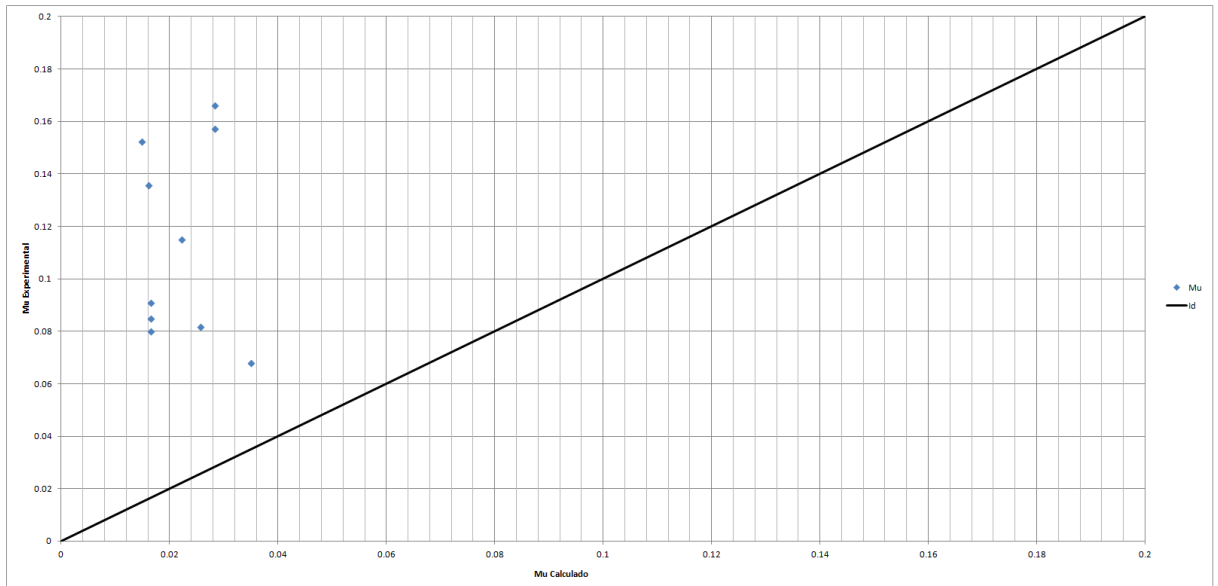


Figura 4.13: Comparamos para todos los casos de 1.2% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

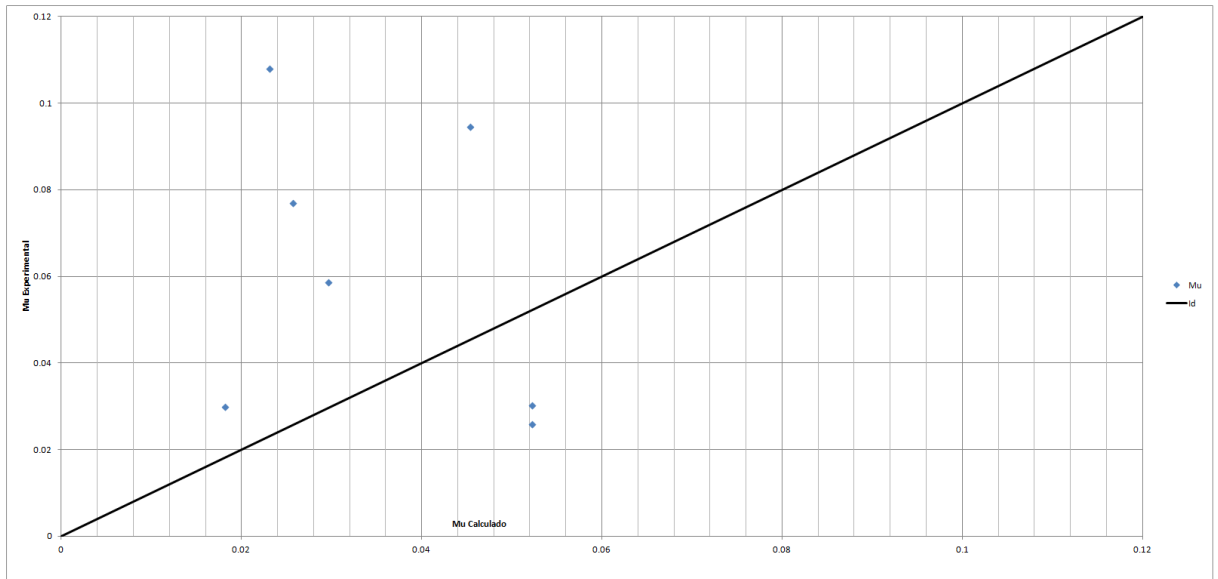


Figura 4.14: Comparamos para todos los casos de 2% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

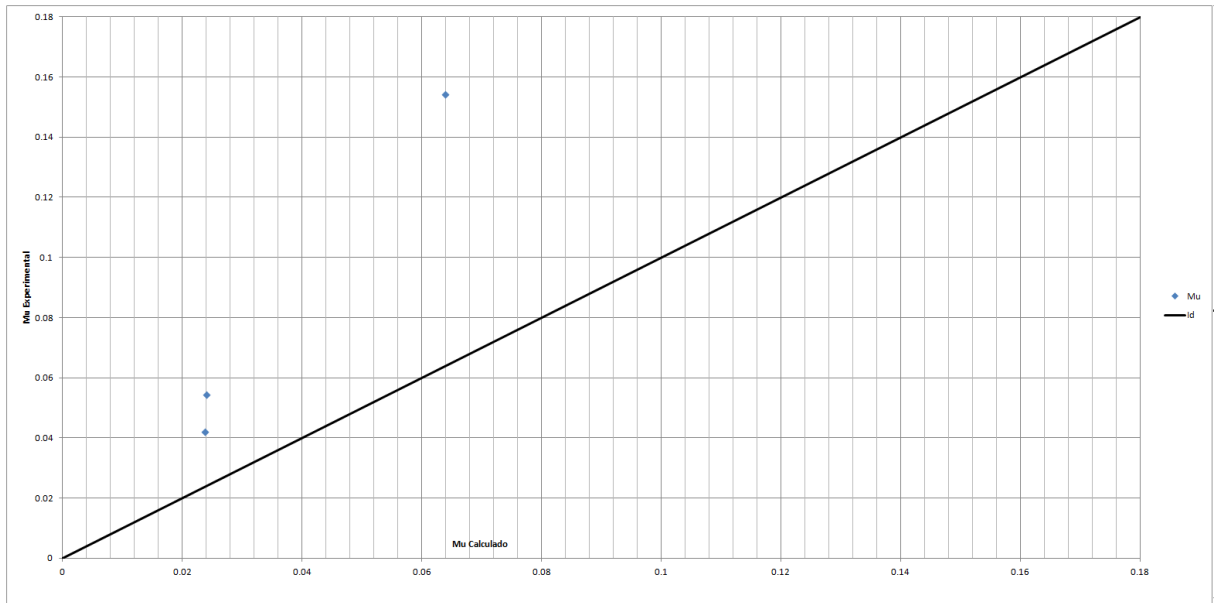


Figura 4.15: Comparamos para todos los casos de 3% pendiente, el μ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

Veamos ahora el caso de τ .

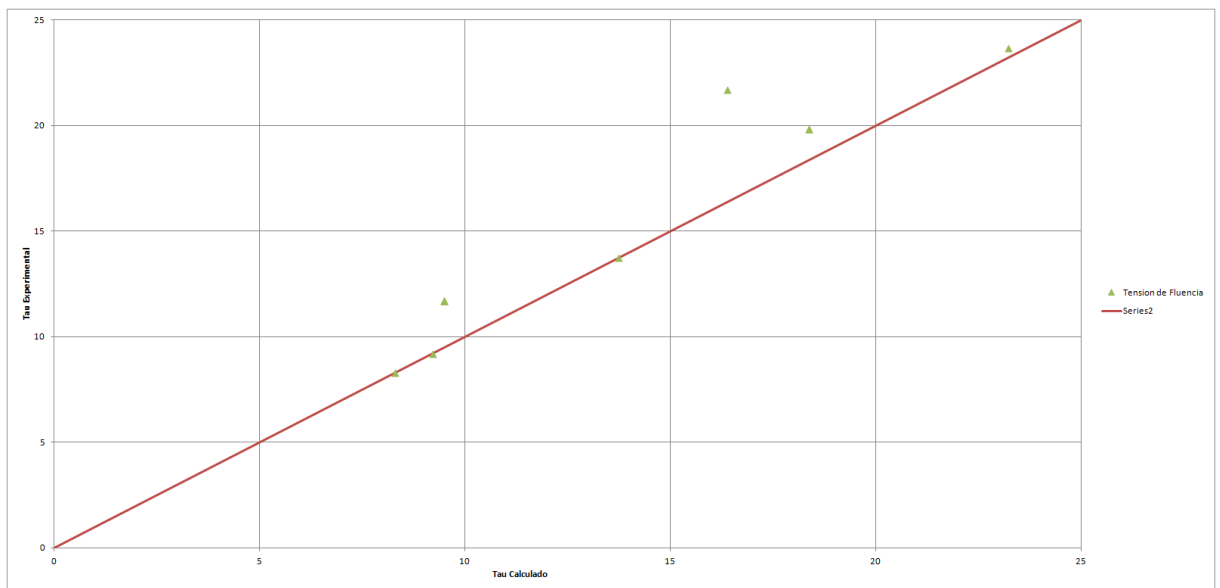


Figura 4.16: Comparamos para todos los casos de 1.2% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

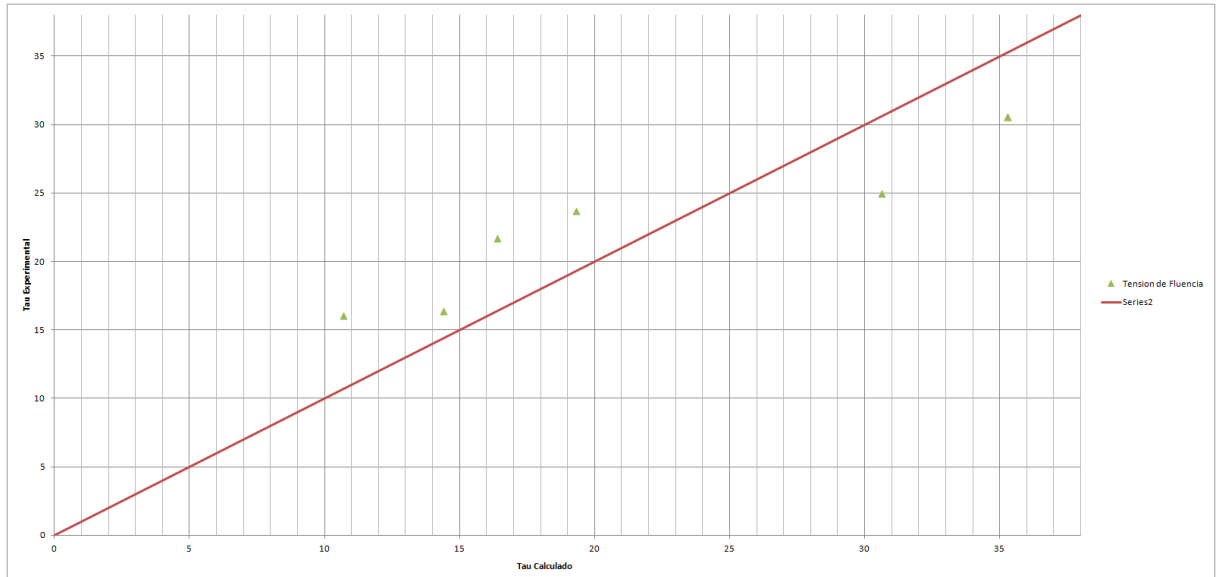


Figura 4.17: Comparamos para todos los casos de 2% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

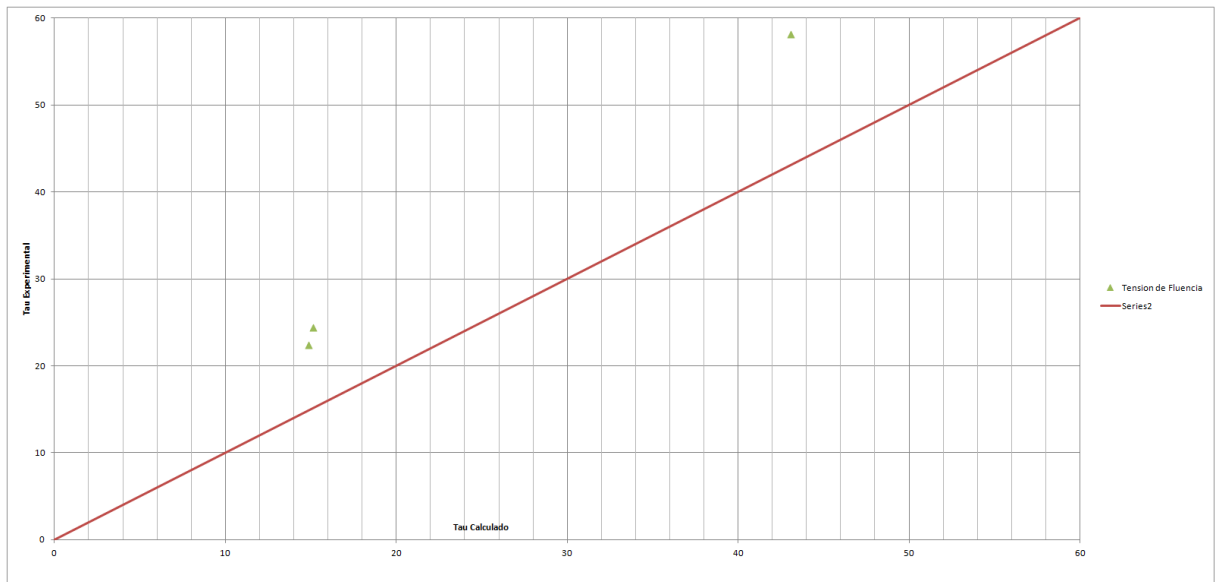


Figura 4.18: Comparamos para todos los casos de 3% pendiente, el τ calculado experimentalmente y el calculado mediante la minimización.

En el caso de τ el ajuste es bastante bueno, considerando el nivel de confianza que se tiene en los datos por la validación. Se puede entonces ver los perfiles de velocidades que se obtienen con estos parámetros calculados y los comparamos con los datos experimentales. Por ejemplo para el experimento J2, se obtiene lo siguiente.

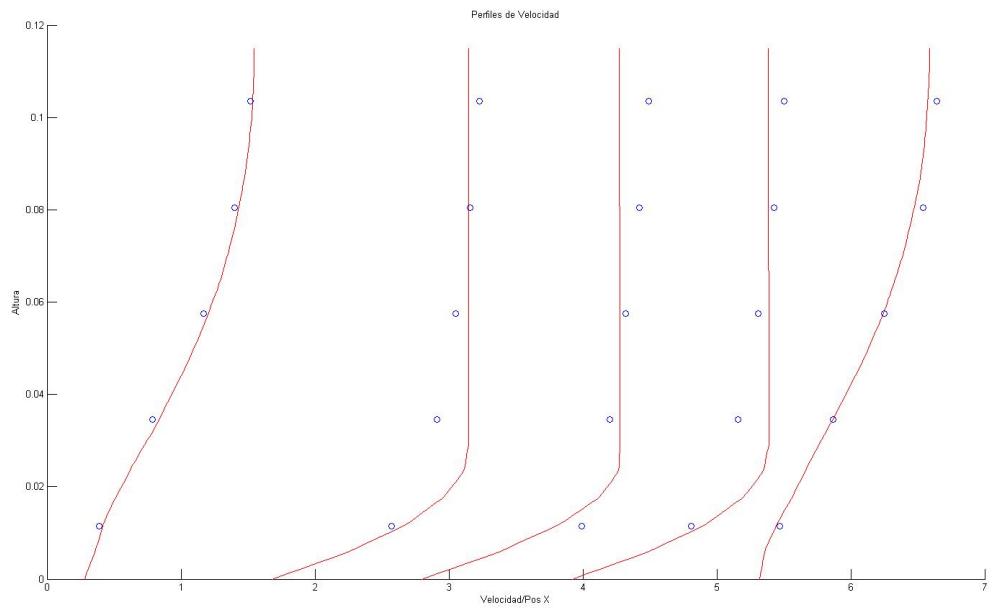


Figura 4.19: Mostramos aquí para el experimento J2 los perfiles de velocidad en rojo, generados por los parámetros calculados, y los círculos azules son los valores experimentales de estas velocidades.

Capítulo 5

Conclusiones

Se estudia el modelo de Bingham en una canaleta, con la gran suposición que la velocidad del fluido es paralelo a ésta. Esto permite simplificar mucho el problema, pues desaparece uno de los términos no lineales, el convectivo, y se puede enfocar la atención en la resolución del problema de la no linealidad impuesta por el modelo. En este punto, el problema se reduce a encontrar una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

En el siguiente paso se estudiaron formulaciones equivalentes a la EDP, que ayudaron a obtener un algoritmo que resuelve el problema de la no linealidad, mediante una sucesión de problemas lineales. Se comparan exitosamente los resultados de este algoritmo con la resolución explícita de algunos problemas simplificados por simetría, a saber, la resolución en un dominio circular.

Con la herramienta obtenida, se abordaron las consideraciones experimentales. En un comienzo se tienen tres conjuntos de datos independientes: las velocidades locales, los caudales y valores interpolados para μ y τ . Puesto que la mayor confianza experimental se tiene sobre los caudales, se verifica la consistencia de velocidades locales mediante una integración numérica. El segundo paso fue usar estas velocidades para obtener los valores de μ y τ usando el algoritmo, mediante una minimización de cuadrados. Por último se comparan estos resultados con los obtenidos experimentalmente. Los resultados indican que el algoritmo obtiene una buena aproximación para τ , pero una aproximación desventajosa para μ .

Capítulo 6

Bibliografía

- [1] J. Cea y R. Glowinski. Numerical methods for laminary flow of incompressible viscoplastic rigid fluid. *International Journal of Computer Mathematics*, 3(2-3), 1972.
- [2] G. Duvaut y J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, capítulos 6 y 7. Dunod, 1972.
- [3] R. Glowinski, J.L. Lions, y R. Trémolières. *Analyse numérique des inéquations variationnelles-applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution*, volumen 5.2 de *Méthodes Mathématiques de l'Informatique*, capítulos 5 y 6. Dunod, Bordas, Paris, 1976.
- [4] R. Glowinski, J.L. Lions, y R. Trémolières. *Analyse numérique des inéquations variationnelles-théorie générale premières applications*, volumen 5.1 de *Méthodes Mathématiques de l'informatique*, capítulo 2. Dunod, Bordas, Paris, 1976.
- [5] A. A. Goldstein. *Constructive real analysis*. Harper and Row(1967).
- [6] Jorge Alejandro Martínez Varas. Caracterización hidráulica de flujo hiperconcentrado de relaves en canales. Memoria Ingeniero Civil, con diploma en Ingeniería Hidráulica, Pontificia Universidad Católica de Chile-Escuela de Ingeniería, 2009.

Apéndice A

Algoritmo Volúmenes Finitos-Método de Newton y Punto Fijo 1-D

```
1 function a = A(N,mu)
2 v1 = mu*(2*(1:N-1)' - 1)/2;
3 v1 = [v1 ; 0];
4 v2 = -mu*2*(1:N-1)';
5 v2 = [-mu/2 ; v2 ; 1];
6 v3 = mu*(2*(1:N-1)' + 1)/2;
7 v3 = [mu/2 ; v3];
8 a = gallery('tridiag',v1,v2,v3);
9 end
```

VolumenesFinitos/A.m

```
1 function b = B(N, h, C)
2 x = h*(0:N)';
3 r = 0.5*(x(2:N+1) + x(1:N));
4 b = C*(r(2:N).^2 - r(1:N-1).^2)/2;
5 b = [C*(r(1)^2)/2; b ; 0];
6 end
```

VolumenesFinitos/B.m

```
1 function df = DF(w,h,N,epsilon,g,type)
2 x = h*((0:N)');
3 r = 0.5*(x(2:N+1) + x(1:N));
4 dw1 = (w(3:N+1)-w(2:N))/h;
5 dw2 = (w(2:N)-w(1:N-1))/h;
6
7 v1 = g*r(1:N-1).*Hp(dw2,epsilon,type)/h;
8 v1 = [v1 ; 0];
9
10 v2 = -g*r(2:N).*Hp(dw1,epsilon,type)/h - g*r(1:N-1).*Hp(dw2,epsilon,type)/h;
11 v2 = [-r(1)*g*Hp((w(2)-w(1))/h,epsilon,type)/h ; v2 ; 0];
12
13 v3 = g*r(2:N).*Hp(dw1,epsilon,type)/h;
```

```

14 v3 = [r(1)*g*Hp((w(2)-w(1))/h, epsilon , type)/h ; v3];
15
16 df = gallery('tridiag',v1,v2,v3);
17 end

```

VolumenesFinitos/DF.m

```

1 function f = F(w,h,N, epsilon ,g, type)
2 x = h*((0:N)');
3 r = 0.5*(x(2:N+1) + x(1:N));
4 dw1 = (w(3:N+1)-w(2:N))/h;
5 dw2 = (w(2:N)-w(1:N-1))/h;
6 f = g*(r(2:N).*H(dw1, epsilon , type) - r(1:N-1).*H(dw2, epsilon , type));
7 f = [r(1)*g*H((w(2)-w(1))/h, epsilon , type) ; f ; 0];
8 end

```

VolumenesFinitos/F.m

```

1 function h = H(dw, epsilon , type)
2 if (type == 1)
3 h = zeros(size(dw));
4 h(dw >= epsilon) = 1;
5 h(dw <= -epsilon) = -1;
6 h(abs(dw) < epsilon) = dw(abs(dw) < epsilon)/epsilon;
7 elseif type == 2
8 h = dw./sqrt(epsilon^2 + dw.^2);
9 elseif type == 3
10 h = dw.*(3 - dw.^2/(epsilon^2))/(2*epsilon);
11 h(dw >= epsilon) = 1;
12 h(dw <= -epsilon) = -1;
13 end
14 end

```

VolumenesFinitos/H.m

```

1 function hp = Hp(dw, epsilon , type)
2 if (type == 1)
3 hp = zeros(size(dw));
4 hp(dw >= epsilon) = 0;
5 hp(dw <= -epsilon) = 0;
6 hp(abs(dw) < epsilon) = 1/epsilon;
7 elseif type == 2
8 hp = epsilon^2./((epsilon^2 + dw.^2).^(3/2));
9 elseif type == 3
10 hp = 3*(epsilon^2 - dw.^2)/(2*epsilon^3);
11 hp(dw >= epsilon) = 0;
12 hp(dw <= -epsilon) = 0;
13 end
14 end

```

VolumenesFinitos/Hp.m

```

1 function w = newton(R, N, mu, g, C, epsilon , type , tolerance , maxiter)
2

```

```

3 h = R/N;
4
5 b = B(N,h,C);
6 a = A(N,mu);
7 %w = ((N - (0:N))')/N;
8 w = zeros(N+1,1);
9 x = h*(0:N);
10
11 m = 0;
12 while 1==1
13 lastw = w;
14
15 U = DF(w,h,N,epsilon,g,type) + a;
16 V = b - F(w,h,N,epsilon,g,type) - a*w;
17 d = U\V;
18 w = w + d;
19
20 norm(w-lastw,2)
21 m=m+1
22 if(norm(w-lastw,2) <= tolerance) || m>=maxiter
23     break;
24 end
25
26 end

```

VolumenesFinitos/newton.m

```

1 %Ecuacion B = F(w) + A*w
2 %Intentamos punto fijo: w = A^-1 * (B - F(w))
3 %constantes
4 epsilon = 0.05;
5 C = -1;
6 g = 0.1;
7 mu = 1;
8 R = 1;
9 N = 10000;
10
11 h = R/N;
12
13 b = B(N,h,C);
14 a = A(N,mu);
15 w = (N - (0:N))';
16 x = h*(0:N);
17 y = C*(x.^2 - (N*h)^2)/(4*mu) + g*(x - N*h)/mu;
18 y(x<=-2*g/C) = C*((2*g/C)^2 - (N*h)^2)/(4*mu) + g*(-2*g/C - N*h)/mu;
19 dy = C*x/(2*mu) + g/mu;
20 dy(x<=-2*g/C) = 0;
21
22 figure(1);
23 clf;
24
25 %% repetir
26 m = 1;
27 while 1==1
28 lastw = w;

```

```

29
30 w = a \ (b - F(w,h,N, epsilon ,g,1));
31
32 dw = (w(3:N+1)-w(1:N-1))/(2*h);
33 dw = [0 ; dw ; dw(end)];
34
35 subplot(2,1,1);
36 plot(x,w,'r');
37 hold on
38 plot(x,y,'b');
39 plot(-2*g/C*ones(2,1),[min(y), max(y)],'g-');
40 plot(-2*(g+mu*epsilon)/C*ones(2,1),[min(w);max(w)],'g-');
41 hold off
42
43 subplot(2,1,2);
44 plot(x,dw,'r');
45 hold on
46 plot(x,dy,'b');
47 plot(-2*g/C*ones(2,1),[min(dy), max(dy)],'g-');
48 plot(-2*(g+mu*epsilon)/C*ones(2,1),[min(dw);max(dw)],'g-');
49 hold off
50
51 norm(w-lastw,2)
52 m=m+1
53 if (norm(w-lastw,2) <= 1e-8) || m>=1000
54     break;
55 end
56 end

```

VolumenesFinitos/puntoFijo.m

```

1 %Ecuacion B = F(w) + A*w
2 %Encontramos d tal que B = F(w+d) + A(w+d) + o(delta^2)
3 % (DF(w) + A) d = b - F(w) - Aw
4 %constantes
5 epsilon = 0.002;
6 C = -2;
7 g = 0.5;
8 mu = 1;
9 R = 2;
10 N = 1000;
11 type = 2;
12
13 tolerance = 10^-8;
14 maxiter = 1000;
15
16 h = R/N;
17
18 x = h*(0:N);
19
20 y = C*(x.^2 - (N*h)^2)/(4*mu) + g*(x - N*h)/mu;
21 y(x<=-2*g/C) = C*((2*g/C)^2 - (N*h)^2)/(4*mu) + g*(-2*g/C - N*h)/mu;
22 dy = C*x/(2*mu) + g/mu;
23 dy(x<=-2*g/C) = 0;
24

```

```

25 figure(1);
26 clf;
27
28 subplot(2,1,1);
29 plot(x,y,'b');
30 hold on
31 title('Solucion teorica y regularizada');
32 xlabel('r');
33 ylabel('velocidad')
34
35 subplot(2,1,2);
36 plot(x,dy,'b');
37 hold on
38 xlabel('r');
39 ylabel('gradiente de velocidad')
40
41 for epsilon=0.2:-0.032:0.002
42     w = newton(R,N,mu,g,C,epsilon,type,tolerance,maxiter);
43     dw = (w(3:N+1)-w(1:N-1))/(2*h);
44     dw = [0 ; dw ; dw(end)];
45
46     subplot(2,1,1);
47     plot(x,w,'r');
48
49     subplot(2,1,2);
50     plot(x,dw,'r');
51 end

```

VolumenesFinitos/resolucion.m

Apéndice B

Algoritmo Predictor Corrector 1-D

```
1 % Minimizando  $0.5*u'*A*u - b'*u + G(u, \epsilon)$  en u
2 R = 2;
3 N = 100000;
4 h = R/N;
5 g = 0.8;
6 mu = 1;
7 C = 1;
8
9 u = zeros(N,1);
10 x = h*(0:N);
11
12 A = matriz(N, mu);
13 b = ladoDerecho(N, h, C);
14
15 F = @(u) 0.5*u'*A*u - u'*b + G(u,0, h, g, N);
16 JF = @(u, epsilon) A*u - b + JG(u, epsilon, h, g);
17 JFeps = @(u, epsilon) JGeps(u, epsilon, h, g);
18 HF = @(u, epsilon) A + HG(u, epsilon, h, g);
19
20 y = -C*(x.^2 - R^2)/(4*mu) + g*(x-R)/mu;
21 r0 = 2*g/C;
22 y(x < r0) = -C*(r0^2 - R^2)/(4*mu) + g*(r0 - R)/mu;
23
24 %F(y(1:end-1)')
25 plot(x, y, 'r');
26 hold on
27 pl = plot(x, [u;0], 'b');
28 set(pl, 'EraseMode', 'xor', 'MarkerSize', 18);
29 axis([0 R 0 max(y)*1.5])
30
31 epsilon = 1;
32 r = JF(u, epsilon);
33 while( norm(r,2)/sqrt(N) > epsilon )
34     epsilon = epsilon + 1;
35     r = JF(u, epsilon);
36 end
37 k = 1;
```

```

38 while epsilon > 10^-4
39     drawnow
40     ugorro = Predictor(u, epsilon, next(epsilon), JF, HF, JFeps);
41     epsilon = next(epsilon);
42     if(norm(JF(u, epsilon), 2) >= norm(JF(ugorro, epsilon), 2) || k==1)
43         u = ugorro;
44     end
45     r = JF(u, epsilon);
46     maxiter = 10;
47     while norm(r,2)/sqrt(N) > epsilon*10^-4 && maxiter>0
48         u = Corrector(u, epsilon, F, JF, HF);
49         r = JF(u, epsilon);
50         fprintf('Newton : |JF(u, epsilon)| = %g\n', norm(r,2)/sqrt(N));
51         maxiter = maxiter - 1;
52         %pause(0.8)
53         set(pl, 'YData', [u;0]);
54         drawnow
55     end
56     set(pl, 'YData', [u;0]);
57     fprintf('k=%d epsilon=%g |JF(u, epsilon)|=%g |u-y|=%g\n', k, epsilon, norm(r,2)
58         /sqrt(N), norm(y-[u;0]', 2)/sqrt(N));
59     %fprintf('F(u) = %g\n', F(u));
60     %pause(1);
61     k = k+1;
62 end
y(1)-u(1)

```

PredictorCorrector/algorithmo.m

```

1 function correccion = Corrector(uaprox, epsilon, F, JF, HF)
2 d = HF(uaprox, epsilon)\(JF(uaprox, epsilon));
3 f = @(x) norm(JF(uaprox - x*d, epsilon), 2);
4 a = 0;
5 b = 1.5;
6 while(f(0) > f(b))
7     b = 2*b;
8 end
9 [a,b] = gss(f, a, b, 10^-11, 100);
10 correccion = uaprox - (a+b)*d/2;
11 end

```

PredictorCorrector/Corrector.m

```

1 function prediccion = Predictor(u, epsilon1, epsilon2, JF, HF, JFeps)
2 r = JF(u, epsilon1);
3 prediccion = u - HF(u, epsilon1)\((JFeps(u, epsilon1)*(epsilon2-epsilon1) + r));
4 end

```

PredictorCorrector/Predictor.m

```

1 function [a,b] = gss(f, a, b, eps, N)
2 c = (-1+sqrt(5))/2;
3 x1 = c*a + (1-c)*b;
4 fx1 = feval(f, x1);
5 x2 = (1-c)*a + c*b;

```

```

6 fx2 = feval(f,x2);
7 for i = 1:N-2
8   if fx1 < fx2
9     b = x2;
10    x2 = x1;
11    fx2 = fx1;
12    x1 = c*a + (1-c)*b;
13    fx1 = feval(f,x1);
14  else
15    a = x1;
16    x1 = x2;
17    fx1 = fx2;
18    x2 = (1-c)*a + c*b;
19    fx2 = feval(f,x2);
20  end;
21  if (abs(b-a) < eps)
22    return;
23  end;
24 end;
25
26 end

```

PredictorCorrector/gss.m

```

1 function n = next(epsilon)
2 if(epsilon >= 1)
3   n = epsilon/2;
4 else
5   n = epsilon^(1.1);
6 end
7 end

```

PredictorCorrector/next.m

```

1 function r = G(u, epsilon, h, g, N)
2 r = (2*N-1)*H(u(end),epsilon);
3 for i=0:N-2
4   r = r + (2*i+1)*H(u(i+1) - u(i+2),epsilon);
5 end
6 r = r*g*h/2;
7 end

```

PredictorCorrector/G.m

```

1 function y = H(x,epsilon)
2 if(epsilon > 0)
3   %% viene de la aproximacion |x| ~ sqrt(x^2 + eps^2)
4   y = sqrt(x.^2 + epsilon^2);
5   %%viene de la aproximacion |x| ~ eps*log(2*cosh(x/eps))
6   %y = epsilon*log(cosh(x/epsilon));
7 else
8   y = abs(x);
9 end

```

PredictorCorrector/H.m

```

1 function M = HG(u, epsilon, h, g)
2 u = [u;0];
3 N = length(u);
4 du = (u(2:end) - u(1:end-1))/h;
5 du = Hpp(du, epsilon);
6 du = (2*(1:N-1)-1)' .* du;
7 du = [0 ; du ; 0];
8 v1 = 0.5*g*(du(1:end-1) + du(2:end));
9 v1 = v1(1:end-1);
10 v2 = -0.5*g*du(2:end-1);
11 v2 = v2(1:end-1);
12 M = gallery('tridiag', v2, v1, v2);
13 end

```

PredictorCorrector/HG.m

```

1 function y = Hpeps(x, epsilon)
2 % viene de la aproximacion |x| ~ sqrt(x^2 + eps^2)
3 y = -x*epsilon ./ ((x.^2 + epsilon^2).^(3/2));
4 %viene de la aproximacion |x| ~ eps*log(2 cosh(x/eps))
5 %y = -((sech(x/epsilon)).^2).*x/(epsilon^2);
6 end

```

PredictorCorrector/Hpeps.m

```

1 function y = Hpp(x, epsilon)
2 % viene de la aproximacion |x| ~ sqrt(x^2 + eps^2)
3 y = (epsilon^2) ./ ((x.^2 + epsilon^2).^(3/2));
4 %viene de la aproximacion |x| ~ eps*log(cosh(x/eps))
5 %y = ((sech(x/epsilon)).^2)/epsilon;
6 end

```

PredictorCorrector/Hpp.m

```

1 function v = JG(u, epsilon, h, g)
2 u = [u;0];
3 N = length(u);
4 du = (u(2:end) - u(1:end-1))/h;
5 du = Hp(du, epsilon);
6 du = (2*(1:N-1)-1)' .* du;
7 du = [0 ; du ; 0];
8 v = 0.5*g*h*(du(1:end-1) - du(2:end));
9 v = v(1:end-1);
10 end

```

PredictorCorrector/JG.m

```

1 function v = JGeps(u, epsilon, h, g)
2 u = [u;0];
3 N = length(u);
4 du = (u(2:end) - u(1:end-1))/h;
5 du = Hpeps(du, epsilon);
6 du = (2*(1:N-1)-1)' .* du;
7 du = [0 ; du ; 0];

```

```
8 v = 0.5*g*h*(du(1:end-1) - du(2:end));
9 v = v(1:end-1);
10 end
```

PredictorCorrector/JGeps.m

```
1 function b = ladoDerecho(N,h,C)
2 b = (0:N-1);
3 b(1) = 1/6;
4 b = C*h*h*b';
5 end
```

PredictorCorrector/ladoDerecho.m

```
1 function A = matriz(N,mu)
2 v1 = -0.5*(2*(0:N-2) + 1);
3 v2 = 2*(0:N-1);
4 v2(1) = 0.5;
5 A = mu*gallery('tridiag',v1,v2,v1);
6 end
```

PredictorCorrector/matriz.m

Apéndice C

Algoritmo Uzawa 2-D

```
1 function A = matriz(P, T, mu)
2 np = length(P);
3 nt = length(T);
4 I = zeros(1,9*nt);
5 J = zeros(1,9*nt);
6 V = zeros(1,9*nt);
7 index = 0;
8 for k=1:length(T)
9     index = index + 1;
10    I(index) = T(k,1);
11    J(index) = T(k,1);
12    V(index) = grad(P,T(k,:),1,1);
13    g12 = grad(P,T(k,:),1,2);
14    index = index + 1;
15    I(index) = T(k,1);
16    J(index) = T(k,2);
17    V(index) = g12;
18    index = index + 1;
19    I(index) = T(k,2);
20    J(index) = T(k,1);
21    V(index) = g12;
22
23    index = index + 1;
24    I(index) = T(k,2);
25    J(index) = T(k,2);
26    V(index) = grad(P,T(k,:),2,2);
27    g23 = grad(P,T(k,:),2,3);
28    index = index + 1;
29    I(index) = T(k,2);
30    J(index) = T(k,3);
31    V(index) = g23;
32    index = index + 1;
33    I(index) = T(k,3);
34    J(index) = T(k,2);
35    V(index) = g23;
36
37    index = index + 1;
```

```

38     I(index) = T(k,3);
39     J(index) = T(k,3);
40     V(index) = grad(P,T(k,:),3,3);
41     g31 = grad(P,T(k,:),3,1);
42     index = index + 1;
43     I(index) = T(k,3);
44     J(index) = T(k,1);
45     V(index) = g31;
46     index = index + 1;
47     I(index) = T(k,1);
48     J(index) = T(k,3);
49     V(index) = g31;
50 end
51
52 A = mu*sparse(I,J,V,np,np);
53 end

```

2DElementosFinitos/matriz.m

```

1 function g = grad(P,T, i1, i2)
2 %Calcula el gradiente punto gradiente
3 k1 = mod((i1+2)-1,3) + 1;
4 j1 = mod((i1+1)-1,3) + 1;
5 k2 = mod((i2+2)-1,3) + 1;
6 j2 = mod((i2+1)-1,3) + 1;
7 g = (P(T(k1),2) - P(T(j1),2))*(P(T(k2),2) - P(T(j2),2));
8 g = g + (P(T(k1),1) - P(T(j1),1))*(P(T(k2),1) - P(T(j2),1));
9 g = g/(4*T(4));
10 end

```

2DElementosFinitos/grad.m

```

1 function b = ladoDerechoEstatico(P,T,C)
2 np = length(P);
3 b = zeros(np,1);
4 for k=1:length(T)
5     b(T(k,1:3)) = b(T(k,1:3)) + C*T(k,4)/3;
6 end
7 end

```

2DElementosFinitos/ladoDerechoEstatico.m

```

1 function d = ladoDerechoDinamico(P,T,g,lambda)
2 np = length(P);
3 d = zeros(np,1);
4 for k=1:length(T)
5     d(T(k,1)) = d(T(k,1)) - g*(lambda(k,1)*(-(P(T(k,3),2)-P(T(k,2),2))) +
6         lambda(k,2)*(P(T(k,3),1)-P(T(k,2),1)))/2;
7     d(T(k,2)) = d(T(k,2)) - g*(lambda(k,1)*(-(P(T(k,1),2)-P(T(k,3),2))) +
8         lambda(k,2)*(P(T(k,1),1)-P(T(k,3),1)))/2;
9     d(T(k,3)) = d(T(k,3)) - g*(lambda(k,1)*(-(P(T(k,2),2)-P(T(k,1),2))) +
10        lambda(k,2)*(P(T(k,2),1)-P(T(k,1),1)))/2;
11 end
12 end

```

2DElementosFinitos/ladoDerechoDinamico.m

```

1 function [v lambda] = gradienteProyectado(mu, C, g, v, lambda, P, T)
2 rho = 1/(g^2);
3
4 A = matriz(P,T,mu);
5 b = ladoDerechoEstatico(P,T,C);
6
7 Ic = find(P(:,3)==1);
8 Ac = A(Ic, Ic);
9 bc = b(Ic);
10
11 d = ladoDerechoDinamico(P,T,g,lambda);
12 dc = d(Ic);
13 v(Ic) = Ac\b(c+dc);
14 lambda = proyeccion(lambda, rho, v, g, P, T);
15
16 end

```

2DElementosFinitos/gradienteProyectado.m

```

1 function l = proyeccion(lambda, rho, v, g, P, T)
2 l = lambda;
3 for k=1:length(T)
4     l(k,:) = l(k,:) + rho*g*v(T(k,1))*[-(P(T(k,3),2)-P(T(k,2),2)) (P(T(k,3),1)-
5         P(T(k,2),1))]/(2*T(k,4));
6     l(k,:) = l(k,:) + rho*g*v(T(k,2))*[-(P(T(k,1),2)-P(T(k,3),2)) (P(T(k,1),1)-
7         P(T(k,3),1))]/(2*T(k,4));
8     l(k,:) = l(k,:) + rho*g*v(T(k,3))*[-(P(T(k,2),2)-P(T(k,1),2)) (P(T(k,2),1)-
9         P(T(k,1),1))]/(2*T(k,4));
10
11 end
12 n2 = sum(l.^2,2);
13 n2 = max(n2,1);
14 l(:,1) = l(:,1) ./ sqrt(n2);
15 l(:,2) = l(:,2) ./ sqrt(n2);
16 end

```

2DElementosFinitos/proyeccion.m

```

1 function [P T] = triangulacion2(a,b, N1, N2)
2 X = linspace(0,a,N1+1);
3 Y = linspace(0,b,N2+1);
4 [XX,YY]=meshgrid(X,Y);
5 BORDER = 1 - ((XX == 0) | (XX == a) | (YY == 0) | (YY == b));
6 P = [XX(:) YY(:) BORDER(:)];
7 T = delaunay(XX,YY);
8 A = 0.5*abs(XX(T(:,1)).*YY(T(:,2)) - XX(T(:,1)).*YY(T(:,3)) + XX(T(:,2)).*YY(T
9     (:,3)) - XX(T(:,2)).*YY(T(:,1)) + XX(T(:,3)).*YY(T(:,1)) - XX(T(:,3)).*YY(T
10    (:,2)));
11 T = [T A];
12 end

```

2DElementosFinitos/triangulacion2.m

```

1 %% Setear constantes y la triangulacion
2 mu = 1;

```



```

3 C = 1;
4 g = 0.3;
5 rho = 1/(g^2);
6 a = 2;
7 N1 = 99;
8 b = 2;
9 N2 = 99;
10
11 [P T] = triangulacion2(a,b,N1,N2);
12
13 v = zeros(length(P),1);
14 lambda = zeros(length(T),2);
15
16 %% Un paso del algoritmo
17 [v lambda] = gradienteProyectado(mu, C, g, v, lambda, P, T);
18
19 %% Dibujar resultados
20 figure(1)
21 Cs = P(T(:,1),:) + P(T(:,2),:) + P(T(:,2),:);
22 Cs = Cs/3;
23 quiver(Cs(:,1),Cs(:,2), lambda(:,1), lambda(:,2))
24 w = reshape(v,N1+1,N2+1);
25 figure(2)
26 %plot3(P(:,1), P(:,2), v, 'rx')
27 surf(w)
28 shading interp
29 figure(3)
30 contour(w,20)

```

2DElementosFinitos/resolucionRectangulo.m

Apéndice D

Algoritmo de Minimización de μ y τ

El siguiente código se usa en conjunto con el algoritmo de Uzawa.

```
1 %% datos iniciales
2 clear
3 global mu C anchoCanal alturaNormal P T tolerance D;
4 mu = 0.024032395; % Pascales*sec
5 g = 15.1226893; % Pascales
6
7 % datos fijos
8 inclinacion = 3.0;
9 densidad = 1660.932495;
10 C = densidad*9.8*inclinacion/sqrt(100^2 + inclinacion^2); % f/rho - deltaP %
11 anchoCanal = 0.56;
12 alturaNormalDoble = 0.078*2;
13 alturaNormal = alturaNormalDoble/2;
14 N1 = 29;
15 N2 = 29;
16 [P T] = triangulacion2(anchoCanal, alturaNormalDoble, N1, N2);
17 tolerance = 10^-2;
18
19 % datos para comparar
20 D = [2.09 2.69 2.73 2.69 2.38
21 2.22 2.67 2.69 2.65 2.34
22 2.16 2.61 2.64 2.59 2.26
23 2.1 2.55 2.59 2.52 2.16
24 1.9 2.34 2.35 2.28 2.09];
25
26 %% ajustar mu y g
27 b = g;
28 atb = cache_function(b);
29 a = g;
30 ata = atb;
31 while ata <= atb
32     a = a/2;
33     ata = cache_function(a);
34 end
35 c = g;
```

```

36 atc = atb;
37 while atc <= atb
38     c = c*2;
39     atc = cache_function(c);
40 end
41
42 %% busqueda
43 f = @(x) cache_function(x);
44 g = goldenSectionSearch(a,b,c,0.01,f);
45
46 [v lambda] = resolucionEstacionaria(P, T, mu, g, C, tolerance);
47 mubarra = getMuBarra(D,P,v,anchoCanal,alturaNormal,mu);
48 V = mu*v/mubarra;
49 mu = mubarra;
50
51 dibujarPerfilVertical(P,V,anchoCanal*0.3);
52 hold on
53 y = [0.9 0.7 0.5 0.3 0.1]*alturaNormal;
54 plot(D(:,2), y, 'b*');
55 hold off

```

BusquedaDeParametros/buscaParametros.m

```

1 function f = cache_function(y)
2 global fCache
3 %if ~exist('fCache','var')
4 %    fCache = zeros(2,0);
5 %end
6 if ~isempty(fCache) && any(fCache(1,:)==y)
7     f = fCache(2,fCache(1,:)==y);
8 else
9     f = J(y);
10    fCache = [fCache [y;f]];
11 end
12 end

```

BusquedaDeParametros/cache_function.m

```

1 function dibujarPerfilVertical(P,v,x)
2 Y = linspace(min(P(:,2)),max(P(:,2))/2,100);
3 X = ones(size(Y))*x;
4 Z = griddata(P(:,1), P(:,2), v, X, Y);
5 plot(Z,Y,'r')
6 end

```

BusquedaDeParametros/dibujarPerfilVertical.m

```

1 function mubarra = getMuBarra(D, P, V, anchoCanal, alturaNormal, mu)
2 x = [0.05 0.3 0.5 0.7 0.95]*anchoCanal;
3 y = [0.9 0.7 0.5 0.3 0.1]*alturaNormal;
4 [X Y] = meshgrid(x,y);
5 Z = griddata(P(:,1),P(:,2),V,X,Y);
6 mubarra = mu*sum(sum(Z.*Z))/sum(sum(D.*Z));
7 end

```

BusquedaDeParametros/getMuBarra.m

```
1 function r = goldenSectionSearch(a,b,c,tau,f)
2 phi = (1 + sqrt(5))/2;
3 resphi = 2-phi;
4 if c-b > b-a
5     x = b + resphi*(c-b);
6 else
7     x = b - resphi*(b-a);
8 end
9 x
10 if abs(c-a) < tau*(abs(b) + abs(x))
11     r = (c+a)/2;
12     return;
13 end
14 if f(x) < f(b)
15     if c-b > b-a
16         r = goldenSectionSearch(b,x,c,tau,f);
17         return;
18     else
19         r = goldenSectionSearch(a,x,b,tau,f);
20         return;
21     end
22 else
23     if c-b > b-a
24         r = goldenSectionSearch(a,b,x,tau,f);
25         return;
26     else
27         r = goldenSectionSearch(x,b,c,tau,f);
28         return;
29     end
30 end
31 end
```

BusquedaDeParametros/goldenSectionSearch.m

```
1 function dibujarPerfilVertical(P,v,x)
2 Y = linspace(min(P(:,2)),max(P(:,2))/2,100);
3 X = ones(size(Y))*x;
4 Z = griddata(P(:,1),P(:,2),v,X,Y);
5 plot(Z,Y,'r')
6 end
```

BusquedaDeParametros/dibujarPerfilVertical.m

```
1 function e = RMSError(D,P,V,anchoCanal,alturaNormal)
2 x = [0.05 0.3 0.5 0.7 0.95]*anchoCanal;
3 y = [0.9 0.7 0.5 0.3 0.1]*alturaNormal;
4 [X Y] = meshgrid(x,y);
5 Z = griddata(P(:,1),P(:,2),V,X,Y);
6 e = sqrt(sum(sum((Z-D).^2)));
7 end
```

BusquedaDeParametros/RMSError.m

```
1 function j = J(g)
2 % necesita las variables globales
3 % mu, P, T, C, tolerance, anchoCanal, alturaNormal, D
4 global mu P T C tolerance anchoCanal alturaNormal D
5 [v lambda] = resolucionEstacionaria(P, T, mu, g, C, tolerance);
6 mubarra = getMuBarra(D,P,v,anchoCanal,alturaNormal,mu);
7 V = mu*v/mubarra;
8 j = RMSError(D,P,V, anchoCanal, alturaNormal);
9 mu = mubarra;
10 end
```

BusquedaDeParametros/J.m

Apéndice E

Datos Experimentales

Estos datos pertenecen en su mayoría a la tesis de Jorge Martínez, con excepción de los parámetros calculados. El trabajo de esta memoria puede ser reproducido con estos datos y los algoritmos anteriores, salvo que faltan los datos de las velocidades locales, que se pueden obtener de dicha tesis.

Experiencia	base [m]		i [%]		d50 [mm]		d85 [mm]		rs [kg/m ³]		To [°C]		Tf [°C]		g [m/s ²]					
	B.1	B.2	B.2	B.2	B.3	B.3	B.4	B.4	B.5	B.5	C.1	C.1	D.1	D.1	D.2	D.2	D.3	D.3	E.1	
Peso Total	3220.0000	3220.0000	3365.0000	3025.0000	3610.0000	3395.0000	3580.0000	3730.0000	3100.0000	3500.0000										
Volumen	1758.0000	1758.0000	1848.0000	1640.0000	2020.0000	1820.0000	1895.0000	2000.0000	1610.0000	1820.0000										
Cp	58.9000	58.9000	58.9000	58.7000	58.0000	61.3000	63.1000	62.4000	63.1000	64.5000										
Altura N.	0.1190	0.1190	0.1210	0.1070	0.1020	0.1360	0.2080	0.2150	0.2040	0.2320										
Vel. Media	1.2400	1.2300	1.1800	0.9300	0.8600	1.0700	0.6300	0.6100	0.4800	0.5500										
Cv	33.8545	33.8545	33.8545	33.6698	33.0296	36.1311	37.9161	37.2137	37.9161	39.3533										
Densidad	1609.3804	1609.3804	1609.3804	1606.0571	1594.5330	1650.3595	1682.4901	1669.8473	1682.4901	1708.3588										
μ	0.0165	0.0165	0.0165	0.0161	0.0149	0.0222	0.0284	0.0257	0.0284	0.0350										
τ	9.4866	9.4866	9.4866	9.2057	8.2944	13.7434	18.3788	16.3927	18.3788	23.2242										
V	1.2350	1.2275	1.1747	0.9312	0.8543	1.0675	0.6327	0.6080	0.4753	0.5550										
X	0.5118	0.5118	0.5118	0.5076	0.4932	0.5657	0.6107	0.5927	0.6107	0.6489										
Rh	0.0835	0.0835	0.0845	0.0774	0.0748	0.0915	0.1193	0.1216	0.1180	0.1269										
Re2	1968.6035	1945.3352	1786.4151	1161.3842	1078.2293	1054.9838	288.4693	296.5669	163.4243	178.8784										
Fr	1.1432	1.1363	1.0784	0.9091	0.8542	0.9243	0.4430	0.4187	0.3361	0.3679										
Caudal Calc	64.0702	68.0111	65.1885	51.1402	45.4318	58.8764	81.0919	84.7962	67.2888	96.6995										
Caudal	82.3000	81.8000	79.6000	55.8000	48.8000	81.3000	73.7000	73.2000	54.3000	72.1000										
μ_{\min}	0.0847	0.0798	0.0909	0.1356	0.1524	0.1150	0.1573	0.0817	0.1661	0.0680										
τ_{\min}	11.7022	11.7022	11.7022	9.1941	8.2839	13.7261	19.8404	21.6994	19.8404	23.6825										
μ_{\exp} / μ_{\min}	0.1950	0.2070	0.1817	0.1190	0.0979	0.1930	0.1806	0.3149	0.1710	0.5148										
$\tau_{\exp} / \tau_{\min}$	0.8107	0.8107	0.8107	1.0013	1.0013	1.0013	0.9263	0.7554	0.9263	0.9806										
altura / base	0.2125	0.2125	0.2161	0.1911	0.1821	0.2429	0.3714	0.3839	0.3643	0.4143										

Cuadro E.1 : Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 1.2%

Experiencia	base [m]		i [%]	d50 [mm]	d85 [mm]	rs [kg/m ³]	To [°C]	Tf [°C]	g[m/s ²]	
	0.56	2	0.064	0.25	2800	20	25	9.80665		
	I.4	J.1	J.2	J.3	K.1	K.2	K.3			
Peso Total	[gr]	2865.0000	2785.0000	2455.0000	3080.0000	2570.0000	3095.0000			
Volumen	[l]	1765.0000	1650.0000	1470.0000	1860.0000	1465.0000	1780.0000			
Cp	[%]	59.7000	63.4000	62.4000	61.6000	66.9000	66.1000			
Altura N.	[m]	0.0770	0.1200	0.1150	0.0920	0.1420	0.1240			
Vel. Media	[m/s]	1.1200	1.2100	1.2000	0.9100	0.9200	0.6400			
Cv	[%]	34.6007	38.2204	37.2137	36.4238	41.9225	41.0508			
Densidad	[Kg/m ³]	1622.8121	1687.9672	1669.8473	1655.6291	1754.6058	1738.9144			
μ	[Pa sec]	0.0182	0.0297	0.0257	0.0231	0.0522	0.0454			
τ	[Pa]	10.7121	19.3123	16.3927	14.4144	35.2873	30.6179			
V	[m/s]	1.1215	1.2094	1.1950	0.9072	0.9203	0.6421			
X	□	0.5291	0.6187	0.5927	0.5729	0.7218	0.6964			
Rh	[m]	0.0604	0.0840	0.0815	0.0692	0.0942	0.0859			
Re2	□	1434.1165	979.3716	1112.5875	725.8208	327.4223	183.2851			
Fr	□	1.2906	1.1148	1.1253	0.9551	0.7799	0.5823			
Caudal Calc	[l/s]	42.2786	73.4471	67.8132	43.4352	77.2298	52.6364			
Caudal	[l/s]	48.3600	81.2700	76.9600	46.7400	73.1800	44.5900			
μ_{\min}	[Pa sec]	0.0298	0.0586	0.0770	0.1079	0.0302	0.0945			
τ_{\min}	[Pa]	16.0246	23.6657	21.6994	16.3640	30.5794	24.9526			
μ_{\exp} / μ_{\min}	□	0.6093	0.5062	0.3342	0.2140	1.7288	0.4805			
$\tau_{\exp} / \tau_{\min}$	□	0.6685	0.8160	0.7554	0.8809	1.1540	1.2270			
altura / base	□	0.1375	0.2143	0.2054	0.1643	0.2536	0.2214			

Cuadro E.2: Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 2%

base [m]	i [%]	d50 [mm]	d85 [mm]	rs [kg/m ³]	To [°C]	Tf [°C]	g [m/s ²]
0.56	3	0.064	0.25	2800	24	25	9.80665
Experiencia		N.3		N.4		P.1	
Peso Total	[gr]	2945.0000		3505.0000	3445.0000		
Volumen	[l]	1775.0000		2110.0000	1939.0000		
Cp	[%]	61.8000		61.9000	68.0000		
Altura N.	[m]	0.0710		0.0780	0.2123		
Vel. Media	[m/s]	1.4300		1.1400	0.5700		
Cv	[%]	36.6201		36.7185	43.1472		
Densidad	[Kg/m ³]	1659.1609		1660.9325	1776.6497		
μ	[Pa sec]	0.0237		0.0240	0.0640		
τ	[Pa]	14.8823		15.1227	43.0741		
V	[m/s]	1.4334		1.1319	0.5732		
X		0.5778		0.5802	0.7589		
Rh	[m]	0.0566		0.0610	0.1207		
Re2		1695.6322		1062.9708	106.9176		
Fr		1.7178		1.2942	0.3973		
Caudal Calc	[l/s]	43.4060		42.2588	95.5174		
Caudal	[l/s]	56.9900		49.4400	68.1500		
μ_{\min}	[Pa sec]	0.0421		0.0543	0.1541		
τ_{\min}	[Pa]	22.3839		24.4310	58.1517		
μ_{\exp} / μ_{\min}		0.5632		0.4426	0.4152		
$\tau_{\exp} / \tau_{\min}$		0.6649		0.6190	0.7407		
altura / base		0.1268		0.1393	0.3791		

Cuadro E.3: Datos correspondientes a las experiencias con pendiente 3 %