

**UNIVERSIDAD DE CHILE**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**ESTIMACIÓN DE RECURSOS EN UN  
YACIMIENTO DE FIERRO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

**IGNACIO ANDRÉS SALINAS LUPPI**

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

**SR. XAVIER EMERY**

**SR. HANS GÖPFERT HIELBIG**

**SR. ANTONIO COUBLE CERVIÑO**

SANTIAGO DE CHILE

ABRIL 2012

*Agradecimientos:*

*A mi madre y Jorge, por su apoyo incondicional y su eterno cariño. No hubiera llegado tan lejos sin ustedes.*

*A mi padre y Mariana, por inculcarme valores e impulsarme a ser un hombre que se vale por sí mismo.*

*A mis tíos y primos, por proveerme aun otro hogar más y tomarme como uno más de ellos. Al resto de mi familia y en especial a mis abuelos y mis hermanos por el cariño y apoyo.*

*A mis amigos, por los buenos recuerdos y los mejores años de mi vida. En especial a Camilo, Cristóbal, Edgardo, Matías, José Manuel, Pablo e Ignacio.*

*A Camila, por estar a mi lado siempre y hacer llevadero este momento de transición. Tu compañía ha sido lo mejor.*

*Al profesor Xavier Emery, no solo por guiarme en este trabajo, sino que por jugado y dedicado a su trabajo, al departamento, a los alumnos y a la investigación. Ojalá hubiesen más como él.*

*A Innova - Corfo y su proyecto O9CN14-5838, "Modelamiento multivariable para evaluación de yacimientos" por el financiamiento para este trabajo.*

## **RESUMEN EJECUTIVO**

El presente trabajo trata de la estimación geoestadística de recursos de un yacimiento de hierro que ha sido explorado mediante sondajes de diamantina. Las muestras disponibles contienen información sobre: coordenada espacial, ley de hierro total, ley de sílice, razón de recuperación o magnetismo y densidad de roca (que en verdad está calculada a partir de la ley de hierro, no medida). Una particularidad que presenta la base de datos es el sub-muestreo del magnetismo, del cual se encuentra información solo en 17 de los 70 sondajes, o en 1219 de las 8373 muestras, para ser más preciso.

En el cálculo de recursos, lo que se suma son toneladas de roca y de finos, no leyes. Aun así, lo que se estima usualmente es ley, ya que es lo más simple. Sin embargo, multiplicar a posteriori las estimaciones para obtener los finos y toneladas introduce sesgo. Por lo tanto este caso de estudio trata con este sesgo al tomar dos enfoques separados a la estimación: El tradicional, con leyes y uno menos convencional, estimando contenidos de hierro sílice y hierro magnético directamente (contenido definido como ley\*densidad).

En ambos enfoques se utiliza co-kriging al especificar la estructura de la correlación espacial de las variables de entrada a través del modelamiento de los variogramas directos y cruzados, así como las posibles relaciones lineales entre sus medias. Esto último se ve motivado al observar fuertes dependencias lineales durante el análisis exploratorio; y lleva a implementar una variante al co-kriging ordinario tradicional que busca mejorar las estimaciones al restringir las medias de las variables, aun asumiéndolas desconocidas.

Comparando ambos enfoques resulta en diferencias de aproximadamente 55 millones de toneladas de mineral y de más de 4% en la ley media estimada. Estas diferencias podrían ser explicadas ya que el primer enfoque estima variables no aditivas (ley, razón de magnetismo), mientras que el segundo enfoque estima variables aditivas directamente (contenido de hierro) y por lo tanto es más confiable desde el punto de vista teórico. Esta explicación además se apoya en una validación realizada con una técnica de partición de muestra (jack-knife), el cual indica que el segundo enfoque tiene una mayor precisión de estimación.

Se recomienda entonces para la estimación de yacimientos de hierro evitar trabajar con variables no aditivas como leyes, y trabajar directamente con contenidos de metal, para los cuales la suma entre varios bloques tiene un sentido físico. Se espera que, en el futuro, más atención sea prestada a la medición directa de la densidad de roca en vez de calcularla a partir de la ley; ya que es crucial a la hora de analizar y calcular toneladas y contenidos de metal.

## **ABSTRACT**

The present work deals with the geostatistical resources estimation of an iron ore deposit that has been recognised by exploration drill holes. The available drill hole samples contain information on the spatial coordinates, total iron grade, silica grade, iron recovery ratio and rock density (which is actually calculated from the total iron grade). A particularity of the data base is the under-sampling of the iron recovery ratio, the information of which is available for only 17 out of 70 drill holes. In terms of data, 8373 samples contain information on total iron grade, whereas only 1219 samples contain information on the recovery ratio.

In resource estimation, one adds rock and metal tonnages, not grades. Nonetheless, grades are what are usually estimated, as it is simpler to do so. However, multiplying the estimates thereafter to obtain the tonnage and metal quantity introduces bias. This specific study deals with that bias by estimating the resources through two separate approaches: The classic grade approach, and a more unconventional, direct estimation of iron, silica and magnetic iron contents (content being defined as grade\*density).

In both approaches, cokriging is performed by specifying the spatial correlation structure of the input variables, through the modelling of their direct and cross variograms, and, when possible, the linear relationships between their mean values. The latter is motivated by the strong linear dependences observed between the variables; it allows using a variant of cokriging that assumes unknown but constrained mean values between the input variables, in order to improve the estimates that would be obtained by traditional ordinary cokriging.

A comparison of the two approaches shows differences of about 55 million tons in the estimated ore tonnage and of over 4% in the estimated mean iron grade. These differences may be explained because the first approach estimates non-additive variables (grades and iron recovery ratio), while the second approach estimates additive variables (iron and silica contents) and is theoretically more reliable. Such an explanation is supported by a validation of the results through the split-sample (jack-knife) technique, which indicates a better accuracy of the second approach.

The recommendation for the resource estimation of iron ore deposits is therefore to avoid working with non-additive variables such as the grades, and to directly work with the metal contents, for which the summation over the various blocks of the deposit makes sense. It is hoped that, in the future, more attention will be given to the measurement of the rock density, which is crucial for better assessing the tonnages and contents.

## Tabla de contenido

1.	Introducción.....	1
1.1	Objetivos.....	2
1.2	Alcances .....	2
2.	Metodología.....	3
2.1	Kriging.....	3
2.1.1	Variogramas: Continuidad Espacial.....	4
2.1.2	vecindad de kriging.....	6
2.2	Co-Kriging.....	7
2.3	Co-kriging con Medias Linealmente Ligadas.....	8
2.4	Procedimiento .....	10
3.	Análisis exploratorio de Datos.....	11
3.1	Dependencias entre las variables.....	17
4.	Variografía.....	26
4.1	Modelamiento.....	30
5.	Validación con Jack-Knife.....	37
5.2	Análisis.....	50
6.	Estimación.....	51
7.	Reporte de Recursos.....	55
7.1	Categorización de Recursos.....	59
8.	Conclusiones y Recomendaciones .....	62
9.	Bibliografía.....	64
10.	Anexos.....	65

# 1. INTRODUCCIÓN

---

El presente trabajo se realiza en el marco de un trabajo de título de la carrera de ingeniería civil de minas de la Universidad de Chile. Se enfoca en particular a la estimación geoestadística de recursos recuperables de un yacimiento de fierro que se mantendrá en anonimato.

La geoestadística es una disciplina que estudia fenómenos regionalizados (es decir, fenómenos que presenten una estructura espacial). Provee herramientas fundamentales para la estimación de variables regionalizadas tales como ley, contenido de contaminantes, densidad y razones tales como solubilidad o magnetismo. Por lo tanto, la geoestadística es la herramienta utilizada para generar un fidedigno reporte de recursos recuperables en un yacimiento.

Para realizar todo el análisis se trabajará con una base de 8513 datos obtenida a partir de una campaña de exploración de 70 sondajes de diamantina. Esta base de datos se encuentra caracterizada por los siguientes índices:

- Identificación de sondaje (número)
- Identificación de la muestra (número)
- Ubicación de la muestra (coordenada tridimensional)

Las cuatro variables con las cuales se trabajará durante el estudio son las siguientes:

- Ley de fierro (%)
- Ley de sílice (%)
- Densidad de la roca ( $\text{ton}/\text{m}^3$ )
- Razón de magnetismo ( $\text{Fe magnético}/\text{Fe total}$ )

Con el fin de estimar estas variables en todo el espacio requerido, se hará uso de la técnica conocida como co-kriging, extensión al contexto multivariable del kriging, el cual estima el valor de una variable regionalizada en sitios donde no hay información sobre esta variable a partir de los datos ya existentes y la continuidad espacial que existe entre ellos.

## 1.1 OBJETIVOS

---

Como objetivo principal, se desea estimar de forma óptima e insesgada los recursos de un yacimiento de hierro, con el fin de entregar finalmente un reporte de recursos confiable para los inversionistas y planificadores.

Como objetivos específicos se destacan los siguientes:

- Analizar y procesar de bases de datos heterotópicas
- Aplicar análisis variográfico multivariable
- Implementar una variante al co-kriging tradicional y aplicarla a un caso de estudio.
- Estudiar posibles ventajas de estimar variables aditivas directamente, es decir, contenido (ley\*densidad) en vez de ley.

## 1.2 ALCANCES

---

En el caso específico del hierro, las relaciones entre variables (en particular la relación del resto de las variables con la ley de hierro) son sumamente importantes. Al no ser consideradas, se podría estar incurriendo en un error adicional, el cual podría eventualmente tener repercusiones económicas que usualmente no se cuantifican.

La implementación de la variante de co-kriging que se planteará en este informe planea cuantificar este error y evitar pérdidas de este tipo. Además, se evaluará si la precisión adicional que otorgue esta variante (si es que la otorga) cubra la complejidad adicional de implementarla.

## 2. METODOLOGÍA

---

En esta sección se introduce y explica la metodología utilizada para estimar variables regionalizadas mediante kriging y sus variantes.

### 2.1 KRIGING

---

Ideado por el ingeniero en minas sudafricano Danie Krige y formalizado posteriormente por el ingeniero francés Georges Matheron, el kriging es un interpolador espacial, es decir, estima variables regionalizadas en sitios donde no existe información a partir de una cierta cantidad de datos que sí son conocidos. Difiere del resto de los interpoladores pues considera al error como una variable aleatoria (que posee esperanza y varianza).

El kriging es un estimador lineal ponderado de la siguiente forma:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i * Z(x_i)$$

Donde  $Z^*(x_0)$  es el valor de la variable a estimar en una posición  $x_0$  donde este valor es desconocido, los  $Z(x_i)$  son los valores de la variable para las posiciones donde es conocido, "a" es un término aditivo constante y los  $\lambda_i$  ponderadores que multiplican a los datos, cuyos valores son a determinar y dependen de tres factores principales:

- 1) La distancia al sitio a estimar
- 2) Redundancias entre los datos
- 3) Continuidad espacial de la variable

Matemáticamente, el kriging se construye como un estimador sin sesgo y de máxima precisión, por lo que debe satisfacer las condiciones de que la esperanza del error sea nula y que su varianza sea mínima. Ahora bien, cabe destacar que existen dos tipos principales de kriging: simple y ordinario. En el kriging simple se asume que la media de la variable es conocida y constante en todo el espacio. Sin embargo, una suposición tan fuerte puede afectar a la robustez de la estimación, sobre todo cuando dicha media no es rigurosamente constante. Por lo tanto, lo que se hace generalmente es relajar esta restricción a que la media sea constante localmente pero que es desconocida, lo que da origen al kriging ordinario.

---

### 2.1.1 VARIOGRAMAS: CONTINUIDAD ESPACIAL

---

Con el fin de medir la continuidad espacial de una variable regionalizada, se utiliza la herramienta conocida como variograma. Esta función se podría considerar como opuesta a la correlación, ya que mide el contraste entre dos datos en función de su separación espacial. El variograma en función de un vector de separación  $\mathbf{h}$  se define de la siguiente manera:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} * var\{Z(x+h) - Z(x)\}$$

En el caso multivariable, el kriging requiere además de los variogramas para cada variable por separado (llamados **variogramas directos**), los variogramas de cada par de variables. Estos se conocen como **variogramas cruzados** y miden cómo el incremento de una variable afecta el incremento de la otra variable, en función de la separación entre dos datos. El variograma cruzado entre la variable  $i$  y la variable  $j$  se define de la siguiente manera:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} * cov\{Z_i(x+h) - Z_i(x), Z_j(x+h) - Z_j(x)\}$$

Calcular un variograma directamente de forma continua (para todo  $h$ ) resulta un proceso engorroso. Para eso se construye el **variograma experimental**. Este mide la desviación cuadrática promedio entre dos datos en función de su separación espacial, y se calcula solo para algunos valores de este ( $h$ ):

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum (Z(x_\alpha) - Z(x_\beta))^2$$

Donde  $\mathbf{h}$  es el vector de separación,  $X_\alpha$  y  $X_\beta$  son sitios con datos tales que  $X_\alpha - X_\beta = \mathbf{h}$  y  $N(h)$  es la cantidad de pares de datos que están separados por ese vector. El variograma experimental se puede calcular a lo largo de más de una dirección si se requiere y sus parámetros de cálculo principales son:

- 1) Paso: Cada cuánto se calcula el variograma en una dirección dada.
- 2) Tolerancia en el paso: Cuanto es el mínimo necesario para considerar que un par de variables está separado por un cierto vector.
- 3) Tolerancia angular: Cuanto del espacio se desea cubrir en el cálculo. Se debe tener la precaución de interferir poco con las otras direcciones con el fin de evitar redundancias.
- 4) Direcciones de interés: Vienen dadas usualmente por el contexto geológico.
- 5) Dimensiones de la banda: Determina el alcance del “barrido” que busca incluir pares de puntos en el cálculo.

Lamentablemente, el variograma experimental no es lo suficientemente completo como modelo pues no cumple ciertas condiciones matemáticas (además de que está calculado solo para algunos valores de  $h$ ). Para completarlo se le ajusta un **variograma modelado**, el cual se construye como una combinación lineal de modelos básicos denominados **estructuras anidadas**.

A continuación se muestran los dos modelos utilizados en este trabajo, y los más comunes, el modelo pepita y el modelo esférico:

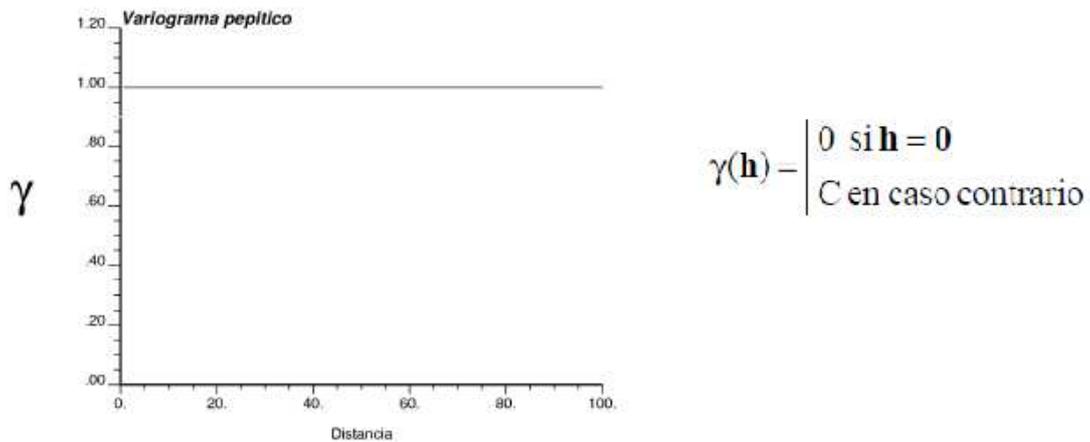


ILUSTRACIÓN 1: MODELO PEPÍTICO

El “efecto pepita” denota ausencia de correlación entre datos a pequeña escala, además de posibles errores de muestreo. El modelo esférico, en cambio, busca aproximar el variograma experimental a través de una función que se estabiliza en un valor llamado **meseta (C)**, a una distancia llamada **alcance (a)**.

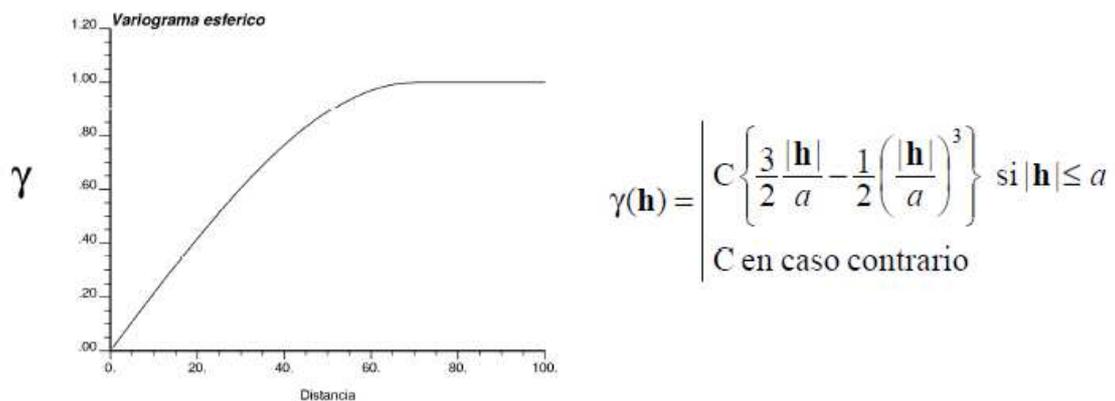


ILUSTRACIÓN 2: MODELO ESFÉRICO

Existen más estructuras que se pueden utilizar, pero las dos mencionadas anteriormente son de las más comunes. Combinaciones lineales de estos modelos generan las denominadas estructuras anidadas, que en teoría representan de buena manera el comportamiento variográfico y que además cumplen con las condiciones para utilizarse en interpolación espacial.

Un variograma  $\gamma(h)$  puede asociarse a otra herramienta estructural, llamada covarianza, que se denota por  $C(h)$  y cumple que:  $\gamma(h) = C(0) - C(h)$ . Variogramas y covarianzas aparecen como herramientas equivalentes para medir la continuidad espacial de una variable y para llevar a cabo la interpolación espacial por kriging.

---

### 2.1.2 VECINDAD DE KRIGING

---

Dado que la cantidad de datos que se tiene puede ser muy alta, utilizar todos los datos existentes para estimar cada punto puede resultar excesivamente costoso y lento. Es por esto que se define una **vecindad móvil** (pues cambia con cada sitio a estimar) que incluye una cantidad de datos reducida, ya que los datos más lejanos aportan menos a la calidad de estimación. Esta vecindad tiene a menudo forma elipsoidal, permitiendo tomar en cuenta una anisotropía espacial. Para mejorar la calidad de estimación, se suele dividir este elipsoide en sectores angulares, usualmente en octantes.

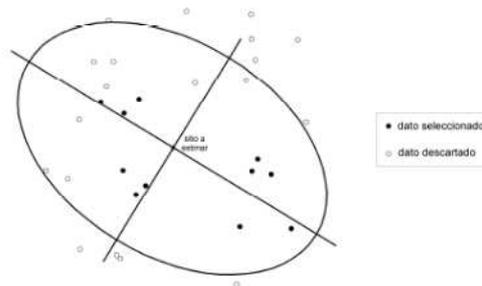


ILUSTRACIÓN 3: EJEMPLO DE VECINDAD DE KRIGING EN 2D

Para determinar el tamaño y cantidad de datos a considerar dentro de una vecindad, se usan **validaciones cruzadas** que miden además la calidad del modelo variográfico. En estas validaciones lo que se hace es, para cada uno de los sitios con datos, borran la información de las variables y estiman el valor de estas usando todo el resto de los datos mediante kriging o co-kriging.

Si el variograma y la vecindad están bien elegidos, el error promedio debiese estar en torno a cero y la varianza debiese ser lo más pequeña posible. Para verificar esto, se usan nubes de dispersión entre los datos reales y los estimados. La calidad de estimación también se puede medir mediante un **jack-knife**, parecido a la validación cruzada. El jack-knife borra un grupo completo de datos y estima las variables en aquellos puntos con los datos remanentes.

## 2.2 CO-KRIGING

---

Extendiendo el kriging ordinario a un contexto donde existen  $\mathbf{p}$  variables regionalizadas agrupadas en un vector  $Z$  de  $p$  componentes  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_p\}$  y  $\mathbf{n}$  ubicaciones en el espacio donde las variables son conocidas, el co-kriging es ideado por el mismo Georges Matheron en 1970 y formulado en su forma matricial por Myers en 1982. Esta vez el estimador lineal se escribe como:

$$Z^*(x_0) = \delta + \sum_{i=1}^n \Lambda_i^T * Z(x_i)$$

Donde los  $\Lambda_i$  son matrices de ponderadores a determinar y delta un término aditivo (vector). Bajo las mismas condiciones planteadas en el kriging ordinario (esperanza del error nula, varianza del error mínima y media desconocida), las ecuaciones quedan planteadas de la siguiente forma:

$$\delta = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_n \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{n0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

- $\delta$  es el vector de términos aditivos del estimador.
- $\mathbf{C}_{ij}$  es la matriz de covarianza entre los datos en el sitio  $i$  y los datos en el sitio  $j$ .
- $\mathbf{C}_{i0}$  es la matriz de covarianza entre los datos en el sitio  $i$  y las variables a estimar en el sitio  $x_0$ .
- $\Lambda_i$  son las matrices de ponderadores de co - kriging a determinar.
- $\mathbf{M}$  es una matriz de multiplicadores de Lagrange.
- $\mathbf{I}$  denota a la identidad.
- $\mathbf{0}$  denota a la matriz nula.

En el fondo, el co-kriging toma el kriging y lo lleva un paso más allá al considerar la correlación entre las distintas variables. Las matrices de covarianza se pueden calcular al conocer las funciones de covarianza directas y cruzadas o, equivalentemente, los variogramas directos y cruzados de las distintas variables.

### 2.3 CO-KRIGING CON MEDIAS LINEALMENTE LIGADAS

---

La variante al co-kriging que se propondrá para efectuar la estimación de recursos consiste en añadir una restricción más al problema. Supóngase que, de las  $\mathbf{p}$  variables existentes, un cierto número de ellas,  $\mathbf{k}$ , poseen medias que son dependientes de las medias de las restantes  $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ . Matemáticamente esto se puede expresar como:

$$m_i = \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{P-K} \omega_{i,j} * m_j ; \forall i \in \{P - K + 1, \dots, P\}$$

Donde los  $m_i$  son las medias de las variables y los  $\omega_{ij}$  y los  $\varepsilon_i$  son ponderadores determinados a priori a través del estudio exploratorio. Por ejemplo, en este caso, se ha determinado que la densidad de las muestras ha sido calculada a partir de la ley de hierro como:

$$Densidad = 0.032 * Ley\ de\ hierro + 2.4753$$

Si la densidad fuese la variable 2 y la ley de hierro la variable 1, se tendría que  $\varepsilon_1 = 2.4753$  y que  $\omega_{12} = 0.032$ . El resto de los  $\omega_{1j} = 0$ . De esta manera, se calculan todos los ponderadores necesarios.

Ahora bien, al introducir una nueva restricción al problema, se introduce complejidad en el modelo y en el sistema de ecuaciones de co-kriging. Por lo tanto, uno de los objetivos de este trabajo es analizar el trade - off entre la complejidad adicional de implementación y la precisión adicional obtenida en la estimación, si es que esta existiere. A continuación, el sistema de ecuaciones de co - kriging, imponiendo las condiciones de optimalidad e insesgo:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{\alpha=1}^n \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{F} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{n1} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & \cdots & \mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Lambda}_n \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{n0} \\ \mathbf{F}^T \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ : Vector cuyos primeros  $(P-K)$  términos son 0 y los  $K$  últimos son  $\varepsilon_i$
- $\boldsymbol{\Omega}$ : Matriz de  $K \times (P-K)$  cuyo término genérico es  $\omega_{i-P+K,j}$
- $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$  Matriz aumentada, con  $\mathbf{I}$  de tamaño  $(p-k) \times (p-k)$ .

En el caso del hierro, las relaciones entre variables son bastante comunes. Por ejemplo, la densidad de la roca depende fuertemente de la ley de hierro al ser este un elemento más pesado y de mayor abundancia en la corteza. Por esta razón, puede resultar conveniente estimar variables aditivas (la ley de por si no es aditiva; la ley de un bloque no es la suma de las leyes en los puntos que este incluye). Así, se definen las siguientes variables, importantes para el caso en estudio:

$$\text{Contenido de sílice} = \text{Ley de sílice} * \text{Densidad}$$

$$\text{Contenido de hierro} = \text{Ley de hierro} * \text{Densidad}$$

$$\text{Contenido de hierro magnético} = \text{Ley de hierro} * \text{Densidad} * \text{Magnetismo}$$

Es importante hacer notar que para el caso de muestreo heterotópico (cuando no se tiene información sobre todas las variables en uno o más de los sitios con datos), estas matrices se reducen. Es decir, se eliminan las filas y columnas correspondientes a los sitios donde no se tiene información sobre todas las variables a estimar.

Para esta variante de co - kriging, los errores de estimación se cuantifican bajo la forma de una matriz de varianza - covarianza, la cual se calcula como:

$$\Sigma = C_{00} - \sum_{i=1}^n A_i^T * [C_{i0} + FM]$$

En la práctica solo se presta atención a la diagonal de esta matriz, la cual corresponde a las varianzas de los errores de estimación para cada una de las variables. Este trabajo podría incorporar las covarianzas (términos no diagonales de la matriz) como criterio de calidad de estimación.

## 2.4 PROCEDIMIENTO

---

Ahora que se ha discutido toda la teoría detrás de la metodología, se procede a detallar el procedimiento que se seguirá para obtener la estimación de recursos de este yacimiento:

- Elección de variables. Se seguirán los tres pasos siguientes para cada uno de los tres sets de variables que se han escogido:
  - Ley de hierro, ley de sílice, densidad, magnetismo.
  - Contenido de hierro, contenido de sílice, magnetismo.
  - Contenido de hierro, contenido de sílice, contenido de hierro magnético.
- Análisis exploratorio de datos
  - Eliminación de datos aberrantes y desagrupamiento.
  - Elección de zona de interés.
  - Planteamiento de relaciones entre las medias de las variables.
- Análisis variográfico
  - confección de variogramas directos y cruzados.
  - Elección de vecindad de co-kriging.
- Estimación
  - Ejecución del co-kriging.
  - Cálculo de varianza y co-varianza del error de estimación.
- Comparación entre los tres sets de variables/Validaciones cruzadas.
- Reporte final de recursos
- Conclusiones y discusiones

Como preámbulo, se espera que el último set de variables sea el que genere una mejor estimación, ya que estima directamente el contenido de hierro magnético.

### 3. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

En esta sección se procede a presentar la base de datos. En total se compone de 8513 muestras obtenidas a partir de una campaña de 70 sondajes. Las estadísticas básicas de cada una de las cuatro variables regionalizadas se muestran en el siguiente cuadro:

	Datos	Media	Desviación	Min	Max
<b>Ley de Hierro (%)</b>	8373	27.13	18.47	0.05	69.19
<b>Densidad (ton/m3)</b>	8373	3.35	0.59	2.44	4.69
<b>Ley de Sílice (%)</b>	6847	30.85	15.44	0.15	79.96
<b>Magnetismo (0-1)</b>	1219	0.88	0.11	0.08	1.00

TABLA 1: ESTADÍSTICAS FUNDAMENTALES

Como se puede apreciar, existe un sub – muestreo del magnetismo. Es decir, esta base de datos es heterotópica. Este sub – muestreo podría deberse a un alto costo asociado a pruebas de laboratorio utilizadas para medir la razón de hierro magnético en sectores en que se han encontrado bajas leyes de hierro.

Cabe destacar además que no hay datos atípicos ni aberrantes; los rangos de leyes para hierro y sílice concuerdan. Existe un solo dato que se eliminó, pues, como se ve más adelante, la densidad está calculada a partir de la ley de hierro y el dato que se elimina no cumple esta condición.

Existen además tres variables creadas a partir de las cuatro anteriores:

	Media	Desviación	Min	Max
<b>Contenido Sílice (SiT)</b>	97.235	37.685	0.465	218.29
<b>Contenido Hierro (FeT)</b>	104.82	83.965	0.124	324.50
<b>Contenido Hierro Magnético (FeM)</b>	102.00	65.863	3.779	314.68

TABLA 2: ESTADÍSTICAS BÁSICAS, VARIABLES CREADAS

La distribución de leyes en los sondajes (Hierro total y magnético) se muestra en las vistas bidimensionales a continuación. Además se ilustra la distribución estadística de todas las variables mediante histogramas.

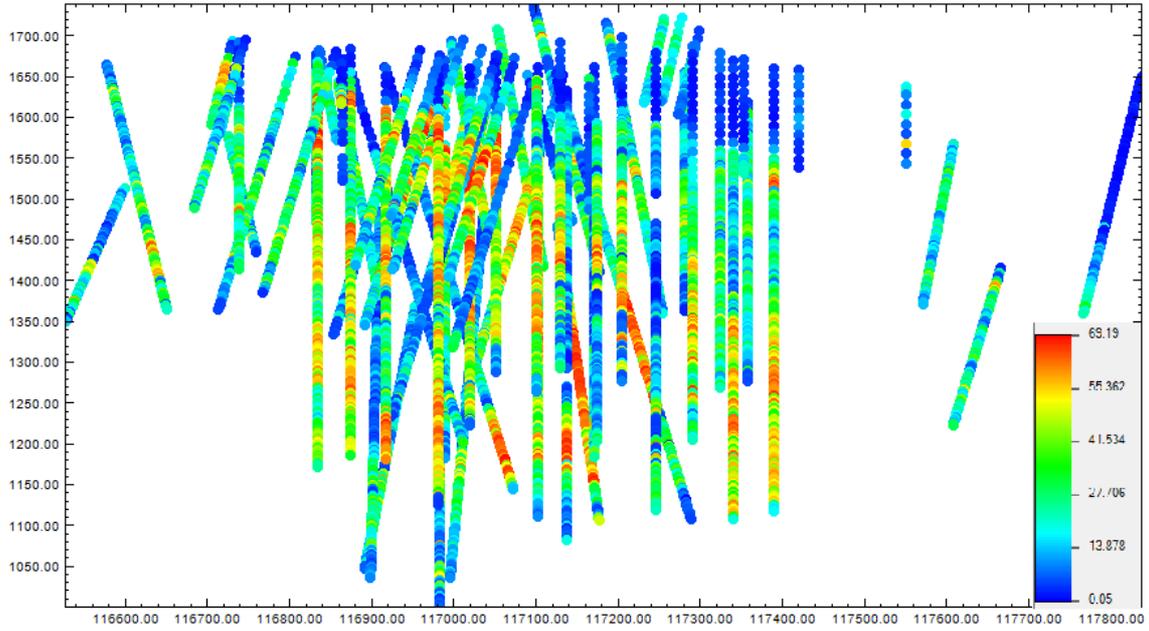


ILUSTRACIÓN 4: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO TOTAL. PLANO VERTICAL - ESTE

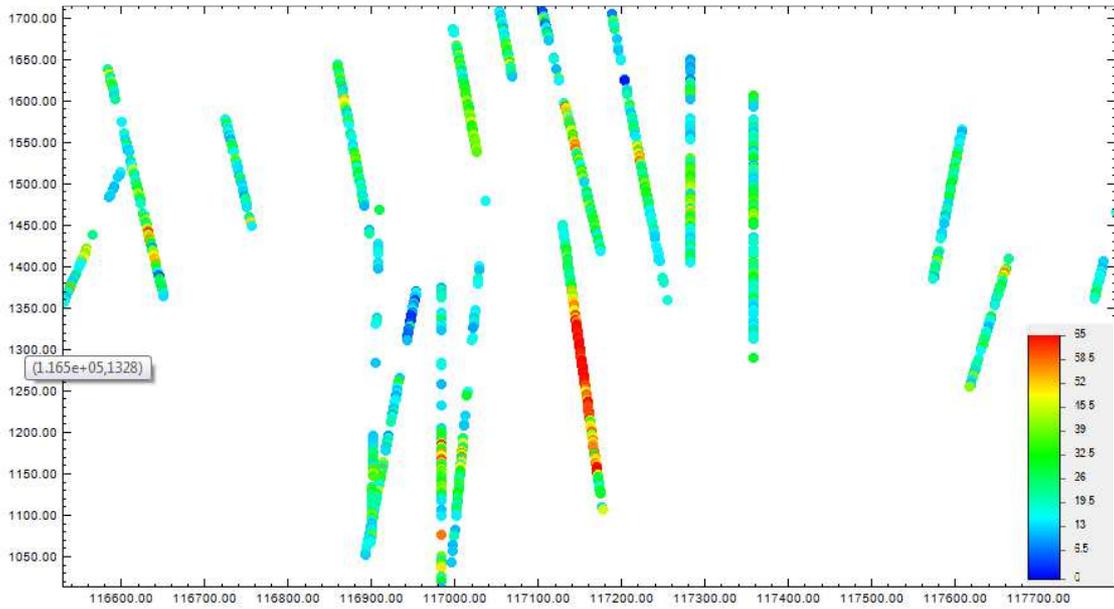


ILUSTRACIÓN 5: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO MAGNÉTICO. PLANO VERTICAL - ESTE

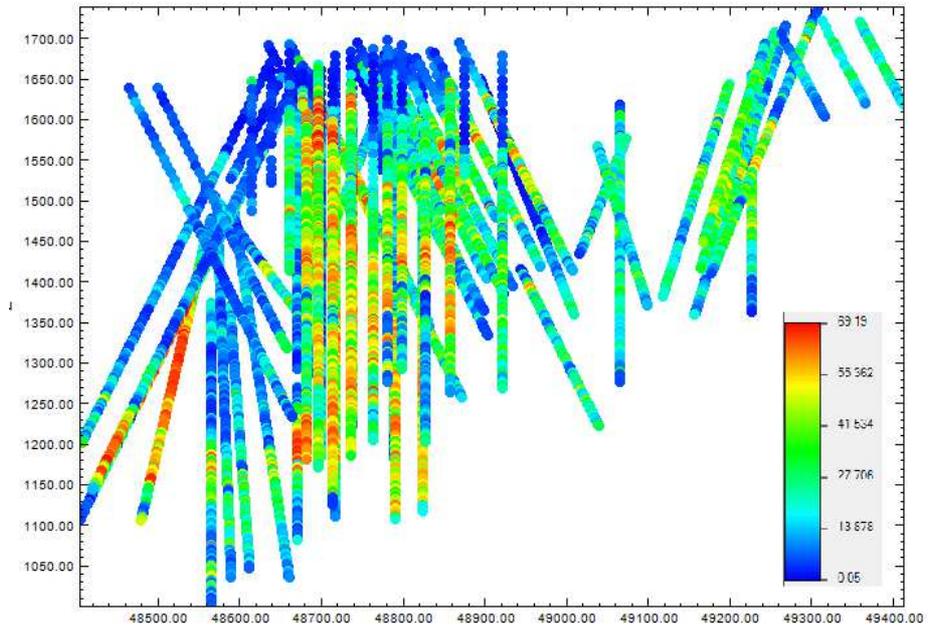


ILUSTRACIÓN 6: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO TOTAL. PLANO VERTICAL - NORTE

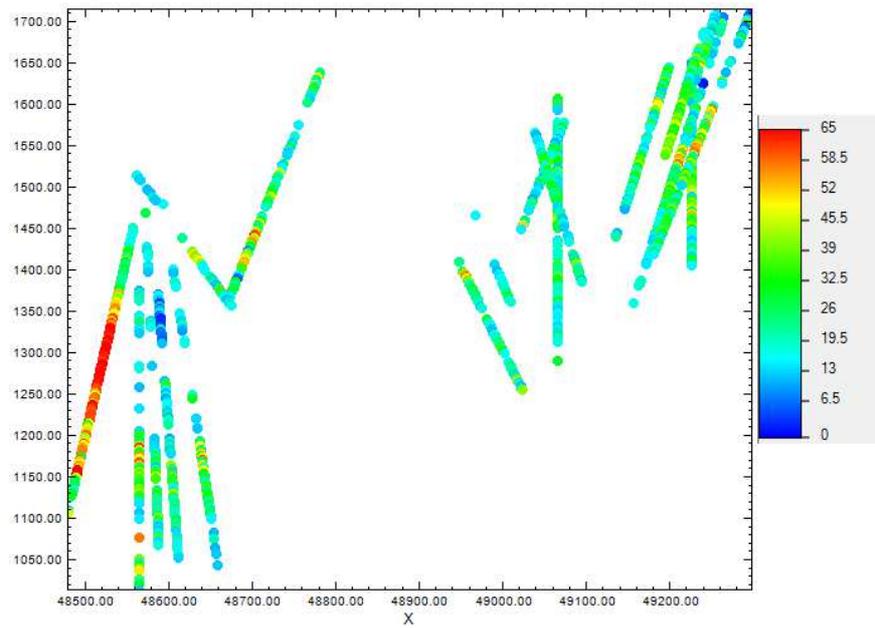


ILUSTRACIÓN 7: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO MAGNÉTICO. PLANO VERTICAL - NORTE

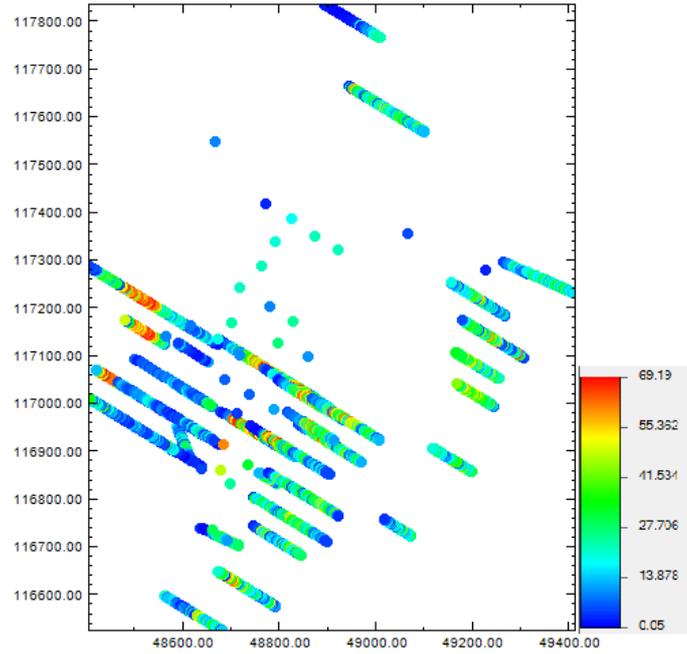


ILUSTRACIÓN 8: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO TOTAL. VISTA EN PLANTA

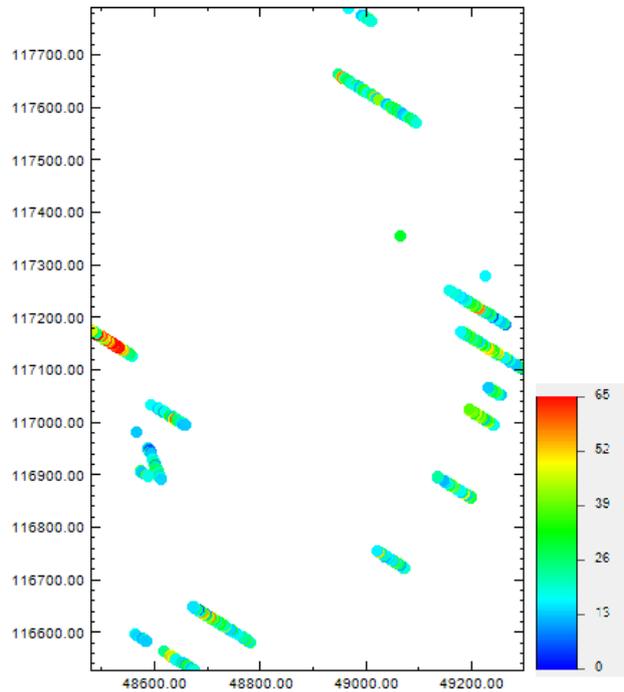


ILUSTRACIÓN 9: MAPEO DE SONDAJES SEGÚN LEY DE FIERRO MAGNÉTICO. VISTA EN PLANTA

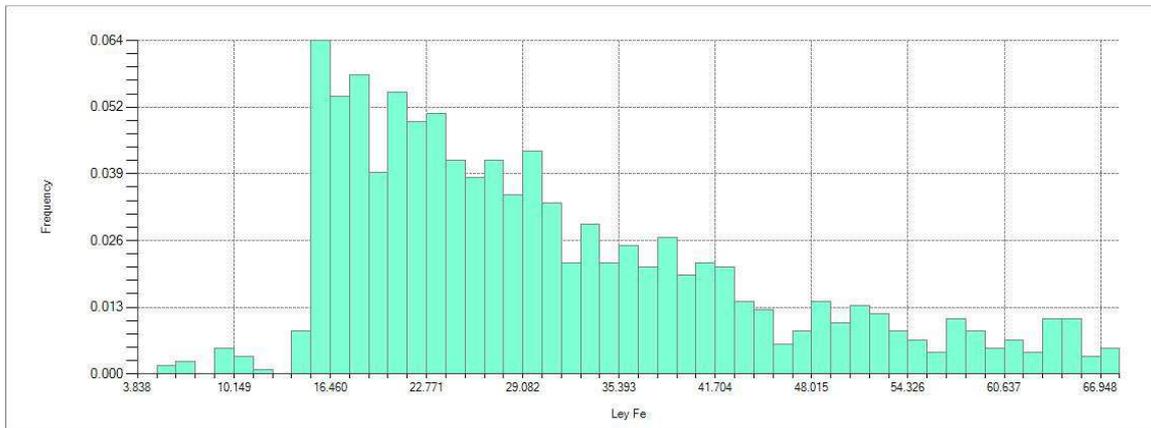


ILUSTRACIÓN 10: HISTOGRAMA DE LEYES DE FIERRO

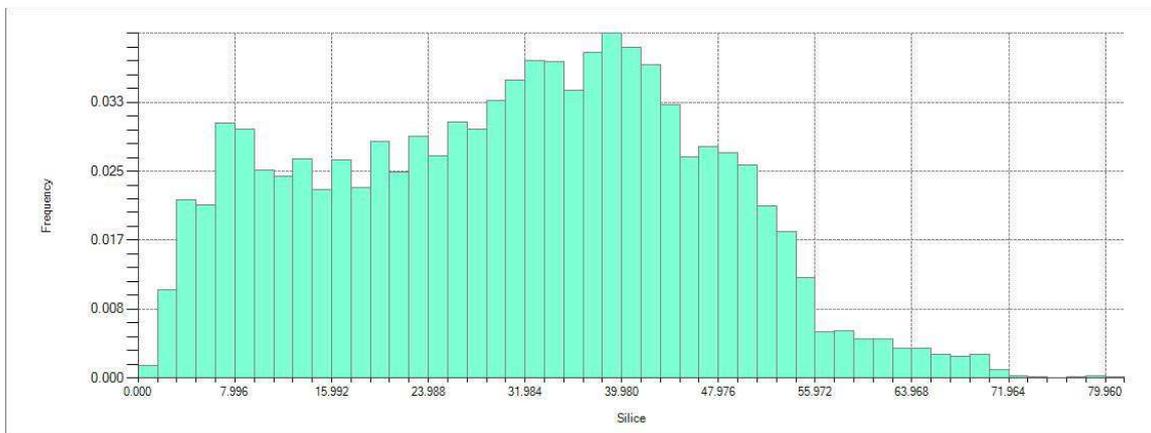


ILUSTRACIÓN 11: HISTOGRAMA DE LEY DE SÍLICE

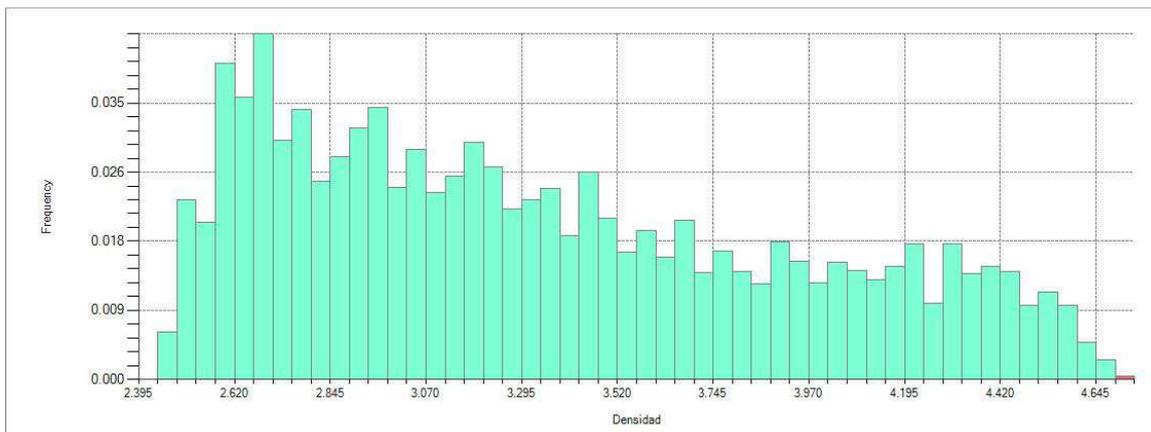


ILUSTRACIÓN 12: HISTOGRAMA DE DENSIDAD

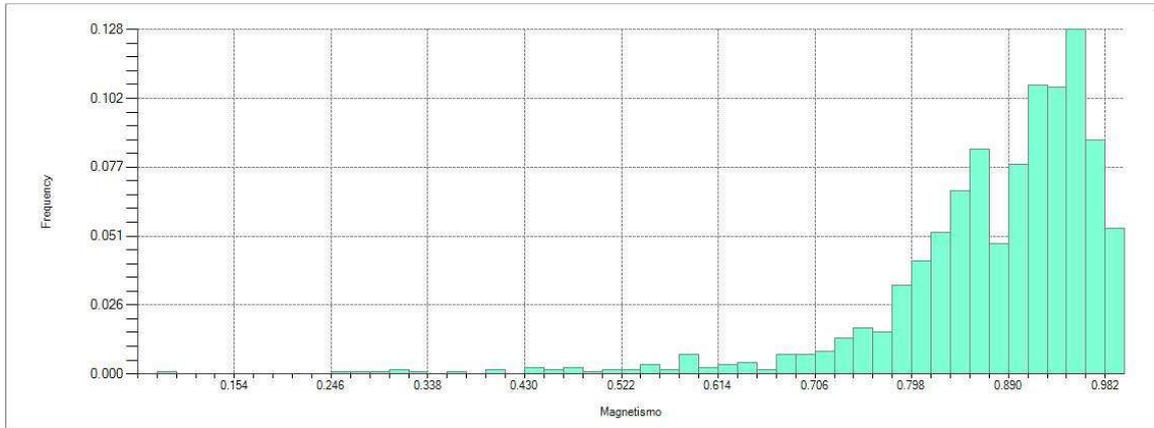


ILUSTRACIÓN 13: HISTOGRAMA DE MAGNETISMO

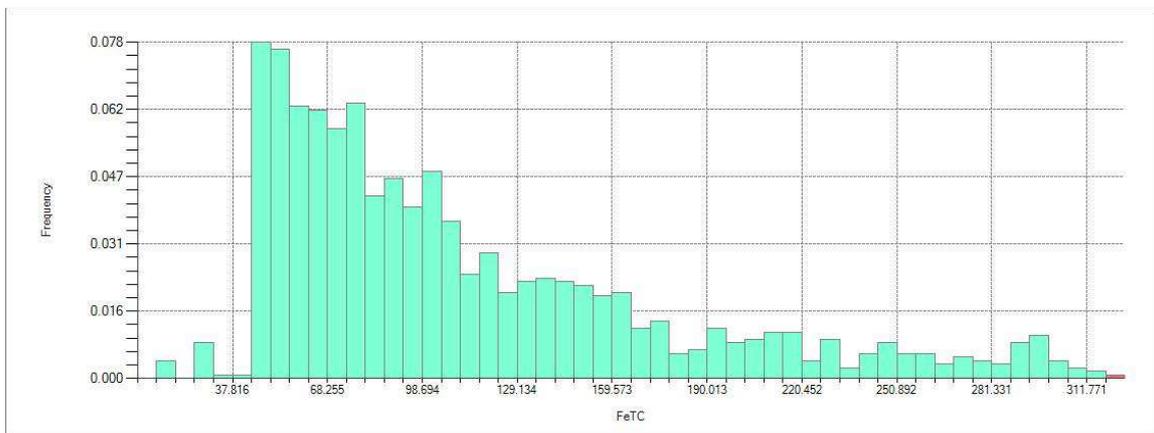


ILUSTRACIÓN 14: HISTOGRAMA DE CONTENIDO DE FIERRO TOTAL

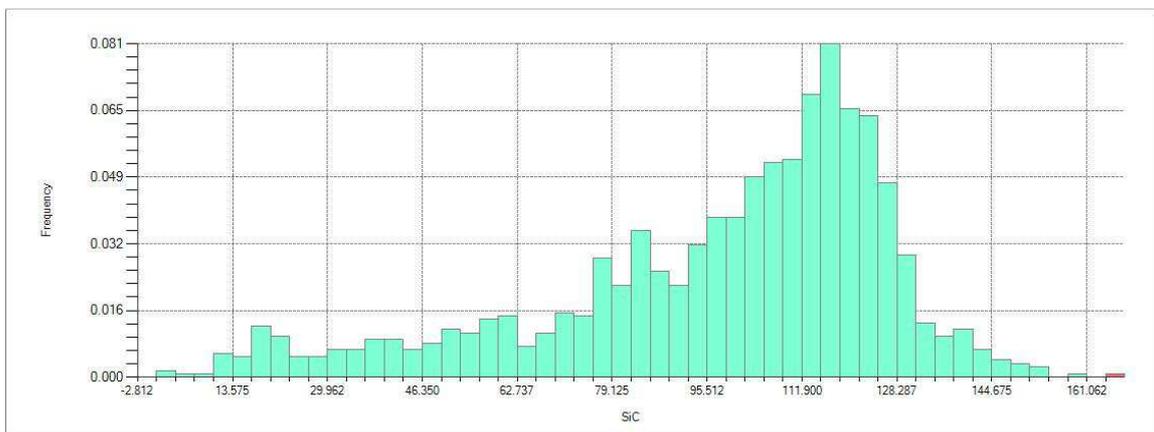


ILUSTRACIÓN 15: HISTOGRAMA DE CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO

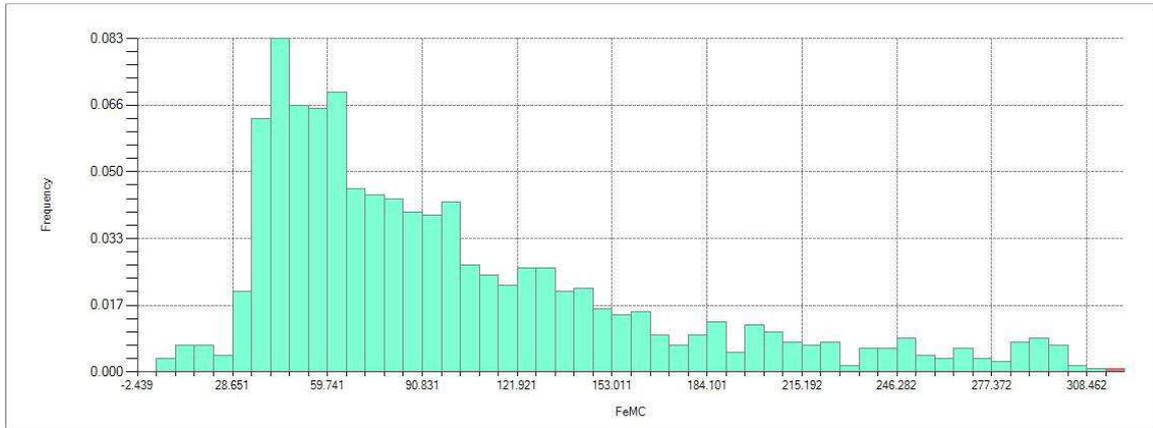


ILUSTRACIÓN 16: HISTOGRAMA DE CONTENIDO DE SÍLICE

### 3.1 DEPENDENCIAS ENTRE LAS VARIABLES

---

La última parte del estudio exploratorio consiste en determinar (para cada uno de los tres casos) cuáles son las variables dependientes de las restantes, que serían independientes. Luego el objetivo es encontrar la relación entre las medias de estas variables para completar el sistema de kriging. Para esto se cuenta con una herramienta de la estadística bi - variable, el scatter plot o nube de dispersión.

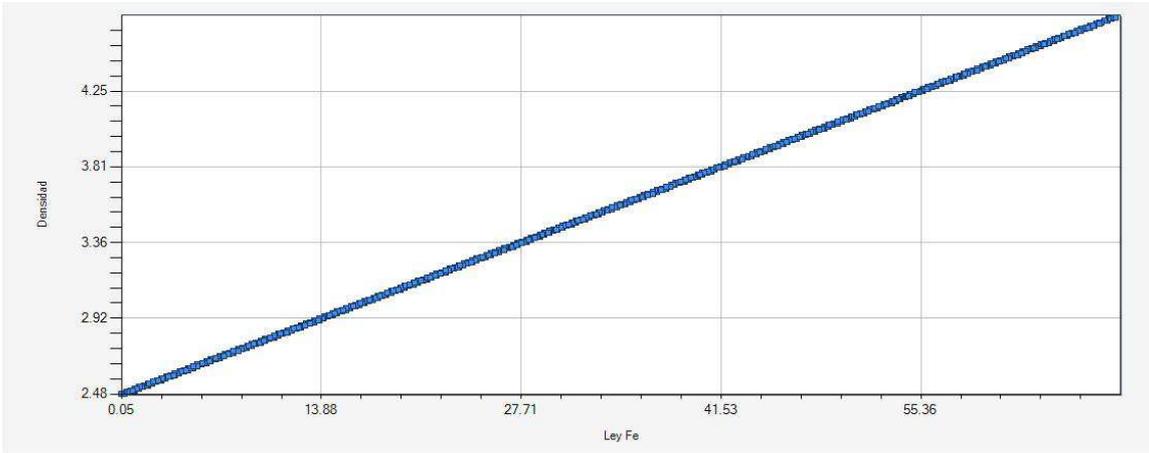


ILUSTRACIÓN 17: SCATTER PLOT, DENSIDAD V/S LEY DE FIERRO

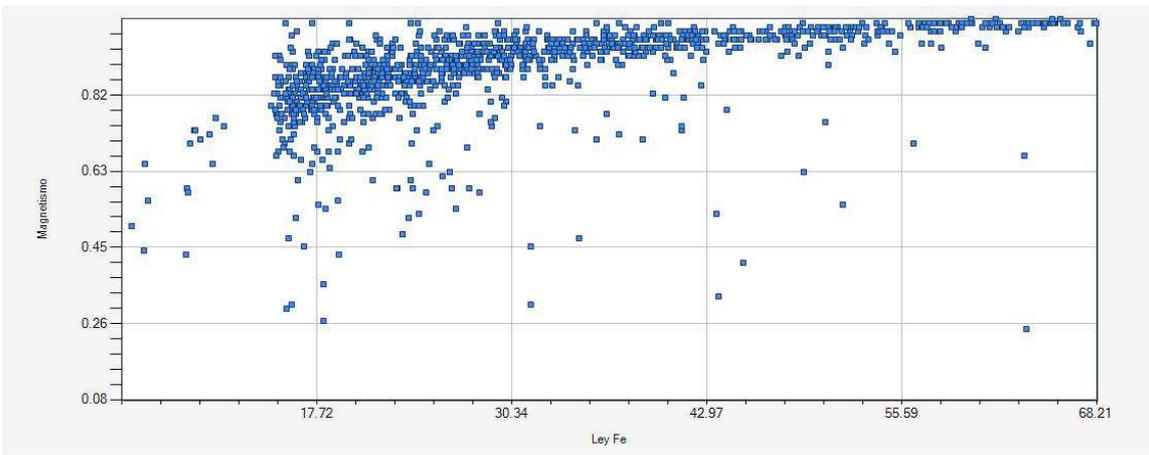


ILUSTRACIÓN 18: SCATTER PLOT, MAGNETISMO V/S LEY DE FIERRO

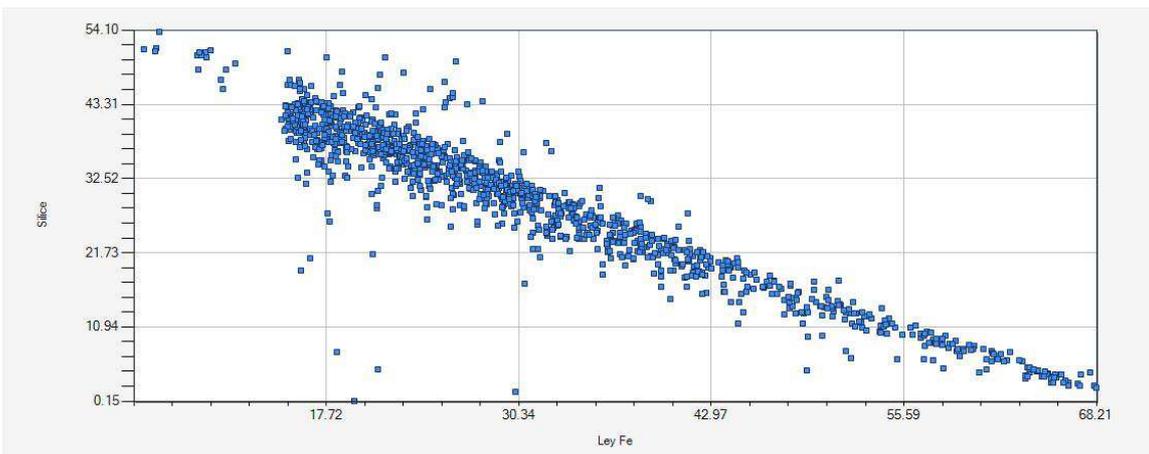


ILUSTRACIÓN 19: SCATTER PLOT, LEY DE SÍLICE V/S LEY DE FIERRO

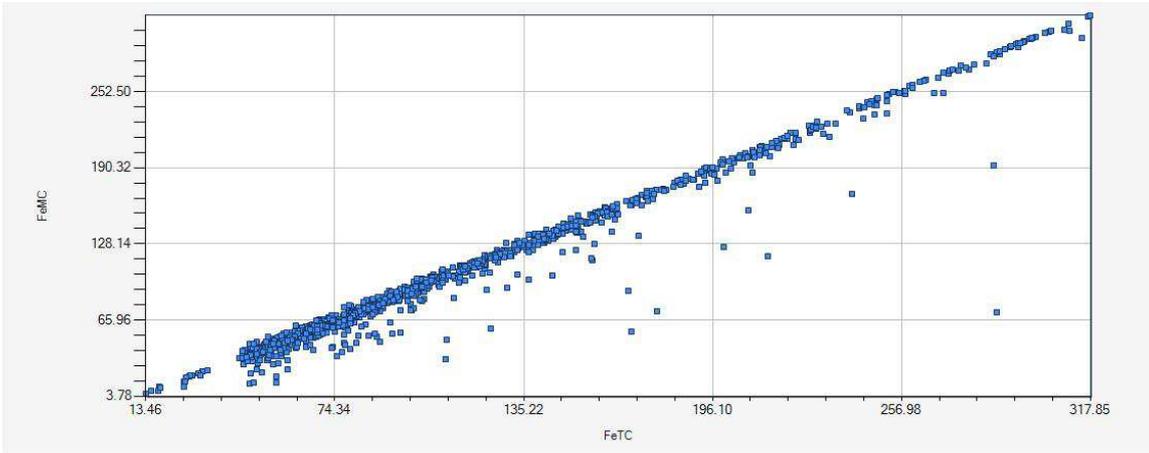


ILUSTRACIÓN 20: SCATTER PLOT, CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO V/S CONT. DE FIERRO TOTAL

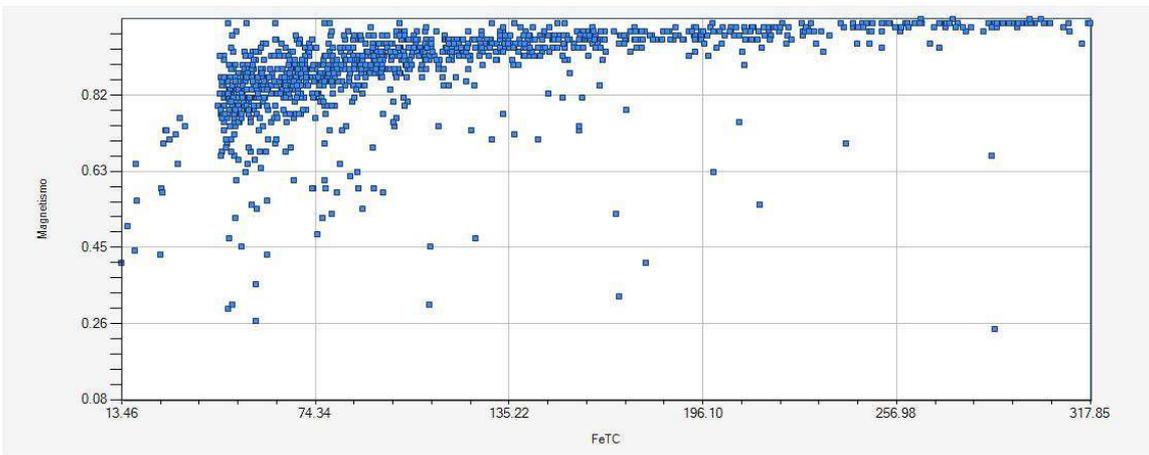


ILUSTRACIÓN 21: SCATTER PLOT, MAGNETISMO V/S CONTENIDO DE FIERRO TOTAL

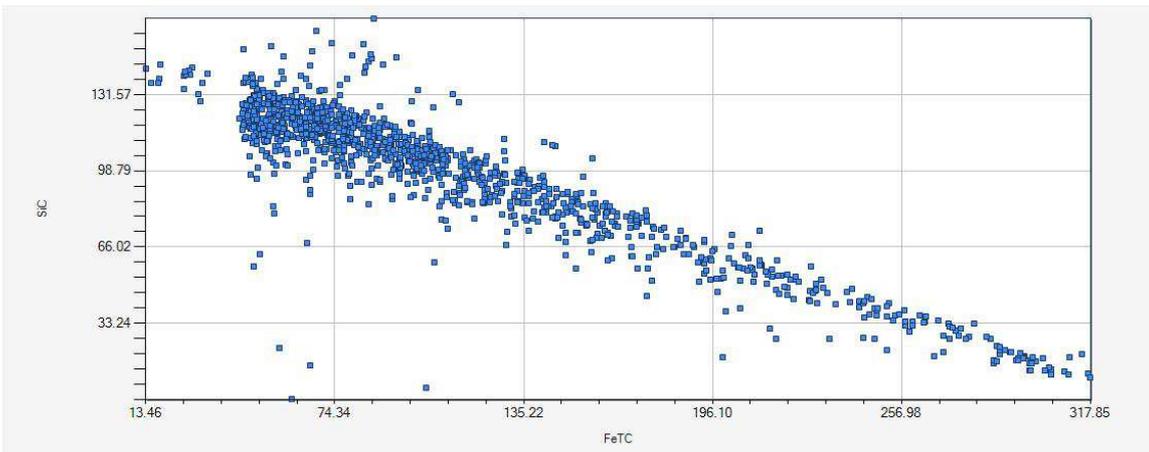


ILUSTRACIÓN 22: SCATTER PLOT, CONTENIDO DE SÍLICE V/S CONTENIDO DE FIERRO TOTAL

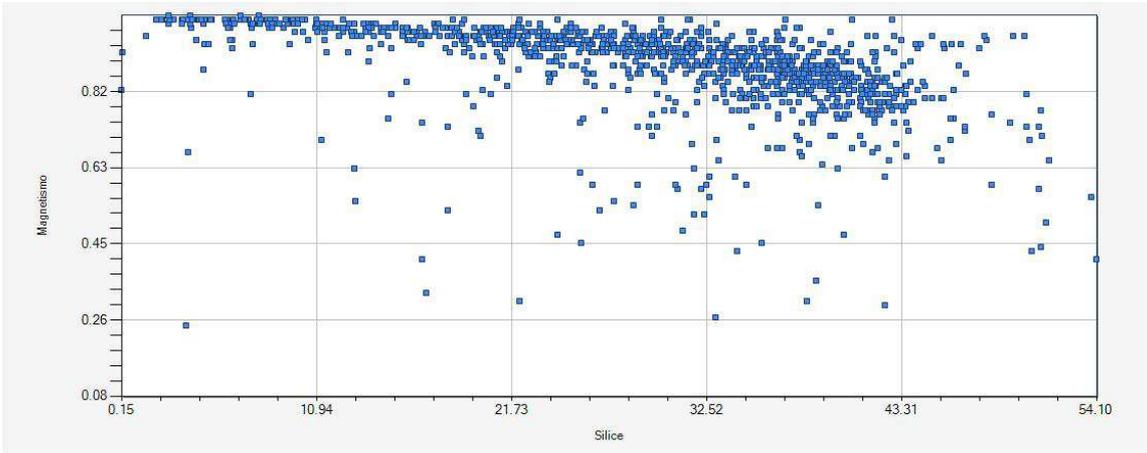


ILUSTRACIÓN 23: SCATTER PLOT, MAGNETISMO V/S LEY DE SÍLICE

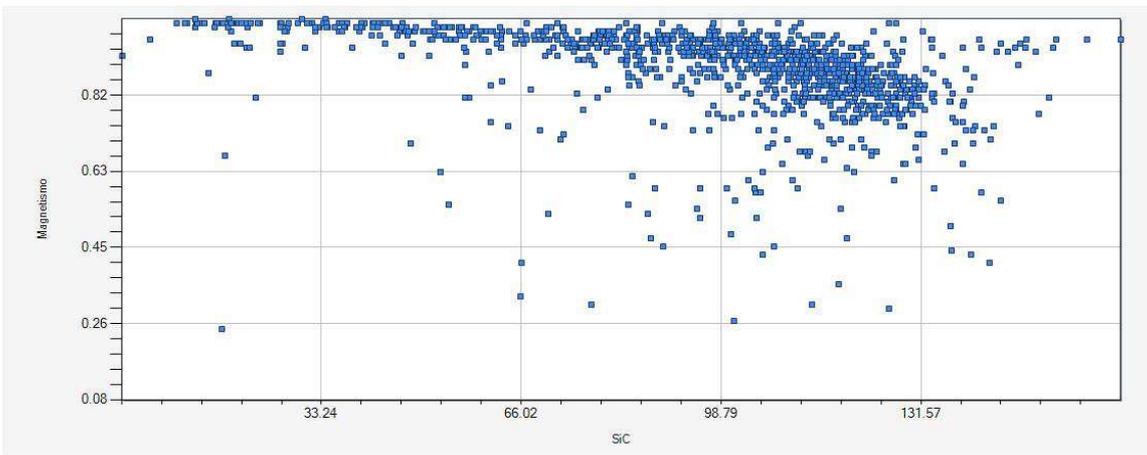


ILUSTRACIÓN 24: SCATTER PLOT, MAGNETISMO V/S CONTENIDO DE SÍLICE

Variable 1	Variable 2	Pendiente	Intercepto	Correlación
Ley Fe	Sílice	-0.7858	53.712	-0.942
Ley Fe	Magnetismo	0.0042	0.747	0.522
Ley Fe	Densidad	0.0321	2.475	1
Sílice	Magnetismo	-0.0044	1	-0.462
Cont. FeT	Cont. Si	-0.4293	145.94	-0.917
Cont. FeT	Magnetismo	0.0008	0.784	0.497
Cont. Si	Magnetismo	-0.0014	1.013	-0.401
Cont. FeT	Cont. FeM	1.0032	-10.891	0.986

TABLA 3: COEFICIENTES RELEVANTES DE LOS SCATTER PLOTS Y SUS REGRESIONES LINEALES

Existen varias conclusiones interesantes que se desprenden del análisis mediante nubes de dispersión o scatter plots y de sus respectivas regresiones lineales. Lo primero que se puede concluir es que la variable magnetismo o razón de magnetismo es linealmente independiente del resto, ya que no se correlaciona de manera lineal con ninguna de las otras variables. Lo segundo a notar es que la densidad está calculada a partir de la ley de fierro; de ahí la recta perfecta que se genera en el scatter plot entre estas dos variables.

Continuando, se nota una fuerte correlación negativa entre fierro y sílice, tanto en sus formas de ley pura como de contenido (multiplicando por densidad). Esto es bastante intuitivo; a mayor contenido de fierro en una unidad de roca, menor contenido de sílice o ganga en la misma. Finalmente, es importante hacer notar que el contenido de fierro magnético está fuertemente ligado al contenido de fierro total.

Con la información mencionada anteriormente, se pueden concretar supuestos tales que se construyan las matrices de coeficientes de relación entre medias. Primero, se suponen ley de fierro y magnetismo independiente. Segundo, se supondrá la ley (contenido) de sílice dependiente solo de la ley (contenido) de fierro. Por último, como se ha mostrado la dependencia entre contenido de fierro total y magnético, se supondrá que son directamente proporcionales; y la constante de proporcionalidad será igual al cociente entre las medias de ambas variables.

Usando la siguiente notación (en color las variables dependientes de las variables en negro):

- CASO 1
  - 1: Ley de fierro
  - 2: Magnetismo
  - 3: Ley de sílice
  - 4: Densidad
- CASO 2
  - 1: Contenido de fierro
  - 2: Magnetismo
  - 3: Contenido de sílice
- CASO 3
  - 1: Contenido de fierro
  - 2: Contenido de sílice
  - 3: Contenido de fierro magnético

---

## CASO 1: LEYES DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

---

Para estimar correctamente los coeficientes que unen las leyes medias de hierro y de sílice correctamente se utilizará el scatter plot obtenido anteriormente y además este mismo con los ejes invertidos:

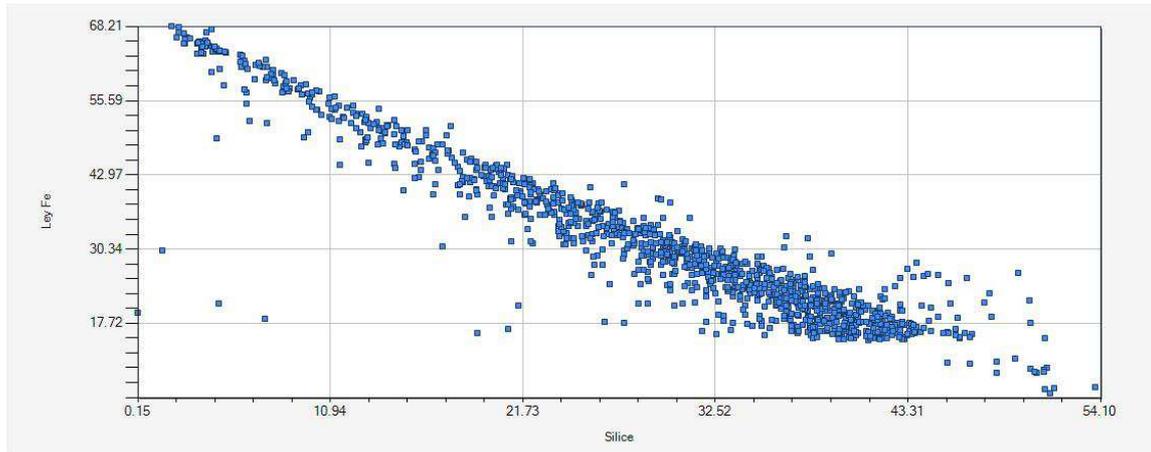


ILUSTRACIÓN 25: SCATTER PLOT, LEY DE FIERRO V/S LEY DE SÍLICE

La regresión lineal arroja que:  $Ley Fe = -1.1287 * Ley Si + 64.118$

Despejando se obtiene que:  $Ley Si = -0.8859 * Ley Fe + 56.807$

En cambio, el scatter plot original arrojaba que:  $Ley Si = -0.7858 * Ley Fe + 53.712$

Para resolver esta incoherencia y colocarle un valor único a la pendiente y al intercepto, se puede usar el “promedio” entre ambas rectas, con lo que se obtendría:

$$Ley Si = -0.8359 * Ley Fe + 55.259$$

Otro modo de encontrar estos parámetros es mediante un ajuste de la pendiente  $\omega$ . Suponiendo una relación lineal entre las variables, se desprende que:

$$Ley Si - \omega * Ley Fe = cte. = \varepsilon$$

Por lo tanto, si se construye el scatter plot de una nueva variable que sería igual al lado izquierdo de la igualdad anterior contra, por ejemplo, la ley de hierro, la forma de la nube debiese ser muy cercana a horizontal si es que el parámetro  $\omega$  es el correcto. En ese caso, el valor en torno al cual la nube es horizontal es el término constante  $\varepsilon$ . Un buen punto de partida para el ajuste de la pendiente sería el valor obtenido mediante el otro método.

Siguiendo la metodología anteriormente descrita se ajusta  $\omega$  a un valor de  $-0.7864$ , obteniéndose una pendiente de regresión lineal de la nube de correlación de  $0.0002$  y un coeficiente de correlación de  $0.0007$  al graficar la variable " $Ley Si - \omega * Ley Fe$ " versus  $Ley Fe$ . El intercepto de la regresión es de  $53.732$ , muy cercano al valor obtenido del scatter plot original. Por lo tanto, se utilizarán estos dos valores para construir  $\omega$  y  $\varepsilon$ .

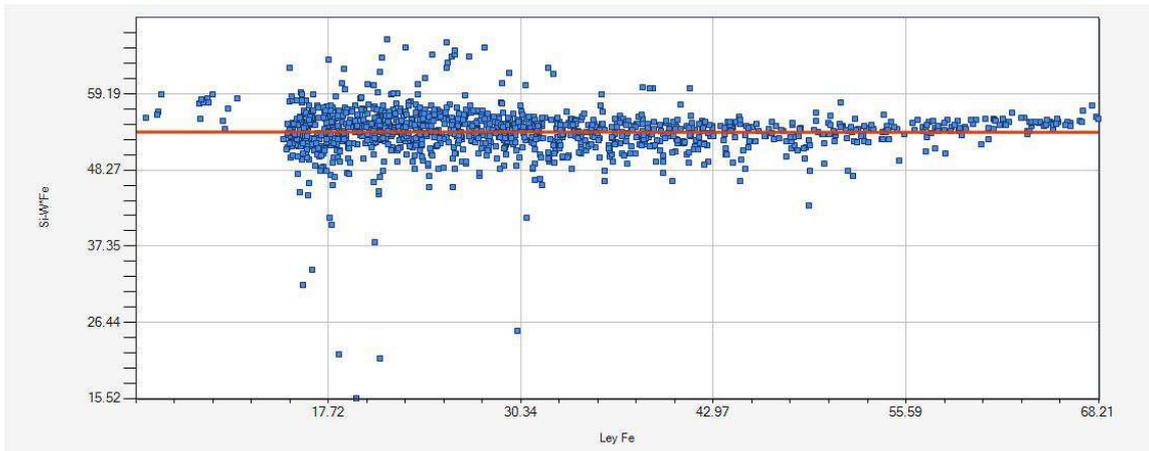


ILUSTRACIÓN 26: SCATTER PLOT, LEY SI  $- \Omega * LEY FE$  V/S LEY DE FIERRO

La relación entre ley de fierro y densidad es fácil de notar, ya que el scatter plot es una recta perfecta. La densidad de la roca está calculada a partir de la ley de fierro como:

$$Densidad = 0.0321 * Ley Fe + 2.4751$$

Por lo tanto, no es necesario incluir a la densidad como una variable en el co - kriging dado que es una función bien definida de la ley de fierro en todo el espacio de muestreo. Lo que se hará será calcularla a posteriori. Por último, el magnetismo y la ley de fierro son variables independientes. Luego, los coeficientes a utilizar en el co-kriging son:

$$\Omega = (-0.7864 \ 0); \ \varepsilon = (53.732)$$

## CASO 2: CONTENIDOS DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

La única variable dependiente en este caso es el contenido de sílice, el cual depende del contenido de hierro. Usando las mismas metodologías descritas anteriormente para encontrar los parámetros de dependencia lineal, se tienen los siguientes resultados:

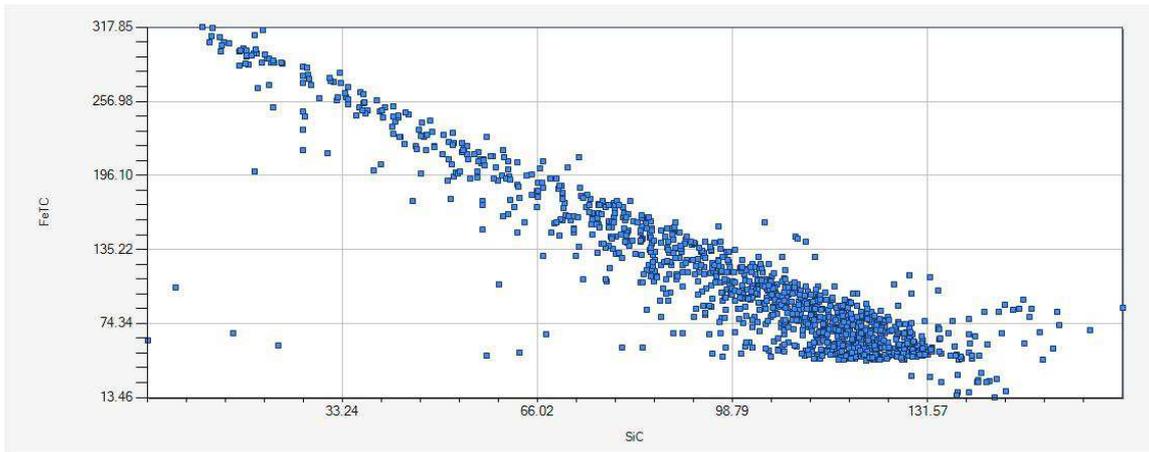


ILUSTRACIÓN 27: SCATTER PLOT, CONTENIDO DE FIERRO V/S CONTENIDO DE SÍLICE

Scatter plot original:  $Cont Si = -0.429 * Cont Fe + 145.94$

Scatter plot invertido:  $Cont Si = -0.513 * Cont Fe + 155.34$

Promedio rectas anteriores:  $Cont Si = -0.471 * Cont Fe + 150.64$

Ajuste final de parámetros:  $Cont Si = -0.431 * Cont Fe + 145.95$

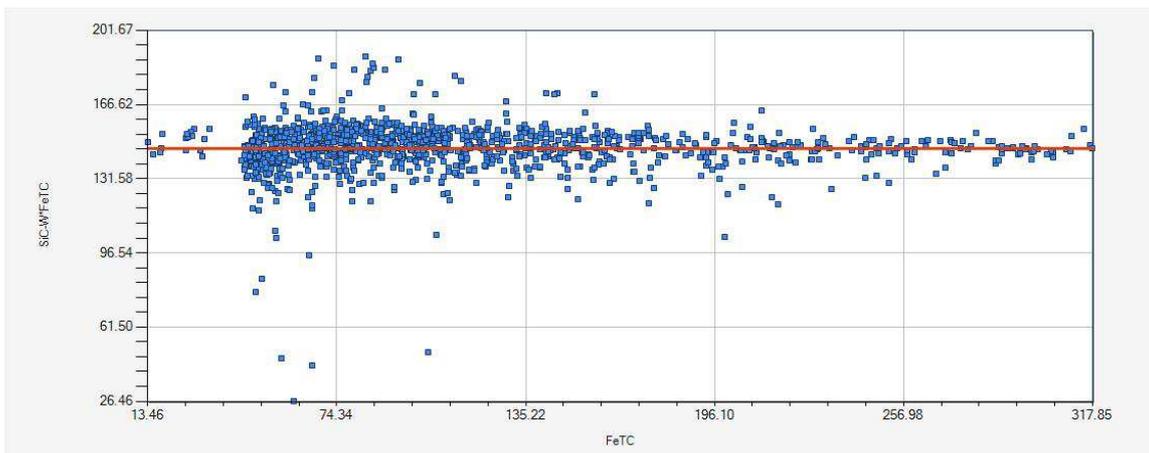


ILUSTRACIÓN 28: SCATTER PLOT, "CONT SI -  $\Omega$  \* CONT FE" V/S CONTENIDO DE FIERRO

Se utilizarán los resultados del ajuste final de parámetros, por lo que:

$$\Omega = (-0.431 \ 0); \varepsilon = (145.95)$$

---

### CASO 3: CONTENIDOS DE FIERRO, SÍLICE Y FIERRO MAGNÉTICO

---

Existen en este caso, el más interesante, dos variables dependientes del contenido de hierro total. La relación con el contenido de sílice ya ha sido establecida en el caso anterior, por lo que queda por determinar la relación entre los contenidos de hierro total y magnético:

$$\text{Cont FeM} = \omega * \text{Cont FeT} + \varepsilon$$

Por construcción,  $\varepsilon = 0$ , pues es físicamente imposible que el hierro magnético sea distinto de 0 cuando el hierro total es igual a 0. Como son las medias las que están siendo relacionadas, el coeficiente  $\omega$  puede ser igual a la razón entre las medias de los datos para ambas variables sin ningún problema, ya que están casi perfectamente correlacionados (coeficiente de correlación muy cercano a 1). Según este criterio:

$$\omega = \frac{m_{FeM}}{m_{FeT}} = \frac{102.01}{104.82} = 0.973$$

Este alto valor se debe al muestreo preferencial con respecto al magnetismo (los valores más bajos se ven sub - representados por temas de poco interés económico de muestrearlos). Con toda esta información, se construyen la matriz  $\Omega$  y el vector  $\varepsilon$ :

$$\Omega = \begin{pmatrix} -0.431 \\ 0.973 \end{pmatrix} ; \varepsilon = \begin{pmatrix} 145.95 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 4. VARIOGRAFÍA

Una vez conducido el estudio exploratorio de datos y establecidas las relaciones entre las medias de las variables, se puede entrar a analizar la continuidad espacial de las variables a través de variogramas, con el fin de construir un modelo lineal de correogionalización que será input para el co - kriging.

A través de un proceso más bien de prueba y error, se llega a la conclusión de que las direcciones de anisotropía utilizadas serán una dirección omni - horizontal, que cubre todo el plano horizontal, y una dirección vertical. Los parámetros de cálculo utilizados son los siguientes:

	Omni-Horizontal	Vertical
<b>Tolerancia azimuth</b>	90°	10°
<b>Ancho de banda (m)</b>	$\infty$	25
<b>Tolerancia dip</b>	22.5°	10°
<b>Altura de banda (m)</b>	30	25
<b>Numero de pasos</b>	13	13
<b>Tamaño del paso (m)</b>	18	18
<b>Tolerancia paso (m)</b>	9	9

TABLA 4: PARÁMETROS DE CÁLCULO, VARIOGRAMA EXPERIMENTAL

Cabe destacar que estos parámetros se utilizaron en los tres casos, ya que la diferencia entre estos es que algunas variables van multiplicadas por la densidad. Como la densidad es una variable calculada a partir de la ley de hierro, la continuidad espacial no se debiese ver muy afectada.

En las próximas páginas se exhiben gráficamente los variogramas experimentales, directos y cruzados, para los tres casos. En total, 18 variogramas, todos calculados con la aplicación "gamv" de GSLib. La dirección omnihorizontal se muestra en color azul, mientras que la dirección vertical está representada con rojo.

CASO 1: LEYES DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

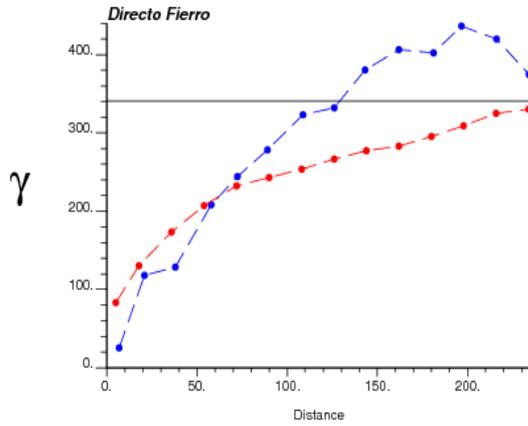


ILUSTRACIÓN 29: VARIOGRAMA DIRECTO, LEY DE FIERRO

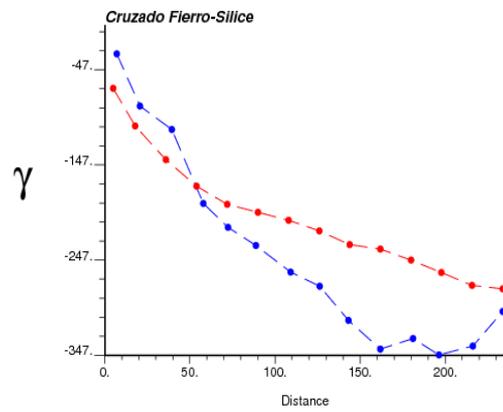


ILUSTRACIÓN 30: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

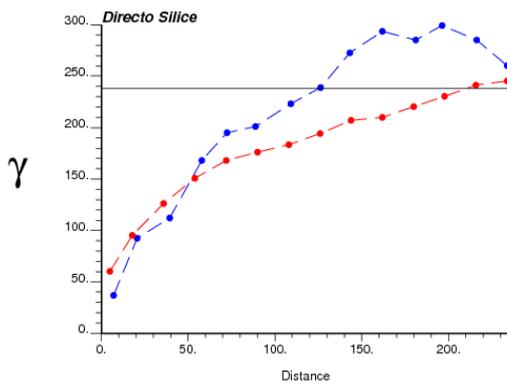


ILUSTRACIÓN 31: VARIOGRAMA DIRECTO, LEY DE SÍLICE

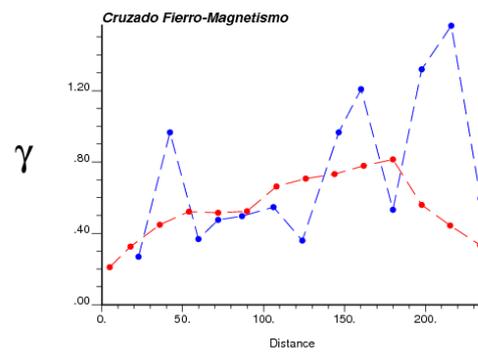


ILUSTRACIÓN 32: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO - MAGNETISMO

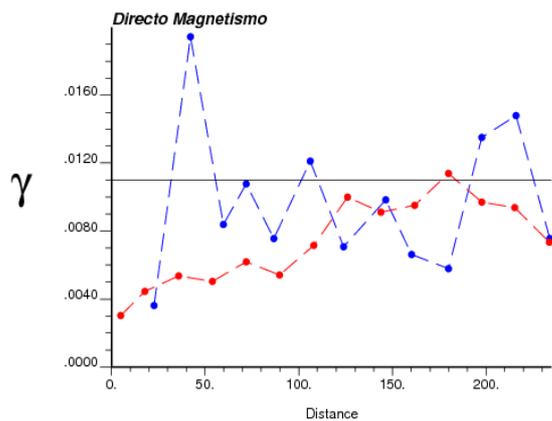


ILUSTRACIÓN 33: VARIOGRAMA DIRECTO, MAGNETISMO

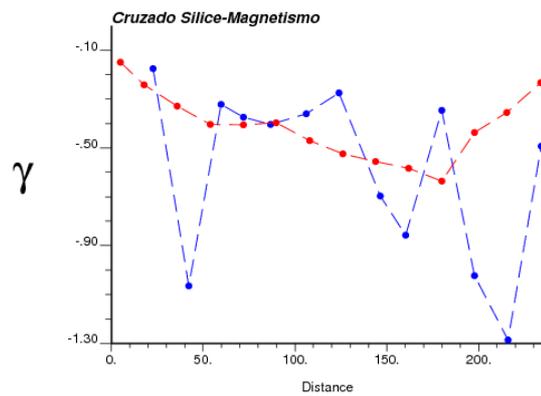


ILUSTRACIÓN 34: VARIOGRAMA CRUZADO, SÍLICE - MAGNETISMO

CASO 2: CONTENIDOS DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

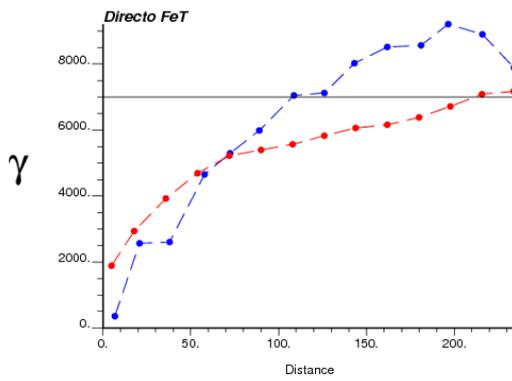


ILUSTRACIÓN 35: VARIOGRAMA DIRECTO, CONTENIDO DE FIERRO

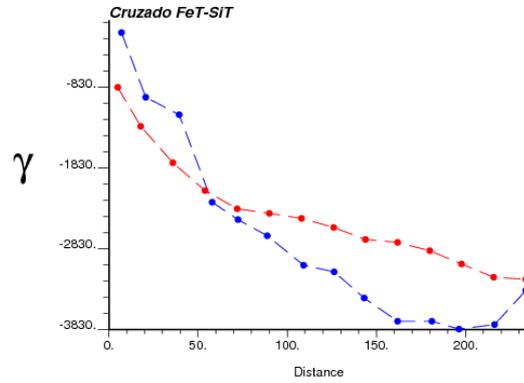


ILUSTRACIÓN 36: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

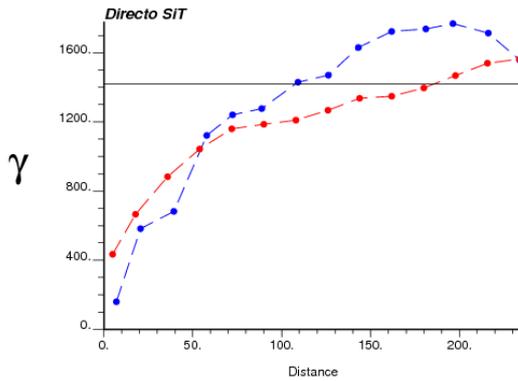


ILUSTRACIÓN 37: VARIOGRAMA DIRECTO, CONTENIDO DE SÍLICE

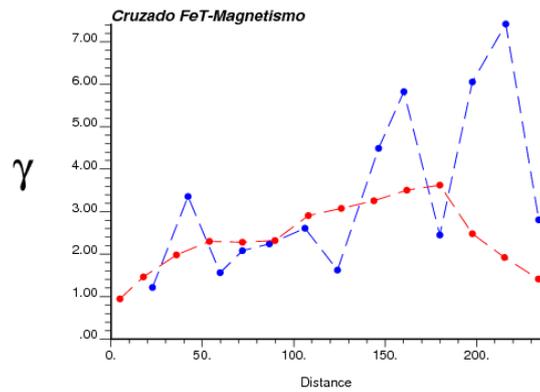


ILUSTRACIÓN 38: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO - MAGNETISMO

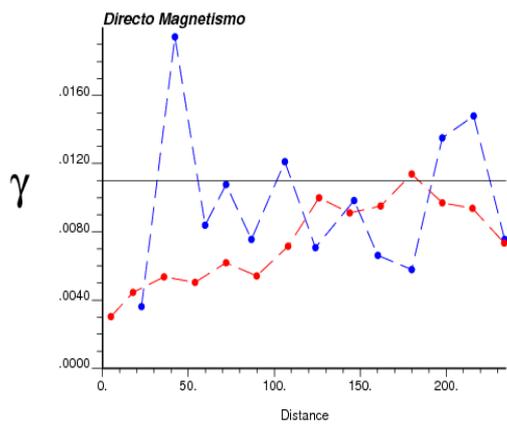


ILUSTRACIÓN 39: VARIOGRAMA DIRECTO, MAGNETISMO

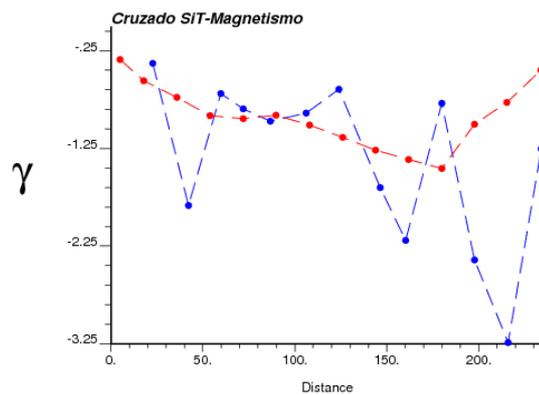


ILUSTRACIÓN 40: VARIOGRAMA CRUZADO, SÍLICE - MAGNETISMO

CASO 3: CONTENIDOS DE FIERRO, SÍLICE Y FIERRO MAGNÉTICO

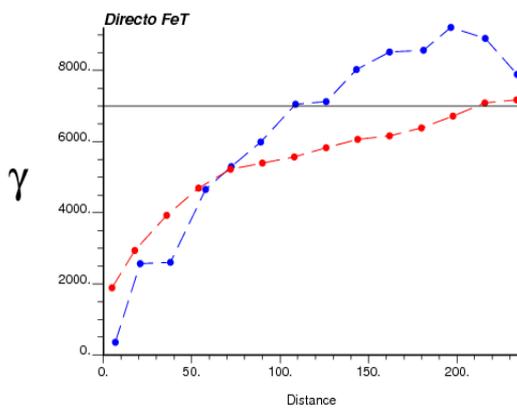


ILUSTRACIÓN 41: VARIOGRAMA DIRECTO, CONTENIDO DE FIERRO

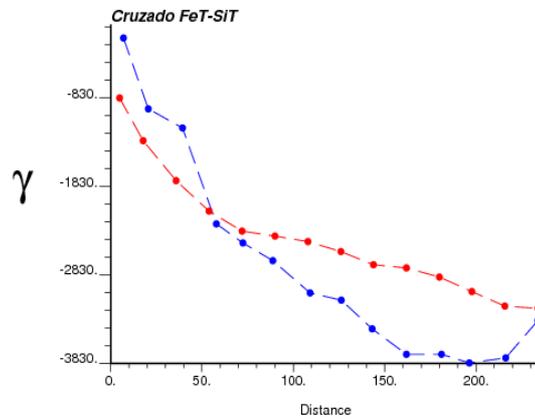


ILUSTRACIÓN 42: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

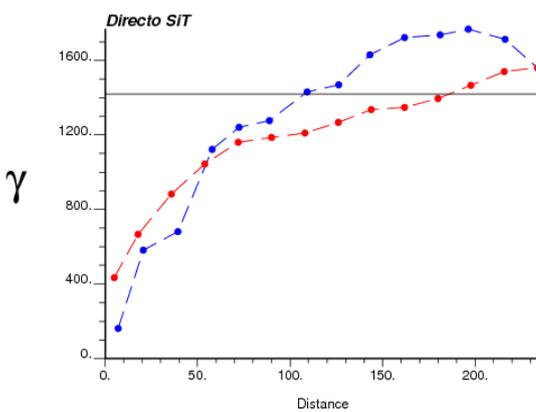
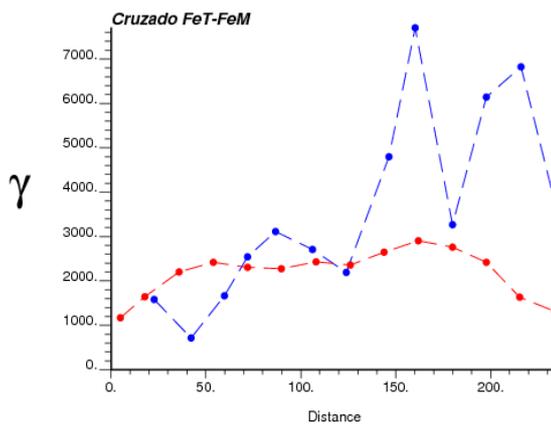


ILUSTRACIÓN 43: VARIOGRAMA DIRECTO, CONTENIDO DE SÍLICE



ILUSTRACION 44: VARIOGRAMA CRUZADO, FIERRO TOTAL - MAGNÉTICO

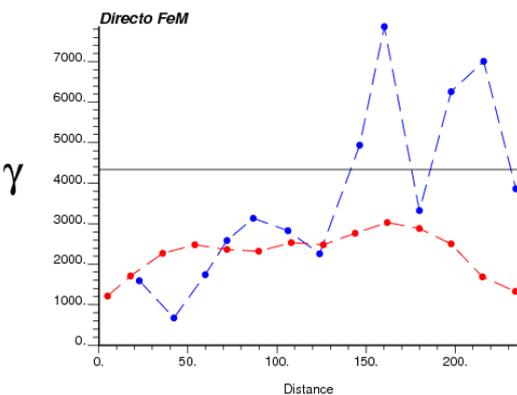


ILUSTRACIÓN 45: VARIOGRAMA DIRECTO, CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO

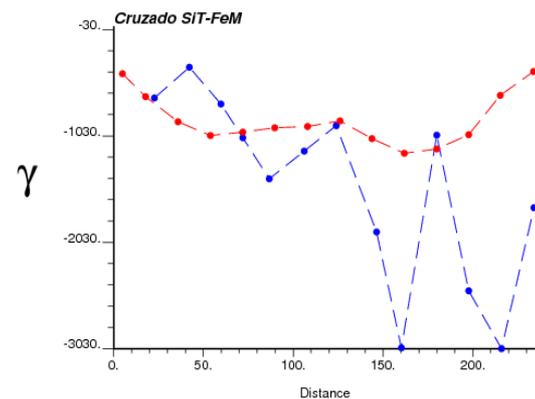


ILUSTRACIÓN 46: VARIOGRAMA CRUZADO, SÍLICE - FIERRO MAGNÉTICO

## 4.1 MODELAMIENTO

---

El modelo de correogionalización que representará la continuidad espacial de cada set de variables debe cumplir ciertas condiciones:

- Debe ajustarse dentro de lo posible al variograma experimental (que si bien es incompleto es el mejor punto de partida para encontrar la función variograma), sobre todo a distancias menores.
- Los variogramas directos deben tener una meseta cercana a la varianza de la respectiva variable, respetando la definición de variograma y la hipótesis de estacionaridad que dice que la varianza existe y que es constante.
- Ya que el variograma es un término de orden cuadrático al igual que la varianza, se exige que todas las matrices de mesetas (varianza – covarianza) sean semi – definidas positivas (valores propios iguales o mayores a cero).
- Debe modelar todos los variogramas, directos y cruzados, con el mismo conjunto de estructuras anidadas.

Bajo este último principio, el variograma modelado se debiese ver como sigue:

$$\Gamma(h) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \cdots & \gamma_{1N}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1}(h) & \cdots & \gamma_{NN}(h) \end{pmatrix} = C_1 * g_1(h) + \cdots + C_S * g_S(h)$$

Donde:

- $\gamma_{ii}$ : variograma directo de la variable i
- $\gamma_{ij}$ : variograma cruzado de la variable i con la variable j.
- $g_k$ : modelo (pepita, esférico, etc.) de un cierto alcance y de meseta unitaria.
- $C_k$ : matriz de varianza – covarianza (mesetas) del modelo k.

A continuación se exhiben los 18 variogramas modelados, 6 por caso, con la representación gráfica y matemática de cada uno. Los variogramas fueron ajustados mediante el programa de MATLAB para ajuste semi – automático de variogramas “vargfit”. El color negro representa a la dirección omnihorizontal y el azul a la dirección vertical.

---

**CASO 1: LEYES DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO**

---

El modelo es una suma de un modelo pepítico y cuatro modelos esféricos, cuyos alcances y mesetas se detallan en la siguiente tabla:

	<b>Alcance horizontal (m)</b>	<b>Alcance vertical (m)</b>
<b>PEPA</b>	0	0
<b>ESF1</b>	100	30
<b>ESF2</b>	150	80
<b>ESF3</b>	170	120
<b>ESF4</b>	170	∞

TABLA 5: ALCANCES VARIOGRAMA, CASO 1

<b>PEPA</b>	<b>Fe</b>	<b>Si</b>	<b>Mag</b>
<b>Fe</b>	55.9632	-53.2933	0.1769
<b>Si</b>	-53.2933	51.5195	-0.1272
<b>Mag</b>	0.1769	-0.1272	0.0028

<b>ESF1</b>	<b>Fe</b>	<b>Si</b>	<b>Mag</b>
<b>Fe</b>	2.2054	-3.6694	0.023
<b>Si</b>	-3.6694	6.1336	-0.0302
<b>Mag</b>	0.023	-0.0302	0.0026

<b>ESF2</b>	<b>Fe</b>	<b>Si</b>	<b>Mag</b>
<b>Fe</b>	95.9799	-71.9464	0.1198
<b>Si</b>	-71.9464	53.931	-0.0898
<b>Mag</b>	0.1198	-0.0898	0.0002

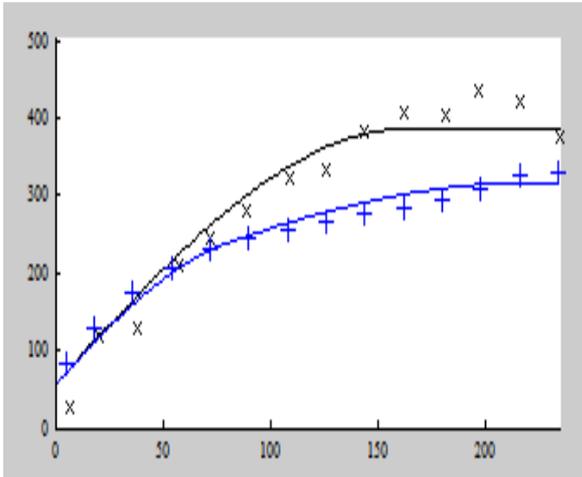
  

<b>ESF3</b>	<b>Fe</b>	<b>Si</b>	<b>Mag</b>
<b>Fe</b>	162.1978	-130.3633	0.4595
<b>Si</b>	-130.3633	117.1947	-0.3355
<b>Mag</b>	0.4595	-0.3355	0.0026

<b>ESF4</b>	<b>Fe</b>	<b>Si</b>	<b>Mag</b>
<b>Fe</b>	70.8226	-57.3793	0.0081
<b>Si</b>	-57.3793	46.585	-0.0081
<b>Mag</b>	0.0081	-0.0081	0.0022

TABLA 6: MESETAS VARIOGRAMA, CASO 1



ILUSTRACION 47: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, LEY DE FIERRO

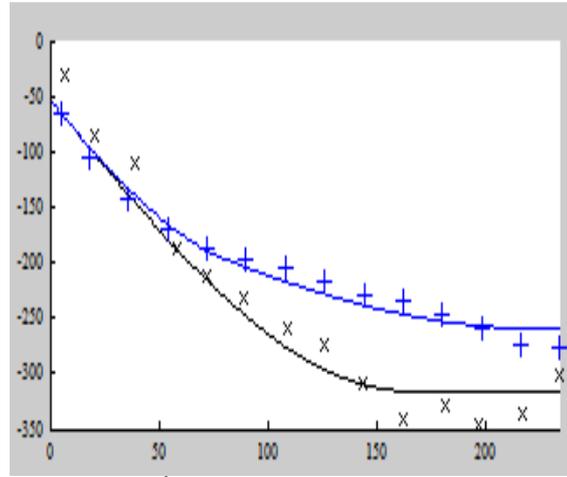


ILUSTRACIÓN 48: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

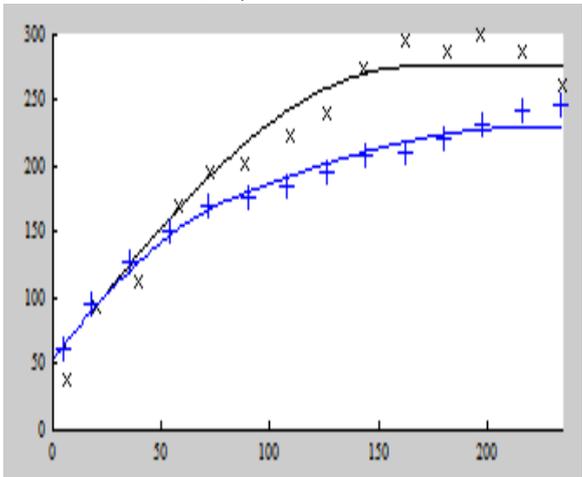


ILUSTRACIÓN 49: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, LEY DE SÍLICE

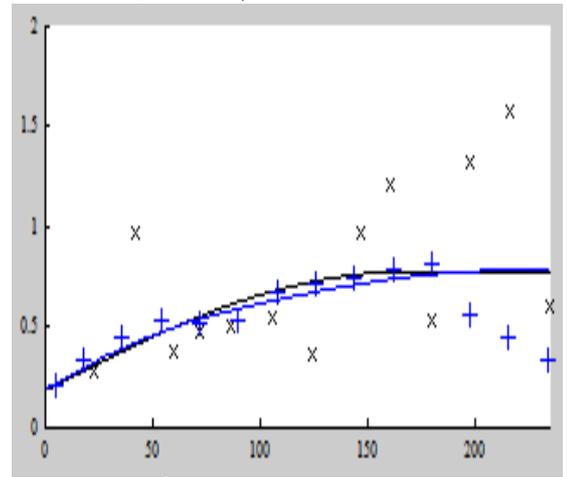
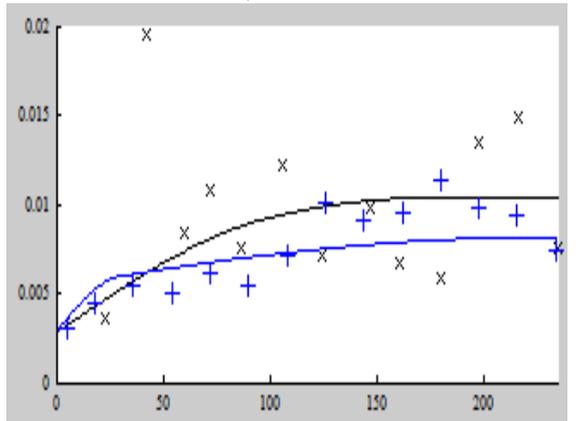


ILUSTRACIÓN 50: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO - MAGNETISMO



ILUSTRACION 51: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, MAGNETISMO

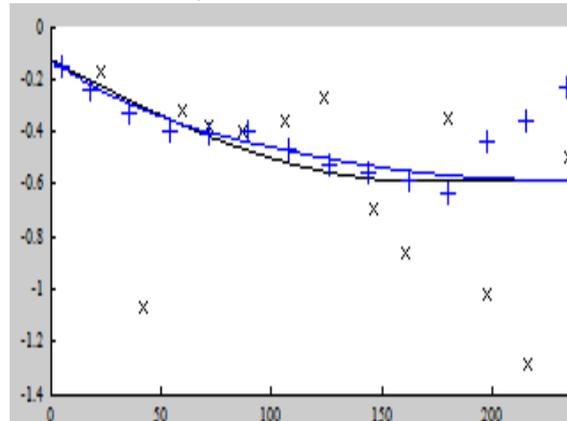


ILUSTRACIÓN 52: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, SÍLICE - MAGNETISMO

---

**CASO 2: CONTENIDOS DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO**

---

Una vez más el variograma modelado resulta ser la combinación lineal de 4 modelos esféricos y uno pepítico.

<b>Modelo</b>	<b>Alcance H (m)</b>	<b>Alcance V (m)</b>
<b>PEPA</b>	0	0
<b>ESF1</b>	100	40
<b>ESF2</b>	150	80
<b>ESF3</b>	170	220
<b>ESF4</b>	170	∞

TABLA 7: ALCANCES VARIOGRAMA, CASO 2

<b>PEPA</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>Mag</b>
<b>FeT</b>	1294.33	-682.73	0.850
<b>SiT</b>	-682.73	369.08	-0.309
<b>Mag</b>	0.850	-0.309	0.003
<b>ESF1</b>			
<b>ESF1</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>Mag</b>
<b>FeT</b>	73.56	-87.49	0.235
<b>SiT</b>	-87.49	124.07	-0.070
<b>Mag</b>	0.235	-0.070	0.003
<b>ESF2</b>			
<b>ESF2</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>Mag</b>
<b>FeT</b>	2459.44	-985.59	0.832
<b>SiT</b>	-985.59	395.96	-0.333
<b>Mag</b>	0.832	-0.333	0.001
<b>ESF3</b>			
<b>ESF3</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>Mag</b>
<b>FeT</b>	2995.09	-1239.11	2.033
<b>SiT</b>	-1239.11	552.93	-0.758
<b>Mag</b>	2.033	-0.758	0.002
<b>ESF4</b>			
<b>ESF4</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>Mag</b>
<b>FeT</b>	1393.14	-555.23	0.093
<b>SiT</b>	-555.23	223.34	-0.088
<b>Mag</b>	0.093	-0.088	0.002

TABLA 8: MESETAS VARIOGRAMA, CASO 2

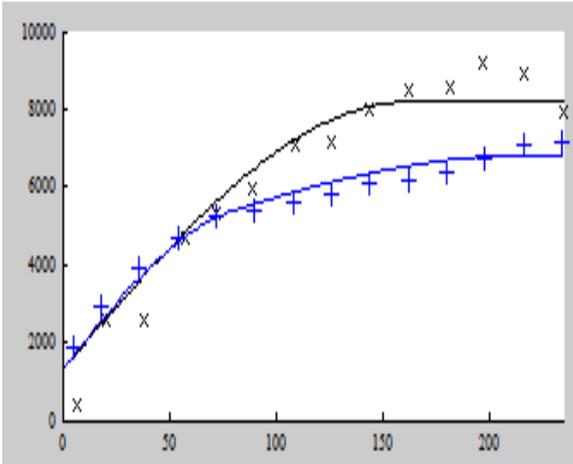


ILUSTRACIÓN 53: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, LEY DE FIERRO

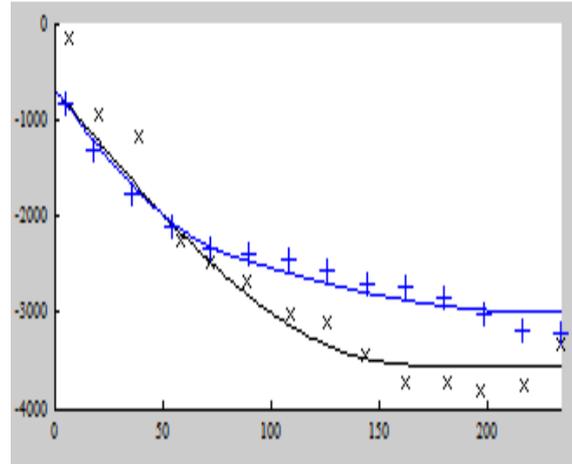


ILUSTRACIÓN 54: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

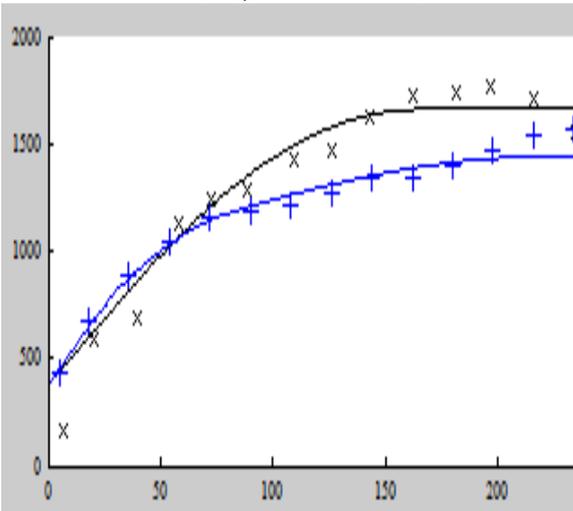


ILUSTRACIÓN 55: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, LEY DE SÍLICE

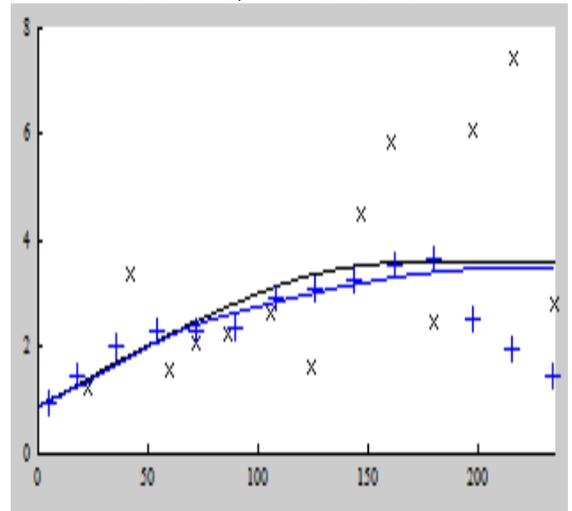


ILUSTRACIÓN 56: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO - MAGNETISMO

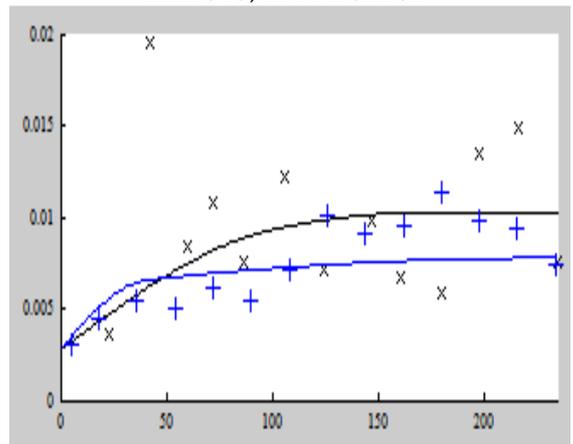


ILUSTRACIÓN 57: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, MAGNETISMO

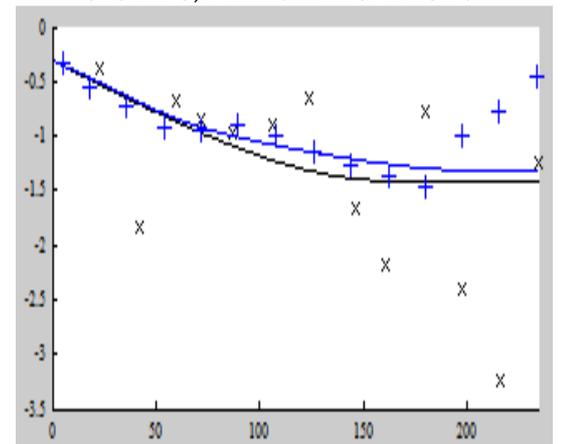


ILUSTRACIÓN 58: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, SÍLICE - MAGNETISMO

**CASO 3: CONTENIDOS DE FIERRO, SÍLICE Y FIERRO MAGNÉTICO**

Al igual que los dos casos anteriores, el variograma modelado es la suma de un modelo pepítico y cuatro modelos esféricos, detallados a continuación:

<b>Modelo</b>	<b>Alcance H (m)</b>	<b>Alcance V (m)</b>
<b>PEPA</b>	0	0
<b>ESF1</b>	100	40
<b>ESF2</b>	150	80
<b>ESF3</b>	170	240
<b>ESF4</b>	170	$\infty$

TABLA 9: ALCANCES VARIOGRAMA, CASO 3

<b>PEPA</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>FeM</b>
<b>FeT</b>	1332.86	-662.26	941.43
<b>SiT</b>	-662.26	360.77	-386.10
<b>FeM</b>	941.43	-386.10	875.28
<b>ESF1</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>FeM</b>
<b>FeT</b>	140.60	-134.08	74.58
<b>SiT</b>	-134.08	127.95	-71.12
<b>FeM</b>	74.58	-71.12	40.56
<b>ESF2</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>FeM</b>
<b>FeT</b>	2394.18	-1051.53	1554.81
<b>SiT</b>	-1051.53	470.59	-736.65
<b>FeM</b>	1554.81	-736.65	1340.11
<b>ESF3</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>FeM</b>
<b>FeT</b>	2977.24	-1121.60	253.20
<b>SiT</b>	-1121.60	435.66	-16.58
<b>FeM</b>	253.20	-16.58	494.95
<b>ESF4</b>	<b>FeT</b>	<b>SiT</b>	<b>FeM</b>
<b>FeT</b>	1365.16	-581.29	1384.90
<b>SiT</b>	-581.29	266.68	-615.97
<b>FeM</b>	1384.90	-615.97	1440.96

TABLA 10: MESETAS VARIOGRAMA, CASO 3

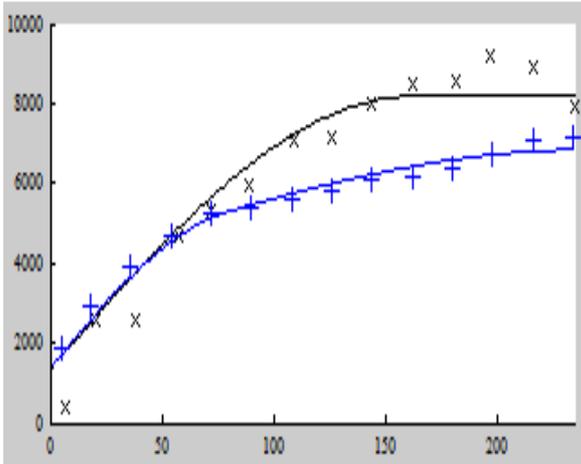


ILUSTRACIÓN 59: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, CONTENIDO DE FIERRO

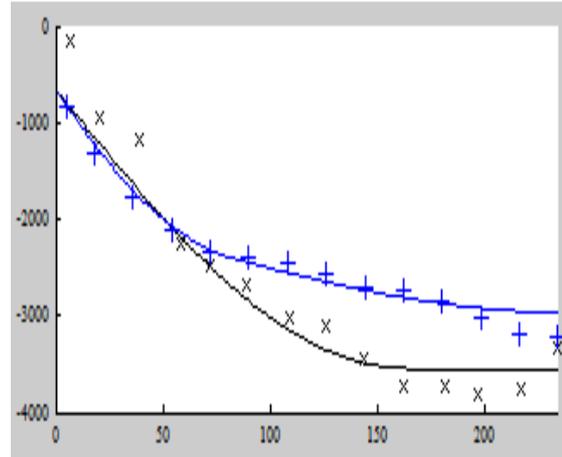


ILUSTRACIÓN 60: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO - SÍLICE

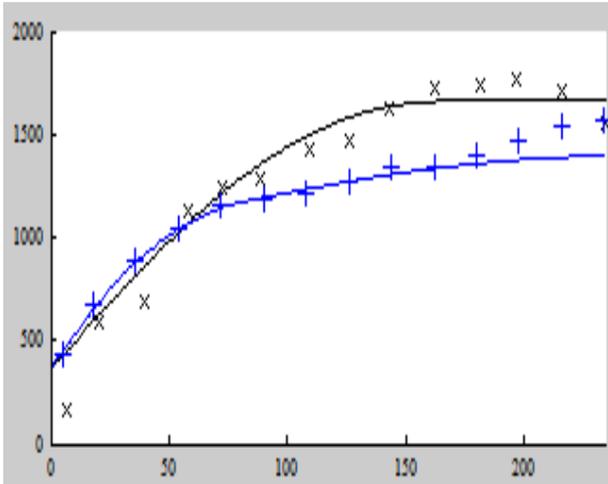


ILUSTRACIÓN 61: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, CONTENIDO DE SÍLICE

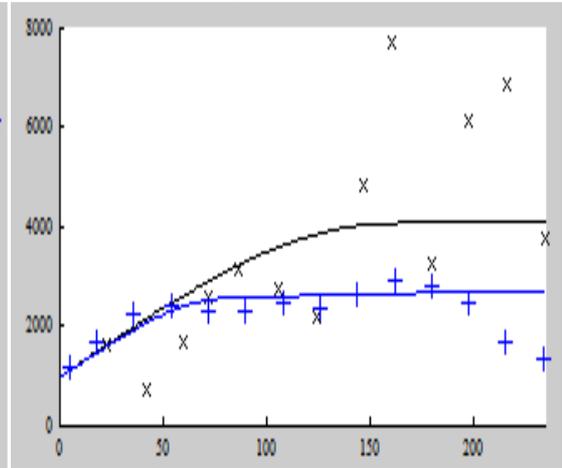


ILUSTRACIÓN 62: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, FIERRO TOTAL - MAGNÉTICO

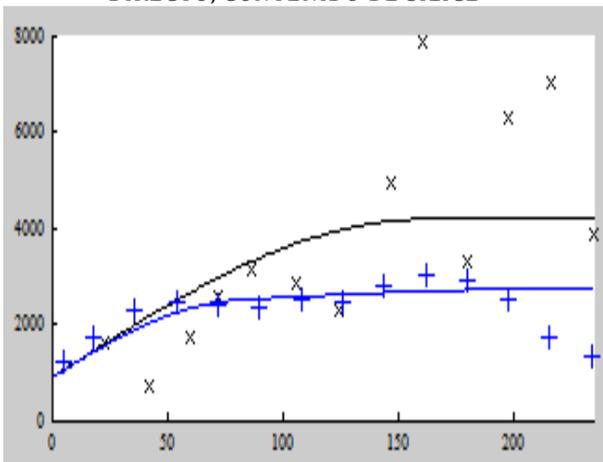


ILUSTRACIÓN 63: VARIOGRAMA MODELADO DIRECTO, CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO

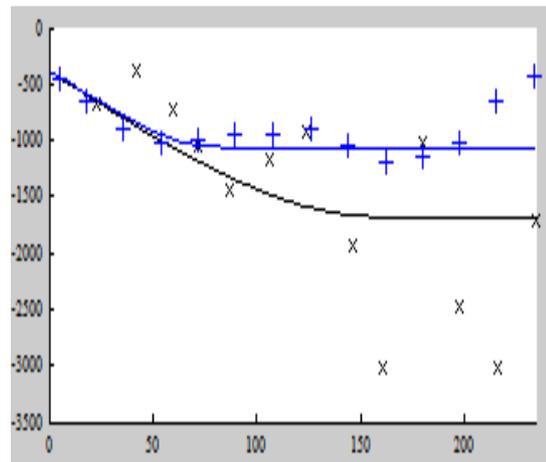


ILUSTRACIÓN 64: VARIOGRAMA MODELADO CRUZADO, SÍLICE - FIERRO MAGNÉTICO

## 5. VALIDACIÓN CON JACK-KNIFE

---

La validación mediante jack-knife es una técnica que comprueba la robustez de la combinación entre el modelo variográfico construido y la vecindad de kriging que se va a escoger. Se utiliza además para comparar distintas vecindades.

Esta técnica de validación comprende dos pasos. Primero, se deben separar los datos en dos grandes partes de una manera equitativa (cantidad de muestras e información similares). Luego, se utilizan los datos de una mitad para estimar las variables en los sitios (coordenadas) de la otra mitad mediante co-kriging y vice-versa.

Para evaluar la calidad de la estimación, se utilizan los siguientes dos gráficos:

- Un scatter plot entre la variable medida y la estimada.
  - El promedio del error debiese ser cercano a 0.
  - La pendiente de la regresión lineal de la nube debiese ser cercana a 1 (valor real = valor estimado)
  - La varianza del error estandarizado debiese ser cercana a 1
- Histograma del error estandarizado.
  - Se pide que la mayoría de los datos (sobre 95%) sean “robustos”, es decir, que estén estimados con un error estandarizado pequeño (menor a 2,5), lo cual se ve dentro de las barras naranjas en los gráficos.

Si bien es típico utilizar validaciones cruzadas (en las cuales solo se “esconde” un dato en vez de la mitad de los datos y luego se reposiciona el dato escondido), el jack-knife es una técnica más potente cuando arroja resultados coherentes pues quiere decir que la estimación sigue siendo robusta aun cuando se sustrae una cantidad importante de la información original.

Para enfatizar la importancia de estimar variables aditivas, en los primeros dos casos se calcula el contenido de fierro magnético (y total en el caso 1) a posteriori multiplicando las variables estimadas y se compara con el contenido de fierro magnético (o total) real. Se construyen los mismos gráficos mencionados anteriormente. La idea es mostrar que se pierde precisión en la estimación al estimar variables no aditivas (ley, magnetismo) comparado con variables aditivas (contenido).

A continuación se presentan los gráficos mencionados anteriormente para los tres casos y para las variables de fierro y magnetismo (o fierro magnético), además de un cuadro resumen al final.

La partición de los datos en dos no es hecha al azar, si no que con el fin de que ambas partes queden con la misma información sobre magnetismo, ya que es la variable de la cual se tiene menos información. Si se estimara una mitad de los datos con la otra mitad, y resultase que la mitad que se usa como dato no contiene información sobre magnetismo, la validación por jack-knife no tendría ningún sentido.

Es por esto que la base de datos se separa en dos según los sondeos que tienen o no información con magnetismo. Así cada set de datos creado tendrá 9 sondeos que contienen información sobre la variable magnetismo y 26 sondeos que no la contienen. Así, se presenta la siguiente gráfica en planta que ilustra la separación de la base de datos en dos:

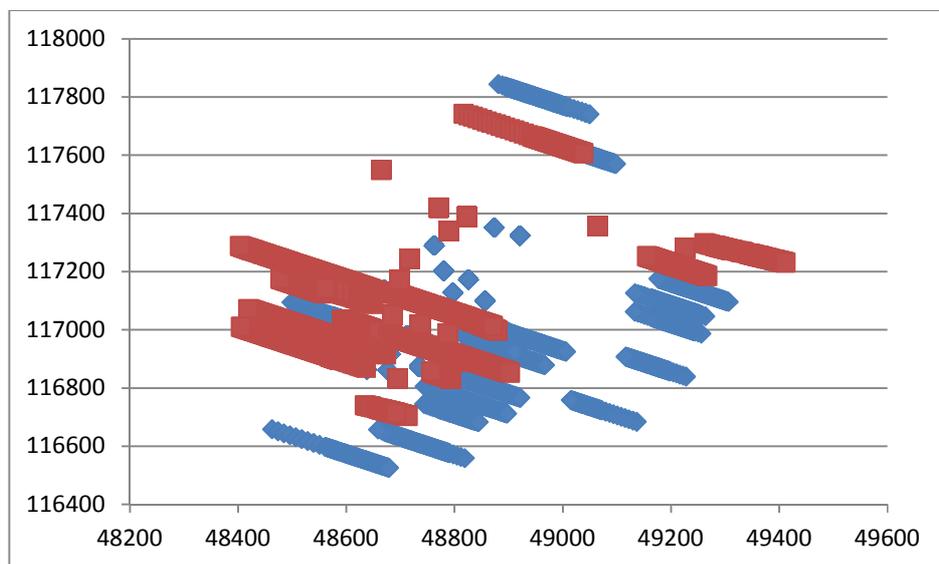


ILUSTRACIÓN 65: MAPA XY CON SELECCIÓN DE DATOS PARA JACK-KNIFE

Lo que se muestra en los gráficos que siguen son la validación de los datos en rojo estimados con los datos en azul.

Se validará además un modelo estimado con co-kriging ordinario tradicional (sin relacionar las medias de las variables) para las variables del caso 3 y se comparará con el co-kriging modificado para el caso 3 para verificar si ligar las medias proporciona una mayor precisión de estimación.

CASO 1: LEYES DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

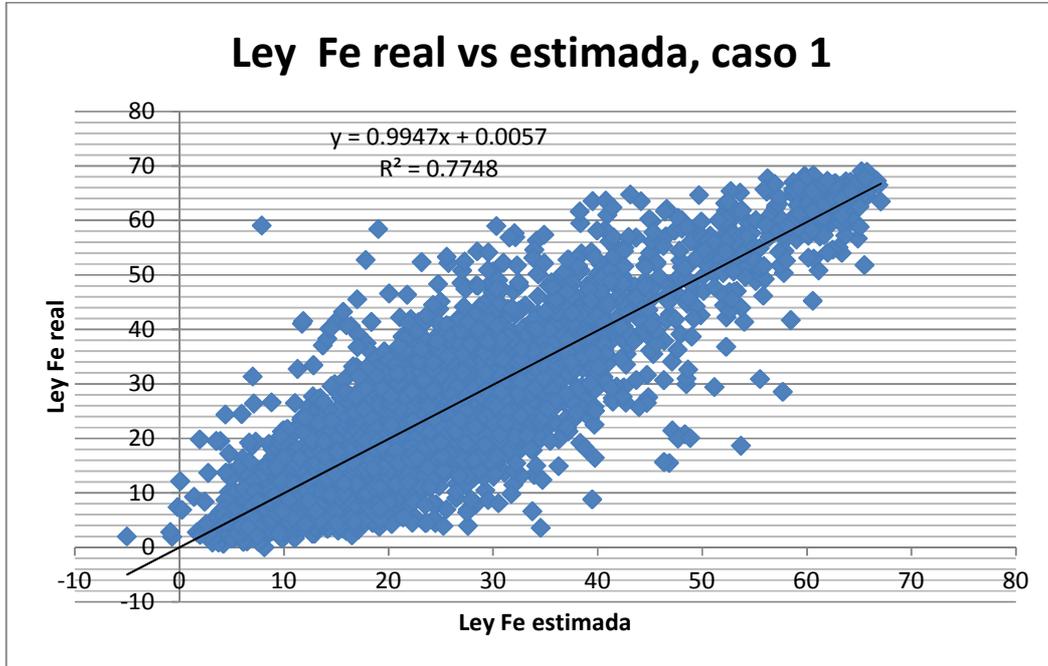


ILUSTRACIÓN 66: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO, CASO 1

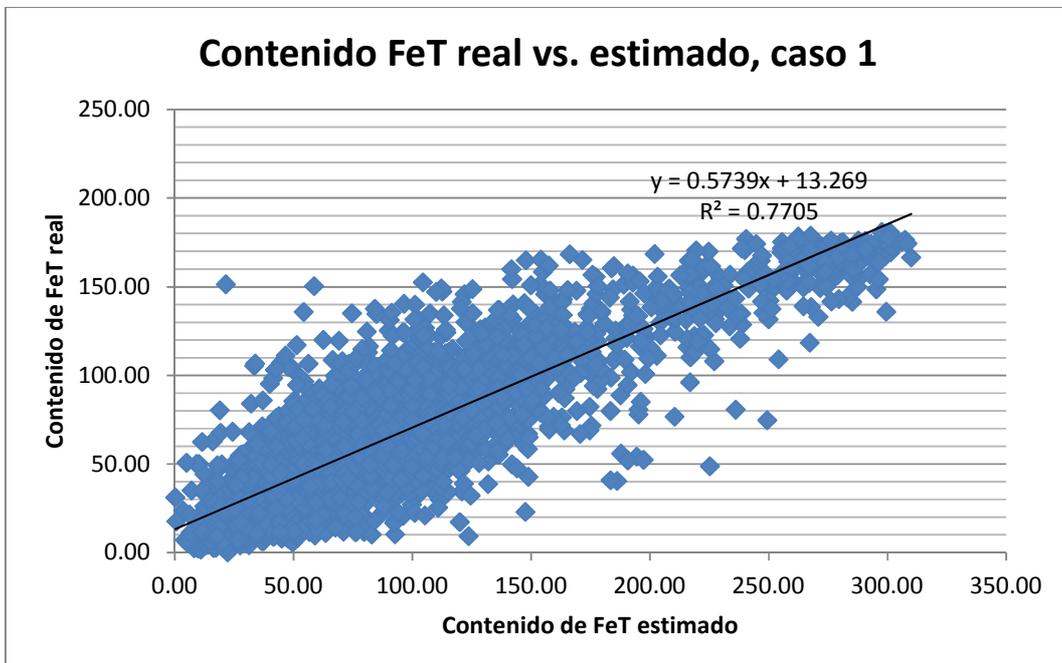


ILUSTRACIÓN 67: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, CONTENIDO FIERRO, CASO 1

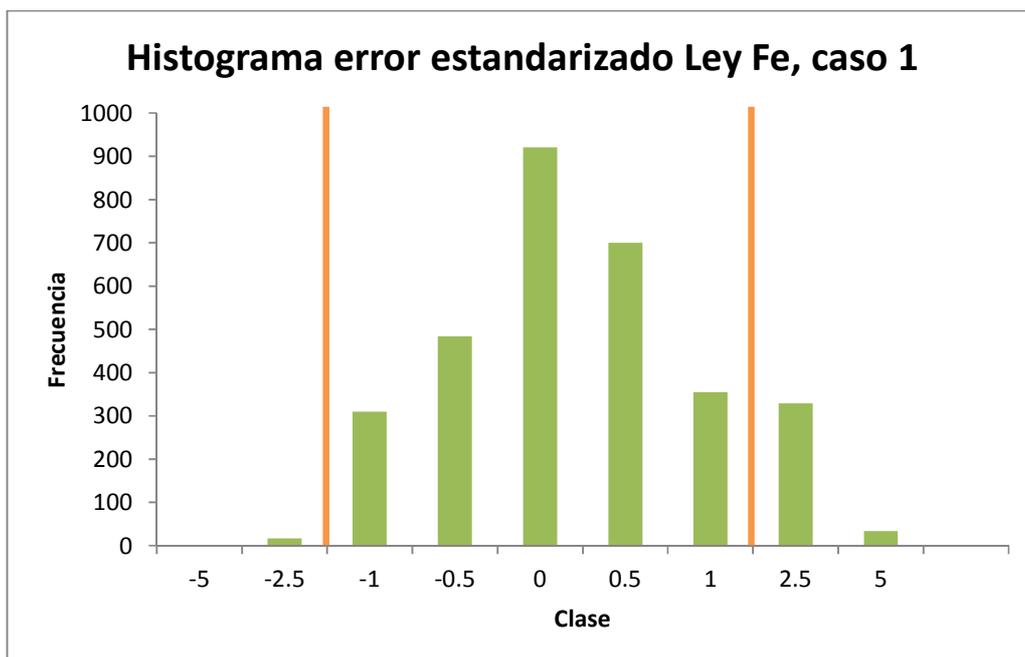


ILUSTRACIÓN 68: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO, CASO 1

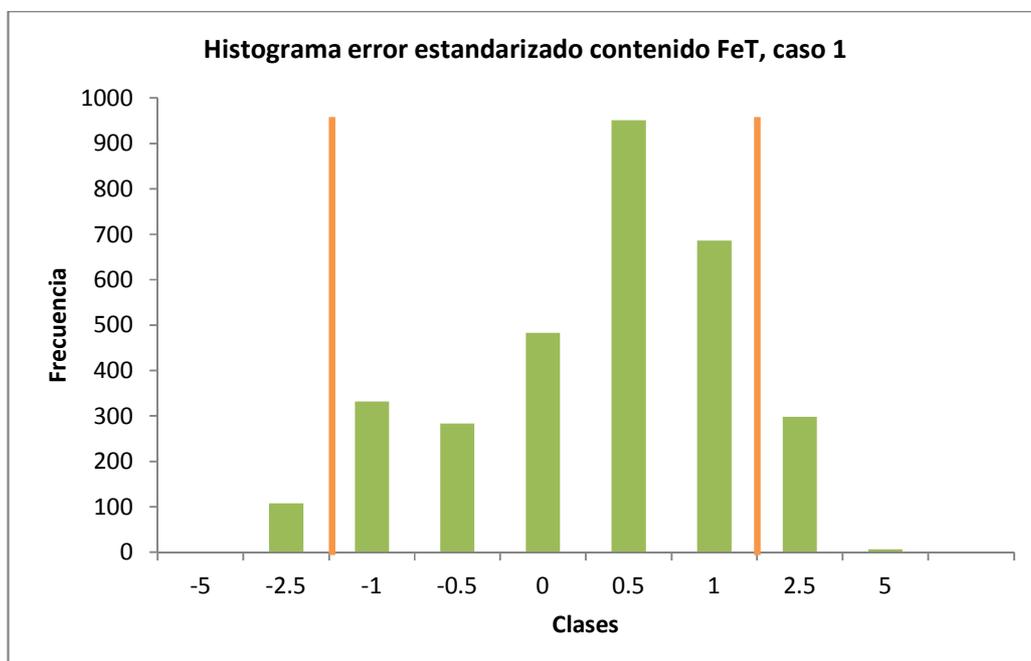


ILUSTRACIÓN 69: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, CONTENIDO FIERRO, CASO 1

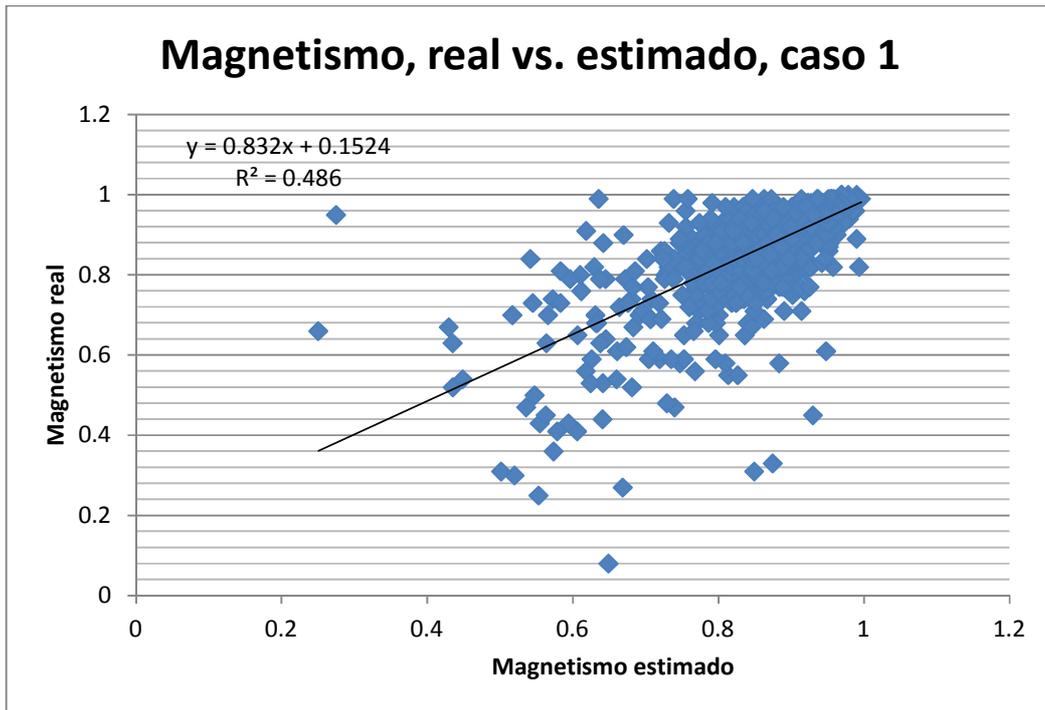


ILUSTRACIÓN 70: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, MAGNETISMO, CASO 1

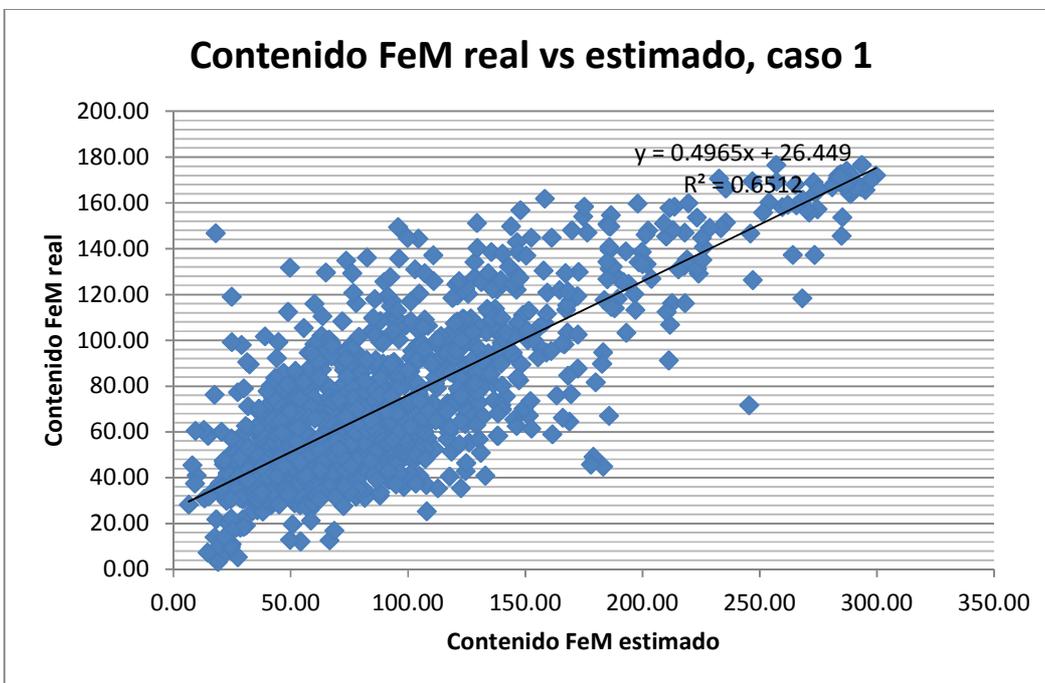


ILUSTRACIÓN 71: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, CONTENIDO FIERRO MAGNETICO, CASO 1

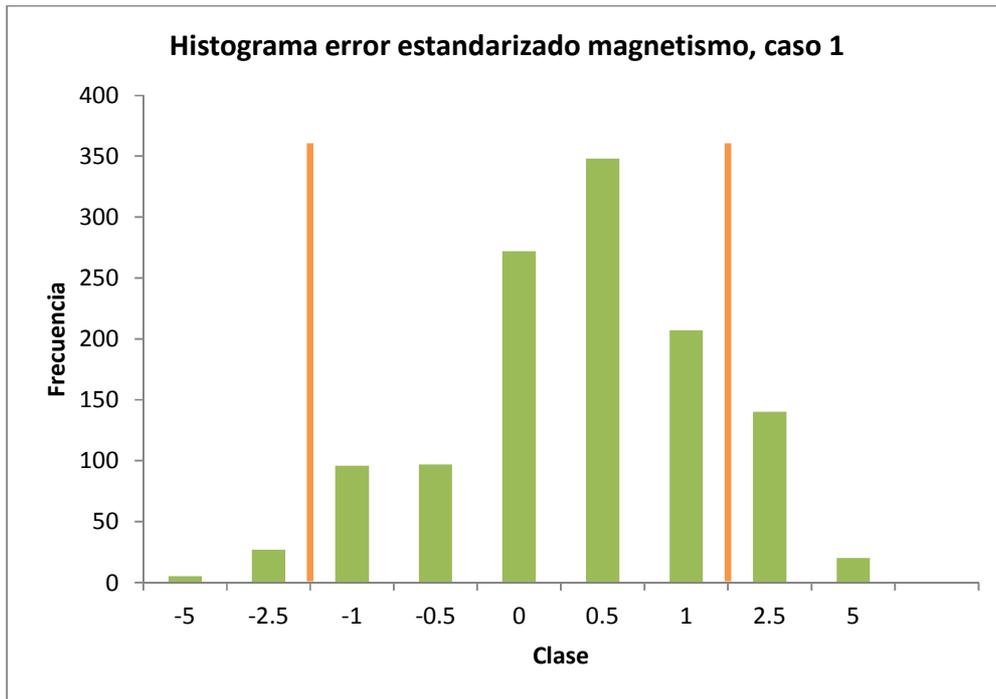


ILUSTRACIÓN 72: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, MAGNETISMO, CASO 1

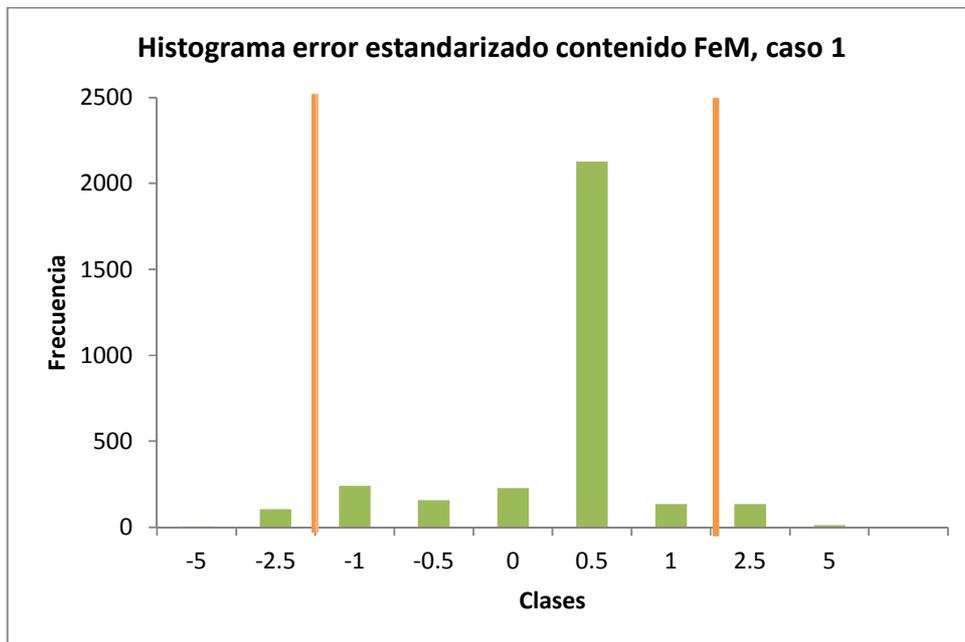


ILUSTRACIÓN 73: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, CONTENIDO FIERRO MAGNETICO, CASO 1

---

CASO 2: CONTENIDOS DE FIERRO Y SÍLICE, MAGNETISMO

---

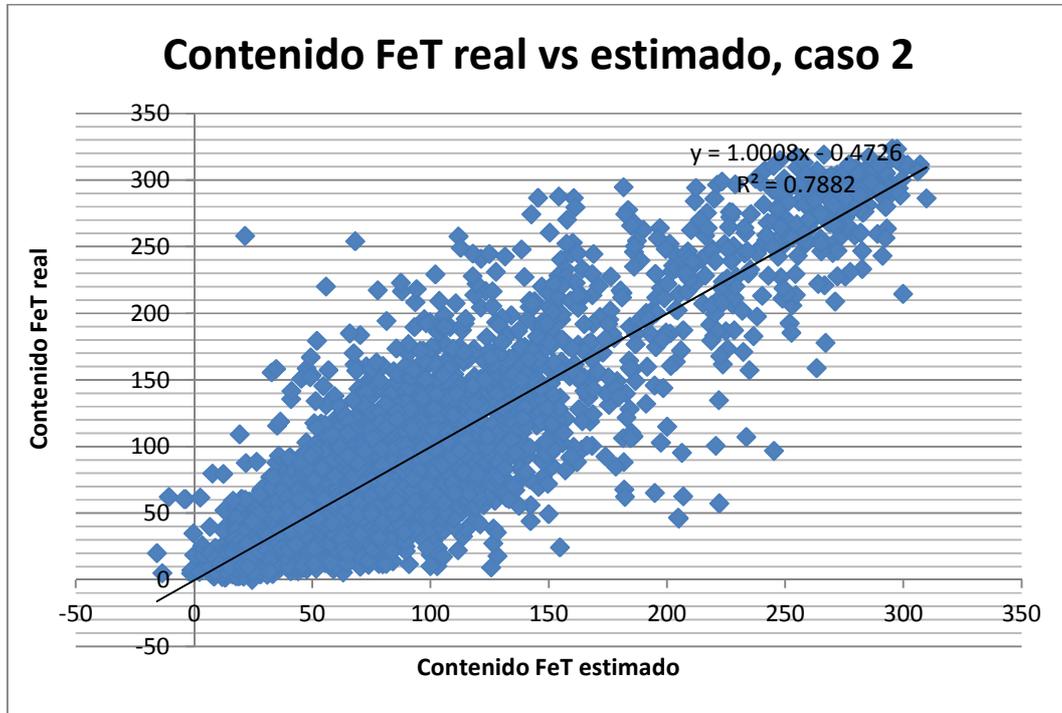


ILUSTRACIÓN 74: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO, CASO 2

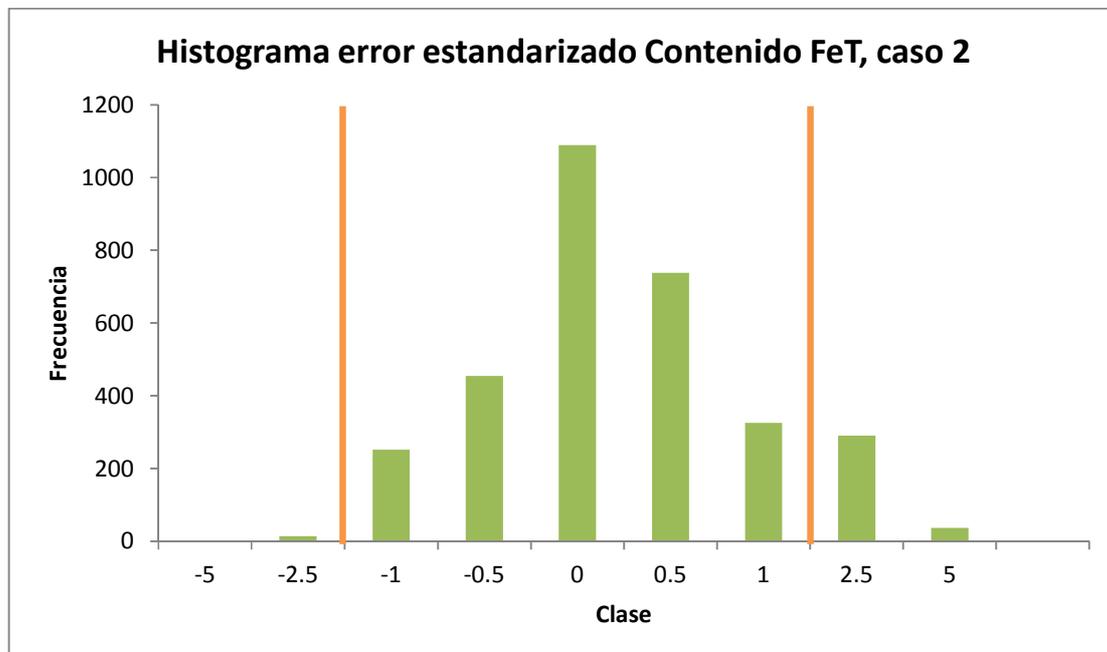


ILUSTRACIÓN 75: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO, CASO 2

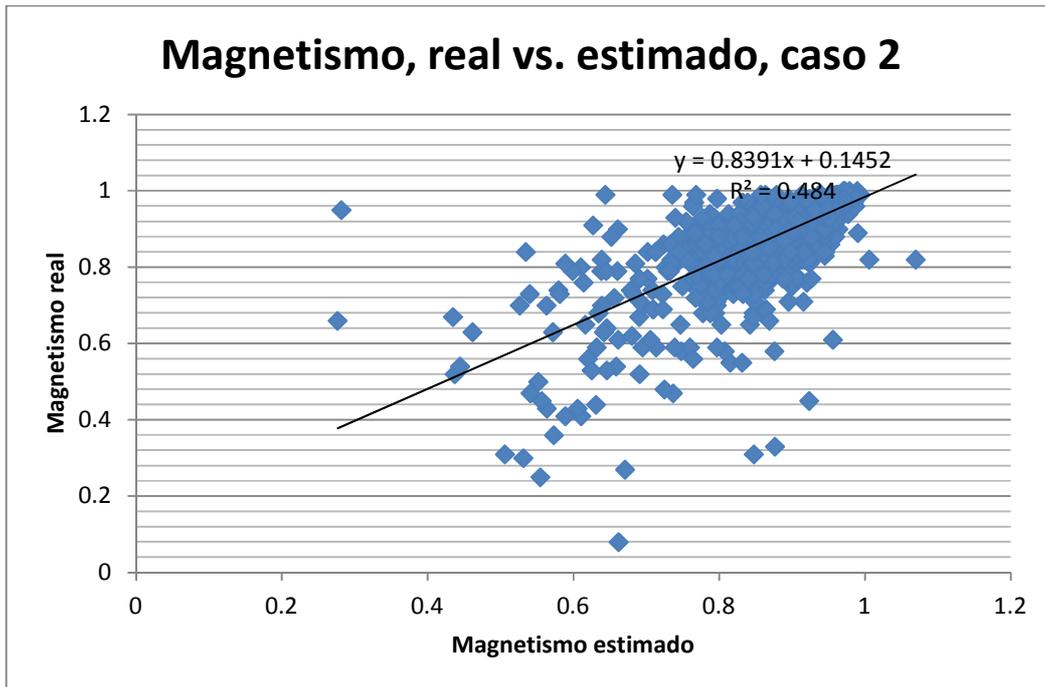


ILUSTRACIÓN 76: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, MAGNETISMO, CASO 2

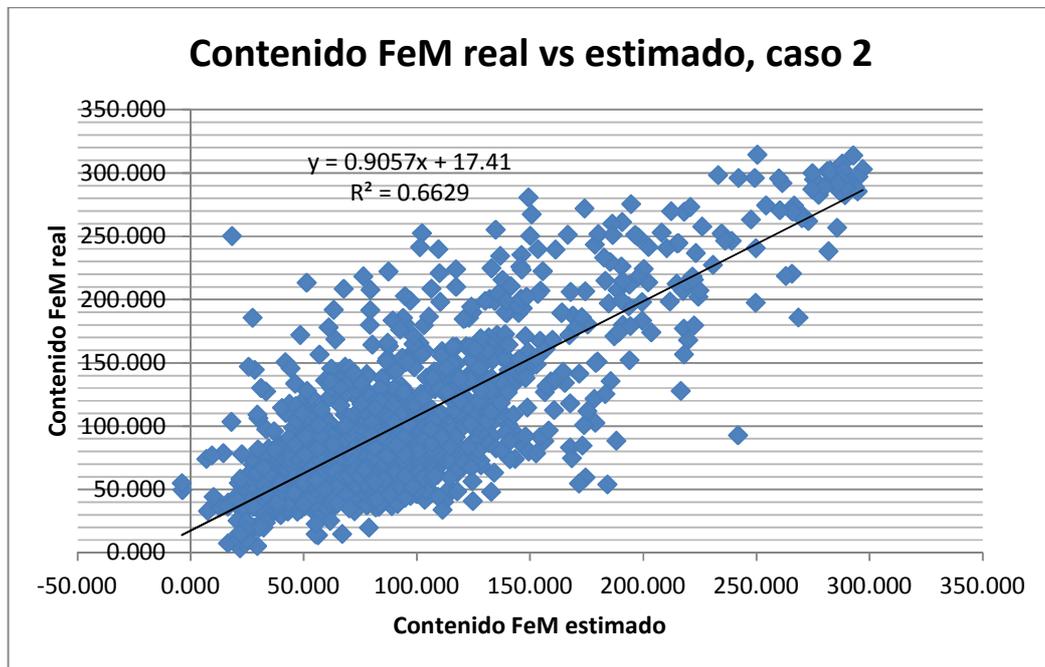


ILUSTRACIÓN 77: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, CONTENIDO FIERRO MAGNETICO, CASO 2

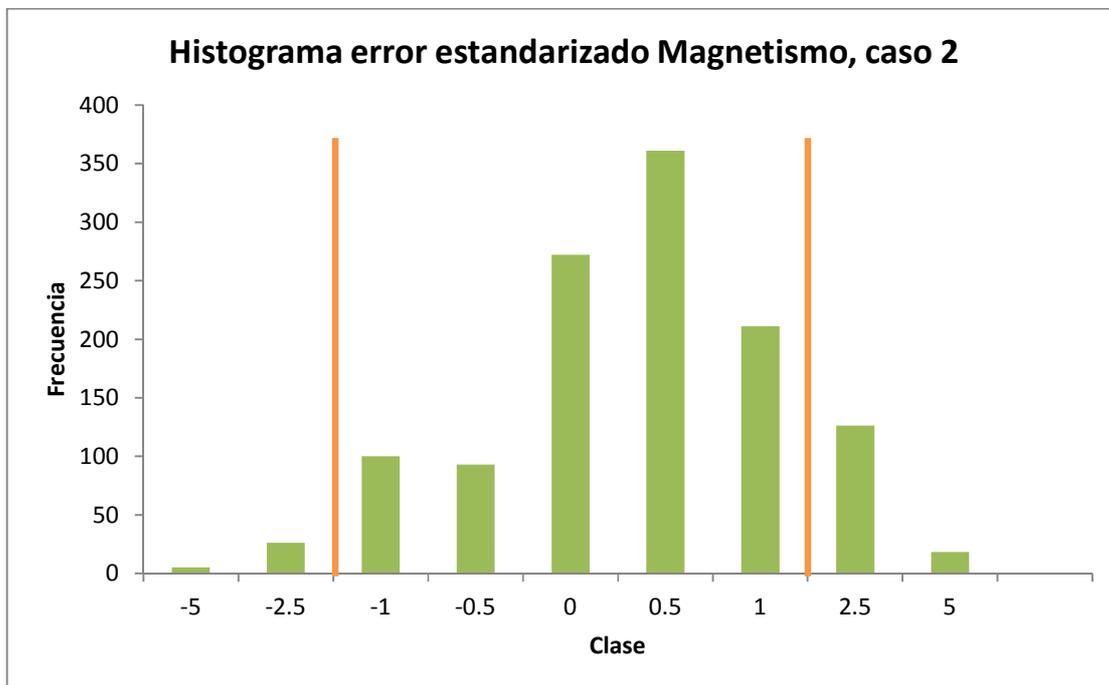


ILUSTRACIÓN 78: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, MAGNETISMO, CASO 2

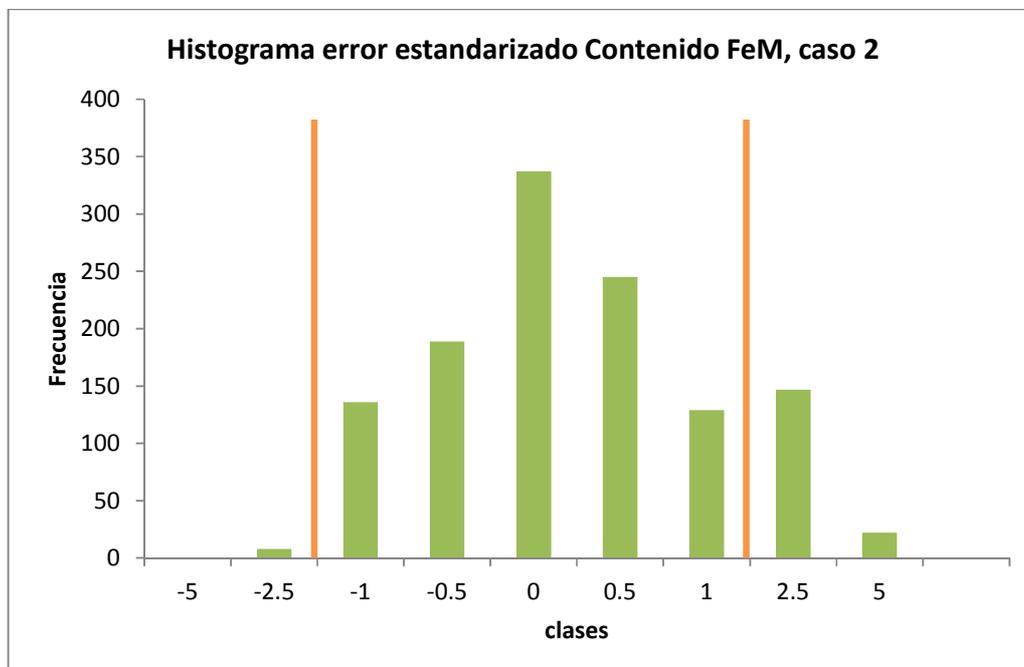


ILUSTRACIÓN 79: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, CONTENIDO FIERRO MAGNETICO, CASO 2

CASO 3: CONTENIDOS DE FIERRO, SÍLICE Y FIERRO MAGNÉTICO

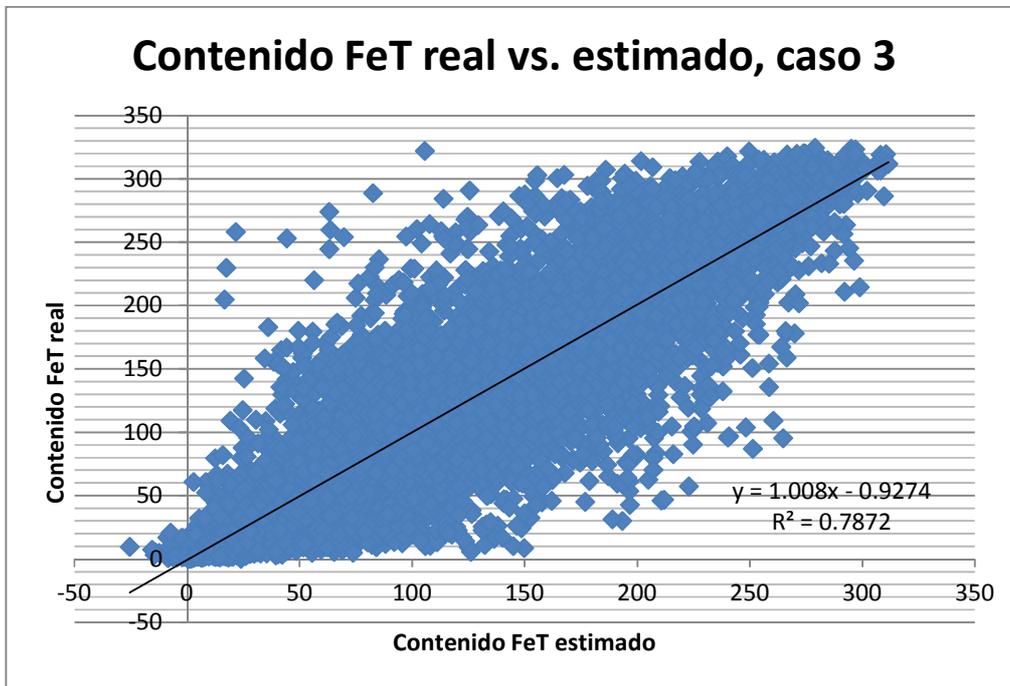


ILUSTRACIÓN 80: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO TOTAL, CASO 3

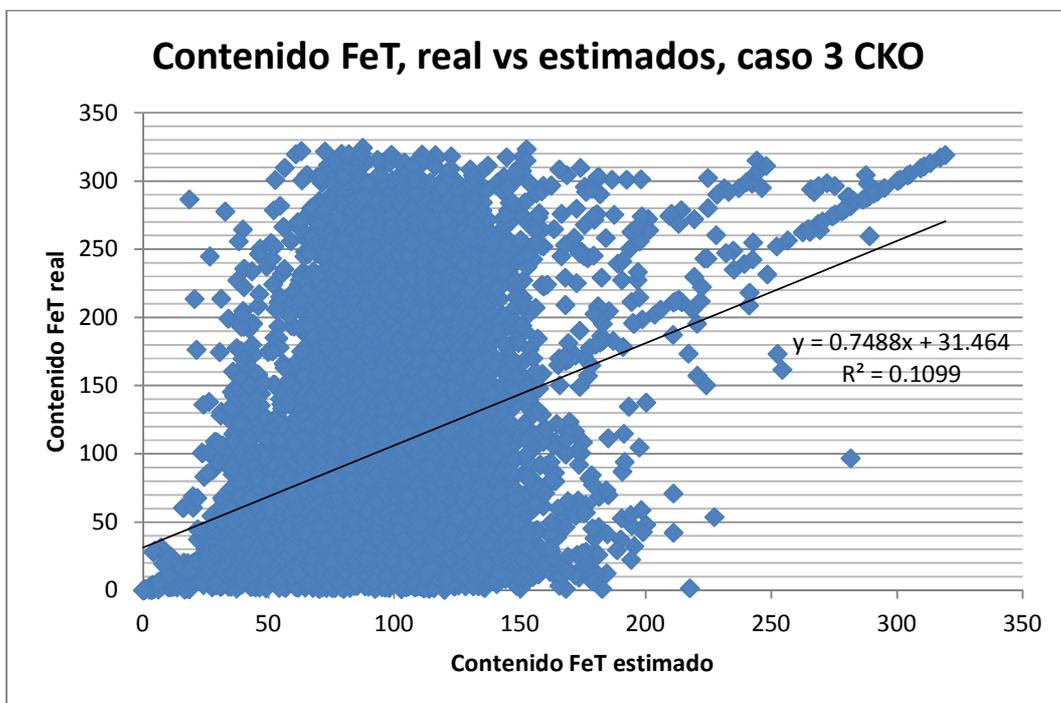


ILUSTRACIÓN 81: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO TOTAL, CASO 3 CON CKO

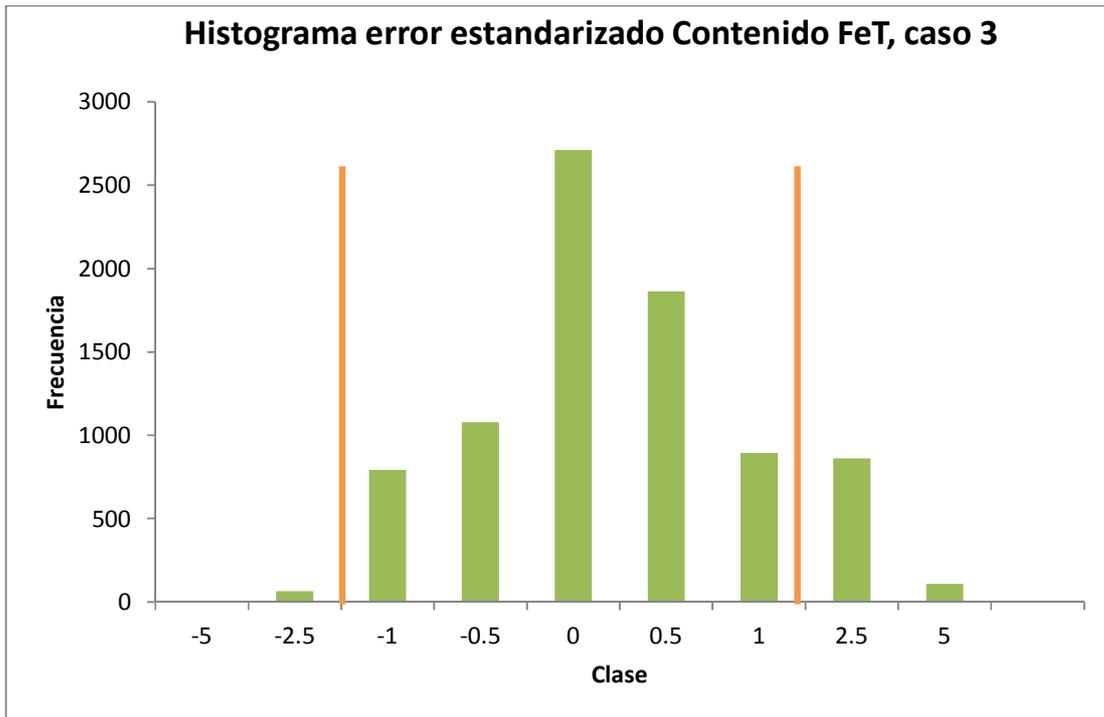


ILUSTRACIÓN 82: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO TOTAL, CASO 3

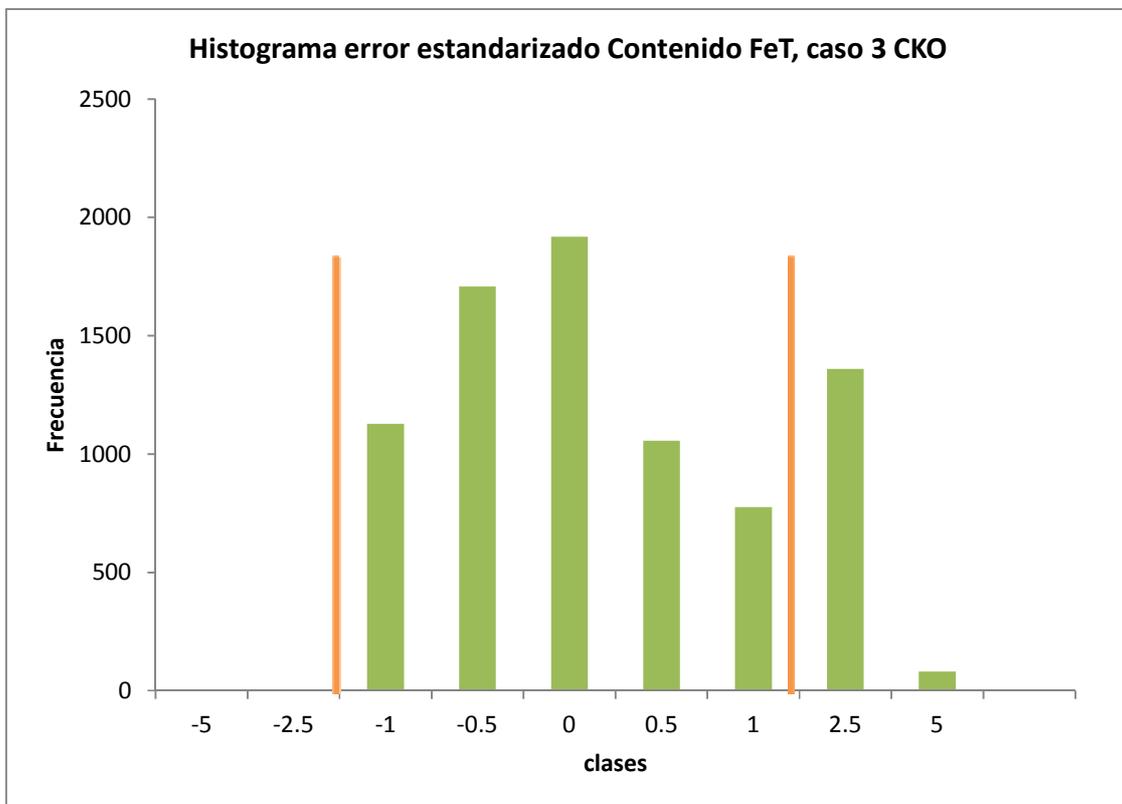


ILUSTRACIÓN 83: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO TOTAL, CASO 3 CON CKO

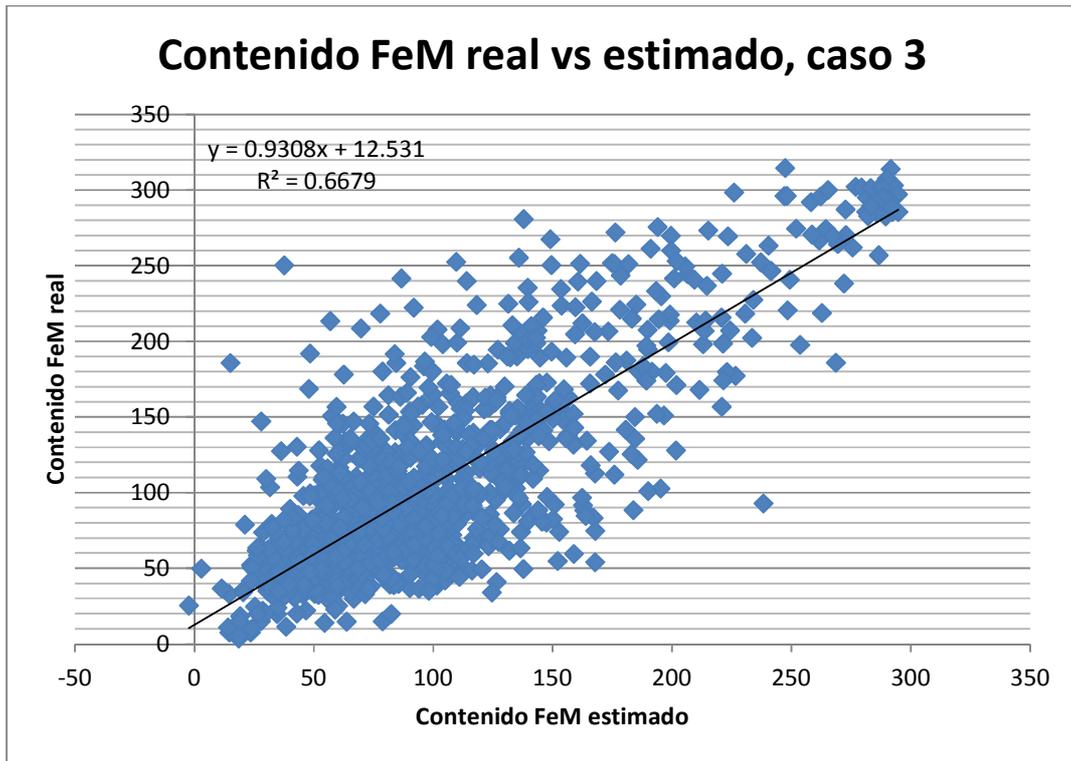


ILUSTRACIÓN 84: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO MAGNETICO, CASO 3

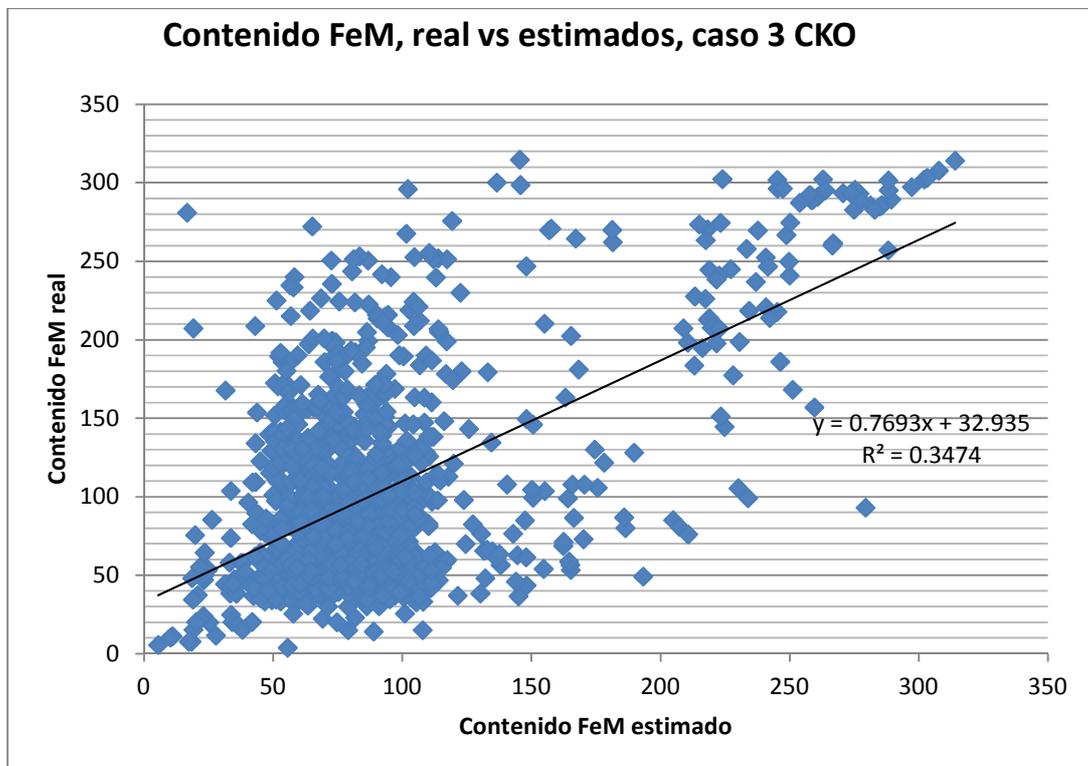


ILUSTRACIÓN 85: SCATTER PLOT ESTIMADOS VS. DATOS, FIERRO MAGNETICO, CASO 3 CON CKO

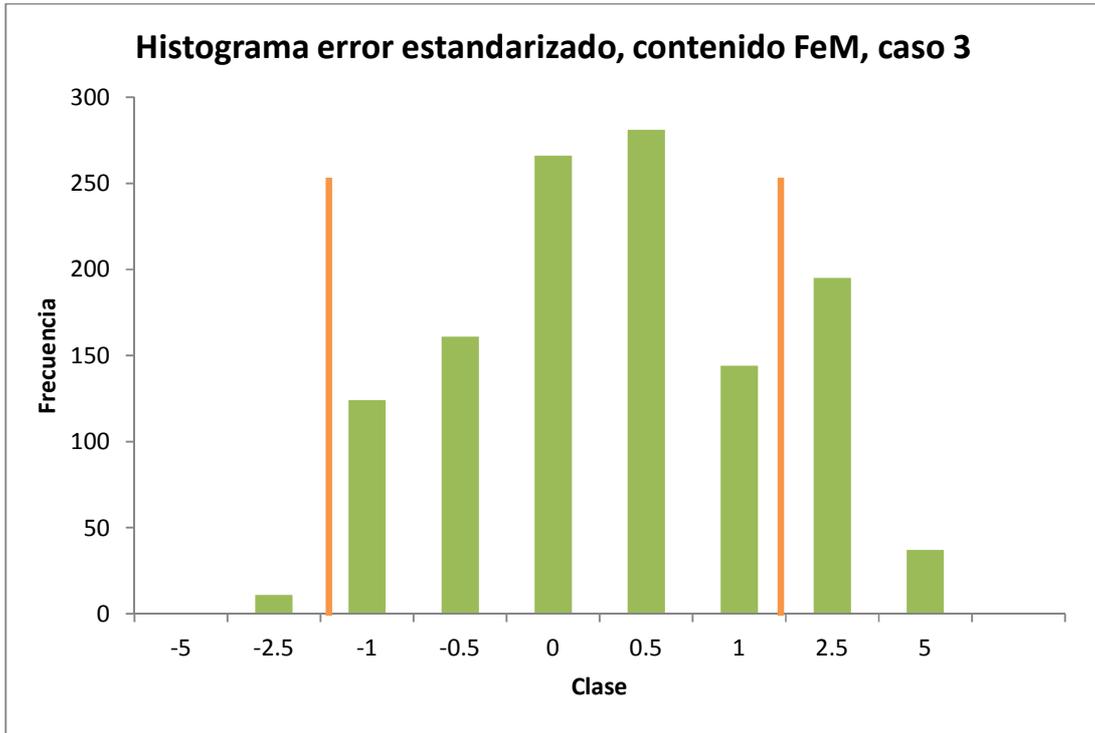


ILUSTRACIÓN 86: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO MAGNETICO, CASO 3

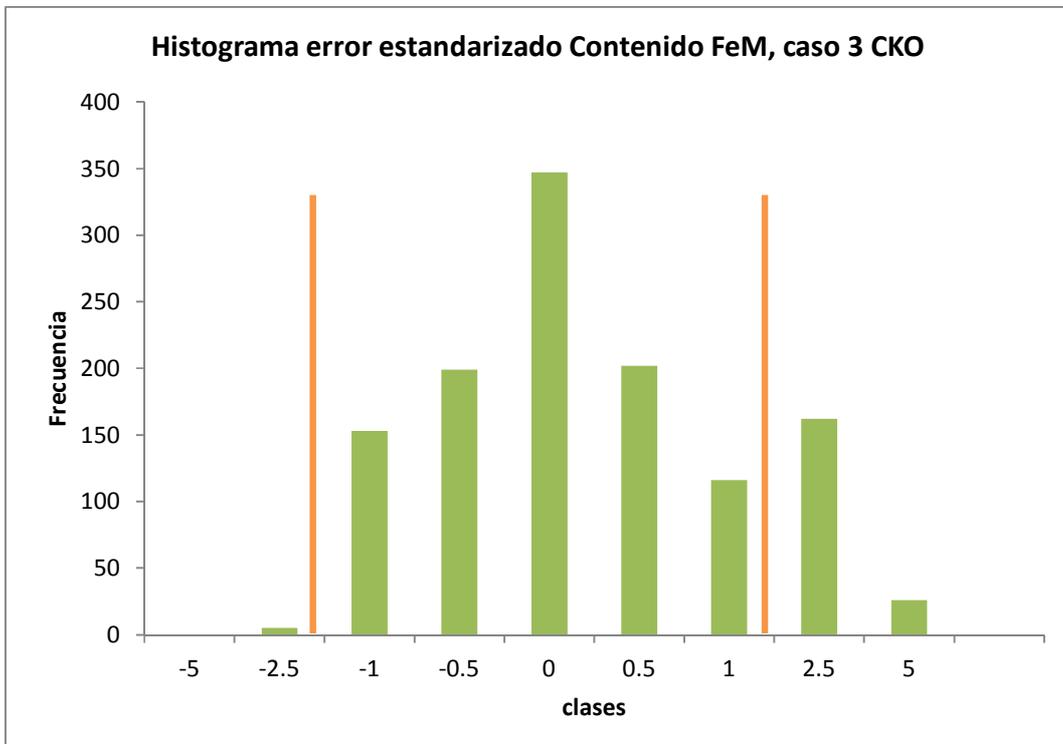


ILUSTRACIÓN 87: HISTOGRAMA ERROR ESTANDARIZADO, FIERRO MAGNETICO, CASO 3 CON CKO

## 5.2 ANÁLISIS

Con el fin de ordenar y mejor visualizar las estadísticas de importancia de las validaciones por jack-knife, se presenta el siguiente cuadro resumen:

<b>Datos robustos</b>				
	caso 1	caso 2	caso 3	caso 3 KO
<b>Ley Fe</b>	98.35%	N/A	N/A	N/A
<b>Magnetismo</b>	95.55%	95.80%	N/A	N/A
<b>Contenido FeT</b>	86.91%	98.38%	97.90%	82.03%
<b>Contenido FeM</b>	82.74%	85.41%	96.06%	84.05%
<b>Pendiente de la recta</b>				
	caso 1	caso 2	caso 3	caso 3 KO
<b>Ley Fe</b>	0.995	N/A	N/A	N/A
<b>Magnetismo</b>	0.832	0.839	N/A	N/A
<b>Contenido FeT</b>	0.574	1.001	1.008	0.749
<b>contenido FeM</b>	0.497	0.906	0.931	0.769
<b>Intercepto de la recta</b>				
	caso 1	caso 2	caso 3	caso 3 KO
<b>Ley Fe</b>	0.006	N/A	N/A	N/A
<b>Magnetismo</b>	0.152	0.145	N/A	N/A
<b>Contenido FeT</b>	13.269	-0.473	0.927	31.464
<b>contenido FeM</b>	26.449	17.411	12.531	32.935
<b>Coefficiente de correlación del ajuste</b>				
	caso 1	caso 2	caso 3	caso 3 KO
<b>Ley Fe</b>	0.775	N/A	N/A	N/A
<b>Magnetismo</b>	0.486	0.484	N/A	N/A
<b>Contenido FeT</b>	0.771	0.788	0.787	0.101
<b>Contenido FeM</b>	0.651	0.663	0.668	0.347

TABLA 11: CUADRO RESUMEN, VALIDACION POR JACK-KNIFE

En un reporte de recursos, lo que se suma como finos es contenido (ley\*densidad). Se ve que esta variable está mejor estimada en el caso 3 que en el caso 2, y mejor en el caso 2 que en el caso 1. Esto se verifica al observar la cantidad de datos robustos para contenido de FeT y de FeM en los distintos casos. Además se observa que la pendiente de la recta que representa a los puntos se acerca cada vez más a 1 con cada caso. Esto quiere decir que en los primeros dos casos se introduce sesgo condicional al multiplicar las variables a posteriori. La falta de precisión de un modelo convencional de co-kriging puede ser explicada ya que no se le pide explícitamente a este caso que cumpla que el fierro total sea mayor al fierro magnético.

## 6. ESTIMACIÓN

Se procede finalmente a estimar las variables mediante el co - kriging. La vecindad de búsqueda es bastante grande considerando lo propuesto a continuación:

La complicación particular de este yacimiento de fierro es la falta de información sobre magnetismo en muchas de las muestras (existen 8000 muestras y solo en 1200 de ellas la variable toma algún valor). Para esto se ha diseñado un tipo de búsqueda especial de datos.

Primero, se buscan los datos más cercanos que contengan fierro y/o sílice y después se busca la misma cantidad de datos, pero se les exige que contengan magnetismo (o fierro magnético) dentro de su información. Esto con el fin de asegurar que exista información sobre todas las variables, disminuyendo así el error de estimación. Además, como los datos están tan dispersos, la vecindad escogida debe tener radios bastante amplios con el fin de encontrar una cantidad de datos adecuada. Por último, se decide dividir la vecindad en ocho sectores angulares iguales (octantes).

Cabe destacar además que la grilla de bloques sobre la cual se estiman las variables fue elegida tal que contuviera los datos de magnetismo, ya que los datos que no quedan incluidos no aportan de manera considerable a la estimación. A continuación, entonces, se presentan las características fundamentales de la vecindad de co-kriging así como de la grilla.

	X	Y	Z
<b>VECINDAD</b>			
<b>Radio</b>	550	550	450
<b>Ángulo</b>	0	0	0
<b>Datos por octante</b>	4		
<b>GRILLA</b>			
<b>Inicio</b>	48478	116559	1000
<b>Numero de bloques</b>	56	79	75
<b>Tamaño</b>	15	15	10

TABLA 12: VECINDAD Y GRILLA UTILIZADAS PARA EL CO-KRIGING

Con esto se realiza el co - kriging. La visualización de mapas 2D en los planos principales se muestra a continuación para la ley de fierro estimada; para cada uno de los tres casos:

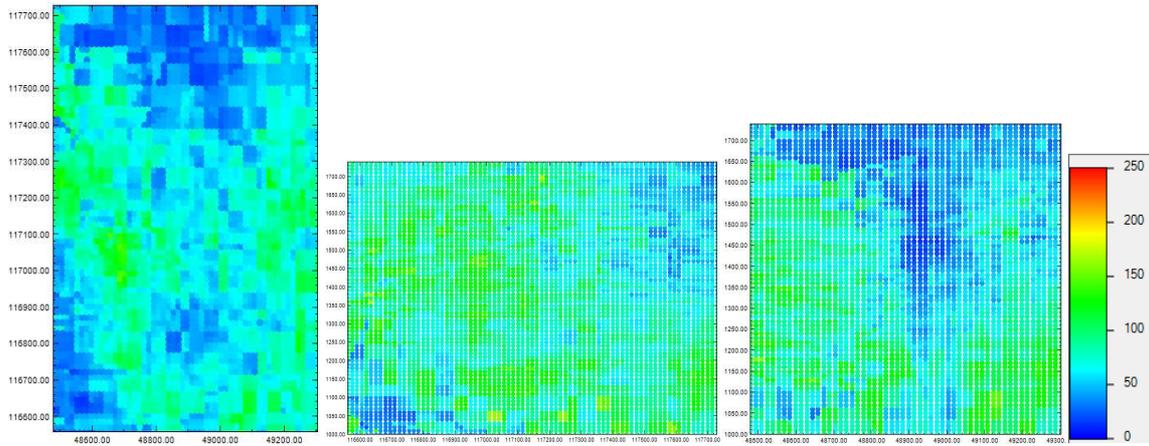


ILUSTRACIÓN 88: MAPAS DE CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO CALCULADO, CASO 1

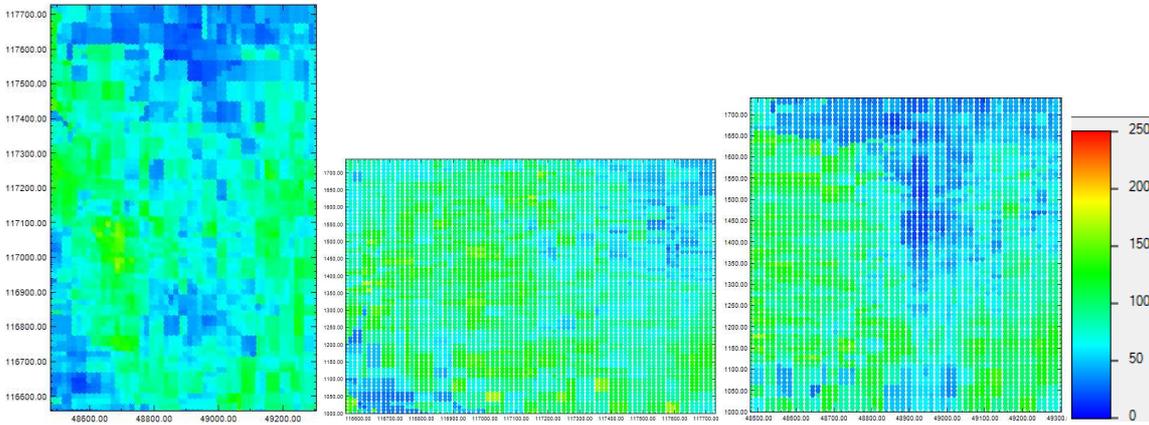


ILUSTRACIÓN 89: MAPAS DE CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO CALCULADO, CASO 2

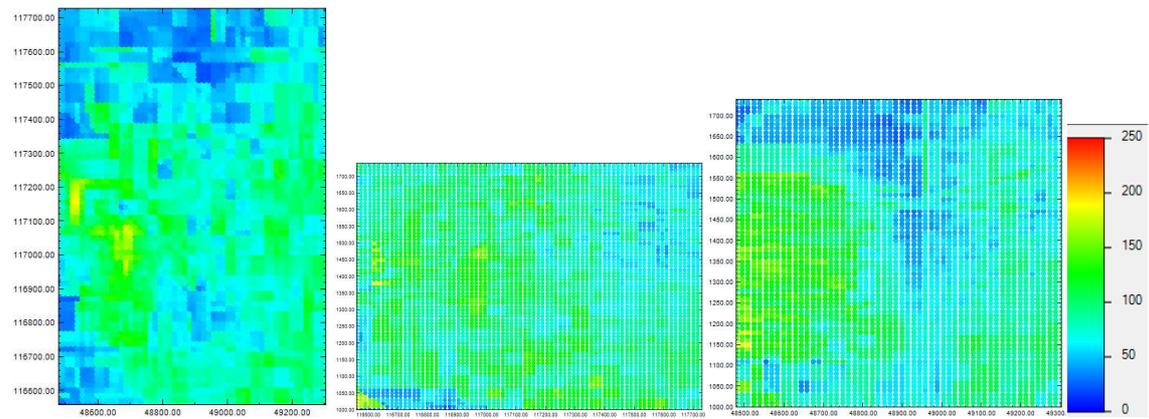


ILUSTRACIÓN 90: MAPAS DE CONTENIDO DE FIERRO MAGNÉTICO ESTIMADO, CASO 3

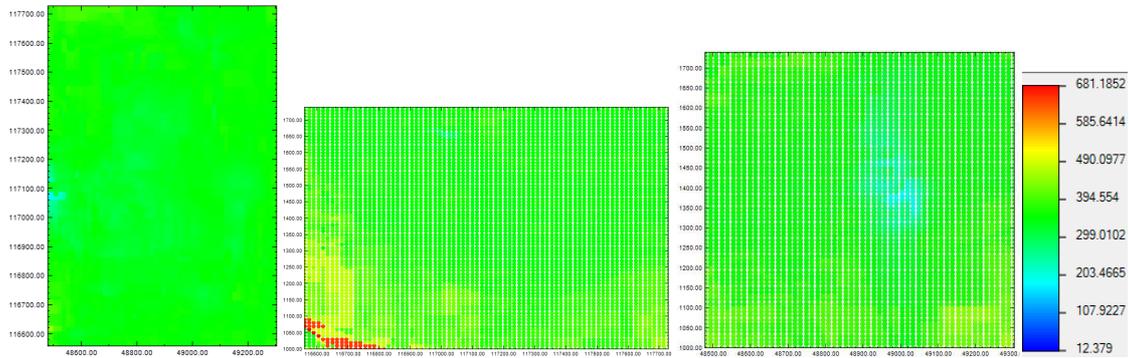


ILUSTRACIÓN 91: MAPAS DE VARIANZA DE ESTIMACIÓN DE FIERRO, CASO 1

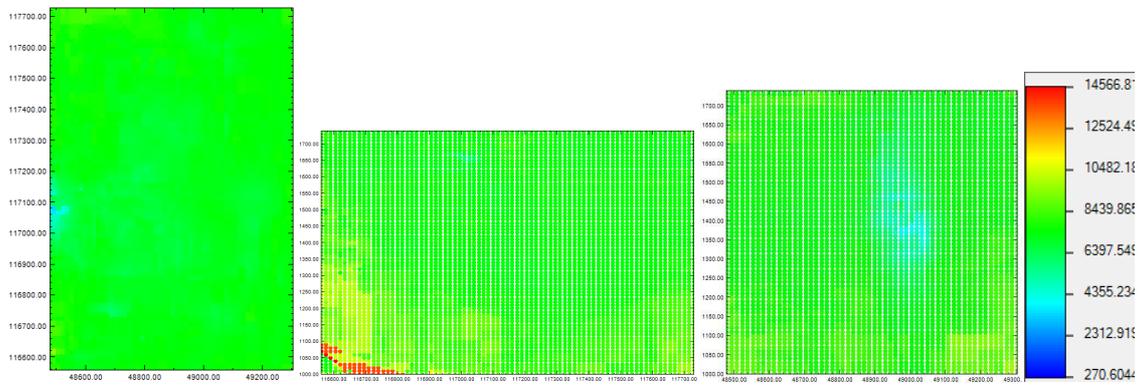


ILUSTRACIÓN 92: MAPAS DE VARIANZA DE ESTIMACIÓN DE FIERRO, CASO 2



ILUSTRACIÓN 93: MAPAS DE VARIANZA DE ESTIMACIÓN DE FIERRO, CASO 3

<b>CASO 1</b>	Fe	Si	Mag
<b>Media</b>	26.06	33.28	0.872
<b>Minimo</b>	1.26	9.61	0.254
<b>Maximo</b>	58.44	59.78	1.050
<b>Desviacion Estandar</b>	6.42	5.08	0.052
<b>Varianza</b>	41.23	25.85	0.003
<b>Coef. De variacion</b>	0.246	0.153	0.059

<b>CASO 2</b>	FeT	Si	Mag
<b>Media</b>	96.58	104.34	0.872
<b>Minimo</b>	0.54	42.95	0.262
<b>Maximo</b>	251.34	157.67	1.116
<b>Desviacion Estandar</b>	28.95	12.36	0.050
<b>Varianza</b>	838.25	152.79	0.003
<b>Coef. De variacion</b>	0.300	0.119	0.057

<b>CASO 3</b>	FeT	Si	FeM
<b>Media</b>	97.37	104.02	95.12
<b>Minimo</b>	0.19	41.94	9.58
<b>Maximo</b>	247.87	159.21	223.60
<b>Desviacion Estandar</b>	30.39	13.00	28.56
<b>Varianza</b>	923.26	169.03	815.88
<b>Coef. De variacion</b>	0.312	0.125	0.300

TABLA 13: CUADRO RESUMEN ESTADÍSTICAS BÁSICAS, VARIABLES ESTIMADAS

## 7. REPORTE DE RECURSOS

---

El reporte de recursos se expresa gráficamente con lo que se conoce como una curva tonelaje – ley. Estas curvas se construyen definiendo un set de leyes de corte, sobre las cuales el recurso es considerado como tal y bajo las cuales es considerado como estéril. Para cada ley de corte, entonces, existe un cierto tonelaje que supera esa ley y que es considerado como recurso. Ese tonelaje además posee contenidos medios (masa de finos dividido por masa total) de la o las especies de interés.

En este caso es de interés el fierro total así como el magnético (que al final es la porción de fierro que es concentrable a menores costos mediante procesos industriales). Por lo tanto, las curvas tonelaje – ley que se mostrarán a continuación poseen el comportamiento del tonelaje que supera determinadas leyes de corte así como las leyes medias de fierro total y magnético de estos tonelajes. Cada curva va acompañada con un cuadro detalle que contiene: Ley de corte, tonelaje total, finos y leyes de fierro magnético y total.

Para calcular los recursos en los casos donde se trabaja con contenido de fierro, se deduce la ley de fierro a partir del contenido estimado ya que la densidad está calculada a partir de la ley. Por lo tanto, se resuelve una simple ecuación cuadrática que arroja la ley de fierro. Con la ley se calcula la densidad, y con la densidad se calcula el tonelaje total de roca por bloque.

Ley corte (%FeT)	Tonelaje (MTon)	Finos (MTon FeT)	Finos (MTon FeM)	Ley media (%FeT)	Ley media (%FeM)
0	2291.80	606.44	532.77	26.46	23.25
5	2291.64	606.43	532.76	26.46	23.25
10	2281.34	605.55	532.04	26.54	23.32
15	2212.26	596.44	524.53	26.96	23.71
20	1932.79	546.24	482.21	28.26	24.95
25	1342.07	412.21	366.88	30.71	27.34
30	655.41	223.67	201.53	34.13	30.75
35	207.85	79.62	72.70	38.31	34.98
40	45.15	19.41	18.00	42.99	39.86

TABLA 14: TONELAJE, FINOS Y LEY MEDIA SOBRE CIERTAS LEYES DE CORTE, CASO 1

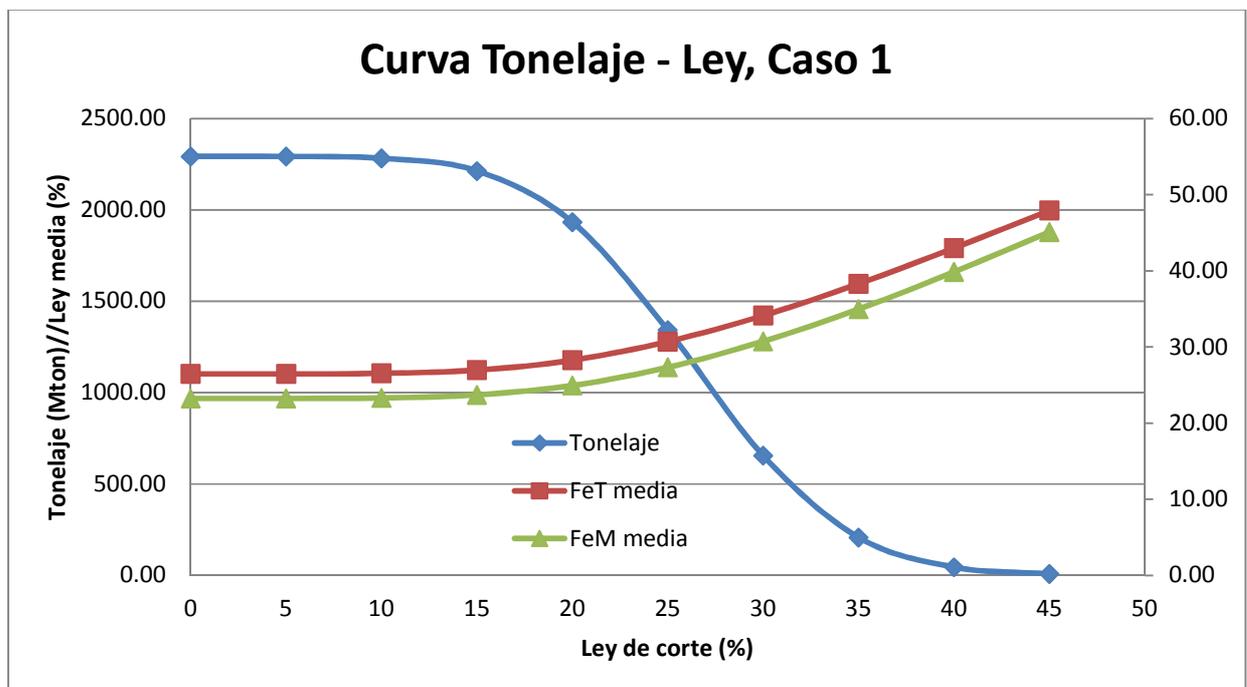


ILUSTRACIÓN 94: CURVA TONELAJE - LEY, CASO 1

Ley corte (%FeT)	Tonelaje (MTon)	Finos (MTon FeT)	Finos (MTon FeM)	Ley media (%FeT)	Ley media (%FeM)
0	2312.92	668.82	588.01	28.92	25.42
5	2312.76	668.81	587.99	28.92	25.42
10	2302.46	668.24	587.53	29.02	25.52
15	2233.38	662.04	582.43	29.64	26.08
20	1953.91	628.24	554.11	32.15	28.36
25	1408.94	527.53	468.07	37.44	33.22
30	792.66	345.84	310.65	43.63	39.11
35	301.57	152.17	138.22	50.46	45.83
40	66.27	41.71	38.51	62.94	58.10

TABLA 15: TONELAJE, FINOS Y LEY MEDIA SOBRE CIERTAS LEYES DE CORTE, CASO 2

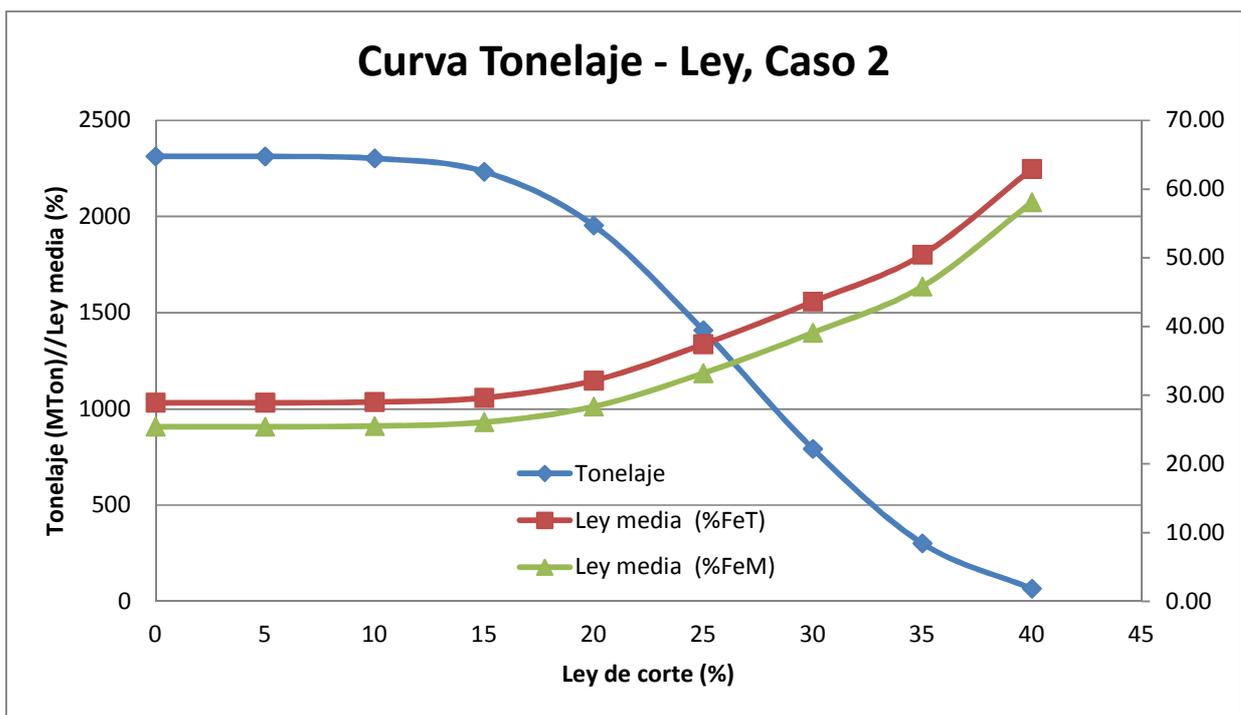


ILUSTRACIÓN 95: CURVA TONELAJE - LEY, CASO 2

Ley corte (%FeT)	Tonelaje (MTon)	Finos (MTon FeT)	Finos (MTon FeM)	Ley media (%FeT)	Ley media (%FeM)
0	2341.23	726.6	709.82	31.03	30.32
5	2341.07	726.58	709.73	31.04	30.32
10	2330.77	725.85	708.44	31.14	30.40
15	2261.69	719.37	700.88	31.81	30.99
20	1982.22	683.19	664.39	34.47	33.52
25	1476.33	567.61	550.82	38.45	37.31
30	884.77	379.95	367.75	42.94	41.56
35	385.61	193.82	186.87	50.11	48.21
40	101.34	61.14	58.37	60.33	57.60

TABLA 16: TONELAJE, FINOS Y LEY MEDIA SOBRE CIERTAS LEYES DE CORTE, CASO 3

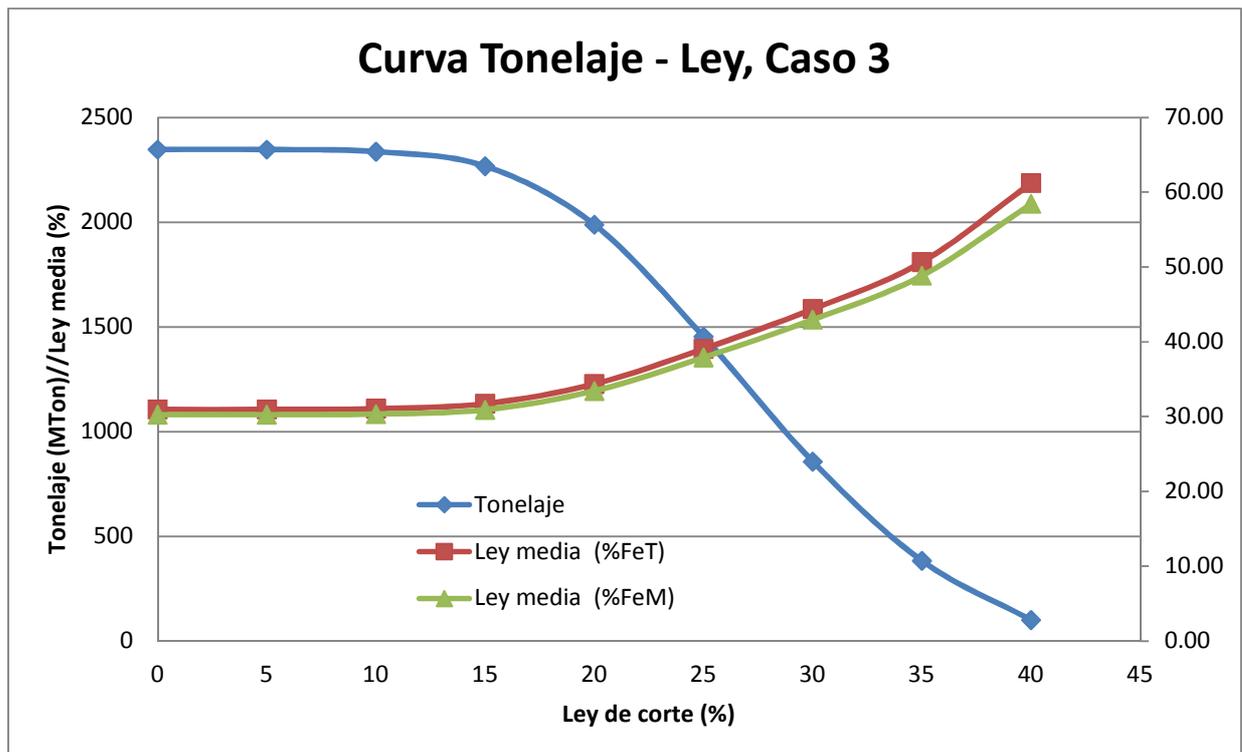


ILUSTRACIÓN 96: CURVA TONELAJE - LEY, CASO 3

## 7.1 CATEGORIZACIÓN DE RECURSOS

---

Con el fin de darle sentido a la frase “confiabilidad del modelo”, los recursos estimados se categorizan según el grado de confianza con el cual fueron estimados. Primero corresponde definir las tres categorías de recursos utilizadas de manera más frecuente:

**Recurso medido:** *Porción del recurso mineral para el cual tonelaje, densidades, leyes, características geológicas, geo-metalúrgicas, y geotécnicas han sido estimadas y caracterizadas con un significativo nivel de confianza. Estas estimaciones y caracterizaciones están basadas en reconocimientos detallados, confiables, y verificables y en análisis y pruebas representativas ubicadas de acuerdo a una malla de información tal que la continuidad de leyes y de características geológico-metalúrgicas permite su validación.*

**Recurso indicado:** *Porción del recurso mineral para el cual tonelaje, densidades, leyes, características geológicas, geo-metalúrgicas, y geotécnicas han sido estimadas y caracterizadas con un razonable nivel de confianza. Estas caracterizaciones y estimaciones están basadas en reconocimientos, muestreos, y análisis realizados en lugares representativos de la mineralización origen de esos recursos. Estos lugares generan una malla de información tal que la continuidad y caracterización geológica así como el contenido de metal puede ser estimado con un aceptable grado de confiabilidad.*

**Recurso inferido:** *Porción del recurso mineral para el cual las estimaciones de tonelaje y ley están afectas en exactitud y precisión debido a muestreos fragmentarios, limitados, y a percepciones asumidas sobre su continuidad geológica, y a extrapolaciones de carácter más bien subjetivo sobre la naturaleza de los controles de la mineralización.*

Este grado de confianza mencionado, en el caso del kriging y sus variantes, se mide a través de la varianza del error de estimación y es por esto que para darle objetividad a la categorización de recursos se usa el criterio conocido como “varianza de corte”.

Lo que se hace es calcular una varianza bajo la cual el bloque se considere como recurso medido y otra varianza sobre la cual el bloque se considere como recurso inferido. Entre medio quedan los recursos indicados. Para hacer estos dos cálculos, se utiliza el software kt3d de GSLib, el cual efectúa el kriging de un bloque que se encuentra en el centro de cuatro sondajes ficticios equidistantes de bloque a una distancia determinada por el usuario, como se muestra en el esquema:

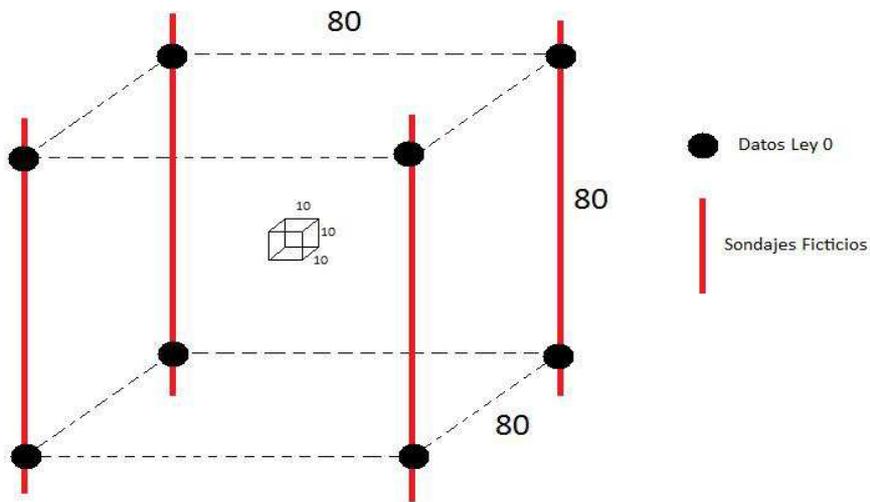


ILUSTRACIÓN 97: ESQUEMATIZACIÓN DE ESTIMACIÓN E VARIANZA DE CORTE

Los datos utilizados en este kriging tienen un valor de 0, por lo que la estimación va a arrojar un valor estimado de 0 de la variable, con una varianza de error que se tomará como varianza de corte. Este proceso se repite dos veces: Primero se determina la varianza de corte medido – indicado y luego, con los “sondajes” a una mayor distancia del bloque, la varianza de corte indicado – inferido.

Lamentablemente esto funciona para una variable a la vez. En el caso 3 de este estudio no hay problema pues se puede categorizar el contenido de hierro magnético como una sola variable. Sin embargo, en el caso 1 y 2 no se puede calcular una varianza de contenido de FeM a posteriori. Lo que se hará será categorizar tanto para hierro como para magnetismo en esos casos y resolver darle la “peor” categoría al bloque (por ejemplo, si es indicado para hierro y medido para magnetismo, para contenido de hierro magnético se considerará como recurso indicado).

Calculadas las varianzas de corte en los tres casos, se construye la siguiente tabla, la cual desglosa la composición del yacimiento estudiado en recursos medidos, indicados e inferidos de contenido de hierro magnético para cada caso:

	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
Categoría	Mton	%	Mton	%	Mton	%
<b>Medidos</b>	998.97	43.58	1117.95	48.34	1301.73	52.69
<b>Indicados</b>	632.58	27.60	583.68	25.23	679.19	27.49
<b>Inferidos</b>	660.25	28.82	611.29	26.43	489.59	19.82
<b>Totales</b>	2291.80	100	2312.92	100	2470.51	100

TABLA 17: RECURSOS MEDIDOS, INDICADOS E INFERIDOS

A continuación, mapas bidimensionales de los recursos estimados, según categoría - azul: no estimado/negativo, verde: medido, amarillo: indicado, rojo: inferido.

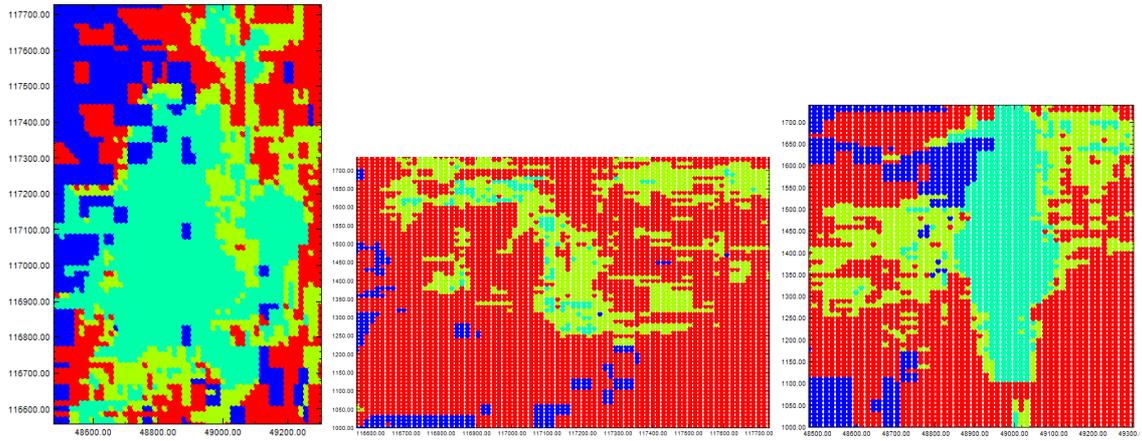


ILUSTRACIÓN 98: RECURSOS ESTIMADOS, SEGÚN CATEGORÍA. CASO 1

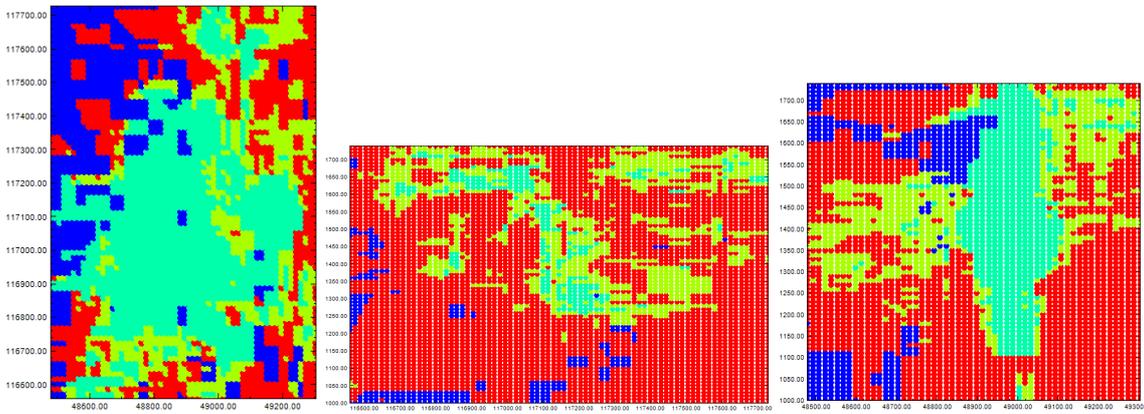


ILUSTRACIÓN 99: RECURSOS ESTIMADOS, SEGÚN CATEGORÍA. CASO 1

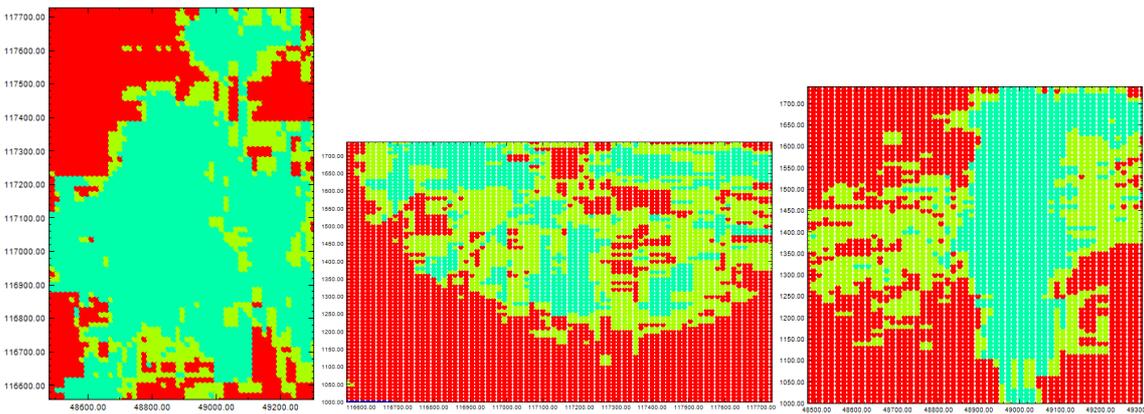


ILUSTRACIÓN 100: RECURSOS ESTIMADOS, SEGÚN CATEGORÍA. CASO 1

## 8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

Con el reporte de recursos completo, se concluye el proceso de estimación de recursos para este yacimiento de hierro. Con respecto a los objetivos planteados y los resultados obtenidos, se desprenden las siguientes conclusiones:

- ❖ El caso 3, el cual resulta más interesante ya que estima el contenido de hierro magnético de cada bloque directamente en vez de obtenerlo a posteriori multiplicando el hierro estimado, la densidad calculada y el magnetismo estimado, es el que arroja la mayor cantidad de recursos estimados. De hecho, existe una diferencia de más de 50 millones de toneladas de recursos totales estimados (ley de corte 0%) entre el caso 1 y el caso 3. Este último además estima una ley media un 4% mayor que el primer caso. Todo esto se puede verificar además en los mapas de hierro magnético de manera visual (todos los mapas están a la misma escala).
- ❖ El caso 3 arroja una ley de hierro magnético muy cercana a la de hierro total, sugiriendo que la gran mayoría del hierro presente es recuperable. Sin embargo, esto puede estar sujeto al cálculo del coeficiente que relaciona las medias de hierro total y magnético. De hecho, si se calcula la razón de magnetismo a posteriori en el caso 3, se ve que fluctúa cerca del coeficiente calculado (0.97). Ver anexos para mapas.
- ❖ Mediante comparaciones en la validación con jack-knife, se demuestran claramente las ventajas de trabajar con variables aditivas y el peligro de trabajar con variables no aditivas como la ley. Por ejemplo, en el caso 1, el gráfico de nube de dispersión para ley parece ser muy bueno. Sin embargo, el mismo gráfico para contenido resultó ser mucho menos promisorio. Cuando lo que se suma en el cálculo de recursos son toneladas de finos y de roca, y no leyes, es importante que se estime directamente lo que se quiere sumar.
- ❖ El punto anterior se ve reforzado al analizar la categorización de recursos. El caso 3 aporta más recursos demostrados (medidos + indicados) que los casos 1 y 2, demostrando una vez más las ventajas de trabajar con variables aditivas.
- ❖ Debido a la baja cantidad de datos existente con respecto al tamaño del espacio muestral, se debió escoger una vecindad de kriging muy grande y además efectuar dos búsquedas de datos para encontrar información suficiente para efectuar una buena estimación. Esto resultó en tiempos de cálculo más altos, pero es una consecuencia de la cantidad de información inicial disponible.

- ❖ Restricciones como las que se imponen en este caso de estudio ayudan a respetar a posteriori las relaciones de orden que existen a priori en las variables, como por ejemplo que el fierro total sea mayor al fierro magnético. Esto puede ser útil en otros casos de estudio, como es el conocido caso cobre total – cobre soluble.

Por supuesto, el co-kriging y todas sus variantes tienen limitantes bien conocidas en el campo de estimación de recursos, siendo la más importante el efecto de “suavizamiento” (sobre – estimación de leyes bajas y sub – estimación de leyes altas) que se produce por construcción ya que cada estimación es una suma ponderada de los datos conocidos. Es por esto que se hacen las siguientes recomendaciones:

- ❖ Efectuar corridas de simulación para contenido de fierro magnético, intentando incorporar las relaciones entre medias. Esto elimina el suavizamiento. Genera escenarios pesimistas y optimistas, además de proveer un análisis probabilístico con respecto a la superación de leyes de corte, lo cual permite hacer análisis de riesgo económico. Habría que tomar en cuenta el factor de tiempo de cálculo computacional.
- ❖ Hacer una campaña de sondajes más localizada o más densa (depende del monto de inversión disponible), con el fin de evitar tiempos de cálculo mayores y búsquedas engorrosas por falta de información; además de disminuir el sesgo de estimación. En el caso del fierro no es tan imprescindible debido a la baja variabilidad de la ley de este metal, sin embargo, con otra especie metálica de mayor complejidad una buena malla de sondajes es fundamental para una estimación más precisa y confiable.

Los objetivos se han cumplido a cabalidad. Se ha estimado de forma completa y con el mínimo sesgo posible los recursos de un yacimiento de fierro, implementando para esto una variante al co-kriging tradicional. Además se han demostrado ventajas de estimar recursos con variables aditivas como ley\*densidad en vez de ley, obteniendo recursos estimados adicionales (50 millones de toneladas de mineral y 100 millones de toneladas de fierro magnético) los cuales agregan valor al proyecto y que no son considerados al estimar los recursos de manera convencional.

## 9. BIBLIOGRAFÍA

---

- Emery, Xavier. "Cokriging regionalized variables with linearly linked means". Universidad de Chile.
- Alcalde, F. 1999. "Evaluación de recursos del yacimiento Los Colorados". Memoria de ingeniería civil de minas, Universidad de Chile.
- Emery, Xavier. "Iterative algorithms for fitting a linear model of coregionalization". Artículo para "Computers and Geosciences". Universidad de Chile, AMTC.
- Journel & Huijbregts, 1978. "Mining Geostatistics"
- Chilès & Delfiner, 1999. "Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty"
- Goovaerts, Pierre. "Geostatistics for natural resource evaluation". Oxford University Press.

## 10. ANEXOS

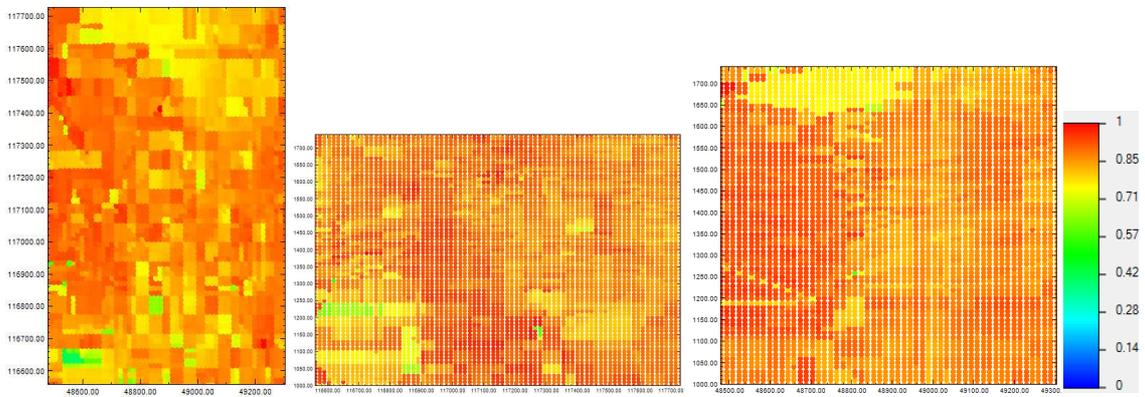


ILUSTRACIÓN 101: MAPAS DE MAGNETISMO ESTIMADO, CASO 1

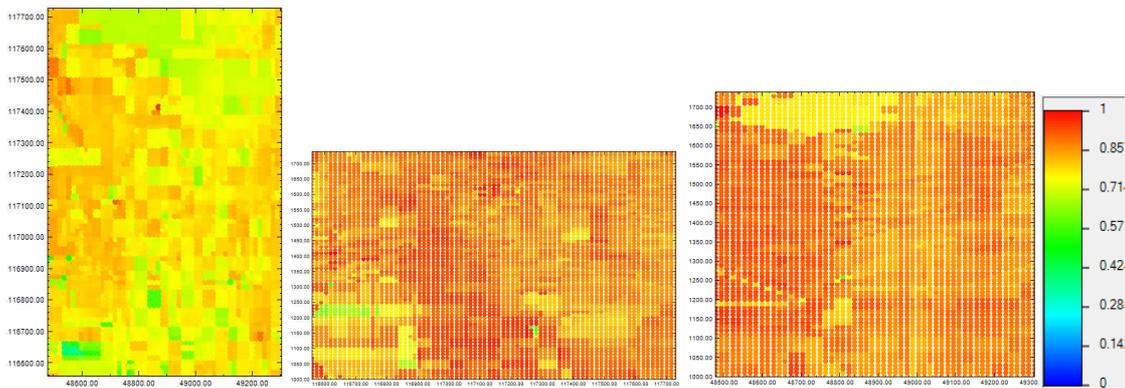


ILUSTRACIÓN 102: MAPAS DE MAGNETISMO ESTIMADO, CASO 2

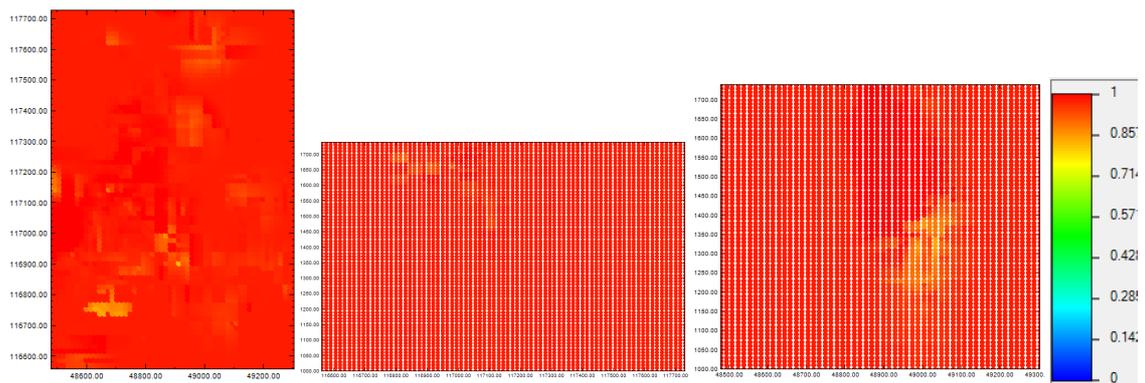


ILUSTRACIÓN 103: MAPAS DE MAGNETISMO CALCULADO, CASO 3

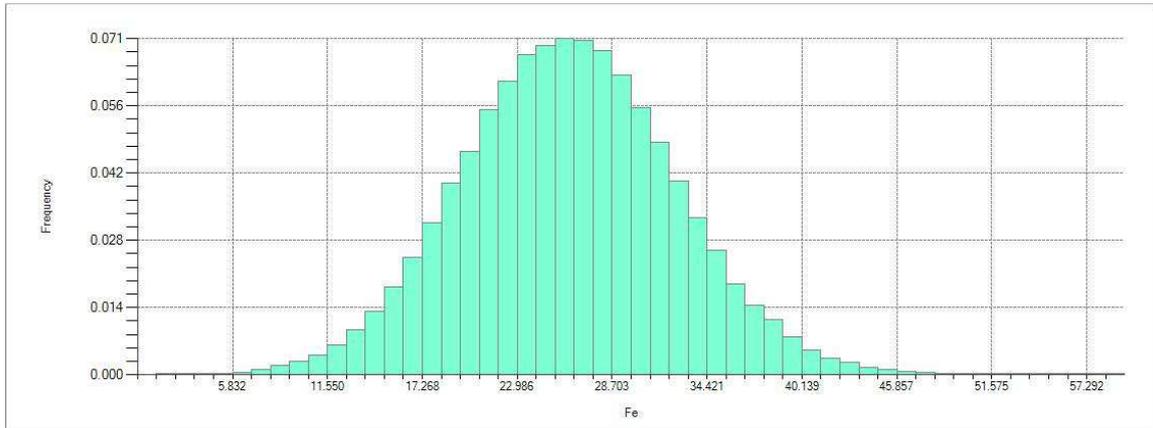


ILUSTRACIÓN 104: HISTOGRAMA DE LEYES ESTIMADAS DE FIERRO, CASO 1

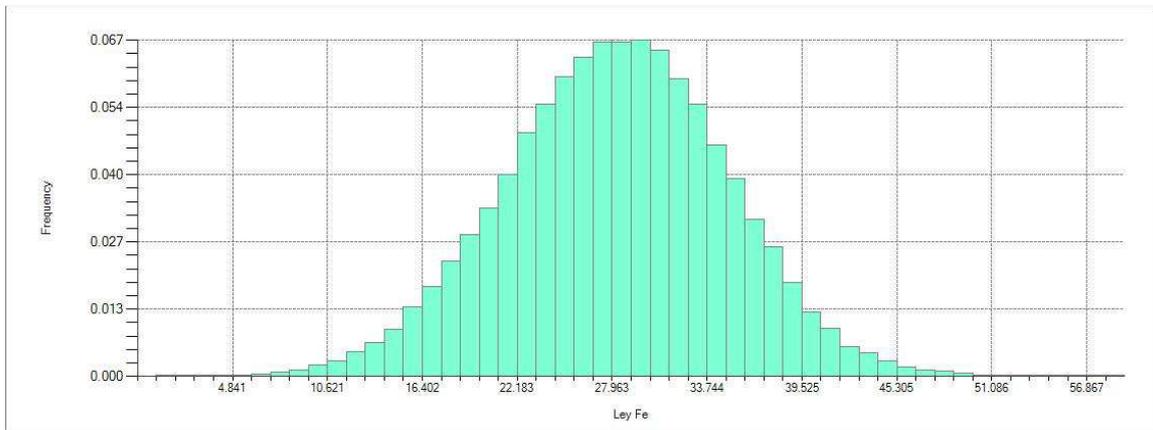


ILUSTRACIÓN 105: HISTOGRAMA DE LEYES CALCULADAS DE FIERRO, CASO 2

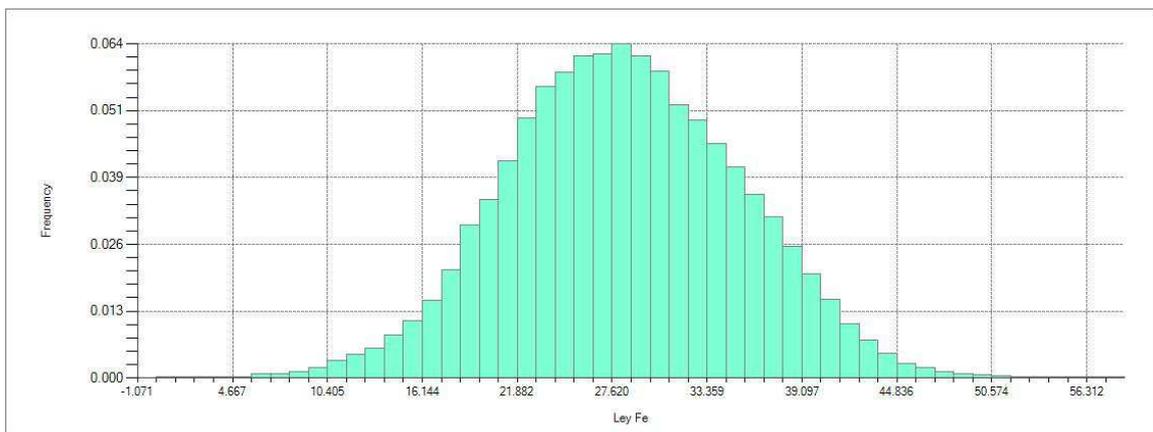


ILUSTRACIÓN 106: HISTOGRAMA DE LEYES CALCULADAS DE FIERRO, CASO 3

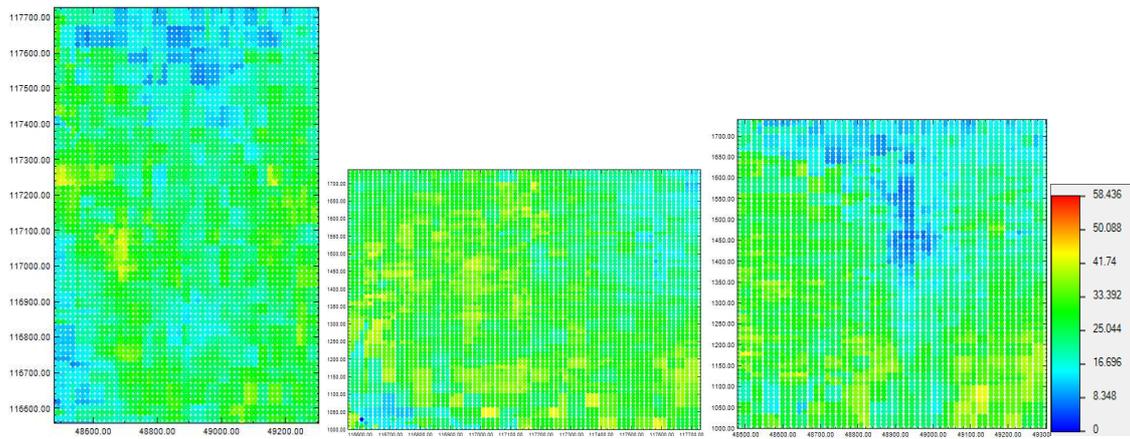


ILUSTRACIÓN 107: MAPAS DE LEY DE FIERRO ESTIMADA, CASO 1

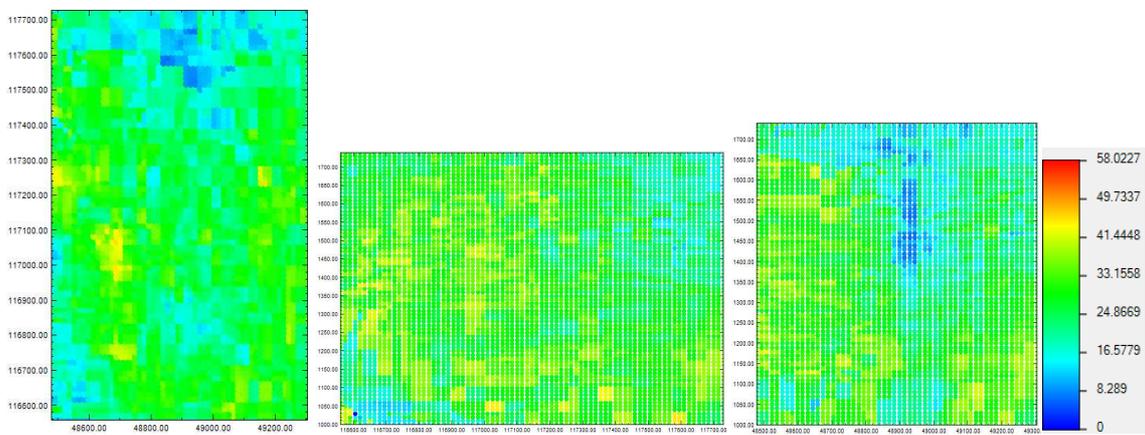


ILUSTRACIÓN 108: MAPAS DE LEY DE FIERRO CALCULADA, CASO 2

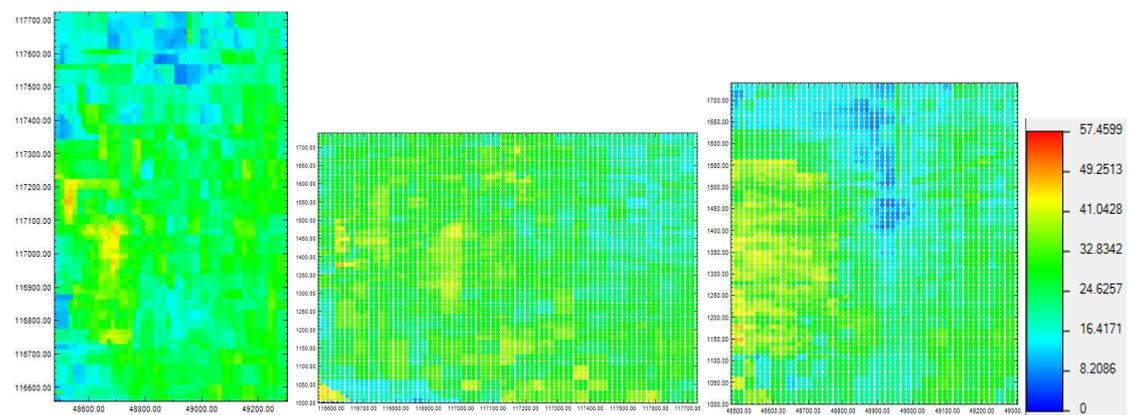


ILUSTRACIÓN 109: MAPAS DE LEY DE FIERRO CALCULADA, CASO 3

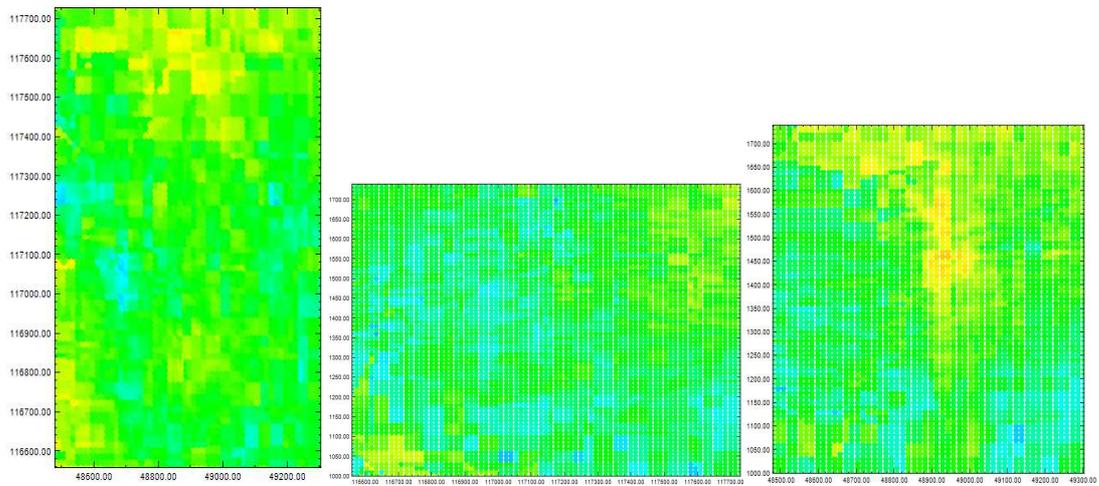


ILUSTRACIÓN 110: MAPAS DE LEY DE SILICE ESTIMADA, CASO 1

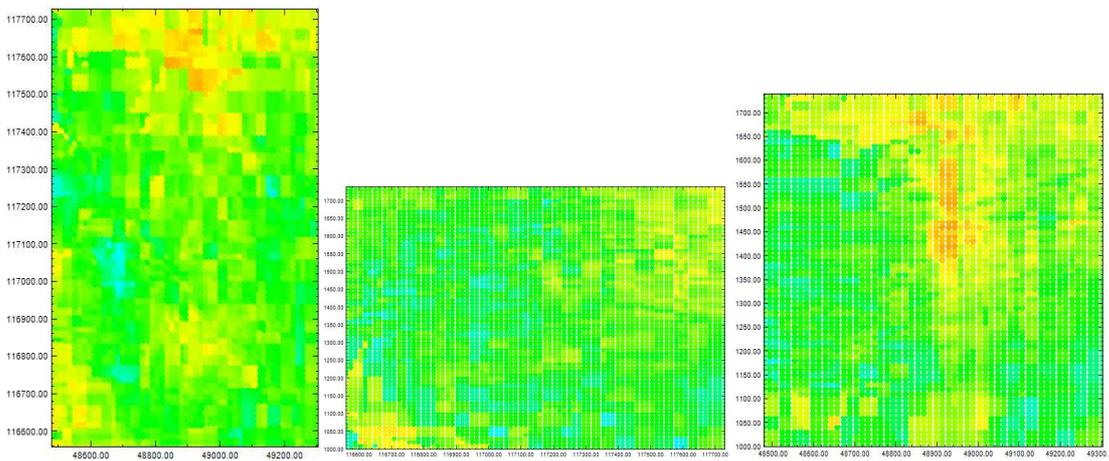


ILUSTRACIÓN 111: MAPAS DE CONTENIDO DE SILICE ESTIMADO, CASO 2

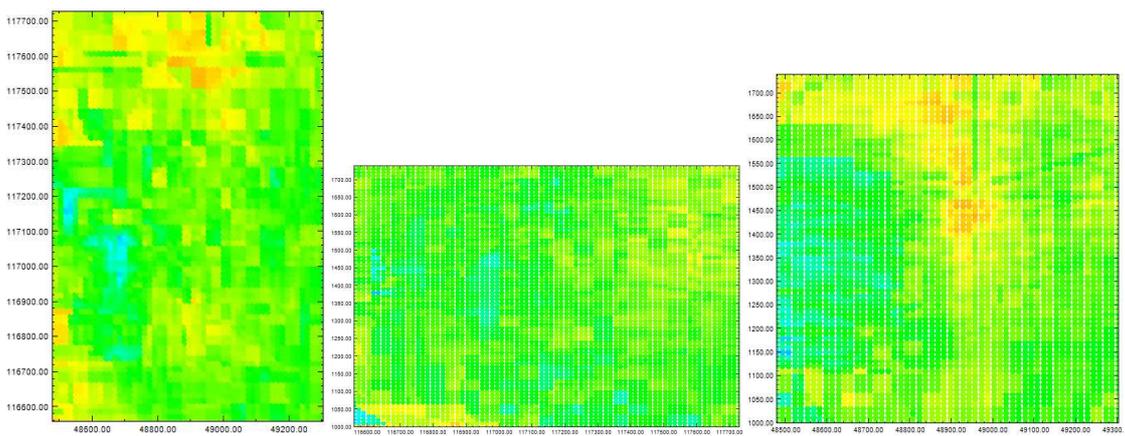


ILUSTRACIÓN 112: MAPAS DE CONTENIDO DE SILICE ESTIMADO, CASO 3