UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CÁLCULO DE NILFACTORES MAXIMALES EN EXTENSIONES POR COCICLO DE UNA ROTACIÓN MINIMAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ÁNGEL ALONSO PARDO JAQUEIH

PROFESOR GUÍA:
ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MICHAEL SCHRAUDNER
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: ÁNGEL ALONSO PARDO JAQUEIH
FECHA: JULIO 2012
PROF. GUÍA: ALEJANDRO MAASS SEPÚLVEDA

“CÁLCULO DE NILFACTORES MAXIMALES EN EXTENSIONES POR COCICLO DE UNA ROTACIÓN MINIMAL”

La presente memoria tiene por objetivo principal el estudio de nilsistemas que aparecen como factores –los nilfactores– de sistemas dinámicos que se obtienen como extensiones por cociclo de una rotación minimal. El estudio de nilsistemas y nilfactores ha ganado importancia desde la demostración dada por B. Host y B. Kra, en 2005, de la convergencia de algunas medias ergódicas no convencionales. A partir de su demostración se han encontrado aplicaciones importantes de los nilsistemas en Teoría Ergódica y que han inspirado otras áreas de las matemáticas, como la Combinatoria Aditiva.

En su artículo, Host y Kra desarrollaron una teoría de nilsistemas desde el contexto medible. El desarrollo topológico de los nilsistemas se ha profundizado a partir de dos artículos: de B. Host, B. Kra y A. Maass y de S. Shao y X. Ye, en 2010, donde se muestra que cada sistema dinámico topológico tiene factores que son nilsistemas de cualquier orden y que se obtienen a partir de la relación denominada de proximalidad regional de orden d, $d \geq 1$. Dada la falta de cálculos explícitos de estos nilfactores para sistemas no triviales, en la presente memoria se estudian estos objetos en una familia de sistemas dinámicos bien estudiada.

Durante esta investigación, se encuentra un objeto introducido por G. Atkinson en 1978 para extensiones por cociclos en grupos abelianos localmente compactos, llamado rango esencial, el cual entre otras cosas, caracteriza los sistemas topológicamente ergódicos. Se observa una gran similitud entre una caracterización del rango esencial, dada por M. Lemańczyk y M. Mentzen en 2002, y la forma en que los llamados paralelepípedos dinámicos caracterizan la relación de proximalidad regional de orden d, mostrando que una adecuada generalización da buenas herramientas para el cálculo de los nilfactores maximales.

Se define entonces el rango esencial de orden d de una extensión por cociclo, mostrando su estrecha conexión con la relación de proximalidad regional de orden $d-1$, a través de la cual se obtienen los nilfactores maximales. El rango esencial de orden d resulta tener buenas propiedades que simplifican el estudio de los nilfactores en nuestro contexto.

Se muestra que los nilfactores de extensiones por cociclo de una rotación minimal son también extensiones por cociclos de la misma rotación, o simplemente la rotación. En el caso del nilfactor maximal de orden 1, i.e., el factor equicontinuo maximal, se muestra que sólo hay dos alternativas, éste es el sistema en si mismo –si el cociclo es linealizable y de grado nulo– o la rotación base –en otro caso. Además se muestra que los nilfactores de estos sistemas necesariamente se estabilizan y se conjetura que tal estabilización es de orden 2. Como resultado parcial en esta dirección, se muestra que en el caso linealizable, el sistema es siempre un nilsistema básico de orden 2. El estudio del caso no linealizable permitiría concluir sobre la veracidad de tal conjetura.

El concepto de rango esencial de orden d introducido en el presente trabajo puede extenderse a un contexto más general, como es el caso del rango esencial introducido por Atkinson, quedando abierto el estudio de este objeto como herramienta para el cálculo de nilfactores en sistemas más generales.

AGRADECIMIENTOS

Por la confianza y aliento que depositaron en mí y por la paciencia que han tenido conmigo, agradezco a mis profesores guías. Doy las gracias a mis amigos y compañeros que estuvieron conmigo en este proceso. De manera muy especial agradezco a mi familia, a mis padres Adolfo y Araceli presentes y ocupados siempre por sus hijos, y a mi pareja Delfina por su compañía y apoyo durante estos años.

Índice general

Capítulo 1

Introduccion

El estudio sistemático de sistemas dinámicos a través de sus factores fue propuesto en los 60' en los trabajos de Furstenberg, quien notó la riqueza teórica de este concepto y las herramientas que entrega para entender un sistema dinámico. Variadas clases de factores han sido descritas, tanto en el contexto medible (Teoría Ergódica) como en el topológico (Dinámica Topológica). Por mencionar un ejemplo importante, en Teoría Ergódica, el factor de Kronecker es el factor más grande que consiste en una rotación en un grupo abeliano compacto, y probar el Teorema Ergódico de Von Neumann en estos factores es suficiente para demostrarlo en el caso general. Esta idea se denomina técnica de *factores característicos*, introducida por Furstenberg en [16].

Un teorema notable de Combinatoria Aditiva demostrado por Szemerédi [47] en un artículo publicado en 1975, afirma que cualquier subconjunto de los naturales con densidad superior positiva contiene progresiones aritméticas de largo arbitrario. Las herramientas usadas en esta demostración son combinatoriales, de la teoría de grafos. Posteriormente, Furstenberg logró demostrar este mismo resultado usando técnicas de la Teoría Ergódica, en particular un Teorema Ergódico:

Teorema 1.1 (Furstenberg)**.** *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un sistema dinámico abstracto (s.d.a.) y sea $A \in \mathcal{X}$ un conjunto con medida positiva. Entonces para cada $d \in \mathbb{N}$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A \cap \ldots \cap T^{-dn}A) > 0.$$

Con su demostración, Furstenberg estableció una conexión profunda entre Teoría Ergódica y Combinatoria Aditiva, que se ha alimentado de manera creciente en los últimos años. Por citar un resultado, la demostración del teorema de Green y Tao que afirma que los números primos contienen progresiones aritméticas de largo arbitrario se motivó en esta conexión.

De aquí que toman importancia los llamados Teoremas Ergódicos no Convencionales, que se formulan como sigue. Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un s.d.a. , $d \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_d$ funciones acotadas en X. En virtud de la demostración de Furstenberg del Teorema de Szemerédi, interesa estudiar la convergencia en $L^2(\mu)$ (o en algún otro espacio) de expresiones de la forma

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x)$$

El caso $d = 3$ con la hipótesis de total ergodicidad fue probado por Conze y Lesigne en una serie de papers ([10], [11] y [12]) y posteriormente fue demostrado por Host y Kra en [29] en el caso general. En el caso débilmente mezclador, Furstenberg probó que para cualquier $d \in \mathbb{N}$ el límite es constante y es igual al producto de las integrales. En el caso no débilmente mezclador probar la convergencia de tales expresiones es un problema mucho más difícil, y estuvo abierto por muchos años. Finalmente, Host y Kra en [30] demostraron:

Teorema 1.2. *Sea $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ un s.d.a. con T invertible. Sea $d \in \mathbb{N}$ y sean $f_1, \dots, f_d$ funciones medibles y acotadas en X. Entonces*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \dots f_d(T^{dn} x)$$

converge en $L^2(\mu)$ cuando $N \to \infty$.

Host y Kra lograron demostrar este teorema usando la técnica de factores característicos de Furstenberg y tales factores característicos resultaron ser nilsistemas, los cuales han sido de gran utilidad tanto en el desarrollo de herramientas Ergódicas en Combinatoria Aditiva (ver por ejemplo [20, 22, 21]) como en el desarrollo de la Teoría Ergódica en sí misma (ver por ejemplo [5, 8, 9]).

La contraparte topológica de la teoría de nilsistemas, es decir, los nilsistemas desde la Dinámica Topológica, ha sido desarrollada en artículos recientes (2010) de Host, Kra y Maass [33], y Shao y Ye [46]. Ellos demuestran que cada sistema dinámico topológico (s.d.t.) tiene asociados factores que son nilsistemas de cualquier orden (nilfactores de orden d), introduciendo una relación de equivalencia llamada de proximalidad regional de orden d y que se denota $\mathbf{RP}^{[d]}$. Para ello, los autores utilizan objetos llamados paralelepípedos dinámicos motivados por el estudio de paralelepípedos abstractos en Combinatoria Aditiva [31] y puede ser visto como un análogo topológico del teorema puramente ergódico de [29].

En el congreso anual de sistemas dinámicos en U. Maryland en el 2010 [15], Katok consultó por cálculos explícitos de nilfactores maximales de algún sistema a través de los paralelepípedos dinámicos. Tales caracterizaciones para encontrar los nilfactores maximales o decidir si un sistema es un nilsistema no han sido utilizadas directamente hasta ahora en la práctica. Recientemente ([34]) se ha calculado de manera explícita la complejidad topológica de nilfactores. Calcular nilfactores maximales de sistemas específicos a través de estas caracterizaciones es una de las motivaciones más importantes de la presente memoria.

Los nilsistemas más simples, los de orden 1, son los sistemas equicontinuos y corresponden a rotaciones minimales en grupos compactos. Muy seguido, ejemplos importantes de sistemas dinámicos se obtienen como una extensión de otro sistema, y en esta memoria se estudiará extensiones del grupo compacto $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, con la adición módulo 1, que llamaremos indistintamente toro unidimensional o círculo. En particular, se estudiará sistemas de la forma $(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, T_{\alpha,f})$, donde $T_{\alpha,f}(x, y) = (R_\alpha(x), f(x, y))$, $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$, $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es una función con buenas propiedades.

Estos sistemas tienen importancia de por si y han sido ampliamente estudiados en distintos contextos. Fueron estudiados en primer lugar por Anzai [1] en un estudio desde el punto de vista puramente ergódico y fueron largamente estudiados por variados autores desde esta teoría. Luego apareció interés en estos sistemas desde el punto de vista topológico por su presencia en modelos de la física.

Sistemas de este tipo aparecen en variadas situaciones en la física y, en particular, han sido muy estudiados numéricamente. Por ejemplo, las transformaciones de Arnold forzadas

$$(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \tau + \frac{\omega}{2\pi} \sin(2\pi y) + \Omega \sin(2\pi x)^k), \qquad x, y \in \mathbb{T}$$

pueden ser consideradas como un modelo simple de un oscilador a dos frecuencias discordantes (ver por ejemplo [19]) y la llamada transformación de Harper está íntimamente relacionada con ciertos operadores discretos de Schrödinger con potencial quasiperiódico ([45] da una buena descripción y referencias complementarias). Este último es un ejemplo de las transformaciones de Möbius quasiperiódicamente forzadas, y para estos sistemas existen buenas clasificaciones con respecto a sus medidas ergódicas y su relación con grafos invariantes ([43]). Herman [28] dio cotas en los exponentes de Lyapunov y usó esto para probar la existencia de grafos invariantes que no son continuos con exponente de Lyapunov negativo, llamados 'atractores no caóticos extraños', para la transformación de Harper y sistemas similares.

Además tienen un interés especial por ser las extensiones más simples de sistemas bien estudiados. Numerosos autores han usado estos sistemas para extender nociones conocidas en dinámica unidimensional y que no se puede generalizar de forma más o menos directa a otros sistemas. En particular, se sabe que toda dinámica unidimensional que no tiene órbitas periódicas es extensión (finito a uno) de una rotación rígida en el toro.

Teorema 1.3 (Clasificación de Poincaré)**.** *Sea f un homeomorfismo del círculo. Entonces se tiene sólo uno de los siguientes casos*

1. *f tiene una órbita periódica.*
2. *f es extensión de una rotación minimal R. Si además f es transitivo, entonces f y R son conjugados.*

En particular estos sistemas tienen una relación muy cercana con los nilsistemas de orden 1. Luego, es natural preguntarse si hay alguna relación entre este tipo de extensiones con nilsistemas de algún orden.

El objetivo de esta memoria es estudiar los nilfactores maximales de estos sistemas a través de las relaciones de proximalidad regional de orden d y los paralelepípedos dinámicos introducidos en [33]. Durante el estudio, se observa una gran similitud entre la caracterización de la relación de proximalidad regional a través de los paralelepípedos dinámicos y una caracterización, dada por [39], de un objeto llamado rango esencial, introducido en [3].

Se define el rango esencial de orden d, mostrando su estrecha conexión con la relación de proximalidad regional de orden $d-1$, a través de la cual se obtienen los nilfactores maximales. El rango esencial de orden d resulta tener buenas propiedades que simplifican el estudio de los nilfactores en nuestro contexto. En particular, se muestra que los nilfactores de los sistemas estudiados pertenecen a la misma familia de sistemas, y que estos necesariamente se estabilizan. En el caso de orden 1, se muestra que el factor equicontinuo maximal es la rotación base o bien el sistema en sí, dependiendo de si el cociclo es linealizable y de su grado.

Capítulo 2

Definiciones básicas en sistemas dinámicos

En este capítulo entregamos algunas definiciones básicas de Dinámica Topológica y Teoría Ergódica e introduciremos los conceptos fundamentales que serán utilizados a lo largo de la presente memoria.

2.1. Sistemas Dinámicos Topológicos

Una *transformación* de un espacio métrico compacto X es un homeomorfismo de X en si mismo. Un *sistema dinámico topológico* es un par (X, T), donde X es un espacio métrico compacto, que llamaremos *espacio base*, y $T : X \to X$ es una transformación. Escribiremos s.d.t. por sistema dinámico topológico o simplemente hablaremos de *sistema*.

Un *factor* de un sistema (X, T) es otro sistema (Y, S) tal que existe una función continua y sobreyectiva $p : X \to Y$ que satisface $S \circ p = p \circ T$. También diremos que el sistema (X, T) es una *extensión* de (Y, S) y a la función p le llamaremos igualmente *factor*. Si p es bijectiva, los dos sistemas son *conjugados* (*topológicamente*) y p es una *conjugación* (*topológica*). Escribiremos también $p : X \to Y$ o $p : (X, T) \to (Y, S)$ para denotar un factor y en ocasiones, en un leve abuso de notación y cuando no haya ambigüedad, denotaremos todas las transformaciones (incluyendo posiblemente aquellas en sistemas distintos) por T.

Un sistema (X, T) se dirá *transitivo* si existe un punto $x \in X$ cuya *órbita* $o(x) = \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ es densa en X y llamaremos a tal punto, un *punto transitivo*. Se hablará de la *órbita cerrada* de un punto para denotar el conjunto $\bar{o}(x) = \overline{o(x)}$. En este contexto, variadas definiciones equivalentes se tienen para la transitividad de un sistema (ver [2], cap. 1).

Proposición 2.1. *Son equivalentes:*

1. (X, T) *es transitivo.*
2. *Existe* $x \in X$ *tal que* $o(x)_+ = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *es denso en* X.
3. *Existe* $x \in X$ *tal que* $o(x)_- = \{T^n(x) : n \in -\mathbb{N}\}$ *es denso en* X.
4. *Para cualquier par de abiertos no vacíos* $U, V \subseteq X$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *con* $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.
5. $\{x \in X : \bar{o}(x) = X\}$ *es un* G_δ *denso.*
6. *Si* $U \subseteq X$ *es un abierto* T*-invariante no vacío, entonces* U *es denso en* X.

En un sistema (X,T), si $Y \subset X$ es un subconjunto cerrado y T-invariante, entonces $(Y,T|_Y)$ es un sistema y decimos que (Y,T) es un *subsistema* de (X,T). Y se dirá que es *minimal* si no contiene subconjuntos propios cerrados e invariantes. Si X es minimal, el sistema (X,T) se dirá minimal. La minimalidad es una forma fuerte de transitividad, puesto que se tiene lo siguiente

Proposición 2.2 (ver [2], cap. 1)**.** *Son equivalentes:*

1. (X,T) *es minimal.*
2. *Cada* $x \in X$ *tiene órbita densa, i.e.,* $\bar{o}(x) = X$ *para cada* $x \in X$.
3. *Para cada conjunto* U *abierto no vacío,* $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} T^n(U) = X$.
4. *Para cada conjunto* U *abierto no vacío, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup_{n=-N}^{N} T^n(U) = X$.
5. *Para cada* $x \in X$ *y cada vecindad* U *de* x*, el conjunto* $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\}$ *es sindético, i.e., existe* $K \in \mathbb{N}$ *con* $N(x,U) + \{1,\ldots,K\} = \mathbb{Z}$.

Además se puede mostrar que todo sistema tiene subsistemas minimales.

Mencionamos ahora los conceptos de proximalidad y distalidad que son centrales en Dinámica Topológica desde los teoremas Estructurales de Furstenberg.

El sistema (X,T) es *distal* si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$,

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) > 0.$$

En un sistema cualquiera, pares satisfaciendo lo anterior son llamados *pares distales*. Los puntos x e y son *proximales* si $inf_{n\in\mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) = 0$. Denotamos por $\mathbf{P}(X)$ los pares proximales en (X,T). Cuando el contexto sea claro, escribiremos $\mathbf{P}$ en lugar de $\mathbf{P}(X)$.

Ligado a los conceptos anteriores aparecen clases especiales de sistemas. Decimos que un sistema (X,T) es

1. Una *isometría* si se preserva la distancia, i.e., $d(x,y) = d(Tx,Ty)$ en cada $x,y \in X$.
2. *Equicontinuo* si para todo $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces se tiene que $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
3. *Distal* si $\mathbf{P}(X) = \Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$, i.e., no hay pares proximales no triviales.

Sigue de las definiciones que una isometría es un sistema equicontinuo y un sistema equicontinuo es un sistema distal. Además, cuando el sistema es equicontinuo y minimal se prueba que es conjugado a una isometría minimal.

En la siguiente proposición se resume algunas propiedades clásicas de los sistemas distales.

Proposición 2.3 (ver [2], caps. 5 y 7)**.**

1. *El producto cartesiano de una familia finita de sistemas distales es distal.*
2. *Si* (X,T) *es un sistema distal e* Y *es un subconjunto cerrado e invariante de* X*, entonces* (Y,T) *es distal.*
3. *Un sistema transitivo y distal es minimal.*
4. *Un factor de un sistema distal es distal.*
5. *Sea* $\pi : X \to Y$ *un factor entre los sistemas distales* (X,T) *e* (Y,T)*. Si* (Y,T) *es minimal, entonces* π *es una función abierta.*

2.2. Factores y conjugaciones entre s.d.t.

Recordemos que un factor $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ es una función continua y sobreyectiva que conmuta con las transformaciones.

Notemos que una relación de equivalencia $R \subseteq X \times X$ cerrada y T-invariante define un factor $\pi_R : (X, T) \to (X/R, T)$, $x \mapsto [x]_R$. Recíprocamente, cada factor $\pi : X \to Y$ define la relación de equivalencia cerrada y T-invariante $R_\pi = \{(x, x') : \pi(x) = \pi(x')\}$.

Hay clases importantes de factores que se definen a partir de los conceptos de distalidad y proximalidad mencionados anteriormente.

Si $\pi : X \to Y$ es un factor entre sistemas, decimos que (X, T) es una extensión

1. *Proximal* si $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow (x, y) \in \mathbf{P}(X)$.
2. *Distal* si $\pi(x) = \pi(y)$ y $x \neq y \Rightarrow (x, y) \neq \mathbf{P}(X)$.
3. *Isométrica* si $\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow d(x, y) = d(T^n x, T^n y)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
4. *Casi finito a uno* si $\{x \in X : |\pi^{-1}(\pi(x))| < \infty\}$ es un conjunto G_δ denso.
5. *Casi N a uno* si $\{x \in X : |\pi^{-1}(\pi(x))| = N\}$ es un conjunto G_δ denso.

2.2.1. Factor equicontinuo maximal

En esta sección, mostramos un ejemplo importante de factor asociado a un sistema dinámico topológico, que ha motivado importantes generalizaciones que han contribuido a recientes y notables desarrollos en Dinámica Topológica y Teoría Ergódica. Sea $\pi : X \to Y$ un factor entre los s.d.t. (X, T) e (Y, T). Decimos que (Y, T) es un factor equicontinuo de (X, T) si (Y, T) es un s.d.t. equicontinuo. Puede haber un amplio espectro de factores equicontinuos asociados a un sistema, pero un teorema clásico afirma lo siguiente (ver [2], cap. 9).

Teorema 2.4. *Sea (X, T) un s.d.t. Entonces existe un factor equicontinuo maximal, i.e., un factor (Y, T) equicontinuo, tal que si (Z, T) es un factor equicontinuo de (X, T), entonces (Z, T) también es factor de (Y, T).*

Al factor equicontinuo maximal de (X, T) lo anotamos (X_{eq}, T). Si (Z, T) es cualquier factor equicontinuo de (X, T) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_{eq}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X_{eq} \arrow[r, "p_{eq}"'] & Z \end{tikzcd}$$

El siguiente concepto permite construir explícitamente el factor equicontinuo maximal a través de una relación de equivalencia cerrada e invariante. Esta construcción permite generalizar el concepto de factor equicontinuo maximal, como mostraremos en §6.

Sea (X, T) un s.d.t. y $x, y \in X$. Decimos que x, y son regionalmente proximales si para cada $\delta > 0$ y para cada $\varepsilon > 0$ existen $\bar{x}, \bar{y} \in X$ y existe $n \in \mathbb{Z}$ con $d(x, \bar{x}) < \delta, d(y, \bar{y}) < \delta$ y $d(T^n(\bar{x}), T^n(\bar{y})) < \varepsilon$. Escribimos $\mathbf{RP}(X)$ a los pares regionalmente proximales y cuando no haya confusión, anotaremos simplemente $\mathbf{RP}$. Un resultado clásico es que en un sistema minimal $\mathbf{RP}(X)$ es una relación de equivalencia.

En cualquier sistema dinámico topológico se pueden definir los factores distal y equicontinuo maximal y se determinan por las relaciones $\mathbf{P}(X)$ y $\mathbf{RP}(X)$.

Teorema 2.5 ([18])**.** *Sea (X,T) un s.d.t. y sean S_D y S_{eq} las relaciones de equivalencia cerradas, T-invariantes más pequeñas que contienen a $\mathbf{P}(X)$ y $\boldsymbol{RP}(X)$ respectivamente. Luego $X_D = (X/S_D, T)$ y $X_{eq} = (X/S_{eq}, T)$ son el factor distal y equicontinuo maximal respectivamente.*

Análogamente a ser factor equicontinuo maximal, ser factor distal maximal significa que si (Z,T) es un factor distal de (X,T), entonces (Z,T) también es un factor de (X_D,T)

En particular, (X_{eq},T) es factor de (X_D,T) y se tiene entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_D"'] \arrow[dr, "\pi_{eq}"] & \\ X_D \arrow[r, "\rho"'] & X_{eq} \end{tikzcd}$$

2.3. Sistemas Dinámicos Abstractos

Un *sistema dinámico abstracto* es una tupla $(X,\mathcal{X},\mu,T)$, donde $(X,\mathcal{X},\mu)$ es un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ es una función $\mathcal{X}$-$\mathcal{X}$-medible que preserva la medida, i.e., $T\mu(B) := \mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{X}$. A menudo, un s.d.a. $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ lo escribiremos como (X,μ,T), omitiendo la σ-álgebra $\mathcal{X}$.

Sea (X,μ,T) un s.d.a. Un conjunto medible $A \in \mathcal{X}$ se dice *invariante* si $\mu(A\Delta T^{-1}A) = 0$, donde $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$. La familia de conjuntos invariantes $\mathcal{I}$ forma una sub-σ-álgebra de $\mathcal{X}$. El s.d.a. (X,μ,T) se dice *ergódico* si no existen conjuntos invariantes no triviales, i.e., si $A \in \mathcal{X}$ y $\mu(A\Delta T^{-1}A) = 0$ entonces necesariamente $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$, o equivalentemente, si la *sigma*-álgebra $\mathcal{I}$ de conjuntos invariantes es trivial. También decimos que μ es ergódica para (X,T).

Un *factor* de un s.d.a. (X,μ,T) es otro s.d.a. (Y,ν,S) tal que existe una función $\mathcal{X}$-$\mathcal{Y}$-medible $p : X' \subseteq X \to Y' \subseteq Y$ con $\mu(X') = \nu(Y') = 1$ que satisface $p\mu = \nu$ y $S \circ p = p \circ T$. A la función p le llamaremos igualmente *factor*. Si p es invertible, los dos sistemas son *isomorfos* (*en el sentido medible*) y p es un *isomorfismo*. Diremos que (X,μ,T) es *extensión finita* de (Y,ν,S) si hay un factor $p : X \to Y$ tal que $p^{-1}(y)$ es finito ν-c.s. Escribiremos también $p : X \to Y$ ó $p : (X,T) \to (Y,S)$ ó $p : (X,\mu,T) \to (Y,\nu,S)$ para denotar un factor (entre s.d.a.) y en ocasiones, en un leve abuso de notación y cuando no haya ambigüedad, denotaremos todas las transformaciones (incluyendo posiblemente aquellas en sistemas distintos) por T.

Se tiene además que hay una correspondencia entre sub-σ-álgebras T-invariantes de $\mathcal{X}$ con sus factores (en el sentido de medida).

2.3.1. Relación entre s.d.t. y s.d.a.

En esta memoria el objeto de estudio son sistemas dinámicos topológicos. Sin embargo, los sistemas dinámicos abstractos aparecen como una herramienta importante en su estudio, por lo cual mostramos resultados clásicos que relacionan tales conceptos.

Sea (X,T) un s.d.t. y consideremos la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ generada por los abiertos de X. Denotemos por $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{M}(X,T) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : T\mu = \mu\}$ el conjunto de medidas T-invariantes. Los siguientes teoremas clásicos ligan los s.d.t. con los s.d.a. (ver por ejemplo [49])

Teorema 2.6 (Krylov-Bogolioubov)**.** *Sea (X,T) un s.d.t. Entonces $\mathcal{M}(X,T)$ es no vacío.*

Se tienen además las siguientes propiedades de $\mathcal{M}(X,T)$

Teorema 2.7. *Sea (X,T) un s.d.t. , luego*

1. $\mathcal{M}(X,T)$ *es un subconjunto compacto de* $\mathcal{M}(X)$.
2. $\mathcal{M}(X,T)$ *es convexo.*
3. $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ *es un punto extremo de* $\mathcal{M}(X,T)$ *si y sólo si* (X,μ,T) *es un s.d.a. ergódico. En este caso, decimos que* μ *es una medida ergódica.*
4. *Si* $\mu,\nu \in \mathcal{M}(X,T)$ *son dos médidas ergódicas, entonces* $\mu = \nu$ *ó* $\mu \perp \nu$.

Así, si (X,T) es un s.d.t., siempre existe una medida invariante (o ergódica) μ que permite estudiarlo como un s.d.a.

2.3.2. Ergodicidad

Recordemos que para un sistema (X,T) una medida $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ es ergódica cuando la sub-σ-álgebra de los conjuntos invariantes es trivial. Algunas caracterizaciones clásicas de medidas ergódicas se listan a continuación (ver por ejemplo [49])

Teorema 2.8. *Sea (X,T) un sistema y $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. Entonces, son equivalentes*

1. μ *es ergódica.*
2. *Todo* $f \in L^1(\mu)$ *tal que* $f = f \circ T$, *es constante* μ*-c.s.*
3. *Para cada* $f \in C(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ *converge* μ*-c.s. a una constante.*
4. $\forall f \in L^1(\mu)$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \xrightarrow{L^1} \int f d\mu.$$
5. $\forall f,g \in L^2(\mu)$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int f \circ T^k g d\mu \xrightarrow{L^2} \int f d\mu \int g d\mu.$$
6. $\forall f \in C(X) \forall g \in L^1(\mu)$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int f \circ T^k g d\mu \xrightarrow{\mu} \int f d\mu \int g d\mu.$$
7. *Si* $m \in \mathcal{M}(X)$ *y* $m \ll \mu$, *entonces*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k m \rightharpoonup \mu.$$
8. *Todo valor propio del operador* $U_T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *definido por* $U_T f = f \circ T$ *es simple.*

2.3.3. Única Ergodicidad

En esta sección mostramos aquellos sistemas (X,T) para los cuales $\mathcal{M}(X,T)$ es lo más pequeño posible, i.e., contiene un solo miembro. Un sistema (X,T) es *únicamente ergódico* si existe solo una medida de probabilidad invariante.

Si (X,T) es únicamente ergódico y $\mathcal{M}(X,T)=\{\mu\}$, entonces μ es ergódica puesto que es un punto extremo de $\mathcal{M}(X,T)$ (Teorema 2.7(3)).

Cuando un sistema es únicamente ergódico tenemos un comportamiento mucho más fuerte en la convergencia de los promedios ergódicos

Teorema 2.9. *Sea (X,T) un sistema. Entonces, son equivalentes*

1. *(X,T) es únicamente ergódico*
2. *Para cada $f\in C(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k$ converge uniformemente a una constante.*
3. *Para cada $f\in C(X)$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k$ converge puntualmente a una constante.*
4. *Existe $\mu\in\mathcal{M}(X,T)$ tal que para todo $f\in C(X)$ y todo $x\in X$*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)\to\int f d\mu.$$

Además el concepto de única ergodicidad está relacionado con el de minimalidad

Teorema 2.10. *Sea (X,T) un sistema únicamente ergódico y $\mathcal{M}(X,T)=\{\mu\}$. Entonces (X,T) es minimal si y sólo si $\mu(U)>0$ para todo abierto no vacío $U\subset X$, i.e., supp$(\mu)=X$.*

Esto motiva la siguiente definición

Definición 2.11. Un sistema (X,T) se dice *estrictamente ergódico* si es únicamente ergódico y el soporte de la única medida invariante es todo X.

Finalmente exponemos un resultado clásico que relaciona la única ergodicidad con sistemas equicontinuos minimales (ver [17])

Teorema 2.12. *Un sistema equicontinuo minimal es estrictamente ergódico.*

Capítulo 3

Paralelepípedos en sistemas dinámicos

En este capítulo desarrollamos la noción de paralelepípedo, introducida en [33], la cual ha sido de gran utilidad en desarrollos recientes en Dinámica Topológica y Teoría Ergódica, siendo la base de un importante Teorema de Estructura demostrado en [33] que mencionamos en §4.

3.1. Paralelepípedos

Sea X un conjunto, $d \geq 1$ un entero y escribamos $[d] = \{1, \ldots, d\}$. Vemos el conjunto $\{0,1\}^d$ de dos maneras, como una secuencia $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_d$ de ceros y unos escritos sin comas ni parentesis; o como un subconjunto de $[d]$. Un subconjunto ε corresponde a la secuencia $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_d \in \{0,1\}^d$ tal que $\varepsilon_i = 1$ si y sólo si $i \in \varepsilon$. Por ejemplo $\mathbf{0} = 0 \ldots 0$ corresponde al conjunto vacío.

Si $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $\varepsilon \subset [d]$, definimos

$$\mathbf{n} \cdot \varepsilon = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i n_i = \sum_{i \in \varepsilon} n_i \,.$$

Denotamos $X^{[d]} = X^{2^d}$. Un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ puede ser escrito de dos maneras equivalentes, dependiendo del contexto,

$$\mathbf{x} = (x_\varepsilon : \varepsilon \in \{0,1\}^d) = (x_\varepsilon : \varepsilon \subseteq [d]).$$

A modo de ejemplo, los puntos en $X^{[2]}$ son de la forma

$$(x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11}) = (x_\phi, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}),$$

y puntos en $X^{[3]}$ son de la forma

$$(x_{000}, x_{100}, x_{010}, x_{110}, x_{001}, x_{101}, x_{011}, x_{111}) = (x_\emptyset, x_{\{1\}}, x_{\{2\}}, x_{\{1,2\}}, x_{\{3\}}, x_{\{1,3\}}, x_{\{2,3\}}, x_{\{1,2,3\}}).$$

Para $x \in X$, escribimos $x^{[d]} = (x, \ldots, x) \in X^{[d]}$. La diagonal de $X^{[d]}$ es el conjunto $\Delta^{[d]} = \{x^{[d]} : x \in X\}$. Normalmente, cuando $d = 1$, denotaremos la diagonal por Δ_X ó Δ en vez de $\Delta^{[1]}$.

Un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ puede ser descompuesto en $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ con $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^{[d-1]}$, donde $\mathbf{x}' = (x_{\varepsilon 0} : \varepsilon \in \{0,1\}^{d-1})$ y $\mathbf{x}'' = (x_{\varepsilon 1} : \varepsilon \in \{0,1\}^{d-1})$. También podemos aislar la primera coordenada, escribiendo un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ como $\mathbf{x} = (x_\emptyset, x_*)$, donde $x_* = (x_\varepsilon : \varepsilon \subset [d], \varepsilon \neq \emptyset) \in X_*^{[d]} := X^{2^d-1}$.

Identificando $\{0,1\}^d$ con los vértices del cubo unitario euclideano, una isometría euclideana del cubo permuta los vértices del cubo y por lo tanto las coordenadas de $\mathbf{x} \in X^{[d]}$. Estas permutaciones se denominan *permutaciones euclideanas* de $X^{[d]}$. Ejemplos de permutaciones euclideanas son *permutaciones de dígitos*, siendo permutaciones en $\{0,1\}^d$ inducidas por permutaciones del conjunto $[d]$; y *simetrías*, formadas al reemplazar ε_i por $1-\varepsilon_i$ para algún $i \in [d]$. Para $d = 2$, un ejemplo de permutación de dígitos es $(00, 10, 01, 11) \to (00, 01, 10, 11)$ y $(00, 10, 01, 11) \to (10, 00, 11, 01)$ es una simetría en la primera posición. Las permutaciones euclideanas son aquellas formadas por composiciones de permutaciones de dígitos y simetrías.

3.2. Paralelepípedos dinámicos

En esta sección mostramos como formar paralelepípedos utilizando la dinámica de un sistema dinámico topológico. Esta construcción, como veremos más adelante, puede decir muchas propiedades del sistema dinámico mismo.

Definición 3.1. Sea (X,T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ como la cerradura en $X^{[d]}$ de elementos de la forma

$$(T^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon}(x) : \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \{0,1\}^d),$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $x \in X$. Cuando no haya ambigüedad escribiremos simplemente $\mathbf{Q}^{[d]}$ en vez de $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$. Un elemento en $\mathbf{Q}^{[d]}(X)$ se llamará un *paralelepípedo dinámico de dimensión d*.

A modo de ejemplo, $\mathbf{Q}^{[2]}$ es la clausura en $X^{[2]} = X^4$ del conjunto

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{n+m} x) : x \in X, n, m \in \mathbb{Z}\},$$

y $\mathbf{Q}^{[3]}$ es la clausura en $X^{[3]} = X^8$ del conjunto

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{n+m} x, T^p x, T^{p+m} x, T^{p+n} x, T^{p+n+m} x) : x \in X, n, m, p \in \mathbb{Z}\}.$$

En cada caso, los índices m, n y m, n, p pueden ser tomados en $\mathbb{N}$ en vez de $\mathbb{Z}$, dando origen al mismo objeto. Esto es obvio cuando T es invertible, pero también se puede mostrar sin tal supuesto.

Algunas propiedades estructurales básicas de $\mathbf{Q}^{[d]}$ son:

1. $x^{[d]} \in \mathbf{Q}^{[d]}$ para todo $x \in X$.
2. $\mathbf{Q}^{[d]}$ es invariante bajo permutaciones euclideanas.
3. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}^{[d]}$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{Q}^{[d+1]}$.

No es difícil notar que si $\pi : X \to Y$ es un factor entre los s.d.t. (X,T) e (Y,T), entonces $\mathbf{Q}^{[d]}(Y) = \pi^{[d]}(\mathbf{Q}^{[d]}(X))$ donde $\pi^{[d]} = \pi \times \pi \times \cdots \times \pi$ (2^d veces).

Podemos reformular la definición de $\mathbf{Q}^{[d]}$ usando cierto grupo de transformaciones en $X^{[d]}$.

Definición 3.2. Sea (X, T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. La *transformación diagonal* de $X^{[d]}$ es la transformación $T^{[d]} : X^{[d]} \to X^{[d]}$, donde $(T^{[d]}\mathbf{x})_\varepsilon = Tx_\varepsilon$ para $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ y $\varepsilon \subset [d]$.

Para cada $j \in [d]$, la *transformación de fase* $T_j^{[d]} : X^{[d]} \to X^{[d]}$ está definida para $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ y $\varepsilon \subset [d]$ como

$$T_j^{[d]}\mathbf{x} = \begin{cases} (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\varepsilon = Tx_\varepsilon & \text{si } j \in \varepsilon \\ (T_j^{[d]}\mathbf{x})_\varepsilon = x_\varepsilon & \text{si } j \notin \varepsilon \end{cases}$$

El *grupo de fase de dimensión* d es el grupo $\mathcal{F}^{[d]}(X)$ de transformaciones en $X^{[d]}$ generadas por las transformaciones de fase. El *grupo paralelepípedo de dimensión* d es el grupo $\mathcal{G}^{[d]}(X)$ generado por la transformación diagonal y por las transformaciones de fase. Normalmente escribiremos $\mathcal{F}^{[d]}$ y $\mathcal{G}^{[d]}$ en vez de $\mathcal{F}^{[d]}(X)$ y $\mathcal{G}^{[d]}(X)$, respectivamente. Para $\mathcal{F}^{[d]}$ y $\mathcal{G}^{[d]}$, usaremos notación similar a la usada para $X^{[d]}$: un elemento S de cualquiera de estos grupos se escribirá $S = (S_\varepsilon : \varepsilon \in \{0,1\}^d\} = (S_\varepsilon : \varepsilon \subseteq [d]\})$. En particular, $\mathcal{F}^{[d]}(X) = \{S \in \mathcal{G}^{[d]}(X) : S_\emptyset = Id\}$.

Notamos que el grupo $\mathcal{G}^{[d]}$ satisface propiedades análogas a $\mathbf{Q}^{[d]}$:

1. $T^{[d]} \in \mathcal{G}^{[d]}$;
2. $\mathcal{G}^{[d]}$ es invariante bajo permutaciones euclideanas;
3. Si $S \in \mathcal{G}^{[d]}$, entonces $(S, S) \in \mathcal{G}^{[d+1]}$.

Además, para $S \in \mathcal{F}^{[d]}$ se tiene que $(S, S) \in \mathcal{F}^{[d]}$; así como $\mathcal{F}^{[d]}$ es invariante bajo permutaciones de dígitos.

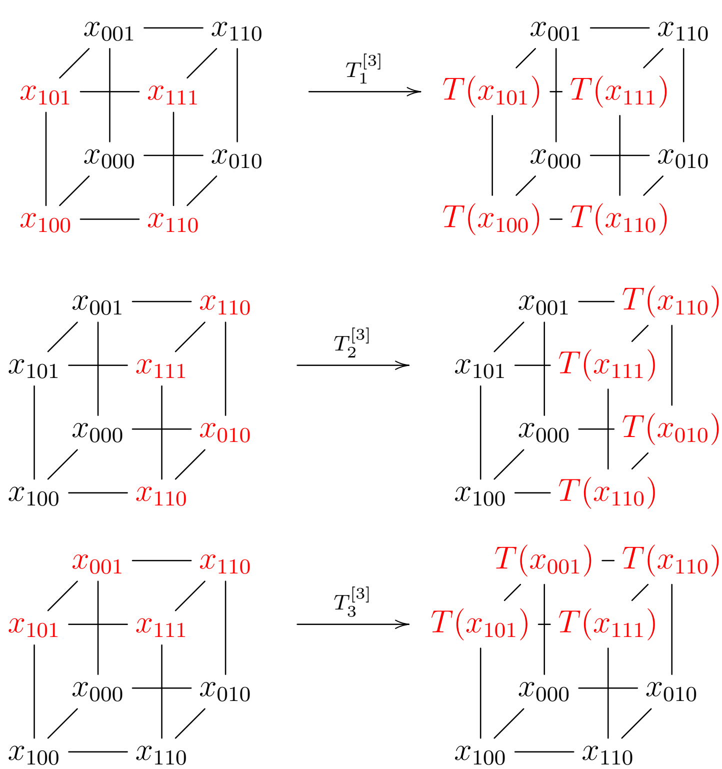

Figura 3.1: Transformaciones de fase en $X^{[3]}$.

Si se piensa en las coordenadas de $\mathbf{x}$ como los vértices de un cubo, estas transformaciones corresponden a iterar la transformación en una sola cara. Por ejemplo, para $k = 3$, en la Figura 3.1 se muestran las transformaciones de fase asociadas. Cada una cambia los valores indexados por los símbolos pintados en rojo.

La siguiente proposición sigue directamente de las definiciones.

Proposición 3.3. *Sea (X,T) un sistema y $d \in \mathbb{N}$. Entonces $\boldsymbol{Q}^{[d]}$ es la clausura en $X^{[d]}$ de*

$$\{Sx^{[d]} : S \in \mathcal{F}^{[d]}, x \in X\}.$$

Si x es un punto transitivo de X, entonces $\boldsymbol{Q}^{[d]}$ es la órbita cerrada de $x^{[d]}$ bajo la acción del grupo $\mathcal{G}^{[d]}$.

Si, para $x \in X$ y $d \in \mathbb{N}$ denotamos

$$\mathbf{Q}^{[d]}(x) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{Q}^{[d]} : y_\emptyset = x\}$$

entonces se tiene la siguiente propiedad útil.

Proposición 3.4 ([33])**.** *Para $x \in X$ y $d \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{Q}^{[d]}(x)$ es la órbita cerrada de $x^{[d]}$ bajo la acción del grupo $\mathcal{F}^{[d]}$.*

Capítulo 4

Nilvariedades y nilsistemas

En este capítulo definimos las nilvariedades y nilsistemas, que son sistemas de interés en esta memoria. Antes de definir estos objetos, es necesario introducir el concepto de Grupo de Lie. Dedicaremos la siguiente subsección a tal propósito, sin ambición de entrar en mayor detalles. Para una referencia más general a este tema ver [23] o [26].

4.1. Grupos de Lie

Un *grupo de Lie* G ó $(G, \cdot)$ es un grupo (en el sentido abstracto) que además es una variedad diferenciable, donde las operaciones son compatibles con la diferenciabilidad, es decir:

$$\begin{aligned} (g, h) &\to g \cdot h := gh \\ g &\to g^{-1} \end{aligned}$$

son funciones diferenciables de $G \times G \to G$ y de $G \to G$ respectivamente. En este contexto, al decir *diferenciable* queremos decir infinitamente diferenciable.

Un resultado clásico en grupos de Lie es que las nociones de conexidad y arco-conexidad son equivalentes. Diremos que un grupo de Lie G es *conexo*, si G es conexo o, equivalentemente, arco-conexo en el sentido topológico. También diremos que el grupo de Lie G es *compacto* si G es compacto en el sentido topológico; la *dimensión* de un grupo de Lie será su dimensión como variedad (real). Y así, en general, para cualquier noción de grupos y variedades diferenciables.

Un *homomorfismo de grupos de Lie* de un grupo de Lie G a otro H es una función $\sigma : G \to H$ diferenciable que es un homomorfismo de grupos. Si σ es invertible y si inversa también es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces decimos que σ es un *isomorfismo de grupos de Lie*, que G y H son *isomorfos* como grupos de Lie y anotamos $G \cong_L H$. Si $\sigma : G \to G$ es un isomorfismo de grupos de Lie, decimos que σ es un *automorfismo de grupos de Lie*; el conjunto de automorfismos de un grupo de Lie es un grupo para la composición. La definición de homomorfismo para grupos de Lie se puede relajar gracias a la siguiente proposición (ver [7])

Proposición 4.1. *Sea G y H dos grupos de Lie y $\sigma : G \to H$ un homomorfismo de grupos que es continuo. Entonces σ es diferenciable y por lo tanto es un homomorfismo de grupos de Lie. En particular, un grupo topológico tiene a lo más una estructura de grupo de Lie.*

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ es un grupo de Lie conexo.

2. $(\mathbb{K}^n, \cdot)$, donde $\mathbb{K}$ es el círculo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Es un grupo de Lie compacto y conexo. Además $(\mathbb{K}^n, \cdot)$ es isomorfo como grupo de Lie a $(\mathbb{T}^n, +)$, donde $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es el toro n-dimensional, vía el isomorfismo de grupos de Lie
$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n \mapsto (e^{2i\pi x_1}, \dots, e^{2i\pi x_n}) \in \mathbb{K}^n$$
.

3. Sea $GL_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible } \}$ el *grupo lineal general*. Es una variedad n^2-dimensional, y con la multiplicación usual de matrices resulta ser un grupo de Lie. Consta de dos componentes conexas que son subgrupos y son isomorfas entre ellas, $GL_n^+ = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A) > 0\}$ y $GL_n^- = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : det(A) < 0\}$.

4. Sea $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^T A = Id\}$, con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie que se denomina *grupo ortogonal* y consta de dos componentes conexas, $O(n)^+ = \{A \in O(n) : det(A) = 1\}$ y $O(n)^- = \{A \in O(n) : det(A) = -1\}$.

5. Sea $SO(n) = O(n)^+ = \{A \in O(n) : det(A) = 1\}$ con la multiplicación usual de matrices. Resulta ser un grupo de Lie conexo y se le denomina el *grupo especial ortogonal*.

6. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie conexo y se denomina el *grupo de Heisenberg*.

7. Una variación del ejemplo anterior es $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z} \right\}$ con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie disconexo.

8. Sea
$$H_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & z \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ & 0 & & & 1 & y_n \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z \in \mathbb{R} \right\}$$
con la multiplicación de matrices. Es un grupo de Lie y es la generalización más simple del grupo de Heisenberg.

9. Sea
$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ si } j - i \geq 1 \right\}$$
con la multiplicación usual de matrices. Es un grupo de Lie y lo llamaremos el *grupo de Heisenberg de orden n*.

10. Sea $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{K}$ y definamos la operación

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1 y_2} z_1 z_2)$$

Se puede probar que G es un grupo de Lie y que no es isomorfo como grupo, y por lo tanto como grupo de Lie, a ningún grupo matricial.

Otro resultado folklórico de grupos de Lie es

Teorema 4.2. *Sea G un grupo de Lie conexo n-dimensional. Entonces,*

1. *Si $n = 1$, G es abeliano.*
2. *Si G es abeliano, existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tal que $G \cong_L \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

En particular los únicos grupos de Lie conexos unidimensionales son, salvo isomorfismos, $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{K}, \cdot)$. Sigue así que el único grupo de Lie conexo y compacto de dimensión 1 es $(\mathbb{K}, \cdot)$, salvo isomorfismos de grupos de Lie como lo son, por ejemplo, $(\mathbb{T}, +)$ y $SO(2)$.

Además, todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie es también un grupo de Lie o es discreto.

4.2. Nilsistemas

Sea G un grupo y $[\cdot, \cdot]$ el conmutador asociado, i.e., $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ en cada $a, b \in G$. Dados subgrupos $A, B \subseteq G$, escribimos $[A, B]$ para denotar al subgrupo generado por $\{[a, b] : a \in A, b \in B\}$. Se definen inductivamente los subgrupos *conmutadores* G_j como:

$$G_1 = G$$

$$G_{k+1} = [G, G_k] \quad k \geq 1$$

Decimos que G es un *grupo nilpotente de orden d* si G_{d+1} es el subgrupo trivial.

Ejemplo.

1. El grupo nilpotente de orden 0 es el grupo trivial.
2. Un grupo es nilpotente de orden 1 si y sólo si es abeliano.
3. El grupo de Heisenberg definido en §4.1 es nilpotente de orden 2.
4. Los grupos H_n definidos en §4.1 son nilpotentes de orden 2.
5. Los grupos de Heisenberg U_n definidos en §4.1 son nilpotentes de orden $n - 1$.

Definición 4.3. Dado un grupo de Lie G nilpotente de orden d y Γ un subgrupo discreto cocompacto de G, decimos que $X = G/\Gamma$ es una *nilvariedad de orden d*. Los elementos de X se anotan como $h\Gamma$ donde $h \in G$. En X consideramos la acción T dada por la traslación por la izquierda por un elemento $g \in G$ fijo, i.e., $T(h\Gamma) = gh\Gamma$. El sistema (X, T) resulta ser un s.d.t. Sea μ la medida de Haar de (X, T), i.e., la única medida de probabilidad invariante por rotaciones en el grupo. Notamos que (X, μ, T) resulta ser un s.d.a. y tanto al s.d.t. (X, T) como al s.d.a. (X, μ, T) los llamaremos *nilsistema (básico) de orden d* o *d-nilsistema (básico)*.

Sigue de la definición que la dimensión de una nilvariedad coincide con la del grupo de Lie subyacente puesto que el denominador del cuociente es un subgrupo discreto. En virtud del Teorema 4.2 se tiene que

Observación 4.4. Sea $X = G/\Gamma$ una nilvariedad tal que G es un grupo de Lie conexo n-dimensional. Entonces,

1. Si $n = 1$, X es nilvariedad de orden 1.

2. Si G es abeliano, $X = \mathbb{T}^n$ salvo isomorfismos de grupos de Lie.

Y por lo tanto, la única nilvariedad conexa y unidimensional es $(\mathbb{T}, +)$, salvo isomorfismos de grupos de Lie. Es claro también que cualquier grupo de Lie nilpontente compacto es también una nilvariedad: basta tomar cuociente por el subgrupo trivial.

Ejemplo.

1. La rotación $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ en un grupo de Lie nilpotente compacto es un nilsistema de orden d, donde d es el grado de nilpotencia del grupo.

2. Sea
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & k \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
Es fácil ver que podemos identificar $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ con G/Γ asociando a $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ el elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$.

   Consideremos la acción T dada por la multiplicación por $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y notemos que
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$$
El sistema $(G/\Gamma, T)$ es un nilsistema de orden 2 y se conoce como el toro torcido. Este sistema será relevante en nuestro estudio.

3. El sistema de Heisenberg de orden n, dado por $(U_n/\Gamma_n, T)$ donde
$$U_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & a_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ si } j - i \geq 1 \right\}$$
$$\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \dots & \dots & m_{1n} \\ & 1 & m_{23} & \dots & m_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & m_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : m_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ si } j - i \geq 1 \right\}$$
y T es la multiplicación por un elemento $g \in U_n$, es un nilsistema de orden $n - 1$.

En lo que sigue mencionaremos algunas propiedades topológicas y medibles de los nilsistemas.

Teorema 4.5 ([4])**.** *Todo nilsistema es distal.*

Se observa una conexión estrecha entre la teoría medible y topológica de nilsistemas (lo que se conoce como rigidez). Un teorema importante que exhibe este hecho es el siguiente

Teorema 4.6 ([40]). *Sea $(X = G/\Gamma, T)$ un nilsistema y μ su medida de Haar. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *(X,T) es transitivo.*
2. *(X,T) es minimal.*
3. *(X,T) es únicamente ergódico.*
4. *(X,T) es estrictamente ergódico.*
5. *(X,μ,T) es ergódico.*

Sea $(X = G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema de orden d, donde $T(h\Gamma) = gh\Gamma$. Definimos $(G/\Gamma)_{ab} = G/[G,G]\Gamma$ y $\pi : G/\Gamma \to G/[G,G]\Gamma$ la proyección canónica. Se tiene que $G/[G,G]\Gamma$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{m_{ab}}/\mathbb{Z}^{m_{ab}}$ donde $m_{ab} = dim(G) - dim([G,G])$. Sea $\widetilde{T}$ la rotación inducida en $(G/\Gamma)_{ab}$ por $\pi(g)$. Decimos que $((G/\Gamma)_{ab}, \widetilde{T})$ es la *abelianización del nilsistema* $(G/\Gamma, T)$. La importancia de la abelianización de un nilsistema viene dada por el siguiente criterio de ergodicidad.

Teorema 4.7 ([4]). *Sea $(G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema donde T es la traslación por $g \in G$ y sea $(G/[G,G]\Gamma, T)$ su abelianización. Supongamos que G está generado por G^0, la componente conexa de la identidad, y por el elemento $g \in G$. Luego $(G/\Gamma, \mu, T)$ es ergódico si y sólo si la rotación $((G/\Gamma)_{ab}, \widetilde{T})$ es ergódica.*

Ejemplo. En el grupo de Heisenberg clásico

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & k \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n,m,k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es fácil ver que

$$[G,G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

y por lo tanto

$$[G,G]\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & z \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \quad n,m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Luego $G/[G,G]\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x,y \in [0,1) \right\}$. Si consideramos en G/Γ la traslación dada por $g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $(G/[G,G]\Gamma, T)$ es isomorfo a $(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \widetilde{T})$ donde $\widetilde{T}(x,y) = (x+a, y+b)$. Esta transformación es ergódica en $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ si y sólo si $\{1,a,b\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Como G es conexo (es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$), concluimos que la traslación dada por g en G/Γ es ergódica si y sólo si $\{1,a,b\}$ son l.i. sobre $\mathbb{Q}$.

Similarmente, en el grupo de Heisenberg U_n de orden n, se puede ver que la ergodicidad depende de la independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$ de la superdiagonal.

El caso no ergódico en general se puede ignorar en las aplicaciones, gracias al siguiente teorema

Teorema 4.8 ([38]). *Sea $(G/\Gamma, \mu, T)$ un nilsistema donde T es la traslación por $g \in G$. Sea $x_0 \in G/\Gamma$ y consideremos $Y = \bar{o}(x_0)$. Luego, existe un subgrupo $G' \subseteq G$ tal que $g \in G'$, $\Gamma' = \Gamma \cap G'$ es cocompacto en G' e $Y = G'/\Gamma'$. Como $(Y, T|_Y)$ es transitivo, resulta ser minimal y ergódico.*

En el desarrollo de la teoría de nilsistemas son relevantes los límites inversos de éstos. La principal razón es que los límites inversos de nilsistemas no son nilsistemas, salvo si todos los grupos son abelianos (i.e., orden 1).

Definición 4.9 (Límites inversos secuenciales).
Caso topológico:
Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de s.d.t. y supongamos que existen factores $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$. Sea X el conjunto

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \pi_i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

Sea d_i la métrica de X_i. A X lo dotamos de la métrica

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

resulta ser un espacio métrico compacto y las transformaciones T_i definen una transformación $T = \prod_{i\in\mathbb{N}} T_i$ en X. Anotamos $(X,T) = \varprojlim (X_i, T_i)$ y decimos que el s.d.t. (X,T) es el *límite inverso* de los s.d.t. (X_i, T_i).

Caso medible:
Sea $\{(X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de s.d.a. y supongamos que existen factores (en el sentido medibles) $\pi_i : X_{i+1} \to X_i$. Sea X el conjunto

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \pi_i(x_{i+1}) = x_i\}.$$

Sea p_i la proyección de X en X_i, i.e., $p_i((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = x_i$. A X lo dotamos de la σ-álgebra $\mathcal{X}$ generada por $p_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$, $i \in \mathbb{N}$ y con la medida μ definida en el álgebra $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$ como $\mu(p_i^{-1}(B)) = \mu_i(B)$ para $B \in \mathcal{X}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Luego $(X, \mathcal{X}, \mu)$ es un espacio de probabilidad. Si $T = \prod_{i\in\mathbb{N}} T_i$, anotamos $(X, \mathcal{X}, \mu, T) = \varprojlim (X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)$ y decimos que el s.d.a. $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ es el *límite inverso* de los s.d.a. $(X_i, \mathcal{X}_i, \mu_i, T_i)$.

Muchas propiedades dinámicas pasan hacia el límite inverso como minimalidad, distalidad y única ergodicidad.

El siguiente teorema permite caracterizar los límites inversos de nilsistemas usando la noción de paralelepípedo dinámico.

Teorema 4.10 (Teorema Estructural de Host-Kra-Maass). *Sea (X,T) un sistema transitivo y $d \geq 2$ un entero. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{Q}^{[d]}(X)$ tienen $2^d - 1$ coordenadas en común, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*
2. *Si $x, y \in X$ son tales que $(x, y, \ldots, y) \in \boldsymbol{Q}^{[d]}(X)$, entonces $x = y$.*
3. *X es un límite inverso de nilsistemas de orden $d-1$.*

Un sistema transitivo que satisface alguna de las propiedades equivalentes del teorema anterior se dice un *sistema de orden* $(d-1)$. Además, cuando hablemos de *nilsistemas* en genérico, nos referimos tanto a nilsistemas básicos como a límites inversos de nilsistemas. Y gracias a las propiedades del límite inverso, resultados como los Teoremas 4.5 y 4.6 se extienden fácilmente a estos sistemas.

Capítulo 5

Nilfactores medibles, medidas y seminormas HK

En esta sección exponemos brevemente la teoría de nilsistemas desarrollada por Host y Kra en el contexto medible, la cual logró resolver la convergencia de algunas medias ergódicas no convencionales.

Sea (X, μ, T) un s.d.a. ergódico y $d \in \mathbb{N}$. Con el objetivo de probar la convergencia en $L^2(\mu)$ de expresiones de la forma

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x) \tag{5.1}$$

donde $f_1, \ldots, f_d \in L^\infty(\mu)$, Host y Kra en [30] demuestran que es necesario y suficiente probar la existencia de tal expresión en un nilsistema de orden d, usando el concepto de *factor característico* introducido por Furstenberg y Weiss en [16].

Definición 5.1. Sea $\pi : (X, \mathcal{X}, \mu, T) \to (Y, \mathcal{Y}, \nu, T)$ un factor medible. Sean $d \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_d \in L^\infty(\mu)$. Decimos que (Y, ν, T) es un *factor característico para los promedios*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x)$$

si cada vez que $\mathbb{E}(f_i | \mathcal{Y}) = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, d\}$, se tiene que el límite cuando $N \to \infty$ de

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n} x) \ldots f_d(T^{dn} x)$$

existe en $L^2(\mu)$ y es igual a 0.

Esta propiedad implica que

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{d} f_i(T^{in} x) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}(f_i(T^{in} x) | \mathcal{Y}) \right) = 0$$

en $L^2(\mu)$ y por lo tanto para probar la convergencia de expresiones de la forma (5.1) es suficiente probar tal convergencia en un factor característico.

5.1. Construcción de factores característicos

En esta sección mencionamos sin entrar en detalles la construcción de factores característicos para los promedios (5.1).

Sea (X, μ, T) un sistema ergódico. En [30], capítulo 3, se define la medida $\mu^{[d]}$ en $X^{[d]}$ y la seminorma HK en $L^\infty(\mu)$, las cuales exponemos a continuación.

5.1.1. Medidas $\mu^{[d]}$

Escribiremos $Cz = \overline{z}$ la conjugación compleja en $\mathbb{C}$ y para $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \{0,1\}^d$ denotamos $|\varepsilon| = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d$. Definimos la medidas $\mu^{[d]}$ inductivamente.

Sea $\mu^{[0]} = \mu$ en $X^{[0]} = X$. Como es usual, un punto $\mathbf{x} \in X^{[d]}$ se escribe como $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ con $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^{[d-1]}$. Supongamos que hemos definido $\mu^{[d-1]}$ en $X^{[d-1]}$, entonces definimos $\mu^{[d]}$ en $X^{[d]}$ como el producto independiente de $\mu^{[d-1]}$ consigo mismo sobre $\mathcal{I}^{[d-1]}$, la σ-algebra de los invariantes de $(X^{[d-1]}, \mu^{[d-1]}, T^{[d-1]})$. Es decir, si F, G son funciones acotadas en $X^{[d-1]}$ entonces

$$\int_{X^{[d]}} F(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}'')d\mu^{[d]}(\mathbf{x}) = \int_{X^{[d-1]}} \mathbb{E}(F|\mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y}) \cdot \mathbb{E}(G|\mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y})d\mu^{[d-1]}(\mathbf{y})$$

Notemos con ello que,

$$\int_{X^{[d]}} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^d} C^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) d\mu^{[d]} = \int_{X^{[d-1]}} |\mathbb{E}(\prod_{\eta \in \{0,1\}^{d-1}} C^{|\eta|} f(x_\eta) | \mathcal{I}^{[d-1]})(\mathbf{y})|^2 d\mu^{[d-1]}(\mathbf{y}) \geq 0$$

y se define la cantidad

$$|||f|||_d = (\int_{X^{[d]}} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^d} C^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) d\mu^{[d]})^{\frac{1}{2^d}}$$

Se prueba que $|||\cdot|||_d$ es una seminorma en $L^\infty(\mu)$ y se denomina la seminorma HK.

Definición 5.2. Sea $d \in \mathbb{N}$. Definimos $\mathcal{Z}_{d-1}(X)$ como el conjunto

$$\{B \in \mathcal{B} : \exists A \subseteq X_*^{[d]} = X^{2^d-1} \text{ tal que } 1_A(x_*) = 1_B(x_\emptyset)\ \mu^{[d]}\text{-c.s. } x = (x_\emptyset, x_*) \in X^{[d]}\}$$

Se prueba que ésta es una sub-σ-álgebra T-invariante y por lo tanto define un factor medible de (X, μ, T) que denotamos igualmente $\mathcal{Z}_{d-1}(X)$, ó $\mathcal{Z}_{d-1}$ cuando no haya ambigüedad.

Lema 5.3. *Sea (X, μ, T) un s.d.a. y $f \in L^\infty(\mu)$. Luego*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{Z}_{d-1}) = 0 \textit{ si y solamente si } |||f|||_d = 0$$

Se concluye del lema que $\mathcal{Z}_{d-1}$ es factor de $\mathcal{Z}_d$. Más aun, se tiene el siguiente Teorema Estructural.

Teorema 5.4 (Teorema Estructural de Host-Kra)**.** *Sea (X, μ, T) un s.d.a. ergódico. Entonces $\mathcal{Z}_d$ es un límite inverso (medible) de nilsistemas ergódicos de orden $d-1$.*

La importancia de este factor viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 5.5 ([30]). *Sea (X,μ,T) un s.d.a. ergódico y $f_1,\dots,f_d \in L^\infty(\mu)$. Luego $\mathcal{Z}_d(X)$ es un factor característico para los promedios*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T^n x) f_2(T^{2n}x)\dots f_d(T^{dn}x).$$

Sea (X,μ,T) un s.d.a. y $d\in\mathbb{N}$. Decimos que (X,T) es un *sistema de orden* d (*en el sentido medible*) si $\mathcal{Z}_d(X)=X$. El factor $\mathcal{Z}_d(X)$ define el factor de orden d medible maximal que llamaremos *nilfactor medible maximal de orden* d, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 5.6 ([30]).

1. *Un factor de un sistema de orden d es un sistema de orden d.*
2. *Sea $\pi : X \to Y$ un factor medible entre los s.d.a. (X,μ,T) y (Y,ν,T). Si (Y,ν,T) es un sistema de orden d (en el sentido medible), entonces es un factor medible de $\mathcal{Z}_d(X)$.*
3. *Un límite inverso (en el sentido medible) de sistemas de orden d es un sistema de orden d.*

5.1.2. Resultados de convergencia

Además de probar la convergencia de los Teoremas Ergódicos no Convencionales, en [30] se prueban resultados de convergencia promediando en parelelepípedos, los cuales permiten definir funciones duales que han servido en el desarrollo de la teoría topológica de los nilsistemas.

Teorema 5.7 ([30]). *Sean f_ε, $\varepsilon\in\{0,1\}^d_*$ $\quad 2^d-1$ funciones en $L^\infty(\mu)$. Luego los promedios*

$$\frac{1}{H^d}\sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1}\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^d_*} f_\varepsilon\circ T^{\varepsilon\cdot\mathbf{h}}$$

convergen en $L^2(\mu)$ cuando $H\to\infty$.

Denotando F el límite de los promedios anteriores, se tiene que para toda $g\in L^2(\mu)$

$$\int_X g(x)F(x)d\mu(x) = \int_{X^{[d]}} g(\mathbf{x}_\emptyset)\prod_{\substack{\varepsilon\subseteq[d]\\ \varepsilon\neq\emptyset}} f_\varepsilon(\mathbf{x}_\varepsilon)d\mu^{[d]}(\mathbf{x}).$$

Considerando $f_\varepsilon = C^{|\varepsilon|}f$, con $f\in L^\infty(\mu)$, se obtiene,

Corolario 5.8.

$$\frac{1}{H^d}\sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1}\prod_{\varepsilon\in\{0,1\}^d_*} C^{|\varepsilon|}f(T^{\varepsilon\cdot\mathbf{h}}x)$$

converge en $L^2(\mu)$ cuando $H\to\infty$.

Este límite se anota $D_d f$ y se denomina la función dual de f. Se prueba además que el corolario anterior vale también tomando $f \in L^{2^d}(\mu)$, con convergencia en $L^{\frac{2^d}{2^d-1}}(\mu)$ y que la función

$$D_d : L^{2^d}(\mu) \to L^{\frac{2^d}{2^d-1}}(\mu)$$

que a f le asocia su dual, es continua.

En [32] se muestran las propiedades de la medida $\mu^{[d]}$ y las seminormas HK, cuando $(X = G/\Gamma, \mu, T)$ es un nilsistema de orden $(d-1)$. Para ello, se usa el siguiente teorema:

Teorema 5.9 ([32]).

1. *La medida $\mu^{[d]}$ es la medida de Haar de una subvariedad X_d de $X^{[d]}$. Las transformaciones $T^{[d]}$ y $T_j^{[d]}$, $1 \leq i \leq d$, actúan en X_d de manera ergódica (y por lo tanto de manera únicamente ergódica y minimal).*

2. *Sea X_{d*} la imagen de X_d bajo la proyección $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_*$ desde $X^{[d]}$ a $X_*^{[d]}$. Entonces existe una función suave $\Phi : X_{d*} \to X_d$ tal que*

$$X_d = \{(\Phi(\mathbf{x}_*), \mathbf{x}_*) : \mathbf{x} \in X_{d*}\}$$

3. *$|||\cdot|||_d$ es una norma en $C(X)$.*

4. *Para cada $x \in X$, sea $W_{d,x} = \{\mathbf{x} \in X_d : \mathbf{x}_\emptyset = x\}$. Luego $W_{d,x}$ es únicamente ergódico bajo las transformaciones $T_j^{[d]}$, $1 \leq j \leq d$.*

5. *Para cada $x \in X$, sea ρ_x la medida invariante de $W_{d,x}$. Luego, si $x \in X$ y $g \in G$, entonces ρ_{gx} (la medida invariante de $W_{d,gx}$) es la imagen de ρ_x bajo la traslación por $g^{[d]} = (g, g, \cdots, g)$.*

A partir de este resultado, se prueban mejores convergencias que las establecidas en el Teorema 5.7.

Proposición 5.10 ([32]). *Sean f_ε, $\varepsilon \in \{0,1\}_*^d$, $2^d - 1$ funciones continuas en X. Luego los promedios*

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}_*^d} f_\varepsilon(T^{\varepsilon \cdot \mathbf{h}} x) \to \int \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}_*^d} f_\varepsilon(x_\varepsilon) d\rho_x(\mathbf{x})$$

cuando $H \to \infty$. Mas aún, la convergencia es uniforme en $x \in X$.

Corolario 5.11 ([32]). *Si $f \in C(X)$, entonces*

$$D_d(f) = \int \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}_*^d} C^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) d\rho_x(\mathbf{x})$$

y como es el límite uniforme de

$$\frac{1}{H^d} \sum_{h_1,\cdots,h_d=0}^{H-1} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}_*^d} C^{|\varepsilon|} f(T^{\varepsilon \cdot \mathbf{h}} x)$$

$D_d f$ resulta ser una función continua.

Además se prueba que $D_d : C(X) \to C(X)$ se puede extender a $D_d : L^{2^d-1}(\mu) \to C(X)$. Del Teorema 5.7 se deduce:

Proposición 5.12 ([33]). *Sea (X, T) un sistema topológico minimal y μ una medida invariante ergódica definida en X. Luego, la medida $\mu^{[d]}$ está concentrada en el conjunto $\boldsymbol{Q}^{[d]}$.*

Capítulo 6

Nilfactores topológicos

En esta sección se muestran generalizaciones de la relación de proximalidad regional **RP** definida anteriormente en §2.2.1. Similarmente a como **RP** define el factor equicontinuo maximal, estas relaciones definen los nilfactores topológicos maximales que definimos a continuación.

Definición 6.1. Sea (X,T) un s.d.t. y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que un factor (Y,T) es el nilfactor de orden d maximal si (Y,T) es un sistema de orden d, es factor de (X,T) y si cada vez que existe (Z,T) sistema de orden d que es factor de (X,T), (Z,T) también es factor de (Y,T). En caso de existir tal (Y,T) lo escribimos como (Z_d,T), o $(Z_d(X),T)$ en caso de ambigüedad, y se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_d"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Z_d(X) \arrow[r, "p_d"'] & Z \end{tikzcd}$$

Directo de la definición se ve que si (X,T) es un s.d.t. y μ es una medida tal que (X,μ,T) es un s.d.a. , entonces existe un factor medible entre $\mathcal{Z}_d(X)$ y $Z_d(X)$.

6.1. Las relaciones de proximalidad regional

La siguiente definición permite construir los nilfactores maximales en cualquier sistema dinámico topológico minimal.

Definición 6.2. Sea (X,T) un s.d.t y $d \in \mathbb{N}$. Decimos que los puntos $x,y \in X$ son *regionalmente proximales de orden d* si para cualquier $\delta > 0$, existen $x',y' \in X$ y un vector $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{Z}^d$ tales que $d(x,x') < \delta$, $d(y,y') < \delta$ y

$$d(T^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon}x', T^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon}y') < \delta \quad \forall \varepsilon \in \{0,1\}^d \backslash \{0\dots 0\}.$$

Denotamos por $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$ el conjunto de los pares regionalmente proximales de orden d. Si el contexto es claro, escribiremos $\mathbf{RP}^{[d]}$ en lugar de $\mathbf{RP}^{[d]}(X)$.

Observamos que $\mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP}$ y que para cada $d \in \mathbb{N}$, $\mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$. Notamos también que $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]}$ para todo $d \in \mathbb{N}$ (ver [46]).

Luego,

$$\mathbf{P} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{RP}^{[d+1]} \subseteq \mathbf{RP}^{[d]} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{RP}^{[2]} \subseteq \mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP}.$$

Los siguientes resultados demostrados en [33] (para sistemas distales minimales) y en [46] (para sistemas minimales en general) muestran condiciones bajo las cuales (x, y) pertenecen a $\mathbf{RP}^{[d]}$ y la relación entre $\mathbf{RP}^{[d]}$ y sistemas de orden d.

Teorema 6.3. *Sea (X, T) un sistema minimal y $d \in \mathbb{N}$. Luego*

1. *$(x, y) \in \boldsymbol{RP}^{[d]}$ si y sólo si $(x, y, \ldots, y) \in \boldsymbol{Q}^{[d+1]}$ si y sólo si $(x, y, \ldots, y) \in \overline{\mathcal{F}^{[d+1]}}(x^{[d+1]})$.*
2. *$\boldsymbol{RP}^{[d]}$ es una relación de equivalencia.*
3. *(X, T) es un sistema de orden d si y sólo si $\boldsymbol{RP}^{[d]}(X) = \Delta_X$.*

Gracias al siguiente resultado, la relación de proximalidad regional de orden d permite construir el nilfactor maximal de orden d de un sistema.

Teorema 6.4. *Sea $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ un factor y $d \in \mathbb{N}$. Luego*

1. *$(\pi \times \pi)(\boldsymbol{RP}^{[d]}(X)) \subseteq \boldsymbol{RP}^{[d]}(Y)$.*
2. *Si (X, T) es minimal, $(\pi \times \pi)(\boldsymbol{RP}^{[d]}(X)) = \boldsymbol{RP}^{[d]}(Y)$.*
3. *Si (X, T) es minimal, (Y, T) es un sistema de orden d si y sólo si $\boldsymbol{RP}^{[d]}(X) \subseteq R_\pi$, donde $R_\pi = \{(x, x') \in X \times X : \pi(x) = \pi(x')\}$.*

En particular, si (X, T) es minimal, $(X/\boldsymbol{RP}^{[d]}(X), T)$ es el nilfactor maximal de orden d de X.

Así, si (Y, T) es un sistema de orden d que es un factor de (X, T), entonces también es un factor de $(X/\mathbf{RP}^{[d]}, T)$ y anotamos $Z_d(X) = X/\mathbf{RP}^{[d]}$. Se obtiene además el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi_D"'] \arrow[drr, "\pi_{d+1}"] \arrow[drrr, bend left, "\pi_d"] \arrow[drrrrr, bend left, "\pi_{eq}"] & & & & & \\
X_D \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\rho_{d+1}"] \arrow[rrr, bend right, "\rho_d"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\rho_1"'] & \cdots \arrow[r] & Z_{d+1}(X) \arrow[r] & Z_d(X) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z_1(X) = X_{eq}
\end{tikzcd}
$$

donde X_D y X_{eq} son los factores distal y equicontinuo maximal respectivamente. Estos nilfactores aparecen entre los factores distal y equicontinuo maximal, en los cuales desde Furstenberg se había notado una relación muy estrecha. La aparición de estos sistemas intermedios es novedosa y tienen importancia en Dinámica Topológica. Más aún, tienen una importancia trascendental desde el punto de vista medible que mostramos en el capítulo anterior y que motivaron su desarrollo topológico.

6.1.1. La relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}$

En [14] se extiende la noción de sistemas de orden d al caso $d = \infty$ en sistemas minimales. Para un sistema minimal (X, T),

$$\mathbf{RP}^{[\infty]}(X) = \bigcap_{d \in \mathbb{N}} \mathbf{RP}^{[d]}(X)$$

es una relación de equivalencia cerrada y T-invariante; que cuando no haya ambigüedad escribiremos $\mathbf{RP}^{[\infty]}$. Extendiendo la noción de sistemas de orden d, para $d \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente definición.

Definición 6.5. Un sistema minimal (X,T) es un *sistema de orden* ∞, si la relación $\mathbf{RP}^{[\infty]}$ es trivial, i.e., coincide con la diagonal.

Similar al Teorema 6.4, se puede mostrar que el cuociente de un sistema minimal (X,T) bajo $\mathbf{RP}^{[\infty]}$ es el nilfactor maximal de orden ∞ de X. Anotamos $Z_\infty(X)$ por $X/\mathbf{RP}^{[\infty]}(X)$ y cuando no haya ambigüedad, Z_∞. Se tiene además el siguiente resultado que, en parte, motiva el estudio de estos sistemas.

Teorema 6.6 ([14])**.** *Un sistema minimal es un sistema de orden ∞ si y sólo si es un límite inverso de nilsistemas minimales. Más aún, si (X,T) es un sistema de orden ∞, entonces $(X,T) = \varprojlim(Z_d(X),T)$.*

Como los nilsistemas minimales son distales y únicamente ergódicos, es fácil ver que los sistemas de orden ∞ también lo son puesto que estas propiedades se preservan bajo límites inversos. En particular, del Teorema 6.6 se deduce que el factor $Z_\infty(X)$ de (X,T) es distal y por lo tanto se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_D"'] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] \arrow[drr, bend left, "\pi_d"] & & \\ X_D \arrow[r, "\rho_\infty"'] \arrow[rr, bend right, "\rho_d"'] & Z_\infty(X) \arrow[r, "\pi_{\infty,d}"'] & Z_d(X) \end{tikzcd}$$

6.2. Estabilización de nilfactores

Una pregunta interesante es analizar qué ocurre cuando se tiene dos nilfactores consecutivos iguales, i.e., $Z_{d+1} = Z_d$. Gracias al Teorema 6.4, esto equivale a estudiar qué significa $\mathbf{RP}^{[d+1]} = \mathbf{RP}^{[d]}$.

En [14] se observa que la condición $\mathbf{Q}^{[d+2]} = \mathbf{Q}^{[d+1]} \times \mathbf{Q}^{[d+1]}$ es suficiente para obtener $\mathbf{RP}^{[d+1]} = \mathbf{RP}^{[d]}$, sin embargo, los autores muestran que tal condición está lejos de ser necesaria. En efecto,

Proposición 6.7. *Sea (X,T) un sistema minimal y $\bar{d} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{Q}^{[\bar{d}+2]} = \mathbf{Q}^{[\bar{d}+1]} \times \mathbf{Q}^{[\bar{d}+1]}$. Entonces (X,T) es débilmente mezclador (i.e., el sistema $(X \times X, T \times T)$ es transitivo) y por lo tanto $\mathbf{Q}^{[d]} = X^{[d]}$ y $\mathbf{RP}^{[d]} = X \times X$ para todo $d \in \mathbb{N}$.*

En esta misma dirección, se muestra

Teorema 6.8 ([14])**.**

1. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal. Si $\mathbf{RP}^{[d]} = \mathbf{RP}^{[d+1]}$, entonces $\mathbf{RP}^{[n]} = \mathbf{RP}^{[d]}$ para cada $n \geq d$.*
2. *Sea (X,μ,T) un s.d.a. ergódico. Si $\mathcal{Z}_d(X) = \mathcal{Z}_{d+1}(X)$, entonces $\mathcal{Z}_n(X) = \mathcal{Z}_d(X)$ para cada $n \geq d$.*

3. *Sea (X,T) un s.d.t. minimal y sea μ una medida ergódica. Si $\mathcal{Z}_d(X)$ es isomorfo (en el sentido medible) a $Z_d(X)$ para algún $d \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{Z}_n(X)$ es isomorfo a $Z_n(X)$ para cada $n \leq d$.*

Ejemplo.

1. En un sistema débilmente mezclador, $\mathbf{RP}^{[d]} = X \times X$ para cada $d \in \mathbb{N}$.
2. En un nilsistema de orden d, $\mathbf{RP}^{[n]} = \Delta_X$ para $n \geq d$

Estas son las estabilizaciones triviales: $X \times X$ ó Δ_X. En [14] se encuentran ejemplos de sistemas minimales con estabilización no trivial y sin estabilización, además de la siguiente propiedad que caracteriza los ∞-nilsistemas.

Proposición 6.9. *Sea (X,T) un sistema minimal que es un sistema de orden ∞. Entonces, o bien (X,T) es un sistema de orden d para algún $d \in \mathbb{N}$, o bien $\boldsymbol{RP}^{[d+1]} \subsetneq \boldsymbol{RP}^{[d]}$ para cada $d \in \mathbb{N}$.*

Capítulo 7

Extensiones de una rotación minimal

En la presente memoria se estudiará un tipo particular de sistemas, que corresponden a extensiones de rotaciones minimales en $\mathbb{T}$. Más precisamente, trabajaremos el espacio $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ con la métrica inducida por $\|x\| = \text{mín}\{|x-k| : k \in \mathbb{Z}\}$ para $x \in \mathbb{T}$. Definimos $T : X \to X$ tal que

$$(x, y) \mapsto (x + \alpha, f(x, y)) \tag{7.1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ una función con ciertas propiedades de modo que T defina un homeomorfismo de X. Así, (X, T) define un s.d.t. y a este tipo de sistemas los denominamos *producto torcido* del toro. Un caso particular es cuando $f(x, y) = y + \varphi(x)$ y este tipo de sistemas es conocido como *producto de Anzai* o producto torcido de Anzai, puesto que fue éste el primero en estudiarlos ([1]). Anotaremos π_i, para la proyección sobre la i-ésima coordenada en X, $i = 1, 2$. Así, por ejemplo, es claro que el sistema $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es factor de (X, T) vía la proyección en la primera coordenada π_1. A $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ le diremos *sistema base* o *sistema forzante.*

Furstenberg [17] clasificó este tipo de sistemas en el contexto medible de la siguiente forma

Teorema 7.1. *Sea $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ una función continua y $T : X \to X$ tal que $(x, y) \mapsto (x + \alpha, f(x, y))$ donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces se tiene uno de los siguientes casos.*

1. *(X, T) es únicamente ergódico. Y en este caso (X, T) es isomorfo (en el sentido medible) a una rotación torcida estrictamente ergódica.*

2. *Existe una medida T-invariante ν tal que (X, ν, T) es una extensión finita de $(\mathbb{T}, R_\alpha)$. Y en este caso toda medida T-invariante define una extensión finita de $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.*

Esta clasificación es débil en el sentido topológico, puesto que aún en el segundo caso puede haber sistemas minimales. Algunos autores han tratado de extender esta clasificación al contexto topológico, sin embargo, han tenido que restringirse a ciertas propiedades para f (ver por ejemplo [28, 36, 35]).

Nuestro objetivo es estudiar los nilfactores maximales en estos sistemas y, salvo que se diga lo contrario, nos restringiremos al caso minimal para aplicar los resultados de [33, 46].

En las dos secciones siguientes se mostrarán ciertas ideas que en parte motivan este estudio.

7.1. Homeomorfismos del círculo

En esta sección mostraremos resultados que clasifican los sistemas unidimensionales. Uno de los primeros resultados en esta dirección es la *clasificación de Poincaré* de homeomorfismos del círculo y abarca ampliamente el estudio de estos sistemas (ver por ejemplo [37, 41]).

Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un homeomorfismo y por lo tanto $(\mathbb{T}, f)$ un s.d.t. Además supondremos que f preserva la orientación (el caso en que el homeomorfismo invierte la orientación será comentado más adelante). Se sabe que f puede ser levantado a un homeomorfismo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$, donde $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es la proyección canónica. Decimos que F es un *levantamiento de f*. Además, para cada $x_0 \in \pi^{-1}(f(0)) = f(0) + \mathbb{Z}$ hay un único levantamiento F con $F(0) = x_0$ y estos son todos los levantamientos de f. Cualquier par de levantamientos difieren en una translación por un entero y para todo levantamiento F, $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $F(x + n) = F(x) + n$. En ocasiones, anotaremos $\hat{f}$ para denotar un levantamiento cualquiera de f.

Teorema 7.2. *Sea $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces, existe el límite*

$$\rho(\hat{f}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{f}^n(x) - x}{n}$$

existe, es independiente de $x \in \mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$.

El número $\rho(f) = \rho(\hat{f}) \mod 1$ es independiente del levantamiento $\hat{f}$ y es llamado *número de rotación de f*. Además, se tienen las siguientes propiedades:

1. El número de rotación depende continuamente de f en la topología C^0.
2. $\rho(\hat{f} + 1) = \rho(\hat{f}) + 1$, y existe un único levantamiento F tal que $\rho(F) = \rho(f)$.
3. El número de rotación es un invariante de conjugación (en estos sistemas).
4. El número de rotación de una rotación por $\beta \in \mathbb{T}$ es β, i.e., $\rho(R_\beta) = \beta$.
5. $\rho(f^m) = m\rho(f)$
6. Si f invierte la orientación, entonces $\rho(f^2) = 0$.
7. $\rho(f)$ es racional si y sólo si f tiene un punto periódico. Además, $\rho(f) = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si y sólo si f tiene un punto periódico de período mínimo q, i.e., f^q tiene un punto fijo.
8. Si $\rho(f)$ es irracional, entonces $(\mathbb{T}, f)$ tiene un único subsistema minimal que es todo $\mathbb{T}$ o un Cantor (perfecto y denso en ninguna parte).

Entre otras propiedades, el número de rotación además permite clasificar este tipo de sistemas.

Teorema 7.3 (Clasificación de Poincaré [44])**.** *Sea f un homeomorfismo del círculo y $\rho = \rho(f)$ su número de rotación. Entonces*

1. *Si el número de rotación es racional, $\rho = \frac{p}{q}$, entonces f tiene una órbita de período q.*
2. *Si el número de rotación es irracional, entonces f es extensión de la rotación R_ρ. Si además el sistema $(\mathbb{T}, f)$ es transitivo, entonces f y R_ρ son conjugados.*

En el caso irracional, Denjoy completó la clasificación como sigue.

Teorema 7.4 (Denjoy [13]). *Sea f un difeomorfismo C^1 del círculo con $\rho = \rho(f)$ irracional. Si la derivada f' tiene variación acotada, entonces f es conjugado a la rotación R_ρ.*

Además muestra que para cada $\rho \in (0,1)$, existe un difeomorfismo C^1 del círculo f que preserva la orientación con número de rotación ρ tal que $(\mathbb{T}, f)$ no es transitivo. Y con esto, queda relativamente resuelta la clasificación de estos sistemas.

Usando estos resultados en el estudio de los nilfactores maximales, se puede concluir que,

Corolario 7.5. *Sea f un homeomorfismo del círculo. Entonces, si $(\mathbb{T}, f)$ es transitivo, es un nilsistema de orden* 1.

Esto permite deducir,

Proposición 7.6. *Sea f un homeomorfismo del círculo y sea ρ su número de rotación. Entonces el nilfactor maximal de orden d de $(\mathbb{T}, f)$ es $(\mathbb{T}, R_\rho)$ para $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Además, si ρ es irracional y $(\mathbb{T}, f)$ es transitivo, entonces $(\mathbb{T}, f)$ es un nilsistema de orden* 1.

Observamos que el hecho de que $Z_\infty = Z_1$, no depende de la teoría de números de rotación puesto que resulta directamente del argumento dimensional y del hecho de que los únicos nilsistemas unidimensionales de orden 1 son rotaciones en el círculo. La teoría de números de rotación completa la clasificación separando el caso $X = Z_1$ de $X \neq Z_1$. Lamentablemente, ni la teoría de números de rotación ni el argumento dimensional son tan categóricos al tratar de extenderlos a otros sistemas, ni siquiera al pasar a $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Luego es natural estudiar sistemas que están, de alguna manera, entre dimensión uno y dos. Estos sistemas intermedios resultan ser los productos torcidos del círculo.

7.2. Una familia de grupos de Lie nilpotentes de orden 2

Como segunda motivación mostraremos una familia de grupos de Lie que definen nilsistemas similares a (7.1).

En §4 vimos que los nilsistemas conexos abelianos, i.e., de orden 1, están reducidos a rotaciones en $(\mathbb{T}^n, +)$. Veamos el nilsistema $\mathbb{T}^n$ como el cuociente entre la nilvariedad $\mathbb{R}^n$ y el subgrupo discreto $\mathbb{Z}^n$. A partir del grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$, intentamos construir nuevos espacios que se alejen lo menos posible de éste. Una propuesta es mantener la variedad subyacente $\mathbb{R}^n$ y modificar lo más sensiblemente posible la operación $+$. Por ejemplo, de la siguiente manera: descomponemos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ y tomamos una forma bilineal antisimétrica $\theta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, definiendo una nueva operación $+_\theta$ en $\mathbb{R}^n$ por

$$(x, y) +_\theta (a, b) = (x + a, y + b + \theta(x, a)), \quad x, a \in \mathbb{R}^p,\ y, b \in \mathbb{R}^q.$$

Es inmediato que $+_\theta$ es asociativa con elemento neutro $(0,0)$ e inverso $(-x, -y)$ para cada elemento (x, y). Más aún, $(\mathbb{R}^n, +_\theta)$ es un grupo de Lie, lo que nos permite definir un nilsistema. No es difícil ver que los espacios $(\mathbb{R}^n, +_\theta)$ obtenidos son precisamente grupos de Lie conexos nilpotentes de orden 2 y por lo tanto son una especie de paso intermedio entre los grupos de Lie abelianos y los grupos de Lie en general.

Observamos que $\mathbb{Z}^n$ o los múltiplos de $\mathbb{Z}^n$ son exactamente los subgrupos discretos de $(\mathbb{R}^n, +_\theta)$, de modo que podemos cuocientar para obtener algo de la forma $(\mathbb{T}^n, F_{\phi,\alpha})$ donde $F_{\phi,\alpha}$ es la transformación definida por

$$F_{\phi,\alpha}(x,y) = (x+\alpha, y+\phi(x)), \quad (x,y) \in \mathbb{T}^n$$

con $\phi = \beta + \theta(\cdot, \alpha) \mod 1$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$ y $\beta \in \mathbb{R}^q$, y afirmar que es un nilsistema de orden 2.

Esto motiva preguntarse si los sistemas definidos por $(x,a) \mapsto (x+\alpha, y+\phi(x))$, donde ϕ es una función continua, son sistemas de orden 2 ó de otro orden, y en caso de que no lo sea, cuáles son sus nilfactores. Una segunda generalización es considerar las transformaciones $(x,a) \mapsto (x+\alpha, f(x,y))$ y analizarlas en este contexto.

7.3. Productos torcidos

Recordemos que un producto torcido del toro está dado por el espacio base $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ dotado de una transformación T del tipo (7.1). Para que T sea un homeomorfismo, se requiere que $f : X \to \mathbb{T}$ sea continua y las funciones $f_x = f(x, \cdot) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ sean homeomorfismos del círculo. O equivalentemente, que $f_x = f(x,\cdot) : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ sean homeomorfismos del círculo y que la aplicación $x \mapsto f_x$ sea continua con respecto a la topología C^0.

Además restringiremos aún más el estudio exigiendo que el sistema sea minimal y nos enfocaremos en dos casos particulares agregando supuestos en f. Diremos que T es

1. Una *rotación torcida* si $f(x,y) = y + \varphi(x)$, $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua.
2. Un *homeomorfismo del circulo quasiperiódicamente forzado* (*h.c.q.f.*) si f_x preserva la orientación para cada $x \in \mathbb{T}$ y T es homotópica a la identidad.

Observemos que estos dos tipos de sistemas no tienen intersección vacía. En efecto, si $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es homotópica a una constante, es en particular continua, y $f(x,y) = y + \varphi(x)$ satisface las condiciones de un h.c.q.f. Así, cuando φ es homotópica a una constante $(x,y) \mapsto (x+\alpha, y+\varphi(x))$ es una rotación torcida y un h.c.q.f.

7.3.1. Rotaciones torcidas

En esta sección mostramos algunos resultados útiles sobre rotaciones torcidas. Este tipo de sistemas son también conocidos como *extensiones por cociclo* de $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ debido a que $\varphi^{(n)} = \pi_2 T^n(\cdot, y) - y$, que no depende de $y \in \mathbb{T}$, satisface que

$$\varphi^{(n)} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k x) & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{n} \varphi(R_\alpha^{-k} x) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

de modo que cumple la *condición de cociclos* sobre $\mathbb{Z}$: $\varphi^{(n+m)}(x) = \varphi^{(n)}(R_\alpha^m x) + \varphi^{(m)}(x)$; y por tanto se dice un *cociclo sobre* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-*cociclo*, o simplemente *cociclo*.

Recordemos que $m = \lambda \otimes \lambda$ es la medida de Lebesque en X. Furtenberg [17] mostró para estos sistemas, en términos generales, que

Proposición 7.7. *La medida m es T-invariante y*

1. *Son equivalentes:*
   (a) (X, T) *es estrictamente ergódico.*
   (b) m *es ergódica.*
   (c) *La ecuación*
   $$k \cdot \varphi(x) = \psi(x+\alpha) - \psi(x), \qquad x \in \mathbb{T} \tag{7.2}$$
   no tiene solución $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\psi \in \lambda$*-medible.*
2. (X, T) *es minimal ssi la ecuación* (7.2) *no tiene solución* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ψ *continua.*

Cuando φ satisface la ecuación (7.2) para $k = 1$ y ψ continua, entonces decimos que φ es *coborde.*

Dado que φ es continua, se puede elegir un levantamiento continuo $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existe una cantidad infinita de tales levantamientos y cualquier par de éstos difieren en un entero, i.e., si Φ_1 y Φ_2 son dos levantamientos de φ, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi_2(x) - \Phi_1(x) = k$ para cada $x \in \mathbb{R}$. También se tiene que $\Phi(x+1) - \Phi(x)$ es entero y no depende de $x \in \mathbb{R}$, y por lo anterior, tampoco depende del levantamiento Φ elegido. Así, tiene sentido definir $d(\varphi) = \Phi(x+1) - \Phi(x)$ que es una constante entera que sólo depende de φ y lo llamamos el *grado de* φ. El grado se puede interpretar como la cantidad de "vueltas" que da φ a $\mathbb{T}$, y en particular, T es homotópica a la identidad en X si y sólo si φ es homotópica a una constante o, lo que es lo mismo, $d(\varphi) = 0$. En [17] Furstenberg mostró que,

Proposición 7.8 ([17])**.** *Si* $d(\varphi) \neq 0$, *entonces*

- *Si* φ *satisface la condición de Lipchitz*
  $$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|. \tag{7.3}$$
  Entonces la ecuación (7.2) *no tiene solución* $k \neq 0$ *y* $\psi \in \lambda$*-medible.*
- *La ecuación* (7.2) *no tiene solución* $k \neq 0$ *y* ψ *continua.*

Se deduce de lo anterior el siguiente resultado importante

Teorema 7.9. *Sea* (X, T) *una rotación torcida, i.e.,* $T : X \to X$ *está dado por* $(x, y) \mapsto (x+\alpha, y+\varphi(x))$ *donde* $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ *y* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *es una función continua. Entonces, si* φ *tiene grado no nulo, el sistema* (X, T) *es minimal. Si además* φ *satisface la condición de Lipchitz* (7.3), (X, T) *es estrictamente ergódico.*

En términos un poco más generales, se puede demostrar de manera similar el siguiente resultado.

Teorema 7.10 (Furstenberg [17])**.** *Sea* $X' = \mathbb{T}^{r+1}$ *y* $T' : X' \to X'$ *el homeomorfismo definido por*

$$T' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha \\ \varphi_1(x_1) + x_2 \\ \vdots \\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_i) + x_{i+1} \\ \vdots \\ \varphi_r(x_1, \ldots, x_r) + x_{r+1} \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ *y cada* $\varphi_{i+1} : \mathbb{T}^i \to \mathbb{T}$ *es continua. Supongamos además que para cada* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *y* $x_1, \ldots, x_{i-1} \in \mathbb{T}$ *fijos, la aplicación* $x_i \mapsto \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$ *tiene grado no nulo. Entonces el sistema* (X', T') *es minimal.*

Si las aplicaciones $x_i \mapsto \varphi_i(x_1, \ldots, x_i)$ *satisfacen además la condición de Lipchitz* (7.3)*, entonces* (X', T') *es estrictamente ergódico.*

Como comentamos anteriormente, cuando φ es homotópica a una constante, el sistema (X, T) resulta ser un h.c.q.f. y por tanto, los resultados de ese tipo de sistemas son también relevantes para estos. En la siguiente sección mostramos algunos resultados útiles sobre h.c.q.f.

7.3.2. Homeomorfismos del círculo quasiperiódicamente forzados

Recordemos que una transformación $T : X \to X$ del tipo (7.1) se dice un h.c.q.f. si es de la forma $(x, y) \mapsto (x + \alpha, f_x(y))$, donde todos los f_x son homeomorfismos de $\mathbb{T}$ que preservan la orientación y tal que T es homotópica a la identidad en X. Esta última condición es para asegurar las propiedades de levantamiento requeridas en el estudio de estos sistemas. Anotamos $f_x^{(n)}(y) = \pi_2 T^n(x, y)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Un *levantamiento* de un h.c.q.f. T a $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ es una función continua $\hat{T} : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ de la forma $(x, y) \mapsto (x + \alpha, \hat{f}(x, y))$ que satisface $T \circ \pi = \pi \circ \hat{T}$, donde $\pi : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es la proyección canónica. Además un levantamiento está únicamente determinado fijando $\hat{T}(x_0, y_0) \in \pi^{-1}(T(x_0, y_0))$ para algún punto $(x_0, y_0) \in X$. Análogo al caso de las rotaciones torcidas, si $\hat{T}_1$ y $\hat{T}_2$ son dos levantamientos de T, entonces para algún $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{T}_1(x, y) - \hat{T}_2(x, y) = (0, k)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, y para todo levantamiento $\hat{T}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ se tiene que $\hat{T}(x, y + n) = \hat{T}(x, y) + (0, n)$.

Similar al caso de los homeomorfismos del círculo, Herman ([28]) mostró la existencia y unicidad del número de rotación para transformaciones de este tipo.

Teorema 7.11. *Sea* T *un h.c.q.f. y* $\hat{T}$ *un levantamiento de* T *con* $\hat{f} = \pi_2(\hat{T})$*. Entonces el límite*

$$\rho(\hat{T}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\hat{f}_x^{(n)}(y) - y}{n} \tag{7.4}$$

existe, es independiente de $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ *y la convergencia es uniforme en* $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$*.*

El número $\rho(T) = \rho(\hat{T}) \mod 1$ es independiente del levantamiento $\hat{T}$ y es llamado *número de rotación de* T.

A diferencia del caso unidimensional, el número de rotación en este contexto no tiene tan buenas propiedades. En particular, las cantidades

$$D(n, x, y) = \hat{f}_x^{(n)}(y) - y - n\rho(\hat{T})$$

que llamamos *desviaciones a la rotación*, no se comportan tan bien como en el caso unidimensional, donde estas desviaciones están uniformemente acotadas por 1. En el caso forzado esto ya no es cierto en general, sin embargo se tiene la siguiente dicotomía

Lema 7.12. *Sea* T *un h.c.q.f. Entonces, independientemente del levantamiento escogido, se tiene uno de los siguientes casos*

1. *Las desviaciones están uniformemente acotadas, i.e.,*

$$\exists C > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D(n, x, y)| \leq C$$

2. *Las desviaciones son no acotadas en todas las órbitas, i.e.,*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} |D(n,x,y)| = \infty.$$

De todos modos, en este caso existen $x^-, x^+ \in \mathbb{T}$ tales que para cada $y \in \mathbb{R}$,

$$\sup_n D(n,x^+,y) < \infty \quad \text{é} \quad \inf_n D(n,x^-,y) > -\infty$$

Este resultado motiva la siguiente definición: un h.c.q.f. se dice *ρ-acotado* si las desviaciones son uniformemente acotadas y de otro modo se dice que es *ρ-no-acotado* o simplemente que no es ρ-acotado. En [36], se presenta la siguiente clasificación para h.c.q.f. en términos de su número de rotación y ser o no ρ-acotado.

Teorema 7.13. *Sea T un h.c.q.f. y sea $\rho = \rho(T)$ su número de rotación. Entonces*

1. *Si T es ρ-acotada se tiene uno de los siguientes casos:*
   (a) *ρ y α son racionalmente dependientes (i.e., $\rho \in \alpha\cdot\mathbb{Q}+\mathbb{Q})$) y (X,T) no es minimal.*
   (b) *ρ y α son racionalmente independientes ssi T es extensión de la rotación minimal $R_{\alpha,\rho} : X \to X$, $(x,y) \mapsto (x+\alpha, y+\rho)$.*
2. *Si T no es ρ-acotada, el sistema (X,T) es transitivo y no es extensión de la rotación $R_{\alpha,\rho}$.*

Si además T es únicamente ergódico, entonces T es conjugada a una rotación torcida éstrictamente ergódica.

A continuación se presentan dos resultados de Huang y Yi [35] que caracterizan la complejidad dinámica de estos sistemas (ver [6] para los conceptos relacionados).

Teorema 7.14. *Sea T un h.c.q.f. Entonces (X,T) tiene entropía topológica nula.*

Teorema 7.15. *Sea M un conjunto minimal de (X,T), donde T es un h.c.q.f. Entonces se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos:*

1. *M tiene un punto distal.*
2. *M es residualmente Li-Yorke caótico.*

Además, en el mismo artículo los autores agregaron resultados a la clasificación del Teorema 7.13, obteniendo,

Teorema 7.16. *Sea T un h.c.q.f. con número de rotación ρ. Entonces se tiene uno de los siguientes casos:*

1. *T es ρ-acotado y se tiene uno de los siguientes casos:*
   (a) *ρ y α son racionalmente dependientes (i.e., $\rho \in \alpha\cdot\mathbb{Q}+\mathbb{Q})$) y (X,T) tiene más de un subconjunto minimal y todos los subconjuntos minimales son casi automorfos.*
   (b) *ρ y α son racionalmente independientes, T es extensión a la rotación minimal $R_{\alpha,\rho}$ y (X,T) tiene un único conjunto minimal que es casi automorfo.*
2. *T no es ρ-acotada, el sistema (X,T) es transitivo, tiene un único conjunto minimal y no es extensión de la rotación $R_{\alpha,\rho}$.*

Si además T es únicamente ergódico, entonces T es conjugado a una rotación torcida éstrictamente ergódica.

7.3.3. Rotaciones torcidas que son h.c.q.f.

Una rotación torcida $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$ es un h.c.q.f. si y sólo si φ es homotópica a una constante. En este caso, los resultados de las dos secciones previas aplican.

No es difícil notar que en este caso el número de rotación está determinado por $\rho(T) = \int_{\mathbb{T}} \varphi$. Además, Herman [27] mostró que cuando T es un h.c.q.f. y una rotación torcida, entonces es conjugado a la rotación $R_{\alpha,\rho} : X \to X$, $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \rho)$ si y sólo si T es ρ-acotado. Así, se obtiene lo siguiente.

Teorema 7.17. *Sea T un h.c.q.f. de la forma $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$, con número de rotación $\rho = \rho(T) = \int_{\mathbb{T}} \varphi$. Entonces,*

1. *T es ρ-acotado y es conjugado a la rotación $R_{\alpha,\rho}$.*
2. *T no es ρ-acotada, el sistema (X, T) es transitivo, tiene un único conjunto minimal y no es extensión de la rotación $R_{\alpha,\rho}$.*

En particular, como un h.c.q.f. únicamente ergódico que no es ρ-acotado es conjugado a estos sistemas, nunca será conjugado a la rotación rígida.

Capítulo 8

Nilfactores maximales de extensiones por cociclo

En este capítulo estudiaremos los paralelepípedos dinámicos de extensiones por cociclo de una rotación minimal, i.e., sistemas de la forma (X, T), donde $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ y T está dado por

$$(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x)), \qquad x, y \in \mathbb{T} \tag{8.1}$$

donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua.

Partiremos mostrando un ejemplo trivial, pero instructivo. Sea R_α una rotación minimal del toro $\mathbb{T}$ y calculemos sus paralelepípedos dinámicos. Como R_α es minimal, es claro que $\mathbf{Q}^{[1]} = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Además $\mathbf{Q}^{[2]}$ es la clausura del conjunto

$$\{\big(x, x + m\alpha, x + n\alpha, x + (m + n)\alpha\big) : x \in \mathbb{T},\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Como $\{m\alpha\}_{m\in\mathbb{Z}}$ y $\{n\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son densos en $\mathbb{T}$, se obtiene que

$$\mathbf{Q}^{[2]} = \{\big(a, a + b, a + c, a + b + c\big) : a, b, c \in \mathbb{T}\}.$$

Usando el Teorema 6.3 sabemos que $\big(x, y\big) \in \mathbf{RP}^{[1]}$ si y sólo si $\big(x, y, y, y\big) \in \mathbf{Q}^{[2]}$ y, por lo anterior, esto se tiene si y sólo si existen $a, b, c \in \mathbb{T}$ tal que $x = a$ e $y = a+b = a+c = a+b+c$, de donde se deduce que $b = c = 0$ y $a = x = y$. Obteniendo así que $\mathbf{RP}^{[1]} = \mathbf{RP} = \Delta_{\mathbb{T}}$ y por lo tanto $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ es un sistema de orden 1.

Iniciaremos el estudio mostrando el caso más simple a modo de introducción en el cálculo de los paralelepípedos dinámicos y construcción de los nilfactores maximales.

8.1. $\varphi(x) = kx + \beta, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \beta \in \mathbb{T}$

Como se mencionó en §4.2, el sistema definido por $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + x)$, $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ es un nilsistema básico de orden 2. Este hecho se mostró directamente encontrando una nilvariedad de orden 2 y un subgrupo discreto cocompacto que definen el nilsistema. En esta sección mostraremos este hecho usando los Teoremas 4.10 y 6.3.

Por otro lado, no sabemos a priori si el sistema definido por $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + kx + \beta)$ es un nilsistema. Veremos que al igual que en el caso $k = 1$ y $\beta = 0$, el sistema así definido es un sistema de orden 2.

Proposición 8.1. *Sea* $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ *y* $T : X \to X$ *tal que* $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + kx + \beta)$, *donde* $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ *y* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. *Entonces* (X, T) *es un sistema de orden* 2 *y su factor equicontinuo maximal (nilfactor maximal de orden* 1*) es* $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.

Demostración : Por el Teorema 7.9 es claro que el sistema es estrictamente ergódico y en particular minimal. Sigue entonces que $\mathbf{Q}^{[1]} = (\mathbb{T} \times \mathbb{T})^2$, y en particular esto nos dice que $\{\varphi^{(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en $\mathbb{T}$ para todo $x \in \mathbb{T}$, con $\varphi^{(n)}(x) = n(kx + \beta) + \frac{n(n-1)}{2}k\alpha$.

Luego $\mathbf{Q}^{[2]}$ es la clausura en $(\mathbb{T} \times \mathbb{T})^{[2]} = (\mathbb{T} \times \mathbb{T})^4$ de elementos de la forma

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+m\alpha \\ y+m(kx+\beta)+\frac{m(m-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+n\alpha \\ y+n(kx+\beta)+\frac{n(n-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+(m+n)\alpha \\ y+(m+n)(kx+\beta)+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right)\right)$$

donde $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Usando el simple hecho de que $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} = mn + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ se obtiene que los elementos de $\mathbf{Q}^{[2]}$ tienen la forma

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_1 \\ b+b_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_2 \\ b+b_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_1+a_2 \\ b+b_1+b_2+c \end{smallmatrix}\right)\right)$$

con $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c \in \mathbb{T}$ y se puede mostrar que $\mathbf{Q}^{[2]}$ consta de exactamente los elementos de esta forma.

Usando el Teorema 6.3 sabemos que $\left(\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right)\right) \in \mathbf{RP} = \mathbf{RP}^{[1]}$ si y sólo si

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x'' \\ y'' \end{smallmatrix}\right)\right) \in \mathbf{Q}^{[2]}$$

y, por lo anterior, esto se tiene si y sólo si existen $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c \in \mathbb{T}$ tal que $x' = a$, $y' = b$, $x'' = a + a_1 = a + a_2 = a + a_1 + a_2$ e $y'' = b + b_1 = b + b_2 = b + b_1 + b_2 + c$, de donde se deduce que $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = -c$, $a = x'$ y $b = y'$. Obteniendo así que

$$\mathbf{RP} = \left\{\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y'' \end{smallmatrix}\right)\right) : x, y', y'' \in \mathbb{T}\right\}$$

y por lo tanto el factor equicontinuo maximal es $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.

Siguiendo con el análisis, se tiene que $\mathbf{Q}^{[3]}$ es la clausura en $(\mathbb{T} \times \mathbb{T})^{[3]} = (\mathbb{T} \times \mathbb{T})^8$ de elementos de la forma

$$\begin{aligned}\Big(&\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+m\alpha \\ y+m(kx+\beta)+\frac{m(m-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+n\alpha \\ y+n(kx+\beta)+\frac{n(n-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+(m+n)\alpha \\ y+(m+n)(kx+\beta)+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \\ &\left(\begin{smallmatrix} x+p\alpha \\ y+p(kx+\beta)+\frac{p(p-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+m\alpha+p\alpha \\ y+(m+p)(kx+\beta)+\frac{(m+p)(m+p-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x+n\alpha+p\alpha \\ y+(n+p)(kx+b)+\frac{(n+p)(n+p-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right), \\ &\left(\begin{smallmatrix} x+(m+n+p)\alpha \\ y+(m+n+p)(kx+\beta)+\frac{(m+n+p)(m+n+p-1)}{2}k\alpha \end{smallmatrix}\right)\Big)\end{aligned}$$

donde $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Usando que

$$\frac{(m+n+p)(m+n+p-1)}{2} = mn + np + pm + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2},$$

se obtiene de la estructura de $\mathbf{Q}^{[2]}$ que los elementos de $\mathbf{Q}^{[3]}$ son exactamente aquellos de la forma

$$\begin{aligned}\Big(&\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_1 \\ b+b_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_2 \\ b+b_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_1+a_2 \\ b+b_1+b_2+c_{12} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_3 \\ b+b_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_1+a_3 \\ b+b_1+b_3+c_{13} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a+a_2+a_3 \\ b+b_2+b_3+c_{23} \end{smallmatrix}\right), \\ &\left(\begin{smallmatrix} a+a_1+a_2+a_3 \\ b+b_1+b_2+b_3+c_{12}+c_{13}+c_{23} \end{smallmatrix}\right)\Big)\end{aligned}$$

con $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_{12}, c_{13}, c_{23} \in \mathbb{T}$.

Usando el Teorema 6.3 sabemos que $\left(\binom{x'}{y'}, \binom{x''}{y''}\right) \in \mathbf{RP}^{[2]}$ si y sólo si

$$\left(\binom{x'}{y'}, \binom{x''}{y''}, \dots, \binom{x''}{y''}\right) \in \mathbf{Q}^{[2]}$$

y, por lo anterior, esto se tiene si y sólo si existen $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_{12}, c_{13}, c_{23} \in \mathbb{T}$ tales que $x' = a$, $y' = b$,

$$\begin{aligned} x'' &= a + a_1 = a + a_2 = a + a_1 + a_2 = a + a_3 = a + a_1 + a_3 \\ &= a + a_2 + a_3 = a + a_1 + a_2 + a_3, \\ y'' &= b + b_1 = b + b_2 = b + b_1 + b_2 + c = b + b_3 = b + b_1 + b_3 + c_{13} \\ &= b + b_2 + b_3 + c_{23} = b + b_1 + b_2 + b_3 + c_{12} + c_{13} + c_{23}. \end{aligned}$$

De donde se deduce que $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_{12} = c_{13} = c_{23} = 0$, $a = x' = x''$ y $b = y' = y''$. Obteniendo así que $\mathbf{RP}^{[2]} = \Delta_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}$ y por lo tanto (X, T) es sistema de orden 2. ■

Así, usando los Teoremas 4.10 y 6.3 hemos encontrado los nilfactores maximales de este sistema.

Cuando se mostró que el caso $k = 1$, $\beta = 0$ es un nilsistema de orden 2 exhibiendo las estructuras subyacentes, se tiene la desventaja de no conocer los nilfactores maximales de orden menor, a diferencia de lo hecho aquí, donde se obtienen tales sistemas. Sin embargo en nuestro estudio no se desprende las estructuras subyacentes y no se puede asegurar si el sistema es un límite inverso de nilsistemas o un nilsistema básico, de modo que las dos perspectivas son complementarias.

Para completar el estudio, mostraremos que estos sistemas son en efecto nilsistemas básicos, es más, la estructura subyacente es la misma que en el caso $k = 1$, $\beta = 0$. En efecto, sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & p & n \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : m, n, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Consideremos la acción T dada por la multiplicación por $g = \begin{pmatrix} 1 & k & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ y notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & k & \beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & k & y+kx+\beta \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y+kx+\beta \\ 0 & 1 & x+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$$

Identificando G/Γ con $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, asociando a el elemento $\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$ con $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Se obtiene que $(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, T)$ es nilsistema básico de orden 2. Además vemos que estos son todos los sistemas que tienen esta estructura y son minimales si y sólo si α y β son racionalmente independientes o, $k \neq 0$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

8.2. Paralelepípedos

Recordemos que, en este caso, $\mathbf{Q}^{[d]}$ es la clausura en $(\mathbb{T} \times \mathbb{T})^{[d]}$ de elementos de la forma

$$\left(\begin{pmatrix} x+(\mathbf{n}\cdot\varepsilon)\alpha \\ y+\varphi^{(\mathbf{n}\cdot\varepsilon)}(x) \end{pmatrix} : \varepsilon \subset [d] \right),$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ y $\binom{x}{y} \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

Los elementos de $\mathbf{Q}^{[d]}$ se pueden ver con la forma

$$\left(\begin{pmatrix} w_0+\sum_{i\in\varepsilon} w_i \\ z_\varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon \subset [d] \right),$$

donde $\{w_i\}_{i=0}^d, \{z_\varepsilon\}_{\varepsilon\subset[d]} \subset \mathbb{T}$ satisfacen lo siguiente:

Existen $\{x_k, y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ y $\{\mathbf{n}_k = (n_k^1, \ldots, n_k^d)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ tales que

1. $x_k \to w_o$
2. $n_k^i\alpha \to w_i$, $i \in [d]$
3. $y_k \to z_\emptyset$
4. $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \to z_\varepsilon$, $\varepsilon \subset [d]$ $\varepsilon \neq \emptyset$.

La condición $y_k \to z_\emptyset$ no tiene relevancia, de modo que se puede eliminar sin inconvenientes. Gracias a la Proposición 3.4, estas condiciones además se pueden reducir a:

Existe $\{\mathbf{n}_k = (n_k^1, \ldots, n_k^d)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ tal que

1. $n_k^i\alpha \to w_i$, $i \in [d]$
2. $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(w_0) \to z_\varepsilon$, $\varepsilon \subset [d]$ $\varepsilon \neq \emptyset$.

Luego, usando el Teorema 6.3, sabemos que en el caso minimal, $\left(\binom{x'}{y'}, \binom{x''}{y''}\right) \in \mathbf{RP}^{[d-1]}$ si y sólo si

$$\left(\binom{x'}{y'}, \binom{x''}{y''}, \ldots, \binom{x''}{y''}\right) \in \mathbf{Q}^{[d]}$$

y, por lo anterior, esto se tiene si y sólo si existen $\{w_i\}_{i=0}^d, \{z_\varepsilon\}_{\varepsilon\subset[d]} \subset \mathbb{T}$ satisfaciendo las condiciones anteriores y tales que $x' = w_0$, $x'' = w_0 + \sum_{i\in\varepsilon} w_i$, para cada $\varepsilon \subset [d]$, $y' = z_\emptyset$ e $y'' = z_\varepsilon$, para cada $\varepsilon \subset [d]$.

De donde se deduce que $w_i = 0$ para cada $i \in [d]$ y $x' = x''$. Además, de las condiciones para $\{z_\varepsilon\}_{\varepsilon\subset[d]}$ se obtiene

Lema 8.2. $\left(\binom{x'}{y'}, \binom{x''}{y''}, \ldots, \binom{x''}{y''}\right) \in \boldsymbol{Q}^{[d]}$ *si y sólo si* $x' = x''$ *y se tiene una de las siguientes condiciones equivalentes*

1. *Existe* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ *y* $\{\mathbf{n}_k = (n_k^i)_{i=1}^d\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ *tales que*
   - *(a)* $x_k \to x' = x''$
   - *(b)* $n_k^i\alpha \to 0$, *para cada* $i \in [d]$
   - *(c)* $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \to y'' - y'$, *para cada* $\varepsilon \subset [d]$, $\varepsilon \neq \emptyset$.
2. *Existe* $\{\mathbf{n}_k = (n_k^i)_{i=1}^d\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ *tal que*
   - *(a)* $n_k^i\alpha \to 0$, *para cada* $i \in [d]$
   - *(b)* $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x') \to y'' - y'$, *para cada* $\varepsilon \subset [d]$, $\varepsilon \neq \emptyset$.

Anotaremos $E_x^{[d]}(\varphi)$ por el subconjunto de $\mathbb{T}$

$$\{z \in \mathbb{T} \mid \exists\{\mathbf{n}_k = (n_k^i)_{i=1}^d\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d : \ n_k^i\alpha \to 0,\ \forall i \in [d], \text{ y } \varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x) \to z,\ \forall \varepsilon \subset [d],\ \varepsilon \neq \emptyset\},$$

y además consideramos $E^{[d]}(\varphi) = \bigcap_{x\in\mathbb{T}} E_x^{[d]}(\varphi)$. Para $d = 1$, anotaremos $E_x^{[1]}(\varphi) = E_x(\varphi)$ y $E^{[1]}(\varphi) = E(\varphi)$, y cuando no haya ambigüedad omitiremos φ.

Con esto, por el Lema 8.2, es claro que en el caso minimal

$$\mathbf{RP}^{[d-1]} = \{\left(\binom{x}{y'}, \binom{x}{y''}\right) : \ x, y', y'' \in \mathbb{T},\ y'' - y' \in E_x^{[d]}\}.$$

8.2.1. Rango esencial

El concepto de rango esencial topológico para cociclos continuos en sistemas minimales fue introducido por Atkinson [3] para dar condiciones necesarias y suficientes para que una extensión por cociclo sea transitiva. En nuestro caso, hemos encontrado utilidad en este objeto dada la similitud con el conjunto $E(\varphi)$. Una buena generalización de este concepto, para $d > 1$, puede ser útil entonces para encotrar $E^{[d]}(\varphi)$ y en consecuencia $\mathbf{RP}^{[d-1]}$ y los nilfactores maximales.

Decimos que $z \in \mathbb{T}$ es un *valor esencial de* φ *en* $x \in \mathbb{T}$ si para cada vecindad U de x y cada vecindad V de z existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$U \cap R_\alpha^{-m} U \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(m)}(y) \in V\} \neq \emptyset. \tag{8.2}$$

Al conjunto de todos los valores esenciales de φ en x lo llamamos el *rango esencial de* φ *en* x y lo denotamos por $\mathcal{E}_x(\varphi)$. Además al conjunto $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{x\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_x(\varphi)$ lo llamamos el *rango esencial de* φ y a $z \in \mathcal{E}(\varphi)$ un *valor esencial de* φ. Además, cuando no haya ambigüedad omitiremos φ de la notación.

Estos conjuntos han sido estudiados por variados autores y a continuación listamos algunas de sus propriedades que serán útiles en nuestro estudio (ver por ejemplo [39, 42, 25])

Proposición 8.3. *Sea $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ y $T : X \to X$ tal que $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$, donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua. Entonces*

1. *Para cada $x \in \mathbb{T}$, $\mathcal{E}_x(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi)$.*
2. *$\mathcal{E}(\varphi)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$.*
3. *Para cada $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua, $\mathcal{E}(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi + \psi \circ R_\alpha - \psi)$.*
4. *(X, T) es transitivo si y sólo si $\mathcal{E}(\varphi) = \mathbb{T}$.*
5. *$\mathcal{E}(\varphi) = \{0\}$ si y sólo si φ es coborde.*
6. *Para cada $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $k\mathcal{E}(\varphi) \subset \mathcal{E}(k\varphi)$.*
7. *Si $\langle \frac{1}{k} \rangle = \{\frac{n}{k}\}_{n=0}^{k-1} \subset \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}(k\varphi) = k\mathcal{E}(\varphi)$.*

Además, se tiene que

Teorema 8.4 ([42, 25])**.** *Sea $M \subset X$ una órbita cerrada de (X, T), $H = \{y \in \mathbb{T} : M+(0, y) = M\}$ y para $x \in \mathbb{T}$ consideremos $M_x = \{y \in \mathbb{T} : (x, y) \in M\}$. Entonces*

1. *Para todo $x \in X$, $\mathcal{E}(\varphi) = M_x - M_x = H$.*
2. *Existe $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua tal que $M_x = H + \psi(x)$, $\phi = \varphi - \psi \circ R_\alpha + \psi$ toma valores en $\mathcal{E}(\varphi)$ y $\mathbb{T} \times (\mathcal{E}(\varphi) + y)$ es minimal para el cociclo inducido por ϕ para cada $y \in \mathbb{T}$.*
3. *X es unión disjunta de $W_x = \mathbb{T} \times M_x$, donde la unión toma un representante por cada fibra M_x. Y en particular, es unión disjunta de subsistemas minimales isomorfos a $(W_0, T|_{W_0})$*

En particular, el hecho que estos sistemas sean unión disjunta de subsistemas minimales nos permite aplicar los resultados de la Sección 6. E, independientemente de la minimalidad del sistema, siempre se tendrá que

$$\mathbf{RP}^{[d-1]} = \{ \big(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y' \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y'' \end{smallmatrix}\right) \big) : x, y', y'' \in \mathbb{T},\, y'' - y' \in E_x^{[d]} \}.$$

El siguiente teorema es de gran interés puesto que relaciona directamente el rango esencial con el conjunto E.

Teorema 8.5. *Sea $x, z \in \mathbb{T}$. Entonces $z \in \mathcal{E}_x(\varphi)$ si y sólo $z \in E_x(\varphi)$.*

Este resultado tiene como consecuencia directa

Corolario 8.6. *Para cada $x \in \mathbb{T}$, $E_x(\varphi) = E(\varphi) = \mathcal{E}(\varphi) = \mathcal{E}_x(\varphi)$.*

Demostración : Por el Teorema 8.5, $E_x = \mathcal{E}_x$ y por la Proposición 8.3, $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}$. Así,

$$E_x = \mathcal{E}_x = \mathcal{E} = \bigcap_{x \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_x = \bigcap_{x \in \mathbb{T}} E_x = E.$$

■

Para mostrar el Teorema 8.5, partiremos por el siguiente lema.

Lema 8.7. *Sean $x, z \in \mathbb{T}$. Entonces $z \in \mathcal{E}_x(\varphi)$ si y sólo si existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ tales que: $n_k\alpha \to 0$, $x_k \to x$ y $\varphi^{(n_k)}(x_k) \to z$.*

Demostración : Consideremos la secuencia decreciente de vecindades del $0 \in \mathbb{T}$, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definida por

$$A_k = \left(1 - \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \left(1 - \tfrac{1}{k}, 1\right) \cup \{0\} \cup \left(0, \tfrac{1}{k}\right) \subset \mathbb{T}$$

de modo que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{0\}$. Consideremos además $U_k = A_k + x$ y $V_k = A_k + z$, de modo que son vecindades de x y z respectivamente. Como $z \in E_x$, entonces existe $n_k \in \mathbb{Z}$ y $x_k \in \mathbb{T}$ tal que

$$x_k \in U_k \cap R_\alpha^{-n_k} U_k \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(n_k)}(y) \in V_k\}.$$

Así, en particular, $x_k \in U_k$ y $R_\alpha^{n_k} x_k \in U_k$, y como $\cap_k U_k = \{x\}$, se tiene que $x_k \to x$, y $n_k\alpha = R_\alpha^{n_k} x_k - x_k \in U_k - U_k$, pero $U_k - U_k = A_k - A_k = 2A_k = A_{k/2}$, y como $\cap_k A_k = \{0\}$, también se tiene que $\cap_k 2A_k = \{0\}$, de modo que $n_k\alpha \to 0$. Además $\varphi^{(n_k)}(x_k) \in V_k$, y como $\cap_k V_k = \{z\}$, entonces $\varphi^{(n_k)}(x_k) \to z$.

Supongamos ahora que $n_k\alpha \to 0$, $x_k \to x$ y $\varphi^{(n_k)}(x_k) \to z$. Sean U una vecindad de x y V una vecindad de z. Sea W un abierto no vacío tal que $W \subset \overline{W} \subset U$. Como $n_k\alpha \to 0$, entonces $R_\alpha^{n_k} \to Id_{\mathbb{T}}$ uniformemente, de modo que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_1$ $W \subset U \cap R_\alpha^{-n_k} U$. Además, como R_α es minimal, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\cup_{n=0}^{N-1} R_\alpha^{-n} W = \mathbb{T}$.

Tomemos A_k como antes y notemos que $NA_{Nk} = A_k$, luego, para k grande, digamos K fijo, $(N+1)A_K + z \subset V$. Anotemos $V_0 = A_K$ y $V_1 = A_K + z$. Así, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_2$, $\varphi^{(n_k)}(x_k) \in V_1$ y $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_3$ y cada $y \in \mathbb{T}$, $\varphi(R_\alpha^{n_k} y) - \varphi(y) \in V_0$.

Tomemos $k \geq \text{máx}\{k_1, k_2, k_3\}$ fijo y $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ tal que $R_\alpha^n x_k \in W$. En particular $R_\alpha^n x_k \in U$ y como $W \subset U \cap R_\alpha^{-n_k} U$, entonces $R_\alpha^{n_k}(R_\alpha^n x_k) \in U$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n_k)}(R_\alpha^n x_k) &= \varphi^{(n_k)}(x_k) + (\varphi^{(n_k)}(R_\alpha^n x_k) - \varphi^{(n_k)}(x_k)) \\
&= \varphi^{(n_k)}(x_k) + \sum_{m=0}^{n-1} (\varphi(R_\alpha^{n_k+m} x_k) - \varphi(R_\alpha^m x_k)) \\
&\in \varphi^{(n_k)}(x_k) + nV_0 \subset V_1 + NV_0 = (N+1)A_K + z \subset V
\end{aligned}$$

Así, $R_\alpha^n x_k \in U$, $R_\alpha^{n_k}(R_\alpha^n x_k) \in U$ y $\varphi^{(n_k)}(R_\alpha^n x_k) \in V$, mostrando que $z \in \mathcal{E}_x$ ■

Demostración del Teorema 8.5 : Por definición, $z \in E_x$ si y sólo si existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $n_k\alpha \to 0$ y $\varphi^{(n_k)}(x) \to z$. Considerando la sucesión $x_k = x$, usando el lema anterior, se obtiene que $z \in \mathcal{E}_x$.

Supongamos que $z \in \mathcal{E}_x$. Luego, por el lema previo, existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ tales que $n_k\alpha \to 0$, $x_k \to x$ y $\varphi^{(n_k)}(x_k) \to z$. Gracias al Lema 8.2, se conluye que existe $\{\bar{n}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\varphi^{(\bar{n}_k)}(x) \to z$ y por lo tanto $z \in E_x$. ■

Esta equivalencia, y en particular la demostración del Lema 8.7, motiva generalizar el concepto de rango esencial y verificar qué propiedades se mantienen o de que modo se modifican para el análisis de los nilfactores. En particular veremos que $E_x^{[d]} = E^{[d]}$, de modo que la estructura de $\mathbf{RP}^{[d-1]}$ se simplifica y nos interesa ver qué propiedades tiene $E^{[d]}$ para concluir el cálculo de los nilfactores.

Además se deduce el siguiente resultado que extiende la clasificación del Teorema 7.7. Consideremos el conjunto $S(\varphi) = \{m \in \mathbb{Z} : m\varphi \text{ es coborde }\}$. Claramente $S(\varphi)$ es subgrupo de $\mathbb{Z}$, y podemos anotar $S(\varphi) = \mathbb{Z} \cdot k(\varphi)$, para $k(\varphi) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además, para $m \in \mathbb{N}$, anotemos $\left\langle \frac{1}{m} \right\rangle = \{\frac{n}{m}\}_{n=0}^{m-1} \subset \mathbb{T}$.

Teorema 8.8. *Sea $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ y $T : X \to X$ tal que $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$, donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua. Entonces se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos*

1. *$k(\varphi) \in \mathbb{N}$ y esto es ssi $E = \left\langle \frac{1}{k(\varphi)} \right\rangle$.*
2. *$k(\varphi) = 0$ y esto es ssi (X, T) es transitivo ssi $E = \mathbb{T}$ ssi (X, T) es minimal.*

Demostración :

$k(\varphi) = 1$ Por la Proposición 8.3, $E = \mathcal{E} = \{0\}$ ssi φ es coborde.

$k(\varphi) > 1$ Sea $m \in S(\varphi)$, luego $m\varphi$ es coborde y por lo tanto $\{0\} = \mathcal{E}(m\varphi) \supset m\mathcal{E}(\varphi)$. Luego $\mathcal{E}(\varphi) \subset \left\langle \frac{1}{m} \right\rangle$ para cada $m \in S(\varphi)$ y se concluye que $\mathcal{E}(\varphi) \subset \left\langle \frac{1}{k(\varphi)} \right\rangle$. Digamos $\mathcal{E}(\varphi) = \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ y claramente se tiene que $r | k(\varphi)$. Pero entonces $\mathcal{E}(r\varphi) = \{0\}$ y esto es si y sólo si $r\varphi$ es coborde. Luego $r \in S(\varphi)$ y por lo tanto $k | r$. Sigue que $r = k(\varphi)$ y $\mathcal{E} = \left\langle \frac{1}{k(\varphi)} \right\rangle$.

$k(\varphi) = 0$ Por los resultados vistos hasta ahora se tiene que (X, T) es transitivo ssi $\mathcal{E} = \mathbb{T}$, y por la parte anterior, esto es ssi $k(\varphi) = 0$.

Supongamos que (X, T) no es minimal. Entonces, por el Teorema 7.1, $k\varphi$ es coborde para algún $k \in \mathbb{N}$ y por la parte anterior se deduce que $\mathcal{E} \subset \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$, de modo que (X, T) no es transitivo.

■

En la siguiente sección generalizaremos la noción de rango esencial y mostraremos los resultados correspondientes.

8.3. Rango esencial de orden d

Presentamos una generalización del rango esencial buscando obtener resultados similares a los de la sección anterior. En particular veremos si tal generalización se relaciona bien con $E^{[d]}(\varphi)$ y en consecuencia poder determinar $\mathbf{RP}^{[d]}$ y los nilfactores maximales.

Decimos que $z \in \mathbb{T}$ es un *valor esencial de orden d de φ en $x \in \mathbb{T}$* si para cada vecindad U de x y cada vecindad V de z existe $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$U \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon \subset [d] \\ \varepsilon \neq \emptyset}} \left(R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(y) \in V\} \right) \neq \emptyset. \tag{8.3}$$

Al conjunto de todos los valores esenciales de orden d de φ en x lo llamamos el *rango esencial de orden d de φ en x* y lo denotamos por $\mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi)$. Además al conjunto $\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) = \bigcap_{x \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi)$ lo llamamos el *rango esencial de orden d de φ* y a $z \in \mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$ un *valor esencial de orden d de φ*. Cuando no haya ambigüedad omitiremos φ en la notación.

Como veremos en la próxima sección, varias propiedades de $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{[1]}$ pasan a $\mathcal{E}^{[d]}$.

8.3.1. Propiedades básicas de $\mathcal{E}^{[d]}$

Es obvio de las definiciones que $\mathcal{E}_x^{[d]}$ y $\mathcal{E}^{[d]}$ son conjuntos cerrados. También es claro que $\mathcal{E}_x^{[d]} \subset \mathcal{E}_x^{[d-1]}$ y $\mathcal{E}^{[d]} \subset \mathcal{E}^{[d-1]}$.

Proposición 8.9. *Para cada $x \in \mathbb{T}$, $\mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$.*

Demostración : En primer lugar veamos que

$$\mathcal{E}_{R_\alpha^n x}^{[d]} = \mathcal{E}_x^{[d]}.$$

En efecto, sea V una vecindad de $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$ y U una vecindad de $R_\alpha^n x$. Consideremos A_k como en el Lema 8.7 y K grande tal que $W = A_K$ satisfaga $3W + z \subset V$. Sea además U' una vecindad de x tal que $R_\alpha^n U' \subset U$ y $\varphi^{(n)}(U') \subset \varphi^{(n)}(x) + W$, y como $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$ podemos encontrar $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ y $\bar{x} \in \mathbb{T}$ tales que

$$\bar{x} \in U' \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon \subset [d] \\ \varepsilon \neq \emptyset}} (R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U' \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(y) \in W + z\}).$$

Sigue que $R_\alpha^n \bar{x} \in \cap_\varepsilon R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U$ y además se tiene que $\varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(R_\alpha^n \bar{x}) = \varphi^{(n)}(R_\alpha^{\mathbf{m}\cdot\varepsilon} \bar{x}) + \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(\bar{x}) - \varphi^{(n)}(\bar{x})$, de modo que

$$\varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(R_\alpha^n \bar{x}) \in (\varphi^{(n)}(x) + W) + (W + z) - (\varphi^{(n)}(x) + W) = 3W + z \subset V.$$

Como U y V son arbitrarios, se obtiene que $z \in \mathcal{E}_{R_\alpha^n x}^{[d]}$. Así, concluimos que $\mathcal{E}_x^{[d]} \subset \mathcal{E}_{R_\alpha^n x}^{[d]}$, y por simetría se obtiene que $\mathcal{E}_{R_\alpha^n x}^{[d]} = \mathcal{E}_x^{[d]}$.

Para concluir, basta notar que si $x_k \to x$ y $z_k \to z$ en $\mathbb{T}$, y suponemos que $z_k \in \mathcal{E}_{x_k}^{[d]}$ para cada k, entonces la definición del rango esencial de orden d muestra que $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$. Luego como cada órbita por R_α es densa y dado que $\mathcal{E}_{R_\alpha^n x}^{[d]} = \mathcal{E}_x^{[d]}$ es cerrado, se tiene que $\mathcal{E}_x^{[d]} \subset \mathcal{E}_y^{[d]}$ para cada $y \in \mathbb{T}$. Por simetría se obtiene que $\mathcal{E}_x^{[d]} = \mathcal{E}_y^{[d]}$ y por lo tanto $\mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$ para cada $x \in \mathbb{T}$. ∎

Proposición 8.10. *$\mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$.*

Demostración : Es claro que $\mathcal{E}^{[d]}$ es cerrado, y como $\varphi^{(0)} \equiv 0$, $0 \in \mathcal{E}^{[d]}$. Sean $v, w \in \mathcal{E}^{[d]}$, $U \subset X$ un abierto no vacío y N una vecindad de $v + w$. Consideremos V, W vecindades de v y w respectivamente tales que $V + W \subset N$.

Como $w \in \mathcal{E}^{[d]}$, existe $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$U_1 = U \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon \subset [d] \\ \varepsilon \neq \emptyset}} (R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(y) \in W\})$$

es abierto no vacío. Luego, como $v \in \mathcal{E}^{[d]}$, existe $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ tal que

$$U_2 = U_1 \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon \subset [d] \\ \varepsilon \neq \emptyset}} (R_\alpha^{-\mathbf{n}\cdot\varepsilon} U_1 \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{n}\cdot\varepsilon)}(y) \in V\})$$

es no vacío.

Para concluir veamos que

$$U_2 \subset U_3 = U \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon \subset [d] \\ \varepsilon \neq \emptyset}} (R_\alpha^{-(\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\varepsilon} U \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{((\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\varepsilon)}(y) \in N\}).$$

En efecto, sea $x \in U_2$, entonces $R_\alpha^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon} x \in U_1 \subset R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U$, de modo que $x \in R_\alpha^{(\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\varepsilon} U$. Además $\varphi^{(\mathbf{n}\cdot\varepsilon)}(x) \in V$, y $R_\alpha^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon} x \in U_1$ de modo que $\varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(R_\alpha^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon} x) \in W$. Sigue que

$$\varphi^{((\mathbf{m}+\mathbf{n})\cdot\varepsilon)}(x) = \varphi^{(\mathbf{n}\cdot\varepsilon)}(x) + \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(R_\alpha^{\mathbf{n}\cdot\varepsilon} x) \in V + W \subset N$$

y entonces $x \in U_3$. Se concluye que $v + w \in \mathcal{E}^{[d]}$.

Así, $\mathcal{E}^{[d]}$ es semigrupo cerrado de $\mathbb{T}$, y como los semigrupos cerrados de $\mathbb{T}$ son siempre grupos, se concluye que $\mathcal{E}^{[d]}$ es subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$.

■

Proposición 8.11. *Si $\phi = \varphi + \psi \circ R_\alpha - \psi$, donde $\phi, \psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ son continuas, entonces $\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}^{[d]}(\phi)$.*

Demostración : Como $\phi = \varphi + \psi \circ R_\alpha - \psi$, entonces $\phi^{(n)} = \varphi^{(n)} + \psi \circ R_\alpha^n - \psi$. Sea $z \in \mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$. Sea U un abierto no vacío y V una vecindad de z. Sea V_0 una vecindad de $0 \in \mathbb{T}$ y V_1 una vecindad de z tal que $V_0 + V_1 \subset V$ (usar por ejemplo A_k y $A_k + z$ con k suficientemente grande). Sea $W \subset U$ un abierto no vacío tal que $\psi(x) - \psi(y) \in V_0$ para todo $x, y \in W$. Como $z \in \mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$, existe $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ y un punto $w \in \cap_\varepsilon R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} W \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(y) \in V_1, \varepsilon \subset [d], \varepsilon \neq \emptyset\}$. Sigue que $w \in \cap_\varepsilon R_\alpha^{-\mathbf{m}\cdot\varepsilon} U$ y $\phi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(w) = \varphi^{(\mathbf{m}\cdot\varepsilon)}(w) + \psi \circ R_\alpha^{\mathbf{m}\cdot\varepsilon}(w) - \psi(w) \in V_1 + V_0 \subset V$. Luego $z \in \mathcal{E}^{[d]}(\phi)$, de modo que $\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) \subset \mathcal{E}^{[d]}(\phi)$ y por simetría se concluye que $\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}^{[d]}(\phi)$. ■

Como consecuencia directa de la Proposición 8.3 y del hecho que $\mathcal{E}^{[d]} \subset \mathcal{E}$ se tienen las siguientes propiedades

Proposición 8.12. *Si $\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) = \mathbb{T}$, entonces (X, T) es transitivo.*

Proposición 8.13. *Si φ es coborde, entonces $\mathcal{E}^{[d]} = \{0\}$.*

Directo de la definición de rango esencial de orden d se tiene la siguiente

Proposición 8.14. *Para cada $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $k\mathcal{E}^{[d]}(\varphi) \subset \mathcal{E}^{[d]}(k\varphi)$. Si además $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle \subset \mathcal{E}^{[d]}$, entonces $\mathcal{E}^{[d]}(k\varphi) = k\mathcal{E}^{[d]}(\varphi)$.*

El siguiente teorema es de gran interés puesto que relaciona directamente el rango esencial de orden d con el conjunto $E^{[d]}$ que define completamente $\mathbf{RP}^{[d-1]}$.

Teorema 8.15. *Sean $x, z \in \mathbb{T}$. Entonces $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi)$ si y sólo $z \in E_x^{[d]}(\varphi)$.*

Este resultado tiene como consecuencia directa

Corolario 8.16. *Para cada $x \in \mathbb{T}$, $E_x^{[d]}(\varphi) = E^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}^{[d]}(\varphi) = \mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi)$.*

Demostración : Por el Teorema 8.15, $E_x^{[d]} = \mathcal{E}_x^{[d]}$ y por la Proposición 8.9, $\mathcal{E}_x^{[d]} = \mathcal{E}^{[d]}$. Así,

$$E_x^{[d]} = \mathcal{E}_x^{[d]} = \mathcal{E}^{[d]} = \bigcap_{x\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_x^{[d]} = \bigcap_{x\in\mathbb{T}} E_x^{[d]} = E^{[d]}.$$

■

Para mostrar el Teorema 8.15, partiremos por el siguiente lema

Lema 8.17. *Sean $x, z \in \mathbb{T}$. Entonces $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}(\varphi)$ si y sólo si existe $\{\mathbf{n}_k = (n_k^i)_{i=1}^d\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ tales que*

1. $x_k \to x$
2. $n_k^i\alpha \to 0$, *para cada* $i \in [d]$
3. $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \to z$, *para cada* $\varepsilon \subset [d]$, $\varepsilon \neq \emptyset$.

Demostración : Consideremos A_k, U_k y V_k como en el Lema 8.7. Como $z \in E_x^{[d]}$, entonces existe $\mathbf{n}_k \in \mathbb{Z}^d$ y $x_k \in \mathbb{T}$ tal que

$$x_k \in U_k \cap \bigcap_{\substack{\varepsilon\subset[d]\\ \varepsilon\neq\emptyset}} R_\alpha^{-\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon} U_k \cap \{y \in \mathbb{T} : \varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(y) \in V_k\}.$$

Así, en particular, $x_k \in U_k$ y $R_\alpha^{n_k^i} x_k \in U_k$, y como $\cap_k U_k = \{x\}$, se tiene que $x_k \to x$, y $n_k^i\alpha = R_\alpha^{n_k^i} x_k - x_k \in U_k - U_k = 2A_k$, y como $\cap_k 2A_k = \{0\}$, se obtiene que $n_k^i\alpha \to 0$. Además $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \in V_k$, y como $\cap_k V_k = \{z\}$, entonces $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \to z$.

Supongamos ahora que $n_k^i\alpha \to 0$, $x_k \to x$ y $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \to z$. Sean U una vecindad de x y V una vecindad de z. Sea W un abierto no vacío tal que $W \subset \overline{W} \subset U$. Como $n_k^i\alpha \to 0$ para cada $i \in [d]$, también se tiene que $(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)\alpha \to 0$ para cada $\varepsilon \subset [d]$ y entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_1$ $W \subset \cap_\varepsilon R_\alpha^{-\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon} U$. Además, como R_α es minimal, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\cup_{n=0}^{N-1} R_\alpha^{-n} W = \mathbb{T}$.

Tomemos A_k como antes y k grande, digamos K fijo, tal que $(N+1)A_K + z \subset V$. Anotemos $V_0 = A_K$ y $V_1 = A_K + z$. Así, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_2$, $\varphi^{(\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon)}(x_k) \in V_1$ y $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_3$ y cada $y \in \mathbb{T}$, $\varphi(R_\alpha^{\mathbf{n}_k\cdot\varepsilon} y) - \varphi(y) \in V_0$.

Sea $k \geq \max\{k_1, k_2, k_3\}$ fijo y $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ tal que $R_\alpha^n x_k \in W$. En particular $R_\alpha^n x_k \in U$ y como $W \subset \cap_\varepsilon R_\alpha^{-\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon} U$, entonces $R_\alpha^{\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon}(R_\alpha^n x_k) \in U$. Finalmente para cada $\varepsilon \subset [d]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(R_\alpha^n x_k) &= \varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x_k) + (\varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(R_\alpha^n x_k) - \varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x_k)) \\ &= \varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x_k) + \sum_{m=0}^{n-1} (\varphi(R_\alpha^{\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon + m} x_k) - \varphi(R_\alpha^m x_k)) \\ &\in \varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x_k) + nV_0 \subset V_1 + NV_0 = (N+1)A_K + z \subset V \end{aligned}$$

Así, $R_\alpha^n x_k \in U$, $R_\alpha^{\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon}(R_\alpha^n x_k) \in U$ y $\varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(R_\alpha^n x_k) \in V$, mostrando que $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$ ■

Demostración del Teorema 8.15 : Por definición, $z \in E_x^{[d]}$ si y sólo si existe $\{\mathbf{n}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $n_k^i \alpha \to 0$ y $\varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x) \to z$. Considerando la sucesión $x_k = x$, usando el lema anterior, se obtiene que $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$.

Supongamos que $z \in \mathcal{E}_x^{[d]}$. Luego, por el lema previo, existe $\{\mathbf{n}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ y $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ tales que $n_k^i \alpha \to 0$, $x_k \to x$ y $\varphi^{(\mathbf{n}_k \cdot \varepsilon)}(x_k) \to z$. Gracias al Lema 8.2, se conluye que existe $\{\bar{\mathbf{n}}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ tal que $\varphi^{(\bar{\mathbf{n}}_k \cdot \varepsilon)}(x) \to z$ para cada $\varepsilon \subset [d]$, $\varepsilon \neq \emptyset$ y por lo tanto $z \in E_x^{[d]}$. ■

Así, el hecho que $E_x^{[d]} = E^{[d]}$ nos da información relevante en cuanto a $\mathbf{RP}^{[d-1]}$.

Proposición 8.18. *Sea (X, T) una rotación torcida, entonces para cada $d \in \mathbb{N}$,*

$$\boldsymbol{RP}^{[d]} = \left\{ \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y+z \end{smallmatrix} \right) \right) : x, y, z \in \mathbb{T},\, z \in E^{[d+1]} \right\}$$

donde $E^{[d]}$ un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$. En particular, (X, T) es nilsistema de orden d si y sólo si $E^{[d+1]} = \{0\}$.

De esto, se puede ver que los nilfactores maximales de estos sistemas tienen la forma (X, T_k), donde T_k está definido por $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + k\varphi(x))$, o bien $(\mathbb{T}, R_\alpha)$. Además se deduce la estabilización de los nilfactores maximales de estos sistemas.

Lema 8.19. *Sea $X = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ y $T : X \to X$ tal que $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$, donde $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua. Luego $Z_\infty(X) = Z_d(X)$ para algún $d \in \mathbb{N}$.*

Demostración : Observemos que basta mostrar que $E^{[d]} = E^{[d+1]}$ para algún $d > 1$ para concluir. En efecto, si $E^{[d]} = E^{[d+1]}$ para $d > 1$, entonces $\mathbf{RP}^{[d-1]} = \mathbf{RP}^{[d]}$ y por el Teorema 6.8 se concluye que $Z_\infty = Z_{d-1}$.

Si $E^{[3]} = \mathbb{T}$, entonces $E^{[2]} \supset E^{[3]} = \mathbb{T}$ concluyendo lo deseado. Supongamos entonces que $E^{[3]} \neq \mathbb{T}$ es un subgrupo cerrado, digamos $E^{[3]} = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Digamos $k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$ es su descomposición en primos. Como, si $F_l \subsetneq F_{l-1} \subsetneq \cdots \subsetneq F_1 \subsetneq \{n/k\}_{n=0}^{k-1}$ son subgrupos, entonces necesariamente $l \leq m$, se tiene que $E^{[m+4]} = E^{[m+5]}$. Y por lo tanto, tomando $d = m + 4$, se tiene que $E^{[d]} = E^{[d+1]}$ y se concluye que $Z_\infty = Z_{d-1}$. ■

8.4. Nilfactores Maximales

En esta sección mostraremos una clasificación de los nilfactores maximales de extensiones por cociclo. Para esto, se expondrá en primer lugar algunos resultados clásicos que serán de utilidad. Estos resultados son acerca de la ecuación de cohomología

$$\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi \tag{8.4}$$

que será relevante en esta sección.

Para que φ sea coborde, i.e., la ecuación 8.4 tiene solución $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua, necesariamente $d(\varphi) = 0$, y por lo tanto, cualquier levantamiento de φ será una función $\mathbb{Z}$-periódica. Además, si ψ continua satisface la ecuación 8.4, también se debe tener que $d(\psi) = 0$. De otro modo, podemos suponer que $\psi(x) = mx + \phi(x)$ con $d(\phi) = 0$, $m = d(\psi) \neq 0$, y reemplazando en 8.4 se obtiene que $\varphi = m\alpha + \phi \circ R_\alpha - \phi$. Integrando ambas ecuaciones se obtiene $0 = \int_{\mathbb{T}} \varphi d\lambda = m\alpha$, lo cual es absurdo pues $\alpha \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}$. Así, siempre que la ecuación 8.4 se satisfaga con ψ continua, las funciones involucradas (φ y ψ) serán de grado nulo, y se pueden ver como funciones $\mathbb{Z}$-periódicas o, equivalentemente, como funciones de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{R}$, continuas. Además identificaremos $\mathbb{T}$ con el intervalo $[0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Proposición 8.20 (Gottschalk-Hedlund [24])**.** *Son equivalentes:*

1. *Existe $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua tal que $\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi$*
2. *Existe $x_0 \in [0, 1)$ tal que*
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0) \right| < \infty.$$
Donde $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento cualquiera de φ.

Demostración : Claramente 1) $\Rightarrow$ 2), en efecto, se tiene que $\sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0) = \hat{\psi} \circ \hat{R}_\alpha^n - \hat{\psi}$, con $\hat{\psi} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ continua, de modo que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0) \right| \leq 2 \left\| \hat{\psi} \right\| < \infty.$$

Veamos que 2) $\Rightarrow$ 1). Sea $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ la transformación definida por $F(x, y) = (x + \alpha, y + \hat{\varphi}(x))$. Consideremos además la transformación $r_s(x, y) = (x, y + s)$, $s \in \mathbb{R}$; claramente $F \circ r_s = r_s \circ F$.

Se tiene que $F^n(x_0, 0) = \left(R_\alpha^n x_0, \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0)\right)$ y de 2) se deduce que la órbita cerrada de $(x_0, 0)$ por F, $\bar{o}_F(x_0, 0)$, es compacta y por lo tanto debe contener un conjunto minimal (para F) compacto, digamos M. Si $p : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ es la proyección en la primera coordenada, de la minimalidad de R_α se deduce que $p(M) = \mathbb{T}$. Afirmamos que M es el grafo de una función; en efecto, supongamos que $(x, y), (x, y + s) \in M$. De la minimalidad de M y del hecho que F y r_s conmutan se deduce que $M = r_s(M)$ y por lo tanto $M = r_{ns}(M)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como M es compacto, necesariamente $s = 0$ de modo que M es el grafo de una función, digamos $\Psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, y como M es cerrado, Ψ es continua. Se ve fácilmente que $\hat{\varphi} = \Psi \circ \hat{R}_\alpha - \Psi$, y tomando $\psi = \Psi \mod 1$ se concluye 1). ∎

Proposición 8.21. *Si la ecuación 8.4 tiene solución $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ medible, entonces ψ es igual a una función continua λ-c.s.*

Demostración : Sea ψ una solución medible de 8.4. Sea $A = \{x \in \mathbb{T} : \varphi \neq \psi \circ R_\alpha - \psi\}$ el conjunto de λ-medida nula de los puntos en que la ecuación 8.4 no se satisface. Sea
$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^n(A);$$

claramente B es de λ-medida nula. Sea entonces $x_0 \in \mathbb{T}\backslash B$, de modo que $R_\alpha^n x_0 \in \mathbb{T}\backslash B$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y además

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0)\right| = \left|\Psi \circ \hat{R}_\alpha^n(x_0) - \Psi(x_0)\right| \leq 2\,\|\Psi\|_{L^\infty},$$

para cualquier $\Psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi = \Psi \mod 1$ λ-c.s. Es claro que existe un levantamiento $\hat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{T}, \lambda)$, de modo que $\left|\sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0)\right| \leq 2\left\|\hat{\psi}\right\|_{L^\infty} < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por la Propocisión 8.20, existe ψ_0 continua tal que $\varphi = \psi_0 \circ R_\alpha - \psi_0$. Por lo tanto $(\psi - \psi_0) \circ R_\alpha = \psi - \psi_0$ λ-c.s. y como R_α es λ-ergódica, entonces necesariamente $\psi - \psi_0 = C$ (constante) λ-c.s. de donde se concluye que ψ coincide con la función continua $\psi_0 + C$ λ-c.s. ■

Con los resultados vistos hasta ahora es posible deducir el siguiente resultado que clasifica el factor equicontinuo maximal de las extensiones por cociclo.

Teorema 8.22. *Son equivalentes:*

1. $E^{[2]}(\varphi) = \{0\}$.
2. $E^{[2]}(\varphi) \neq \mathbb{T}$.
3. φ *es cohomólogo a una constante.*
4. $k\varphi$ *es cohomólogo a una constante para algún* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
5. T *es* ρ*-acotada.*
6. T *es conjugado a una rotación en* $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.
7. T *es equicontinuo.*

Demostración : Claramente 1) $\Rightarrow$ 2), 3) $\Rightarrow$ 4), 3) $\Leftrightarrow$ 5) por la Proposición 8.20, 5) $\Leftrightarrow$ 6) por el Teorema 7.17, 6) $\Rightarrow$ 7), y 7) $\Leftrightarrow$ 1) puesto que $\mathbf{RP} = \left\{\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y+z \end{smallmatrix}\right)\right) : x, y, z \in \mathbb{T},\ z \in E^{[2]}\right\}$. Veamos las implicaciones restantes:

4) $\Rightarrow$ 3) Sea $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tal que $k\varphi$ es cohomólogo a una constante. Digamos $k\varphi = \beta + \psi \circ R_\alpha - \psi$, $\beta \in \mathbb{T}$ constante y $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua. Supongamos que $\psi(x) = \phi(x) + mx$, con ϕ de grado nulo; entonces $k\varphi = \beta + \psi \circ R_\alpha - \psi = \beta + m\alpha + \phi \circ R_\alpha - \phi$, y $k\varphi$ es cohomóloga a la constante $\beta + m\alpha$ vía una función de grado nulo ϕ. Luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que ψ es de grado nulo. Sigue que $\varphi = \beta' + \mathfrak{r} + \psi' \circ R_\alpha.\psi'$, donde $\beta' = \beta/k$, $\mathfrak{r} : \mathbb{T} \to \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ y $\psi' = \psi/k : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua pues ψ es continua de grado nulo. Sigue que $\mathfrak{r} = \varphi - \beta' - \psi' \circ R_\alpha + \psi'$ es continua, y como toma valores en $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$, $\mathfrak{r}(x) = r \in \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$. Sigue que $\varphi = \beta' + r + \psi' \circ R_\alpha - \psi'$, es decir, φ es cohomóloga a la constante $\beta' + r$.

7) $\Rightarrow$ 6) Si T es equicontinuo, en el caso minimal se debe tener que es conjugada a una rotación en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, i.e., 6). En el caso no minimal, por la Proposicón 7.1, $k\varphi$ es coborde para algún $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y en particular se tiene 4) $\Leftrightarrow$ 6).

2) $\Rightarrow$ 4) Si $E^{[2]} \neq \mathbb{T}$, entonces $E^{[2]} = \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Sigue de la Proposición 8.14 que $E^{[2]}(k\varphi) = \{0\}$, pero entonces, como 1) $\Rightarrow$ 3) (para $k\varphi$), se tiene que $k\varphi$ es cohomóloga a una constante, i.e., 4) para φ.

■

La equivalencia entre 1) y 2) reduce las posibilidades para el factor equicontinuo maximal a dos.

Corolario 8.23. *El factor equicontinuo maximal de una rotación torcida es* $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ *ó* (X, T).

Además las condiciones 3), 4), 5) ó 6) excluyen inmediatamente a cociclos de grado no nulo.

Corolario 8.24. *Si* $d(\varphi) \neq 0$, *entonces el factor equicontinuo maximal es* $(\mathbb{T}, R_\alpha)$.

Observemos que teniendo una clasificación similar para el nilfactor maximal de orden 2, se concluiría con el estudio de los nilfactores. Sólo se tiene un resultado parcial al respecto. Primero extenderemos la noción de ρ-acotado al caso en que φ no es necesariamente de grado nulo. Diremos que la transformación T definida por $(x, y) \mapsto (x + \alpha, y + \varphi(x))$ es *linealizable*, si existe una función afín A en $\mathbb{T}$, i.e., de la forma $x \mapsto mx + \beta$, $m \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{T}$, tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0) - \hat{A} \circ \hat{R}_\alpha^i(x_0) \right| < \infty$$

para algún $x_0 \in [0, 1)$. Notemos que en este caso, necesariamente $m = d(\varphi)$ y $\beta = \int_{\mathbb{T}} \varphi d\lambda$ mód 1, y cuando $m = 0$ esta noción es equivalente a la de ρ-acotado.

Teorema 8.25. *Son equivalentes:*

1. φ *es cohomólogo a una función afín.*
2. $k\varphi$ *es cohomólogo a una función afín para algún* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
3. T *es linealizable.*
4. T *es conjugado a una rotación torcida en* $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ *definida por una función afín, con frecuencia forzante* α.

En caso que se cumpla alguna de estas condiciones, y por lo tanto todas, entonces $E^{[3]}(\varphi) = \{0\}$ *y* (X, T) *es nilsistema de orden* 2.

Demostración : Claramente 1) $\Rightarrow$ 2) y 1) $\Leftrightarrow$ 3) por la Proposición 8.20. Veamos las implicaciones restantes:

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tal que $k\varphi$ es cohomólogo a una función afín $A(x) = nx + \beta$, con $n = d(k\varphi)$. Digamos $k\varphi = A + \psi \circ R_\alpha - \psi$, $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua. Supongamos que $\psi(x) = \phi(x) + mx$, con ϕ de grado nulo; entonces $k\varphi = \beta + \psi \circ R_\alpha - \psi = A + m\alpha + \phi \circ R_\alpha - \phi$, y $k\varphi$ es cohomóloga a la función afín $A + m\alpha$ vía una función de grado nulo ϕ. Luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que ψ es de grado nulo. Sigue que $\varphi = A' + \mathfrak{r} + \psi' \circ R_\alpha.\psi'$, donde $A'(x) = \frac{n}{k}x + \frac{\beta}{k}$, es afín pues $k|n$ dado que $d(k\varphi) = kd(\varphi)$. Además $\mathfrak{r} : \mathbb{T} \to \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$ y $\psi' = \psi/k : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es continua pues ψ es continua de grado nulo. Sigue que $\mathfrak{r} = \varphi - A' - \psi' \circ R_\alpha + \psi'$ es continua, y como toma valores en $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$, $\mathfrak{r}(x) = r \in \left\langle \frac{1}{k} \right\rangle$. Sigue que $\varphi = A' + r + \psi' \circ R_\alpha - \psi'$, es decir, φ es cohomóloga a la función afín $A' + r$.

1) $\Rightarrow$ 4) Si φ es cohomólogo a una función afín A, digamos por $\varphi = A + \psi \circ R_\alpha - \psi$, $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua. Considerando el homeomorfismo $h(x,y) = (x, y - \psi(x))$, se tiene que $h \circ T(x,y) = h(x+\alpha, y+\varphi(x)) = (x+\alpha, y+\varphi(x)-\psi(x+\alpha)) = (x+\alpha, y+A(x)-\psi(x)) = T_A(x, y-\psi(x)) = T_A \circ h(x,y)$, donde hemos anotado T_A a la rotación torcida definida por A, i.e., $(x,y) \mapsto (x+\alpha, y+A(x))$. Así, T es conjugado a T_A vía el homeomorfismo h.

4) $\Rightarrow$ 1) Si T es conjugado a T_A, entonces existe $u \in \mathbb{T}$ tal que $\varphi \pm A(x+u)$ es coborde (ver Anzai [1]). Pero entonces, φ es cohomólogo a la función afín $A' = \mp A \circ R_u$.

Obteniendo la equivalencia de las afirmaciones. Vimos anteriormente que la transformación $(x,y) \mapsto (x+\alpha, y+mx+\beta)$ siempre define un sistema de orden 2, de modo que un sistema conjugado a tal transformación también es un sistema de orden 2, y como $\mathbf{RP}^{[2]} = \{\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y+z \end{smallmatrix}\right)\right) : x,y,z \in \mathbb{T},\ z \in E^{[3]}\}$, esto es si y sólo si $E^{[3]} = \{0\}$. $\blacksquare$

Capítulo 9

Conclusiones

En este capítulo mostraremos las conclusiones matemáticas obtenidas en la presente memoria, preguntas de interés que apuntan en la misma dirección que los resultados obtenidos y posibles generalizaciones naturales.

Respecto de los nilfactores maximales de los sistemas estudiados, concluimos que una extensión por cociclo de una rotación minimal es equicontinua –y por lo tanto todos sus nilfactores maximales coinciden con el sistema– si y sólo si el cociclo es de grado nulo y linealizable. En cualquier otro caso, el factor equicontinuo maximal es la rotación base.

Además concluimos que en el caso linealizable siempre se obtiene un nilsistema de orden a lo más 2, siendo de orden 1 si el grado del cociclo es nulo y de orden 2 en caso contrario. Además, en caso de existir nilfactores de orden superior, se mostró que estos son extensiones por cociclo de la misma rotación, y que tal cociclo es un múltiplo entero del cociclo original. Queda abierta la pregunta de si existen efectivamente nilfactores de orden superior.

Creemos que un nilfactor de un sistema con espacio base $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ debe ser necesariamente de orden a lo más 2, y en particular esto se debiese tener para los sistemas estudiados en esta memoria.

Conjetura 9.1. *Sea (X, T) una extensión por cociclo de una rotación minimal, entonces $Z_\infty(X, T) = Z_2(X, T)$.*

Siguiendo el enfoque y las herramientas usadas y desarrolladas en la presente memoria, una forma de abordar este problema es estudiar la siguiente pregunta.

Pregunta 9.2. *¿Es un sistema de este tipo un sistema de orden 2 si y sólo si se tiene alguna de las condiciones equivalentes del Teorema 8.25?*

En caso de que la respuesta a la Pregunta 9.2 fuera negativa, queda buscar ejemplos de sistemas no linealizables con $E^{[3]} \neq \mathbb{T}$. Si, por el contrario, la respuesta es afirmativa, la Conjetura 9.1 sería cierta y se tendrá además que $E^{[3]} \neq \mathbb{T}$ si y sólo si $E^{[3]} = \{0\}$. Esto equivale a la siguiente pregunta más débil, pero de mayor interés.

Pregunta 9.3. *¿Es el nilfactor maximal de orden 2 de una rotación torcida (X, T), $(\mathbb{T}, R_\alpha)$ ó (X, T)?*

Nuevamente, de ser cierta esta pregunta, la Conjetura 9.1 sería cierta; y la clasificación de los nilfactores maximales de este tipo de sistemas quedaría completo, teniéndose sólo tres posibilidades:

1. $Z_\infty = Z_1 = (\mathbb{T}, R_\alpha)$.
2. $Z_\infty = Z_1 = (X, T)$.
3. $Z_\infty = Z_2 = (X, T)$ y $Z_1 = (\mathbb{T}, R_\alpha)$.

y en particular, toda extensión por cociclo de una rotación en $\mathbb{T}$ sería un nilsistema de orden 1 ó 2, salvo en el primer caso, en que habría una estabilización no trivial. Aunque la Conjetura 9.1 fuese cierta, no es directo que hayan sistemas de este tipo con una estabilización no trivial. Sin embargo, en caso de que la Pregunta 9.2 tuviese respuesta afirmativa, entonces los sistemas no linealizables tendrían $Z_\infty = Z_1 = (\mathbb{T}, R_\alpha)$, y los linealizables serían como en el segundo y tercer caso, dependiendo de si el grado del cociclo es nulo o no.

Se seguirá estudiando estos problemas a través de los métodos usados en la presente memoria y en caso de ser necesario, se estudiará nuevas metodologías a través de argumentos dimensionales, o de complejidad topológica usando los resultados obtenidos en [34].

Sobre el rango esencial de orden d, se observa que, para $d = 1, 2$, si $E^{[d]}(\phi) = \{0\}$, entonces para cada $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ continua y $s \geq d$, $E^{[s]}(\varphi) = E^{[s]}(\varphi + \phi)$. En el caso $d = 1$ se tiene por la invarianza del rango esencial bajo cohomología, y en el caso $d = 2$ se tiene dado que para un cociclo, la condición de ser ρ-acotado no cambia al sumar otro cociclo ρ-acotado. Se cree que se puede concluir lo mismo para $d > 2$.

Además de las conclusiones obtenidas para extensiones por cociclo de rotaciones minimales, creemos que las herramientas desarrolladas en esta memoria tienen un mayor alcance.

La definición de rango esencial se presenta en un contexto bastante más general que el nuestro, este es, en extensiones por cociclos de sistemas minimales en grupos abelianos localmente compactos. Luego es natural definir el rango esencial de orden d en este tipo de sistemas y ver su relación con $\mathbf{RP}^{[d+1]}$ y los nilfactores maximales. También es interesante pensar el caso en que el grupo donde se define el cociclo no es necesariamente abeliano, sino nilpotente.

Además es natural pensar que al tener un sistema forzante al cual conozcamos sus nilfactores maximales y una extensión por cociclo en un grupo relativamente simple o bien estudiado (como $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}^n$) o un cuociente (como las nilvariedades), se puede decir algo interesante sobre los nilfactores maximales de tal extensión. Es decir, abarcar el estudio de los nilfactores maximales de sistemas de la forma $(Y \times G, T_\varphi)$, donde (Y, T) es un sistema minimal cuyos nilfactores maximales son conocidos, G es un grupo compacto (o un cuociente como las nilvariedades), $\varphi : Y \to G$ es una función continua y $T_\varphi : Y \times G \to Y \times G$ está definida por $(y, g) \mapsto (Ty, g\varphi(y))$. En particular, parece natural mostrar resultados análogos a los obtenidos en esta memoria, para sistemas como los de el Teorema 7.10.

Resulta interesante también el estudio de los nilfactores en el caso de h.c.q.f. s. En particular, sabemos que bajo ciertas hipótesis un h.c.q.f. es conjugado a una rotación o a un producto torcido. En estos casos el estudio se reduce a lo hecho en este trabajo, y hay que ver si las herramientas usadas en esta memoria son útiles para abarcar el caso en que no es una rotación ni un producto torcido. En particular ver si el rango esencial de orden d tiene sentido en este contexto, y por otro lado, si hay estabilizaciones no triviales o distintas al caso estudiado.

Bibliografía

[1] H. Anzai. *Ergodic skew product transformations on the torus*, Osaka Mathematical Journal 3, no. 1, pp. 83-99, 1951.

[2] J. Auslander. *Minimal flows and their extensions*, North-Holland Mathematics Studies 153, North-Holland, Amsterdam 1988, xi+265 pp.

[3] G. Atkinson. *A class of transitive cylinder transformacions*, Journal of the London Mathematical Society 17, no. 2, pp. 263–270, 1978.

[4] L. Auslander, L. Green, F. Hahn. *Flows on homogeneous spaces*, Annals of Mathematics Studies 53, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1963, vii+107 pp.

[5] V. Bergelson, B. Host, B. Kra, I. Ruzsa. *Multiple recurrence and nilsequences*, Inventiones Mathematicae 160, pp. 261–303, 2005.

[6] B. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, A. Maass. *On Li-Yorke pairs*, Journal fr die Reine und Angewandte Mathematik 547, pp. 51–68, 2002.

[7] T. Bröcker, T. tom Dieck. *Representations of compact Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 98, Springer-Verlag, 1985, x+313 pp.

[8] Q. Chu. *Convergence of multiple ergodic averages along cubes for several commuting transformations*. Studia Mathematica 196(1), pp. 13–22, 2009.

[9] Q. Chu, N. Frantzikinakis, B. Host *Ergodic averages of commuting transformations with distinct degree polynomial iterates*, Proceedings of the London Mathematical Society 102(5), pp. 801-842, 2011.

[10] J.-P. Conze, E. Lesigne. *Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales*, Bulletin de la Société Mathématique de France 112, pp. 143–175, 1984.

[11] J.-P. Conze, E. Lesigne. *Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales*, Publications de l'Institut de Recherche de Mathématiques de Rennes, Probabilités, 1987.

[12] J.-P. Conze, E. Lesigne, *Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Srie 1, Mathématique 306, pp. 491–493, 1988.

[13] A. Denjoy. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal de Mathématiques 11, Fascicule IV, pp. 333–375, 1932.

[14] P. Dong, S. Donoso, A. Maass, S. Shao, X. Ye. *Infinite-step nilsystems, independence and complexity*, arXiv:1105.3584v1, Ergodic Theory and Dynamical Systems, por aparecer.

[15] Dynamical Systems Conference: *Semiannual Workshop on Dynamical Systems and Related Topics*. University of Maryland, April 10–13, 2010.

[16] H. Furstenberg, B. Weiss. *A mean ergodic theorem for* $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(T^n x)g(T^{n^2} x)$, Convergence in Ergodic Theory and Probability, (Columbus, OH 1993) (Bergelson, March, and Rosenblatt, eds.), Ohio State University Mathematical Research Institute Publications 5, de Gruyter, Berlin, pp. 193–227, 1996.

[17] H. Furstenberg. *Strict Ergodicity and Transformation of the Torus*, American Journal of Mathematics 83, pp. 573–601, 1961.

[18] E. Glasner. *Ergodic theory via joinings*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, xii+384 pp.

[19] P. Glendinning, U. Feudel, A. S. Pikovsky, J. Stark. *The structure of mode-locked regions in quasi-periodically forced circle maps*, Physica D 140, pp. 227–243, 2000.

[20] B. Green, T. Tao. *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics 167(2), pp. 481–547, 2008.

[21] B. Green, T. Tao. *Quadratic uniformity of the Möbius function*, Annales de l'Institut Fourier 58, pp. 1863–1935, 2008.

[22] B. Green, T. Tao. *Linear equations in primes*, Annals of Mathematics 171(2), no. 3, pp. 1753–1850, 2010.

[23] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg. *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*. Translated from the Russian by A. Kozlowski. Reprint of the 1993 translation [Lie groups and Lie algebras. I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 20, Springer, Berlin, 1993; MR1306737 (95f:22001)]. Springer-Verlag, Berlin, 1997, vi+235 pp.

[24] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund. *Topological Dynamics*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 36, Providence, 1955, vii+157 pp.

[25] G. Greschonig, U. Haböck. *Nilpotent extensions of minimal homeomorphisms*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 25, pp. 1829–1845, 2005.

[26] B. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*, Springer, 2003.

[27] M. R. Herman *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques 49, pp. 5-233, 1979.

[28] M. R. Herman. *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques examples montrant le carectére local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2*, Commentarii Mathematici Helvetici 58, pp. 453–502, 1983.

[29] B. Host, B. Kra. *Convergence of Conze-Lesigne Averages*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 21, pp. 493–509, 2001.

[30] B. Host, B. Kra. *Nonconventional averages and nilmanifolds*, Annals of Mathematics 161, pp. 398–488, 2005.

[31] B. Host, B. Kra. *Parallelepipeds, nilpotent groups, and Gowers norms*. Bulletin de la Société Mathématique de France 136, pp. 405–437, 2008.

[32] B. Host, B. Kra. *Uniformity seminorms on ℓ^∞ and applications*, J. d'Analyse Mathématique 108, pp. 219–276, 2009.

[33] B. Host, B. Kra, A. Maass. *Nilsequences and a structure theorem for topological dynamical systems*, Advances in Mathematics 224, pp. 103–129, 2010.

[34] B. Host, B. Kra, A. Maass. *Complexity of nilsystems and systems lacking nilfactors*, arXiv:1203.3778v2.

[35] W. Huang, Y. Yi. *Almost periodically forced circle flows*, Journal of Functional Analysis 257, pp. 832–902, 2009.

[36] T. Jagër, J. Stark. *Towards a classification for quasiperiodically forced circle homeomorphisms*, Journal of the London Mathematical Society 73(3), pp. 727–744, 2006.

[37] A. Katok, B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, xiii+824 pp.

[38] A. Leibman. *Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 25, no. 1, pp. 201–213, 2005.

[39] M. Lemańczyk, M. K. Mentzen. *Topological Ergodicity of Real Cocycles over Minimal Rotations*, Monatshefte für Mathematik 134, no. 3, pp. 227–246, 2002.

[40] E. Lesigne. *Sur une nil-variété, les parties minimales associées à une translation sont uniquement ergodiques*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 11, pp. 379–391, 1991.

[41] W. de Melo, S. van Strien. *One-dimensional dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1993, viii+586 pp.

[42] M. K. Mentzen. *On groups of essential values of topological cylinder cocycles over minimal rotations*, Colloquium Mathematicum 95, no. 2, pp. 231–253, 2003.

[43] V. I. Oseledets. *Classification of $GL(2,\mathbb{R})$-valued cocycles of dynamical systems*, Technical report, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.

[44] H. Poincaré. *Sur le courbes définies par les équations différentielles*, Journal de Mathmatiques Pures et Appliques. (4. série) 1, pp. 167–244, 1885. Reprinted in Œuvres de Henri Poincaré, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[45] A. Prasad, S. S. Negi, R. Ramaswamy. *Strange Nonchaotic attractors*, International Journal of Bifurcation and Chaos 11(2), pp. 291–309, 2001.

[46] S. Shao, X. Ye. *Regionally proximal relation of order d is an equivalence one for minimal systems and a combinatorial consequence*, arXiv:1007.0189v2.

[47] Z. Szemerédi. *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arithmetica 27, pp. 199–245, 1975.

[48] W. A. Veech. *Almost automorphic functions on groups*, American Journal of Mathematics 87, pp. 719–751, 1965.

[49] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982, ix+250 pp.