UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE PROBLEMAS INVERSOS EN ECUACIONES HIPERBÓLICAS PROVENIENTES DEL ANÁLISIS EN FLEXURA LITOSFÉRICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

BENJAMÍN PABLO PALACIOS FARIAS

PROFESOR GUÍA:
AXEL OSSES ALVARADO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN DAVILA BONCZOS
ALBERTO MERCADO SAUCEDO

SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: BENJAMÍN PALACIOS FARIAS
FECHA: SEPTIEMBRE 2012
PROF. GUÍA: AXEL OSSES ALVARADO

Los resultados obtenidos en esta memoria pertenecen al área de problemas inversos en ecuaciones en derivadas parciales. El objetivo principal fue estudiar la estabilidad de parámetros en dos modelos de placas provenientes de la elasticidad lineal, en función de los datos en la frontera. La herramienta fundamental que se utilizó en las demostraciones y que también forman parte de los resultados principales son dos estimaciones de Carleman. Este tipo de desigualdades son ampliamente utilizadas en problemas inversos para probar estabilidad de parámetros y también en control para obtener desigualdades de observabilidad.

Para Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $N \geq 2$ y $T > 0$, se consideró la ecuación de placas de Kirchhoff-Love:

$$w_{tt} - \gamma_0 \Delta w_{tt} + \Delta^2 w + q(x) w = g(x,t) \quad \text{en } \Omega \times (0,T),$$

con condiciones de borde Navier (i.e. sobre $w|_{\partial\Omega}$ y $\Delta w|_{\partial\Omega}$). Aquí, g es la fuente, γ_0 es una constante positiva, q es un potencial en $L^\infty(\Omega)$ y en el caso $N = 2$, w representa la flexura de una placa delgada con respecto al plano horizontal. Para este problema se construyó una desigualdad de Carleman para funciones regulares, con observaciones en un segmento de la frontera del dominio. Como aplicación de lo anterior, se obtuvo una desigualdad de estabilidad Lipschitz, en donde se logró acotar la diferencia de dos potenciales en norma L^2 por la diferencia de las observaciones en norma $H^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$ y $H^1(0,T;L^2(\partial\Omega))$.

El segundo problema abordado en esta memoria fue el modelo de placas de Reissner-Mindlin:

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \operatorname{div}(\sigma(\theta)) - \mu^*(x)\, h_0^{-2}(\nabla w - \theta) = f(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ w_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x)(\nabla w - \theta)) + q(x) w = g(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

con condiciones de borde Dirichlet y donde suponemos Ω dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera regular. El operador $\sigma(\cdot)$ está relacionado con el tensor de esfuerzos de la elasticidad, f y g son fuentes, h_0 es una constante positiva que representa el espesor de la placa, μ^* se relaciona con los parámetros de Lamé y q es un potencial en $W^{2,\infty}(\Omega)$. Análogamente a los primeros resultados, se construyó una desigualdad de Carleman para este sistema, también con observaciones en la frontera y suponiendo funciones suficientemente regulares, la que luego fue aplicada en la obtención de la estabilidad Hölder del potencial q en norma L^2 en función de las observaciones sobre el borde de Ω con normas $H^2(0,T;(L^2(\partial\Omega))^3)$ y $H^2(0,T;(H^1(\partial\Omega))^3)$.

Se probó además la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones para el sistema de Reissner-Mindlin, utilizando un método clásico que permite obtener resultados de este tipo. Este resultado es original ya que se consideran los parámetros de Lamé variables.

Dedicado a mis abuelitos.

Agradecimientos

Quiero partir dandole las gracias a mis padres por todo el apoyo y el inmenso cariño que me han dado desde siempre. A mis hermanos por su compañia y cariño, en especial al más pequeño, Lucas, porque él ha traido mucha alegría y unión a mi familia.

Otra persona muy importante que me ha acompañado desde mucho antes de empezar la univerdidad es la Camilita, mi polola. Muchas gracias por estar siempre a mi lado y por todo el amor que me entregas día a día.

Gracias también a los profesor del DIM, por todo lo que me han enseñado a lo largo de la carrera, en especial al profesor Juan Dávila por haber aceptado ser parte de la comisión y sobre todo al profesor Axel Osses, por todo lo que he aprendido de él y por la confianza que ha depositado en mi. Además, agradezco al profesor Alberto Mercado por ser parte también de la comisión.

Por último y no por eso menos importante, a todos mis amigos tanto del colegio como de la carrera, por todos los viajes y buenos momentos que vivimos en nuestro periodo como universitarios. En especial quiero agradecerles al Mauro, Tonho, Figura, Benja y Johnson, por todas las noches en que nos juntamos a estudiar, comer o simplemente a tomarnos algo, fueron una valiosa compañia y un muy gran aporte a mi desarrollo como matemático.

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

Los resultados obtenidos en este trabajo se ecuentra inmerso en el mundo de los Problemas Inversos en Ecuaciones en Derivadas Parciales. La teoría sobre este tipo de problemas ha tomado un gran peso durante los últimos años y promete ser una muy buena fuente de investigaciones y nuevos problemas debido a que posee aplicaciones muy interesantes, una de las más usuales es la relacionada con imagenes médicas. En particular, nuestra motivación para abordar este tipo de problemáticas, que se vera con mayor detalle a continuación, proviene de investigaciones en el campo de la Geofísica.

0.1. Motivación

Actualmente en Geofísica resulta de gran interes descifrar la composición y estructura de la tierra con el propósito de poder predecir o al menos tener alguna idea de la dinámica de ésta. Una de las grandes teorías geológicas que busca comprender el movimiento de los componentes terrestres es la llamada *Tectónica de Placas*. Ésta postula que la litósfera, la capa más externa y fría de la tierra, se encuentra fragmentada donde cada uno de estos fragmentos corresponden a las distintas placas tectónicas, las cuales se mueven como bloques rígidos sobre la astenósfera terrestre (la capa que viene inmediatamente debajo de la litósfera) sin causarle deformaciones. La teoría de placas a logrado explicar de manera muy satisfactoria el hecho de que los terremotos y volcanes se concentran en regiones bien específicas del planeta, así como también a dado respuestas a fenomenos geológicos como la formación de montañas.

Figura 1: Placas Tectónicas

A lo largo del territorio chileno existen dos grandes placas que interactúan entre si probocando muchos de los fenómenos sísmicos que presenciamos cada año, estas son la placa de Nazca y la Sudamericana. Ambas se encuentra en contacto bajo las costas chilenas en un proceso llamado subducción, lo que significa que la placa de Nazca se desliza por debajo de la placa continental y es el roce producido durante esta interacción lo que da origen a la actividad sísmica de esta zona.

Recientemente se han realizado investigaciones en el Departamento de Geofísica de la U. de Chile, que buscan determinar el *espesor elástico* de la placa de Nazca en una determinada región de la costa de Chile, donde se define esta propiedad como el espesor que debería tener una placa ideal (delgada, elástica y homogenea) para presentar la misma flexura. Luego, los fragmentos litosféricos son modelados mediante ecuaciones provenientes de la mecánica de sólidos rígidos debido a que éstos, en presencia de fuerzas externas (subducción, montañas, sedimentos), se flectan como si fuesen placas delgadas.

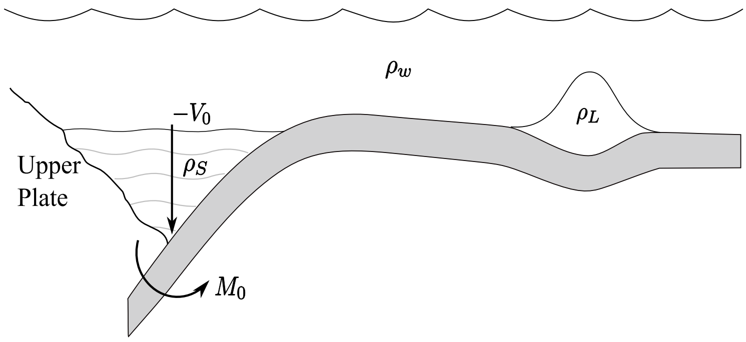

Figura 2: Subducción

Dada una placa de espesor $h(x)$ y una configuración de referencia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, denotamos por $w(\cdot)$ a la desplazamiento vertical y por $\theta(\cdot) = (\theta_1, \theta_2)$ a los ángulos de rotación de los puntos de la placa $x \in \Omega$, con respecto al estado de referencia. El modelo estacionario de Reissner-Mindlin ([Gra91], pág 488):

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(h(x)^3\sigma(\theta)) - \mu(x)h(x)(\nabla w - \theta) = f(x,t), & \text{en } \Omega \\ -\mathrm{div}(\mu(x)h(x)(\nabla w - \theta)) = g(x,t), & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y el modelo estacionario de Kirchhoff-Love ([Man89], pág 10):

$$\begin{aligned} \partial_{xx}(D(x)(\partial_{xx}w + \nu(x)\partial_{yy}w)) + 2\partial_{xy}((1-\nu(x))D(x)\partial_{xy}w) & \\ +\partial_{yy}(D(x)(\nu(x)\partial_{xx}w + \partial_{yy}w)) &= g(x,t) \end{aligned}$$

en Ω, donde

$$D(x) = \frac{E(x)h(x)^3}{12(1-\nu(x)^2)},$$

con E y ν parámetros que dependen de la composición del sólido, son ampliamente utilizados para determinar el comportamiento en el equilibrio de una placa tectónica cuando actúan fuerzas externas sobre ella. Ésto debido a que la escala de tiempo que presenta la dinámica litosférica es varios ordenes de magnitud mayor a la de una persona y por lo tanto tiene sentido suponer su equilibrio. Sin embargo, no se descartan en las aplicaciones los problemas de evolución asociados a los modelos anteriores. El sistema de Reissner-Mindlin en régimen dinámico ([Gra91], pág 488; [Lag89], pág 17: caso D, h, ρ constantes) corresponde a las ecuaciones

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{h^3(x)}{12}\theta_{tt} - \operatorname{div}(h(x)^3\sigma(\theta)) - \mu(x)h(x)(\nabla w - \theta) = f(x,t), & \text{en } \Omega \\ \rho(x)h(x)w_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x)h(x)(\nabla w - \theta)) = g(x,t), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

mientras que el modelo evolutivo de Kirchhoff-Love ([Lag89], pág 15: con D, ρ, h constantes) está determinado por

$$\begin{aligned} \rho(x)h(x)w_{tt} - \operatorname{div}(\rho(x)\frac{h(x)^3}{12}\nabla w_{tt}) + \partial_{xx}(D(x)(\partial_{xx}w + \nu(x)\partial_{yy}w)) \\ +2\partial_{xy}((1-\nu(x))D(x)\partial_{xy}w) + \partial_{yy}(D(x)(\nu(x)\partial_{xx}w + \partial_{yy}w)) = g(x,t). \end{aligned}$$

Para determinar entonces el espesor elástico $h(x)$ de la placa de Nazca por ejemplo, se debe resolver un problema inverso para alguno de los modelos anteriores. No obstante, lograr determinar el parámetro $h(x)$ en funciones de mediciones sobre la frontera de la placa resulta ser un problema de gran dificultad.

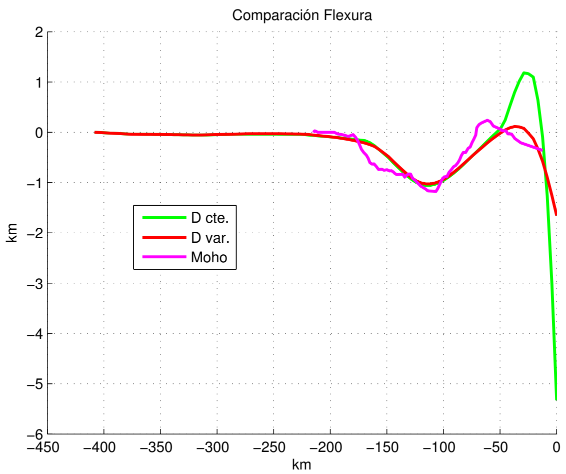

Figura 3: Perfil unidimensional de la flexura litosférica (Moho) en Chile y el modelo de Kirchhoff-Love estacionario con D constante y variable.

Un problema que se encuentra a mitad de camino en la recuperación del espesor de la placa, corresponde a la determinación de un potencial $q(x)$. La razón de ésto es que para atacar ambos problemas es posible linealizar las ecuaciones en función del parámetro que se pretende determinar y en torno a un valor de referencia de éste, así ambos problemas se reducen a la recuperación de términos de fuente. Por lo tanto, resolver el problema del potencial nos entrega información útil sobre la resolución del problema más dificil que es obtener $h(x)$ a partir de los datos. Agregando entonces un potencial en ambos modelos se obtienen las siguientes ecuaciones: Reissner-Mindlin con potencial

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{h^3(x)}{12}\theta_{tt} - \operatorname{div}(h(x)^3\sigma(\theta)) - \mu(x)h(x)(\nabla w - \theta) = f(x,t), & \text{en } \Omega \\ \rho(x)h(x)w_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x)h(x)(\nabla w - \theta)) + q(x)w(x) = g(x,t), & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y Kirchhoff-Love con potencial

$$\rho(x)h(x)w_{tt} - \operatorname{div}(\rho(x)\frac{h(x)^3}{12}\nabla w_{tt}) + \partial_{xx}(D(x)(\partial_{xx}w + \nu(x)\partial_{yy}w))$$
$$+2\partial_{xy}((1-\nu(x))D(x)\partial_{xy}w) + \partial_{yy}(D(x)(\nu(x)\partial_{xx}w + \partial_{yy}w)) + q(x)w(x) = g(x,t).$$

En lo que sigue se estudiaran estos últimos modelos, en donde simplificaremos las ecuaciones suponiendo alguno de los coeficientes constantes. Estas condiciones serán precisadas más adelante.

0.2. Discusión

El problema inverso de estabilidad de parámetros con respecto a observaciones en el borde o en parte del dominio, ha sido bien estudiado durante los últimos años. El método clásico para probar la estabilidad, el cual consiste en linealizar el problema inverso para luego usando desigualdades de Carleman, estimar la fuente en función de las observaciones y así obtener la estabilidad local del parámetro, fue introducido por A.L. Bukhgeim y M.V. Klibanov en [BK81].

En cuanto a ecuaciones hiperbólicas, en [FI96] y [Ima02] se obtienen desigualdades de Carleman para este tipo de ecuaciones, mientras que en [IY01] se aplica el método mencionado anteriormente para determinar la estabilidad Lipschitz de un potencial en la ecuación de ondas. Otro tipo de estabilidad se establece en [IY03], donde usando una desigualdad de Carleman en H^{-1} y el método Bukhgeim-Klibanov, se obtiene una desigualdad de estabilidad tipo Hölder para el coeficiente principal en una ecuación de ondas acústicas. Algo que no se ha observado en otros trabajos y que es desarrolla detalladamente aquí, es la desigualdad de Carleman para ondas acústicas en ausencia de condiciones de borde.

Los problemas inversos que involucran ecuaciones de placas y de manera más general, la ecuación de elasticidad lineal, se dividen en dos ramas de investigación. Por un lado se encuentra el problema no estacionario bajo una única medición (dependiente del tiempo), donde se utiliza el método de Bukhgeim-Klibanov y que corresponde a la linea que se ha seguido en esta memoria. Mientras que la segunda vía de investigación relacionada con problemas inversos en elasticidad tiene que ver con el problema de Calderon asociado al bilaplaciano (Δ^2) y que por lo tanto requiere de múltiples observaciones. La relación existente entre la elasticidad y los modelos de placas está dada por el siguiente esquema, donde las flechas indican el camino en que se deducen las ecuaciones respectivas ([Lag89]):

$$\begin{array}{c} Elasticidad\ Lineal\ 3D \\ \downarrow \\ Placas\ 2D:\ Reissner - Mindlin\ (o\ Mindlin - Timoshenko) \\ \downarrow \\ Kirchhoff - Love \\ \downarrow \\ Euler - Bernoulli \end{array}$$

Con respecto al problema no estacionario, el modelo dinámico de placas de Kirchhoff-Love con condiciones de borde tipo Navier (i.e. $u|_{\partial\Omega}$, $\Delta u|_{\partial\Omega}$), es estudiado desde el punto de vista de la teoría de control de EDPs en [ZZ06] y [ZZ08], donde también se utilizan estimaciones de Carleman para obtener las desigualdades de observabilidad. Por otra parte, en [FZZ06] se obtiene una estimación análoga para otra ecuación de placas que es similar a Kirchhoff-Love y que recibe el nombre de Euler-Bernoulli. Este modelo consiste solamente en los términos de la doble derivada temporal y el bilaplaciano ($\partial_{tt} + \Delta^2$), sin embargo, apesar de la similitud de ambos modelos, éstos presentan propiedades distintas por lo que se estudian separadamente. Este trabajo trata el modelo de Kirchhoff-Love desde el punto de vista de problemas inversos lo cual en base a la revisión bibiliográfica no ha sido estudiado, además contiene una construcción detallada de la estimación de Carleman para esta ecuación.

Por otro lado, no se han encontrado artículos que aborden específicamente el modelo no estacionario de Reissner-Mindlin, desde la perspectiva de problemas inversos. Un trabajo relacionado es el de O.Y. Imanuviov y M. Yamamoto [IY05], el cual prueba la estabilidad y por lo tanto la unicidad de la densidad y los parámetros de Lamé con respecto a observaciones en una parte del dominio para la ecuación de la elasticidad lineal dinámica. Sin embargo no se prueba la determinación de un potencial y además se requieren observaciones internas. Este trabajo presenta entonces resultados nuevos en este ámbito ya que se estudia específicamente el sistema de Reissner-Mindlin, obteniendose estabilidad en el término de orden cero con observaciones sobre la frontera y además se prueba la existencia, unicidad y regularidad de sus soluciones, para el caso en donde los parámetros de Lamé dependen de la posición, lo cual generaliza lo hecho en [Wu04], donde el autor los asume constantes y ambos positivos.

Algunos resultados sobre el problema del bilaplaciano y que corresponde a la segunda rama de investigación en problemas inversos y elasticidad lineal, son: [KLU12], en donde se demuestra la unicidad en la recuperación de una parturbación de primer orden $A(x) \cdot D + q(x)$ del bilaplaciano, bajo condiciones de borde tipo Navier y con datos parciales; también, en [KP12] se prueba que es posible determinar de manera única una perturbación de orden cero, del operador poliarmónico (i.e. $(\Delta u)^m + q(x)$, $m \geq 2$), con observaciones espectrales, esto es que los datos corresponden a los valores propios y las derivadas normales de las funciones propias; por úlitmo [PG11] estudia la ecuación isotrópica de la elasticidad lineal en régimen estacionario, donde se obtiene como aplicación de un resultado más general, la unicidad de los parámetros de Lamé en función de observaciones en la frontera del dominio. Para esta clase de problemas, donde se busca determinar la unicidad de parámetros en ecuaciones elípticas, se utilizan otro tipo de técnicas que no requieren de desigulades de Carleman a diferencia de los resultados de estabilidad.

0.3. Estructura del Trabajo

Este trabajo se estructura de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se introducen de manera breve los Problemas Inversos en EDPs y se da un ejemplo clásico de éstos. Luego, se presenta la desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas, se definen funciones de peso que serán útiles en capítulos posteriores y se explica en pocas palabras el procedimiento bajo el cual se demostraron los teoremas de estabilidad. Finalmente se deducen desde la elasticidad lineal, los dos modelos de placas que se estudiaran.

En el Capítulo 2 pasamos directamente a los resultados principales junto a sus respectivas demostraciones. Éstos corresponden a la obtención de desigualdades de Carleman y de estabilidad sobre un potencial en función de los datos, para cada modelo de placas. Con el propósito de facilitar la comprensión de las demostraciones, los lemas y teoremas auxiliares utilizados en éstas, son solamente enunciados.

En el Capítulo 3 se plantean nuevamente y se prueban los resultados auxiliares correspondientes a la estimación de Carleman para la ecuación de ondas acústicas y tres estimaciones de energía, los cuales fueron utilizados en las demostraciones del capítulo anterior.

En el Capítulo 4 se prueban los teoremas de existencia, unicidad y regularidad de las soluciones para el sistema de ecuaciones de Reissner-Mindlin.

Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones rescatadas de este trabajo y se proponen trabajos futuros relacionados directamente con los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de enunciar y demostrar los resultados principales que se obtuvieron en esta memoria es necesario tener en cuenta algunas definiciones básicas de la teoría de problemas inversos y dar una breve noción de las desigualdades de Carleman. Además se presenta una deducción de los modelos de placas de Reissner-Mindlin y Kirchhoff-Love, desde un punto de vista variacional a partir de la teoría de la elasticidad lineal.

1.1. Introducción a los Problemas Inversos en EDP

Las ecuaciones en derivadas parciales desde hace muchos años han demostrado ser una herramienta muy poderosa al momento de modelar una gran variedad de fenomenos físicos o de otra naturaleza. Haciendo uso de esta teoría es posible estudiar con gran presición algún evento, fenómeno o sistema, mediante su descripción o modelo matemático (ecuación diferencial parcial) el cual depende de propiedades intrínsecas del medio que denominamos parámetros. Se define entonces el *operador de mediciones* $\mathcal{M}$ o *problema directo*, como la aplicación que a cada valor del parámetro $x \in \mathcal{X}$ le asigna las mediciones o datos del modelo, $y \in \mathcal{Y}$, con $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ típicamente espacios de Banach o Hilbert, es decir,

$$y = \mathcal{M}(x), \quad \text{para } \ x \in \mathcal{X}, \ y \in \mathcal{Y}. \tag{1.1}$$

En otras palabras, dado que conocemos las reglas del comportamiento de un sistema físico, resolver el problema directo corresponde a obtener las mediciones correspondientes, por lo tanto tiene asociadas las preguntas sobre la existencia y unicidad de las soluciones y también la dependencia de éstas con respecto a los parámetros. Resulta natural entonces plantearse el problema en sentido contrario, esto es, si conocemos la solución al probema directo y por lo tanto tenemos acceso a las mediciones del sistema ¿es posible inferir algo sobre las propiedades o parámetros de éste?.

Un *problema inverso* consiste en encontrar alguna propiedad desconocida del medio, objeto o sistema que estemos analizando a partir de mediciones controladas y haciendo uso del modelo matemático que describe el fenómeno en estudio, lo que en términos del operador de mediciones corrresponde a encontrar el valor $x \in \mathcal{X}$ del parámetro, a partir de las observaciones $y \in \mathcal{Y}$ tal que se tenga (1.1). Luego, es evidente el gran interes e importancia práctica que despiertan en matemáticos y en general en científicos, puesto que sientan las bases teóricas de técnicas de detección empleadas actualmente en las ciencias e industrias, como lo son la teledetección (obtención de información de un objeto o fenómeno sin tener contacto físico con él) y el testeo no destructivo (evaluar propiedades de un objeto o sistema sin causarle daño). Uno de los ejemplos más famosos es el bien conocido *Problema de Calderón*, llamado así en honor al reconocido matemático argentino Alberto Calderón y que constituye la base matemática de la Tomografía por Impedancia Eléctrica que es un método de testeo no destructivo para generar imágenes médicas. El problema plantea lo siguiente: ¿es posible, mediante la medición de corriente eléctrica y voltaje en el borde de un medio, determinar la conductividad eléctrica de éste?. En otras palabras, si llamamos Ω al medio, $u(x)$ al potencial en su interior y $\gamma(x)$ a la conductividad eléctrica, al aplicar un voltaje $f(x)$ en la frontera del medio $\partial\Omega$ sabemos que u satisface

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \gamma(x) \nabla u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{array}$$

y se induce una corriente $\gamma(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ en el borde del dominio. Luego el problema de Calderón intenta determinar el valor de $\gamma(x)$ en todo el medio a través de la información que otorgan las mediciones de voltaje y corriente y que están representadas por el mapeo Dirichlet-Neumann

$$\Lambda_\gamma f = \gamma \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}.$$

Típicamente al considerar un problema inverso y por lo tanto un operador de mediciones $\mathcal{M}(\cdot)$, existen cuatro interrogantes que se pretenden responder:

1. **Unicidad.** ¿Si para dos valores del parámetro las observaciones son iguales entonces los valores son iguales?, es decir se quiere saber si hay inyectividad del operador de mediciones:
$$\mathcal{M}(x_1) = \mathcal{M}(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
2. **Reconstrucción.** Encontrar algún procedimiento numérico que nos permita reconstruir el parámetro a partir de los datos.
3. **Estabilidad.** ¿Es posible estimar el error de reconstrucción del parámetro en función del error obtenido en las mediciones? En otras palabras, se busca determinar si existe alguna *estimación de estabilidad* de la forma:
$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}} \leq \omega \left(\|\mathcal{M}(x_1) - \mathcal{M}(x_2)\|_{\mathcal{Y}} \right),$$
en donde $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función creciente tal que $\omega(0) = 0$ y es llamada el módulo de continuidad de operador $\mathcal{M}^{-1}$. Estas desigualdades cuantifican como el error en la mediciones es traspasado al error en la reconstrucción.

4. **Datos Parciales.** Se busca responder las preguntas anteriores utilizando ahora observaciones en una porción menor del dominio o de su frontera, es decir, dado que tenemos acceso a datos parciales, se quiere determinar si hay unicidad, estabilidad o reconstrucción del parámetro.

En este trabajo nos centraremos en responder la tercera interrogante para dos sistemas que modelan el comportamiento de placas en el tiempo al estar bajo fuerzas externas. Para más ejemplos y profundizar más sobre problemas inversos ver [Bal11] y [Isa06].

1.2. Desigualdades de Carleman y método de Bukhgeim-Klibanov

Una desigualdad de Carleman corresponde a una estimación de la energía de un sistema ponderada por una cierta función de peso, en función de la fuente y las observaciones que pueden ser internas o sobre la frontera. Existen una gran variedad de estas estimaciones las cuales se diferencian en el tipo de peso que acompaña a los términos en la desigualdad, sin embargo se cuenta con una teoría general iniciada por Hörmander, la que establece condiciones necesarias y suficientes sobre los pesos para garantizar la existencia de estas desigualdades.

Dentro de sus aplicaciones, además de ser empleadas en la obtención de estabilidad en problemas inversos, resultan ser una herramienta muy útil en la teoría de control en EDPs y en la demostración de propiedades para ciertas ecuaciones como es la continuación única.

A modo de ejemplo veamos la desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas. Para Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $\Gamma_0 \subseteq \partial\Omega$, $T > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$, definimos el conjunto

$$\Gamma_{x_0} := \{x \in \partial\Omega \mid (x - x_0) \cdot n > 0\}, \tag{1.2}$$

y las funciones de peso como:

Definición 1.1 (Funciones de peso)

$$\psi(x,t) := |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0, \quad 0 < \beta < 1,$$

con M_0 tal que

$$\forall (x,t) \in \Omega \times (-T, T),\ \psi(x,t) \geq 1.$$

Y para $r > 0$,

$$\varphi(x,t) := e^{r\psi(x,t)},$$

donde omitimos la dependencia en r.

Luego, para los pesos recién definidos se tiene la siguiente desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas con observaciones en la frontera,

Teorema 1.2 *Si $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$ es tal que $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_{x_0}$, entonces para todo $M > 0$ existen $r_0 > 0$ y $s_0 > 0$ y una constante $C = C(r_0, s_0, \Omega, \beta, x_0, M)$ tal que para todo $p \in L^\infty(\Omega)$ con $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, se tiene que para cada $r \geq r_0$, $s \geq s_0$ y $u \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$ tal que, $u_{tt} - \Delta u \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$, $u = 0$ en $\partial\Omega \times (-T, T)$, $u(\pm T) = u_t(\pm T) = 0$,*

$$\begin{aligned} sr \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} \varphi e^{2s\varphi}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dxdt + s^3 r^3 \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} \varphi^3 e^{2s\varphi} |u|^2 \\ \leq \quad C \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |u_{tt} - \Delta u + pu|^2 dxdt + Csr \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_0} \varphi e^{2s\varphi} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 (x - x_0) \cdot n. \end{aligned}$$

La demostración de una versión más general de esta desigualdad (donde no se asume la condición de borde nula) se encuentra en el capítulo de resultados auxiliares y se realizó basandose en lo hecho en [FI96] y [Pue], donde en este último artículo se estudian además aplicaciones al problema inverso de estabilidad para un potencial sobre la ecuación de ondas y a un problema de control.

Como aplicación de estas desigualdades el *método de Bukhgeim-Klibanov* introducido en [BK81], las utiliza para resolver el problema inverso de estabilidad de algún parámetro. Si llamamos q_1 y q_2 a dos valores del mismo parámetro, cada uno de éstos tiene asociada una solución, $u(q_1)$ y $u(q_2)$, a su respectivo problema directo y además se supone que una de éstas trayectorias en conocida y viviendo en algún espacio adecuado, suficientemente regular. La idea de esta metodología es que por medio de la desigualdad de Carleman, podamos estimar la diferencia de los parámetros $d = q_1 - q_2$ en función de las observaciones en la frontera que aparecen en la desigualdad. Para lograr lo anterior se considera el problema resuelto por $z' = u_t(q_1) - u_t(q_2)$, que tiene como término de fuente a la diferencia de q_1, q_2 y en donde se deriva en tiempo para hacer aparecer d en las condiciones iniciales. Luego haciendo uso de desigualdades de energía, somo capaces de estimar algunas normas de las soluciones y sus derivadas, en función de las fuentes y los estados iniciales.

1.3. De la Elasticidad Lineal a los modelos de Placas

La teoría de la elasticidad es una rama de la física perteneciente a la mecánica de sólidos deformables, que estudia el comportamiento de un cuerpo sólido, es decir su movimiento y deformaciones, cuando se encuentra bajo la acción de fuerzas externas. Si una de las dimensiones del sólido es muy pequeña en comparaciones a las otras, éste pasa a llamarse *placa*, por lo tanto los modelos de placas analizan los movimientos y deformaciones que experimenta un cuerpo de este tipo a raíz de las acciones de fuerzas externas. En lo que sigue veremos una deducción de las ecuaciones de placas que estan involucradas en este trabajo desde un punto de vista variacional.

1.3.1. Elasticidad Lineal

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^3$ que representa la configuración inicial o de referencia de un objeto sólido, es decir Ω corresponde a un cuerpo en estado natural sin deformaciones ni esfuerzos actuando sobre él. El estado actual del cuerpo en el tiempo t está dado por la función

$$\phi \ : \ \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$$

que representa la posición en tiempo t del punto x en la configuración de referencia $\bar{\Omega}$ y que suponemos suficientemente suave. Luego es posible expresar ϕ de la siguiente manera

$$\phi(x,t) = id(x) + u(x,t), \tag{1.3}$$

donde u es el desplazamiento del cuerpo con respecto a su posición inicial y que suponemos pequeño.

Se tiene que para todo tiempo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|\phi(x+z,t) - \phi(x,t)\|^2 &= \|\nabla\phi(x,t) \cdot z - o(z)\|^2 \\
&= \|\nabla\phi(x,t) \cdot z\|^2 + o(\|z\|^2) \\
&= z^T \nabla\phi^T \nabla\phi z + o(\|z\|^2),
\end{aligned}$$

donde la matriz $C := \nabla\phi^T \nabla\phi$ describe la transformación de un elemento de longitud y la matriz $E := \frac{1}{2}(C - I)$ representa la deformación del cuerpo que usando (1.3) se escribe de la forma

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i,j \leq 3.$$

Despreciando los términos cuadráticos, en la teoría de elasticidad lineal se define el *tensor de deformaciones*, ε, como el gradiente simetrizado de u, esto es

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i,j \leq 3. \tag{1.4}$$

De las segunda ley del movimiento de Newton, si llamamos $\rho(x)$ a la densidad del objeto, $F : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ a un campo de fuerzas aplicada al cuerpo Ω, donde FdV es la fuerza actuando sobre el elemento de volumen dV en el tiempo t y si las fuerzas superficiales están dadas por $\tau : \Omega \times [0,\infty) \times S^2 \to \mathbb{R}^3$, llamado el vector de esfuerzos, con S^2 denotando la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y donde el elemento de área dA aporta en $\tau(x,t,n)dA$ a la fuerza total en el tiempo t y dirección n, entonces para $\omega \subseteq \Omega$ cualquiera, se tiene la igualdad

$$\int_\omega F(x,t)dV + \int_{\partial\omega} \tau(x,t,n)dA = \int_\omega \rho(x)\phi_{tt}(x,t)dV. \tag{1.5}$$

Cauchy reformuló la igualdad anterior demostrando que existe un campo tensorial $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^3$ (denotamos por $\mathbb{S}^3$ al espacio de las matrices simetricas de 3×3), llamado *Tensor de Esfuerzos de Cauchy*, que satisface

$$\tau(x,t,n) = \sigma(x,t)n, \quad \forall(x,t) \in \Omega \times [0,T], \ n \in S^2. \tag{1.6}$$

Entonces, del teorema de la divergencia aplicado a (1.5) y usando además que $\phi_{tt} = u_{tt}$, se tiene la identidad

$$\int_\omega F(x,t)dV = \int_\omega \rho(x)u_{tt}(x,t)dV - \int_{\partial\omega} \sigma(x,t)ndA = \int_\omega \rho(x)u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}(\sigma(x,t))dV,$$

para todo $\omega \subseteq \Omega$, por lo tanto se obtiene la *ecuación de movimiento de la elasticidad*:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}(\sigma(x,t)) = F(x,t), \quad x \in \Omega, \ \forall 0 \le t \le T, \tag{1.7}$$

donde recordemos que Ω es el cuerpo en su estado de referencia (sin deformaciones).

Es posible además demostrar que cuando el sólido es homogeneo e isotrópico, existe una relación entre el tensor de esfuerzos y el tensor de deformaciones llamada *ecuación constitutiva* o también *ley lineal de los materiales de Hooke*:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon)Id \tag{1.8}$$

donde λ y μ son los *coeficientes de Lamé* que pueden depender de la posición y el tiempo. λ describe el esfuerzo causado por los cambios en la densidad del cuerpo y es llamada *el primera coeficiente de Lamé* y por otra parte, μ se relaciona con las deformaciones por fuerzas aplicadas paralelas a una cara del cuerpo mientras que la cara opuesta se mantiene fija a causa de otra fuerza igual y es llamado *shear modulus* del material. Generalmente por simplicidad son considerados constantes.

Observación 1.1 Los coeficientes de Lamé se relacionan con otras magnitudes que en ocasiones son usadas, éstas son el *Módulo de Young* E y el *Radio de Poisson* ν y satisfacen que

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{1.9}$$

Observación 1.2 De la definición $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$, se tiene que $\operatorname{tr}(\varepsilon(u)) = \operatorname{div}(u)$.

Observación 1.3 Como el tensor de Cauchy es simétrico, es decir $\sigma = \sigma^T$, entonces

$$\sigma : \nabla u = \sigma : \varepsilon(u).$$

En lo que sigue, los elementos en $\mathbb{R}^2$ serán denotados por $x = (x_1, x_2)$.

1.3.2. Placas

Consideremos ahora un cuerpo de espesor delgado $h(x_1, x_2, t)$ y densidad $\rho(x_1, x_2, t)$, cuya superficie media coincida con el plano-(x_1, x_2). En lo que sigue denotaremos por

$$x = (\bar{x}, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Definimos una placa $\Omega = \omega \times (-\frac{h(\bar{x},t)}{2}, +\frac{h(\bar{x},t)}{2})$, con $\omega \subseteq \mathbb{R}^2$, como un cuerpo que al estar sujeto a fuerzas externas, que suponemos ortogonales a la superficie media, satisface las hipótesis que se muestran en la siguiente tabla:

H1	*Hipótesis de Linealidad.* Todo segmento lineal del cuerpo, normal a la superficie media de éste, sufre deformaciones lineales y su imagen (a travez de la deformación) es también una linea recta.
H2	Los desplazamientos en la dirección vertical (eje-z) no dependen de la cordenada z.
H3	Los puntos pertenecientes a la superficie media solo se deforman en la dirección z.
H4	No hay fuerzas internas en la dirección vertical, es decir, el esfuerzo normal σ_{33} es nulo.

Tabla 1.1: Hipótesis de Reissner y Mindlin para placas.

Estas hipótesis implican que la función de desplazamiento u tenga la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} u_i(x,t) & = & -x_3\theta_i(\bar{x},t), \qquad i=1,2 \\ u_3(x,t) & = & w(\bar{x},t), \end{array} \tag{1.10}$$

donde w es el *desplazamiento normal* y $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ son los *ángulos de rotación* del sólido en la posición $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y tiempo t.

Como la placa es de la forma $\Omega = \omega \times (-\frac{h(\bar{x},t)}{2}, +\frac{h(\bar{x},t)}{2})$, su borde estará definido como:

$$\partial\Omega := \partial\omega \times (-\frac{h(\bar{x},t)}{2}, +\frac{h(\bar{x},t)}{2}). \tag{1.11}$$

Reissner-Mindlin

Supongamos que Ω es una placa de espesor $h(\bar{x},t)$, con $\omega \in \mathbb{R}^2$, abierto, acotado, con frontera suave y sea $\Gamma_0 \subseteq \partial\omega$, un abierto no vacío. Además consideremos el intervalo de tiempo $[0,T]$, $T > 0$. En lo que sigue consideraremos la siguiente condición de borde:

$$u(x,t) = 0, \quad \forall\, x \in \Gamma_0 \times (-\frac{h(\bar{x},t)}{2}, +\frac{h(\bar{x},t)}{2}), \forall\, 0 \le t \le T, \tag{1.12}$$

que significa que la placa se encuentra fija en la porción de borde Γ_0. Veremos más adelante que es posible dotar a la placa de otros tipos de condiciones de borde. Definimos entonces $V = \{(\psi, \alpha) \in L^2(0,T;(H^1(\omega))^3) \mid \psi_1, \psi_2, \alpha = 0 \text{ en } \Gamma_0, \forall\, 0 \le t \le T\}$, y consideramos las funciones test $(\psi = (\psi_1, \psi_2), \alpha) \in V$ tales que $v = (v_1, v_2, v_3)$ está definido como

$$\begin{array}{rcl} v_i(x) & = & -x_3\psi(\bar{x},t), \quad i=1,2 \\ v_3(x) & = & \alpha(\bar{x},t), \end{array} \tag{1.13}$$

y satisface la condición de borde Dirichlet, $v|_{\Gamma_0} = 0$.

Multiplicando (1.7) por v, integrando sobre $\Omega = \omega \times (-\frac{h(\bar{x},t)}{2}, +\frac{h(\bar{x},t)}{2})$ y usando integración por partes se obtiene

$$\int_{\Omega} \rho u_{tt} v + \int_{\Omega} \sigma(u) : \nabla v - \int_{\partial\Omega} \sigma(u) n v = \int_{\Omega} F v$$

que gracias a una de las observaciones anteriores equivale a

$$\int_{\Omega} \rho u_{tt} v + \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) - \int_{\partial\Omega} \sigma(u) n v = \int_{\Omega} F v. \tag{1.14}$$

Otra forma de expresar la igualdad anterior resulta de aplicar la ecuación constitutiva (1.8),

$$\int_{\Omega} \rho u_{tt} v + 2\int_{\Omega} \mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \int_{\Omega} \lambda \mathrm{div}(u)\mathrm{div}(v) - \int_{\partial\Omega} \sigma(u) n v = \int_{\Omega} F v, \tag{1.15}$$

y definimos las forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$a(u,v) := \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) = 2\int_{\Omega} \mu\varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \int_{\Omega} \lambda \mathrm{div}(u)\mathrm{div}(v). \tag{1.16}$$

La *desigualdad de Korn* (ver (3.18), capt. VI, en [Bra07]) permite demostrar la $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$-coercividad de $a(u,v)$, donde $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ en } \Gamma_0\}$.

Por otra parte, recordando los coeficientes de Lamé y su relación con el módulo de Young E y el shear modulus ν en (1.9), podemos reescribir la ecuación constitutiva como

$$\sigma = 2\varepsilon\frac{E}{2(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{tr}(\varepsilon)Id$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij} \\
&= \frac{E}{(1+\nu)}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right).
\end{aligned}$$

donde δ_{ij} corresponde a la Delta de Kronecker y usamos la notación de Einstein, $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Usando la hipótesis H4 se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)}\left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\right) = 0 \\
\Rightarrow \quad \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

por lo tanto, el tensor de esfuerzos de Cauchy queda

$$\begin{cases} \sigma_{11} &= \dfrac{E}{(1+\nu)}\left(\varepsilon_{11}+\dfrac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right)\\ \sigma_{22} &= \dfrac{E}{(1+\nu)}\left(\varepsilon_{22}+\dfrac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\right)\\ \sigma_{33} &= 0\\ \sigma_{ij} &= \dfrac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij}, \quad i\neq j, \end{cases} \tag{1.18}$$

mientras que de la definición del tensor de deformaciones ε, de (1.10) y de (1.17) se obtiene

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii}(u) &= -x_3\dfrac{\partial\theta_i}{\partial x_i}, \quad i=1,2\\ \varepsilon_{33}(u) &= -\dfrac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\\ \varepsilon_{ij}(u) &= -\dfrac{x_3}{2}\left(\dfrac{\partial\theta_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\theta_j}{\partial x_i}\right), \quad i\neq j\in\{1,2\}\\ \varepsilon_{i3}(u) &= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_i}-\theta_i\right), \quad i=1,2. \end{cases} \tag{1.19}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \sigma(u):\varepsilon(u) &= \frac{E}{1+\nu}[(\varepsilon_{11}(u)\varepsilon_{11}(v)+\varepsilon_{22}(u)\varepsilon_{22}(v)+\varepsilon_{12}(u)\varepsilon_{12}(v)+\varepsilon_{21}(u)\varepsilon_{21}(v))\\ &\quad +\frac{\nu}{1+\nu}(\varepsilon_{11}(u)+\varepsilon_{22}(u))(\varepsilon_{11}(v)+\varepsilon_{22}(v))+2(\varepsilon_{13}(u)\varepsilon_{13}(v)+\varepsilon_{23}(u)\varepsilon_{23}(v))]\\ &= \frac{Ez^2}{1-\nu^2}\left((1-\nu)\varepsilon(\theta)\varepsilon(\psi)+\nu\mathrm{div}(\theta)\mathrm{div}(\psi)\right)+\frac{E}{2(1+\nu)}(\nabla w-\theta)(\nabla\alpha-\psi) \end{aligned}$$

con $\varepsilon(\theta)=\dfrac{1}{2}(\nabla\theta+\nabla\theta^T)$.

Luego, reemplazando lo anterior en (1.14), integrando en la tercera coordenada x_3 y definiendos la *rigidez flexural* como

$$D(\bar{x},t):=h^3(\bar{x},t)\cdot\bar{D}(\bar{x},t), \quad \text{con} \quad \bar{D}=\frac{E(\bar{x},t)}{12(1-\nu(\bar{x},t)^2)}, \tag{1.20}$$

donde llamamos a $h(\bar{x},t)$ el *espesor elático* de la placa, se llega a que la formulación variacional es

$$\begin{aligned} \int_\omega \rho(\frac{h^3}{12}\theta_{tt}\psi+hw_{tt}\alpha)+\int_\omega h^3\bar{D}[(1-\nu)\varepsilon(\theta):\varepsilon(\psi)+\nu\mathrm{div}(\theta)\mathrm{div}(\psi)] \quad (1.21)\\ +\int_\omega \mu h(\nabla w-\theta)(\nabla\alpha-\psi)-\int_{\partial\Omega}\sigma(u)nv \;=\; \int_\omega (f,g)\cdot(\psi,\alpha) \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, donde

$$f(\bar{x},t) := \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (F_1,F_2)(x,t)dx_3, \quad g(\bar{x},t) := \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} F_3(x,t)dx_3, \tag{1.22}$$

con $F = (F_1, F_2, F_3)$ las cargas o fuerzas externas que experimenta la placa.

Llamemos I_ψ e I_α a las integrales sobre ω en (1.21) que en su integrando se encuentra ψ y α respectivamente y definamos

$$\sigma(\theta) := \bar{D}[(1-\nu)\varepsilon(\theta)+\nu\mathrm{tr}(\varepsilon(\theta))I_{2\times2}] = \bar{D}\cdot\begin{bmatrix} (\theta_x^1+\nu\theta_y^2) & \frac{(1-\nu)}{2}(\theta_y^1+\theta_x^2) \\ \frac{(1-\nu)}{2}(\theta_y^1+\theta_x^2) & (\nu\theta_x^1+\theta_y^2)\end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Suponiendo que (θ, w) son funciones regulares, podemos usar integración por partes de tal forma de pasar las derivadas sobre ψ y α a derivadas sobre θ y w. Se obtiene entonces que

$$\begin{aligned} I_\psi &= \int_\omega (h^3\sigma(\theta) : \varepsilon(\psi) - \mu h(\nabla w - \theta)\psi) \\ &= -\int_\omega [\mathrm{div}(h^3\sigma(\theta)) + \mu h(\nabla w - \theta)]\psi + \int_{\partial\omega} (\sigma(\theta)n\psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_\omega (\mu h(\nabla w - \theta)\nabla\alpha - q\alpha) \\ &= -\int_\omega [\mathrm{div}(\mu h(\nabla w - \theta)) + q]\alpha + \int_{\partial\omega} (\mu h(\nabla w - \theta)\alpha). \end{aligned}$$

De las definiciones de $\sigma(u)$, $\sigma(\theta)$ y la frontera $\partial\Omega$ en (1.11) e integrando sobre z se tiene además la siguiente igualdad:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(u)nv = \int_{\partial\omega} h^3\sigma(\theta)n\psi + \int_{\partial\omega} \mu t(\nabla w - \theta)\alpha,$$

por lo tanto la formulación variacional de la ecuación (1.7), bajo las hipótesis H1-H4, es decir, con el desplazamiento u dado por (1.10), es quivalente a

$$\begin{aligned} &\int_\omega [\rho\frac{h^3}{12}\theta_{tt} - \mathrm{div}(h^3\sigma(\theta)) + \mu h(\nabla w - \theta)]\psi \qquad (1.24) \\ &\qquad + \int \omega[\rho\frac{h^3}{12}w_{tt} - \mathrm{div}(\mu h(\nabla w - \theta)) + g]\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Luego, (θ, w) es solución del sistema de Reissner-Mindlin ([Gra91], pág 488)

$$\rho(\bar{x},t)\frac{h^3(\bar{x},t)}{12}\theta_{tt} - \mathrm{div}(h^3(\bar{x},t)\sigma(\theta)) - \mu(\bar{x},t)h(\bar{x},t)(\nabla w - \theta) = f(\bar{x},t) \tag{1.25}$$

$$\rho(\bar{x},t)h(\bar{x},t)w_{tt} - \mathrm{div}(\mu(\bar{x},t)h(\bar{x},t)(\nabla w - \theta)) = g(\bar{x},t), \tag{1.26}$$

sobre $\omega \subset \mathbb{R}^2$ y para todo tiempo $0 \leq t \leq T$. Las ecuaciones (1.25) y (1.26) definen el modelo de placas de *Reissner y Mindlin* con formulación variacional (para condiciones de borde Dirichlet homogeneas sobre Γ_0) dada por:

$$\int_\omega \frac{\rho h^3}{3}\theta_{tt}\psi + \rho h w_{tt}\alpha + \int_\omega (h^3\sigma(\theta) : \varepsilon(\psi) - \mu h(\nabla w - \theta)\psi) dx_1 dx_2$$
$$+ \int_\omega (\mu h(\nabla w - \theta)\nabla\alpha - g\alpha) dx_1 dx_2 - \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_0} h^3\sigma(\theta)n\psi - \int_{\partial\Omega\setminus\Gamma_0} \mu h(\nabla w - \theta)\alpha = 0,$$

c.t.p en $0 \leq t \leq T$ y para todo $(\psi, \alpha) \in V$.

El sistema anterior se puede dotar de condiciones de borde Dirichlet homogeneas en todo la frontera del dominio

$$\theta = 0,\ w = 0, \quad \text{en } \partial\Omega,$$

condiciones de tipo Neumann homogenea

$$\sigma(\theta)n = 0,\ \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \theta \cdot n\right) = 0, \quad \text{en } \partial\Omega$$

o también condiciones no homogeneas y mixtas. En la tabla 1.2 se muestran algunos tipos de condiciones de borde obtenidas de [DA89]. Las condiciones *hard clampled* y *free* corresponden a Dirichlet y Neumann homogeneas respectivamente.

	Escenciales	Naturales
hard clamped	$\theta \cdot n = 0$ $\theta \cdot s = 0$ $w = 0$	
soft clamped	$\theta \cdot n = 0$ $w = 0$	$s \cdot \sigma(\theta)n = 0$
hard simply supported	$\theta \cdot s = 0$ $w = 0$	$n \cdot \sigma(\theta)n = 0$
soft simply supported	$w = 0$	$n \cdot \sigma(\theta)n = 0$ $s \cdot \sigma(\theta)n = 0$
free		$n \cdot \sigma(\theta)n = 0$ $s \cdot \sigma(\theta)n = 0$ $\frac{\partial w}{\partial n} - \theta \cdot n = 0$

Tabla 1.2: Condiciones de borde

En este trabajo a modo de simplificación, hemos consideramos la densidad y el espesor elástico constantes, con $\rho \equiv 1$, $h \equiv h_0 > 0$ y añadimos un potencial $q : \Omega \to \mathbb{R}$ en (1.26), de este modo el sistema de ecuaciones con el cual trabajaremos es el siguiente:

Definición 1.3 *(Ecuaciones de Reissner-Mindlin)*
Para Ω*, un dominio acotado en* $\mathbb{R}^2$ *y* $T > 0$*, definimos las ecuaciones de Reissner-Mindlin como*

$$\begin{cases} \theta_{tt} - div(\sigma(\theta)) - \mu^*(x)\, h_0^{-2}(\nabla w - \theta) = f & en\ \Omega \times (0,T) \\ w_{tt} - div(\mu(x)(\nabla w - \theta)) = g & en\ \Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.27}$$

donde $\sigma(\theta) = 2\mu\varepsilon(\theta) + \lambda^* div(\theta) I$*,* $\varepsilon(\theta)$ *es el gradiente simetrizado de* $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ *y los coeficientes* $\mu^*(x)$ *y* $\lambda^*(x)$ *están definidos por*

$$\mu^*(x) = 12\mu(x), \quad \lambda^*(x) = \frac{2\mu(x)\lambda(x)}{(\lambda(x) + 2\mu(x))} \tag{1.28}$$

con $\mu, \lambda \in C^2(\bar{\Omega})$*.*

Kirchhoff-Love

A. E. H. Love formuló un nuevo modelo para placas basado en el de Reissner y Mindlin pero agregando una quinta hipótesis propuesta por G. Kirchhoff que dice lo siguiente

H5	*Hipótesis de Kirchhoff.* Las deformaciones de los vectores normales a la superficie media resultan ser también ortogonales a la superficie media deformada.

Esta última hipótesis supone que las rotaciones no son independientes de los desplazamientos normales, obteniendose la siguiente relación

$$\theta_i(\bar{x}) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(\bar{x}), \quad i = 1, 2. \tag{1.29}$$

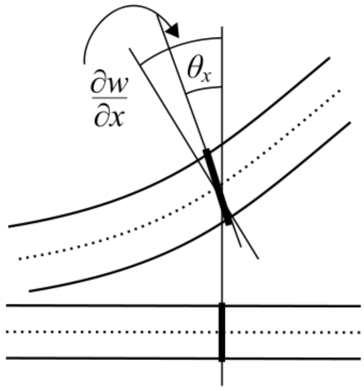

Figura 1.1: Hipótesis de Kirchhoff

Tomando divergencia en (1.25) y reemplazando en (1.26), es posible obtener

$$\rho(\bar{x},t)h(\bar{x},t)w_{tt} - \text{div}(\rho(\bar{x},t)\frac{h(\bar{x},t)^3}{12}\theta_{tt}) + \text{div}(\text{div}(h(\bar{x},t)^3\sigma(\theta)) = \tilde{g}(\bar{x},t) \tag{1.30}$$

con $\tilde{g} = g - \operatorname{div}(f)$. Considerando ahora la hipótesis de Kirchhoff en la definición de $\sigma(\theta)$ en (1.23),

$$\sigma(\theta) = \bar{D}(\bar{x},t) \cdot \begin{bmatrix} (\partial_{xx} w + \nu(\bar{x},t)\partial_{yy} w) & (1-\nu(\bar{x},t))\partial_{xy} w \\ (1-\nu(\bar{x},t))\partial_{xy} w & (\nu(\bar{x},t)\partial_{xx} w + \partial_{yy} w) \end{bmatrix},$$

por lo tanto al reemplazar $\sigma(\theta)$ en (1.30), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho h w_{tt} - \operatorname{div}(\frac{\rho h^3}{12}\nabla w_{tt}) + \partial_{xx}(D(\partial_{xx} w + \nu \partial_{yy} w)) \\ +2\partial_{xy}((1-\nu)D\partial_{xy} w) + \partial_{yy}(D(\nu\partial_{xx} w + \partial_{yy} w)) = \tilde{g}(\bar{x},t). \end{aligned}$$

con ρ, h, D y ν funciones definidas en $\omega \times (0,T)$.

Si suponemos que $\rho(\bar{x},t) \equiv \rho$, $h(\bar{x},t) \equiv h_0$ constantes y que también los son los coeficientes de Lamé en toda la placa o en otras palabras, suponemos que $\nu(\bar{x},t) \equiv \nu$ y $D(\bar{x},t) \equiv D$ son constantes, de la igualdad anterior se deduce la ecuación de placas de Kirchhoff-Love ([Lag89], pág 15)

$$\rho h_0 w_{tt} - \frac{\rho h_0^3}{12}\Delta w_{tt} + D\Delta^2 w = \tilde{g}(\bar{x},t), \tag{1.31}$$

que bajo el cambio en la escala de tiempo $t \to t\sqrt{D/\rho h_0}$ equivale a

$$w_{tt} - \gamma_0 \Delta w_{tt} + \Delta^2 w = \tilde{g}(\bar{x},t), \quad \text{en } \Omega \times (0,T), \tag{1.32}$$

con $\gamma_0 = h_0^2/12 > 0$ constante. Podemos ahora definir el segundo problema que consideramos en este trabajo y que está dado por:

Definición 1.4 *(Ecuación de Kirchhoff-Love)*
Para Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $T > 0$ y una constante $\gamma_0 > 0$, se define la ecuación de placas de Kirchhoff-Love como:

$$w_{tt} - \gamma_0 \Delta w_{tt} + \Delta^2 w = g(x,t) \quad en\ \Omega \times (0,T). \tag{1.33}$$

Capítulo 2

Resultados Principales

Se obtuvieron cuatro teoremas principales que establecen la existencia de desigualdades de Carleman y desigualdades de estabilidad Lispchitz para potenciales, en los dos problemas en consideración, el de Reissner-Mindlin y el de Kirchhoff-Love. Más específicamente, usando las desigualdades de Carleman se demuestra que es posible estimar el error en norma $L^2(\Omega)$ entre dos potenciales mediante el error cometido en las mediciones sobre la frontera del dominio para ambos modelos de placas.

La herramienta principal en la construcción de las estimaciones de Carleman, fue una desigualdad de la misma clase para la ecuación de ondas acústicas debido a que en ambos modelos uno es capaz de extraer ecuaciones de este tipo. Por otra parte, la metodología empleada en las demostraciones de ambos teoremas de estabilidad es conocida como el *método de Bukhgeim-Klibanov* ([BK81]), el cual necesita la existencia de desigualdades de Carleman y estimaciones de energía para las soluciones del problema en consideración. A modo de favorecer la lectura de las demostraciones, los resultados auxiliares son solamente enunciados en este capítulo y sus demostraciones se posponen hasta el siguiente.

2.1. Desigualdad de Carleman para Kirchhoff-Love

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$ y frontera suave. Definamos el operador diferencial asociado a la ecuación de placas de Kirchhoff-Love:

$$L := \partial_t^2 - \gamma_0 \Delta \partial_t^2 + \Delta^2, \tag{2.1}$$

con $\gamma_0 > 0$ constante. Es fácil ver que es posible dividir la ecuación $Lu = g$ en un sistema de ecuaciones compuesto por una elíptica y otro hiperbólica, ambas de segundo orden:

$$\begin{cases} L_1 u := -\gamma_0 \Delta u + u = v & \text{en } \Omega, \ \forall 0 \leq t \leq T, \\ L_2 v := v_{tt} - \gamma_0^{-1} \Delta v - \gamma_0^{-2} v = g - \gamma_0^{-2} u & \text{en } \Omega \times (-T, T), \end{cases} \tag{2.2}$$

es decir se tiene la relación

$$L_2(L_1 u) = Lu - \gamma_0^{-1} u. \tag{2.3}$$

Para un potencial $q \in L^\infty(\Omega)$, consideremos también el operador de Kirchhoff-Love con potencial,

$$L_q = \partial_t^2 - \gamma_0 \Delta \partial_t^2 + \Delta^2 + q, \tag{2.4}$$

y recordemos la función de peso $\varphi(x,t)$, introducida en la Definición 1.1.

El primer resultado principal corresponde a la obtención de una estimación de Carleman para (2.4) como se muestra a continuación.

Teorema 2.1 *Sea $u \in H^1(-T,T;H^3(\Omega))$ y $v := L_1 u$, tal que $L_2 v \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, $u=0, v=0$ en $\partial\Omega \times (-T,T)$ y $v(\pm T) = v_t(\pm T) = 0$ en Ω. Entonces, para $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$ tal que $\Gamma_0 \supset \Gamma_{x_0}$ y para todo $M > 0$, existen $r_0 > 0$, $s_0 > 0$ y una constante $C = C(s_0, r_0, \gamma_0, \Omega, \beta, x_0, M)$ tal que para cada $r \geq r_0$, $s \geq s_0$ y $q \in L^\infty(\Omega)$ con $\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, se tiene que*

$$\begin{aligned} & sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi|\Delta u_t|^2 + s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u_t|^2 + s^4r^4\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi^3|u_t|^2 \\ & +sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi(|\nabla\Delta u|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi^3|\Delta u|^2 + s^4r^4\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u|^2 \\ & +s^6r^6\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi|u|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1\zeta|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_2\zeta|^2 \\ & \qquad \leq C\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|L_q u|^2 + Cs^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $\zeta = e^{s\varphi}v$ y

$$\begin{aligned} P_1\zeta &:= \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \gamma_0\Delta\zeta + s^2r^2\varphi^2\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 - \gamma_0|\nabla\psi|^2\right)\zeta \\ P_2\zeta &:= (M_1-1)sr\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - \gamma_0\Delta\psi\right)\zeta - sr^2\varphi\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 - \gamma_0|\nabla\psi|^2\right)\zeta \\ & \quad -2sr\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \gamma_0\nabla\psi\cdot\nabla\zeta\right), \end{aligned}$$

con M_1 tal que

$$\frac{2\beta}{\beta+N} < M_1 < \frac{2}{\beta+N}.$$

Demostración. Es fácil ver que si tenemos la estimación (2.5) para el operador L definido en (2.1), en vez de L_q, notando que

$$\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|Lu|^2 \leq 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|L_q u|^2 + 2\|q\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|u|^2,$$

podemos absorber el último término con el lado izquierdo de la desigualdad de Carleman eligiendo s_0 más grande si es necesario y acotando la norma del potencial por M, así obtenemos (2.5). Basta entonces demostrar la desigualdad para el operador sin potencial L.

Como $u \in H^1(-T,T;H^3(\Omega))$ entonces $L_1 u = v \in H^1(-T,T;H_0^1(\Omega))$ y como L_1 es un operador diferencial solamente en la variable espacial, de manera similar y mucho más sencilla que la demostraciones del Teorema (3.4), puede probarse que para $\Gamma_0 \supset \Gamma_{x_0}$ existen $r_0 > 0$, $s_0 > 0$ y una constante $C = C(s_0, r_0, \Omega, \beta, x_0)$ tal que para todo $r \geq r_0$ y $s \geq s_0$ se tiene:

$$sr \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u|^2 + s^3r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|u|^2$$
$$\leq C \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_1 u|^2 + Csr \int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2. \tag{2.6}$$

y también

$$sr \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u_t|^2 + s^3r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|u_t|^2$$
$$\leq C \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_1 u_t|^2 + Csr \int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|^2, \tag{2.7}$$

donde los términos de borde están bien definidos ya que $u, u_t \in L^2(-T,T;H^3(\Omega))$.

Por otra parte se tiene que $L_2 v \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, $v = 0$ in $\partial\Omega \times (-T,T)$ y $v(\pm T) = v_t(\pm T) = 0$ sobre Ω, luego $\forall M > 0$, del Corolario (3.5) ([FI96], [Pue]), existe otra constante $\tilde{C} = \tilde{C}(s_0, r_0, \Omega, \beta, x_0, M)$ tal que para todo $r \geq r_0$ y $s \geq s_0$ se tiene:

$$sr \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi(|v_t|^2 + |\nabla v|^2) + s^3r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|v|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |P_1\zeta|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |P_2\zeta|^2$$
$$\leq \tilde{C} \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_2 v|^2 + \tilde{C}sr \int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2. \tag{2.8}$$

La integral sobre el borde tiene sentido gracias a la regularidad escondida de la ecuación de ondas, que establece que $\frac{\partial v}{\partial n} \in L^2(-T,T;L^2(\partial\Omega))$ (Teorema 1.1.4 en [Pue]).

Multiplicando (2.6) por s^3r^3 y como $v = L_1 u$, $1 < r < \varphi$, obtenemos

$$\frac{1}{C}\left[s^4r^4 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u|^2 + s^6r^6 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|u|^2\right] - s^4r^4 \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2$$
$$\leq s^3r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|v|^2$$
$$\leq s^3r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|v|^2. \tag{2.9}$$

Además, de (2.7) se tiene que

$$\frac{1}{C}\left[s^2r^2 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u_t|^2 + s^4r^4 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|u_t|^2\right] - s^2r^2 \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|^2$$
$$\leq sr \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|v_t|^2. \tag{2.10}$$

Por otro lado, de (2.1) y (2.2), tenemos las siguientes desigualdades

$$sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 \leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2\right), \tag{2.11}$$

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_2 v|^2 \leq \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|Lu|^2+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|u|^2, \tag{2.12}$$

donde, en (2.11), aparece una tercera derivada de u en el borde que está bien definida ya que

$$\left\|\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right\|_{L^2(-T,T;L^2(\partial\Omega))} \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^2(-T,T;L^2(\partial\Omega))} + \left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{L^2(-T,T;L^2(\partial\Omega))}.$$

Además, recordando que $\Delta u+u=v\in H^1(-T,T;H_0^1(\Omega))$, $-\nabla\Delta u-\nabla u=\nabla v$, entonces

$$\begin{aligned} &|\nabla\Delta u|^2\leq 2|\nabla v|^2+2|\nabla u|^2\\ &|\Delta u|^2\leq 2|v|^2+2|u|^2\\ &|\Delta u_t|^2\leq 2|v_t|^2+2|u_t|^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando las desigualdades (2.8) - (2.13) se deduce la desigualdad de Carleman para L:

$$\begin{aligned} &sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\Delta u_t|^2+s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u_t|^2+s^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|u_t|^2\\ &+sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi(|\nabla\Delta u|^2+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3|\Delta u|^2+s^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|\nabla u|^2\\ &+s^6r^6\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi|u|^2+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_1\zeta|^2+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_2\zeta|^2\\ &\qquad\leq C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|Lu|^2+Cs^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial u_t}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial\Delta u}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2\right). \end{aligned}$$

□

2.2. Estabilidad Lispchitz para un potencial L^∞ en Kirchhoff - Love

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular, $N\geq 2$, Γ_0 un subconjunto no vacío de $\partial\Omega$ y $T>0$. Consideremos $\gamma_0>0$ constante, $g\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $(h_0,h_1)\in H^3(\Omega)\times H^2(\Omega)$ y para $M>0$ consideramos un potencial $q\in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}\leq M$.

Consideremos el problema de condiciones de borde e iniciales de Kirchhoff-Love con potencial:

$$\begin{cases} w_{tt} - \gamma_0 \Delta w_{tt} + \Delta^2 w + qw = g & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ w = 0, \ \Delta w = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ w(0) = k_0, \ w_t(0) = k_1 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde se define la energía sus soluciones como:

Definición 2.2 (Energía de las soluciones de (2.14))

$$E(t) := \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |(-\gamma_0\Delta w + w)_t|^2 + \int_\Omega |\nabla(-\gamma_0\Delta w + w)|^2 + \int_\Omega |\Delta w|^2 + \int_\Omega |\nabla w|^2 + \int_\Omega |w|^2\right].$$

Supongamos que conocemos $u(p)$, solución del problema (2.14) con potencial $p \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ y con $g(x,t)$, k_0, k_1, suficientemente regulares, tal que $u(p) \in H^2(0,T;H^3(\Omega))$.

Teorema 2.3 *Asumamos lo siguiente*

- $T > \sup_{x\in\bar{\Omega}} |x - x_0| =: \rho$.
- $R(x,t) := u(p) \in H^1(0,T;L^\infty(\Omega))$, *con* $|R(x,0)|^2 \geq a_0 > 0$, $\forall x \in \Omega$.
- $q \in L^\infty(\Omega)$ *tal que* $\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$.

Si $u(q) \in H^2(0,T;H^3(\Omega))$ *es solución de* (2.14), *luego existe una constante*

$$C = C(\gamma_0, T, M, \|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))})$$

tal que

$$C^{-1}\|q-p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\frac{\partial u}{\partial n}(q) - \frac{\partial u}{\partial n}(p)\|^2_{H^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} + \|\frac{\partial \Delta u}{\partial n}(q) - \frac{\partial \Delta u}{\partial n}(p)\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))}. \tag{2.15}$$

Demostración. Definamos

$$y := u(q) - u(p), \quad d(x) := p(x) - q(x),$$

y notemos que y es solución del problema

$$\begin{cases} L_q y = d(x)R(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T), \\ y = 0, \ \Delta y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_t(0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

recordando la definición de L_q en (2.4).

Además, escribiendo

$$y' = \frac{\partial y}{\partial t}, \ \ R' = \frac{\partial R}{\partial t}$$

y extendiendo estas funciones de manera impar al intervalo $(-T,0)$, se tiene que y' satisface

$$\begin{cases} L_q y' = d(x)R'(x,t) & \text{en } \Omega\times(-T,T),\\ y'=0,\ \Delta y'=0 & \text{en } \partial\Omega\times(-T,T),\\ y'(0)=0,\ (-\gamma_0\Delta y'+y')_t(0)=d(x)R(x,0) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

De acuerdo al Lema 3.1 la energía de y' cumple la siguiente desigualdad:

Corolario 2.4 (Lema 3.1) *Existe una constante $K>0$ que depende de γ_0, T y M, tal que la energía asociada a* (2.17) *satisface la siguiente desigualdad*

$$E(t)\le K\|R(x,t)\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.18}$$

En efecto, aplicando el Lema 3.1 con g, h_0 y h_1 iguales a $d(x)R'(x,t)$, 0 y $d(x)R(x,0)$ respectivamente y observando además que

$$\|d(x)R'(x,t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le\|R'(x,t)\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d\|_{L^2(\Omega)},\quad E(0)=\frac{1}{2}\int_\Omega|d(x)R(x,0)|^2,$$

se concluye el Corolario.

Para un $\delta>0$ pequeño y una función cut-off $\eta\in C_0^\infty(-T,T)$ tal que

$$0\le\eta\le 1,\quad \eta(t)=1\ \forall t\in(-T+\delta,T-\delta)$$

consideremos la siguiente función

$$z(x,t):=\eta(t)y'(x,t),$$

la cual satisface el problema

$$\begin{cases} L_q z=\eta(t)d(x)R'(x,t)+2\eta_t(y'_t-\gamma_0\Delta y'_t)+\eta_{tt}(y'-\gamma_0\Delta y') & \text{en } \Omega\times(0,T),\\ z=0,\ \Delta z=0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,T),\\ z(0)=0,\ (-\gamma_0\Delta z+z)_t(0)=d(x)R(x,0) & \text{en } \Omega,\\ (-\gamma_0\Delta z+z)(\pm T)=(-\gamma_0\Delta z+z)_t(\pm T)=0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Debido a la regularidad que suponemos sobre $u(p)$, $u(q)$ y como $d(x)R'(x,t)$ está en $L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))$, entonces $z\in H^1(-T,T;H^3(\Omega))$, $Lz\in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$ y luego podemos aplicar sobre z la desigualdad de Carleman del Teorema 2.1.

Vamos a escoger β tal que

$$\frac{\rho^2}{T^2}<\beta<1,$$

de este modo, para un δ suficientemente chico, se tiene que la función de peso ψ (Definición 1.1) satisface

$$\psi(x,t)<M_0<\psi(x,0),\quad \forall\, t\in[-T+\delta,-T]\cup[T-\delta,T].$$

Como además las derivadas de η son nulas en $[-T+\delta, T-\delta]$, se deduce

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_q z|^2 &\leq C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\eta(t)^2 d(x)^2 (R(x,t))^2 \\
&\quad +C\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2se^{rM_0}}(|\eta_t|^2|y_t' - \gamma_0\Delta y_t'|^2 + |\eta_{tt}|^2|y' - \gamma_0\Delta y'|^2) \\
&\leq C\|R\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)}|d(x)|^2 \\
&\quad +C\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2sM_0}E(t),
\end{aligned}$$

para constantes $C>0$ apropiadas. Usamos entonces el Corolario 2.4 para obtener que

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_q z|^2 \leq \tilde{C}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)}|d(x)|^2, \tag{2.20}$$

con $\tilde{C}>0$ dependiendo de $\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}$.

Por otro lado, escribiendo $\zeta = e^{s\varphi}(-\gamma_0\Delta z + z)$, donde es fácil notar que satisface

$$\zeta(0) = \zeta(-T) = 0, \quad \zeta = 0 \text{ in } \partial\Omega\times(-T,T),$$

$$\zeta_t(t) = s^{s\varphi}(-\gamma_0\Delta z + z)_t - 2sr\varphi\beta t e^{s\varphi}(-\gamma_0\Delta z + z) \ \Rightarrow\ \zeta_t(-T) = 0,$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(P_1\zeta)\zeta_t &= \int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(\zeta_{tt} - \gamma_0\Delta\zeta + s^2r^2\varphi^2(|\psi_t|^2 - \gamma_0|\nabla\psi|^2)\zeta)\zeta_t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\zeta_t|^2\Big|_{-T}^{0} - \gamma_0\int_{\Omega}|\nabla\zeta|^2\Big|_{-T}^{0} \\
&\quad +s^2r^2\beta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\varphi^2(|\psi_t|^2 - \gamma_0|\nabla\psi|^2)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\zeta|^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\zeta_t(0)|^2 + \frac{1}{2}s^2r^2\beta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|\zeta|^2\frac{d}{dt}[\varphi^2(|\psi_t|^2 - \gamma_0|\nabla\psi|^2)] \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\zeta_t(0)|^2 - Cs^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi^3|\zeta|^2.
\end{aligned}$$

donde se usa que $\varphi > 1$. Luego, para un s_0 suficientemente grande y como $\zeta_t(0) = e^{2s\varphi(0)}d(x)R(x,0)$, $|R(x,0)|^2 \geq a_0 > 0\ \forall x\in\Omega$, existe una constante $C>0$ tal que

$$\sqrt{sr}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(P_1\zeta)\zeta_t + s^3r^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\varphi^3|\zeta|^2 \geq C\sqrt{sr}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(0)}|d(x)|^2 a_0. \tag{2.21}$$

También podemos acotar superiormente el lado izquierdo de la desigualdad anterior usando (2.20) y la desigualdad de Carleman (2.5) sobre z y obtenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{sr}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(P_1\zeta)\zeta_t + s^3r^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\varphi^3|\zeta|^2 & \\
\leq \int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|P_1\zeta|^2 + sr\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|\zeta_t|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\varphi^3|\zeta|^2 & \\
\leq C\cdot(\textit{Lado izquierdo de la desigualdad de Carleman para } z) & \\
\leq Cs^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0}e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial z_t}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial \Delta z}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|^2\right) & \\
+ C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}|L_q u|^2 & \\
\leq Cs^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0}e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial z_t}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial \Delta z}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|^2\right) & \\
+ C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi(0)}|d(x)|^2. &
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de lo anterior y (2.21), para un s_0 suficientemente grande se concluye que

$$\sqrt{sr}\int_{\Omega}e^{2s\varphi(0)}|d(x)|^2 \leq Cs^4r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0}e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial z_t}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial \Delta z}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right|^2\right), \qquad (2.22)$$

donde finalmente al volver a la función original $y = u(q) - u(p)$ se obtiene la desigualdad de estabilidad. □

Observación 2.1 Conociendo mejor donde viven las soluciones débiles de (2.14) y los resultados de regularidad asociados a esta ecuación, es posible bajar la regularidad de las soluciones $u(p)$, $u(q)$.

2.3. Desigualdad de Carleman para Reissner-Mindlin

Cnsideremos ahora Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ con frontera regular y denotamos por $\mathcal{L}^f$, $\mathcal{L}^g_q$ a los operadores diferenciales:

$$\mathcal{L}^f(\theta, w) := \theta_{tt} - \mathrm{div}(\sigma(\theta)) - \mu^*\, h_0^{-2}(\nabla w - \theta) \qquad (2.23)$$

$$\mathcal{L}^g_q(\theta, w) := w_{tt} - \mathrm{div}(\mu(\nabla w - \theta)) + qw, \qquad (2.24)$$

donde recordemos $\sigma(\theta) = 2\mu\varepsilon(\theta) + \lambda^*\mathrm{div}(\theta)I$ con $\varepsilon(\theta)$ el gradiente simetrizado de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ y los coeficientes $\mu^*(x)$ y $\lambda^*(x)$ están definidos por las relaciones

$$\mu^*(x) = 12\mu(x), \quad \lambda^*(x) = \frac{2\mu(x)\lambda(x)}{(\lambda(x)+2\mu(x))}, \qquad (2.25)$$

con $\mu, \lambda \in C^2(\bar{\Omega})$.

Al igual que en el caso de la ecuación de Kirchhoff-Love, necesitamos la existencia de una desigualdad de Carleman si queremos probar la estabilidad de un potencial en Reissner-Mindlin. A continuación veremos la prueba de la existencia de esta estimación, donde debemos asumir que se cumplen las siguientes hipótesis:

H1.- $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{\Omega}$ con $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_{x_0} = \{x \in \partial\Omega,\ (x-x_0)\cdot n > 0\}$ (n: normal exterior unitaria).
H2.- $\mu,\ \lambda \in C^2(\bar{\Omega})$ donde $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$, $\mu + \lambda \geq \tau_0 > 0$ y $\exists \theta_0 > 0$ tal que $\forall\ x \in \Omega$:

$$-1 + \theta_0 < \frac{\nabla\mu(x)\cdot(x-x_0)}{2\mu(x)} < 1 - \theta_0,$$

$$-1 + \theta_0 < \frac{\nabla(\lambda^*(x) + 2\mu(x))\cdot(x-x_0)}{2(\lambda^*(x)+2\mu(x))} < 1 - \theta_0.$$

Teorema 2.5 *Bajo* **H1, H2**, *para cada $M > 0$ existen $\beta \in (0,1)$, $s_0 > 0$, $r_0 > 0$ y una constante $C = C(\mu, \lambda, h, s_0, r_0, \Omega, \beta, x_0, M)$ tal que para cualquier potencial $q \in \mathcal{U}_M$, $s > s_0$, $r > r_0$ y (θ, w) suficientemente regular tal que $\theta = \vec{0}, w = 0$ en $\partial\Omega \times (-T,T)$ y $\theta(\pm T) = \theta_t(\pm T) = \vec{0}, w(\pm T) = 0, w_t(\pm T) = w_{tt}(\pm T) = 0$ sobre Ω, entonces*

$$\begin{aligned}
& sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial w_t}{\partial t}\right|^2\right) \\
& + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(|\nabla(\nabla\cdot\theta)|^2 + |\nabla(\nabla\wedge\theta)|^2 + |\nabla\theta|^2 + |\nabla w_t|^2 + |\nabla w|^2\right) \\
& + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3\left(|\nabla\cdot\theta|^2 + |\nabla\wedge\theta|^2 + |\theta|^2 + |w_t|^2 + |w|^2\right) \\
& + \sum_{i=1}^{6}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\left(\left|P_1^i\zeta_i\right|^2 + \left|P_2^i\zeta_i\right|^2\right) \\
& \qquad \leq C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\left(\left|\mathcal{L}^f\right|^2 + \left|\nabla\cdot\mathcal{L}^f\right|^2 + \left|\nabla\wedge\mathcal{L}^f\right|^2 + |\mathcal{L}^g|^2 + \left|\frac{\partial\mathcal{L}^g}{\partial t}\right|^2\right) \\
& \qquad + C\cdot sr\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\varphi\left(|(\nabla\theta).n|^2 + \left|\frac{\partial w_t}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n \\
& \qquad + C\cdot sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right) \\
& \qquad + C\cdot sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right) \\
& \qquad + C\cdot s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3\left(|\nabla\cdot\theta|^2 + |\nabla\wedge\theta|^2\right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde

$$\left.\begin{array}{rcl} P_1^i\zeta_i & := & \partial_t^2\zeta_i - \gamma_i\Delta\zeta_i + s^2r^2\varphi^2\zeta_i\left(\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 - \gamma_i\left|\nabla\psi\right|^2\right) - \nabla\gamma_i\nabla\zeta_i \\ P_2^i\zeta_i & := & (M_i-1)sr\varphi\zeta_i\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \gamma_i\Delta\psi\right) - sr^2\varphi\zeta_i\left(\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 - \gamma_i\left|\nabla\psi\right|^2\right) \\ & & -2sr\varphi\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\dfrac{\partial\zeta_i}{\partial t} - \gamma_i\nabla\psi\cdot\nabla\zeta_i\right) + sr\varphi\zeta_i\nabla\gamma_i\nabla\psi, \end{array}\right\} \quad (2.27)$$

con constantes $M_i > 0$ *apropiadas y* $\zeta_i = e^{s\varphi}\nu_i$ *para todo* $i = 1, ..., 6$,

$$\begin{array}{llllll} \nu_1 = \theta^1, & \nu_2 = \theta^2, & \nu_3 = \nabla\cdot\theta, & \nu_4 = \nabla\wedge\theta, & \nu_5 = w, & \nu_6 = w_t, \\ \gamma_1 = \mu(x), & \gamma_2 = \mu(x), & \gamma_3 = \lambda^*(x) + 2\mu(x), & \gamma_4 = \mu(x), & \gamma_5 = \mu(x), & \gamma_6 = \mu(x). \end{array}$$

Observación 2.2 En el teorema anterior, todos los términos en (2.26) tienen sentido si consideramos por ejemplo (θ, w) en $\left(H^2(-T,T;H^3(\Omega))\right)^2 \times H^3(-T,T;H^2(\Omega))$ o también $\partial_t^k(\theta, w) \in L^2(-T,T;(H^{3-k}(\Omega))^3)$ para $k = 0,1,2,3$ (Teorema 4.10 de regularidad, para $m = 2$).

Demostración. La demostración se basa en la utilización de la desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas acústicas (Teorema 3.4). Como el operador $\mathcal{L}_q^g$ (definido en (2.24)) es de este tipo, en un comienzo solo nos enfocaremos en $\mathcal{L}^f$ (definido en (2.23)) el cual es necesario dividir de tal forma que podamos también aplicarle la estimación del Teorema 3.4. Teniendo lo anterior en mente, calculemos explícitamente $\nabla\cdot\sigma(\theta)$ y luego su divergencia y rotor.

1.- Recordemos que $\sigma(\theta) = \mu(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) + \lambda^*(\nabla\cdot\theta)I$, luego tomando divergencia se obtiene

$$\nabla\cdot\sigma(\theta) = \mu\Delta\theta + (\mu+\lambda^*)\nabla(\nabla\cdot\theta) + (\nabla\cdot\theta)\nabla\lambda^* + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}})\nabla\mu. \quad (2.28)$$

Si reemplazamos ésta igualdad en la definición de L^f, somos capaces de escribir:

$$\begin{array}{rcl} \theta_{tt} - \mu\Delta\theta & = & \mathcal{L}^f + \mu^*h^{-2}((\nabla w) - \theta) + (\mu+\lambda^*)(\nabla(\nabla\cdot\theta)) \\ & & +(\nabla\cdot\theta)\nabla\lambda^* + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}})\nabla\mu. \end{array} \quad (2.29)$$

Tomando nuevamente divergencia pero ahora sobre (2.28), se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \nabla\cdot(\nabla\cdot\sigma(\theta)) & = & \mu\Delta(\nabla\cdot\theta) + \nabla\mu\cdot\Delta\theta + (\mu+\lambda^*)\Delta(\nabla\cdot\theta) + \nabla(\mu+\lambda^*)\nabla(\nabla\cdot\theta) \\ & & +\nabla\lambda^*\nabla(\nabla\cdot\theta) + (\nabla\cdot\theta)\Delta\lambda^* + \nabla\mu\cdot\nabla(\nabla\cdot\theta) + \nabla\mu\cdot\Delta\theta \\ & & +(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu \\ & = & (\lambda^* + 2\mu)\Delta(\nabla\cdot\theta) + 2\nabla\mu\cdot\Delta\theta + 2\nabla(\mu+\lambda^*)\cdot\nabla(\nabla\cdot\theta) \\ & & \Delta\lambda^*(\nabla\cdot\theta) + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu \\ & = & (\lambda^* + 2\mu)\Delta(\nabla\cdot\theta) + 2\nabla(\lambda^* + \mu)\nabla(\nabla\cdot\theta) \\ & & -2\nabla\mu\cdot(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta)) + \Delta\lambda^*(\nabla\cdot\theta) + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu \end{array}$$

donde la última igualdad se tiene gracias a la Proposición 5.1. Luego, la divergencia de $\mathcal{L}^f$ satisface

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\theta)_{tt}-(\lambda^*+2\mu)\Delta(\nabla\cdot\theta) &= \nabla\cdot\mathcal{L}^f+\nabla\cdot(\mu^*h^{-2}(\nabla w-\theta)) \\ &\quad +2\nabla(\lambda^*+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\theta)-2\nabla\mu\cdot(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta)) \\ &\quad +\Delta\lambda^*(\nabla\cdot\theta)+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}}):\nabla^2\mu.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Similarmente, por la Proposición 5.1, aplicando rotor en (2.28) se obtiene que

$$\begin{aligned}\nabla\wedge(\nabla\cdot\sigma(\theta)) &= \mu(\nabla\wedge\Delta\theta)+\nabla\mu\wedge\Delta\theta+(\mu+\lambda^*)\nabla\wedge\nabla(\nabla\cdot\theta) \\ &\quad +\nabla(\mu+\lambda^*)\wedge\nabla(\nabla\cdot\theta)+(\nabla\cdot\theta)\nabla\wedge\nabla\lambda^*+\nabla(\nabla\cdot\theta)\wedge\nabla\lambda^* \\ &\quad +(\nabla\wedge\nabla\theta+\nabla\wedge\nabla\theta^{\mathrm{T}})\nabla\mu+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\wedge\nabla^2\mu \\ &= \mu\Delta(\nabla\wedge\theta)+2\nabla\mu\wedge\nabla(\nabla\cdot\theta)-\nabla\mu\wedge(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta)) \\ &\quad +\nabla\mu\cdot(\nabla\wedge\nabla\theta)+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\wedge\nabla^2\mu,\end{aligned}$$

y por lo tanto el rotor de $\mathcal{L}^f$ satisface

$$\begin{aligned}(\nabla\wedge\theta)_{tt}-\mu\Delta(\nabla\wedge\theta) &= \nabla\wedge\mathcal{L}^f+\nabla\wedge(\mu^*h^{-2}(\nabla w-\theta)) \\ &\quad +2\nabla\mu\wedge\nabla(\nabla\cdot\theta)-\nabla\mu\wedge(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta)) \\ &\quad +\nabla\mu\cdot\nabla(\nabla\wedge\theta)+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\wedge\nabla^2\mu.\end{aligned} \tag{2.31}$$

En resumen, podemos escribir las cuatro ecuaciones de onda para θ ((2.29), (2.30), (2.31)) en una forma más compacta como sigue:

$$\partial_t^2\nu_i-\gamma_i\Delta\nu_i=F_i+A_i,\quad \text{for } i=1,2,3,4 \tag{2.32}$$

donde los valores de ν_i, γ_i, F_i y A_i se encuentran en las siguientes tablas.

$\nu_1=\theta^1$,	$\nu_2=\theta^2$,	$\nu_3=\nabla\cdot\theta$,	$\nu_4=\nabla\wedge\theta$
$\gamma_1=\mu(x)$,	$\gamma_2=\mu(x)$,	$\gamma_3=\lambda^*(x)+2\mu(x)$,	$\gamma_4=\mu(x)$
$F_1={\mathcal{L}^f}^1(x,t)$,	$F_2={\mathcal{L}^f}^2(x,t)$,	$F_3=\nabla\cdot\mathcal{L}^f(x,t)$,	$F_4=\nabla\wedge\mathcal{L}^f(x,t)$

Tabla 2.1: Valores de ν_i, γ_i, F_i en las cuatro ecuaciones de ondas que resultan al dividir la ecuación de θ en Reissner-Mindlin.

A_1	$=\mu^*h^{-2}((\nabla w)^1-\theta^1)+(\mu+\lambda^*)\nabla(\nabla\cdot\theta)^1+(\nabla\cdot\theta)(\nabla\lambda^*)^1+[(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\nabla\mu]^1$
A_2	$=\mu^*h^{-2}((\nabla w)^2-\theta^2)+(\mu+\lambda^*)\nabla(\nabla\cdot\theta)^2+(\nabla\cdot\theta)(\nabla\lambda^*)^2+[(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\nabla\mu]^2$
A_3	$=\nabla\cdot(\mu^*h^{-2}(\nabla w-\theta))+2\nabla(\lambda^*+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\theta)-2\nabla\mu\cdot(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta))$ $+\Delta\lambda^*(\nabla\cdot\theta)+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}}):\nabla^2\mu$
A_4	$=\nabla\wedge(\mu^*h^{-2}(\nabla w-\theta))+2\nabla\mu\wedge\nabla(\nabla\cdot\theta)-\nabla\mu\wedge(\nabla\wedge(\nabla\wedge\theta))$ $+\nabla\mu\cdot\nabla(\nabla\wedge\theta)+(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}})\wedge\nabla^2\mu.$

Tabla 2.2: Valores de A_i

Observación 2.3 Los super-índices $i = 1,2$ significan la componente de la función vectorial.

Por hipótesis sabemos que para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, $\nu_i \in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$, $\partial^2_{tt}\nu_i - \gamma_i \Delta \nu_i \in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$ y además $\nu_i(\pm T) = 0$ en Ω. También para cada γ_i, por **H2**,

$$\gamma_i(x) > \vartheta, \quad -1 + \theta_0 < \frac{\nabla \gamma_i(x) \times (x - x_0)}{2\gamma_i(x)} < 1 - \theta_0, \quad \forall x \in \Omega$$

para ciertas constantes positivas ϑ y θ_0. Sin embargo, solo $\nu_1 = \theta^1$ y $\nu_2 = \theta^2$ se anulan en la frontera de Ω. Ésto implica que ν_1, ν_2 satisfacen la desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas acústicas con condiciones de borde Dirichlet homogeneas y por otra parte, ν_3 y ν_4 satisfacen una generalización de aquella desidualdad que resulta al no considerar condiciones de borde y que corresponde al Teorema 3.4 (ver [FI96] y [Pue] para el caso de la ecuación de ondas). Luego existen constantes positivas C_1, C_2, C_3, C_4 tal que para $i = 1,2$,

$$\begin{aligned}
sr \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \varphi \left(\left| \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \right|^2 + |\nabla \nu_i|^2 \right) & \\
+ s^3 r^3 \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\nu_i|^2 \varphi^3 + \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} (|P_1^i \zeta_i|^2 + |P_2^i \zeta_i|^2) & \\
\leq C_i \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|F_i|^2 + |A_i|^2) + C_i sr \int_{-T}^{T} \int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi} \varphi \left| \frac{\partial \nu_i}{\partial n} \right|^2 (x - x_0) \cdot n &
\end{aligned} \tag{2.33}$$

mientras que para $i = 3,4$,

$$\begin{aligned}
sr \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \varphi \left(\left| \frac{\partial \nu_i}{\partial t} \right|^2 + |\nabla \nu_i|^2 \right) & \\
+ s^3 r^3 \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\nu_i|^2 \varphi^3 + \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} (|P_1^i \zeta_i|^2 + |P_2^i \zeta_i|^2) & \\
\leq C_i \int_{-T}^{T} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} (|F_i|^2 + |A_i|^2) & \\
+ C_i \left(sr \int_{-T}^{T} \int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi} \varphi \left(|\partial_t \nu_i|^2 + \left| \frac{\partial \nu_i}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial \nu_i}{\partial \tau} \right|^2 \right) + s^3 r^3 \int_{-T}^{T} \int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi} \varphi^3 |\nu_i|^2 \right) &
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Los términos P_j^i con $j \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, provienen de la descomposición del operador hiperbólico sorrespondiente a cada una de las cuatro ecuaciones de ondas en (2.32).

La suma de las desigualdades (2.33) y (2.34) nos da

$$
\begin{aligned}
sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|^2+|\nabla\theta|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial t}\right|^2+|\nabla(\nabla\cdot\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial t}\right|^2+|\nabla(\nabla\wedge\theta)|^2\right)\\
+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3(|\theta|^2+|\nabla\cdot\theta|^2+|\nabla\wedge\theta|^2)+\sum_{i=1}^{4}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(|P_1^i\zeta_i|^2+|P_2^i\zeta_i|^2)\\
\le C_\theta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^f|^2+|\nabla\cdot\mathcal{L}^f|^2+|\nabla\wedge\mathcal{L}^f|^2) \qquad (2.35)\\
+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\theta^1}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial\theta^2}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n\\
+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\Bigg(|\partial_t(\nabla\cdot\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial\tau}\right|^2\\
+|\partial_t(\nabla\wedge\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial\tau}\right|^2\Bigg)\\
+C_\theta s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3(|\nabla\cdot\theta|^2+|\nabla\wedge\theta|^2)\\
+C_\theta\sum_{i=1}^{4}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|A_i|^2,
\end{aligned}
$$

para alguna constante $C_\theta > 0$. Es fácil ver que en la desigualdad anterior los términos con θ en los A_i pueden ser absorvidos por el lado izquierdo escogiendo s_0 suficientemente grande. Además, los otros términos pueden ser acotados como sigue,

$$
\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\phi}|\mu^*h_0^{-2}\nabla w|^2 &\le \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(\mu^*)^2h_0^{-4}e^{2s\varphi}|\nabla w|^2, &(2.36)\\
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\cdot(\mu^*h_0^{-2}\nabla w)|^2 &\le (12)^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}h_0^{-2}|\nabla\cdot(\mu\nabla w)|^2, &(2.37)\\
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\wedge(\mu^*h_0^{-2}\nabla w)|^2 &\le 2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla(\mu^*h_0^{-2})\wedge\nabla w|^2\\
&\quad +2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(\mu^*)^2h_0^{-4}e^{2s\varphi}|\nabla\wedge(\nabla w)|^2\\
&\le 2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla(\mu^*h_0^{-2})|^2|\nabla w|^2, &(2.38)
\end{aligned}
$$

donde en (2.38) se usó que $\nabla\wedge(\nabla w)=0$ y que para todo vector $\vec{v_1},\vec{v_2}$, $|\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}|\le|\vec{v_1}||\vec{v_2}|$.

Al absorver términos en (2.35) y más las tres desigualdades anteriores (2.36)-(2.38), se obtiene la estimación:

$$
\begin{aligned}
&sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|^2+|\nabla\theta|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial t}\right|^2+|\nabla(\nabla\cdot\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial t}\right|^2+|\nabla(\nabla\wedge\theta)|^2\right)\\
&+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}\varphi^3(|\theta|^2+|\nabla\cdot\theta|^2+|\nabla\wedge\theta|^2)+\sum_{i=1}^{4}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(|P_1^i\zeta_i|^2+|P_2^i\zeta_i|^2)\\
&\qquad\le C_\theta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^f|^2+|\nabla\cdot\mathcal{L}^f|^2+|\nabla\wedge\mathcal{L}^f|^2)\\
&\qquad+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\theta^1}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial\theta^2}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n\\
&\qquad+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}e^{2s\varphi}\varphi\left(|\partial_t(\nabla\cdot\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+|\partial_t(\nabla\wedge\theta)|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right)\\
&\qquad+C_\theta s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}e^{2s\varphi}\varphi^3(|\nabla\cdot\theta|^2+|\nabla\wedge\theta|^2)\\
&\qquad+C_\theta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}(|\nabla w|^2+|\nabla\cdot(\mu\nabla w)|^2).
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Aquí aparecen dos términos que involucran a w en el lado derecho de la desigualdad, por lo tanto el siguiente paso en la demostración es tratar de absorverlos.

2.- La definición del operador $\mathcal{L}_q^g$ implica que w satisface

$$
\begin{aligned}
&w_{tt}-\mathrm{div}(\mu\nabla w)+qw=\mathcal{L}^g-\mu\nabla\cdot\theta+\nabla\mu\cdot\theta\\
&w|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0,\quad w(\pm T)=0 \text{ en } \Omega,
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

donde $w, w_{tt}-\mathrm{div}(\mu\nabla w)\in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$. Si derivamos (2.40) con respecto al tiempo t, se obtiene que $z=w_t$ es solución de:

$$
\begin{aligned}
&z_{tt}-\mathrm{div}(\mu\nabla z)+qz=\partial_t\mathcal{L}^g-\mu\nabla\cdot\theta_t+\nabla\mu\cdot\theta_t\\
&z|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0,\quad z(\pm T)=0 \text{ en } \Omega,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

donde además $z, z_{tt}-\mathrm{div}(\mu\nabla z)\in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$. Por lo tanto podemos aplicar la desigualdad de Carleman para la ecuación de ondas acústicas con condiciones Dirichlet homogeneas en (2.40) y (2.41) obteniendo

$$
\begin{aligned}
&sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial t}\right|^2+|\nabla w|^2\right)\varphi+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}|w|^2\varphi^3+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(|P_1^5\zeta_5|^2+|P_5^2\zeta_5|^2)\\
&\qquad\le C_w\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^g|^2+\|\mu\|^2_{C^0(\bar\Omega)}|\nabla\cdot\theta|^2+\|\mu\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}|\theta|^2)\\
&\qquad+C_w sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}e^{2s\varphi}\varphi\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2(x-x_0)\cdot n
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

y también

$$sr \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial w_t}{\partial t}\right|^2 + |\nabla w_t|^2\right)\varphi + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|w_t|^2\varphi^3$$
$$+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(|P_6^1\zeta_6|^2 + |P_6^2\zeta_6|^2) \tag{2.43}$$
$$\leq C_{w_t}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}(|\partial_t\mathcal{L}^g|^2 + \|\mu\|^2_{C^0(\bar{\Omega})}|\nabla\cdot\theta_t|^2 + \|\mu\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}|\theta_t|^2)$$
$$+C_{w_t}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left|\frac{\partial w_t}{\partial n}\right|^2(x-x_0)\cdot n,$$

con

$$\zeta_5 = e^{s\varphi}w, \quad \zeta_6 = e^{s\varphi}w_t. \tag{2.44}$$

Aquí, los P_i^j, $j\in\{1,2\}$, $i\in\{5,6\}$ definifos en (2.27), también provienen de la descomposición de los operadores hiperbólicos asociados a las ecuaciones de (2.40), (2.41).

3.- Si sumamos las desigualdades (2.39), (2.42) and (2.43), podemos absorber los términos que involucran a θ en los lados derechos de las estimaciones anteriores para w y w_t pero, aún no podemos absorver la divergencia de $\mu\nabla w$ que aparece en (2.39), por ésto necesitamos estimar éste término. Usando la ecuación en (2.40), para cierta constante $C>0$ se tiene la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\cdot(\mu\nabla w)|^2 \;&\leq\; C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^g|^2 + \|\mu\|^2_{C^0(\bar{\Omega})}|\nabla\cdot\theta|^2 + \|\mu\|^2_{C^1(\bar{\Omega})}|\theta|^2)\\ &+C\|q\|_\infty\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|w|^2 + C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|w_{tt}|^2. \end{aligned}\tag{2.45}$$

Finalmente, si unimos las estimaciones (2.39), con (2.42), (2.43) y (2.45), el lado derecho de la desigualdad queda:

$$C_\theta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^f|^2 + |\nabla\cdot\mathcal{L}^f|^2 + |\nabla\wedge\mathcal{L}^f|^2)$$
$$+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial\theta^1}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial\theta^2}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n$$
$$+C_\theta sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(|\partial_t(\nabla\cdot\theta)|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right.$$
$$\left.+|\partial_t(\nabla\wedge\theta)|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial\tau}\right|^2\right)$$

$$+C_\theta s^3 r^3 \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3(|\nabla\cdot\theta|^2 + |\nabla\wedge\theta|^2)$$

$$+C_\theta\Big(\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|\nabla w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^g|^2 + \|\mu\|^2_{C^0(\bar\Omega)}|\nabla\cdot\theta|^2 + \|\mu\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}|\theta|^2)$$

$$+\|q\|_\infty \int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|w_{tt}|^2\Big)$$

$$+C_w\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}(|\mathcal{L}^g|^2 + \|\mu\|^2_{C^0(\bar\Omega)}|\nabla\cdot\theta|^2 + \|\mu\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}|\theta|^2) +$$

$$C_w sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2(x-x_0)\cdot n$$

$$+C_{w_t}\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}(|\partial_t\mathcal{L}^g|^2 + \|\mu\|^2_{C^0(\bar\Omega)}|\nabla\cdot\theta_t|^2 + \|\mu\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)}|\theta_t|^2)$$

$$+C_{w_t} sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left|\frac{\partial w_t}{\partial n}\right|^2(x-x_0)\cdot n,$$

donde es fácil notar que para s_0 suficientemente grande las integrales sobre Ω de θ y w pueden ser absorvidas por el lado izquierdo y gracias a la hipótesis **H1** obtenemos la estimación deseada para una constante C apropiada. □

2.4. Estabilidad Hölder para un potencial $W^{2,\infty}$ en Reissner - Mindlin

Sea Ω un dominio abierto en $\mathbb{R}^2$ con frontera regular, Γ_0 un subconjunto no vacío de $\partial\Omega$ y $T>0$. Sea $h_0>0$, $f\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $g\in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $k_0 := (\theta_0^1,\theta_0^2,w_0)\in (H_0^1(\Omega))^3$, $k_1 := (\theta_1^1,\theta_1^2,w_1)\in (L^2(\Omega))^3$. Además, definimos el conjunto de trayectorias conocidas

$$\mathcal{R} := \{u\in H^1(0,T;H^2(\Omega)\cap W^{1,\infty}(\Omega)) \mid \partial_t^2 u\in L^2(0,T;L^\infty(\Omega)\cap H^1(\Omega)),\ \partial_t^3 u\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\},$$

con la norma

$$\|u\|_{\mathcal{R}} := \|u\|_{L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))} + \|\partial_t^2 u\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$$

y para $M>0$ definimos el conjunto de potenciales

$$\mathcal{U}_M = \{u\in W^{2,\infty}(\Omega) \mid \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\le M\}.$$

Nuestro contexto ahora es el sistema de ecuaciones de Reissner-Mindlin con potencial $q\in\mathcal{U}_M$, dotado de condiciones iniciales y de borde:

$$\begin{cases} \theta_{tt} - \operatorname{div}(\sigma(\theta)) - \mu^*\, h_0^{-2}(\nabla w - \theta) = f & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ w_{tt} - \operatorname{div}(\mu(\nabla w - \theta)) + qw = g & \text{en } \Omega\times(0,T) \\ \theta = (0,0)^{\mathrm{T}},\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,T) \\ \theta(0) = (\theta_0^1,\theta_0^2)^T,\ w(0) = w_0 & \text{en } \Omega \\ \theta_t(0) = (\theta_1^1,\theta_1^2)^T,\ w_t(0) = w_1 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.46}$$

y para el cual definimos la energía de sus soluciones como sigue.

Definición 2.6 (Energía de las soluciones de (2.46))

$$E_{\theta,w}(t) := \frac{1}{2}\left[\int_\Omega (|\theta_t|^2 + 2\mu|\varepsilon(\theta)|^2 + \lambda^*|div(\theta)|^2) + \int_\Omega (|w_t|^2 + \mu|\nabla w|^2)\right]. \tag{2.47}$$

Supongamos que conocemos una solución regular $(\theta(p), w(p))$ del sistema anterior para un potencial $p \in \mathcal{U}_M$.

Teorema 2.7 *Asumiendo las siguientes hipótesis:*

H1 .- $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2 \backslash \bar{\Omega}$ *con* $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_{x_0} = \{x \in \partial\Omega,\ (x - x_0)\cdot n > 0\}$.

H2*.- $\mu,\ \lambda \in C^2(\bar{\Omega})$ *donde* $\mu(x) \geq \mu_0$, $\lambda(x) \geq -\lambda_0$, $\frac{2\mu_0}{3} > \lambda_0 > 0$ *y* $\exists \theta_0 > 0$ *tal que* $\forall\, x \in \Omega$,

$$0 < \frac{\beta}{\mu_0} < \theta_0, \quad -1 + \theta_0 < \frac{\nabla\mu(x)\cdot(x - x_0)}{2\mu(x)} < 1 - \theta_0,$$

$$-1 + \theta_0 < \frac{\nabla(\lambda^*(x) + 2\mu(x))\cdot(x - x_0)}{2(\lambda^*(x) + 2\mu(x))} < 1 - \theta_0,$$

H3 .- *El tiempo* T *es tal que,* $T\sqrt{\beta} > \sup_{x\in\bar{\Omega}} |x - x_0| =: \rho$.

H4 .- $R(x,t) := w(p) \in \mathcal{R}$, $|R(x,0)| \geq a_0 > 0, \forall x \in \Omega$.

H5 .- $p, q \in \mathcal{U}_M$.

H6 .- $q(x) = p(x)\ \forall x \in \partial\Omega$.

Si $(\theta(q), w(q))$ *es una solución regular de* (2.46) *con potencial* q*, entonces existe* $\kappa_0 \in (0,1)$ *tal que* $\forall\ \kappa < \kappa_0$*, existe* $C(\|\mu\|_{C^2(\bar{\Omega})}, \|\lambda\|_{C^2(\bar{\Omega})}, h_0, T, M, \|R\|_{\mathcal{R}}) > 0$ *tal que,*

$$\begin{aligned} C^{-1}\cdot\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \quad \leq \quad & \left(\left\| \frac{\partial w(p)}{\partial n} - \frac{\partial w(q)}{\partial n} \right\|_{H^2(0,T\,;\,L^2(\Gamma_0))} \right. \\ & + \left\| \frac{\partial\theta}{\partial n}(p) - \frac{\partial\theta}{\partial n}(q) \right\|_{H^2(0,T\,;\,L^2(\Gamma_0))} \\ & + \|\nabla\cdot\theta(p) - \nabla\cdot\theta(q)\|_{H^2(0,T\,;\,H^1(\partial\Omega))} \\ & \left. + \|\nabla\wedge\theta(p) - \nabla\wedge\theta(q)\|_{H^2(0,T\,;\,H^1(\partial\Omega))} \right)^{\kappa}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Observación 2.4 Notemos que la hipótesis **H2*** es levemente distinta a la **H2** del teorema anterior. La primera es más restrictiva puesto que impone una cota uniforme λ_0 sobre $\lambda(x)$ y que además debe satisfacer la desigualdad $\frac{2\mu_0}{3} > \lambda_0 > 0$. La razón para considerar **H2***, se debe a que es necesaria para aplicar los resultados de regularidad del Capítulo 4.

Observación 2.5 De la hipótesis **H4**, como $R(x,t) \in \mathcal{R}$, si denotamos $R'(x,t) = \partial_t R(x,t)$, entonces $\partial_t^k R'(x,t) \in L^2(0,T;H^{2-k}(\Omega))$ para $k = 0,1,2$ y además $R(x,0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $R'(x,0) \in L^\infty(\Omega)$ ya que $R(x,t) \in C^0(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^\infty(\Omega))$.

DEMOSTRACIÓN. Para las soluciones $(\theta(p), w(p))$ y $(\theta(q), w(q))$ del sistema (2.46) con potenciales p y q en $\mathcal{U}_M$ respectivamente, se define

$$(\xi, y) := (\theta(q) - \theta(p), w(q) - w(p)), \quad d(x) := p(x) - q(x).$$

Restando ambos sistemas es claro que (ξ, y) satisface

$$\begin{cases} \xi_{tt} - \operatorname{div}(\sigma(\xi)) - \mu^* h_0^{-2}(\nabla y - \xi) = 0 & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ y_{tt} - \operatorname{div}(\mu(\nabla y - \xi)) + qy = d(x)R(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \xi = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \xi(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y(0) = 0 & \text{en } \Omega \\ \xi_t(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y_t(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{2.49}$$

Denotemos $\xi' = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$, $y' = \dfrac{\partial y}{\partial t}$, $R' = \dfrac{\partial R}{\partial t}$ y extendamos estas funciones a $(-T, 0)$ de manera impar, luego se tiene que

$$\begin{cases} \xi'_{tt} - \operatorname{div}(\sigma(\xi')) - \mu^* h_0^{-2}(\nabla y' - \xi') = 0 & \text{en } \Omega \times (-T,T) \\ y'_{tt} - \operatorname{div}(\mu(\nabla y' - \xi')) + qy' = d(x)R'(x,t) & \text{en } \Omega \times (-T,T) \\ \xi' = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y' = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (-T,T) \\ \xi'(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y'(0) = 0 & \text{en } \Omega \\ \xi'_t(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, \ y'_t(0) = d(x)R(x,0) & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.50}$$

donde la condición inicial para ξ'_t y y'_t se obtiene observando que $\xi'_t = \xi_{tt}$, $y'_t = y_{tt}$ y tomando $t = 0$ en las ecuaciones de (2.49).

Observación 2.6 Gracias a la Observación 2.5 y $d(x) \in W^{2,\infty}(\Omega)$, del teorema de regularidad para el sistema de Reissner-Mindlin (Teorema 4.10), se deduce que $\partial_t^k(\xi', y') \in L^\infty(0,T; (H^{3-k}(\Omega))^3)$ para $k = 0,1,2,3$ y sus respectivas normas están acotadas por $\|R\|_{\mathcal{R}}$ y $\|d\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$. La hipótesis **H6** garantiza que se satisfaga la condición de compatibilidad.

Por el Lema de Gronwall, la energía (2.47) se encuentra acotada como se establece en el siguiente:

Corolario 2.8 (Lema 3.2) *Existe una constante $K > 0$, la cual depende de T, las normas de los parámetros de Lamé, h_0 y de M, tal que*

$$\sqrt{E_{\xi',y'}(t)} \leq K \left(\sqrt{E_{\xi',y'}(0)} + \|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \|d(x)\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.51}$$

La desigualdad (2.51) se deduce del Lemma 3.2 reemplazando f, g, $(\theta_0^1, \theta_0^2, w_0)$ y $(\theta_1^1, \theta_1^2, w_1)$ por 0, $d(x)R'(x,t)$, $(0,0,0)$ y $(0,0,d(x)R(x,0))$ y observando que

$$\int_0^T \|d(x)R'(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq T\|R'(x,t)\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para $\delta > 0$ chico, consideremos una función cut-off $\eta(t) \in C_0^\infty(-T,T)$ tal que

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = 1 \ \ \forall t \in (-T+\delta, T-\delta)$$

y definamos

$$\phi(x,t) := \eta(t)\xi'(x,t), \quad v(x,t) := \eta(t)y'(x,t). \tag{2.52}$$

Luego

$$\phi_t = \eta\xi_t' + \eta_t\xi', \quad \phi_{tt} = \eta\xi_{tt}' + 2\eta_t\xi_t' + \eta_{tt}\xi',$$
$$v_t = \eta y_t' + \eta_t y', \quad v_{tt} = \eta y_{tt}' + 2\eta_t y_t' + \eta_{tt} y'$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}^f(\phi,v) = \eta[\xi_{tt}' - \mathrm{div}(\sigma(\xi')) - \mu^* h_0^{-2}(\nabla y' - \xi')] + 2\eta_t\xi_t' + \eta_{tt}\xi', \tag{2.53}$$
$$\mathcal{L}_q^g(\phi,v) = \eta[y_{tt}' - \mathrm{div}(\mu(\nabla y' - \xi')) + qy'] + 2\eta_t y_t' + \eta_{tt} y'. \tag{2.54}$$

Como (ξ', y') es solución de (2.49), entonces (ϕ, v) satisface el siguiente problema:

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \mathrm{div}(\sigma(\phi)) - \mu^* h_0^{-2}(\nabla v - \phi) = 2\eta_t\xi_t' + \eta_{tt}\xi' & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_{tt} - \mathrm{div}(\mu(\nabla v - \phi)) + qv = \eta d(x) R'(x,t) + 2\eta_t y_t' + \eta_{tt} y' & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \phi = (0,0)^{\mathrm{T}},\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \phi(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, v(0) = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi_t(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}, v_t(0) = d(x)R(x,0) & \text{en } \Omega \\ \phi(\pm T) = 0, v(\pm T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{2.55}$$

y entonces podemos aplicar la desigualdad de Carleman del Teorema 2.5, donde todos los términos tienen sentido ya que la Observación 2.6 implica que (ϕ, v) es suficientemente regular ($\partial_t^k(\phi, v) \in L^\infty(0,T;(H^{3-k}(\Omega))^3)$ con $k = 0,1,2,3$; ver Observación 2.2).

La idea es acotar inferiormente el lado izquierdo de la desigualdad de Carleman y superiormente los términos que involucran a los operadores diferenciales, por la norma de $d(x)$ y luego escogiendo adecuadamente el parámetro s se logra obtener la desigualdad de estabilidad. La manera en que se procederá es utilizada también en [Ima02], en donde prueban la estabilidad Hölder para la ecuación de ondas acústicas.

De la hipótesis **H3**, $\beta \in (0,1)$ satisface que

$$\frac{\rho^2}{T^2} < \beta < 1,$$

por lo tanto, cerca de $-T$ y T,

$$\psi(x,t) < M_0, \quad \text{i.e.} \quad \varphi(x,t) < e^{rM_0} =: b$$

Para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, podemos elijir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\varphi(x,t) < b - 2\varepsilon, \quad \forall\, t \in [-T, -T+\delta] \cup [T-\delta, T], \tag{2.56}$$

en efecto, si $\varepsilon << 1$, existe un $e_\varepsilon > 0$ tal que $b - 2\varepsilon = be^{-re_\varepsilon}$ y entonces podemos escoger $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\rho^2 - \beta(T-\delta)^2 < -\tau_\varepsilon$, lo que implica que $\varphi(x,t) \leq e^{r(-e_\varepsilon + M_0)} = be^{-re_\varepsilon}$ $\forall\, t \in [-T, -T+\delta] \cup [T-\delta, T]$.

Además

$$b \leq \varphi(x,0) \quad \text{y} \quad \varphi(x,t) < \varphi(x,0),\ \forall\, t \in [-T,T], \tag{2.57}$$

y llamemos

$$\tau := \sup_{\bar{\Omega}\times[-T,T]} \varphi(x,t).$$

Como las derivadas de η se anulan en $[-T+\delta, T-\delta]$, es posible obtener la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \;\leq\; & \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\eta(t)d(x)R'(x,t)|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|2\eta_t y'_t + \eta_{tt}y'|^2 \\
&\leq \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)} d(x)^2 (R'(x,t))^2 \\
&\quad +2\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2sb}(4|\eta_t|^2|y'_t|^2 + |\eta_{tt}|^2|y'|^2) \\
&\leq 2\,\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2 + C\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right) e^{2sb}E_{\xi',y'}(t).
\end{aligned}$$

Gracias a la estimación de energía del Corolario 2.8 y que se extendió ξ', y' de manera impar, se sabe que existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \;\leq\; & 2\,\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2 \\
& +C\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right) e^{2sb}K^2\left(\sqrt{E_{\xi',y'}(0)} + \|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\,\|d(x)\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\
\leq\; & 2\,\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2 \\
& +2CK^2Te^{2sb}\left(E_{\xi',y'}(0) + \|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\,\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Como (ξ', y') resuelve el sistema (2.50), evaluando en $t = 0$ solo sobrevive un término en la energía, luego usando la condición inicial de y'_t y la desigualdad de Hölder se llega a la siguiente cota

$$\begin{aligned}
E_{\xi',y'}(0) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\xi'_t(x,0)|^2 + 2\mu|\varepsilon(\xi')(x,0)|^2 + \lambda|^*\mathrm{div}(\xi')(x,0)|^2) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Omega}(|y'_t(x,0)|^2 + \mu|\nabla y'(x,0)|^2) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega}|y'_t(x,0)|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} d(x)^2 R(x,0)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|R(x,0)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Los cálculos anteriores, (2.58) y (2.59), implican

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \ &\leq \ 2\,\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2 \\ &+CK^2Te^{2sb}\left(\|R(x,0)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_{\Omega}|d(x)|^2+\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_{\Omega}|d(x)|^2\right),\end{aligned}$$

para una constante $C>0$ apropiada y como $b\leq\varphi(x,0)\leq\tau$, podemos introducir un peso exponencial $e^{2s\tau}$ al interior de la norma L^2 de $d(x)$ y obtener:

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \ \leq \ C_g\int_{\Omega} e^{2s\tau}|d(x)|^2, \tag{2.60}$$

donde la constante $C_g>0$ depende de $\|R\|_{\mathcal{R}}$, T y la constante de la estimación de energía.

Análogamente, es posible obtener una estimación similar para el operador $\mathcal{L}^f$ empleando nuevamente el resultado del Corolario 2.8.

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \ &= \ \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|2\eta_t\xi'_t+\eta_{tt}\xi'|^2 \\ &\leq 2\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2sb}(4|\eta_t|^2|\xi'_t|^2+|\eta_{tt}|^2|\xi'|^2) \\ &\leq C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2sb}E_{\xi',y'}(t) \\ &\leq C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2sb}K^2\left(\sqrt{E_{\xi',y'}(0)}+\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\,\|d(x)\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \\ &\leq 2CK^2Te^{2sb}\left(E_{\xi',y'}(0)+\|R\|^2_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\,\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2\leq C_f\int_{\Omega} e^{2s\tau}|d(x)|^2 \tag{2.61}$$

para alguna constante $C_f>0$ que depende también de $\|R\|_{\mathcal{R}}$, T y la constante de la desigualdad de energía.

Veamos ahora como acotar los operadores $\nabla\cdot\mathcal{L}^f$, $\nabla\wedge\mathcal{L}^f$ y $\partial_t\mathcal{L}^g$. Para esto necesitamos una segunda estimación de energía sobre las funciones:

$$\alpha(x,t):=\nabla\cdot\xi'(x,t),\quad \beta(x,t):=\nabla\wedge\xi'(x,t),\quad \gamma(x,t):=\frac{\partial y'}{\partial t}. \tag{2.62}$$

Definición 2.9 *Definimos la energía en tiempo t del trío (α,β,γ) como*

$$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta,\gamma}(t) \ &:= \ \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega}(|\alpha_t|^2+(\lambda^*+2\mu)|\nabla\alpha|^2+\int_{\Omega}(|\beta_t|^2+\mu|\nabla\beta|^2)\right. \\ &\left.+\int_{\Omega}(|\gamma_t|^2+\mu|\nabla\gamma|^2)\right].\end{aligned} \tag{2.63}$$

Al igual que en la deducción del Corolario 2.8 y notando que

$$\int_0^T (\|d(x)R'(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|d(x)R''(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)})dt \leq T\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

esta energía satisface la siguiente estimación dada por el

Corolario 2.10 (Lema 3.3) *Existe una constante $K > 0$ la cual depende de la norma de los parámetros de Lamé, T, el espesor h_0 y M, tal que*

$$E_{\alpha,\beta,\gamma}(t) \leq K\left(E_{\xi',y'}(0) + E_{\alpha,\beta,\gamma}(0) + \|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \mathcal{T}(t)dt\right),$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) \ &= \ \|\nabla\cdot\xi'\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla\cdot\xi'_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\cdot\xi')}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\quad + \|\nabla\wedge\xi'\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla\wedge\xi'_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\wedge\xi')}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Para obtener las estimaciones que nos faltan, tomamos divergencia y rotor en (2.53) y derivamos con respecto al tiempo en (2.54), luego procedemos de la misma manera en que se obtuvieron las desigualdades (2.60) y (2.61) usando además las siguientes desigualdades de interpolación:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2(\Omega)} \ &\leq \ C_\alpha(\|\nabla\alpha\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)}), \\ \|\beta\|_{L^2(\Omega)} \ &\leq \ C_\beta(\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)}). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \ &= \ \int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}|2\eta_t\nabla\cdot\xi'_t + \eta_{tt}\nabla\cdot\xi'|^2 \\ &\leq \ 2\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^T\right)\int_\Omega e^{2s(b-2\varepsilon)}(4|\eta_t|^2|\nabla\cdot\xi'_t|^2 + |\eta_{tt}|^2|\nabla\cdot\xi'|^2) \\ &= \ 2\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^T\right)\int_\Omega e^{2s(b-2\varepsilon)}(4|\eta_t|^2|\alpha_t|^2 + |\eta_{tt}|^2|\alpha|^2) \\ &\leq \ 2C_1e^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^T\right)(\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \ C_2e^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^T\right)(\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\alpha\|^2_{L^2(\partial\Omega)}). \end{aligned}$$

Ahora acotamos la norma de α_t y $\nabla\alpha$ por la energía de (α,β,γ) y usando (2.56), los

Corolarios 2.8 y 2.10 y la desigualdad (2.59),

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 &\leq C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2s(b-2\varepsilon)}(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)+\|\nabla\cdot\xi'\|^2_{2,\partial\Omega})\\
&\leq C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2s(b-2\varepsilon)}K_1\,[E_{\xi',y'}(0)+E_{\alpha,\beta,\gamma}(0)\\
&\quad+\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\mathcal{T}(t)dt+\|\nabla\cdot\xi'\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\,]\\
&\leq C(T,K_1,K_2)e^{2s(b-2\varepsilon)}\left[E_{\alpha,\beta,\gamma}(0)+\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\mathcal{T}(t)dt\right]\end{aligned}$$

Para calcular la energía de (α,β,γ) en $t=0$, usamos las condiciones iniciales del problema (2.50) y vemos que solo sobreviven los términos con γ,

$$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta,\gamma}(0) &= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega}(|\alpha_t(x,0)|^2+(\lambda^*+2\mu)|\nabla\alpha(x,0)|^2+\int_{\Omega}(|\beta_t(x,0)|^2+\mu|\nabla\beta(x,0)|^2)\right.\\
&\quad\left.+\int_{\Omega}(|\gamma_t(x,0)|^2+\mu|\nabla\gamma(x,0)|^2)\right]\\
&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\gamma_t(x,0)|^2+\mu|\nabla\gamma(x,0)|^2)\\
&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(|d(x)R'(x,0)|^2+\mu|\nabla(d(x)R(x,0))|^2)\\
&\leq\frac{1}{2}(\|R'(x,0)\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|R(x,0)\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)})\left(\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq\frac{1}{2}(\|R'(x,0)\|^2_{L^\infty(\Omega)}+\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|R(x,0)\|^2_{W^{1,\infty}(\Omega)})\left(\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+M^2\right) \qquad (2.65)\end{aligned}$$

con M la constante asociada al conjunto $\mathcal{U}_M$.

Luego, aplicando (2.65) en la estimación de $\nabla\cdot\mathcal{L}^f$, tenemos que

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \leq e^{2s(b-2\varepsilon)}C_f^{div}\left(\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+1+\int_0^T\mathcal{T}(t)dt\right),$$

por lo tanto, poniendo un peso exponencial al interior de la norma de $d(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \qquad (2.66)\\
&\qquad\leq C_f^{div}\left(\int_{\Omega}e^{2s\tau}|d(x)|^2+e^{2s\tau}\int_0^T\mathcal{T}(t)dt+e^{2s(b-2\varepsilon)}\right)\end{aligned}$$

donde C_f^{div} depende de M, T, $\|R\|_{\mathcal{R}}$ y de las constantes de las estimaciones de energía.

Similarmente es posible obtener una estimación para el rotor de $\mathcal{L}^f$ como se muestra a continuación

$$
\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\wedge\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \ &= \ \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|2\eta_t\nabla\wedge\xi_t'+\eta_{tt}\nabla\wedge\xi'|^2 \\
&\leq \ 2\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2s(b-2\varepsilon)}(4|\eta_t|^2|\beta_t|^2+|\eta_{tt}|^2|\beta|^2) \\
&\leq \ 2Ce^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)(\|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\beta\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq \ Ce^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)(\|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\beta\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\beta\|^2_{L^2(\partial\Omega)}). \\
&\leq \ C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2s(b-2\varepsilon)}(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)+\|\nabla\wedge\xi'\|^2_{L^2(\partial\Omega)}) \\
&\leq \ C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2s(b-2\varepsilon)}K\Big(E_{\xi',y'}(0)+E_{\alpha,\beta,\gamma}(0) \\
&\quad +\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{-T}^{T}\mathcal{T}(t)dt+\|\nabla\wedge\xi'\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\Big) \\
&\leq \ C(T,K,M,\|R\|^2_{\mathcal{R}})e^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+1+\int_{-T}^{T}\mathcal{T}(t)dt\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\nabla\wedge\mathcal{L}^f(\phi,v)|^2 \\
&\qquad\qquad \leq C_f^{rot}\left(\int_{\Omega} e^{2s\tau}|d(x)|^2+e^{2s\tau}\int_0^T\mathcal{T}(t)dt+e^{2s(b-2\varepsilon)}\right)
\end{aligned} \tag{2.67}
$$

con C_f^{rot} dependiendo de los mismo parámetros que C_f^{div}.

Nos resta deducir una estimación para $\partial_t\mathcal{L}^g$. Igual que antes,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\partial_t\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \\
&\quad = \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|d(x)R''(x,t)\eta+d(x)R'(x,t)\eta_t+2\eta_t y_{tt}'+3\eta_{tt}y_t'+\eta_{ttt}y'|^2 \\
&\quad \leq \ C\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)\int_{\Omega} e^{2s(b-2\varepsilon)}(|d(x)|^2|R'(x,t)|^2|\eta_t|^2+4|\eta_t|^2|\gamma_t|^2 \\
&\qquad +9|\eta_{tt}|^2|\gamma|^2+|\eta_{ttt}|^2|y'|^2)+C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2|R''(x,t)|^2|\eta|^2 \\
&\quad \leq \ Ce^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)(\|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\gamma\|^2_{L^2(\Omega)}+\|y'\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\qquad +C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2(|R'(x,t)|^2+|R''(x,t)|^2)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\partial_t \mathcal{L}^g(\phi,v)|^2\\
&\qquad\qquad \leq\ Ce^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)(\|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\gamma\|^2_{L^2(\Omega)}+E_{\xi',y'}(t))\\
&\qquad\qquad\quad +2C\,\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_\Omega e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2\\
&\qquad\qquad \leq\ Ce^{2s(b-2\varepsilon)}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)(4E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)+E_{\xi',y'}(t))\\
&\qquad\qquad\quad +2C\,\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\int_\Omega e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2\\
&\qquad\qquad \leq\ CK\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)e^{2s(b-2\varepsilon)}\Bigg(E_{\xi',y'}(0)+E_{\alpha,\beta,\gamma}(0)\\
&\qquad\qquad\quad +\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{-T}^{T}\mathcal{T}(t)dt\Bigg)\\
&\qquad\qquad \leq\ C(K,T,M)e^{2s(b-2\varepsilon)}\Bigg(E_{\xi',y'}(0)+E_{\alpha,\beta,\gamma}(0)\\
&\qquad\qquad\quad +\|R\|^2_{H^2(0,T;L^\infty(\Omega))}\|d(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_{-T}^{T}\mathcal{T}(t)dt\Bigg)
\end{aligned}$$

Por (2.59) y (2.65), las energías en $t=0$ pueden ser acotadas por la norma con peso de $d(x)$ y entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|\partial_t \mathcal{L}^g(\phi,v)|^2 \\
&\qquad\qquad \leq C_g^t\left(\int_\Omega e^{2s\tau}|d(x)|^2+e^{2s\tau}\int_0^T\mathcal{T}(t)dt+e^{2s(b-2\varepsilon)}\right)
\end{aligned}\tag{2.68}$$

donde nuevamente la constante $C_g^t>0$ depende de M, T, $\|R\|_{\mathcal{R}}$ y las constantes de las estimaciones de energía.

Sumando las desigualdades (2.60), (2.61), (2.66), (2.67) y (2.68), se llega a que existe una constante $C_{\mathcal{L}}>0$ tal que se cumple la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}\left(\left|\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2+\left|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2+\left|\nabla\wedge\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2+|\mathcal{L}^g(\phi,v)|^2+\left|\frac{\partial\mathcal{L}^g}{\partial t}(\phi,v)\right|^2\right)\\
&\qquad\qquad \leq\ C_{\mathcal{L}}\left(\int_\Omega e^{2s\tau}|d(x)|^2+e^{2s\tau}\int_0^T\mathcal{T}(t)dt+e^{2s(b-2\varepsilon)}\right).
\end{aligned}\tag{2.69}$$

Recordando las definiciones de los operadores P_i^j y de las funciones ζ_i en el enunciado del teorema, para $\zeta_5 = e^{s\varphi}v$, que por ahora lo llamaremos simplemente ζ, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(P_1^5\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\left(\zeta_{tt}-\mu\Delta\zeta+s^2r^2\varphi^2(|\psi_t|^2-\mu|\nabla\psi|^2)\zeta\right)\zeta_t\\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\zeta_t(0)|^2-|\zeta_t(-T)|^2)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\mu(|\nabla\zeta(0)|^2-|\nabla\zeta(-T)|^2)\\
&+\frac{1}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\zeta_t\nabla\zeta\cdot\nabla\mu-\int_{-T}^{0}\int_{\partial\Omega}\mu\zeta_t\frac{\partial\zeta}{\partial n}\\
&+\int_{\Omega}s^2r^2(\frac{1}{2}|\zeta|^2\varphi^2(|\psi_t|^2-\mu|\nabla\psi|^2))\Big|_{-T}^{0}\\
&-\frac{1}{2}s^2r^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|\zeta|^2\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^2(|\psi_t|^2-\mu|\nabla\psi|^2)).
\end{aligned}$$

Como $\zeta = e^{s\varphi}v$, luego

$$\zeta_t = e^{s\varphi}(v_t+sr\varphi\psi_t v), \quad \text{and} \quad \nabla\zeta = e^{s\varphi}(\nabla v+sr\varphi v\nabla\psi),$$

y evaluando en $t=0$, $t=-T$ se tiene

$$\begin{aligned}
\zeta(0) &= 0\\
\zeta(-T) &= 0\\
\zeta_t(0) &= e^{s\varphi(0)}d(x)R(x,0)\\
\zeta_t(-T) &= 0\\
\nabla\zeta(0) &= 0\\
\nabla\zeta(-T) &= 0,
\end{aligned}$$

ya que $v=\eta y'$ satisface el sistema (2.55) y además $\zeta_t = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto, para alguna constante $C>0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}(P_1^5\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2|R(x,0)|^2+\frac{1}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}\zeta_t\nabla\zeta\cdot\nabla\mu\\
&-\frac{1}{2}s^2r^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|\zeta|^2\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^2(|\psi_t|^2-|\nabla\psi|^2))\\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2a_0^2-\frac{1}{2}s^2r^2C_\eta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}\varphi^2|v|^2\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^2(|\psi_t|^2-|\nabla\psi|^2))\\
&-\frac{1}{2}C_\eta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}((|v_t|+sr\varphi|\psi_t||v|)|\nabla\mu||\nabla v|+sr\varphi(|v||v_t|+sr\varphi|\psi_t||v|^2)|\nabla\psi\cdot\nabla\mu|)\\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2a_0^2-\frac{1}{2}Cs^2r^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}\varphi^2|v|^2\\
&-\frac{1}{2}C\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}(|v_t|^2+|\nabla v|^2),
\end{aligned}$$

donde se utilizó la hipótesis **H4** para acotar inferiormente el término con $|R(x,0)|$. Utilizando la desigualdad de Carleman (2.26) sobre (ϕ, v) se deduce

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2s\varphi(x,0)}|d(x)|^2 a_0^2 \;\; &\leq \;\; 2\int_{-T}^0\int_\Omega (P_1^5\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial t} + Cs^2r^2\int_{-T}^0\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi^2|v|^2 \\
&\quad +C\int_{-T}^0\int_\Omega e^{2s\varphi}(|v_t|^2+|\nabla v|^2) \\
&\leq \int_{-T}^T\int_\Omega \left|P_1^5\zeta\right|^2 + \int_{-T}^T\int_\Omega |\zeta_t|^2 + Cs^2r^2\int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi^2|v|^2 \\
&\quad +C\int_{-T}^0\int_\Omega e^{2s\varphi}(|v_t|^2+|\nabla v|^2) \\
&\leq \int_{-T}^T\int_\Omega \left|P_1^5\zeta\right|^2 + \int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\,|v_t|^2 + Cs^2r^2\int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\varphi^2|v|^2 \\
&\quad +C\int_{-T}^0\int_\Omega e^{2s\varphi}(|v_t|^2+|\nabla v|^2) \\
&\leq \tilde{C}\cdot(\textit{Lado izquierdo de la desigualdad de Carleman } (2.26) \textit{ sobre } (\phi,v)) \\
&\leq \tilde{C}\int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\varphi}\left(\left|\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2 + \left|\nabla\cdot\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2 + \left|\nabla\wedge\mathcal{L}^f(\phi,v)\right|^2\right. \\
&\quad \left. +\left|\mathcal{L}^g(\phi,v)\right|^2 + \left|\frac{\partial\mathcal{L}^g(\phi,v)}{\partial t}\right|^2\right) + \tilde{C}\cdot(\textit{Términos de Borde}),
\end{aligned}$$

donde los términos de borde son los que aparecen al aplicar la desigualdad de Carleman. Ahora, debido (2.57), la estimación (2.69) y escribiendo los términos de borde se llega a que para alguna constante $\tilde{C} > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2sb}|d(x)|^2 a_0^2 \;\; &\leq \;\; \tilde{C}\left[\int_{-T}^T\int_\Omega e^{2s\tau}\,|d(x)|^2 + e^{2s\tau}\int_0^T \mathcal{T}(t)dt + e^{2s(b-2\varepsilon)}\right. \\
&\quad + sr\int_{-T}^T\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi}\varphi\left(|(\nabla\phi).n|^2 + \left|\frac{\partial v_t}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n \\
&\quad + sr\int_{-T}^T\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\phi)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\phi)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\cdot\phi)}{\partial \tau}\right|^2\right) \\
&\quad + sr\int_{-T}^T\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi\left(\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\phi)}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\phi)}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial(\nabla\wedge\phi)}{\partial \tau}\right|^2\right) \\
&\quad \left. + s^3r^3\int_{-T}^T\int_{\partial\Omega} e^{2s\varphi}\varphi^3\left(|\nabla\cdot\phi|^2 + |\nabla\wedge\phi|^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Para concluir la desigualdad de estabilidad necesitamos escribir las integrales sobre $\partial\Omega$ en función de ξ' e y'. Teniendo esto en mente recordemos las definiciones de ϕ y v en

(2.52), entonces

$$\left.\begin{array}{rcl}
\left|\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|^2 & = & |\eta\nabla y'\cdot n|^2 \;=\; |\eta|^2\left|\dfrac{\partial y'}{\partial n}\right|^2 \\
\left|\dfrac{\partial v_t}{\partial n}\right|^2 & = & |\nabla(\eta y'_t+\eta_t y')\cdot n|^2 \;\leq\; 2\left[|\eta|^2\left|\dfrac{\partial y'_t}{\partial n}\right|^2+|\eta_t|^2\left|\dfrac{\partial y'}{\partial n}\right|^2\right] \\
|\nabla\cdot\phi|^2 & = & |\eta|^2\,|\nabla\cdot\eta'|^2 \\
|\nabla\wedge\phi|^2 & = & |\eta|^2\,|\nabla\wedge\eta'|^2 \\
|\nabla\cdot\phi_t|^2 & = & |\nabla\cdot(\eta\xi'_t+\eta_t\xi')|^2 \;\leq\; 2(|\eta|^2\,|\nabla\cdot\xi'_t|^2+|\eta_t|^2\,|\nabla\cdot\xi'|^2) \\
|\nabla\wedge\phi_t|^2 & = & |\nabla\wedge(\eta\xi'_t+\eta_t\xi')|^2 \;\leq\; 2(|\eta|^2\,|\nabla\wedge\xi'_t|^2+|\eta_t|^2\,|\nabla\wedge\xi'|^2) \\
\left|\dfrac{\partial\nabla\cdot\phi}{\partial n}\right|^2 & = & |\eta|^2\left|\dfrac{\partial\nabla\cdot\xi'}{\partial n}\right|^2 \\
\left|\dfrac{\partial\nabla\wedge\phi}{\partial n}\right|^2 & = & |\eta|^2\left|\dfrac{\partial\nabla\wedge\xi'}{\partial n}\right|^2 \\
\left|\dfrac{\partial\nabla\cdot\phi}{\partial\tau}\right|^2 & = & |\eta|^2\left|\dfrac{\partial\nabla\cdot\xi'}{\partial\tau}\right|^2 \\
\left|\dfrac{\partial\nabla\wedge\phi}{\partial\tau}\right|^2 & = & |\eta|^2\left|\dfrac{\partial\nabla\wedge\xi'}{\partial\tau}\right|^2 .
\end{array}\right\} \tag{2.71}$$

Luego reemplazando (2.71) en (2.70) y absorbiendo los términos del operador $\mathcal{T}(t)$ para un $s_0>0$ suficientemente grande, obtenemos que para algún $C(r^3,\tau^3)>0$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2sb}|d(x)|^2 \;\leq\;& Ce^{2s(b-2\varepsilon)} \\
&+Ce^{5s\tau}\left[\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0}\left(|(\nabla\xi').n|^2+\left|\frac{\partial y'_t}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial y'}{\partial n}\right|^2\right)(x-x_0)\cdot n\right. \\
&+\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\xi')}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\xi')}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\cdot\xi')}{\partial\tau}\right|^2\right) \\
&+\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\xi')}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\xi')}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial(\nabla\wedge\xi')}{\partial\tau}\right|^2\right) \\
&\left.+\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla\cdot\xi'|^2+|\nabla\wedge\xi'|^2\right)\right],
\end{aligned} \tag{2.72}$$

donde se utilizó que $1<s$ y $s^3e^{2s\tau}\leq e^{5s\tau}$.

Llamando $\mathcal{B}$ a la suma de las intregrales sobre el borde en la desigualdad anterior, por (2.57) se llega a que

$$\int_\Omega |d(x)|^2 \leq C(e^{-4s\varepsilon}+e^{5s\tau}\mathcal{B}). \tag{2.73}$$

Ahora, como las mediciones están acotadas por las normas de las funciones $\partial_t^k(\xi',y')\in L^\infty(0,T;(H^{3-k}(\Omega))^3)$ con $k=0,1,2,3$ y éstas a su vez astán acotadas por $\|R\|_{\mathcal{R}}$ y M, existe una constante $M_{\mathcal{B}}=M_{\mathcal{B}}(\|R\|_{\mathcal{R}},M)>0$ tal que $\mathcal{B}\leq M_{\mathcal{B}}$ y luego, para alguna constante

$$c < \frac{1}{M_{\mathcal{B}}} e^{-(5\tau+4\varepsilon)s_0},$$

podemos escoger $s > 0$ como

$$s = -\frac{1}{5\tau + 4\varepsilon} \log{(c\mathcal{B})} \quad (\Rightarrow s > s_0)$$

y entonces, reemplazando este valor en (2.73), para una constante $C_\tau > 0$, se deduce que

$$\|d\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C\mathcal{B}^{\frac{4\varepsilon}{5\tau+4\varepsilon}}.$$

Finalmente como $d(x) = p(x) - q(x)$, $\xi' = \theta_t(q) - \theta_t(p)$, $y' = w_t(q) - w_t(p)$, reemplazando en la desigualdad anterior llegamos al resultado que buscabamos. $\square$

Observación 2.7 Durante las estimaciones, solamente se necesita que $R(x,t)$ esté en $H^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)) \cap H^2(0,T;L^\infty(\Omega))$. La regularidad adicional que suponemos sobre $R(x,t)$ ($\in \mathcal{R}$), se pide con el fin de que haya regularidad suficiente como para que los términos del lado derecho en la desigualdad de estabilidad estén bien definidos.

Capítulo 3

Resultados Auxiliares

3.1. Estimaciones de energía

3.1.1. Kirchhoff-Love

Lema 3.1 *Si w es solución de* (2.14) *con condiciones de borde homogeneas, esto es $m_0 = m_1 \equiv 0$ en $\partial\Omega \times (0,T)$, entonces existe una constante $K > 0$, que depende de γ, T y $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$ tal que la energía definida en 2.2 satisface la siguiente estimación:*

$$E(t) \leq K(E(0) + \|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})$$

Demostración. Daremos una idea de la demostración en donde asumiremos que la solución es suficientemente regular. Ésta suposición se basa enel hecho de que es posible aproximar la solución w por funciones regulares (y que satisfacen una aproximación del problema) para las cuales es válida la desigualdad y luego pasando al límite se obtiene el resultado.

Notemos primero que es posible escribir (2.14) como un sistema de dos ecuaciones de segundo orden, una elíptica y otra hiperbólica,

$$\begin{cases} -\gamma_0 \Delta w + w = \eta & \text{on } \Omega,\ \forall\, 0 \leq t \leq T, \\ \eta_{tt} - \gamma_0^{-1}\Delta\eta = g - \gamma_0^{-2} w + \gamma_0^{-2}\eta & \text{on } \Omega \times (-T,T). \end{cases}$$

Luego multiplicando por η_t en ambas ecuaciones, integrando sobre Ω y usando integración por partes se obtiene

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\gamma_0^2 \int_\Omega |\Delta w|^2 + 2\gamma_0 \int_\Omega |\nabla w|^2 + \int_\Omega |w|^2\right] = \int_\Omega \eta\eta_t,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\eta_t|^2 + \gamma_0^{-1}\int_\Omega |\nabla\eta|^2\right] = \int_\Omega F\eta_t + \gamma_0^{-2}\int_\Omega w\eta_t + \gamma_0^{-2}\int_\Omega \eta\eta_t.$$

Al sumar las dos igualdades anteriores y usando la desigualdad de Poincare en η para estimar el lado derecho, se deduce que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq C(E(t) + \|g(x,t)\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{E(t)}),$$

y por lo tanto del Lema de Gronwall se llega a que

$$E(t) \leq K(E(0) + \|g\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}).$$

□

3.1.2. Primera estimación de energía para Reissner-Mindlin

Lema 3.2 *Para* (θ, w) *solución de* (2.46) *con condiciones de borde homogeneas* ($m_i \equiv 0$ *para* $i = 1, 2, 3$), *existe una constante* $K > 0$ *que depende de las normas de los parámetros de Lamé,* T, *el espesor* h *y la norma* $L^\infty(\Omega)$ *del potencial* q, *tal que*

$$\sqrt{E_{\theta,w}(t)} \leq K\left(\sqrt{E_{\theta,w}(0)} + \int_0^T (\|f(x,t)\|_{L^2} + \|g(x,t)\|_{L^2})\, dt\right). \tag{3.1}$$

Demostración. Al igual que en la prueba del lema anterior, daremos una idea de la demostración asumiendo regularidad de la solución (θ, w). La forma rigurosa de proceder sería deduciendo en una primera etapa la desigualdad de energía para una sucesión de funciones regulares que satisfacen un problema aproximado y convergen a (θ, w), lo cual se hace como se mostrará en breve, para luego pasar al límite y así obtener la estimación deseada.

Comenzamos multiplicando la primera ecuación de (2.46) por $\theta_t(x,t)$ e integrando sobre todo el dominio,

$$\int_\Omega \theta_{tt}\theta_t - \int_\Omega \mathrm{div}(\sigma(\theta))\theta_t - \int_\Omega \mu^* h_0^{-2}(\nabla w - \theta)\theta_t = \int_\Omega f(x,t)\theta_t$$

donde el primer término $\int \theta_{tt}\theta_t$ en el lado izquierdo es igual a $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |\theta_t|^2$. Usando que $\sigma(\theta) = 2\mu\varepsilon(\theta) + \lambda^*\mathrm{div}(\theta)I$ y $\sigma(\theta) : \nabla\theta_t = \sigma(\theta) : \varepsilon(\theta_t)$ (ésto debido a la simetría de $\sigma(\theta)$), integrando por partes y como θ se anula en la frontera para todo tiempo t, es posible reescribir la última igualdad como

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left[\int_\Omega |\theta_t|^2 + 2\int_\Omega \mu|\varepsilon(\theta)|^2 + \int_\Omega \lambda^*|\mathrm{div}(\theta)|^2\right]\right) \\ &\qquad = \int_\Omega \mu^* h_0^{-2}(\nabla w - \theta)\theta_t + \int_\Omega f(x,t)\theta_t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Multiplicando ahora la segunda ecuación de (4.1) por w_t e integrando por partes se llega a que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left[\int_\Omega |w_t|^2 dx + \int_\Omega \mu|\nabla w|^2 dx\right]\right) \\ &\qquad = \int_\Omega g(x,t)w_t - \int_\Omega q w w_t - \int_\Omega \mathrm{div}(\mu\theta)w_t, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde los términos de borde se anulan ya que $w = 0$ en $\partial\Omega$ para todo tiempo.

Sumando las igualdades (3.2) and (3.3), en el lado izquierdo aparece la derivada temporal de la energía de (θ, w) (Definición 2.47),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(E_{\theta,w}(t)\right) = \int_\Omega \mu^* h_0^2(\nabla w - \theta)\theta_t + \int_\Omega f(x,t)\theta_t \\ + \int_\Omega g(x,t)w_t - \int_\Omega q w w_t - \int_\Omega \operatorname{div}(\mu\theta)w_t.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Luego, tomando módulo en ambos lados de (3.4), el lado derecho puede ser acotado como sigue,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}E_{\theta,w}(t)\right| \leq\ & \|\mu^*\|_{C^0(\bar\Omega)} h_0^{-2}(\|\nabla w\|_2 + \|\theta\|_2)\|\theta_t\|_2 + \|f(x,t)\|_2\|\theta_t\|_2 + \|g(x,t)\|_2\|w_t\|_2 \\ & + \|q\|_\infty \|w\|_2\|w_t\|_2 + \Big(\|\mu\|_{C^0(\bar\Omega)}\|\operatorname{div}(\theta)\|_2 + \|\mu\|_{C^1(\bar\Omega)}\|\theta\|_2\Big)\|w_t\|_2\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}E_{\theta,w}(t)\right| \leq\ & \frac{1}{2}\|\mu^*\|_{C^0(\bar\Omega)} h_0^{-2}[\,2(\|\nabla w\|_2^2 + \|\theta\|_2^2) + \|\theta_t\|_2^2\,] + \|f(x,t)\|_2\|\theta_t\|_2 \\ & + \|g(x,t)\|_2\|w_t\|_2 + \frac{1}{2}\|q\|_\infty(\,\|w\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\,) + \|w_t\|_2^2 \\ & + \frac{1}{2}(\,\|\mu\|_{C^0(\bar\Omega)}^2\|\operatorname{div}(\theta)\|_2^2 + \|\mu\|_{C^1(\bar\Omega)}^2\|\theta\|_2^2\,).\end{aligned}$$

Como θ y w son ambas nulas en $\partial\Omega \times (0,T)$, la desigualdad de Poincare implica que existen dos constantes C_θ y C_w tal que

$$\|\theta\|_2 \leq C_\theta\|\nabla\theta\|_2, \quad \|w\|_2 \leq C_w\|\nabla w\|_2. \tag{3.5}$$

Más aún, por la desigualdad de Korn y recordando que existe un μ_0 tal que $0 < \mu_0 \leq \mu(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\nabla\theta\|_2^2 &\leq c\int_\Omega \varepsilon(\theta):\varepsilon(\theta)dx \leq \frac{c}{\mu_0}\int_\Omega \mu|\varepsilon(\theta)|^2 dx \\ \|\nabla w\|_2^2 &\leq \frac{1}{\mu_0}\int_\Omega \mu|\nabla w|^2 dx,\end{aligned}$$

para alguna constante $c > 0$. Uniendo las últimas tres desigualdades y del hecho que la norma $L^2(\Omega)$ de $\operatorname{div}(\xi)'$ está acotada por la norma $L^2(\Omega)$ de $\nabla\theta$, se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}E_{\theta,w}(t)\right| \leq\ & \frac{1}{2}\|\mu^*\|_{C^0(\bar\Omega)} h_0^{-2}[\,2(\frac{1}{\mu_0}\int_\Omega \mu|\nabla w|^2 + C_\theta^2\frac{2c}{\mu_0}\int_\Omega \mu|\varepsilon(\theta)|^2 dx) + \|\theta_t\|_2^2\,] \\ & + \|f(x,t)\|_2\|\theta_t\|_2 + \|g(x,t)\|_2\|w_t\|_2 \\ & + \frac{1}{2}\|q\|_\infty(\,\frac{C_w^2}{\mu_0}\int_\Omega \mu|\nabla w|^2 + \|w_t\|_2^2\,) + \|w_t\|_2^2 \\ & + \frac{c}{2\mu_0}(\,\|\mu\|_{C^0(\bar\Omega)} + C_\theta^2\|\mu\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\,)\int_\Omega \mu|\varepsilon(\theta)|^2 dx.\end{aligned}$$

Los términos $\|\theta_t\|_2^2$, $\int_\Omega \mu|\varepsilon(\theta)|^2dx$, $\|w_t\|_2^2$, $\int_\Omega \mu|\nabla w|^2$ pueden ser acotados por la energía de (θ, w) y para una constante apropiada $C > 0$ se tiene que

$$\left|\frac{d}{dt}E_{\theta,w}(t)\right| \leq CE_{\theta,w}(t) + \sqrt{2}\left(\|f(x,t)\|_{L^2} + \|g(x,t)\|_{L^2}\right)\sqrt{E_{\theta,w}(t)}, \quad \forall t \in [0,T],$$

donde C depende de μ_0, h_0, la norma $L^\infty(\Omega)$ del potencial q y la norma $C^1(\bar{\Omega})$ de μ. Finalmente, dividiendo por $2\sqrt{E_{\theta,w}(t)}$ y aplicando el Lema de Gronwall se deduce la estimación deseada. □

3.1.3. Segunda estimación de energía para Reissner-Mindlin

Consideremos nuevamente (θ, w) solución de (2.46) con condiciones de borde homogeneas y llamemos $\alpha(x,t), \beta(x,t), \gamma(x,t)$ a las siguientes funciones:

$$\alpha(x,t) = \nabla \cdot \theta(x,t), \quad \beta(x,t) = \nabla \wedge \theta(x,t), \quad \gamma(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Lema 3.3 *Para (α, β, γ) definidas en (3.6), existe $K > 0$ dependiendo de la norma de los parámetros de Lamé, T, el espesor h y la norma $L^\infty(\Omega)$ de q, tal que su energía (Definición 2.9) satisface la estimación:*

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta,\gamma}(t) \quad \leq \quad & K\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(0) + \int_0^T (E_{\theta,w}(t) + \|\nabla \cdot f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \wedge f\|^2_{L^2(\Omega)}\right. \\ & \left. + \|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g'\|^2_{L^2(\Omega)})dt + \int_0^T \mathcal{T}(t)dt\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t) \quad = \quad & \|\nabla \cdot \theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla \cdot \theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla \cdot \theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ & + \|\nabla \wedge \theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla \wedge \theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla \wedge \theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

y $E_{\theta,w}(t)$ es la energía del lema anterior.

Demostración. Suponiendo regularidad sobre (θ, w) (ver demostración del Lema 3.2 para su justifiación), al tomar divergencia en la primera ecuación de (2.46) se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \alpha_{tt} - (\lambda^* + 2\mu)\Delta\alpha \quad = \quad & \nabla \cdot f + \nabla \cdot (\mu^* h^{-2}(\nabla w - \theta)) + 2\nabla(\lambda^* + 2\mu) \cdot \nabla\alpha \\ & -2\nabla\mu(\nabla \wedge \beta) + \Delta\lambda^* \cdot \alpha + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu \\ = \quad & \nabla \cdot f + h^{-2}\nabla\mu^*(\nabla w - \theta) + \mu^* h^{-2}(\Delta w - \alpha) \\ & +2\nabla(\lambda^* + 2\mu) \cdot \nabla\alpha - 2\nabla\mu\nabla \wedge \beta + \alpha\Delta\lambda^* + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu. \end{aligned}$$

Then, multiplying by α_t and integrating over Ω we obtain

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\alpha_t|^2 - \int_\Omega (\lambda^* + 2\mu)\Delta\alpha \cdot \alpha_t \tag{3.8}$$
$$\begin{aligned} &= \int_\Omega (\nabla \cdot f)\alpha_t + \int_\Omega h^{-2}(\nabla \cdot (\mu^* \nabla w) - \nabla \mu^* \theta)\alpha_t \\ &\quad - \int_\Omega \mu^* h^{-2}\alpha\alpha_t + 2\int_\Omega \alpha_t \nabla(\lambda^* + 2\mu) \cdot \nabla\alpha - 2\int_\Omega \nabla\mu(\nabla \wedge \beta)\alpha_t \\ &\quad + \int_\Omega \alpha\alpha_t \Delta\lambda^* + \int_\Omega \alpha_t(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu, \end{aligned}$$

donde es posible reescribir el segundo término del lado izquierdo como

$$\begin{aligned} &- \int_\Omega (\lambda^* + 2\mu)\Delta\alpha \cdot \alpha_t \\ &\qquad = \int_\Omega (\lambda^* + 2\mu)\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha_t + \int_\Omega \alpha_t \nabla(\lambda^* + 2\mu) \cdot \nabla\alpha - \int_{\partial\Omega} (\lambda^* + 2\mu)\alpha_t \frac{\partial\alpha}{\partial n} \\ &\qquad = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega (\lambda^* + 2\mu)|\nabla\alpha|^2\right] + \int_\Omega \alpha_t \nabla(\lambda^* + 2\mu) \cdot \nabla\alpha - \int_{\partial\Omega} (\lambda^* + 2\mu)\alpha_t \frac{\partial\alpha}{\partial n}. \end{aligned}$$

Reemplazando la igualdad anterior en (3.8) y recordando que $\mu^* = 12\mu$ se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\alpha_t|^2 + \int_\Omega (\lambda^* + 2\mu)|\nabla\alpha|^2\right)\right] \tag{3.9}$$
$$\begin{aligned} &= \int_\Omega (\nabla \cdot f)\alpha_t + 12\int_\Omega h^{-2}(\nabla \cdot (\mu\nabla w) - \nabla\mu\theta)\alpha_t \\ &\quad - \int_\Omega \mu^* h^{-2}\alpha\alpha_t + \int_\Omega \alpha_t \nabla(\lambda^* + 2\mu)\nabla\alpha \\ &\quad -2\int_\Omega \nabla\mu \cdot (\nabla \wedge \beta)\alpha_t + \int_\Omega \alpha\alpha_t\Delta\lambda^* \\ &\quad + \int_\Omega \alpha_t(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu + \int_{\partial\Omega} (\lambda^* + 2\mu)\alpha_t \frac{\partial\alpha}{\partial n}. \end{aligned}$$

Tomando ahora rotor sobre la primera ecuación en (2.46) se obtiene

$$\begin{aligned} \beta_{tt} - \mu\Delta\beta &= \nabla \wedge f + \nabla \wedge (\mu^* h^{-2}(\nabla w - \theta)) + 2\nabla\mu \wedge \nabla\alpha \\ &\quad -\nabla\mu \wedge (\nabla \wedge \beta) + \nabla\mu \cdot \nabla\beta + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu \\ &= \nabla \wedge f + h^{-2}\nabla\mu^* \wedge (\nabla w - \theta) + \mu^* h^{-2}(\nabla \wedge \nabla w - \beta) \\ &\quad +2\nabla\mu \wedge \nabla\alpha - \nabla\mu \wedge (\nabla \wedge \beta) + \nabla\mu \cdot \nabla\beta + (\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu, \end{aligned}$$

donde $\nabla \wedge \nabla w = 0$ por la Proposición 5.1. Si multiplicamos la igualdad anterior por β_t e intregramos sobre Ω se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\beta_t|^2 - \int_\Omega \mu\beta_t\Delta\beta &= \int_\Omega (\nabla \wedge f)\beta_t + \int_\Omega h^{-2}\nabla\mu^* \wedge (\nabla w - \theta)\beta_t \\ &\quad - \int_\Omega \mu^* h^{-2}\beta\beta_t + 2\int_\Omega \beta_t(\nabla\mu \wedge \nabla\alpha) - \int_\Omega \nabla\mu \wedge (\nabla \wedge \beta)\beta_t \\ &\quad + \int_\Omega (\nabla\mu \cdot \nabla\beta)\beta_t + \int_\Omega \beta_t(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu, \end{aligned} \tag{3.10}$$

y nuevamente, al integrar por partes se puede reescribir el segundo término del lado izquierdo como:

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \mu\beta_t\Delta\beta &= \int_\Omega \mu\nabla\beta\cdot\nabla\beta_t + \int_\Omega \beta_t\nabla\mu\cdot\nabla\beta - \int_{\partial\Omega}\mu\beta_t\frac{\partial\beta}{\partial n} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \mu|\nabla\beta|^2\right] + \int_\Omega \beta_t\nabla\mu\cdot\nabla\beta - \int_{\partial\Omega}\mu\beta_t\frac{\partial\beta}{\partial n}.
\end{aligned}
$$

Reemplazando lo anterior en (3.10) se llega a que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\beta_t|^2 + \int_\Omega \mu|\nabla\beta|^2\right)\right] &= \int_\Omega (\nabla\wedge f)\beta_t \int_\Omega \beta_t h^{-2}\nabla\mu^*\wedge(\nabla w-\theta) \qquad (3.11)\\
&- \int_\Omega \mu^* h^{-2}\beta\beta_t + 2\int_\Omega(\nabla\mu\wedge\nabla\alpha)\beta_t - \int_\Omega \nabla\mu\wedge(\nabla\wedge\beta)\beta_t \\
&+ \int_\Omega \beta_t(\nabla\theta+\nabla\theta^{\mathrm{T}}):\nabla^2\mu + \int_{\partial\Omega}\mu\beta_t\frac{\partial\beta}{\partial n}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, derivando la segunda ecuación de (4.1) con respecto al tiempo, se observa que $\gamma=\partial_t w$ satisface la ecuación

$$
\gamma_{tt} - \operatorname{div}(\mu(\nabla\gamma-\partial_t\theta)) + q\gamma = g'(x,t),
$$

con $g'=\partial_t g(x,t)$, y si la multiplicamos por γ_t e integramos sobre Ω se tiene que

$$
\int_\Omega \gamma_{tt}\gamma_t - \int_\Omega \operatorname{div}(\mu\nabla\gamma)\gamma_t = \int_\Omega g'(x,t)\gamma_t - \int_\Omega q\gamma\gamma_t - \int_\Omega \gamma_t\operatorname{div}(\mu\partial_t\theta). \qquad (3.12)
$$

Integrando por partes se deduce que

$$
-\int_\Omega \operatorname{div}(\mu\nabla\gamma)\gamma_t = \frac{1}{2}\int_\Omega \mu\frac{d}{dt}|\nabla\gamma|^2 - \int_{\partial\Omega}\mu\gamma_t\frac{\partial\gamma}{\partial n},
$$

donde el término de borde es nulo debido a que w se anula sobre la frontera para todo tiempo $t\in(0,T)$. Además el tercer término del lado derecho en (3.12) puede escribirse como

$$
\int_\Omega \gamma_t\operatorname{div}(\mu\partial_t\theta) = \int_\Omega \mu\gamma_t\partial_t(\nabla\cdot\theta) + \int_\Omega \gamma_t\theta_t(\nabla\mu) = \int_\Omega \mu\alpha_t\gamma_t + \int_\Omega \gamma_t\theta_t(\nabla\mu).
$$

Luego, usando las dos igualdades previas y reemplazando en (3.12) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\gamma_t|^2 + \int_\Omega \mu|\nabla\gamma|^2\right)\right] \qquad (3.13)\\
&\qquad = \int_\Omega g'(x,t)\gamma_t - \int_\Omega q\gamma\gamma_t - \int_\Omega \mu\alpha_t\gamma_t - \int_\Omega \gamma_t\theta_t(\nabla\mu).
\end{aligned}
$$

Si ahora sumamos las igualdades (3.9), (3.11) and (3.13) , al lado izquierdo nos queda la energía de (α, β, γ),

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)\right) \;=\; & \int_\Omega (\nabla \cdot f)\alpha_t + 12\int_\Omega h^{-2}(\nabla\cdot(\mu\nabla w) - \nabla\mu\theta)\alpha_t - \int_\Omega \mu^* h^{-2}\alpha\alpha_t \\
& + \int_\Omega \alpha_t \nabla(\lambda^* + 2\mu)\nabla\alpha - 2\int_\Omega \nabla\mu\cdot(\nabla\wedge\beta)\alpha_t + \int_\Omega \alpha\alpha_t\Delta\lambda^* \\
& + \int_\Omega \alpha_t(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu + \int_\Omega (\nabla\wedge f)\beta_t + \int_\Omega (h^{-2}\nabla\mu^*\wedge(\nabla w - \theta))\beta_t \\
& - \int_\Omega \mu^* h^{-2}\beta\beta_t + 2\int_\Omega (\nabla\mu\wedge\nabla\alpha)\beta_t - \int_\Omega \nabla\mu\wedge(\nabla\wedge\beta)\beta_t \\
& + \int_\Omega \beta_t(\nabla\theta + \nabla\theta^{\mathrm{T}}) : \nabla^2\mu + \int_\Omega g'(x,t)\gamma_t - \int_\Omega q\gamma\gamma_t - \int_\Omega \mu\alpha_t\gamma_t \\
& + \int_{\partial\Omega} (\lambda^* + 2\mu)\alpha_t\frac{\partial\alpha}{\partial n} + \int_{\partial\Omega} \mu\beta_t\frac{\partial\beta}{\partial n},
\end{aligned}
$$

y como $\mu, \lambda \in C^2(\bar{\Omega})$, luego $\lambda^* \in C^2(\bar{\Omega})$ por lo tanto las integrales sobre $\partial\Omega$ pueden ser acotadas como sigue.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega} (\lambda^* + 2\mu)\alpha_t\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right| &\leq \left(\|\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right)\left(\|\alpha_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\
&\leq \left(\|\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right)\left(\|\nabla\cdot\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\
\left|\int_{\partial\Omega} \mu\beta_t\frac{\partial\beta}{\partial n}\right| &\leq \|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\left(\|\beta\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial\beta}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\
&\leq \|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\left(\|\nabla\wedge\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl}\left|\dfrac{d}{dt}\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)\right)\right| & \leq & \|\nabla\cdot f\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +12h_0^{-2}(\|\nabla\cdot(\mu\nabla w)\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\theta\|_{L^2(\Omega)})\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +\|\mu^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}h_0^{-2}\|\alpha\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +(\|\nabla\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}+2\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})})\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\alpha\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +2\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)}+\|\Delta\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\alpha\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +2\left\|\nabla^2\mu\right\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\wedge f\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +h_0^{-2}\|\nabla\mu^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}+\|\theta\|_{L^2(\Omega)})\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +h_0^{-2}\|\mu^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\beta\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)}+2\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\nabla\alpha\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)}+2\left\|\nabla^2\mu\right\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}\|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +\|g'(x,t)\|_{L^2(\Omega)}\|\gamma_t\|_{L^2(\Omega)}+\|q\|_\infty\|\gamma\|_{L^2(\Omega)}\|\gamma_t\|_{L^2(\Omega)}+\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\alpha_t\|_{L^2(\Omega)}\|\gamma_t\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +(\|\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}+2\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})})\left(\|\nabla\cdot\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)}+\left\|\dfrac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\ & & +\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\left(\|\nabla\wedge\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)}+\left\|\dfrac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right).\end{array}$$

En la segunda linea de la desigualdad anterior aparece la norma de $\nabla\cdot(\mu\nabla w)$ que es posible acotar usando que w satisface (2.46), luego

$$\begin{array}{rcl}\|\nabla\cdot(\mu\nabla w)\|_{L^2(\Omega)} & = & \|w_{tt}+\mu\nabla\cdot\theta+\nabla\mu\cdot\theta+qw-g(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & \|\gamma_t\|_{L^2(\Omega)}+\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\|\alpha\|_{L^2(\Omega)}+\|\mu\|_{C^1(\bar{\Omega})}\|\theta\|_{L^2(\Omega)} \\ & & +\|q\|_{L^\infty(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}+\|g(x,t)\|_{L^2(\Omega)}.\end{array}$$

Además, w, w_t y θ son nulas en $\partial\Omega\times(0,T)$ lo cual implica que $\gamma=w_t=0$ en $\partial\Omega\times(0,T)$ y por la desigualdad de Poincare existen constantes C_θ, C_w y C_γ, tal que

$$\begin{array}{rcl}\|\theta\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C_\theta\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|w\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C_w\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|\gamma\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C_\gamma\|\nabla\gamma\|_{L^2(\Omega)}.\end{array}$$

También, usando la generalización de la desigualdad de Poincare a funciones en $H^1(\Omega)$ que dice que existen constantes C_α y C_β, tal que

$$\begin{array}{rcl}\|\alpha\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C_\alpha(\|\nabla\alpha\|_{L^2(\Omega)}+\|\alpha\|_{L^2(\partial\Omega)})=C_\alpha(\|\nabla\alpha\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\cdot\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}), \\ \|\beta\|_{L^2(\Omega)} & \leq & C_\beta(\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}+\|\beta\|_{L^2(\partial\Omega)})=C_\beta(\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla\wedge\theta\|_{L^2(\partial\Omega)}).\end{array}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)\right)\right| \;\; &\leq \;\; \frac{1}{2}(\|\nabla\cdot f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+6h_0^{-2}\Big[\|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)} + 2C_\alpha\|\mu\|^2_{C^0(\bar{\Omega})}(\|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)}) + \|\mu\|^2_{C^1(\bar{\Omega})}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\|q\|_{L^\infty(\Omega)}\|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\mu\|^2_{C^0(\bar{\Omega})}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + 6\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}\Big] \\
&+\frac{1}{2}\|\mu^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}h_0^{-2}(2C_\alpha(\|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)}) + \|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+\frac{1}{2}(\|\nabla\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})})(\;\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;\|\nabla\beta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+\frac{1}{2}\|\Delta\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})}(2C_\alpha(\|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\cdot\theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)}) + \|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+2\left\|\nabla^2\mu\right\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) + \frac{1}{2}(\|\nabla\wedge f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&+\frac{1}{2}h_0^{-2}\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}[\;2(\;\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\theta^2\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\;) + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;] \\
&+\frac{1}{2}h_0^{-2}\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;2C_\beta(\|\nabla\beta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\wedge\theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)}) + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;\|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) + \frac{1}{2}\|\nabla\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;\|\nabla\beta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+\left\|\nabla^2\mu\right\|_{C^0(\bar{\Omega})}(\;\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) + \frac{1}{2}(\;\|g'(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+\frac{1}{2}\|q\|_\infty(\;C_\gamma^2\|\nabla\gamma\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) + \frac{1}{2}(\;\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\gamma_t\|^2_{L^2(\Omega)}\;) \\
&+(\|\lambda^*\|_{C^0(\bar{\Omega})} + 2\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})})\left(\|\nabla\cdot\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\cdot\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right) \\
&+\|\mu\|_{C^0(\bar{\Omega})}\left(\|\nabla\wedge\theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla\wedge\theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Recordando la definición de la energía de (α,β,γ) y que $0 < \mu_0 \leq \mu$ es claro que existen constantes C_1, C_2 tal que los términos $\|\alpha_t\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla\alpha\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\beta_t\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla\beta\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\gamma\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla\gamma\|^2_{L^2(\Omega)}$ pueden ser acotados por $C_1E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)$, mientras que $\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|w\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)}$ pueden ser acotados por $C_2E_{\theta,w}(t)$, for all $t\in(0,T)$. Luego, existen cuatro constantes $K_i > 0$, $i = 1,2,3,4$, dependiendo de h de las normas de μ, λ y q, tal que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(t)\right)\right| \quad &\leq \quad K_1 E_{\alpha,\beta,\gamma}(t) + K_2 E_{\theta,w}(t) \qquad (3.14)\\
&+K_3(\|\nabla \cdot f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \wedge f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g'(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)})\\
&+K_4\left(\|\nabla \cdot \theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla \cdot \theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla \cdot \theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right.\\
&\left.\quad + \|\nabla \wedge \theta\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla \wedge \theta_t\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial(\nabla \wedge \theta)}{\partial n}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

entonces del Lema de Gronwall se concluye que existe una constante $K > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta,\gamma}(t) \quad &\leq \quad K\left(E_{\alpha,\beta,\gamma}(0) + \int_0^T \mathcal{T}(t)dt\right.\\
&\left. + \int_0^T (E_{\theta,w}(t) + \|\nabla \cdot f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \wedge f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g(x,t)\|^2_2 + \|g'(x,t)\|^2_2))dt\right).
\end{aligned}
$$

□

3.2. Desigualdad de Carleman para una ecuación hiperbólica

Sea Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^N$ con frontera regular y Γ un subconjunto de $\partial\Omega$ y $T > 0$. Denotando los operador diferenciales de **ondas acústicas** como

$$
\begin{aligned}
L_0 \quad &:= \quad \partial_{tt} - \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla\cdot) \qquad (3.15)\\
L \quad &:= \quad \partial_{tt} - \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla\cdot) + p \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

con $\gamma > 0$, $p \in L^\infty(\Omega)$ y considerando el conjunto Γ_{x_0} definido en (1.2) y las funciones de peso dadas por la Definición 1.1, se tiene la siguiente desigualdad de Carleman:

Teorema 3.4 *Supongamos que $\gamma \in C^2(\bar{\Omega})$ satisface que*

$$\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$$

$$\exists \theta_0 \in (0,1) \text{ tal que } \quad -1 + \theta_0 \leq \frac{\nabla\gamma \cdot (x - x_0)}{2\gamma} < 1 - \theta_0, \ \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Escogiendo $\beta \in (0,1)$ tal que

$$0 < \beta < \theta_0\gamma_0,$$

entonces, para todo $M > 0$ existen $r_0 > 0$ y $s_0 > 0$ y una constante $C = C(r_0, s_0, \Omega, \beta, x_0, M)$, tal que para todo $p \in L^\infty(\Omega)$ con $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$, se tiene que para cada $r \geq r_0$,

$s \geq s_0$ y $v \in L^2(-T,T;H^2(\Omega))$, $v_t \in L^2(-T,T;H^1(\Omega))$, $L_0 v \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$, $v(\pm T) = v_t(\pm T) = 0$,

$$\begin{aligned} sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|v_t|^2 + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|\nabla v|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi^3 e^{2s\varphi}|v|^2 & \\ +\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_1 w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_2 w|^2 \quad \leq \quad C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|Lv|^2 & \\ +Cs^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3 e^{2s\varphi}|v|^2 + Csr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|v_t|^2 & \\ +Csr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi e^{2s\varphi}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \tau}\right|^2\right). & \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $w(x,t) := e^{s\varphi}v$ y

$$\begin{aligned} P_1(w) &:= w_{tt} - \gamma\Delta w + s^2r^2\varphi^2 w(|\psi_t|^2 - \gamma|\nabla\psi|^2) - 2\nabla\gamma\cdot\nabla w \\ P_2(w) &:= (M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi) - sr^2\varphi w(|\psi_t|^2 - \gamma|\nabla\psi|^2) \\ &\quad -2sr\varphi(\psi_t w_t - \gamma\nabla\psi\cdot\nabla w) + sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi. \end{aligned}$$

Demostración. La demostración es muy similar a lo hecho en [Pue] pero con la diferencia de que aquí hemos agregado el coeficiente $\gamma(x)$ y al no considerar condiciones de borde Dirichlet homogeneas es necesario acarrear los términos de borde y estimarlos de manera adecuada.

Notemos que basta demostrar la desigualdad para el operador L_0 ya que

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|L_0 v|^2 \leq 2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|Lv|^2 + 2\|p\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|v|^2$$

y podemos absorber el término del potencial con el lado izquierdo de la desigualdad.

Asumamos en un principio que v es suficientemente regular e introduzcamos el operador

$$P_0 := e^{s\varphi}L_0(e^{-s\varphi}(\cdot)). \tag{3.18}$$

Para calcular el valor de $P_0(w) = e^{s\varphi}L_0(v)$ notemos primero que

$$\begin{aligned} \partial_t(e^{-s\varphi}w) &= w_t e^{-s\varphi} - sr\varphi\psi_t e^{-s\varphi}w, \\ \partial_{tt}(e^{-s\varphi}w) &= w_{tt}e^{-s\varphi} - 2sr\varphi\psi_t e^{-s\varphi}w_t - sr\varphi w e^{-s\varphi}(\psi_{tt} + r|\psi_t|^2 - sr\varphi|\psi_t|^2), \\ \partial_i(e^{-s\varphi}w) &= e^{-s\varphi}\partial_i w - sr\varphi(\partial_i\psi)e^{-s\varphi}w, \\ \partial_i(\gamma\partial_i(e^{-s\varphi}w)) &= \gamma(e^{-s\varphi}\partial_{ii}w - 2sr\varphi(\partial_i\psi)e^{-s\varphi}\partial_i w - sr\varphi w e^{-s\varphi}(\partial_{ii}\psi + r|\partial_i\psi|^2 - sr\varphi|\partial_i\psi|^2)) \\ &\quad +(\partial_i\gamma)(e^{-s\varphi}\partial_i w - sr\varphi(\partial_i\psi)e^{-s\varphi}w), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_0(w) &= w_{tt} - 2sr\varphi\psi_t w_t - sr\varphi w(\psi_{tt} + r|\psi_t|^2 - sr\varphi|\psi_t|^2) - \gamma\Delta w + 2sr\varphi\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w \\ &\quad +sr\varphi\gamma w(\Delta\psi + r|\nabla\psi|^2 - sr\varphi|\nabla\psi|^2)) - \nabla\gamma\cdot\nabla w + sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi. \end{aligned}$$

Es posible dividir P_0 como sigue

$$P_0 = P_1 + P_2 + R_0.$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1(w) &= w_{tt} - \gamma\Delta w + s^2r^2\varphi^2 w(|\psi_t|^2 - \gamma|\nabla\psi|^2) - 2\nabla\gamma\cdot\nabla w,\\
P_2(w) &= (M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi) - sr^2\varphi w(|\psi_t|^2 - \gamma|\nabla\psi|^2)\\
&\quad -2sr\varphi(\psi_t w_t - \gamma\nabla\psi\cdot\nabla w) + sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi,\\
R_0(w) &= -M_1 sr\varphi w(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi) + \nabla\gamma\cdot\nabla w.
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_2w|^2 + 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega P_1wP_2w\\
&\qquad = \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1w + P_2w|^2\\
&\qquad \le \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_0w - R_0w|^2\\
&\qquad \le \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_0w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |R_0w|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_2w|^2 + 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega P_1wP_2w\\
&\qquad \le \int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi}|L_0v|^2 + \int_{-T}^{T}\int_\Omega |R_0w|^2
\end{aligned}\tag{3.19}$$

Queremos encontrar una cota inferior para el término cruzado en el lado izquierdo de la desigualdad anterior y con este fin debemos calcular explícitamente $\int_{-T}^{T}\int_\Omega P_1wP_2w$:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{-T}^{T}\int_\Omega w_{tt}((M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi))\\
&= (1-M_1)sr\left[\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi) + \underbrace{\int_{-T}^{T}\int_\Omega w_t w\partial_t(\varphi(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi))}_{J_1}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-T}^{T}\int_\Omega w_t w(r\varphi\psi_t(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)-\gamma\varphi\cancelto{0}{\Delta\psi_t)} \\
&= -J_1 - r\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi[(\psi_{tt}+r|\psi_t|^2)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)-r\psi_t\gamma\cancelto{0}{\Delta\psi_t]} \\
&\quad + \cancelto{0}{\int_\Omega rw^2\varphi\psi_t(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\Big|_{-T}^{T}} \\
&= -\frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}+r|\psi_t|^2)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
I_{11} = (1-M_1)sr\left[\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) - \frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}+r|\psi_t|^2)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\right] \tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \int_{-T}^{T}\int_\Omega w_{tt}(-sr^2\varphi w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)) \\
&= sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) + sr^2\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_\Omega rww_t\varphi\psi_t(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)}_{J_2} \\
&\quad +2sr^2\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_\Omega ww_t\varphi(\psi_t\psi_{tt}-\gamma\nabla\psi\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t)}}_{J_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= -J_2 - r\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi[(r|\psi_t|^2+\psi_{tt})(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)+2\psi_t(\psi_t\psi_{tt}-\gamma\nabla\psi\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t)]} \\
&\quad + \cancelto{0}{\int_\Omega r|w|^2\varphi\psi_t(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\Big|_{-T}^{T}} \\
&= -\frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi[(r|\psi_t|^2+\psi_{tt})(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)+2|\psi_t|^2\psi_{tt}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -J_3 - \int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(r|\psi_t|^2\psi_{tt}+|\psi_{tt}|^2+\psi_t\cancelto{0}{\psi_{ttt})} + \cancelto{0}{\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\psi_t\psi_{tt}\Big|_{-T}^{T}} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(r|\psi_t|^2\psi_{tt}+|\psi_{tt}|^2)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) - sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(r|\psi_t|^2\psi_{tt}+|\psi_{tt}|^2) \\
&\quad -\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi[(r|\psi_t|^2+\psi_{tt})(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)+2|\psi_t|^2\psi_{tt}] \\
&= sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) - sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\psi_{tt}|^2 - \frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\frac{1}{2}|\psi_t|^2\psi_{tt} \\
&\quad +\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\gamma|\nabla\psi|^2\psi_{tt} - \frac{sr^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\psi_t|^2(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_{tt}(-2sr\varphi(w_t\psi_t - \gamma\nabla w\cdot\nabla\psi)) \\
&= 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t[r\varphi\psi_t(w_t\psi_t - \gamma\nabla w\cdot\nabla\psi) + \varphi(w_{tt}\psi_t + w_t\psi_{tt} - \gamma\nabla w_t\cdot\nabla\psi - \gamma\nabla w\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t})] \\
&\quad -2sr\cancelto{0}{\int_{\Omega} w_t\varphi(w_t\psi_t - \gamma\nabla w\cdot\nabla\psi)\Big|_{-T}^{T}} \\
&= 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(r|\psi_t|^2+\psi_{tt}) - 2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\gamma\varphi\nabla w\cdot\nabla\psi + 2sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_tw_{tt}\varphi\psi_t}_{J_3} \\
&\quad -2sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\varphi\gamma\nabla w_t\cdot\nabla\psi}_{J_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -J_3 - \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(r|\psi_t|^2+\psi_{tt}) + \cancelto{0}{\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\psi_t\Big|_{-T}^{T}} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(r|\psi_t|^2+\psi_{tt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4 &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t[\nabla\psi\cdot(\nabla w_t\gamma\varphi\psi + w_t(\varphi\nabla\gamma + r\gamma\varphi\nabla\psi)) + \gamma w_t\varphi\Delta\psi] + \cancelto{0}{\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\psi_t\Big|_{-T}^{T}} \\
&\quad +\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w_t|^2\varphi\gamma\nabla(\psi\cdot n) \\
&= -J_4 - \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + r\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma\Delta\psi) + \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w_t|^2\varphi\gamma\nabla(\psi\cdot n) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + r\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma\Delta\psi) + \frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w_t|^2\varphi\gamma\nabla(\psi\cdot n)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\psi_{tt} + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + r\gamma|\nabla\psi|^2 + \gamma\Delta\psi) \\
&\quad +sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi|\psi_t|^2 - 2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\gamma\varphi\nabla w\cdot\nabla\psi - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w_t|^2\varphi\gamma\nabla(\psi\cdot n)
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{14} &= \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_{tt}(sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi) \\
&= -sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi - sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} ww_t\varphi(r\psi_t + \nabla\gamma\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t})}_{J_5} \\
&\quad +sr\cancelto{0}{\int_{\Omega} ww_t\varphi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi\Big|_{-T}^{T}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_5 &= -J_5 + r\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(r|\psi_t|^2+\psi_{tt}) \\
&= \frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(r|\psi_t|^2+\psi_{tt})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
I_{14} = -sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi - \frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\psi_{tt} - \frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi|\psi_t|^2 \tag{3.23}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{21} &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\Delta w((M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)) \\
&= -(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\nabla w\cdot\nabla(\gamma\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)) \\
&\quad +(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla w\cdot n \\
&= -(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
&\quad -(1-M_1)sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w\nabla w\cdot((\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma + r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\psi)}_{J_{6,1}} \\
&\quad -(1-M_1)sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w\nabla w\cdot\gamma(\cancelto{0}{\nabla\psi_{tt}} - \Delta\psi\nabla\gamma - \cancelto{0}{\gamma\nabla\Delta\psi)}}_{J_{6,2}} \\
&\quad +(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla w\cdot n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_6 &= J_{6,1}+J_{6,2} \\
&= -J_6 - r\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) + r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)|\nabla\psi|^2 - \gamma\Delta\psi\nabla\psi\cdot\nabla\gamma] \\
&\quad -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi[(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\Delta\gamma + (\cancelto{0}{\nabla\psi_{tt}} - \cancelto{0}{\gamma\nabla\Delta\psi} - \Delta\psi\nabla\gamma)\cdot\nabla\gamma] \\
&\quad -r\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi[(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + \gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\Delta\psi + \gamma(\cancelto{0}{\nabla\psi_{tt}} - \cancelto{0}{\gamma\nabla\Delta\psi} - \Delta\psi\nabla\gamma)\cdot\nabla\psi] \\
&\quad +\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\Delta\psi|\nabla\gamma|^2 + \gamma\nabla\gamma\cdot\cancelto{0}{\nabla\Delta\psi} + \gamma\Delta\gamma\Delta\psi) \\
&\quad +\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi((\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma + r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\psi - \gamma\Delta\psi\nabla\gamma) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(2r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + \Delta\gamma + r\gamma(\Delta\psi + r|\nabla\psi|^2)) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[2\Delta\psi|\nabla\gamma|^2 + 2r\gamma\Delta\psi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + \gamma\Delta\psi\Delta\gamma\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi((\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma + r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\psi - \gamma\Delta\psi\nabla\gamma)\cdot n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{21} \quad = \quad & -(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
& +\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\Delta\gamma \\
& -\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\Delta\psi(2|\nabla\gamma|^2+2r\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\gamma) \\
& +\tfrac{(1-M_1)}{2}sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(\gamma\Delta\psi+2\nabla\gamma\cdot\nabla\psi) \\
& +\tfrac{(1-M_1)}{2}sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\gamma|\nabla\psi|^2 \\
& +(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla w\cdot n \\
& -\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma)\cdot n \\
& -\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\psi-\gamma\Delta\psi\nabla\gamma)\cdot n
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{22} \quad = \quad & -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\Delta w(-sr^2\varphi w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)) \\
= & -sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\
& -sr^2\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}w\nabla w\cdot[\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)+\gamma\varphi(2\psi_t\cancelto{0}{\nabla\psi_t}-2\gamma D^2\psi\nabla\psi-\nabla\gamma|\nabla\psi|^2)]}_{J_7} \\
& +sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)w\nabla w\cdot n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_7 \quad = \quad & -J_7-\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\Big[(|\psi_t|^2-2\gamma|\nabla\psi|^2)(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)+2\psi_t\cancelto{0}{\nabla\psi_t}\cdot\nabla\gamma \\
& \qquad -2|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-4\gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi)\Big] \\
& -r\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\Big[(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\psi+r\gamma|\nabla\psi|^2)+2\gamma\psi_t\cancelto{0}{\nabla\psi_t}\cdot\nabla\psi \\
& \qquad -\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|\nabla\psi|^2-2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)\Big] \\
& +\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\Big[4\gamma D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\gamma)+2r\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)+2\gamma^2\cancelto{0}{\nabla\Delta\psi}\cdot\nabla\psi+2\gamma^2|D^2\psi|^2\Big] \\
& +\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2[\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)-\gamma\varphi(2\gamma D^2\psi\nabla\psi+\nabla\gamma|\nabla\psi|^2)]\cdot n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_7 \;=\;& -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[(|\psi_t|^2-2\gamma|\nabla\psi|^2)(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)-2|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-4\gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi)\right]\\
&-\frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\psi+r\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&-\frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[-\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|\nabla\psi|^2-2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)\right]\\
&+\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[4\gamma D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\gamma)+2r\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)+2\gamma^2|D^2\psi|^2\right]\\
&+\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2[\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)-\gamma\varphi(2\gamma D^2\psi\nabla\psi+\nabla\gamma|\nabla\psi|^2)]\cdot n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{22} \;=\;& -sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&+\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[(|\psi_t|^2-2\gamma|\nabla\psi|^2)(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)-2|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-4\gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi)\right]\\
&+\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\psi+r\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&+\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[-\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|\nabla\psi|^2-2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)\right]\\
&-\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[4\gamma D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\gamma)+2r\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)+2\gamma^2|D^2\psi|^2\right]\\
&-\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2[\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)-\gamma\varphi(2\gamma D^2\psi\nabla\psi+\nabla\gamma|\nabla\psi|^2)]\cdot n\\
&+sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)w\nabla w\cdot n
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{23} \;=\;& -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\Delta w(-2sr\varphi(\psi_t w_t-\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w))\\
=\;& -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi\nabla w\cdot(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)(\psi_t w_t-\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w)\\
&-2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi\nabla w\cdot(w_t\cancelto{0}{\nabla\psi_t}+\psi_t\nabla w_t-(\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla\gamma-\gamma D^2\psi\nabla w-\gamma D^2 w\nabla\psi)\\
&+2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\psi_t w_t-\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla w\cdot n,
\end{aligned}
$$

luego

$$\begin{aligned}
I_{23} &= -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma) + 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma)(\nabla w\cdot\nabla\psi)\\
&\quad -2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\gamma\varphi(\nabla w\cdot\nabla\psi) + 2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w\cdot\nabla\psi|^2\\
&\quad -2sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi\psi_t(\nabla w\cdot\nabla w_t)}_{J_8} + 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma)(\nabla w\cdot\nabla\psi)\\
&\quad +2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi D^2\psi(\nabla w,\nabla w) + 2sr\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi D^2 w(\nabla w,\nabla\psi)}_{J_9}\\
&\quad +2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\psi_t w_t - \gamma\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla w\cdot n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_8 &= -J_8 - \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt} + r|\psi_t|^2) + \cancel{\int_{\Omega}\gamma\varphi\psi_t|\nabla w|^2\Big|_{-T}^{T}} \to 0\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt} + r|\psi_t|^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_9 &= -J_9 - \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi(\gamma^2\Delta\psi + 2\gamma\nabla\psi\cdot\nabla\gamma + r\gamma^2|\nabla\psi|^2)\\
&\quad + \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w|^2\nabla\psi\cdot n\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi(\gamma^2\Delta\psi + 2\gamma\nabla\psi\cdot\nabla\gamma + r\gamma^2|\nabla\psi|^2)\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w|^2\nabla\psi\cdot n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
I_{23} &= -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma) + 4sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma)(\nabla w\cdot\nabla\psi)\\
&\quad -2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla w\cdot\nabla\psi) + 2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w\cdot\nabla\psi|^2\\
&\quad +sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi - 2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma) + sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi\gamma(|\psi_t|^2 - \gamma\varphi|\nabla\psi|^2)\\
&\quad +2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi D^2\psi(\nabla w,\nabla w)\\
&\quad +sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w|^2\nabla\psi\cdot n + 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\psi_t w_t - \gamma\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla w\cdot n
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$
\begin{aligned}
I_{24} &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} \gamma \Delta w (sr\varphi w \nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\\
&= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \varphi\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi\\
&\quad +sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} \varphi w\nabla w\cdot((\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma + r\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi + \gamma D^2\gamma\nabla\psi + \gamma D^2\psi\nabla\gamma)\\
&\quad -sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} \gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi) w\nabla w\cdot n\\
&= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\cdot\nabla\psi + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w\vec{G}(\gamma,\psi)\cdot\nabla w\\
&\quad +sr^2\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(\nabla w\cdot\nabla\psi)}_{J_9} - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)w\nabla w\cdot n
\end{aligned}
$$

donde definimos $\vec{G}$ como

$$
\vec{G}(\gamma,\psi) := (\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma + \gamma D^2\gamma\nabla\psi + \gamma D^2\psi\nabla\gamma. \tag{3.27}
$$

$$
\begin{aligned}
J_9 &= -J_9 - \int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} |w|^2\varphi\gamma(\nabla\gamma,\nabla\psi)\Delta\psi\\
&\quad -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |w|^2\varphi\nabla\psi\cdot((\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma + r\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi + \gamma D^2\gamma\nabla\psi + \gamma D^2\psi\nabla\gamma)\\
&\quad +\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} |w|^2\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi\cdot n\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} |w|^2\varphi\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\Delta\psi - \frac{r}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)|\nabla\psi|^2\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |w|^2\varphi(|\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2 + \gamma D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\psi) + \gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi))\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} |w|^2\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi\cdot n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{24} &= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w\vec{G}(\gamma,\psi)\cdot\nabla w\\
&\quad -\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |w|^2\varphi(\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\Delta\psi + |\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2 + \gamma D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\psi) + \gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi))\\
&\quad -\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |w|^2\varphi\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)|\nabla\psi|^2 \qquad (3.28)\\
&\quad +\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega} |w|^2\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi\cdot n - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)w\nabla w\cdot n
\end{aligned}
$$

$$
I_{31} = \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} s^2r^2\varphi^2 w(|\psi_t|^2 - \gamma|\nabla\psi|^2)\,((M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt} - \gamma\Delta\psi))
$$

$\Rightarrow$

$$I_{31} = -(1-M_1)s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \tag{3.29}$$

$$I_{32} = \int_{-T}^{T}\int_\Omega s^2r^2\varphi^2 w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(-sr^2\varphi w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2))$$

$\Rightarrow$

$$I_{32} = -s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2 \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
I_{33} &= \int_{-T}^{T}\int_\Omega s^2r^2\varphi^2 w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(-2sr\varphi(\psi_t w_t-\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w))\\
&= -2s^3r^3\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_\Omega ww_t\varphi^3\psi_t(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)}_{J_{10}}+2s^3r^3\underbrace{\int_{-T}^{T}\int_\Omega w\varphi^3\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)}_{J_{11}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{10} &= -J_{10}-\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3((\psi_{tt}+3r|\psi_t|^2)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)+2\varphi^3|\psi_t|^2\psi_{tt}-2\gamma\nabla\psi\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t)}\\
&\quad \cancelto{0}{+\int_\Omega |w|^2\varphi^3\psi_t(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\Big|_{-T}^{T}}\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3((\psi_{tt}+3r|\psi_t|^2)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)+2|\psi_t|^2\psi_{tt})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{11} &= -J_{11}-\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(3r\gamma|\nabla\psi|^2+\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&\quad -\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3\gamma\nabla\psi\cdot(2\psi_t\cancelto{0}{\nabla\psi_t}-|\nabla\psi|^2\nabla\gamma-2\gamma D^2\psi\nabla\psi)\\
&\quad +\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi^3\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\psi\cdot n\\
&= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(3r\gamma|\nabla\psi|^2+\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3\gamma(|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+2\gamma D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi))\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi^3\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\psi\cdot n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{33} &= s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(\psi_{tt}-\nabla\gamma\cdot\nabla\psi-\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\
&\quad +s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(2|\psi_t|^2\psi_{tt}+\gamma|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)) \\
&\quad +3s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2 \\
&\quad +s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi^3\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\psi\cdot n
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

$$
I_{34}=\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}s^2r^2\varphi^2w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)
$$

$\Rightarrow$

$$
I_{34}=s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3\nabla\gamma\cdot\nabla\psi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{41} &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}2\nabla\gamma\cdot\nabla w((M_1-1)sr\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)) \\
&= -I_{41}+2(M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\Delta\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
&\quad +2(M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}w\varphi\nabla\gamma(r\nabla\psi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)+\cancelto{0}{\nabla\psi_{tt}}-\Delta\psi\nabla\gamma-\gamma\cancelto{0}{\nabla\Delta\psi)} \\
&\quad -2(M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma\cdot n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_{41} &= (M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi\left[(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)-|\nabla\gamma|^2\Delta\psi\right] \\
&\quad -(M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma\cdot n
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{42} &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}2\nabla\gamma\cdot\nabla w(-sr^2\varphi w(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)) \\
&= -I_{42}-2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\
&\quad -2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(2\psi_t\nabla\gamma\cdot\cancelto{0}{\nabla\psi_t}-|\nabla\psi|^2|\nabla\gamma|^2-2\gamma\Delta\psi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi) \\
&\quad +2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\gamma\cdot n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_{42} &= -sr^2 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} |w|^2\varphi\left[\Delta\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)-|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-2\gamma\Delta\psi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi\right] \\ & -sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\ & +sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\gamma\cdot n \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$I_{43} = -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} 2\nabla\gamma\cdot\nabla w(-2sr\varphi(\psi_t w_t-\gamma\nabla\psi\cdot\nabla w))$$

$\Rightarrow$

$$I_{43} = 4sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w) - 4sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w)(\nabla\psi\cdot\nabla w) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} I_{44} &= -\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}2\nabla\gamma\cdot\nabla w(sr\varphi w\nabla\gamma\cdot\nabla\psi) \\ &= -I_{44}+2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\Delta\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)+r|\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2+D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\gamma)+D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\gamma)) \\ & -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma\cdot n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{44} &= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi(\Delta\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)+D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\gamma)+D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\gamma)) \\ & +sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi|\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2-sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma\cdot n \end{aligned} \tag{3.36}$$

Luego, de (3.20)-(3.36) se obtiene que

$$\int_{-T}^{T}\int_\Omega P_1 w P_2 w =$$

$$
w_t \quad \left\{
\begin{aligned}
& sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(\psi_{tt}-\cancel{\gamma\Delta\psi}) - M_1 sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\\
& +sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi\psi_{tt} + sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(\cancel{\nabla\gamma\cdot\nabla\psi}+\cancel{r\gamma|\nabla\psi|^2}+\cancel{\gamma\Delta\psi})\\
& \cancel{-sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi} + sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi(|\psi_t|^2-\cancel{\gamma|\nabla\psi|^2}) + sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w_t|^2\varphi|\psi_t|^2\\
& \cancel{-2sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega w_t\psi_t\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma)} + \cancelto{2}{4}sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega w_t\psi_t\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w) - 4sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega w_t\psi_t\gamma\varphi\nabla w\cdot\nabla\psi
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\nabla w \quad \left\{
\begin{aligned}
& -(\cancel{1}-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) + \cancel{4sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega \gamma\varphi(\nabla w\cdot\nabla\gamma)(\nabla w\cdot\nabla\psi)}\\
& \cancel{+sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)} - \cancelto{1}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\psi\cdot\nabla\gamma\\
& +2sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega \gamma^2\varphi D^2\psi(\nabla w,\nabla w) + \cancel{sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi} + sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega \varphi w(\vec{G}(\gamma,\psi)\cdot\nabla w)\\
& \cancel{-4sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega \gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w)(\nabla\psi\cdot\nabla w)} - \cancel{sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)}\\
& +2sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega \gamma^2\varphi|\nabla w\cdot\nabla\psi|^2 + \cancel{sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi\gamma(|\psi_t|^2-\gamma\varphi|\nabla\psi|^2)}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
w \quad \left\{
\begin{aligned}
& +\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\Delta\gamma\\
& -\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\Delta\psi(2|\nabla\gamma|^2+2r\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\gamma)\\
& (M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)-|\nabla\gamma|^2\Delta\psi\right]\\
& +sr\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[\Delta\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)+D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\gamma)+D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\gamma)\right]\\
& -\tfrac{(1-M_1)}{2}sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}+r|\psi_t|^2)(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) - sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\psi_{tt}|^2\\
& -\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\psi_{tt} + \frac{(1-M_1)}{2}sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(\gamma\Delta\psi+2\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\\
& +\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[(|\psi_t|^2-2\gamma|\nabla\psi|^2)(\Delta\gamma+r\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)-2|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-4\gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi)\right]\\
& -\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[4\gamma D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\gamma)+2r\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)+2\gamma^2|D^2\psi|^2\right]\\
& -\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\Delta\psi+|\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2+\gamma D^2\gamma(\nabla\psi,\nabla\psi)+\gamma D^2\psi(\nabla\gamma,\nabla\psi))\\
& -sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[\Delta\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)-|\nabla\gamma|^2|\nabla\psi|^2-2\gamma\Delta\psi\nabla\gamma\cdot\nabla\psi\right]\\
& +sr^2\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
w\quad\left\{\begin{aligned}
&-\tfrac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\frac{1}{2}|\psi_t|^2\psi_{tt}+\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\gamma|\nabla\psi|^2\psi_{tt}\\
&-\tfrac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\psi_t|^2+\frac{(1-M_1)}{2}sr^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\gamma|\nabla\psi|^2\\
&+\tfrac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\left[(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi+\gamma\Delta\psi+r\gamma|\nabla\psi|^2)-\gamma\nabla\gamma\cdot\nabla\psi|\nabla\psi|^2\right]\\
&-sr^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)-\frac{sr^3}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi\gamma(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)|\nabla\psi|^2\\
&-sr^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&-\tfrac{sr^4}{2}\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi|\psi_t|^2(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&-(\cancel{1}-M_1)s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(\cancel{\psi_{tt}}-\cancel{\nabla\gamma\cdot\nabla\psi}-\cancel{\gamma\Delta\psi})(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\\
&+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(2|\psi_t|^2\psi_{tt}+\gamma|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi))\\
&\cancel{+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3\nabla\gamma\cdot\nabla\psi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)}\\
&\cancel{-s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2}\\
&+\overset{2}{\cancel{3}}s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2
\end{aligned}\right.
$$

$$
\partial\Omega\quad\left\{\begin{aligned}
&-sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w_t|^2\varphi\gamma\nabla(\psi\cdot n)\\
&+(1-M_1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla w\cdot n\\
&-\tfrac{(1-M_1)}{2}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi((\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma+r\gamma(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\psi-\gamma\Delta\psi\nabla\gamma)\cdot n\\
&-\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2[\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)(\nabla\gamma+r\gamma\nabla\psi)-\gamma\varphi(2\gamma D^2\psi\nabla\psi+\nabla\gamma|\nabla\psi|^2)]\cdot n\\
&+sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)w\nabla w\cdot n+\underbrace{sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w|^2\nabla\psi\cdot n}_{\star}\\
&+2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi\psi_tw_t-\underbrace{2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi(\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla w\cdot n}_{\star}\\
&+\tfrac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\psi\cdot n-sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)w\nabla w\cdot n\\
&+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi^3\gamma(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\psi\cdot n\\
&-(M_1-1)sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)\nabla\gamma\cdot n\\
&+sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)\nabla\gamma\cdot n\\
&-sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}|w|^2\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla\psi)\nabla\gamma\cdot n
\end{aligned}\right.
$$

$\Rightarrow$

$$
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} P_1 w P_2 w =
$$

$$
\begin{array}{ll}
I & \left\{\begin{array}{l}
2sr\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\psi_{tt} - M_1 sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
+2sr^2\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi\left[|w_t|^2|\psi_t|^2 - 2w_t\psi_t\gamma\nabla w\cdot\nabla\psi + \gamma^2|\nabla w\cdot\nabla\psi|^2\right] \\
+2sr\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w)
\end{array}\right. \\
II & \left\{\begin{array}{l}
2sr\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi D^2\psi(\nabla w,\nabla w) + M_1 sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
-sr\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\psi\cdot\nabla\gamma + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w(\vec{G}(\gamma,\psi)\cdot\nabla w)
\end{array}\right. \\
III & \left\{\begin{array}{l}
X_1 + X_2 + M_1 s^3 r^3\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\
+s^3r^3\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(2|\psi_t|^2\psi_{tt} + \gamma|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma + 2\gamma^2 D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)) \\
+2s^3r^4\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2
\end{array}\right.
\end{array}
$$

donde X_1 es la suma de los términos sobre el borde y X_2 es la suma de todas las integrales de $sr^i|w|^2$ con $i \leq 4$.

En I la tercera integral equivale a

$$
2sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi\left[w_t\psi_t - \gamma(\nabla w\cdot\nabla\gamma)\right]^2 \geq 0
$$

y además, recordando que $\psi(x,t) = |x-x_0|^2 - \beta t^2 + M_0$, el último término puede acotarse inferiormente como sigue:

$$
\begin{aligned}
2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t\psi_t\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w) &= 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} w_t(-2\beta t)\varphi(\nabla\gamma\cdot\nabla w) \\
&= -sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi[2(2\beta^{\frac{1}{2}}tw_t)(\beta^{\frac{1}{2}}\nabla\gamma\cdot\nabla w)] \\
&\geq -sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi[4\beta t^2|w_t|^2 + \beta|\nabla\gamma\cdot\nabla w|^2] \\
&\geq -4sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi t^2|w_t|^2 - sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla\gamma|^2|\nabla w|^2.
\end{aligned}
$$

En II, como $\gamma \in C^2(\bar{\Omega})$ es posible acotar la integral de $\vec{G}(\gamma,\psi)$ (definido en (3.27)) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi w(\vec{G}(\gamma,\psi)\cdot\nabla w) &\geq -s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\left|(r\varphi^{\frac{1}{2}}w\vec{G}(\gamma,\psi))\cdot(\varphi^{\frac{1}{2}}\nabla w)\right| \\
&\geq -s\int_{-T}^{T}\left[r^2\int_{\Omega}\varphi|w|^2\left|\vec{G}(\gamma,\psi)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\geq -\frac{sr^2}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w|^2\left|\vec{G}(\gamma,\psi)\right|^2-\frac{s}{2}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 \\
&\geq -C_1sr^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w|^2-C_1s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2.
\end{aligned}$$

Y en III es fácil ver que para constantes $C_2, C_3 > 0$ adecuadas se tiene que

$$\begin{aligned}
X_1 &\geq -C_2s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2-C_2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2-C_2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\left(\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|^2\right), \\
X_2 &\geq -C_3sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi^3|w|^2,
\end{aligned}$$

donde se uso que $r_0 \leq r \leq \varphi, \gamma \in C^2(\bar{\Omega})$.

$\Rightarrow$

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}P_1wP_2w \geq$$

$$\begin{aligned}
IV &\left\{\; 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi\psi_{tt}-M_1sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)-4sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi t^2|w_t|^2\right. \\
V &\left\{\begin{array}{l}
+2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi D^2\psi(\nabla w,\nabla w)+M_1sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) \\
-sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi\gamma\nabla\psi\cdot\nabla\gamma-sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla\gamma|^2|\nabla w|^2-C_1s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2
\end{array}\right. \\
VI &\left\{\begin{array}{l}
-C_2s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2-C_2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2-C_2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\left(\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2+\left|\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|^2\right) \\
-C_3sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3 \\
+M_1s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi)(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2) \\
+s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(2|\psi_t|^2\psi_{tt}+\gamma|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla\gamma+2\gamma^2D^2\psi(\nabla\psi,\nabla\psi)) \\
+2s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(|\psi_t|^2-\gamma|\nabla\psi|^2)^2.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\psi_t = -2\beta t,\ \psi_{tt} = -2\beta,\ \nabla\psi = 2(x-x_0),\ |\nabla\psi|^2 = 4|x-x_0|^2,\ D^2\psi = 2Id, \quad \Delta\psi = 2N,$$

los términos de IV se reescriben como

$$\begin{aligned} IV &= 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(-2\beta) - M_1 sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w_t|^2\varphi(-2\beta-2\gamma N) \\ &\quad -4sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi t^2|w_t|^2 \\ &= 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(M_1(\beta-\gamma N)-2\beta-2\beta t^2)\varphi|w_t|^2, \end{aligned} \tag{3.37}$$

los de V equivalen a

$$\begin{aligned} V &= +2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\gamma^2\varphi(2|\nabla w|^2 + M_1 sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\gamma\varphi(-2\beta t-2\gamma N) \\ &\quad -sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2\varphi\gamma(2(x-x_0)\cdot\nabla\gamma) - sr\beta\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla\gamma|^2|\nabla w|^2 \\ &\quad -C_1 s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 \\ &= sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(4\gamma-2M_1(\beta+\gamma N)-2\nabla\gamma\cdot(x-x_0)-\beta\frac{|\nabla\gamma|^2}{\gamma})\gamma\varphi|\nabla w|^2 \\ &\quad -C_1 s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

y los de VI quedan como sigue

$$\begin{aligned} VI &= -C_3 sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3 + M_1 s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(-2\beta-2\gamma N)(4\beta^2t^2-4\gamma|x-x_0|^2) \\ &\quad +s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(-16\beta^3t^2+4\gamma|x-x_0|^2\nabla\gamma\cdot(x-x_0)+16\gamma^2|x-x_0|^2) \\ &\quad +2s^3r^4\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3(4\beta^2t^2-4\gamma|x-x_0|^2)^2 - \text{Términos de borde} \\ &= -C_3 sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3 + 2s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3F_r(x,t) \\ &\quad -\text{Términos de borde}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde

$$\begin{aligned} F_r(x,t) &= 16r(\gamma|x-x_0|^2-\beta^2t^2)^2 + 4(M_1(\beta+\gamma N)+2\beta)(\gamma|x-x_0|^2-\beta^2t^2) \\ &\quad +8\gamma(\gamma-\beta+\frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2})|x-x_0|^2. \end{aligned}$$

(3.37), (3.38), (3.39) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} P_1wP_2w \;\; \geq \;\; & 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(M_1(\beta-\gamma N)-2\beta-2\beta t^2)\varphi|w_t|^2 \\
& +sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(4\gamma-2M_1(\beta+\gamma N)-2\nabla\gamma\cdot(x-x_0)-\beta\frac{|\nabla\gamma|^2}{\gamma})\gamma\varphi|\nabla w|^2 \\
& -C_1s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 \\
& -C_3sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3+2s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3F_r(x,t)-\textit{Términos de borde}.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Para poder acotar inferiormente por $\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}(\varphi|w_t|^2+\varphi|\nabla w|^3+\varphi^3|w|^2)$, se debe escoger $M_1>0$ de tal manera que existan constantes $c_1,c_2,c_3>0$ tales que

$$
\left.\begin{array}{rl}
(M_1(\beta-\gamma N)-2\beta-2\beta t^2)\geq c_1 & \forall t\in(-T,T),\ \forall x\in\Omega \\
(4\gamma-2M_1(\beta+\gamma N)-2\nabla\gamma\cdot(x-x_0)-\beta\frac{|\nabla\gamma|^2}{\gamma})\geq c_2 & \forall x\in\Omega \\
F_r(x,t)\geq c_3 & \forall t\in(-T,T),\ \forall x\in\Omega
\end{array}\right\}
\tag{3.41}
$$

Es posible escoger un M_1 apropiado si se satisface la siguiente desigualdad,

$$
B=:\frac{2\beta(1+T^2)}{\beta+\gamma_0N}<\frac{2\gamma-\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{\beta+\gamma N}-\frac{\beta|\nabla\gamma|^2}{2\gamma(\beta+\gamma N)}=:A(x),\ \forall x\in\Omega,
\tag{3.42}
$$

en efecto, como $\gamma\in C^2(\bar{\Omega})$ $(\gamma\geq\gamma_0>0)$, (3.42) implica que

$$
B<\min_{x\in\bar{\Omega}}A(x)\leq A(x)
$$

y por lo tanto $\exists M_1>0,\varepsilon>0$ tal que $\forall s\in(-1,1)$

$$
B<M_1+\varepsilon s<\min_{x\in\bar{\Omega}}A(x)\leq A(x).
$$

Luego, podemos escoger $c_1,c_2>0$ suficientemente chicos tales que

$$
\frac{c_1}{\beta+\gamma_0N},\frac{c_2}{2(\beta+\gamma_0N)}\in(0,\varepsilon),
$$

lo que implica las siguientes desigualdades

$$
\frac{2\beta(1+t^2)}{\beta+\gamma N}+\frac{c_1}{\beta+\gamma N}\leq B+\frac{c_1}{\beta+\gamma_0N}<M_1
$$

$$
M_1+\frac{c_2}{2(\beta+\gamma N)}\leq M_1+\frac{c_2}{2(\beta+\gamma_0N)}<A(x),
$$

que equivalen a las dos primeras condiciones de (3.41).

Es posible reescribir (3.42) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{\beta+\gamma N} &< \frac{2\gamma-\frac{\beta}{2\gamma}|\nabla\gamma|^2}{\beta+\gamma N}-\frac{2\beta(1+T^2)}{\beta+\gamma_0 N} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2\gamma} &< 1-\underbrace{\frac{\beta}{2\gamma}\left(\frac{|\nabla\gamma|^2}{2\gamma}-2(1+T^2)\left(\frac{\beta+\gamma N}{\beta+\gamma_0 N}\right)\right)}_{F_\beta(x)}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

y se observa que la condición

$$\boxed{\exists\theta_0\in(0,1) \text{ tal que } \quad \frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2\gamma}<1-\theta_0,\ \forall x\in\Omega} \tag{3.44}$$

es condición suficiente para (3.42) ya que considerando $\beta\in(0,1)$ tal que

$$\boxed{\max_{x\in\bar\Omega} F_\beta(x)\le\theta_0}$$

se obtiene (3.43) lo cual implica (3.42) que finalmente implica las dos primeras condiciones de (3.41).

Por otra parte, como suponemos que γ satisface

$$\boxed{-1+\theta_0<\frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2\gamma},\ \forall x\in\Omega} \tag{3.45}$$

es β es tal que

$$\boxed{\theta_0>\frac{\beta}{\gamma_0}\ge\frac{\beta}{\gamma},\ \forall x\in\Omega.} \tag{3.46}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma-\beta+\frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2}>0 \ \Rightarrow \quad \exists K>0 \ \text{ tal que } \ 8\gamma(\gamma-\beta+\frac{\nabla\gamma\cdot(x-x_0)}{2})|x-x_0|^2\ge K$$

puesto que $\gamma\in C^2(\bar\Omega)$ y $x_0\notin\bar\Omega$. Por lo tanto,

$$F_r(x,t)\ge P_r(x,t):=16r(\gamma|x-x_0|^2-\beta^2t^2)^2+4(M_1(\beta+\gamma N)+2\beta)(\gamma|x-x_0|^2-\beta^2t^2)+K.$$

Definiendo además el siguiente polinomio que depende de $x\in\Omega$,

$$P_r^x(X)=16rX^2+4(M_1(\beta+\gamma(x)N)+2\beta)X+K,$$

estas tres funciones satisfacen la siguiente relación:

$$\begin{aligned} F_r(x,t)\ge P_r(x,t) &\ge \min_{X\in\mathbb{R}} P_r^x(X)=-\frac{[4(M_1(\beta+\gamma(x)N)+2\beta)]^2}{4\cdot 16r}+K \\ &\ge -\frac{[4(M_1(\beta+\max_{x\in\bar\Omega}\gamma(x)N)+2\beta)]^2}{4\cdot 16r}+K. \end{aligned}$$

Ahora, si se escoge $r > 0$ suficientemente grande, podemos concluir que $\exists c_3 > 0$ tal que

$$F_r(x,t) \geq c_3 > 0, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (-T,T).$$

En resumen, bajo el supuesto de que (3.44),(3.45), (3.46) se satisfacen y r es suficientemente grande, entonces se cumple (3.41) y $\exists\, c > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} P_1wP_2w \;\geq\; & 2src_1\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w_t|^2 + src_2\gamma_0\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 - C_1s\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2\\
& -C_3sr^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3 + 2s^3r^3c_3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3 - \textit{T. de borde}\\
\geq\; & c\left(sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w_t|^2 + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3\right.\\
& \left.-s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2 - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2 - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\left(\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial \tau}\right|^2\right)\right),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se absorbieron términos al considerar s_0 grande. Luego de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
& 2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} P_1wP_2w - \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|R_0w|^2\\
& \qquad \geq \tilde{c}\left(sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w_t|^2 + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3\right. \qquad (3.47)\\
& \qquad \left.-s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2 - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2 - sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\left(\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial \tau}\right|^2\right)\right),
\end{aligned}$$

donde $\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|R_0w|^2$ fue absorbido en el lado derecho debido a que

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|R_0w|^2 &= \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|-M_1sr\varphi w(\psi_{tt}-\gamma\Delta\psi) + \nabla\gamma\cdot\nabla w|^2\\
&\geq -Csr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w|^2 - C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|\nabla w|^2.
\end{aligned}$$

Luego de (3.19) se deduce la desigualdad

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}\left(sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w_t|^2 + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|w|^2\varphi^3\right) & \\
+\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_1w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_2w|^2 \quad \leq & \quad \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}e^{2s\varphi}|L_0v|^2 \\
& +\tilde{c}s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2 + \tilde{c}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2 \\
& +\tilde{c}sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\left(\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial \tau}\right|^2\right)
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

y recordando que

$$
\begin{aligned}
w &= e^{s\varphi}v \\
w_t &= e^{s\varphi}v_t + sr\psi_t\varphi e^{s\varphi}v \\
\nabla w &= e^{s\varphi}\nabla v + sr(\nabla\psi)\varphi e^{s\varphi}v
\end{aligned}
$$

es posible volver a la función original $v(x,t)$ notando lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\underbrace{s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi^3e^{2s\psi}|v|^2}_{(a)} &= s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi^3|w|^2 \\
sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi e^{2s\psi}|v_t|^2 - \underbrace{s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi\psi_te^{2s\varphi}|v|^2}_{(b)} &\leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|w_t|^2 \\
sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi e^{2s\psi}|\nabla v|^2 - \underbrace{s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi(\nabla\psi)e^{2s\varphi}|v|^2}_{(c)} &\leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}\varphi|\nabla w|^2 \\
s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3|w|^2 &= \underbrace{s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi^3e^{2s\varphi}|v|^2}_{(d)} \\
sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|w_t|^2 &\leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|v_t|^2 + \underbrace{s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi\psi_te^{2s\varphi}|v|^2}_{(e)} \\
sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|\nabla w\cdot n|^2 &\leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|\nabla v\cdot n|^2 + \underbrace{s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi(\nabla\psi\cdot n)e^{2s\varphi}|v|^2}_{(f)} \\
sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi|\nabla w\cdot \tau|^2 &\leq sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi e^{2s\varphi}|\nabla v\cdot \tau|^2 + \underbrace{s^2r^2\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\varphi(\nabla\psi\cdot \tau)e^{2s\varphi}|v|^2}_{(g)}
\end{aligned}
$$

por lo que al acotar inferiormente el lado izquierdo y superiormente el lado derecho de (3.48) respectivamente, es posible absorber (b) y (c) con el término (a) mientras que (e), (f), (g) son absorbidos usando (d) y por lo tanto obtenemos para una constante $C > 0$ apropiada, la desigualdad de Carleman para L y para funciones regulares.

Usando resultados de regularidad de soluciones para la ecuación de ondas acústicas

$$v_{tt} - \mathrm{div}(\gamma(x)\nabla v) + pv = 0$$

es sencillo probar que existe un conjunto denso de funciones suaves que satisface: $v \in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$, $Lv \in L^2(-T,T\ ;\ L^2(\Omega))$ y $v(\pm T) = v_t(\pm T) = 0$. Por lo tanto por densidad se conlcuye el teorema. $\square$

Corolario 3.5 *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$ tal que $\Gamma_0 \supseteq \Gamma_{x_0}$, luego si en el enunciado del Teorema 3.4 suponemos además que $v = 0$ en $\partial\Omega \times (-T,T)$ entonces la desigualdad de Carleman se reduce a*

$$\begin{aligned} sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} \varphi e^{2s\varphi}|v_t|^2 + sr\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} \varphi e^{2s\varphi}|\nabla v|^2 + s^3r^3\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} \varphi^3 e^{2s\varphi}|v|^2 & \\ +\int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_1w|^2 + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_2w|^2 \quad \leq \quad & C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi}|Lv|^2 \\ & +Csr\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} \varphi e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 (x-x_0)\cdot n. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Demostración. El término de borde resulta del hecho de que cuando se escribe explicitamente $\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} P_1wP_2w$ como en la demostración del teorema anterior, se anulan todas las integrales en $\partial\Omega$ menos las con $\star$, las cuales equivalen a

$$\begin{aligned} sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|\nabla w|^2\nabla\psi\cdot n \quad = \quad & sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi|(\nabla w\cdot n)n + (\cancel{\nabla w\cdot\tau})\tau|^2\nabla\psi\cdot n \\ & = 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 (x-x_0)\cdot n \\ & = 2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 (x-x_0)\cdot n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi(\nabla\psi\cdot\nabla w)\nabla w\cdot n & \\ & = -2sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi(\nabla\psi\cdot[(\nabla w\cdot n)n + (\cancel{\nabla w\cdot\tau})\tau])\nabla w\cdot n \\ & = -4sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi\left|\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 (x-x_0)\cdot n \\ & = -4sr\int_{-T}^{T}\int_{\partial\Omega}\gamma^2\varphi e^{2s\varphi}\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 (x-x_0)\cdot n, \end{aligned}$$

esto ya que $v = 0$ en $\partial\Omega$ implica $w = 0$ en $\partial\Omega$. Luego estimando las integrales anteriores y usando la definición del conjunto Γ_{x_0} en (1.2) se obtiene el resultado. $\square$

Capítulo 4

Existencia, Unicidad y Regularidad en Reissner-Mindlin

Los problemas que estudiamos en esta memoria son bien puestos en el sentido que para ambos, (2.14) y (2.46), es posible probar la existencia, unicidad y estabilidad con respecto a lo datos, de las soluciones. El procedimiento empleado en la demostración de la existencia tiene el nombre de *método de Galerkin*. Éste se divide en tres etapas: la primera consiste en construir una sucesión de soluciones aproximadas al problema en consideración; luego se prueba que la sucesión satisface una desigualdad de energía que nos permite rescatar una subsucesión débil-convergente en una topología apropiada; y finalmente pasando al límite se encuentra la solución. Haciendo uso además del Lema de Gronwall y estimaciones de energía, se logra demostrar la unicidad así como también la estabilidad y mayor regularidad de la solución bajo ciertas condiciones. A continuación, basandose en lo hecho para ecuaciones hiperbólicas en [Eva98] y generalizando lo hecho en [Wu04], se prueban los resultados mencionados para un sistema de ecuaciones en donde un caso particular es el de Reissner-Mindlin. Resultados análogos para Kirchhoff-Love se encuentran en [Lag89], Capítulo 4, donde se considerán condiciones de borde Dirichlet.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con $a \in \mathbb{R}, b(x), c(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $a > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, $c(x) \geq c_0 > 0$, $q \in L^\infty(\Omega)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_{tt} - a\,\mathrm{div}(\sigma(\theta)) - b(x)(\nabla w - \theta) = f(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ w_{tt} - \mathrm{div}(c(x)(\nabla w - \theta)) + q(x)w = g(x,t) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \theta = (0,0)^{\mathrm{T}},\ w = 0 & \text{en } \Gamma \times (0,T) \\ \theta(0) = (\theta_0^1, \theta_0^2)^T,\ w(0) = w_0 & \text{en } \Omega \\ \theta_t(0) = (\theta_1^1, \theta_1^2)^T,\ w_t(0) = w_1 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{4.1}$$

donde llamaremos $\mathcal{L}$ al operador diferencial

$$\mathcal{L}u = \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{div}(\sigma(\theta)) - b(x)(\nabla w - \theta) \\ -\mathrm{div}(c(x)(\nabla w - \theta)) + q(x)w \end{pmatrix}.$$

Además, definamos $F(x,t) = (f,g) \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $h_0 = (\theta_0^1, \theta_0^2, w_0) \in (H_0^1(\Omega))^3, h_1 = (\theta_1^1, \theta_1^2, w_1) \in (L^2(\Omega))^3$, recordando que $\sigma(\theta) = 2\mu(x)\varepsilon(\theta) + \lambda^*\mathrm{div}(\theta)I$, con $\mu \geq \mu_0$, $\lambda \geq -\lambda_0$, $\frac{2\mu_0}{3} \geq \lambda_0 > 0$ y λ^* definido en (2.25).

Definición 4.1 *Decimos que* $u = (\theta, w) \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)$, *con* $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ *y tal que* $u' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3), u'' = L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ *es una solución débil de* (4.1) *si satisface*

(i) $\langle u'', v\rangle + B[u, v; t] = (F, v),\ \forall v = (\varphi, z) \in (H_0^1(\Omega))^3,$ *c.t.p. en* $[0, T]$.
(ii) $u(x, 0) = h_0(x),\ u'(x, 0) = h_1(x),$

$$\begin{aligned} B[u, v; t] \quad &:= \quad a\int[2\mu\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi) + \lambda^* div(\theta) div(\varphi)] - \int b(\nabla w - \theta)\cdot\varphi \\ &\quad + \int c\nabla w\cdot\nabla z + \int div(c\theta)z + \int qwz. \end{aligned}$$

4.1. Existencia

Teorema 4.2 (Existencia) *Existe una solución débil de* (4.1), $u \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)$, $u' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $u'' \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ *y satisface*

$$\begin{aligned} &\|u'(t)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \|u(t)\|^2_{L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} \\ &\qquad \le C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para demostrar el teorema de existencia necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 4.3 (Soluciones aproximadas) *Dada una base ortogonal* $v_k = \{(\varphi_k, z_k)\}_{k=1}^\infty$ *de* $(H_0^1(\Omega))^3$ *y ortonormal en* $(L^2(\Omega))^3$ *y para un entero* m*, consideremos la siguiente función:*

$$u_m(x, t) = (\theta_m, z_m) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) v_k. \tag{4.3}$$

Luego, para cada $m = 1, 2, ...,$ *existe una única colección* $\{d_m^k(t)\}_{k=1}^m$*, tal que* u_m *definida en* (4.3) *satisface*

$$(u_m'', v_k) + B[u_m, v_k; t] = (F, v_k), \quad c.t.p.\ 0 \le t \le T,\ k = 1, ..., m \tag{4.4}$$

$$d_m^k(0) = (h_0, v_k), \quad k = 1, ..., m \tag{4.5}$$

$${d_m^k}'(0) = (h_1, v_k), \quad k = 1, ..., m \tag{4.6}$$

Demostración. Por (4.3) y como $\{v_k\}$ es base ortonormal en $(L^2(\Omega))^3$,

$$(u_m''(x, t), v_k(x)) = {d_m^k}''(t).$$

Además

$$
\begin{aligned}
B[u_m, v_k; t] &= a \int [2\mu\varepsilon(\sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)\varphi_l) : \varepsilon(\varphi_k) + \lambda^* \mathrm{div}(\sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)\varphi_l)\mathrm{div}(\varphi_k)] \\
&\quad - \int b \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)(\nabla z_l - \varphi_l)\cdot\varphi_k + \int c \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)\nabla z_l \cdot \nabla z_k \\
&\quad + \int \mathrm{div}(c \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t)\varphi_l) z_k + \int q \sum_{l=1}^{m} d_m^l(t) z_l z_k \\
&= \sum_{l=1}^{m} B[v_l, v_k] d_m^l(t)
\end{aligned}
$$

Luego, llamando $e^{kl} = B[v_l, v_k]$ para $l, k = 1, ..., m$ (independientes de t) y $F_k(t) = (F(x,t), v_k(x))$, buscamos funciones $\{d_m^k\}_k$ que satisfagan (4.4), i.e.

$$
{d_m^k}''(t) + \sum_{k=1}^{m} e^{kl} d_m^l(t) = F_k(t), \quad 0 \le t \le T, k = 1, ..., m, \tag{4.7}
$$

y las condiciones iniciales (4.5), (4.6). De acuerdo a la teoría estandar de EDOs, se tiene que existe una única solución $(d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ (en $(H^2(0,T))^m$) al problema (4.5), (4.6), (4.7). □

Lema 4.4 (Estimación de energía) *Para todo* $, m = 1, 2, ...,$ *existen constantes* C*, que dependen de* m, a, b, c, μ, Ω *y* T*, tal que las soluciones del lema anterior cumplen la siguiente estimación*

$$
\begin{aligned}
\max_{0\le t\le T} \left(\|u_m'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \right) + \|u_m''(t)\|^2_{L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)} \\
\le C \left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \right).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Demostración. Multiplicando (4.7) por ${d_m^k}'(t)$ ($d_m^k \in H^2(\Omega) \subset\subset C^1(\Omega)$), sumando en $k = 1, ..., m$ y recordando (4.3) se llega a que

$$
(u_m'', u_m') + B[u_m, u_m'; t] = (F, u_m') \tag{4.9}
$$

c.t.p. en $0 \le t \le T$. El primer término en el lado izquierdo puede ser escrito como

$$
(u_m'', u_m') = \sum_{l=1}^{m} d_m^k(t)'' d_m^k(t)' |v_k|^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \right)
$$

lo cual tiene sentido ya que, como $u_m \in H^2(0,T; (H_0^1(\Omega))^3)$, entonces $u_m \in C^1(0,T; (H_0^1(\Omega))^3)$. Mientras que el otro,

$$
\begin{aligned}
B[u_m, u_m'; t] &= a \int [2\mu\varepsilon(\theta_m) : \varepsilon(\theta_m') + \lambda^* \mathrm{div}(\theta_m)\mathrm{div}(\theta_m')] - \int b(\nabla w_m - \theta_m)\cdot\theta_m' \\
&\quad + \int c\nabla w_m \cdot \nabla w_m' + \int \mathrm{div}(c\theta_m) w_m' + \int q w_m w_m' \\
&= B_1 + B_2
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
B_1 &= a\int [2\mu\varepsilon(\theta_m):\varepsilon(\theta_m')+\lambda^*\mathrm{div}(\theta_m)\mathrm{div}(\theta_m')]+\int c\nabla w_m\cdot\nabla w_m'\\
B_2 &= B[u_m,u_m';t]-B_1.
\end{aligned}
$$

Vemos que

$$
B_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[u_m,u_m;t]\right)
$$

para la forma bilineal y simétrica

$$
A[(\theta,w),(\varphi,z);t]:=a\int[2\mu\varepsilon(\theta):\varepsilon(\varphi)+\lambda^*\mathrm{div}(\theta)\mathrm{div}(\varphi)]+\int c\nabla w\cdot\nabla z,
$$

la cual es coerciva en $(H_0^1(\Omega))^3$ gracias a las desigualdades de Korn y Poincare (ver Apéndice). En efecto, para $u_m\in(H_0^1(\Omega))^3$,

$$
A[(\theta,w),(\theta,w);t] \;=\; a\int[2\mu\varepsilon(\theta):\varepsilon(\theta)+\lambda^*(\mathrm{div}(\theta))^2]+\int c|\nabla w|^2.
$$

Si $\lambda\geq 0$, entonces $\lambda^*\geq 0$ y por lo tanto existe un $\alpha>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
A[(\theta,w),(\theta,w);t] &\geq 2a\mu_0\int\varepsilon(\theta):\varepsilon(\theta)+\int c_0|\nabla w|^2\\
&\geq \alpha(\|\theta\|^2_{H_0^1(\Omega)^2}+\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)})=\alpha\|(\theta,w)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}.
\end{aligned}
$$

Si en cambio, $-\lambda_0\leq\lambda<0$ ($\frac{2\mu_0}{3}>\lambda_0$), entonces $\lambda^*<0$ y $\exists\tau_0>0$ tal que $\mu+\lambda^*\geq\tau_0$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&A[(\theta,w),(\theta,w);t]\\
&\quad\geq a\int\left(2(\mu+\lambda^*)\left(\left|\frac{\partial\theta^1}{\partial x_1}\right|^2+\left|\frac{\partial\theta^2}{\partial x_2}\right|^2\right)+2\mu_0\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial x_2}+\frac{\partial\theta^2}{\partial x_1}\right)^2\right)+\int c_0|\nabla w|^2\\
&\quad\geq 2a\min\{\tau_0,\mu_0\}\int\varepsilon(\theta):\varepsilon(\theta)+\int c_0|\nabla w|^2\\
&\quad\geq\alpha(\|\theta\|^2_{H_0^1(\Omega)^2}+\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)})=\alpha\|(\theta,w)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
|B_2| &\leq \tilde{C}\big(\|\nabla w_m\|_{(L^2(\Omega))^2}\|\theta_m'\|_{(L^2(\Omega))^2}+\|\theta_m\|_{(L^2(\Omega))^2}\|\theta_m'\|_{(L^2(\Omega))^2}\\
&\qquad+\|\nabla\theta_m\|_{(L^2(\Omega))^2}\|w'\|_{(L^2(\Omega))^2}+\|w\|_{L^2(\Omega)}\|w'\|_{L^2(\Omega)}\big)\\
&\leq C\left(\|u_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}+\|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\right)
\end{aligned}
$$

y

$$
(F,u_m')\leq C(\|F\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}),
$$

luego usando lo anterior sobre (4.9) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+A[u_m,u_m;t]\right) &\leq C\left(\|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|u_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}+\|F\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\right)\\ &\leq C\left(\|u_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+A[u_m,u_m;t]+\|F\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\right). \quad (4.10)\end{aligned}$$

Si definimos

$$\eta(t):=\|u_m'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+A[u_m,u_m;t], \quad \xi(t):=\|F\|^2_{(L^2(\Omega))^3},$$

entonces (4.10) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}\eta(t)\leq C(\eta(t)+\xi(t)),$$

por lo tanto por el Lemma de Gronwall se obtiene

$$\eta(t)\leq e^{C_1t}\left(\eta(0)+C_2\int_0^t\xi(s)ds\right), \quad \forall\, 0\leq t\leq T. \tag{4.11}$$

Calculando

$$\begin{aligned}\eta(0) &= \|u_m'(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+A[u_m(0),u_m(0);0]\\ &= \left\|\sum_{l=1}^m(h_1,v_l)v_l\right\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\int c|\nabla w_m(0)|^2\\ &\quad+\int[2\mu\varepsilon(\theta_m(0)):\varepsilon(\theta_m(0))+\lambda^*(\mathrm{div}(\theta_m(0)))^2]\\ &\leq C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\right)\end{aligned}$$

y gracias a la coercividad de $A[\cdot,\cdot,\cdot]$,

$$\|u_m'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|u_m(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\leq C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}+\|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right)$$

para todo $0\leq t\leq T$ y entonces se deduce que

$$\begin{aligned}&\max_{0\leq t\leq T}\left(\|u_m'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|u_m(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\right) \quad (4.12)\\ &\qquad\leq C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3}+\|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}+\|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right).\end{aligned}$$

Fijando ahora un $v=v^1+v^2\in(H_0^1(\Omega))^3$, $\|v\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\leq 1$, con $v^1\in\mathrm{span}\{v_k\}_{k=1}^m$ y $v^2\in\mathrm{span}\{v_k\}_{k=1}^{m\ \perp}$,

$$\langle u_m'',v\rangle=(\sum_{k=1}^m {d_m^k}''(t)v_k,v)=(u_m'',v^1)=(F,v^1)-B[u_m,v^1;t]$$

$\Rightarrow$

$$|\langle u_m'',v\rangle|\leq C(\|F\|_{(L^2(\Omega))^3}+\|u_m\|_{(H_0^1(\Omega))^3})\|v^1\|_{(H_0^1(\Omega))^3}$$

$\Rightarrow$

$$\|u''_m(t)\|_{(H^{-1}(\Omega))^3} \leq C(\|F(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m(t)\|_{(H^1_0(\Omega))^3}).$$

Finalmente, por (4.12),

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u''_m(t)\|^2_{(H^{-1}(\Omega))^3} dt &\leq C(\|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \int_0^T \|u_m\|^2_{(H^1_0(\Omega))^3})dt \\
&\leq C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H^1_0(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right),
\end{aligned}$$

y luego uniendo la desigualdad anterior y (4.12) se concluye el lema. □

Demostración (Teorema 4.2). 1.- Sea $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ las funciones construidas en el Lema 4.3. De la estimación obtenida en el Lema 4.4, las sucesiones $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $\{u'_m\}_{m=1}^\infty$, $\{u''_m\}_{m=1}^\infty$ están acotadas en $L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^3)$, $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ respectivamente, por lo tanto, de la siguiente

Proposición 4.5 *(Evans, Ch. 7, Problem 4)*
Suponiendo que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{in } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \\ u'_k \rightharpoonup v & \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{cases}$$

entonces $u' = v$.

es simple probar que existe una subsuseción $\{u_{m_l}\}_{l=1}^\infty$ de $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ y $u \in L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^3)$, $u' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $u'' \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ tal que

$$\begin{cases} u_{m_l} \rightharpoonup u & \text{en } L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^3) \\ u'_{m_l} \rightharpoonup u' & \text{en } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3) \\ u''_{m_l} \rightharpoonup u'' & \text{en } L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3). \end{cases} \tag{4.13}$$

Fijando $N \in \mathbb{N}$ y para una función $v \in C^1([0,T];(H^1_0(\Omega))^3)$ arbitraria, de la forma

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^N d^k(t) v_k, \tag{4.14}$$

con $m \geq N$, mutiplicamos (4.4) por $d^k(t)$, sumamos sobre $k = 1, ..., N$ e integramos con respecto a t para obtener

$$\int_0^T \langle u''_m, v\rangle + B[u_m, v; t]dt = \int_0^T (F, v)dt. \tag{4.15}$$

Reemplazando $m = m_l$ y como $L_v(u) := \int_0^T B[u, v; t]dt$ pertenece al dual de $L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^3)$, encontramos que el límite de (4.15) cuando $l \to \infty$ es

$$\int_0^T \langle u'', v\rangle + B[u, v; t]dt = \int_0^T (F, v)dt, \tag{4.16}$$

donde por densidad, la igualdad se mantiene para toda $v \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)$. Sigue entonces que

$$\langle u'', v\rangle + B[u,v;t] = (F,v), \quad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T, \forall\, v \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

Para ver si se cumplen las condiciones iniciales es bien sabido en espacios de Sobolev con tiempo que u y u' pertenecen a $C([0,T];(L^2(\Omega))^3)$ y $C([0,T];(H^{-1}(\Omega))^3)$ respectivamente, luego para toda función $v \in C^2([0,T];(H_0^1(\Omega))^3)$ con $v(T) = v'(T) = 0$ podemos integrar por partes dos veces con respecto a t en (4.16) y llegar a

$$\int_0^T (v'', u) + B[u,v;t]dt = \int_0^T (F,v) + (u(x,0), v(x,0)) - \langle u'(x,0), v(x,0)\rangle \qquad (4.17)$$

Por otro lado, haciendo lo mismo en (4.15) con $m = m_l$, se llega a que

$$\int_0^T (v'', u_{m_l}) + B[u_{m_l}, v;t]dt = \int_0^T (F,v) + (u_{m_l}(x,0), v(x,0)) - \left\langle u'_{m_l}(x,0), v(x,0)\right\rangle. \quad (4.18)$$

Pasando al límite cuando $l \to \infty$ y recordando (4.5), (4.6) se obtiene

$$\int_0^T (v'', u) + B[u,v;t]dt = \int_0^T (F,v) + (h_0, v(x,0)) - \langle h_1, v(x,0)\rangle\,, \qquad (4.19)$$

donde al comparar la identidad anterior con (4.17) y como los valores de v y v' en $t = 0$ son arbitrarios se deduce que u satisface la definición 4.1 de solución débil para el sistema (4.1).

2.- Según (4.13)

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} &\leq \liminf_{l\to\infty} \|u_{m_l}(t)\|^2_{L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} \\ \|u'(t)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} &\leq \liminf_{l\to\infty} \left\|u'_{m_l}(t)\right\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}, \end{aligned}$$

y como además

$$\left\|u'_{m_l}(t)\right\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} + \|u_{m_l}(t)\|^2_{L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)} \leq C \max_{0\leq t\leq T} \left(\|u'_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\right),$$

por (4.8) se obtiene la estimación (4.2). □

Observación 4.1 De la demostración anterior se deduce que la solución débil es tal que $u \in C([0,T];(L^2(\Omega))^3)$ y $u' \in C([0,T];(H^{-1}(\Omega))^3)$.

4.2. Unicidad

Teorema 4.6 (Unicidad) *La solución encontrada en el Teorema 4.2 es la única solución débil de* (4.1).

Demostración. Debemos mostrar que la única solución de (4.1) con $F \equiv h_0 \equiv h_1 \equiv 0$ es $u \equiv 0$. Para ésto, fijamos $0 \leq s \leq T$ y definimos

$$v(t) := \begin{cases} \int_t^s u(x,\tau)d\tau & \text{si } 0 \leq t \leq s \\ 0 & \text{si } s \leq t \leq T \end{cases}.$$

Como $v(t) \in (H_0^1(\Omega))^3$ para todo tiempo $0 \leq t \leq T$ ($u \in (H_0^1(\Omega))^3$ $\forall t \in [0,T]$), de la definición de solución débil tenemos que

$$\int_0^s \langle u'', v\rangle + B[u,v;t]dt = 0,$$

y como además $u'(0) = v(s) = 0$ y $v' = -u$ en $[0,s]$, dividiendo $B[v',v;t]$ en dos partes B_1, B_2, como en la prueba del Lema 4.4, la identidad anterior equivale a

$$\int_0^s \langle u', u\rangle - B_1[v',v;t]dt = -\int_0^s B_2[u,v;t]dt,$$

con

$$\begin{aligned} B_1[v',v;t] &= a\int [2\mu\varepsilon(\theta_v') : \varepsilon(\theta_v) + \lambda^*\mathrm{div}(\theta_v')\mathrm{div}(\theta_v)] + \int c\nabla w_v' \cdot \nabla w_v, \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}a\int [2\mu\varepsilon(\theta_v)^2 + \lambda^*\mathrm{div}(\theta_v)^2] + \frac{1}{2}\int c|\nabla w_v|^2\right) \\ &= \frac{d}{dt}A[v,v;t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2[u,v;t] &= B[u,v;t] - B_1 \\ &= -\int b(\nabla w_u - \theta_u)\theta_v + \int \mathrm{div}(c\theta_u)w_v + \int q w_u w_v \\ &= \int \mathrm{div}(b\theta_v)w_u - \int b\theta_u\theta_v - \int c\theta_u\nabla w_v - \int q w_u w_v, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó que $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ e integración por partes.
$\Rightarrow$

$$\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{(L^2(\Omega))^3} - \frac{1}{2}A[v,v;t]\right)dt = -\int_0^s B_2[u,v;t]dt$$

Observando que $u(0) = 0$ y $v(s) = 0$ en Ω, entonces

$$\frac{1}{2}\|u(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \frac{1}{2}A[v(0),v(0);0] = -\int_0^s B_2[u,v;t]dt,$$

y acotando el lado derecho de la igualdad anterior se llega a que

$$\|u(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|v(0)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq C\left(\int_0^s \|v(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3}dt\right), \tag{4.20}$$

donde usamos la coercividad en $(H_0^1(\Omega))^3$ de $A[\cdot,\cdot]$.

Definamos ahora la función

$$w(t) := \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Podemos reescribir la desigualdad (4.20) en términos de w y obtener

$$\|u(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq C \left(\int_0^s \|w(t) - w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} dt \right).$$

Luego, usando que $\|w(t) - w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq 2\|w(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + 2\|w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}$, es posible deducir que

$$\|u(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + (1 - 2sC)\|w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq C \left(\int_0^s \|w(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} dt \right).$$

Por lo tanto, escogiendo T_1 suficientemente chico tal que

$$1 - 2T_1C \geq \frac{1}{2},$$

entonces, para todo $0 \leq s \leq T_1$ se tiene la desigualdad

$$\|u(s)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|w(s)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \leq C \left(\int_0^s \|u(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|w(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} dt \right),$$

que por la forma integral del Lema de Gronwall, implica que $u \equiv 0$ en $[0, T_1]$. Aplicando el mismo argumento sobre los intervalos $[T_1, 2T_1], [2T_1, 2T_1], ...$, se concluye que $u \equiv 0$ en $[0, T]$. □

4.3. Regularidad

Teorema 4.7 *(Regularidad)*

(i) Supongamos

$$h_0 \in (H_0^1(\Omega))^3, \ h_1 \in (L^2(\Omega))^3, \ F \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$$

y consideremos $u \in L^2(0, T; (H_0^1(\Omega))^3)$, $u' \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^3)$, $u'' \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$, *la única solución débil al problema* (4.1). *Luego,*

$$u \in L^\infty(0, T; (H_0^1(\Omega))^3), \ u' \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3),$$

y satisface

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \left(\|u'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} \right) \tag{4.21}$$
$$\leq C \left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)} \right).$$

Más aún

$$u \in C([0, T]; (H_0^1(\Omega))^3) \cap C^1([0, T]; (L^2(\Omega))^3).$$

(ii) Si además

$$h_0 \in (H^2(\Omega))^3,\ h_1 \in (H_0^1(\Omega))^3,\ F' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3),$$

entonces

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty(0,T;(H^2(\Omega))^3),\ u' \in L^\infty(0,T;(H_0^1(\Omega))^3) \\ &u'' \in L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3),\ u''' \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3) \end{aligned}$$

con la desigualdad

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left(\|u''(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|u'(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u(t)\|^2_{(H^2(\Omega))^3}\right) \\ &\qquad\qquad \le C\left(\|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|h_1\|^2_{(H^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Demostración. 1.- En la prueba del Lema 4.4, por (4.12) se tiene que

$$\begin{aligned} &\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_m'(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3}\right) \\ &\qquad\qquad \le C\left(\|h_1\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right). \end{aligned}$$

Como $u_{m_l} \rightharpoonup u$ en $L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)$, $u'_{m_l} \rightharpoonup u'$ en $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, por la Proposición 4.8 y la desigualdad anterior con $m = m_l$ se obtiene (4.21).

Proposición 4.8 *(Evans, Ch. 7, Problem 5) Para H un espacio de Hilbert y una sucesión $\{u_k\}$ tal que*

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{in } L^2(0,T;H),$$

si se tiene la siguiente cota uniforme

$$\operatorname*{\mathit{ess}\,sup}_{0\le t\le T} \|u_k\|_H \le C$$

entonces

$$\operatorname*{\mathit{ess}\,sup}_{0\le t\le T} \|u\|_H \le C.$$

2.- Sean m, p dos enteros no negativos tal que $m > p$. Por (4.4), (4.5) y (4.6) se tiene que $u_m - u_p$ satisface

$$\begin{aligned} &(u_m'' - u_p'', v_k) + B[u_m - u_p, v_k; t] = (F_m - F_p, v_k), \quad 0 \le t \le T, k = 1, ..., m \\ &(u_m - u_p)(0) = h_0^m - h_0^p \\ &(u_m - u_p)'(0) = h_1^m - h_1^p, \end{aligned}$$

con

$$F_q := \sum_{k=1}^{q}(F, v_k)v_k, \quad h_0^q := \sum_{k=1}^{q}(h_0, v_k)v_k, \quad h_1^q := \sum_{k=1}^{q}(h_1, v_k)v_k.$$

Luego

$$(u_m'' - u_p'', u_m' - u_p') + B[u_m - u_p, u_m' - u_p'; t] = (F_m - F_p, u_m' - u_p'),$$

que equivale a

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_m' - u_p'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[u_m - u_p, u_m - u_p; t]\right) = B_2 + (F_m - F_p, u_m' - u_p'),$$

con A y B_2 definidos como en la demostración del Lema 4.4. Podemos entonces acotar el lado derecho y obtener

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|u_m' - u_p'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[u_m - u_p, u_m - u_p; t]\right)\\ &\qquad \leq C(\|u_m' - u_p'\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + A[u_m - u_p, u_m - u_p; t] + \|F_m - F_p\|^2_{(L^2(\Omega))^3}),\end{aligned}$$

por lo tanto, por el Lema de Gronwall se deduce

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\|u_m' - u_p'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[u_m - u_p, u_m - u_p; t]\right)\\ &\qquad \leq C(\|(u_m' - u_p')(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + A[u_m - u_p, u_m - u_p; 0] + \|F_m - F_p\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}),\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T}\left(\|u_m' - u_p'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m - u_p\|_{(H_0^1(\Omega))^3}\right)\\ &\qquad \leq C(\|h_1^m - h_1^p\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + \|h_0^m - h_0^p\|_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|F_m - F_p\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}).\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $C([0,T];(H_0^1(\Omega))^3) \cap C^1([0,T];(L^2(\Omega))^3)$ y por lo tanto $u_m \to u \in C([0,T];(H_0^1(\Omega))^3) \cap C^1([0,T];(L^2(\Omega))^3)$.

3.- Fijemos m y escribamos $\tilde{u}_m := u_m'$. Como ahora $F \in H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $d_m^k \in H^3(0,T)$ y por lo tanto podemos derivar (4.4) con respecto al tiempo t. Multiplicando además por ${d_m^k}''(t)$ y sumando sobre k se llega a

$$(\tilde{u}_m'', \tilde{u}_m') + B[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m'; t] = (F', \tilde{u}_m'),$$

donde el primer término a la izquierda es igual a $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}_m'\|^2$ y el segundo es igual a $B_1 + B_2$ con

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t]\right), \\ |B_2| &\leq C\left(\|\tilde{u}_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|\tilde{u}_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\right)\end{aligned}$$

y con el mismo A de la demostración del Lema 4.4. Luego recordando que el operador A es $(H_0^1(\Omega))^3$-coercivo, se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|\tilde{u}_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t]\right) \\ &\qquad \leq C\left(\|\tilde{u}_m'\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t] + \|F'\|^2_{(L^2(\Omega))^3}\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por otro lado, por (4.4),

$$B[u_m, v_k; t] = (F - u_m'', v_k), \quad k = 1, ..., m. \tag{4.24}$$

Recordemos que para una función $u = (\theta, w)$, el operador diferencial $\mathcal{L}$ está definido por

$$\mathcal{L}u = \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{div}(\sigma(\theta)) - b(x)(\nabla w - \theta) \\ -\mathrm{div}(c(x)(\nabla w - \theta)) + q(x)w \end{pmatrix}.$$

Podemos separar este operador de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_r$$

donde $\mathcal{L}_s$ reúne a todos los términos de orden dos y $\mathcal{L}_r$ es el resto de $\mathcal{L}$, i.e.

$$\mathcal{L}_s u := \begin{pmatrix} -a\,\mathrm{div}(\sigma(\theta)) \\ -\mathrm{div}(c(x)\nabla w) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_r u := \begin{pmatrix} -b(x)(\nabla w - \theta) \\ \mathrm{div}(c(x)\theta) + q(x)w \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mathcal{L}_s$ es un operador simétrico y elíptico debido a que la forma bilineal asociada es simétrica y coerciva en $(H_0^1(\Omega))^3$, luego la colección de funciones propias de $\mathcal{L}_s$, $\{\mathrm{v}_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq (H_0^1(\Omega))^3$, forman una base ortonormal de $(L^2(\Omega))^3$. Tomando entonces $v_k = \{\mathrm{v}_k\}_{k=1}^{m}$, si multiplicamos la identidad (4.24) por $\lambda_k d_m^k(t)$, con $\{\lambda_k\}$ la colección de valores propios asociados, y sumamos sobre k obtenemos

$$B[u_m, \mathcal{L}_s u_m; t] = (F - u_m'', \mathcal{L}_s u_m). \tag{4.25}$$

Pero como $\mathcal{L}_s u_m = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k d_m^k(t)\mathrm{v}_k \in (H_0^1(\Omega))^3$ $\forall t \in [0, T]$, integrando por partes se llega a que

$$B[u_m, \mathcal{L}_s u_m; t] = (\mathcal{L}u_m, \mathcal{L}_s u_m) = \|\mathcal{L}_s u_m\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + (\mathcal{L}_r u_m, \mathcal{L}_s u_m) \tag{4.26}$$

en donde podemos acotar el segúndo término como sigue,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}_r u_m, \mathcal{L}_s u_m)| &= \left| a\int_\Omega b(x)(\nabla w_m - \theta_m)\cdot \mathrm{div}(\sigma(\theta_m)) \right. \\ &\quad \left. - \int_\Omega (\mathrm{div}(c(x)\theta_m) + q(x)w_m)\mathrm{div}(c(x)\nabla w_m) \right| \\ &\leq C\|u_m\|_{(H_0^1(\Omega))^3}\|u_m\|_{(H^2(\Omega))^3} \\ &\leq C\varepsilon^{-1}\|u_m\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + C\varepsilon\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3} \\ &\leq \bar{C}\varepsilon^{-1}\|u_m\|_{(L^2(\Omega))^3}\|u_m\|_{(H^2(\Omega))^3} + C\varepsilon\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3} \\ &\leq \bar{C}(\delta^{-1}\varepsilon^{-1}\|u_m\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \delta\varepsilon^{-1}\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \varepsilon\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3}), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde se usó una desigualdad de interpolación sobre $u_m = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t)\mathrm{v}_k \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$ con $\varepsilon >> \delta > 0$ pequeño y que por resultados de regularidad en operadores elípticos, $\mathrm{v}_k \in (H^2(\Omega))^3$ con la desigualdad

$$\|\mathrm{v}_k\|_{(H^2(\Omega))^3} \leq C\|\mathcal{L}_s \mathrm{v}_k\|_{(L^2(\Omega))^3},$$

por lo tanto, para una constante apropiada se tiene que

$$\|u_m\|_{(H^2(\Omega))^3} \leq C\|\mathcal{L}_s u_m\|_{(L^2(\Omega))^3}. \tag{4.28}$$

Gracias a las desigualdades anteriores (4.25) - (4.28) y tomando $\delta = \varepsilon^2$, con ε suficientemente chico, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3} &\leq |B[u_m, \mathcal{L}_s u_m; t]| + |(\mathcal{L}_r u_m, \mathcal{L}_s u_m)| \\
&\leq |(F - u''_m, \mathcal{L}_s u_m)| + |(\mathcal{L}_r u_m, \mathcal{L}_s u_m)|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|u_m\|^2_{(H^2(\Omega))^3} \leq C(\|F\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m''\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|u_m\|^2_{(L^2(\Omega))^3}).$$

Si volvemos a (4.23) y definimos

$$\eta(t) := \|\tilde{u}'_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[\tilde{u}_m, \tilde{u}_m; t], \quad \xi(t) := \|F'\|^2_{(L^2(\Omega))^3},$$

podemos aplicar Gronwall y obtener

$$\eta(t) \leq e^{K_1 t}\left(\eta(0) + K_2 \int_0^t \xi(s)ds\right), \quad \forall\, 0 \leq t \leq T, \tag{4.29}$$

y recordando que $\tilde{u}_m = u'_m$, entonces

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= \|u''_m(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + A[u'_m(0), u'_m(0); 0] \\
&= \|F(0) - Lu_m(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \\
&\quad + \int [2\mu\varepsilon(\theta'_m(0)) : \varepsilon(\theta'_m(0)) + \lambda^*(\mathrm{div}(\theta'_m(0)))^2] + \int c|\nabla w'_m(0)|^2 \\
&= \|F(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\mathcal{L}u_m(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + C_1\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + C_2\|u'_m(0)\|_{(H^1(\Omega))^3} \\
&\leq \|F(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + C_3\,\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + C_1\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + C_2\|u'_m(0)\|_{(H^1(\Omega))^3}.
\end{aligned}$$

Para obtener una mejor estimación de $\eta(0)$, de (4.28) es claro que

$$\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} \leq C\|\mathcal{L}_s u_m(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} = C(u_m(0), \mathcal{L}_s^2 u_m(0)), \tag{4.30}$$

Ahora como $(u_m(0), \mathrm{v}_k) = (h_0, \mathrm{v}_k)$ y $\mathcal{L}_s^2 \mathrm{v}_k = \mathcal{L}_s(\lambda_k \mathrm{v}_k) = \lambda_k^2 \mathrm{v}_k$ se tiene que $\mathcal{L}_s^2 u_m(0) \in \mathrm{span}\{\mathrm{v}_k\}_{k=1}^m$ y por lo tanto $\mathcal{L}_s^2 u_m(0)|_{\partial\Omega} = 0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
(u_m(0), \mathcal{L}_s^2 u_m(0)) &= (\sum_{k=1}^m (h_0, \mathrm{v}_k)\mathrm{v}_k, \mathcal{L}_s^2 u_m(0)) = (\sum_{k=1}^m (h_0, \mathrm{v}_k)\mathcal{L}_s \mathrm{v}_k, \mathcal{L}_s u_m(0)) \\
&= (\sum_{k=1}^m (h_0, \lambda_k \mathrm{v}_k)\mathrm{v}_k, \mathcal{L}_s u_m(0)) = (\sum_{k=1}^m (h_0, \mathcal{L}_s \mathrm{v}_k)\mathrm{v}_k, \mathcal{L}_s u_m(0)) \\
&= (\sum_{k=1}^m (\mathcal{L}_s h_0, \mathrm{v}_k)\mathrm{v}_k, \mathcal{L}_s u_m(0)) \\
&\leq C(\varepsilon\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \varepsilon^{-1}\|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3}).
\end{aligned}$$

Luego, escogiendo ε suficientemente chico, acotamos (4.30) y obtenemos

$$\|u_m(0)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} \leq C\|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3}. \tag{4.31}$$

También, gracias a la siguiente

Proposición 4.9 *Let X be a Banach space with norm $\|\cdot\|$ and $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ for some $1 \leq p \leq \infty$. Then*

(i) $u \in C([0,T];X)$ (after possible being redefined on a set of measure zero).

(ii) There exist a constant C depending only on T such that,

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

y como $F \in H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, se tiene la siguiente cota

$$\|F(0)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \leq \max_{0\leq t\leq T} \|F(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \leq C\,\|F\|^2_{H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)}.$$

Finalmente, escribiendo $h_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(h_1, v_k)v_k$ (con $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ base de $(H_0^1(\Omega))^3$) es fácil notar que

$$\|u_m'(0)\|_{(H^1(\Omega))^3} = \left\|\sum_{k=1}^{m}(h_1, v_k)v_k\right\|_{(H^1(\Omega))^3} \leq \|h_1\|_{(H^1(\Omega))^3}, \tag{4.32}$$

y por lo tanto, usando (4.31) y (4.32) llegamos a que

$$\eta(0) \leq C(\|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|h_1\|_{(H^1(\Omega))^3} + \|F\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)}). \tag{4.33}$$

Utilizando las estimaciones (4.8), (4.29), (4.29), (4.33), la definición de $\tilde{u}$ y la coercividad de $A(\cdot,\cdot)$ obtenemos la estimación:

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\|u_m(t)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_m'(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u_m''(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}\right)$$
$$\leq C\left(\|h_1\|^2_{(H^1(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|F\|^2_{H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right).$$

Y de bajo los mismo argumentos que en la prueba del Lema 4.4, se deduce que $u_m''' \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$ junto con la desigualdad

$$\max_{0\leq t\leq T}\left(\|u_m(t)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_m'(t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^3} + \|u_m''(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}\right) + \|u_m'''(t)\|_{L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)}$$
$$\leq C\left(\|h_1\|^2_{(H^1(\Omega))^3} + \|h_0\|^2_{(H^2(\Omega))^3} + \|F\|^2_{H^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)}\right).$$

Luego, al igual que en la demostración de la existencia de soluciones, existe una subsucesión convergente $\{u_{m_l}\}_{l=1}^{\infty}$ tal que

$$\begin{cases} u_{m_l} \rightharpoonup u & \text{in } L^2(0,T;(H^2(\Omega))^3) \\ u_{m_l}' \rightharpoonup u' & \text{in } L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3) \\ u_{m_l}'' \rightharpoonup u'' & \text{in } L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3) \\ u_{m_l}''' \rightharpoonup u''' & \text{in } L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3) \end{cases} \tag{4.34}$$

y de la Proposición 4.8 se obtiene la desigualdad (4.22). □

Teorema 4.10 *(Mayor regularidad) Supongamos que*

$$\begin{cases} b, c \in C^m(\bar{\Omega}),\ q \in W^{m-1,\infty}(\Omega) \\ h_0 \in (H^{m+1})^3(\Omega),\ h_1 \in (H^m(\Omega))^3, \\ \frac{d^k}{dt^k} F \in L^2(0,T;(H^{m-k}(\Omega))^3)\ \ (k = 0, ..., m). \end{cases}$$

Asumamos además que se tiene la condición de compatibilidad de orden m:

$$\begin{cases} h_{0,0} := h_0 \in (H_0^1(\Omega))^3,\ h_{1,1} := h_1 \in (H_0^1(\Omega))^3, \\ h_{0,2l} := \frac{d^{2l-2}}{dt^{2l-2}} F(\cdot, 0) - Lh_{0,2l-2} \in (H_0^1(\Omega))^3\ \ (if\ m = 2l) \\ h_{1,2l+1} := \frac{d^{2l-1}}{dt^{2l-1}} F(\cdot, 0) - Lh_{1,2l-1} \in (H_0^1(\Omega))^3\ \ (if\ m = 2l + 1). \end{cases} \tag{4.35}$$

Entonces

$$\frac{d^k u}{dt^k} \in L^\infty(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3) \quad (k = 0, ..., m + 1), \tag{4.36}$$

con la estimación

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le T} \sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|_{(H^{m+1-k}(\Omega))^3} \\ &\le C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k F}{dt^k} \right\|_{L^2(0,T;(H^{m-k}(\Omega))^3)} + \|h_0\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3} + \|h_1\|_{(H^m(\Omega))^3} \right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Demostración. 1.- Por inducción en m, el caso $m = 0$ corresponde al teorema anterior.

2.- Supongamos que el teorema es cierto para algún entero no negativo m,

$$\begin{cases} b, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega}),\ q \in W^{m,\infty}(\Omega) \\ h_0 \in (H^{m+2})^3(\Omega),\ h_1 \in (H^{m+1}(\Omega))^3, \\ \frac{d^k}{dt^k} F \in L^2(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3)\ \ (k = 0, ..., m + 1). \end{cases}$$

y además se tiene la condición de compatibilidad de orden $(m + 1)$. Escribiendo $\tilde{u} := u'$ y derivando la EDP con respecto a t, $\tilde{u}$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + L\tilde{u} = \tilde{F} & \text{in } \Omega \times [0,T] \\ \tilde{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0,T] \\ \tilde{u} = \tilde{h}_0,\ \tilde{u}_t = \tilde{h}_1 & \text{on } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

para

$$\tilde{F} := F_t,\ \tilde{h}_0 := h_1,\ \tilde{h}_1 := F(\cdot, 0) - Lh_0.$$

Sabemos por (ii) en el Teorema 4.7 de regularidad que en paticular, para $m = 0$, $\tilde{u} \in L^2(0,T;(H_0^1(\Omega))^3)$, $\tilde{u}' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $\tilde{u}'' \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^3)$.

Como F, h_0 y h_1 satisfacen la condición de compatibilidad de orden $(m+1)$, $\tilde{F}$, $\tilde{h}_0$ y $\tilde{h}_1$ satisfacen la condición de compatibilidad de orden m y por lo tanto, usando la hipótesis inductiva tenemos que

$$\frac{d^k \tilde{u}}{dt^k} \in L^\infty(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3), \quad k = 0, ..., m + 1,$$

con la estimación

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k\tilde u}{dt^k}\right\|_{(H^{m+1-k}(\Omega))^3}$$
$$\le C\left(\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k\tilde F}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;(H^{m-k}(\Omega))^3)}+\|\tilde h_0\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3}+\|\tilde h_1\|_{(H^{m}(\Omega))^3}\right).$$

Ahora, como $F\in H^1(0,T;(H^m(\Omega))^3)$,entonces por la Proposición 4.9,

$$\|F\|_{C(0,T;(H^m(\Omega))^3)}\le C(\|F\|_{L^2(0,T;(H^m(\Omega))^3)}+\|F'\|_{L^2(0,T;(H^m(\Omega))^3)})$$

y escribiendo la desigualdad anterior para $\tilde u=u'$ se llega a que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\sum_{k=1}^{m+2}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{(H^{m+2-k}(\Omega))^3} \tag{4.38}$$
$$\le C\left(\sum_{k=1}^{m+1}\left\|\frac{d^k F}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3)}+\|h_1\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3}+\|Lh_0\|_{(H^{m}(\Omega))^3}+\|F(0)\|_{(H^{m}(\Omega))^3}\right)$$
$$\le C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k F}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3)}+\|h_0\|_{(H^{m+2}(\Omega))^3}+\|h_1\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3}\right).$$

Como de la hipotesis inductiva, $F\in L^2(0,T;(H^{m+1}(\Omega))^3)$, $u\in L^\infty(0,T;(H^{m+1}(\Omega))^3)$ y además $u''\in L^\infty(0,T;(H^m(\Omega))^3)$ por la desigualdad anterior, escribiendo $\mathcal{L}_s u=F-u''-\mathcal{L}_r u=:G\in(H^m(\Omega))$ c.t.p en $0\le t\le T$ y usando (4.38), deducimos de la regularidad en operadores elípticos que:

$$\begin{aligned}\|u\|_{(H^{m+2}(\Omega))^3} &\le C(\|G\|_{(H^m(\Omega))^3}+\|u\|_{(L^2(\Omega))^3})\\ &\le C(\|F\|_{(H^m(\Omega))^3}+\|u''\|_{(H^m(\Omega))^3}+\|u\|_{(L^2(\Omega))^3})\\ &\le C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k F}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3)}+\|h_0\|_{(H^{m+2}(\Omega))^3}+\|h_1\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3}\right).\end{aligned}$$

Entonces, tomando supremo esencial respecto a t y uniendo lo anterior a (4.38), obtenemos

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\sum_{k=0}^{m+2}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|_{(H^{m+2-k}(\Omega))^3} \tag{4.39}$$
$$\le C\left(\sum_{k=0}^{m+1}\left\|\frac{d^k F}{dt^k}\right\|_{L^2(0,T;(H^{m+1-k}(\Omega))^3)}+\|h_0\|_{(H^{m+2}(\Omega))^3}+\|h_1\|_{(H^{m+1}(\Omega))^3}\right),$$

i.e. se llega a la afirmación del teorema para $m+1$. □

Teorema 4.11 *(Diferenciabilidad infinita) Si suponemos que*

$$b, c, q, h_0, h_1 \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^3, \ F \in (C^\infty([0,T] \times \bar{\Omega}))^3,$$

y que se cumple la condición de compatibilidad de orden m *para todo* $m = 0, 1, \ldots$. *Entonces el problema de condición inicial y de borde* (4.1) *posee una única solución*

$$u = (\theta, w) \in (C^\infty([0,T] \times \bar{\Omega}))^3.$$

Demostración. Aplicar el Teorema 4.10 para $m = 0, 1 \ldots$. □

Capítulo 5

Conclusiones

Esta memoria presenta una serie de resultados teóricos sobre estabilidad en la recuperación de un potencial en ecuaciones de placas. Esto incluye los modelos de Kirchhoff-Love (KL) y Reissner-Mindlin (RM). Los problemas fueron abordados bajo el método de Bukhgeim-Klibanov lo que implica la necesidad de construir desigualdades de Carleman globales. En las dos construcciones una herramienta que jugó un papel fundamental fue la estimación de Carleman para la ecuación de ondas debido a que fue posible extraer de ambos modelos ecuaciones de este tipo y luego fuimos capaces de utilizar de manera directa la desigualdad. Una observación que surge de las dos desigualdades de Carleman obtenidas aquí, es que el segundo parámetro r, no se utilizaba en las construcciones de éstas y por lo tanto se podría haber omitido al incorporarlo en las constantes de las estimaciones. No obstante, se mantuvo explícitamente ya que se cree que podría ser útil en otros problemas relacionados, como por ejemplo el de recuperar el espesor $h(x)$ en RM.

Para KL, es importante destacar que la desigualdad de Carleman y por lo tanto la estabilidad, fueron obtenidas considerando condiciones de borde Navier, las cuales no son las condiciones naturales que corresponden al modelo. Por otro lado, una observación interesante con respecto al modelo de placas de Euler-Bernoulli (EB), el cual es utilizado en las aplicaciones y que consiste basicamente en KL sin el término de derivadas cruzadas espaciales y temporales (i.e. $\partial_{tt} + \Delta^2$), tiene que ver con la comparación en el comportamiento de sus soluciones con respecto a las de KL. Como se vio en el Capítulo 2, es posible separar la ecuación de KL en una ecuación elíptica y otra hiperbólica y por lo tanto, KL presenta propiedades similares a las de la ecuación de ondas, como por ejemplo que la velocidad de propagación es finita. En cambio, la ecuación de EB se puede dividir en dos ecuaciones de Schrödinger, lo cual implica que la ecuación y sus soluciones poseen otras características y una de esas es que en este contexto la velocidad de propagación es infinita. Creemos entonces que el resultado de estabilidad para potenciales en ambos modelos difiere en la consideración del tiempo de observación T. Para un modelo debe ser suficientemente grande, mientras que para el otro puede ser arbitrariamente pequeño.

En cuanto a RM, la extensión del método de Bukhgeim-Klibanov al sistema (2.46) y la obtención de su desigualdad de Carleman, fue posible gracias a que el acoplamiento entre las ecuaciones no se encontraba sobre los términos de orden mayor, por lo tanto eramos capaces de absorber los términos del acomplamiento al unir las desigualdades de Carleman respectivas de cada ecuación. Sin embargo, se debió asumir mayor regularidad sobre las soluciones a raíz de que fue necesario dividir una de las ecuaciones tomando divergencia y rotor para reducir el problema a ecuaciones de ondas. Otra forma de proceder y que posiblemente no requeriría suponer tanta regularidad, sería buscar de manera directa la estimación de Carleman de forma análoga a como se obtiene para ondas. Es importante destacar además, que la razón de haber obtenido estabilidad Hölder en RM a diferencia de la estabilidad Lispchitz de KL, es a raíz de que es necesario derivar el sistema de RM con respecto al tiempo y espacio y por lo tanto se necesita una segunda estimación de energía que hace aparecer la derivada de la diferencia de los potenciales.

Por otra parte, es natural pensar que como KL se deduce de RM, la desigualdad de Carleman y por lo tanto la estabilidad del segundo modelo implique directamente los mismos resultados para KL. Sin embargo, como KL es un problema límite de RM y se obtiene al hacer el espesor h tender a cero, este proceso hace que los problemas se deban estudiar independientemente. Además, las condiciones de borde consideradas en ambos poblemas tienen distintas naturaleza, siendo las de KL condiciones de caracter teórico a diferencia de las de RM que resultan ser más naturales y que por lo tanto presentan una interpretación física más evidente.

En cuanto a los resultados de existencia, unicidad y regularidad, se utilizó el método de Galerkin que consiste en construir soluciones en espacios de dimensión finita que resuelven problemas aproximados y que en el límite convergen a una solución de la ecuación. Los teoremas de éste capítulo, son una versión más general de los que se encuentran en [Wu04], donde el autor supone que los coeficientes de Lamé son constantes, lo cual no se asume aquí. Además de lo hecho para RM, es posible utilizar el mismo procedimiento para probar resultados análogos en KL pero con funciones viviendo en otros espacios.

Dados los resultados del trabajo surgen naturalmente varias preguntas y por lo tanto posibles trabajos futuros. Una manera de extender lo que se hizo podría ser estudiar la estabilidad en el modelo de Reissner-Mindlin considerando otro tipo de condiciones de borde, como Neumann o mixtas o también bajo datos parciales. También es posible extender el resultado considerando el espesor de la placa variable $h(x)$, los cual nos llevaría a estudiar el problema de recuperar $q(x)$ en la ecuación:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{h(x)^3}{12}\theta_{tt} - \operatorname{div}(h(x)^3\sigma(\theta)) - \mu(x)h(x)(\nabla w - \theta) = f & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \rho h(x) w_{tt} - \operatorname{div}(\mu(x)h(x)(\nabla w - \theta)) = g & \text{en } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

O también probar estabilidad de otros parámetros, como por ejemplo el espesor $h(x)$ o los parámetros de Lamé, $\mu(x)$, $\lambda(x)$, en RM y bajo observaciones en la frontera del dominio.

Además, como se mencionó anteriormente, otra manera de continuar este trabajo sería estudiando si es que es posible bajar la regularidad de los potenciales en la estabilidad de RM a $W^{1,\infty}(\Omega)$ o $L^\infty(\Omega)$, o también bajar la regularidad de las soluciones de ambos modelos probando algún tipo de regularidad escondida en la frontera como ocurre con la ecuación de ondas, es decir, probando que las soluciones presentan mayor regularidad en el borde del dominio.

Otros problemas que se encuentran vinculados con los modelos de placas y la elasticidad lineal, son los problemas de recuperación de parámetros, por ejemplo un potencial, pero añadiendo a las ecuaciones términos de viscoelasticidad o de memoria, que corresponde a un término integral que representa el cambio interno que sufre el sólido como respuesta a la flexión provocada por las cargas. Por ejemplo, la ecuación de viscoelasticidad asociada al modelo de placas de KL es la siguiente (ver [Lag89], pág 20)

$$\rho h w_{tt} - \frac{\rho h^3}{12}\Delta w_{tt} + D(0)\Delta^2 w + \int_{-\infty}^{t} D'(t-s)\Delta^2 w(s)ds = 0, \quad \text{en } \Omega\times(0,\infty).$$

O también es posible añadir términos de termoelasticidad, que consiste en agregar una nueva variable relacionada con la temperatura de la placa y que modela el efecto térmico producido por la flexión de ésta, resultando en una modificación de las propiedades internas de la placa. En KL significa estudiar el sistema (ver [Lag89], pág 22)

$$\begin{cases} \rho h w_{tt} - \dfrac{\rho h^3}{12}\Delta w_{tt} + D\left(\Delta^2 w + \dfrac{1+\mu}{2}\Delta\vartheta\right) = 0 & \text{en } \Omega\times(0,\infty) \\ \dfrac{1}{k}\vartheta_t - \Delta\vartheta + \dfrac{12}{h^2}\left(\dfrac{h\lambda_1}{2}+1\right)\vartheta - \alpha\eta\Delta w_t = \dfrac{\alpha}{\kappa\rho c}p + \dfrac{6\alpha\lambda_1}{h^2}(\bar\tau_2 - \bar\tau_1) & \text{en } \Omega\times(0,\infty), \end{cases}$$

donde ϑ representa el esfuerzo interno de la placa debido a cambios de termperatura, α es el coeficiente de expansión térmica, p es la fuente interna de calor, $\bar\tau$ es la termepratura del medio externo, κ la difusividad térmica, c el calor específico y los otros coeficientes, dependen de los ya mencionados. No existen muchos resultados en este tipo de problemas pero actualmente se ha comenzado a estudiar modelos de visco y termo elasticidad, tanto teóricamente como también en las aplicaciones.

Bibliografía

[Bal11] Guillaume Bal. *Introduction to Inverse Problems.* Columbia University, 2011.

[BK81] A.L. Bukhgeim and M.V. Klibanov. Global uniqueness of a class of multidimensional inverse problems. *Soviet Math. Dokl.*, 24:244–247, 1981.

[Bra07] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory.* Cambridge University Press, 3. ed. edition, 2007.

[DA89] R. Falk D. Arnold. Edge effects in the reissner-mindlin plate theory. *Analytical and Computational Models of Shells*, 1989.

[dB10] Maya de Buhan. *Probèmes inverses et simulations numériques en viscoélasticité 3D.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie and Universidad de Chile, 2010.

[ECR10] A. Osses E. Contreras-Reyes. Lithospheric flexure modelling seaward of the chile trench: implications for oceanic plate weakening in the trench outer rise region. *Geophysical Journal Internationa*, 2010.

[Eva98] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* American Math Society, 1998.

[FI96] A.V. Fursikov and O.Y. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations.* Suhak kangŭirok. Seoul National University, 1996.

[FZZ06] Xiaoyu Fu, Xu Zhang, and Enrique Zuazua. On the optimality of some observability inequalities for plate systems with potentials. In *Phase space analysis of partial differential equations*, volume 69 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 117–132. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[Gra91] K.F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids.* Dover Books on Engineering. Dover Publications, 1991.

[Ima02] Oleg Yu. Imanuvilov. On Carleman estimates for hyperbolic equations. *Asymptot. Anal.*, 32(3-4):185–220, 2002.

[Isa06] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations.* Springer, second edition, 2006.

[IY01] Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto. Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(7-8):1409–1425, 2001.

[IY03] Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto. Determination of a coefficient in an acoustic equation with a single measurement. *Inverse Problems*, 19(1):157–171, 2003.

[IY05] Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto. Carleman estimates for the non-stationary Lamé system and the application to an inverse problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11(1):1–56, 2005.

[KLU12] Katsiaryna Krupchyk, Matti Lassas, and Gunther Uhlmann. Determining a first order perturbation of the biharmonic operator by partial boundary measurements. *J. Funct. Anal.*, 262(4):1781–1801, 2012.

[KP12] Katsiaryna Krupchyk and Lassi Päivärinta. A Borg-Levinson theorem for higher order elliptic operators. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6):1321–1351, 2012.

[Lag89] J.E. Lagnese. *Boundary Stabilization of Thin Plates.* SIAM studies in applied mathematics ;. SIAM,, Philadelphia :, 1989.

[Man89] E.H. Mansfield. *The Bending and Stretching of Plates.* Cambridge University Press, 1989.

[PG11] L.Tzou P.Albin, C.Guillarmou and G.Uhlmann. Inverse boundary problems for systems in two dimensions. arXiv:1105.4565., 2011.

[Pue] J.P. Puel. Global carleman inequalities for the wave equations and applications to controllability and inverse problems.

[Ram05] A. G. Ramm. *Inverse Problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering.* Springer, 2005.

[Wu04] Shen Rong Wu. Reissner-Mindlin plate theory for elastodynamics. *J. Appl. Math.*, (3):179–189, 2004.

[ZZ06] Xu Zhang and Enrique Zuazua. A sharp observability inequality for Kirchhoff plate systems with potentials. *Comput. Appl. Math.*, 25(2-3):353–373, 2006.

[ZZ08] X. Zhang and E. Zuazua. On the optimality of the observability inequalities for Kirchhoff plate systems with potentials in unbounded domains. In *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*, pages 233–243. Springer, Berlin, 2008.

Apéndice

Notación

1. Denotamos por $x = (x_1, \ldots, x_N)$ a los elementos de $\mathbb{R}^N$.
2. $u_{x_i} = \partial_{x_i} u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_t = \partial_t u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$
3. $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_N}\right)^T$
4. $\nabla \cdot (\cdot) = \mathrm{div}(\cdot) = \displaystyle\sum_i^N \dfrac{\partial}{\partial x_i}$
5. $\partial_{x_i x_j} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}.$
6. $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^N \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
7. Si $A, B \in M_N(\mathbb{R})$ entonces " : " denota el producto interno de matrices, es decir $A : B = \displaystyle\sum_{i,j=1}^N A_{ij} B_{ij}$.
8. Llamaremos n a la normal unitaria exterior a la superficie definida por $\partial\Omega$.
9. En las integrales sobre la variable temporal y espacial se omiten los diferenciales dt y dx de esta forma, para $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \times (a, b) \to \mathbb{R}$, se escribe
$$\int_a^b \int_A f(x,t) dx dt = \int_a^b \int_A f(x,t).$$
10. Para funciones $u, v \in L^2(\Omega)$ denotamos el producto interno en $L^2(\Omega)$ como
$$(u, v) := (u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv dx$$
y para $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H^{-1}(\Omega)$ denotamos el producto de dualidad entre H^1 y H^{-1} como
$$\langle u, v \rangle := v(u).$$

Desigualdades

1. **Desigualdad de Cauchy.**

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. **Desigualdad de Cauchy con ε.**

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}, \quad \forall\, a, b > 0, \varepsilon > 0.$$

3. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz**

$$|x \cdot y| \leq |x||y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4. **Desigualdad de Hölder.** Suponiendo que $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego si $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, se tiene que

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

5. **Desigualdad de Gronwall (forma diferencial)** Sea $\eta(\cdot)$ una función no negativa, absolutamente continua en $[0, T]$, que satisface la desigualdad

$$\eta(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \quad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T,$$

donde $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones sumable y no negativas en $[0, T]$. Luego

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right], \quad \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

6. **Desigualdad de Gronwall (forma integral)**

   (i) Sea $\xi(t)$ una función sumable y no negativa en $[0, T]$ tal que para algún par de constantes $C_1, C_2 \geq 0$ satisface que

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2, \quad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T.$$

   Entonces

$$\xi(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}), \quad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T.$$

   (ii) En particular, si

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds, \quad \text{c.t.p. } 0 \leq t \leq T,$$

   entonces

$$\xi(t) = 0, \quad \text{c.t.p.}$$

7. **Desigualdad de Poincare.** Para toda función $u \in H_0^1(\Omega)$ existe una constante $C \geq 0$ tal que
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

8. **Generalización de la desigualdad de Poincare.** Para toda función $u \in H^1(\Omega)$ existe una constante $C \geq 0$ tal que
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

9. **Desigualdad de Korn.** Si Ω es un dominio de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave, entonces para toda función $u \in (H_0^1(\Omega))^N$ se cumple que
$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 2\int_\Omega |\varepsilon(u)|^2 dx.$$

Calculo en $\mathbb{R}^2$: Propiedades y definiciones

Recordemos que se define respectivamente el *rotor* de una función escalar $p(x, y)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de una función vectorial 2-dimensional $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y de una función matricial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, todas ellas de clase C^1, como

$$\text{rot}p = \nabla \wedge p := (\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial x})^{\mathrm{T}}, \quad \text{rot}v = \nabla \wedge v := \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

$$\text{rot}A = \nabla \wedge A := \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{21}}{\partial x} - \frac{\partial a_{11}}{\partial y} \\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x} - \frac{\partial a_{12}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Si u y $B = (b_{ij})_{i,j=1}^2$ son otras funciones $C^1(\mathbb{R}^2)$ vectorial y matricial respectivamente, tenemos que
$$u \wedge v = u_1v_2 - u_2v_1 = -v \wedge u, \quad A \wedge B = B : \begin{pmatrix} A_{2,\cdot} \\ -A_{1,\cdot} \end{pmatrix}$$

Además, se tienen las siguientes identidades entre operadores diferenciales que serán utilizadas en la pruebas de los resultados principales.

Proposición 5.1 *Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, funciones escalar, vectorial y matricial respectivamente y asumamos que son C^1. Luego,*

1) $\nabla \wedge (pv) = p(\nabla \wedge v) + \nabla p \wedge v$
2) $\nabla \wedge (Av) = (\nabla \wedge A)v + A \wedge \nabla v$
3) $\nabla \wedge (\nabla p) = 0$
4) $\nabla \wedge \nabla v^T = \vec{0}$
5) $\nabla(\nabla \wedge v) = \nabla \wedge (\nabla v)$
6) $\Delta v = -\nabla \wedge (\nabla \wedge v) + \nabla(\nabla \cdot v)$
7) $\Delta(\nabla \cdot v) = \nabla \cdot \Delta v$
8) $\Delta(\nabla \wedge v) = \nabla \wedge \Delta v.$