



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

FLUJO A SUPERFICIE LIBRE CON GRAVEDAD

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

EMILIO JOSÉ VILCHES GUTIÉRREZ

PROFESOR GUÍA:
CARLOS CONCA ROSENDE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAMÓN FUENTES AGUILAR
RAÚL GORMAZ ARANCIBIA

Este trabajo fue parcialmente financiado por Centro de Investigación JRI S.A.

SANTIAGO DE CHILE
AGOSTO 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: EMILIO VILCHES GUTIERREZ
FECHA: 14/08/2012
PROF. CARLOS CONCA R.

Un problema con superficie libre es aquel cuya formulación matemática involucra superficies que deben ser encontradas como parte de la solución. Tales superficies se llaman *superficies libres*.

El objetivo del presente Trabajo de Título es el estudio del flujo irrotacional de un fluido no viscoso e incompresible a superficie libre con gravedad. La dificultad se centra en la determinación de la superficie libre y en la no linealidad existente sobre ella.

La presente memoria se divide en dos partes. En la Parte I se estudia el método de Sautreux. Para ello, en el Capítulo 3 se presenta el método de la hodógrafa. En el Capítulo 4 se obtiene rigurosamente el método de Sautreaux. En el Capítulo 5 se aplica este método a dos familias de funciones y se obtienen algunas soluciones explícitas.

En la Parte II se utiliza la técnica de diferenciación con respecto al dominio en el caso del flujo a través de un obstáculo. En el capítulo 6 se entregan las definiciones y resultados básicos sobre espacios de funciones, dominios de frontera regular y el problema de Neumann. En el Capítulo 7 se estudia el problema sobre un obstáculo y se entregan algunos resultados de existencia de soluciones. En el Capítulo 8 se presenta el método de diferenciación con respecto al dominio y se aplica al problema del flujo sobre un obstáculo. Con esto, en el Capítulo 9, se obtiene el método de optimización adjunta y se muestran algunos resultados numéricos obtenidos por Van Brummelen [30].

A mi amada madre, quien lo ha dado todo por mí.

Agradecimientos

A mi madre, quien a lo largo de mi vida me ha acompañado, me ha entregado su amor y me ha enseñado el valor del esfuerzo. Toda mi admiración hacia ella. Este logro es tan mío como suyo.

A los profesores Carlos Conca y Raúl Gormaz, por su paciencia, sus buenos consejos y por permitirme realizar esta Memoria.

Al profesor Dr. Ramón Fuentes, por su sabiduría, su dedicación y por permitirme conocer y encantarme con el mundo de la Mecánica de Fluidos. Usted ha sido un verdadero maestro para mí.

A los académicos del Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, especialmente a Felipe Álvarez, Roberto Cominetti, Rafael Correa, Juan Dávila, Abderrahim Hantoute, Patricio Felmer, Salomé Martínez, Manuel del Pino y Hector Ramírez por la invaluable formación que me permitieron obtener.

A todos los funcionarios del Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. Quienes cumplen una silenciosa, pero fundamental labor dentro del Departamento.

Al Centro de Investigación JRI S.A., que no tan sólo financió parcialmente esta Memoria, sino que me permitió conocer el interesante mundo de la minería.

A mis compañeros del DIM, con quienes he compartido momentos inolvidables durante la Carrera.

A mis amigos, quienes me han acompañado durante todo este proceso: Nicolás, Matías y Orlando.

A Gabriela S. y Juan G., por acogerme cariñosamente como uno más de los suyos.

A Valentina, por su amor, comprensión, paciencia, generosidad y sabiduría.

Índice general

Índice de figuras	vii
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo General	2
1.2.2. Objetivos Específicos	3
1.3. Estructura de la memoria	3
2. Definición del problema con superficie libre	5
2.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento	5
2.2. Deducción de las condiciones de frontera	6
2.3. Definición del problema de contorno	7
2.4. Adimensionalización del problema de contorno	7
2.5. El problema con superficie libre	8
I El método de Sautreaux	9
3. El método de la hodógrafa	10
3.1. Aplicación conforme del flujo	10
3.2. El método de la hodógrafa	11
4. El método de Sautreaux	12
4.1. Determinación de la superficie libre	12
4.2. Líneas de corriente	15
4.3. Cálculo de la velocidad	15
4.4. Cálculo de la presión	16
4.5. Propiedades de la hodógrafa	16
4.6. El método de Sautreaux	17
4.7. Justificación del método	17
4.8. Relación con otros problemas inversos	19
4.8.1. El método de Villat	19
4.8.2. El método de Richardson-Craya	19
4.8.3. El método de Vanden-Broeck et al	19
4.8.4. El método de Sautreaux	20
4.9. Inconvenientes del método de Sautreaux	20

5. Aplicación del método de Sautreaux	21
5.1. Primera familia de soluciones	21
5.1.1. Comportamiento de las soluciones	22
5.1.2. Aplicación 1	23
5.1.3. Aplicación 2	25
5.1.4. Aplicación 3	29
5.2. Segunda familia de soluciones	34
5.2.1. Aplicación 4	34
5.2.2. Aplicación 5	35
II Variaciones con respecto al dominio	36
6. Definiciones y resultados básicos	37
6.1. Espacios de funciones	37
6.1.1. Espacios de funciones continuas	37
6.1.2. Espacio de funciones Hölder continuas	38
6.1.3. Espacios de funciones integrables	39
6.1.4. Espacios de Sobolev	39
6.1.5. Espacios de funciones lipschitzianas	40
6.2. Dominios de frontera regular	41
6.3. Variaciones del dominio	42
6.3.1. Elementos de cálculo diferencial	42
6.3.2. Elementos de cálculo tangencial	43
6.4. El problema de Neumann	46
7. Flujo sobre un obstáculo	48
7.1. Posición del problema	48
7.1.1. Formulación usando la función de corriente	50
7.2. Existencia de soluciones	50
7.2.1. Un caso particular	50
7.2.2. El caso general	51
7.3. Truncamiento del dominio	53
7.4. Formulación de diseño óptimo	55
7.5. Extensión de la condición sobre la frontera	56
8. Diferenciación respecto del dominio	59
8.1. Definición de derivada local	60
8.2. Existencia de la derivada local	61
8.2.1. Diferenciación de la ecuación	64
8.2.2. Variación total de las derivadas parciales	64
8.3. Diferenciación de la condición sobre la frontera	65
8.4. Diferenciación del funcional de costo	68
8.5. El resultado principal	72
9. El método de optimización adjunta	73
9.1. El problema dual	73
9.2. Una condición necesaria de optimalidad	75

9.3. El método de optimización adjunta	75
9.4. Variaciones normales	76
9.4.1. Resultados numéricos	76
10. Conclusiones	78
A. Elementos de variable compleja	79
Bibliografía	85

Índice de figuras

5.1.	Camino de integración $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$	22
5.2.	Líneas de corriente de la Aplicación (5.5).	24
5.3.	Aplicación 1: $F(w) = 4k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \pi k$	26
5.4.	Líneas de corriente de la Aplicación (5.10)	27
5.5.	Variación de los parámetros ℓ_1^+ , ℓ_3^+ , ℓ_1^- , ℓ_2^- y ℓ_3^- en función de Fr^2	28
5.6.	Aplicación 2: $F(w) = \frac{4}{\pi} \exp(-\frac{\pi}{2}w)$	30
5.7.	Líneas de corriente de la Aplicación (5.14).	31
5.8.	Variación de los parámetros ℓ_+ y ℓ_- en función de Fr	32
5.9.	Aplicación 3: $F(w) = w^{2/3}$	33
7.1.	El dominio del flujo.	48
7.2.	Dominio $\tilde{\mathcal{V}}_C$	54
7.3.	Dominio truncado $\tilde{\mathcal{V}}_T = \Omega$	54
9.1.	Pruebas numéricas del método de optimización adjunta.	77
A.1.	Transformación conforme	81

Capítulo 1

Introducción

Un problema con superficie libre puede ser definido como aquel cuya formulación matemática involucra superficies que deben ser encontradas como parte de la solución. Tales superficies se llaman *superficies libres*. Problemas con superficie libre ocurren en muchas ramas de la ciencia y la ingeniería. Ejemplos de éstos son las ondas en el mar, la fusión del hielo, el flujo a través de un medio poroso, el flujo de un material viscoplástico (lava), formación de burbujas y flujo a través del lecho de un río. El presente trabajo está dedicado a estudiar las aplicaciones provenientes de la mecánica de fluidos. En particular se tratará el caso de un flujo irrotacional de un fluido no viscoso e incompresible en dos dimensiones con una superficie libre. Ejemplos clásicos de éstos son: el flujo a través de un obstáculo, el flujo bajo una compuerta, un chorro dejando una boquilla, el flujo sobre un vertedero, el flujo que emerge de un recipiente y flujos que intersectan muros.

Las herramientas principales para estudiar flujos con superficie libre en dos dimensiones son: las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y las funciones de variable compleja (teoría de flujo potencial). Así, en general, un problema con superficie libre se puede formular como una EDP, pero debido a que la superficie libre es desconocida, se debe agregar una condición adicional. Esta condición, conocida como *la condición de superficie libre*, generalmente es no lineal y convierte al problema con superficie libre en uno particularmente complejo y que en muchas ocasiones requiere de técnicas numéricas específicas.

Dentro de los flujos irrotacionales de un fluido no viscoso e incompresible en dos dimensiones hay dos efectos físicos importantes a considerar; la tensión de superficie y la gravedad. El caso en que la tensión de superficie y la gravedad no actúan es bien conocido (véase [2, 11, 1, 31]). Por otro lado, cuando la tensión de superficie o la gravedad actúa, el problema con superficie libre se vuelve más complicado y, generalmente, sólo se puede acceder a soluciones numéricas. En la presente Memoria se trabajará en el caso en que la gravedad actúa y la tensión de superficie es despreciable.

Existe una gran gama de métodos de resolución de problemas con superficie libre. Entre ellos destacan: el truncamiento de series, la resolución de ecuaciones integrales, diferencias finitas, elementos finitos y ecuaciones integrales en la frontera. Vanden-Broeck [31] hace una exposición detallada de los dos primeros métodos, mientras que Yeung [37] hace una revisión

de los últimos tres.

Aunque, en general, no es posible encontrar una solución explícita exacta a algún problema de interés, es posible considerar varias clases de soluciones exactas y, entonces, determinar la geometría del problema asociado. Esto es conocido como *método inverso* (véase [35]).

Los métodos inversos en problemas con superficie libre tienen una larga historia, recopilada por Wehausen & Laitone [35]. Se sabe que el primero de ellos data de 1893 y fue deducido por Sautreaux [19, 20]. El método de Sautreaux ha sido redescubierto en formas equivalentes en varias ocasiones por distintos autores; Blasius en 1910 [3], Wilton en 1913 [36], Villat en 1915 [33], Richardson en 1920 [17], Lewy en 1952 [15]. Posteriormente, otros autores han utilizado alguno de los métodos anteriores para obtener ejemplos de soluciones explícitas exactas; Craya en 1949 [6], Vitousek en 1954 [34], Tuck en 1975 [28], Hocking en 1985 [13] y Tuck & Roberts en 1997 [29]. Sin embargo, las soluciones obtenidas por estos autores no han resultado útiles en las aplicaciones industriales. Así, la modelación de problemas con superficie libre es un área desafiante y que aún presenta una gran variedad de problemas abiertos.

1.1. Motivación

Los problemas con superficie libre están presentes en la mayoría de los procesos hidráulicos. Las economías de escala y el creciente interés en minimizar costos de producción han favorecido el desarrollo de nuevas técnicas en la resolución de estos problemas.

La presente Memoria se divide en dos partes. La motivación de la primera parte proviene de la necesidad de buscar soluciones explícitas a problemas con superficie libre. La ventaja de estas soluciones explícitas no radica solamente en su simplicidad en el cálculo, sino que éstas pueden ser útiles para probar la precisión de un método numérico específico, en un caso más sofisticado. La motivación de la segunda parte proviene de tratar de aplicar una técnica de diseño óptimo, relativamente nueva, llamada variaciones con respecto al dominio, a un problema particular: el flujo sobre un obstáculo.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Este Trabajo de Título está enfocado en el estudio de problemas con superficie libre utilizando dos métodos: el método de Sautreaux y variaciones con respecto al dominio. El primero se investigará en forma descriptiva a través de ejemplos, mientras que para el segundo se calculará la derivada con respecto al dominio del problema. Esto permite obtener una metodología de resolución numérica llamada “método de optimización adjunta”.

1.2.2. Objetivos Específicos

- (1) Dar a conocer los elementos básicos de la mecánica de fluidos concerniente al problema con superficie libre.
- (2) Formular el problema con superficie libre manifestando sus dificultades y su carácter no lineal.
- (3) Exponer matemáticamente de forma rigurosa el método de Sautreaux.
- (4) Comparar el método de Sautreaux con otros métodos inversos.
- (5) Calcular numéricamente los flujos obtenidos por el método de Sautreaux para diferentes familias de funciones.
- (6) Contrastar los flujos obtenidos en función del número de Froude.
- (7) Determinar inconvenientes del método de Sautreaux.
- (8) Estudiar el problema con superficie libre en el caso particular de un flujo sobre un obstáculo usando la herramienta de variaciones con respecto al dominio.
- (9) Plantear el problema con superficie libre como uno de optimización.
- (10) Calcular la derivada con respecto al dominio para el problema del flujo sobre un obstáculo.
- (11) Obtener condiciones de primer orden para el problema del flujo a través de un obstáculo.
- (12) Deducir el método de optimización adjunta.

1.3. Estructura de la memoria

El presente trabajo se divide en dos partes. La primera parte, que comprende los capítulos 2 al 5, está dedicada completamente al estudio del método de Sautreaux y la segunda, que comprende los capítulos 6 al 9, está consagrada al problema del flujo sobre un obstáculo y variaciones con respecto al dominio. Más específicamente,

En el Cap. 2 se define el problema con superficie libre.

En el Cap. 3 se presenta el método de la hodógrafa.

En el Cap. 4 se deduce rigurosamente el método de Sautreaux.

En el Cap. 5 se aplica el método de Sautreaux a dos familias de funciones.

En el Cap. 6 se entregan las definiciones y resultados básicos sobre espacios de funciones, dominios de frontera regular y el problema de Neumann.

En el Cap. 7 se estudia el problema sobre un obstáculo y se entregan algunos resultados de existencia de soluciones.

En el Cap. 8 se presenta el método de diferenciación con respecto al dominio y se aplica al problema del flujo sobre un obstáculo.

En el Cap. 9 se obtiene el método de optimización adjunta.

Finalmente, en el anexo A se exponen los elementos de variable compleja necesarios para justificar el método de Sautreaux.

Capítulo 2

Definición del problema con superficie libre

2.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Considere el flujo plano de un fluido perfecto e incompresible. El fluido ocupa una región abierta y simplemente conexa $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$.

Dado $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{V}$ y $t \geq 0$ denotaremos por $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$, $p(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, respectivamente, al *campo de velocidades* del fluido, la *presión del fluido*, la *densidad del fluido* y las *fuerzas externas* por unidad de masa en (\mathbf{x}, t) . Además, dado que el fluido es incompresible, la densidad es constante, es decir, $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho > 0$.

Para un fluido perfecto e incompresible se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{grad} p(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, t \geq 0. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) dan cuenta, respectivamente, de la conservación de la masa y momentum. Se supondrá, además, que la fuerza externa \mathbf{f} es conservativa, i.e., $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \Omega$. Asumiendo que el flujo es irrotacional y que éste ha alcanzado el estado estacionario o régimen permanente se tiene el llamado Teorema de Bernoulli.

Teorema 2.1 (Teorema de Bernoulli) *Considere el flujo estacionario e irrotacional de un fluido perfecto e incompresible que ocupa una región \mathcal{V} . Entonces:*

$$\frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} - \Omega(\mathbf{x}) = \text{const.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Bajo las hipótesis del Teorema, (2.2) se escribe:

$$\rho \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \rho \operatorname{grad} \Omega(\mathbf{x}) - \operatorname{grad} p(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Utilizando la identidad vectorial $\frac{1}{2} \operatorname{grad} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$, notando que la hipótesis de que el flujo sea irrotacional implica que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ (véase p. ej. [21], pp. 157-162.), dividiendo por ρ e integrando (2.4), se obtiene (2.3). \square

En esta Memoria se supondrá que el fluido es perfecto e incompresible y que el flujo es plano, estacionario e irrotacional.

Es bien conocido que si el flujo es irrotacional, entonces existen funciones escalares $\varphi: \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y $\psi: \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, llamadas, respectivamente, *potencial de velocidades* y *función de corriente*, tales que

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2.5)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Usando el potencial de velocidades φ , las ecuaciones (2.1) y (2.3) se expresan como sigue

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} - \Omega(\mathbf{x}) = \text{const.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2.8)$$

Finalmente, se aceptará que la fuerza externa ejercida sobre el fluido es la gravitacional actuando según el eje x , i.e., $\Omega(\mathbf{x}) = gx$, donde g es la aceleración gravitacional. Por lo tanto, (2.7) y (2.8) se escriben como:

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V},$$

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} - gx = \text{const.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (2.9)$$

2.2. Deducción de las condiciones de frontera

Suponga que una parte del fluido está contenida en un reservorio y que la otra parte ha escapado a la atmósfera de modo que la frontera $\partial \mathcal{V}$ de \mathcal{V} se puede descomponer en dos partes disjuntas, que se denotarán, respectivamente, \mathcal{R} y \mathcal{S} , de modo que \mathcal{R} corresponderá a las paredes del reservorio que están en contacto con $\partial \mathcal{V}$ y \mathcal{S} será la porción de $\partial \mathcal{V}$ que está en contacto con la atmósfera. \mathcal{R} y \mathcal{S} se llamarán, respectivamente, *frontera fija* y *frontera o superficie libre*. Además, se asumirá que $\partial \mathcal{V}$ es suficientemente suave para que el campo de vectores normales exteriores a $\partial \mathcal{V}$ esté definida en todo punto de $\partial \mathcal{V}$. Este campo será denotado por \mathbf{n} .

Durante todo el movimiento se admitirá que las partículas del fluido no escapan a través de $\partial \mathcal{V}$. Luego, se debe cumplir la siguiente condición de impermeabilidad

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}. \quad (2.10)$$

La condición (2.10) escrita en términos de la función φ equivale a

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}. \quad (2.11)$$

Por otro lado, \mathcal{S} estando en contacto con la atmósfera debe satisfacer la condición de *superficie libre*:

$$p(\mathbf{x}) = p_0 \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}, \quad (2.12)$$

donde p_0 es la presión atmosférica. Por lo tanto, usando (2.9), la relación (2.12) se expresa como:

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 + \frac{p_0}{\rho} - gx = \text{const.} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}. \quad (2.13)$$

Las condiciones (2.11) y (2.13) constituirán las condiciones sobre la frontera $\partial\mathcal{V}$ de \mathcal{V} .

2.3. Definición del problema de contorno

Para determinar el comportamiento del fluido es suficiente encontrar el campo de velocidades y la presión en todo punto del fluido. Para esto basta con encontrar el potencial de velocidades φ . Lo anterior se puede realizar resolviendo el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{V}, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{V}, \\ \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + \frac{p_0}{\rho} - gx = \text{const.} & \text{sobre } \mathcal{S}, \end{cases} \quad (2.14)$$

y calcular la presión a partir de la expresión siguiente:

$$p = \rho gx + \rho \text{const.} - \frac{\rho}{2} |\text{grad } \varphi|^2 \quad \text{en } \mathcal{V}. \quad (2.15)$$

El problema que surge aquí es que la superficie libre \mathcal{S} es desconocida y, por lo tanto, debe ser encontrada.

Así, el problema con superficie libre consiste en encontrar una superficie \mathcal{S} y una función φ que resuelvan el problema (2.14).

2.4. Adimensionalización del problema de contorno

Consideremos un punto $\mathbf{x}_A \in \mathcal{S}$ de modo que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(\mathbf{x}_A)| &= V_A, \\ \mathbf{x}_A &= (0, -L), \end{aligned}$$

donde V_A y L son, respectivamente, una rapidez y un largo de referencia. Usando (2.13) se obtiene:

$$\frac{1}{2} V_A^2 + \frac{p_0}{\rho} = \text{const.} \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en (2.13):

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 = gx + \frac{1}{2} V_A^2 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

Ahora, se introduce la siguiente adimensionalización:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = L \hat{\mathbf{x}}, \\ \varphi = L V_A \hat{\varphi}, \\ \psi = L V_A \hat{\psi}, \\ p = \rho V_A^2 \hat{p}. \end{cases} \quad (2.17)$$

y se define el número de Froude [38] como:

$$\text{Fr} := \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas gravitacionales}} = \frac{V_A}{\sqrt{gL}}. \quad (2.18)$$

Usando la adimensionalización (2.17) y el número de Froude (2.18), el problema (2.14) se transforma en:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 & \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{V}}, \\ \text{grad } \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 & \hat{\mathbf{x}} \in \partial \hat{\mathcal{V}}, \\ \frac{1}{2} |\text{grad } \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})|^2 &= \text{Fr}^{-2} \hat{x} + \frac{1}{2} & \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{S}}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior a $\partial \hat{\mathcal{V}}$, y la presión (2.15) se calcula como:

$$\hat{p}(\hat{\mathbf{x}}) = \text{Fr}^{-2} \hat{x} - \frac{1}{2} |\text{grad } \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}})|^2 + \hat{p}_0 + \frac{1}{2} \quad \hat{\mathbf{x}} \in \hat{\mathcal{V}}.$$

De ahora en adelante, se eliminará la decoración sombrero.

2.5. El problema con superficie libre

De acuerdo a lo desarrollado en las secciones anteriores, el problema con superficie libre consiste en encontrar una superficie \mathcal{S} y una función φ satisfaciendo:

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad (2.19)$$

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{V}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 = \text{Fr}^{-2} x + \frac{1}{2} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}. \quad (2.21)$$

Además, la presión en el fluido viene dada por:

$$p(\mathbf{x}) = \text{Fr}^{-2} x - \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 + p_0 + \frac{1}{2} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Parte I

El método de Sautreaux

Capítulo 3

El método de la hodógrafa

Sea $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un abierto que contiene a $\overline{\mathcal{V}}$, esto es, $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$. Usando el potencial de velocidades φ y la función de corriente ψ se define el *potencial complejo* como la siguiente función de variable compleja:

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy.$$

De acuerdo con las relaciones (2.5) y (2.6) se tiene que:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego, si $u, v \in C^1(\mathcal{V})$, entonces, $w(z)$ es holomorfa en \mathcal{V} (véase A.1). Además, su derivada compleja también es holomorfa y satisface:

$$\frac{dw}{dz} = u(x, y) - iv(x, y) \quad z \in \mathcal{V}. \quad (3.1)$$

De ahora en adelante, se supondrá que el potencial complejo $w(z)$ es holomorfo en \mathcal{U} .

3.1. Aplicación conforme del flujo

En lo que sigue se asumirá que w es una aplicación conforme entre \mathcal{V} y su imagen $\mathcal{I} = w(\mathcal{V})$ (véase A.5). Se probará a continuación que, independiente del flujo, \mathcal{I} corresponde a una franja horizontal infinita. Para esto se define el concepto de *línea de corriente*.

Definición 3.1 *Una línea de corriente es una curva a la cual los vectores velocidades son tangentes.*

Dado que el movimiento es estacionario, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas del fluido (véase p. ej. [21], p. 151.). Luego, si s denota la longitud

de arco de la trayectoria de una partícula de fluido y $\vec{\sigma}(s) = (x(s), y(s))$ corresponde a la parametrización natural de dicha trayectoria, i.e. $\|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\| = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dx(s)}{ds} &= u(x(s), y(s)), \\ \frac{dy(s)}{ds} &= v(x(s), y(s)).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{ds}(x(s), y(s)) &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds}, \\ &= -vu + vu, \\ &= 0.\end{aligned}$$

Es decir, ψ es constante a lo largo de las líneas de corriente y, por lo tanto, éstas yacen sobre las curvas de nivel de ψ . Por lo tanto, se concluye que w envía conformemente \mathcal{V} en una franja horizontal infinita \mathcal{I} . Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (\psi_0, \psi_1)$, donde $\psi_1 \in (\psi_0, +\infty]$.

3.2. El método de la hodógrafa

Sean V el módulo de \mathbf{v} y θ el ángulo entre la dirección del vector velocidad \mathbf{v} y el eje x . Se tiene que:

$$\frac{dw}{dz} = Ve^{-i\theta}.$$

Luego, si V y θ son funciones de las variables φ y ψ , entonces las líneas de corriente del fluido se pueden calcular a partir de la siguiente fórmula:

$$z(w) = \int \frac{e^{i\theta}}{V} dw. \quad (3.2)$$

El empleo de la expresión (3.2), típicamente, se conoce como *el método de la hodógrafa* y permite caracterizar completamente el flujo.

Capítulo 4

El método de Sautreaux

En este capítulo se desarrolla el método de Sautreaux. Así, en las secciones 4.1 a 4.4, respectivamente, se expone cómo calcular la superficie libre, las líneas de corriente, la velocidad y la presión. En las secciones 4.5 a 4.8, respectivamente, se sintetiza y se compara con otros métodos inversos. Finalmente, en la sección 4.9 se mencionan los principales inconvenientes del método de Sautreaux.

Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un abierto que contiene a $\overline{\mathcal{V}}$. En lo que sigue se asumirá que el potencial complejo $w(z)$ es analítico en \mathcal{U} y que éste envía conformemente \mathcal{V} en la franja horizontal \mathcal{I} .

El método de Sautreaux consiste en una fórmula del tipo (3.2).

4.1. Determinación de la superficie libre

De acuerdo con (3.1),

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \quad z \in \mathcal{V}. \quad (4.1)$$

Tomando módulo a (4.1),

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = |\mathbf{v}|^2 = |\text{grad } \varphi|^2. \quad (4.2)$$

Reemplazando (4.2) en (2.21),

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \text{Fr}^{-2} x + \frac{1}{2} \quad z \in \mathcal{S}. \quad (4.3)$$

Por otro lado, en virtud de la proposición (A.6), w es invertible. Luego, denotando por $\chi(w)$, $w = \varphi + i\psi$, la inversa de w y aplicando la regla de la cadena,

$$\chi'(w) = \frac{1}{w'(z)}.$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}\chi(w) &= x + iy, \\ \overline{\chi(w)} &= x - iy,\end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{\chi(w) + \overline{\chi(w)}}{2}. \quad (4.4)$$

Reemplazando (4.4) en (4.3) y multiplicando por 2, se obtiene:

$$\frac{1}{|\chi'(w)|^2} = \text{Fr}^{-2} \left[\chi(w) + \overline{\chi(w)} \right] + 1 \quad w \in w(\mathcal{S}). \quad (4.5)$$

Definamos:

$$\begin{aligned}S &= \chi'(w) + \overline{\chi'(w)}, \\ P &= \chi'(w) \cdot \overline{\chi'(w)},\end{aligned}$$

entonces, $\chi'(w)$ y $\overline{\chi'(w)}$ satisfacen la siguiente ecuación de segundo grado en la variable \mathcal{X} :

$$\mathcal{X}^2 - S\mathcal{X} + P = 0. \quad (4.6)$$

Supongamos que \mathcal{S} yace sobre la línea de corriente asociada a ψ_0 y consideremos la siguiente función:

$$\tilde{F}(\varphi) = \chi(\varphi, \psi_0) + \overline{\chi(\varphi, \psi_0)}.$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{F}}{d\varphi} &= \frac{d\chi}{d\varphi}(\varphi, \psi_0) + \overline{\frac{d\chi}{d\varphi}(\varphi, \psi_0)}, \\ &= \chi'(\varphi, \psi_0) + \overline{\chi'(\varphi, \psi_0)}, \\ &= S.\end{aligned}$$

Usando (4.5),

$$\begin{aligned}P &= \chi'(w) \cdot \overline{\chi'(w)}, \\ &= \frac{1}{\text{Fr}^{-2} \left[\chi(\varphi, \psi_0) + \overline{\chi(\varphi, \psi_0)} \right] + 1}, \\ &= \frac{1}{\text{Fr}^{-2} \tilde{F}(\varphi) + 1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.6) equivale a:

$$\mathcal{X}^2 - \frac{d\tilde{F}}{d\varphi}(\varphi)\mathcal{X} + \frac{1}{\text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi) + 1} = 0 \quad (\varphi, \psi_0) \in w(\mathcal{S}). \quad (4.7)$$

Resolviendo (4.7), se obtiene:

$$2\mathcal{X} = \tilde{F}'(\varphi) \pm i\sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \tilde{F}'(\varphi)^2} \quad (\varphi, \psi_0) \in w(\mathcal{S}), \quad (4.8)$$

pero,

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \chi'(\varphi, \psi_0) = \frac{d\chi}{d\varphi}(\varphi + i\psi_0), \\ &\quad \text{ó} \\ \mathcal{X} &= \overline{\chi'(\varphi, \psi_0)} = \overline{\frac{d\chi}{d\varphi}}(\varphi + i\psi_0).\end{aligned}$$

Luego, integrando (4.8) con respecto a φ ,

$$\begin{aligned}2\chi(\varphi + i\psi_0) &= \tilde{F}(\varphi) \pm i \int \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \tilde{F}'(\varphi)^2} d\varphi + 2iC \\ &\quad \text{ó} \\ \overline{2\chi(\varphi + i\psi_0)} &= \tilde{F}(\varphi) \pm i \int \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \tilde{F}'(\varphi)^2} d\varphi + 2iC,\end{aligned}$$

donde C es una constante de integración.

Dado que $\tilde{F}(\varphi) = \chi(\varphi, \psi_0) + \overline{\chi(\varphi, \psi_0)} \in \mathbb{R}$, sin pérdida de generalidad, se supone que:

$$2\chi(\varphi + i\psi_0) = \tilde{F}(\varphi) \pm i \int \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \tilde{F}'(\varphi)^2} d\varphi + 2iC \quad (\varphi, \psi_0) \in w(\mathcal{S}). \quad (4.9)$$

Finalmente, si $(\varphi, \psi_0) \in w(\mathcal{S})$, entonces, $\chi(\varphi, \psi_0) = z(\varphi + i\psi_0)$. Luego, la expresión (4.9) define dos posibles soluciones, que denotaremos z_+ y z_- , donde:

$$z_{\pm}(\varphi + i\psi_0) = \frac{1}{2}\tilde{F}(\varphi) \pm i \int \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \frac{\tilde{F}'(\varphi)^2}{4}} d\varphi + iC \quad (\varphi, \psi_0) \in w(\mathcal{S}). \quad (4.10)$$

Por lo tanto, z_+ ó z_- especifican la forma de la línea de corriente $\psi = \psi_0$, que contiene a la superficie libre \mathcal{S} .

Por otro lado, supongamos que la función \tilde{F} satisface las siguientes condiciones:

$$1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi) > 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \tilde{F}'(\varphi)^2 \geq 0, \quad (4.12)$$

en algún intervalo $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$. Entonces $w(\mathcal{S}) = \mathcal{J} \times \{\psi_0\}$, y la superficie libre \mathcal{S} se puede describir a partir de las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{2}\tilde{F}(\varphi) & \varphi \in \mathcal{J}, \\ y_{\pm}(\varphi) = \pm \int \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}\tilde{F}(\varphi)} - \frac{\tilde{F}'(\varphi)^2}{4}} d\varphi + C & \varphi \in \mathcal{J}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Por consiguiente, conociendo la función $\tilde{F}(\varphi)$, las expresiones (4.13) determinan la forma de la superficie libre.

4.2. Líneas de corriente

En la sección 4.1 se mostró que conociendo la función real \tilde{F} la relación (4.10) determina la forma de la superficie libre. En esta sección, usando el Teorema A.7, se va a extender la fórmula (4.10) a todo \mathcal{I} .

Sea $F(w)$ una función holomorfa tal que:

$$F(\varphi + i\psi_0) = \tilde{F}(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{J},$$

en algún intervalo $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ no vacío. Entonces, usando el Teorema A.7 se puede extender (4.10) a todo \mathcal{I} a través de la siguiente expresión:

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \pm i \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(\zeta)} - \frac{F'(\zeta)^2}{4}} d\zeta + iC \quad w \in \mathcal{I}, \quad (4.14)$$

donde la integral en (4.14) se calcula como una integral de línea a lo largo de algún camino $\Gamma \subset \bar{\mathcal{I}}$ que conecte w_0 y w . Gracias al Teorema A.9, cuando $1 + \text{Fr}^{-2}F(w) \neq 0$ en $\bar{\mathcal{I}}$ y F es una función holomorfa en \mathcal{I} , la función $z(w)$ es independiente del camino elegido Γ .

Por lo tanto, para calcular la línea de corriente asociada a $\psi \in [\psi_0, \psi_1]$ basta integrar la expresión (4.14) para $\varphi \in \mathbb{R}$.

4.3. Cálculo de la velocidad

El potencial complejo w satisface

$$\frac{dw}{dz} = u - iv.$$

Luego, derivando (4.14) y usando la regla de la cadena,

$$u - iv = \frac{1}{\frac{F'(w)}{2} \pm i \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(w)} - \frac{F'(w)^2}{4}}}. \quad (4.15)$$

Luego, igualando las partes real e imaginaria en (4.15), se obtiene la velocidad $\mathbf{v} = (u, v)$.

Observación 4.1 *A partir de (4.15) se deduce que:*

$$u - iv = (1 + \text{Fr}^{-2}F(w)) \left(\frac{F'(w)}{2} \mp i \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(w)} - \frac{F'(w)^2}{4}} \right). \quad (4.16)$$

Luego, si $w_0 \in \bar{\mathcal{I}}$ es tal que $1 + \text{Fr}^{-2}F(w_0) = 0$, entonces, $z_{\pm}(w_0)$ corresponderá a un punto de estancamiento.

4.4. Cálculo de la presión

La presión dentro del fluido se calcula a través de la expresión

$$p(\mathbf{x}) = \text{Fr}^{-2}x - \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(\mathbf{x})|^2 + p_0 + \frac{1}{2} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Por otro lado, usando (4.2) se tiene

$$|\text{grad } \varphi|^2 = \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-2},$$

y por lo tanto,

$$p = \text{Fr}^{-2}x - \frac{1}{2} \left| \frac{dz}{dw} \right|^{-2} + p_0 + \frac{1}{2} \quad \text{en } \mathcal{V}, \quad (4.17)$$

donde

$$\frac{dz}{dw} = \frac{F'(w)}{2} \pm i \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(w)} - \frac{F'(w)^2}{4}} \quad w \in \mathcal{I},$$

y x en (4.17) se obtiene tomando la parte real de la fórmula (4.14).

4.5. Propiedades de la hodógrafa

El próximo teorema entrega algunas propiedades de la relación (4.14).

Teorema 4.2 *Sea $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (\psi_0, \psi_1)$, con $\psi_1 \in (\psi_0, +\infty]$ y $w_0 \in \bar{\mathcal{I}}$. Si $F(w)$ es una función holomorfa en \mathcal{I} tal que*

$$1 + \text{Fr}^{-2}F(w) \neq 0 \quad \text{para todo } (\varphi, \psi) \in \mathcal{I}. \quad (4.18)$$

Entonces,

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \pm \frac{i}{2} \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}F(\zeta)} - F'(\zeta)^2} d\zeta, \quad (4.19)$$

es holomorfa en \mathcal{I} . Además, la integral en (4.19) no depende del camino $\Gamma \subset \bar{\mathcal{I}}$ de integración que conecta w_0 y w .

DEMOSTRACIÓN. Dado que \mathcal{I} es simplemente conexo y por la hipótesis (4.18),

$$G(w) = \frac{1}{2}F'(w) \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2}F(w)} - F'(w)^2}$$

es analítica en \mathcal{I} . Luego, en virtud del Teorema A.9,

$$z(w) = \int_{w_0}^w G(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2}F(0),$$

no depende del camino de integración y define una función holomorfa. \square

Observación 4.3 Sea z_{\pm} definida por (4.19). Entonces,

1. si $z_{\pm}(w)$ es continua, dado que \mathcal{I} es simplemente conexo, se tiene que $z_{\pm}(\mathcal{I})$ es simplemente conexo. Por lo tanto, si $F(w)$ es analítica, $z_{\pm}(\mathcal{I})$ es simplemente conexo.
2. z_{\pm} no necesariamente define una aplicación conforme, pero, si $F(w)$ es holomorfa,

$$\frac{dz_{\pm}}{dw}(w) \neq 0 \quad \text{para } w \in \mathcal{I},$$

luego, $z_{\pm}(w)$ define una biyección local.

4.6. El método de Sautreaux

De acuerdo a lo desarrollado en las secciones 4.1 a 4.5, el método de Sautreaux se puede resumir en el siguiente procedimiento:

Dada una función analítica $F(w)$.

- (i) Buscar alguna línea de corriente ψ_0 donde $F(\varphi + i\psi_0) = \Re(F(\varphi + i\psi_0))$. Esta línea de corriente constituirá la línea de corriente asociada a la superficie libre.
- (ii) Definir la función $\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi + i\psi_0)$.
- (iii) Encontrar el conjunto maximal \mathcal{J} donde $\tilde{F}(\varphi)$ cumpla las condiciones (4.11) y (4.12).
- (iv) Calcular la superficie libre a partir de (4.13).
- (v) Calcular las líneas de corriente, la velocidad y la presión, respectivamente, a partir de (4.14), (4.15) y (4.17).

El procedimiento (i)-(v) determina completamente el problema con superficie libre para cada elección de $F(w)$. Más aún, cada elección de $F(w)$ puede dar origen a múltiples problemas de contorno diferentes, como se verá en el próximo capítulo.

4.7. Justificación del método

El próximo teorema muestra que el método de Sautreaux efectivamente resuelve el problema con superficie libre.

Teorema 4.4 Sea $Fr > 0$ y $F(w)$ una función holomorfa definida sobre la franja horizontal $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (\psi_0, \psi_1)$, con $\psi_1 \in (\psi_0, +\infty]$. Supongamos que existe un intervalo no vacío $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} F(\varphi + i\psi_0) &= \Re(F(\varphi + i\psi_0)) & \varphi \in \mathcal{J}, \\ 1 + Fr^{-2}F(\varphi + i\psi_0) &> 0 & \varphi \in \mathcal{J}, \\ \frac{4}{1 + Fr^{-2}F(\varphi + i\psi_0)} - F'(\varphi + i\psi_0)^2 &\geq 0 & \varphi \in \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Definamos las funciones z_+ y z_- como

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \pm i \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{4}{1 + Fr^{-2}F(\zeta)} - F'(\zeta)^2} d\zeta + iC \quad w \in \mathcal{I}, \quad (4.20)$$

y considere los abiertos $\mathcal{V}_{\pm} = z_{\pm}(\mathcal{I})$. Entonces z_{\pm} define una aplicación entre \mathcal{I} y \mathcal{V}_{\pm} , cuya inversa $w_{\pm}(z) = \varphi_{\pm} + i\psi_{\pm}$, definida sobre \mathcal{V}_{\pm} , es holomorfa.

Si

$$\mathcal{S}_{\pm} = \{z_{\pm}(\varphi + i\psi_0) : \varphi \in \mathcal{J}\},$$

entonces, las funciones φ_{\pm} son soluciones de los siguientes problemas con superficie libre:

$$\Delta\varphi_{\pm}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}_{\pm}, \quad (4.21)$$

$$\text{grad } \varphi_{\pm}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathcal{V}_{\pm}, \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi_{\pm}(\mathbf{x})|^2 = Fr^{-2}x + \frac{1}{2} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S}_{\pm}. \quad (4.23)$$

Además, las superficies libres \mathcal{S}_{\pm} están dadas explícitamente por:

$$x_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{2}F(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{J}, \quad (4.24)$$

$$y_{\pm}(\varphi) = \pm \int \sqrt{\frac{1}{1 + Fr^{-2}F(\varphi)} - \frac{F'(\varphi)^2}{4}} d\varphi + C \quad \varphi \in \mathcal{J}. \quad (4.25)$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si w_{\pm} es analítica, entonces, φ_{\pm} , siendo la parte real de w_{\pm} , satisface (4.21). Por un lado, derivando con respecto a φ las relaciones (4.24) y (4.25), elevando al cuadrado y sumando,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{1 + Fr^{-2}F(\varphi)}. \quad (4.26)$$

Pero, por regla de la cadena,

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2. \quad (4.27)$$

Reemplazando (4.27) y (4.24) en (4.26) se obtiene que φ satisface (4.23).

Por otro lado, si $\psi = \psi_0$ y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$

$$\begin{aligned} \psi(x(\varphi), y(\varphi)) &= \psi_0, & \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \psi_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \psi_0) &= 0, & \Leftrightarrow \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\varphi, \psi_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}(\varphi, \psi_0) &= 0, & \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_2 &= 0, & \Leftrightarrow \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

La conclusión es la misma para $\psi = \psi_1$. Por lo tanto, φ satisface (4.22). \square

4.8. Relación con otros problemas inversos

El método de Sautreaux ha sido redescubierto, en formas equivalentes, por varios autores. Entre estos destacan Villat [33], Richardson [17] y Vanden-Broeck [32], quienes dedujeron su propia versión del método inverso. Cada uno de estos métodos proviene de una interpretación equivalente de las ecuaciones de movimiento. Es interesante preguntarse que relación existe entre cada uno de estos métodos.

A continuación se muestra que todos estos métodos son equivalentes y que todos se pueden deducir a partir del método de Sautreaux.

4.8.1. El método de Villat

Sea $F(w) = \text{Fr}^2 e^{2G(w)} - \text{Fr}^2$, donde $G(w)$ es una función analítica, entonces, la relación

$$z(w) = \frac{1}{2} \text{Fr}^2 e^{2G(w)} \pm \frac{i}{2} \int_{w_0}^w \sqrt{1 - \text{Fr}^2 e^{6G(\zeta)} G'(\zeta)^2} \frac{d\zeta}{e^{G(\zeta)}}.$$

equivale al método de Villat [33].

4.8.2. El método de Richardson-Craya

Sea $F(w) = (3\text{Fr})^{2/3} G^{2/3}(w) - \text{Fr}^2$, donde $G(w)$ es una función analítica, entonces, la relación

$$2z(w) = (3\text{Fr})^{2/3} G^{2/3}(w) + \frac{2i}{(3\text{Fr})^{1/3}} \int_{w_0}^w \sqrt{1 - G'(\zeta)^2} \frac{d\zeta}{G^{1/3}(\zeta)}.$$

equivale al método de Richardson-Craya [17, 6].

4.8.3. El método de Vanden-Broeck et al

Sea

$$H(w) = \sqrt{\frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2} F(w)} - F'(w)^2}. \quad (4.28)$$

Usando (4.28), se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$F'(w)^2 - \frac{4}{1 + \text{Fr}^{-2} F(w)} = -H^2. \quad (4.29)$$

El método de Vanden-Broeck [32] corresponde a considerar H como una función de w , i.e. $H = H(w)$, y resolver la ecuación diferencial (4.29) para encontrar F .

Otra interpretación posible surge al considerar a H como una función de F , i.e. $H = H(F)$, en cuyo caso la ecuación diferencial (4.29) se reduce a la ecuación en variables separables

$$dw = \frac{dF}{\sqrt{\frac{4}{1+\text{Fr}^{-2}F(w)} - H(F)^2}}.$$

4.8.4. El método de Sautreaux

Cabe destacar que el método desarrollado en este capítulo no corresponde exactamente al presentado por Sautreaux en 1893, pero, se ha optado llamarlo igual, pues, la versión presentada es totalmente equivalente. En efecto, sea $F(w) = G(w) - \text{Fr}^2$, donde $G(w)$ es una función analítica, entonces la relación

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}G(w) \pm i \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{\text{Fr}^2}{G(\zeta)} - \frac{G'(\zeta)^2}{4}} d\zeta, \quad (4.30)$$

corresponde a la versión original del método de Sautreaux [19, 20].

4.9. Inconvenientes del método de Sautreaux

Tal como se mostró en el presente capítulo, dada una función holomorfa $F(w)$, el método de Sautreaux entrega soluciones de un problema con superficie libre asociado. Por lo tanto, éste corresponde a un método inverso y, hasta el momento, no se conoce una metodología para resolverlo. Es por esto que, en general, el procedimiento para estudiar dicho método consiste en explorar las soluciones obtenidas a partir de distintas elecciones de la función $F(w)$. Así, el principal inconveniente del método surge en elegir adecuadamente esta función para obtener una solución “interesante”. En el presente trabajo se procuró obtener soluciones para el problema con superficie libre a partir de distintas elecciones de la función $F(w)$. En particular, se intentó obtener soluciones a partir de funciones trigonométricas, funciones hiperbólicas, algunos polinomios simples, entre otras. Lamentablemente, sólo se encontraron algunos ejemplos básicos que se presentan en el capítulo 5.

Capítulo 5

Aplicación del método de Sautreaux

En este capítulo se aplica el método de Sautreaux. En la sección 5.1 se analiza la llamada primera familia de soluciones y en la sección 5.2 se estudia la llamada segunda familia de soluciones y se entregan algunas fórmulas explícitas.

5.1. Primera familia de soluciones

La primera aplicación del método de Sautreaux consiste en estudiar el caso en que la función $F(w)$ es independiente del número de Froude. La ventaja principal de esta elección radica en la posibilidad de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones en función del número de Froude.

Suponga que la función $F(w)$ es independiente del número de Froude. Entonces, de acuerdo con (4.20), las soluciones obtenidas por el método de Sautreaux son:

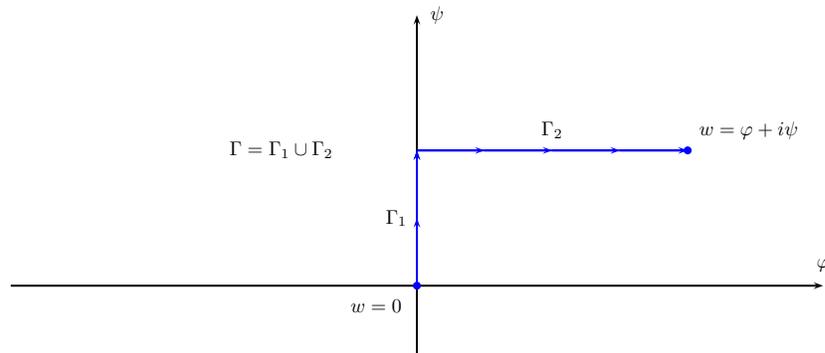
$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \pm i \int_{w_0}^w \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(\zeta)} - \frac{F'(\zeta)^2}{4}} d\zeta + iC. \quad (5.1)$$

Con el objeto de simplificar la notación, se introduce la función

$$\mathcal{F}(w) = \sqrt{\frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}F(w)} - \frac{F'(w)^2}{4}}$$

Sin pérdida de generalidad, se elige $w_0 = 0$ y $C = 0$. Para llevar a cabo la integración en (5.1) se utiliza el siguiente camino (Figura 5.1):

$$\begin{cases} \Gamma &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \Gamma_1 &= \{is : s \in [0, \psi]\}, \\ \Gamma_2 &= \{s + i\psi : s \in [0, \varphi]\}. \end{cases} \quad (5.2)$$


 Figura 5.1: Camino de integración $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Integrando sobre Γ se obtiene;

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sqrt{\mathcal{F}(\zeta)} d\zeta &= \int_{\Gamma_1} \sqrt{\mathcal{F}(\zeta)} d\zeta + \int_{\Gamma_2} \sqrt{\mathcal{F}(\zeta)} d\zeta \\ &= i \int_0^{\psi} \sqrt{\mathcal{F}(is)} ds + \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(s + i\psi)} ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (5.1) equivale a

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \mp \int_0^{\psi} \sqrt{\mathcal{F}(is)} ds \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(s + i\psi)} ds. \quad (5.3)$$

La fórmula (5.3) determina las líneas de corriente asociadas a las soluciones $z_{\pm}(w)$. Además, la velocidad y la presión en el fluido se pueden calcular, respectivamente, a partir de las relaciones (4.15) y (4.17).

5.1.1. Comportamiento de las soluciones

El comportamiento de las soluciones en función del número de Froude Fr dependerá de cada elección de la función $F(w)$. Sin embargo, cuando $Fr \rightarrow 0^+$ o cuando $Fr \rightarrow +\infty$, se tiene la siguiente

Proposición 5.1 *Supongamos que $F(w)$ no depende de Fr .*

(a) *Si $Fr \rightarrow 0^+$, entonces (5.1) converge asintóticamente a*

$$z_{\pm}(w) = \frac{F(w)}{2} \mp \frac{1}{2} \int_0^w |F'(\zeta)| d\zeta.$$

(b) *Si $Fr \rightarrow +\infty$, entonces (5.1) converge asintóticamente a*

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}F(w) \pm \frac{i}{2} \int_0^w \sqrt{4 - F'(\zeta)^2} d\zeta$$

DEMOSTRACIÓN. Como $F(w)$ es independiente de Fr , basta tomar el límite cuando $\text{Fr} \rightarrow 0^+$ y $\text{Fr} \rightarrow +\infty$, respectivamente, en (5.1). \square

5.1.2. Aplicación 1

Sean $b > 0$ y $k = \frac{2b}{\pi+4}$ dos constantes. Consideremos la función

$$F(w) = 4k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \pi k, \quad (5.4)$$

y apliquemos el método de Sautreaux.

En este caso la función $\mathcal{F}(w)$ es:

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{1 + \frac{\pi k}{\text{Fr}^2} + \frac{4k}{\text{Fr}^2} \sqrt{\frac{w}{k} + 1}} - \frac{k}{w + k}.$$

Luego, usando el camino Γ descrito por (5.2) (Fig. 5.1), las soluciones asociadas a (5.4) son:

$$z_{\pm}(w) = 2k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \frac{1}{2}\pi k \mp \int_0^{\psi} \sqrt{\mathcal{F}(is)} ds \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(s + i\psi)} ds. \quad (5.5)$$

5.1.2.1. Líneas de corriente

La determinación de las líneas de corriente se hace integrando (5.5) para valores fijos de ψ . Por otro lado, para que (5.5) constituya el flujo asociado a un problema con superficie libre es necesario que la línea de corriente $\psi = 0$ pertenezca a la frontera de \mathcal{I} . Por lo tanto,

$$\mathcal{I}_1 = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad \text{ó} \quad \mathcal{I}_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0).$$

Así, se obtienen 4 soluciones asociadas a z_{\pm} y a los abiertos \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 , respectivamente. Éstas corresponden a flujos a través de dos muros, uno oblicuo y otro vertical, y una superficie libre (Figs. 5.2(a)-5.2(b)). Además, dado que los flujos obtenidos al considerar \mathcal{I}_1 son simétricos a los obtenidos con \mathcal{I}_2 , basta estudiar las soluciones $z_{\pm}(w)$ con $w \in \mathcal{I}_1$.

5.1.2.2. Determinación de las superficies libres

En la sección 4.6 se explicó que para aplicar el método de Sautreaux es necesario buscar alguna línea de corriente que cumpla la condición

$$F(\varphi + i\psi) = \Re(F(\varphi + i\psi)). \quad (5.6)$$

Dado que (5.6) ocurre para $\psi = 0$ y $\varphi \geq -k$, luego, haciendo $\psi = 0$ en (5.5), se obtiene

$$z_{\pm}(\varphi) = 2k\sqrt{\frac{\varphi}{k} + 1} + \frac{1}{2}\pi k \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(s)} ds \quad \varphi \geq -k. \quad (5.7)$$

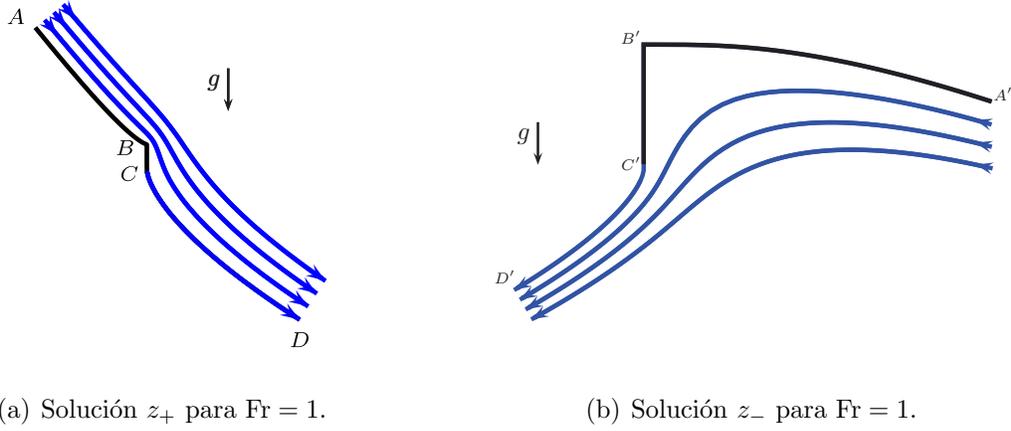


Figura 5.2: Líneas de corriente de la Aplicación (5.5).

Se define el siguiente parámetro:

$$\varphi_m(\text{Fr}^2) = k \left(\frac{2k}{\text{Fr}^2} + \sqrt{\frac{4k^2}{\text{Fr}^4} + 1 + \frac{\pi k}{\text{Fr}^2}} \right)^2 - k.$$

Entonces, $\varphi_m(\text{Fr}^2) \geq 0$ y, además,

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\varphi) \geq 0 & \text{si } \varphi \geq \varphi_m(\text{Fr}^2), \\ \mathcal{F}(\varphi) < 0 & \text{si } \varphi \in (-k, \varphi_m(\text{Fr}^2)). \end{cases}$$

Por lo tanto, las superficies libres son

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= 2k\sqrt{\frac{\varphi}{k} + 1} + \frac{1}{2}\pi k \mp \int_0^{\varphi_m(\text{Fr}^2)} \sqrt{-\mathcal{F}(s)} ds & \varphi \geq \varphi_m(\text{Fr}^2), \\ y_{\pm}(\varphi) &= \pm \int_{\varphi_m(\text{Fr}^2)}^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(s)} ds & \varphi \geq \varphi_m(\text{Fr}^2). \end{aligned}$$

5.1.2.3. Comportamiento de las soluciones

Sean, respectivamente, \overline{AB} y $\overline{A'B'}$, los muros oblicuos, \overline{BC} y $\overline{B'C'}$ los muros verticales y \overline{CD} y $\overline{C'D'}$ las superficies libres asociadas a las soluciones z_+ , z_- (Figs. 5.2(a)-5.2(b)).

Sean $\ell^+(\text{Fr}^2)$ y $\ell^-(\text{Fr}^2)$, respectivamente, los largos de los muros \overline{BC} y $\overline{B'C'}$. Entonces, se tiene,

$$\begin{aligned} \ell^+(\text{Fr}^2) &= 2k\sqrt{\frac{\varphi_m(\text{Fr}^2)}{k} + 1} - \int_{-k}^{\varphi_m(\text{Fr}^2)} \sqrt{-\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi, \\ \ell^-(\text{Fr}^2) &= 2k\sqrt{\frac{\varphi_m(\text{Fr}^2)}{k} + 1} + \int_{-k}^{\varphi_m(\text{Fr}^2)} \sqrt{-\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi. \end{aligned}$$

Se observa que ℓ^+ , ℓ^- y φ_m , como funciones de Fr^2 , son estrictamente decrecientes (Fig. 5.3(a)).

Más aún, de acuerdo con la Proposición 5.1, cuando $\text{Fr} \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} z_+(w) &= \frac{1}{2}\pi k + 2k, \\ z_-(w) &= 4k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \frac{1}{2}\pi k - 2k, \end{aligned}$$

que corresponden, respectivamente, a un punto y al flujo en contra de dos muros, sin superficie libre, formando un ángulo recto (cf. [1] pp. 409-413.) (Fig. 5.3(b)).

Por otro lado, cuando $\text{Fr} \rightarrow +\infty$,

$$z_{\pm}(w) = 2k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \frac{1}{2}\pi k \pm \left[\sqrt{w^2 + kw} - \frac{k}{2} \ln \left(1 + \frac{2w}{k} + 2\sqrt{\frac{w^2}{k^2} + \frac{w}{k}} \right) \right],$$

que corresponden, respectivamente, al flujo a través de dos muros con una superficie libre (Fig. 5.3(c)) y al flujo en contra una placa finita de largo b (cf. [1] pp. 493-497.) (Fig. 5.3(d)).

Finalmente, el comportamiento de las soluciones z_+ y z_- para distintos valores de Fr se muestra, respectivamente, en las Figs. 5.3(e) y 5.3(f).

5.1.3. Aplicación 2

Consideremos la franja $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ y la función

$$F(w) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi}{2}w\right) \quad w \in \mathcal{I}. \quad (5.8)$$

Aplicando la fórmula (5.1) se tiene que los flujos asociados a (5.8) están descritos por

$$z_{\pm}(w) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}w} \pm i \int_0^w \sqrt{\mathcal{F}(w)} dw \quad w \in \mathcal{I}, \quad (5.9)$$

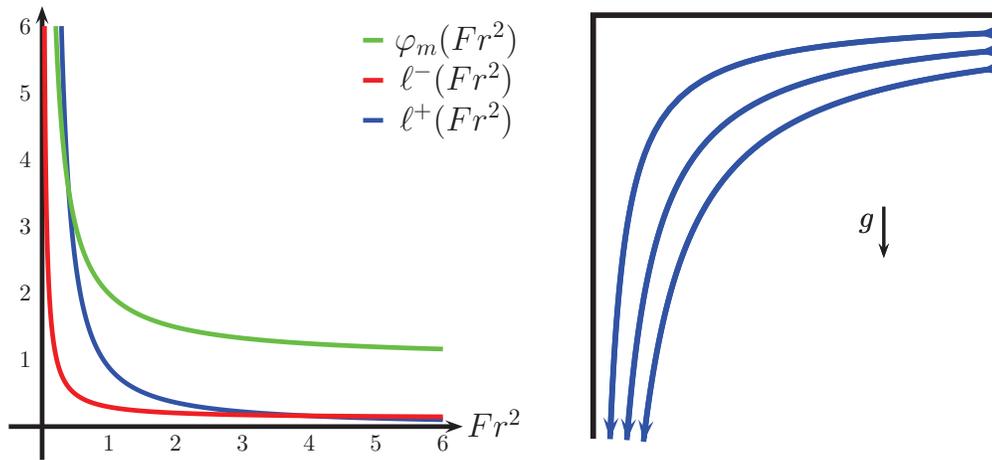
donde,

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi \text{Fr}^2} e^{-\frac{\pi}{2}w}} - e^{-\pi w}.$$

Además, usando el camino Γ definido por (5.2) (Fig. 5.1), se obtiene

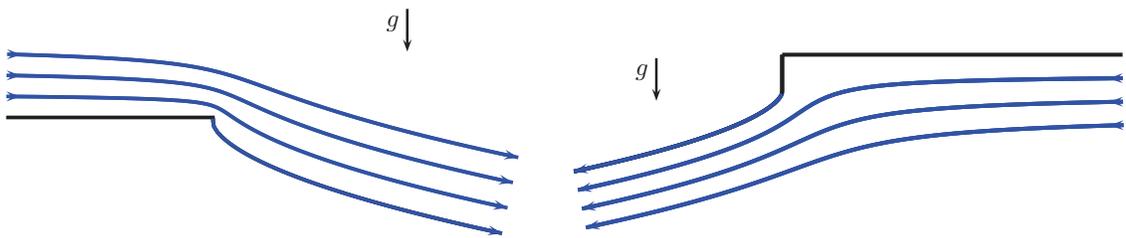
$$z_{\pm}(w) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}w} \mp \int_0^{\psi} \sqrt{\mathcal{F}(i\psi)} d\psi \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi + i\psi)} d\varphi \quad w \in \mathcal{I}. \quad (5.10)$$

La relación (5.10) determina dos soluciones dependientes del número de Froude que corresponden, respectivamente, al flujo a través de una ranura con dos muros (Fig. 5.4(a)) y al flujo generado por un sumidero situado en un punto A (cf. [13])(Fig. 5.4(b)).



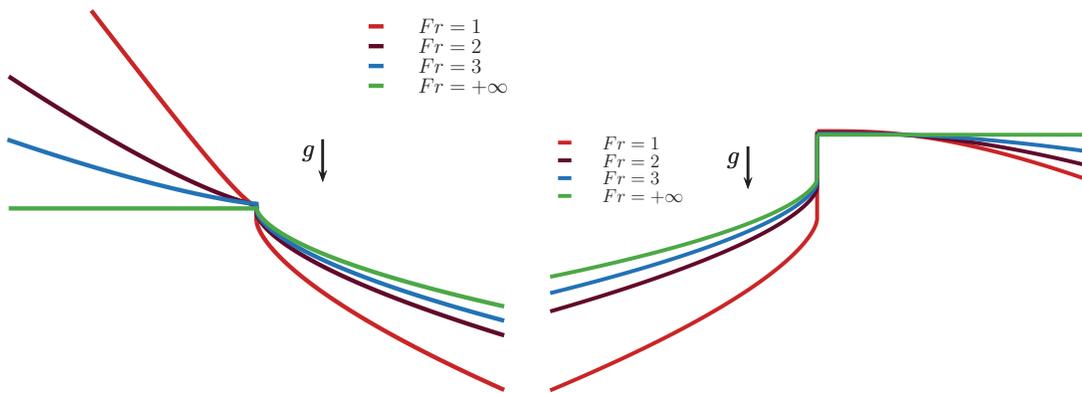
(a) Parámetros $\varphi_m(Fr^2)$, $\ell^+(Fr^2)/b$ y $\ell^-(Fr^2)/b$ vs Fr^2 .

(b) Solución z_- para $Fr \rightarrow 0^+$.



(c) Solución z_+ para $Fr \rightarrow +\infty$.

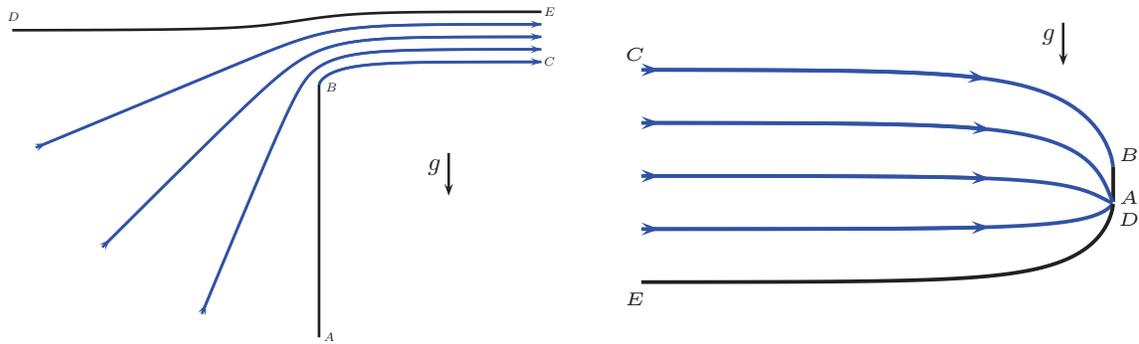
(d) Solución z_- para $Fr \rightarrow +\infty$.



(e) Solución z_+ para distintos valores de Fr .

(f) Solución z_- para distintos valores de Fr .

Figura 5.3: Aplicación 1: $F(w) = 4k\sqrt{\frac{w}{k} + 1} + \pi k$.


 (a) Solución z_+ para $\text{Fr} = 1$.

 (b) Solución z_- para $\text{Fr} = 1$.

Figura 5.4: Líneas de corriente de la Aplicación (5.10)

5.1.3.1. Determinación de las superficies libres

Para encontrar la superficie libre debemos buscar alguna línea de corriente que cumpla

$$F(\varphi + i\psi) = \Re(F(\varphi + i\psi)) \quad \psi \in [0, 1]. \quad (5.11)$$

Notando que (5.11) ocurre sólo para $\psi = 0$ y haciendo $\psi = 0$ en (5.10), se obtiene

$$z_{\pm}(\varphi) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}\varphi} \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, la aplicación $\mathcal{F}(\varphi)$ es estrictamente creciente, continua y satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(0) &= \frac{-4}{\pi \text{Fr}^2 + 4} < 0, \\ \mathcal{F}(+\infty) &= 1 > 0. \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de los valores intermedios, $\mathcal{F}(\varphi)$ tiene un único cero que se denotará por $\varphi_m(\text{Fr}^2)$. Se tiene que

$$\varphi_m(\text{Fr}^2) > 0,$$

y, obviamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi) &\geq 0 & \text{si } \varphi &\geq \varphi_m(\text{Fr}^2), \\ \mathcal{F}(\varphi) &< 0 & \text{si } \varphi &< \varphi_m(\text{Fr}^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las superficies libres están dadas por

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}\varphi} \mp \int_0^{\varphi_m(\text{Fr}^2)} \sqrt{-\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi & \varphi &\geq \varphi_m(\text{Fr}^2) \\ y_{\pm}(\varphi) &= \pm \int_{\varphi_m(\text{Fr}^2)}^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi & \varphi &\geq \varphi_m(\text{Fr}^2) \end{aligned}$$

5.1.3.2. Comportamiento de los problemas a superficie libre

Para estudiar el comportamiento de los flujos se consideran los siguientes puntos (Figs. 5.4(a) y 5.4(b)):

$$\begin{aligned}
 A : \mathbf{x}_+^A &= z_+(-\infty), & A' : \mathbf{x}_-^{A'} &= z_-(-\infty), \\
 B : \mathbf{x}_+^B &= z_+(\varphi_m), & B' : \mathbf{x}_-^{B'} &= z_-(\varphi_m), \\
 C : \mathbf{x}_+^C &= z_+(\infty), & C' : \mathbf{x}_-^{C'} &= z_-(\infty), \\
 D : \mathbf{x}_+^D &= z_+(-\infty + i), & D' : \mathbf{x}_-^{D'} &= z_-(-\infty + i), \\
 E : \mathbf{x}_+^E &= z_+(\infty + i), & E' : \mathbf{x}_-^{E'} &= z_-(\infty + i).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Usando (5.12) se definen:

$$\begin{aligned}
 \ell_1^+ &= |x_+^E - x_+^D| & \ell_1^- &= |x_-^{C'} - x_-^{B'}|, \\
 \ell_2^+ &= |x_+^E - x_+^C| & \ell_2^- &= |x_-^{B'} - x_-^{A'}|, \\
 \ell_3^+ &= |x_+^C - x_+^B| & \ell_3^- &= |x_-^{D'} - x_-^{E'}|.
 \end{aligned}$$

Se observa que $\ell_2^+ \equiv 1$. La variación de los otros parámetros se muestra en las Fig. 5.5(a) y 5.5(b).

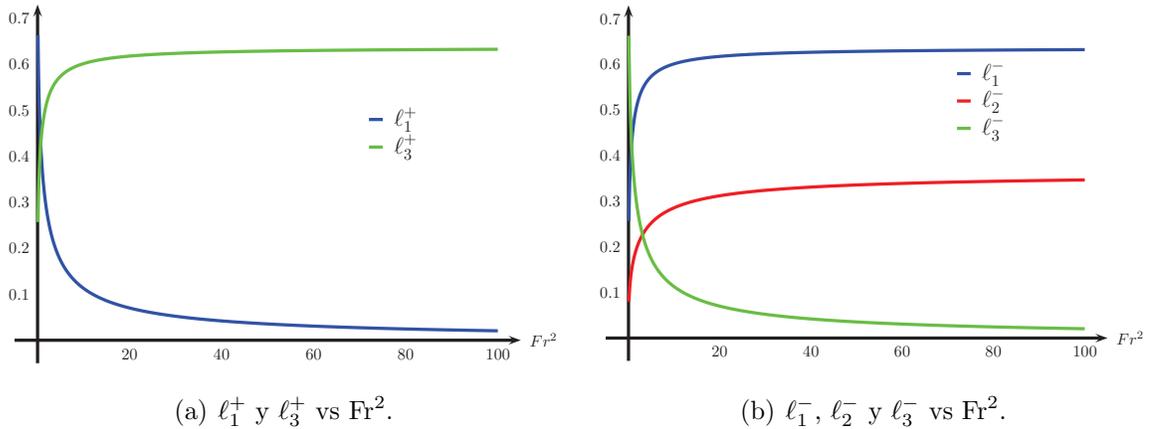


Figura 5.5: Variación de los parámetros ℓ_1^+ , ℓ_3^+ , ℓ_1^- , ℓ_2^- y ℓ_3^- en función de Fr^2 .

Además, de acuerdo con la Proposición 5.1, cuando $Fr \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned}
 z_+(w) &= \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}w} - \frac{2}{\pi}, \\
 z_-(w) &= \frac{2}{\pi},
 \end{aligned}$$

que corresponden, respectivamente, al flujo generado por un sumidero entre dos muros (cf. [1] pp. 409-412) (Fig. 5.6(a)) y a un punto.

Por otro lado, cuando $Fr \rightarrow +\infty$,

$$z_{\pm}(w) = \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2}w} \mp \frac{2i}{\pi} \left(\sqrt{1 - e^{-\pi w}} - \operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - e^{-\pi w}}) \right),$$

que corresponden, respectivamente, al flujo entre una ranura y un muro horizontal (cf. [1] pp. 493-497.) y al flujo generado por una sumidero a través de un muro horizontal (Figs. 5.6(b) y 5.6(c)).

Finalmente, el comportamiento de las soluciones z_+ y z_- para distintos valores de Fr^2 se muestra, respectivamente, en las Figs. 5.6(d) y 5.6(e).

Observación 5.2 *En esta sección se vio que los flujos asociados a la función (5.8) son: el flujo que sale de una ranura y el flujo generado por un sumidero. En general, para $m \neq 0$, si*

$$F(w) = a \exp(mw), \quad (5.13)$$

las soluciones asociadas a (5.13) corresponden al flujo que entra ($m > 0$) ó sale ($m < 0$) de una ranura y al flujo generado por una fuente $m > 0$ ó un sumidero $m < 0$ (cf. [13]).

5.1.4. Aplicación 3

Consideremos la franja $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función

$$F(w) = w^{2/3} \quad w \in \mathcal{I}. \quad (5.14)$$

Aplicando la fórmula (5.1), se obtiene que los flujos asociados a (5.14) están dadas por:

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}w^{2/3} \pm i \int_0^w \sqrt{\mathcal{F}(w)}dw \quad w \in \mathcal{I}, \quad (5.15)$$

donde,

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{1 + \text{Fr}^{-2}w^{2/3}} - \frac{1}{9w^{2/3}}.$$

Además, usando el camino definido por (5.2) (Fig. 5.1), se obtiene,

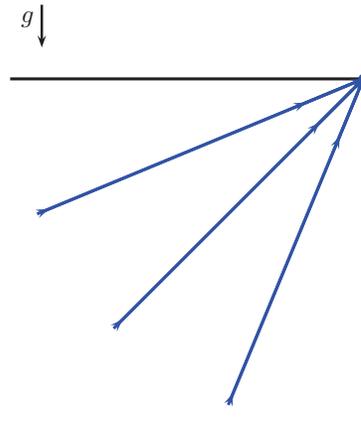
$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}w^{2/3} \mp \int_0^{\psi} \sqrt{\mathcal{F}(i\psi)}d\psi \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi + i\psi)}d\varphi \quad w \in \mathcal{I}. \quad (5.16)$$

La relación (5.16) determina dos soluciones dependientes del número de Froude, que corresponden a flujos a través de dos muros (Figs. 5.4(a)-5.7(b)).

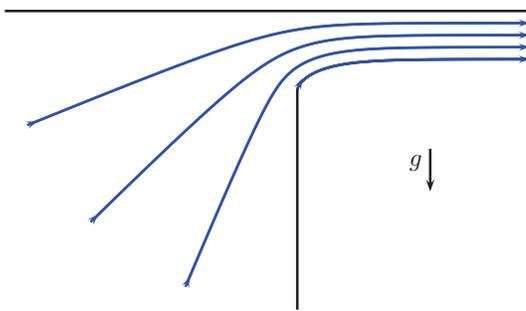
5.1.4.1. Determinación de las superficies libres

Tal como se explicó en la sección 4.6 para resolver el problema a superficie libre se debe buscar alguna línea de corriente que cumpla la relación:

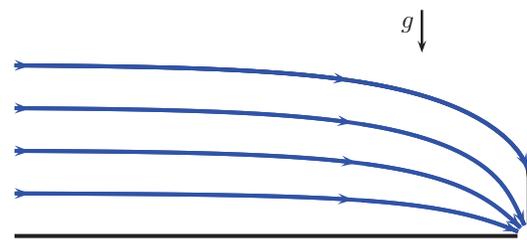
$$F(\varphi + i\psi) = \Re(F(\varphi + i\psi)) \quad \psi \geq 0, \quad (5.17)$$



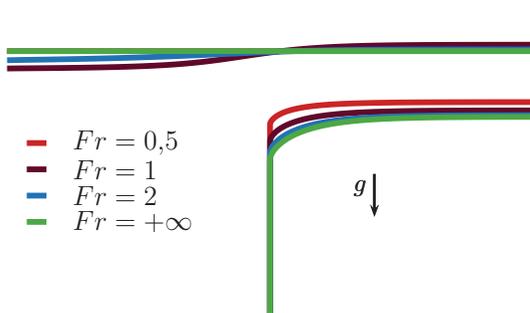
(a) Solución z_+ cuando $Fr \rightarrow 0^+$.



(b) Solución z_+ cuando $Fr \rightarrow +\infty$.

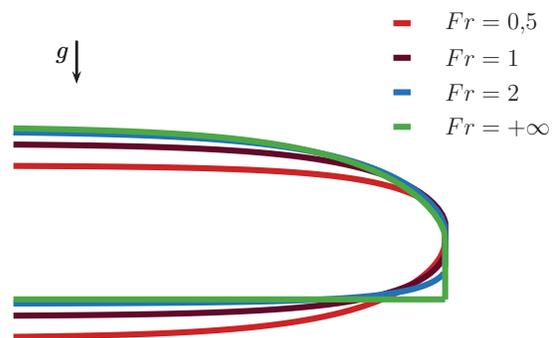


(c) Solución z_- cuando $Fr \rightarrow +\infty$.



- $Fr = 0,5$
- $Fr = 1$
- $Fr = 2$
- $Fr = +\infty$

(d) Solución z_+ para $Fr = 0,5; 1; 2; +\infty$.



- $Fr = 0,5$
- $Fr = 1$
- $Fr = 2$
- $Fr = +\infty$

(e) Solución z_- para $Fr = 0,5; 1; 2; +\infty$.

Figura 5.6: Aplicación 2: $F(w) = \frac{4}{\pi} \exp(-\frac{\pi}{2}w)$.

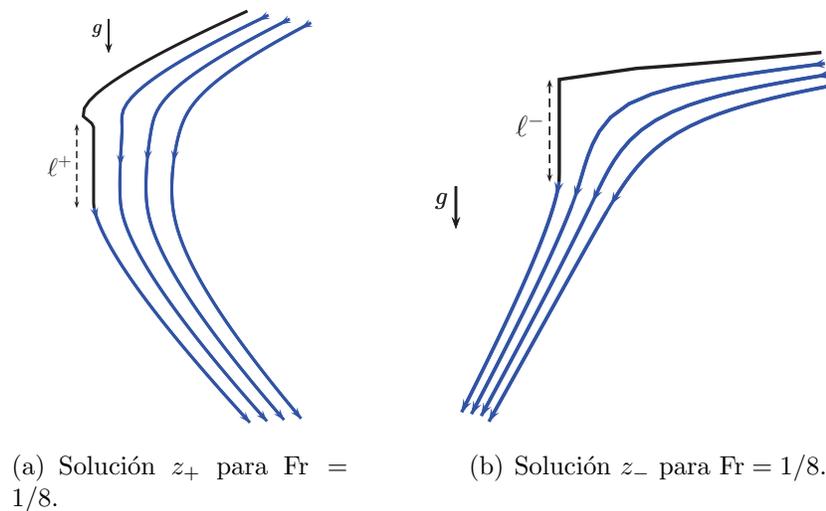


Figura 5.7: Líneas de corriente de la Aplicación (5.14).

Notando que (5.17) ocurre para $\psi = 0$, $\varphi \geq 0$ y haciendo $\psi = 0$ en (5.16), se obtiene

$$z_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^{2/3} \pm i \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi \quad \varphi \geq 0. \quad (5.18)$$

Para $Fr > 1/3$ se define

$$\varphi_m(Fr^2) = \left(\frac{Fr^2}{9Fr^2 - 1} \right)^{3/2},$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi) &\geq 0 & \text{si } \varphi &\geq \varphi_m(Fr^2), \\ \mathcal{F}(\varphi) &< 0 & \text{si } 0 &\leq \varphi < \varphi_m(Fr^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las superficies libres están dadas por:

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= \frac{1}{2}\varphi^{2/3} \mp \int_0^{\varphi_m(Fr^2)} \sqrt{-\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi & \varphi &\geq \varphi_m(Fr^2) \\ y_{\pm}(\varphi) &= \pm \int_{\varphi_m(Fr^2)}^{\varphi} \sqrt{\mathcal{F}(\varphi)} d\varphi & \varphi &\geq \varphi_m(Fr^2) \end{aligned}$$

Se observa que para $Fr \leq 1/3$ no hay superficie libre y (5.18) describe el flujo a través de un muro. En particular, para $Fr = 1/3$ la relación (5.18) describe un muro vertical.

5.1.4.2. Comportamiento de los problemas a superficie libre

Para estudiar el comportamiento de las soluciones en función del número de Froude, se definen ℓ^+ , ℓ^- , respectivamente, como el largo de los muros verticales de las Figs. 5.7(a) y

5.7(b). La variación de estos parámetros se muestra en la Fig. 5.8.

Se observa que ℓ^+ y ℓ^- , como funciones de Fr , son decrecientes. Además, cuando Fr tiende a $1/3$, ℓ^+ y ℓ^- tienden a infinito, y cuando $Fr \rightarrow +\infty$, ℓ^+ y ℓ^- tienden, respectivamente, a $\approx 0,0313$ y a $\approx 0,0798$.

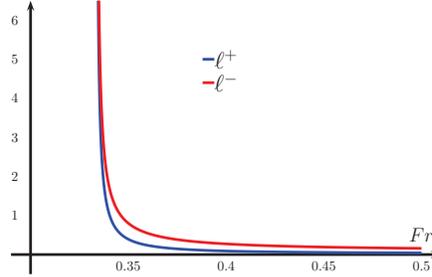


Figura 5.8: Variación de los parámetros ℓ_+ y ℓ_- en función de Fr .

De acuerdo con la proposición 5.1, cuando $Fr \rightarrow +\infty$,

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}w^{2/3} \pm \frac{i}{27} [(9w^{2/3} - 1)^{3/2} + i],$$

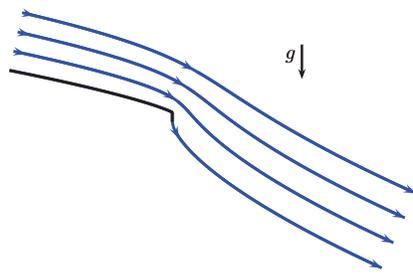
que corresponden, respectivamente, a flujos a través de dos muros (Figs. 5.9(a) y 5.9(b)).

Por otro lado, cuando $Fr \rightarrow 1/3$,

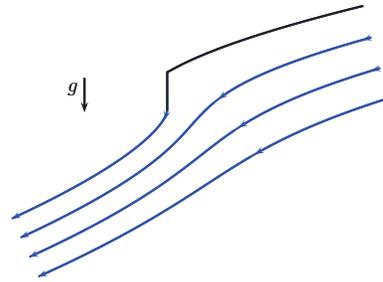
$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}w^{2/3} \mp \frac{1}{9} \arctan(2w^{1/3}), \quad (5.19)$$

que corresponden, respectivamente, a flujos a través de muros sin superficie libre (Figs. 5.9(c) y 5.9(d)).

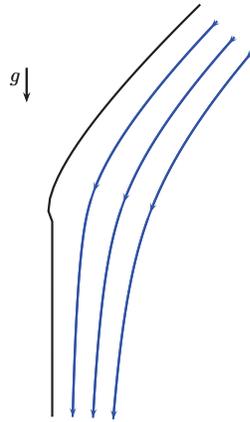
Finalmente, el comportamiento de las soluciones z_+ y z_- para distintos valores de Fr^2 se muestra, respectivamente, en las Figs. 5.9(e) y 5.9(f).



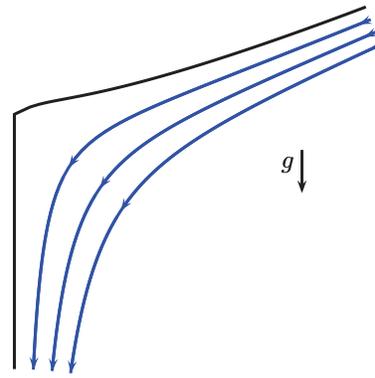
(a) Solución z_+ para $Fr \rightarrow +\infty$.



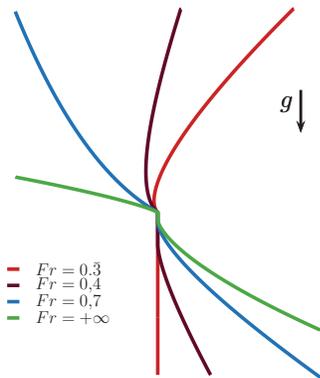
(b) Solución z_- para $Fr \rightarrow +\infty$.



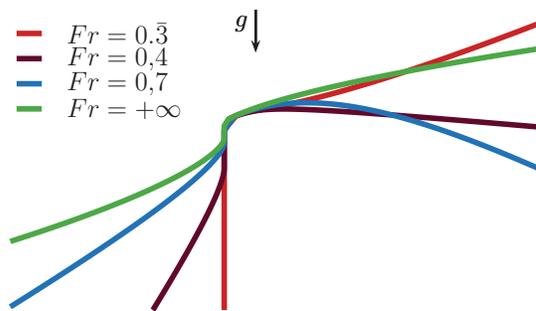
(c) Solución $z_+(w)$ para $Fr = 1/3$.



(d) Solución $z_-(w)$ para $Fr = 1/3$.



(e) Solución z_+ para $Fr = 0, \bar{3}; 0, 4; 0, 7; +\infty$



(f) Solución z_- para $Fr = 0, \bar{3}; 0, 4; 0, 7; +\infty$

Figura 5.9: Aplicación 3: $F(w) = w^{2/3}$.

5.2. Segunda familia de soluciones

La segunda clase de soluciones proviene de considerar

$$F(w) = G(w) - \text{Fr}^2, \quad (5.20)$$

donde $G(w)$ es una función independiente de Fr . La elección (5.20), como se mencionó en la sección 4.8.4, corresponde a la estudiada originalmente por Sautreaux en [19, 20]. La particularidad de este tipo de soluciones es que permite obtener la solución explícita de algunas superficies libres, como se verá a continuación.

5.2.1. Aplicación 4

Consideremos la franja $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función

$$G(w) = \sqrt{w} \quad w \in \mathcal{I}, \quad (5.21)$$

y definamos $\delta = 16\text{Fr}^2$. Reemplazando (5.21) en (4.30) y tomando $w_0 = 1/\delta^2$, se obtiene:

$$z_{\pm}(w) = \frac{1}{2}\sqrt{w} \pm \frac{i}{3\delta} (\delta\sqrt{w} - 1)^{3/2}. \quad (5.22)$$

La relación (5.22) da origen a dos soluciones, que corresponden a flujos entre un muro y una superficie libre, similares a los presentados en la sección 5.1.2. Las principales diferencias con el ejemplo de la sección 5.1.2 son que los flujos estudiados en este caso presentan un punto de estancamiento en $w = 0$ y que no se puede estudiar el comportamiento del flujo cuando $\text{Fr} \rightarrow +\infty$.

5.2.1.1. Forma de las superficies libres

Notando que

$$G(w) = \Re(G(w)) \Leftrightarrow \psi = 0, \varphi \geq 0,$$

se obtiene que las superficies libres están dadas por:

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= \sqrt{\varphi} & \varphi &\geq 1/\delta^2 \\ y_{\pm}(\varphi) &= \pm \frac{1}{3\delta} (\delta\sqrt{\varphi} - 1)^{3/2} & \varphi &\geq 1/\delta^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se encuentra la siguiente fórmula explícita para la superficie libre:

$$y_{\pm}(x) = \pm \frac{1}{3\delta} (\delta x - 1)^{3/2} \quad x \geq \frac{1}{\delta}. \quad (5.23)$$

La fórmula (5.23) fue encontrada primero por Vitousek [34] y, posteriormente, por Vandenberg [32] en forma de serie de potencias.

5.2.2. Aplicación 5

Consideremos la franja $\mathcal{I} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ y la función

$$G(w) = w^{2/3} \quad w \in \mathcal{I}. \quad (5.24)$$

Reemplazando (5.24) en (4.30) y tomando $w_0 = 0$, se obtiene:

$$z_{\pm}(w) = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{3i}{2} \sqrt{\text{Fr}^2 - \frac{4}{9}} \right) w^{2/3}. \quad (5.25)$$

La relación (5.25) da origen a dos soluciones, que corresponden a flujos entre un muro recto y una superficie libre recta formando un ángulo fijo de $2\pi/3$.

5.2.2.1. Forma de las superficies libres

Notando que

$$G(w) = \Re(G(w)) \Leftrightarrow \psi = 0, \varphi \geq 0,$$

se obtiene que las superficies libres están dadas por:

(i) Si $\text{Fr} \geq 2/3$

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= \varphi^{2/3} & \varphi \geq 0, \\ y_{\pm}(\varphi) &= \pm \frac{3}{2} \sqrt{\text{Fr}^3 - \frac{4}{9}} \varphi^{2/3} & \varphi \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) Si $\text{Fr} < 2/3$

$$\begin{aligned} x_{\pm}(\varphi) &= \left(\frac{1}{2} \mp \frac{3}{2} \sqrt{\text{Fr}^2 - \frac{4}{9}} \right) \varphi^{2/3} & \varphi \geq 0, \\ y_{\pm}(\varphi) &= 0 & \varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Parte II

Variaciones con respecto al dominio

Capítulo 6

Definiciones y resultados básicos

En este capítulo se entregan las definiciones y resultados básicos necesarios para ocupar la técnica de variaciones con respecto al dominio.

6.1. Espacios de funciones

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto acotado, denotaremos por $\omega \subset\subset \Omega$ la inclusión estricta de ω en Ω , es decir, $\bar{\omega} \subset \Omega$. Además, si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, denotaremos

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}.$$

6.1.1. Espacios de funciones continuas

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 . Se define

1. Para $k \geq 0$ entero, el espacio $C^k(\Omega)$ de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que son k veces continuamente diferenciables. Además,

$$C^k(\bar{\Omega}) = \{f|_\Omega: f \in C^k(\mathbb{R}^2)\}.$$

2. El espacio $C^\infty(\Omega)$ de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que pertenecen a $C^k(\Omega)$ para todo $k \geq 0$ entero. Además,

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{f|_\Omega: f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}.$$

3. El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, que pertenecen a $C^\infty(\Omega)$ y tienen soporte compacto contenido en Ω . Además,

$$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{f|_\Omega: f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\}.$$

Se tiene la siguiente

Proposición 6.1 Para $0 \leq k \leq +\infty$, el espacio $C^k(\bar{\Omega})$ dotado de la norma

$$\|f\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|,$$

es un espacio de Banach.

6.1.2. Espacio de funciones Hölder continuas

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 y $\lambda \in (0, 1]$. Se define

1. El espacio el espacio $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$\sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\lambda} < +\infty.$$

2. Para $k \geq 0$ entero, el espacio $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ de las funciones $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, que son k veces diferenciables y, tales que, $D^\alpha f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ para todo $|\alpha| = k$.

3. Para $c > 0$ y $k \geq 0$ entero, el espacio $B_c^{k,\lambda}(\mathbb{R})$ de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que pertenecen a $C^{k,\lambda}(\mathbb{R})$ y, tales que

$$\sum_{0 \leq i \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |f^{(i)}(x)| < +\infty.$$

4. Para $c > 0$ y $k \geq 0$ entero, el espacio $B_c^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ de las funciones $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que pertenecen a $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$, tales que

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} e^{c|\mathbf{x}|} |D^\alpha(\mathbf{x})| < +\infty.$$

Se tiene la siguiente

Proposición 6.2 Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 y $\lambda \in (0, 1]$.

1. El espacio $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ dotado de la norma

$$\|f\|_{0,\lambda} = \|f\|_0 + [f]_\lambda,$$

donde,

$$[f]_\lambda = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\lambda},$$

es un espacio de Banach.

2. Para $k \geq 0$, el espacio $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ dotado de la norma

$$\|f\|_{0,\lambda} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_k + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_\lambda,$$

es un espacio de Banach.

3. El espacio $B_c^{k,\lambda}(\mathbb{R})$ dotado de la norma

$$\|f\|_{k,c,\lambda} = \sum_{0 \leq i \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{c|x|} |f^{(i)}(x)| + \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq y}} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x - y|^\lambda}$$

es un espacio de Banach.

6.1.3. Espacios de funciones integrables

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 . Se define

1. Para cada $r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r < \infty$, el espacio $L^r(\Omega)$ de las (clases de) funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles, tales que $|f|^r$ es integrable en Ω .
2. El espacio $L^\infty(\Omega)$ de las (clases de) funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles, que están esencialmente acotadas.
3. Para cada $r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \infty$ y cada $p \geq 1$ entero, el espacio $L^r(\Omega; \mathbb{R}^p)$ de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ tales que cada una de sus componentes f_1, \dots, f_p , pertenecen a $L^r(\Omega)$.

Proposición 6.3 *El espacio $L^r(\Omega; \mathbb{R}^p)$, dotado de la norma*

$$\|f\|_{L^r(\Omega; \mathbb{R}^p)} = \left(\int_{\Omega} |f|^r \right)^{1/r} \quad \text{si } r < \infty,$$

ó

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^p)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|f(x)| \quad \text{si } r = \infty,$$

es un espacio de Banach.

6.1.4. Espacios de Sobolev

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 . Consideremos $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de las funciones de clase $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto contenido en Ω , dotado de la estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo (véase [18] cap. 6) y su dual topológico $\mathcal{D}'(\Omega)$, llamado el espacio de las distribuciones. A continuación se define la derivada de una distribución. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se define $D^\alpha f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si f es localmente integrable en Ω , entonces f se puede identificar con una distribución a través de

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

y, por lo tanto, tiene sentido hablar de su derivada en el sentido de las distribuciones.

Definición 6.4 Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}$ con $1 \leq r \leq \infty$ se define el espacio de Sobolev

$$W^{k,r}(\Omega) = \{f \in L^r(\Omega) : D^\alpha f \in L^r(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\},$$

donde $D^\alpha f$ es la derivada en el sentido de las distribuciones.

Cuando $k = 0$, se tiene que $W^{0,r}(\Omega) = L^r(\Omega)$ y cuando $r = 2$, se denotará $W^{k,2}(\Omega) \equiv H^k(\Omega)$ para todo entero $k \geq 0$.

Para cada $r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \infty$ y cada $p \geq 1$ entero, $W^{k,r}(\Omega; \mathbb{R}^p)$ es el espacio vectorial de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ tales que cada una de sus componentes f_1, \dots, f_p , pertenece a $W^{k,r}(\Omega)$. Se tiene la siguiente

Proposición 6.5 Si $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana en \mathbb{R}^p , el espacio $W^{k,r}(\Omega; \mathbb{R}^p)$, dotado de la norma

$$\|f\|_{W^{k,r}(\Omega; \mathbb{R}^p)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^r dx \right)^{1/r} & \text{si } r < \infty, \\ \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha f(x)| & \text{si } r = \infty. \end{cases}$$

es un espacio de Banach.

6.1.5. Espacios de funciones lipschitzianas

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 . A continuación se define el concepto de función lipschitziana.

Definición 6.6 Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^p$.

1. Diremos que $f \in \text{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^p)$ si f es acotada y globalmente Lipschitz, i.e.,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq c_0 && \text{para todo } x \in \Omega, \\ |f(x) - f(y)| &\leq L|x - y| && \text{para todo } x, y \in \Omega. \end{aligned}$$

donde c_0 y L son constantes y $|\cdot|$ denota indistintamente las normas Euclidianas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^p .

2. Diremos que $f \in \text{Lip}^k(\Omega; \mathbb{R}^p)$, $k \geq 1$ entero, si f es acotada y $D^\alpha f$ es globalmente Lipschitz para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq k - 1$.

3. Diremos que $f \in C_{ub}^k(\Omega)$, $k \geq 0$ entero, si para todo α , $0 \leq |\alpha| \leq k$, existe un representante de la clase $D^\alpha f$ que es una función uniformemente continua y acotada en todo Ω .

Se tiene la siguiente

Proposición 6.7 Para cada $k \geq 1$ entero, el conjunto $\text{Lip}^k(\Omega; \mathbb{R}^p)$, con las operaciones de suma de funciones y producto por un escalar dotado de la norma

$$\|f\|_k = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty,$$

es un espacio de Banach.

6.2. Dominios de frontera regular

Definición 6.8 Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 . Supongamos que existen números $\alpha > 0$, $\beta > 0$, unos sistemas ortonormales de coordenadas (x_r, y_r) , $r = 1, 2, \dots, M$, y unas funciones a_r , definidas en los intervalos cerrados $\bar{\Delta}_r$, donde

$$\Delta_r = \{x_r \in \mathbb{R}, |x_r| < \alpha\},$$

de forma que cada punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ se puede representar al menos en uno de estos sistemas bajo la forma $\mathbf{x} = (x_r, a_r(x_r))$, de modo que

$$\begin{aligned} \{(x_r, y_r): x_r \in \bar{\Delta}_r, a_r(x_r) < y_r < a_r(x_r) + \beta\} &\subset \Omega, \\ \{(x_r, y_r): x_r \in \bar{\Delta}_r, a_r(x_r) - \beta < y_r < a_r(x_r)\} &\subset \mathbb{R}^d - \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

para todo $r = 1, 2, \dots, M$.

1. Se dirá que la frontera de Ω , $\partial\Omega$, es continua si las funciones a_r son continuas.
2. Se dirá que Ω es de clase C^k si las funciones a_r y sus derivadas hasta el orden k son continuas en $\bar{\Delta}_r$, para todo $r = 1, 2, \dots, M$.
3. Se dirá que Ω es de clase Lip^k si las funciones $a_r \in Lip^k(\Delta_r)$, para todo $r = 1, 2, \dots, M$. cuando $k = 1$, se dirá que Ω es localmente grafo-lipschitziano.

Definición 6.9 Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 y $k \geq 1$. Se dirá que $\bar{\Omega}$ es una subvariedad 2-dimensional de clase Lip^k si para cada $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, existe un entorno \mathcal{U} de \mathbf{x} , un entorno \mathcal{V} del origen en \mathbb{R}^2 y un difeomorfismo F de clase $Lip^k(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ tales que $F(0) = \mathbf{x}$ y $F(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^2) = \mathcal{U} \cap \Omega$. Donde $\mathbb{R}_+^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$.

Proposición 6.10 Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^2 y $k \geq 2$. Entonces, Ω es de clase Lip^k si y sólo si $\bar{\Omega}$ es una subvariedad 2-dimensional de clase Lip^k .

DEMOSTRACIÓN. (i) Supongamos que Ω es de clase Lip^k .

Sea $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, entonces, existen $\alpha, \beta > 0$, un sistema de coordenadas (x_r, y_r) y una función a_r , definida en el intervalo cerrado $\bar{\Delta}_r = \{x_r \in \mathbb{R}, |x_r| < \alpha\}$, satisfaciendo las condiciones de la definición 6.8.

Consideremos

$$F(x, y) = (x, y + a_r(x)),$$

definida en $\mathcal{V} = (-\alpha, \alpha) \times (-\beta, \beta)$ en $\mathcal{U} = F(\mathcal{V})$. Se tiene que F es invertible, de clase $Lip^k(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ y su inversa viene dada por

$$F^{-1}(x, y) = (x, y - a_r(x)).$$

Por lo tanto, F es un difeomorfismo de clase $Lip^k(\mathcal{V}; \mathcal{U})$ satisfaciendo las condiciones de la definición 6.9.

(ii) Supongamos que $\bar{\Omega}$ es una subvariedad 2-dimensional de clase Lip^k .

Sea $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, entonces, existen un entorno \mathcal{U} de \mathbf{x} , un entorno \mathcal{V} del origen en \mathbb{R}^2 y un

difeomorfismo F de clase $\text{Lip}^k(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ tales que $F(0) = \mathbf{x}$ y $F(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^2) = \mathcal{U} \cap \Omega$. De esto se desprende que

$$\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \{(x, y) \in \partial\Omega \cap \mathcal{U} : F_2^{-1}(x, y) = 0\},$$

donde F_2^{-1} es la segunda componente de F^{-1} . Construimos la función a_r aplicando el teorema de la función implícita para resolver la ecuación

$$F_2^{-1}(x, y) = 0,$$

con respecto a x o y para la cual la derivada parcial de F_2^{-1} no se anula (localmente), de donde se obtiene el resultado. □

6.3. Variaciones del dominio

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado y $u \in \mathbb{R}^2$ es un vector, podemos perturbar el dominio Ω en la dirección u . Así, se define el abierto

$$\Omega + u = (I + u)(\Omega) = \{\mathbf{x} + u(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Se tiene la siguiente

Proposición 6.11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado.*

1. Si Ω es de clase Lip^1 y $u \in C_{ub}^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, entonces existe $C_1 = C_1(\Omega)$ tal que si $\|u\| < C_1(\Omega)$, entonces $\Omega + u$ es de clase Lip^1 .
2. Si Ω es de clase Lip^k con $k \geq 2$ y $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, entonces existe $C_k = C_k(\Omega)$ tal que si $\|u\| < C_k(\Omega)$, entonces $\Omega + u$ es de clase Lip^k .

DEMOSTRACIÓN. Véase [10] Lema 1.2.1.3 pp. 7. □

6.3.1. Elementos de cálculo diferencial

En lo que sigue $[a_{ij}]$ denota la matriz cuadrada de orden 2 cuyas componentes son a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$. En particular, $[Id] = [\delta_{ij}]$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, denota la matriz identidad.

Proposición 6.12 *Sea $k \geq 1$. La aplicación $u \rightarrow \text{Jac}(I + u) = |\det[\partial_j(I + u)_i]|$, definida de $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $\text{Lip}^{k-1}(\mathbb{R}^2)$ si $k > 1$ y de $\text{Lip}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $k = 1$, es derivable en 0. Su derivada en la dirección u es $\text{div}u$.*

DEMOSTRACIÓN. Véase [25], Lema 2.2. □

Proposición 6.13 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de clase Lip^1 , $u \in Lip^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, con $\|u\|_1 < 1/2$, y $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces,

(i) $f \in L^p(\Omega + u)$ si y solamente si $f \circ (I + u) \in L^p(\Omega)$, y:

$$\int_{\Omega+u} f \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \circ (I + u) \, Jac(I + u) \, d\mathbf{x}, \quad (6.1)$$

(ii) $f \in W^{1,p}(\Omega + u)$ si y solamente si $f \circ (I + u) \in W^{1,p}(\Omega)$ y:

$$(\text{grad } f) \circ (I + u) = {}^t[\partial_j(I + u)_i]^{-1} \text{grad}(f \circ (I + u)). \quad (6.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Véase [16], Lema 4.1. □

Proposición 6.14 Sea $k \geq 1$. La aplicación $u \rightarrow {}^t[\partial_j(I + u)_i]^{-1}$ definida de un entorno de 0 en $Lip^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con valores en $Lip^{k-1}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^{2 \times 2})$ (resp. $L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^{2 \times 2})$) si $k > 1$ (resp. $k = 1$), es continuamente derivable en 0. Su derivada en la dirección u es $-{}^t[\partial_j u_i]$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [25], Lema 2.4 y [16], p. IV.8. □

6.3.2. Elementos de cálculo tangencial

Definición 6.15 (Jacobiano tangencial) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado de clase Lip^1 y $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con $\|u\|_1$ suficientemente pequeña. Se define el Jacobiano tangencial de $I + u$ a la función definida por:

$$Jac_{\partial\Omega}(I + u) = |{}^t[\partial_j(I + u)_i]^{-1} \cdot \mathbf{n}| \, Jac(I + u) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Se tiene que $Jac_{\partial\Omega}(I + u) \in L^\infty(\partial\Omega)$.

La siguiente proposición corresponde al cambio de variables en una integral de superficie.

Proposición 6.16 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase Lip^1 , $u \in C_{ub}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, de norma suficientemente pequeña, y $f \in L^1(\partial(\Omega + u))$, entonces $f \circ (I + u) \in L^1(\partial\Omega)$ y además

$$\int_{\partial(\Omega+u)} f \, dS = \int_{\partial\Omega} f \circ (I + u) \, Jac_{\partial\Omega}(I + u) \, dS,$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior a $\partial\Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Véase [16], Lema 4.6. □

Definición 6.17 (Gradiente tangencial) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase C^2 y sea $v \in C^1(\partial\Omega)$. Si $\tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una prolongación de v a todo \mathbb{R}^2 , se define el gradiente tangencial de v como

$$\text{grad}_{\partial\Omega} v = \text{grad } \tilde{v} - (\text{grad } \tilde{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Esta definición no depende de la prolongación \tilde{v} y se extiende por continuidad a todo $v \in W^{1,1}(\partial\Omega)$. Más precisamente, tiene sentido hablar de $\text{grad}_{\partial\Omega}v$ en $L^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ para cada $v \in W^{1,1}(\partial\Omega)$ y, además, la aplicación $v \rightarrow \text{grad}_{\partial\Omega}v$, definida de $W^{1,1}(\partial\Omega)$ en $L^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$, es lineal y continua.

DEMOSTRACIÓN. Sean \tilde{v}_1 y \tilde{v}_2 dos prolongaciones de v a todo \mathbb{R}^2 , entonces, $\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$ y, por lo tanto,

$$\text{grad}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) = (\text{grad}(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

□

Definición 6.18 (Divergencia tangencial) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto de clase Lip^1 y sea $v \in W^{1,\infty}(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$. Sea $\tilde{v} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ una prolongación de v a todo \mathbb{R}^2 . Se define la divergencia tangencial de v a la función $\text{div}_{\partial\Omega}v$, dada por:*

$$\text{div}_{\partial\Omega}v = \text{div} \tilde{v} - ({}^t[\partial_j \tilde{v}_i]) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

$\text{div}_{\partial\Omega}v$ está bien definida (i.e. no depende de la prolongación \tilde{v} elegida) y, además,

$$\text{div}_{\partial\Omega}v \in L^\infty(\partial\Omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que para todo $v \in W^{1,\infty}(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ existe una extensión $\tilde{v} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ (véase [8], p. 80). Consideremos \tilde{v} y \tilde{w} dos prolongaciones de v a todo \mathbb{R}^2 , entonces, para $i = 1, 2$,

$$\tilde{v}_i - \tilde{w}_i = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

y, por lo tanto, para $i = 1, 2$,

$$\text{grad}(\tilde{v}_i - \tilde{w}_i) = (\text{grad}(\tilde{v}_i - \tilde{w}_i) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

De donde

$$\text{div} \tilde{v} - ({}^t[\partial_j \tilde{v}_i]) \cdot \mathbf{n} = \text{div} \tilde{w} - ({}^t[\partial_j \tilde{w}_i]) \cdot \mathbf{n}$$

□

Proposición 6.19 (Diferenciación del Jacobiano tangencial) *Sea Ω un abierto acotado de clase Lip^k ($k \geq 1$). La aplicación $u \rightarrow \text{Jac}_{\partial\Omega}(I + u)$ está definida de un entorno de 0 en $C_{ub}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $W^{k-1,\infty}(\Omega)$, si $k > 1$ (resp. en $L^\infty(\partial\Omega)$ si $k = 1$), y es derivable en 0. Su derivada en la dirección u es $\text{div}_{\partial\Omega}u$.*

Definición 6.20 (Curvatura media) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase Lip^2 . Como Ω es de clase Lip^2 , se puede representar localmente en un intervalo Δ y en un sistema de ejes (x, y) por $y = \phi(x)$ donde $\phi \in W^{2,\infty}(\Delta)$. La curvatura media en $(x, \phi(x))$ se define como*

$$H(x, \phi(x)) = \frac{\phi''(x)}{(1 + \phi'(x)^2)^{3/2}}.$$

Se tiene, por tanto, que $H \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Proposición 6.21 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase Lip^2 , $f \in W^{2,1}(\Omega) \cap C(\Omega)$, $u \in Lip^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ y $\Gamma \subset \partial\Omega$. Entonces

$$\int_{\Gamma} (u \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} f + f \text{div}_{\partial\Omega} u) dS = (u \cdot \vec{t}) f|_{\partial\Gamma} + \int_{\Gamma} u_n H f dS, \quad (6.3)$$

donde H es la curvatura media de $\partial\Omega$, y \vec{t} es el vector tangente a $\partial\Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \Gamma$, dado que Ω es de clase Lip^2 , existen $\alpha, \beta > 0$, un sistema de coordenadas y una función a_r de clase Lip^2 definida sobre el intervalo $\bar{\Delta}_r = \{x: |x| < \alpha\}$ y una vecindad \mathcal{V} de x_0 tal que

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{V} = \{(x, a_r(x)): |x| < \alpha\}.$$

Usando particiones de la unidad basta demostrar la proposición para $\tilde{\Gamma}$.

Sea $f_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $f_n \rightarrow \tilde{f}$ en $W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$ y denotemos por \tilde{f}_n, \tilde{f} sus extensiones a \mathbb{R}^2 . Entonces,

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{(1, a'_r(x))}{\sqrt{1 + a'_r(x)^2}}, \\ \vec{n} &= \frac{(-a'_r(x), 1)}{\sqrt{1 + a'_r(x)^2}}, \\ dS &= \sqrt{1 + a'_r(x)^2}, \\ \frac{d\vec{t}}{dx} &= \frac{a''_r}{\sqrt{1 + a'_r(x)^2}} \mathbf{n} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}} u \left(\nabla \tilde{f}_n \cdot \vec{t} \right) \cdot \vec{t} dS &= \int_{\tilde{\Gamma}} (u \cdot \vec{t}) \left(\nabla \tilde{f}_n \cdot \vec{t} \right) dS \\ &= \int_a^b (u \cdot \vec{t}) \left(\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial y} a'_r(x) \right) dx \\ &= \int_a^b (u \cdot \vec{t}) \frac{d}{dx} \tilde{f}_n(x, a_r(x)) dx \\ &= (u \cdot \vec{t}) \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \Big|_a^b - \int_a^b \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \frac{d}{dx} (u \cdot \vec{t}) dx \\ &= (u \cdot \vec{t}) \tilde{f}_n \Big|_{\partial\tilde{\Gamma}} - \int_a^b \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \left[\frac{du}{dx} \cdot \vec{t} + u \cdot \frac{d\vec{t}}{dx} \right] dx, \end{aligned} \quad (6.4)$$

desarrollando el último termino de (6.4),

$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \left[\frac{d}{dx} u(x, a_r(x)) \cdot \vec{t} + u \cdot \frac{d\vec{t}}{dx} \right] dx &= \\ \int_a^b \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \left[\frac{d}{dx} u(x, a_r(x)) \cdot \vec{n} \right] dx &+ \int_a^b \tilde{f}_n(x, a_r(x)) \frac{a''_r(x)}{\sqrt{1 + (a'_r(x))^2}} (u \cdot \vec{n}) dx, \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{f}_n (u \cdot \vec{n}) H dS + \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{f}_n \vec{t}^t [\partial_i u_j] \vec{t} dS. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por lo tanto, de (6.4) y (6.5), se obtiene

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \left(u \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} \tilde{f}_n + \tilde{f}_n \text{div}_{\partial\Omega} u \right) dS = (u \cdot \tilde{t}) \tilde{f}_n \Big|_{\partial\Gamma} + \int_{\Gamma} u_n H \tilde{f}_n dS,$$

Pasando al límite, se obtiene (6.3). \square

Proposición 6.22 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase Lip^2 . Entonces, si $f \in W^{2,1}(\Omega)$ y $u \in Lip^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ se tiene la siguiente fórmula de integración por partes*

$$\int_{\partial\Omega} (u \cdot \text{grad} f + f \text{div}_{\partial\Omega} u) dS = \int_{\partial\Omega} (u \cdot \mathbf{n}) \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + Hf \right) dS,$$

donde \mathbf{n} es la normal exterior a $\partial\Omega$ y H es la curvatura media de $\partial\Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar una sucesión $f_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $W^{2,1}(\Omega)$ y usar la proposición 6.21. \square

6.4. El problema de Neumann

En esta sección se entregan algunos resultados acerca del problema de Neumann concerniente al problema con superficie libre. En particular, se entregan resultados de existencia de soluciones y la regularidad de éstas.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado de clase Lip^1 y $g \in L^1(\partial\Omega)$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} g dS = 0. \quad (6.6)$$

Consideremos el problema de Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.7)$$

Nos interesa saber bajo que condiciones, sobre Ω y g , existe una única solución del problema (6.7) y cual es su regularidad. Notemos que si u_1 y u_2 son dos soluciones suaves de (6.7), entonces, u_1 y u_2 difieren en una constante. En efecto, la función $v = u_1 - u_2$ satisface (6.7) con $g = 0$, luego, multiplicando la ecuación en Ω por v e integrando por partes, se obtiene que $|\text{grad} v|^2 = 0$, de donde $v = \text{Cte}$ y, por lo tanto, $u_1 - u_2 = \text{Cte}$. Es decir, el espacio de las soluciones del problema (6.7) tiene dimensión 1. Para evitar esta falta de unicidad agregaremos la siguiente condición:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (6.8)$$

Por lo tanto, estaremos interesados en el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Se tiene la siguiente

Proposición 6.23 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado de clase Lip^1 y $g \in L^1(\partial\Omega)$ una función satisfaciendo la condición de compatibilidad 6.6.*

1. Si

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\},$$

y $g \in L^2(\partial\Omega)$, entonces, existe una única función u solución del problema

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} g v \, dS \quad \forall v \in V, \\ u \in V. \end{cases} \quad (6.10)$$

La función u es de clase $C^\infty(\Omega)$ y satisface $\Delta u = 0$. Si u satisface (6.10), diremos que u es una solución débil del problema (6.9).

2. Si $p \in (1, +\infty)$, Ω de clase Lip^2 y $g \in W^{1-1/p, p}(\partial\Omega)$, entonces, existe una única función $u \in W^{2, p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ solución del problema (6.9). Además, si Ω es de clase Lip^{k+2} , con $k \geq 0$ entero, y $g \in W^{k+1-1/p, p}(\partial\Omega)$, entonces, $u \in W^{k+2, p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.
3. Si Ω es de clase $C^{2, \alpha}$, con $\alpha \in (0, 1)$, y $g \in C^{1, \alpha}(\partial\Omega)$, entonces, existe un única función $u \in C^{2, \alpha}(\Omega)$ solución del problema (6.9).

DEMOSTRACIÓN. 1. V es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y la aplicación

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

es una forma bilineal continua y coercitiva sobre V . La aplicación $u \rightarrow \int_{\partial\Omega} g u \, dS$ define una aplicación lineal continua sobre V . Luego, por el Teorema de Lax-Milgram, existe una única función $u \in V$ solución del problema (6.10). Además, integrando por partes, se obtiene que

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Luego, por el Lema de Weyl (Corolario 1.2.1 de [14]), se tiene $\Delta u = 0$ y, por lo tanto, $u \in C^\infty(\Omega)$.

2. Véase la Sección 2.5 de [10].
3. Véase el Teorema 6.3.1 de [9].

□

Capítulo 7

Flujo sobre un obstáculo

7.1. Posición del problema

Consideremos el flujo bidimensional, irrotacional y estacionario de un fluido ideal e incompresible en un canal infinito \mathcal{V} aguas abajo y aguas arriba, con una superficie libre en la frontera superior S y un obstáculo en el fondo F . Supondremos que el flujo es uniforme, con una velocidad V_0 y una altura H en el infinito aguas abajo y aguas arriba del obstáculo (Fig. 7.1).

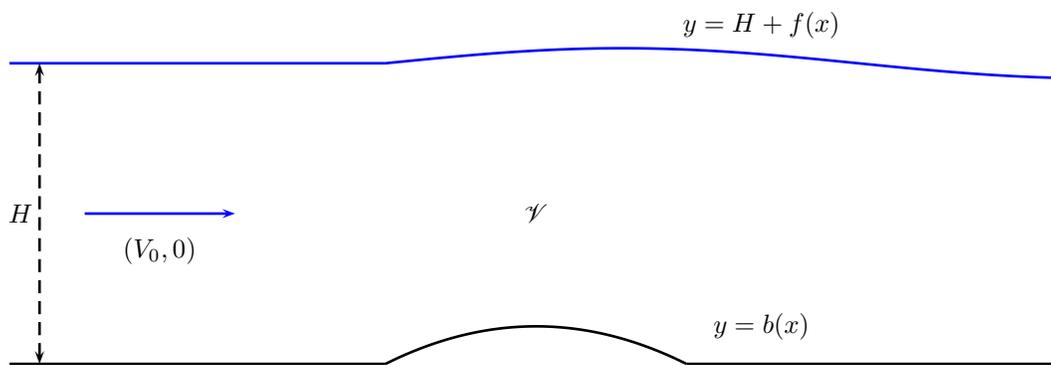


Figura 7.1: El dominio del flujo.

Supondremos que las ecuaciones del fondo F y la superficie libre son, respectivamente, $y = b(x)$ e $y = H + f(x)$, donde b y f son funciones suaves, en un sentido que se debe precisar. Por lo tanto, el dominio del flujo \mathcal{V} está dado por

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : b(x) < y < H + f(x)\}.$$

El fondo es plano en todos los lados excepto en donde yace el obstáculo, luego, si $\ell_0 > 0$, supondremos que la función b satisface

$$\text{sop}(b) \subset (-\ell_0, \ell_0) \quad b(x) \in [0, a] \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

donde $0 < a < H$.

En lo que sigue asumiremos que la fuerza externa ejercida sobre el fluido es la gravitacional actuando en contra del eje y , i.e., $\Omega(\mathbf{x}) = -gy$, donde g es la aceleración de gravedad. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \mathcal{V}, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } F \cup S, \\ \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + gy = \frac{1}{2} V_0^2 + gH & \text{sobre } S. \end{array} \right. \quad (7.2)$$

Condiciones en el infinito. Supondremos que el flujo es asintóticamente uniforme y horizontal lejos del obstáculo aguas arriba y aguas abajo, i.e.,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\varphi(x, y) - V_0 x) = 0 \quad y \in (0, H).$$

Sean

$$\begin{aligned} \text{Fr} &= \frac{V_0}{\sqrt{gH}} \\ \tilde{b}(x) &= \frac{b(Hx)}{H}, \\ \tilde{f}(x) &= \frac{f(Hx)}{H}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{b}(x) < y < 1 + \tilde{f}(x)\}, \\ \tilde{S} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 + \tilde{f}(x), -\infty < x < +\infty\}, \\ \tilde{F} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tilde{b}(x), -\infty < x < +\infty\}. \end{aligned}$$

Usando (7.3) y la adimensionalización (2.17), el problema (7.2) se escribe equivalentemente como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \tilde{\mathcal{V}}, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \tilde{S} \cup \tilde{F}, \\ \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \text{Fr}^{-2}y = \frac{1}{2} + \text{Fr}^{-2} & \text{sobre } \tilde{S}, \end{array} \right. \quad (7.4)$$

y la condición en el infinito queda

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\varphi(x, y) - x) = 0, \quad y \in (0, 1). \quad (7.5)$$

La presión en el fluido se puede calcular a partir de la ecuación siguiente:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} + \text{Fr}^{-2} - \left(\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + \text{Fr}^{-2}y \right) \quad (7.6)$$

7.1.1. Formulación usando la función de corriente

Usando la función de corriente, el problema (7.4) se puede reescribir equivalentemente como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi = 0 & \text{en } \tilde{\mathcal{V}}, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \tilde{F}, \\ \psi = 1 & \text{sobre } \tilde{S}, \\ \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \text{Fr}^{-2}y = \frac{1}{2} + \text{Fr}^{-2} & \text{sobre } \tilde{S}, \end{array} \right. \quad (7.7)$$

y la condición (7.5) equivale a:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\psi(x, y) - y) = 0, \quad y \in (0, 1). \quad (7.8)$$

7.2. Existencia de soluciones

En esta sección se entrega un resultado de existencia de soluciones para el problema (7.4)-(7.5). Primero se desarrolla el caso particular en que no hay obstáculo y, posteriormente, se desarrolla el caso general.

7.2.1. Un caso particular

En el caso en que el fondo F es plano, i.e. no hay obstáculo, se tiene la siguiente

Proposición 7.1 *Si $\tilde{b} \equiv 0$, entonces las soluciones del problema (7.4)-(7.5) son*

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= 0, \\ \varphi &= x + \text{Cte}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde Cte es una constante.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función $\varphi_p = \varphi - x$, entonces, φ_p satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi_p = 0 & \text{en } \tilde{\mathcal{V}}, \\ \frac{\partial\varphi_p}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \tilde{F} \cup \tilde{S}, \\ \frac{1}{2}|\nabla\varphi_p|^2 + \frac{\partial\varphi_p}{\partial x} + \text{Fr}^{-2}y = \text{Fr}^{-2} & \text{sobre } \tilde{S}. \end{array} \right.$$

La condición (7.5), en este caso, se escribe

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varphi_p(x, y) = 0. \quad (7.10)$$

Luego, por (7.10) y el lema de Hopf (véase [7] pp. 347-349 .), se obtiene que $\varphi_p = \text{Cte}$, esto es,

$$\varphi = x + \text{Cte.} \quad (7.11)$$

Además, sobre la superficie libre

$$\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \text{Fr}^{-2} y = \frac{1}{2} + \text{Fr}^{-2} \quad \text{sobre } \tilde{S}. \quad (7.12)$$

Reemplazando (7.11) en (7.12), se deduce que $y = 1$ y, por lo tanto, $\tilde{f} \equiv 0$. \square

7.2.2. El caso general

A continuación se entrega un resultado de existencia de soluciones cuando el fondo F no es plano, i.e. $\tilde{b} \neq 0$. Para demostrar la existencia de soluciones, usaremos el teorema de la función implícita, por lo que supondremos que el obstáculo es suave y suficientemente pequeño.

El Teorema 7.2 asegura la existencia de soluciones en espacios de funciones Hölder continuas en el caso en que el número de Froude sea mayor que 1 o menor que un cierto número $F_0 < 1$. Estos resultados se deben a Titri-Bouadjjenak et al. [27] para $\text{Fr} > 1$ y a Boukari et al. [4] para $0 < \text{Fr} < F_0$, con $F_0 < 1$. El caso $\text{Fr} \in [F_0, 1]$ todavía es una pregunta abierta.

Teorema 7.2 *Supongamos que $\lambda \in (0, 1)$ y denotemos por $\Omega_{\tilde{f}}^{\tilde{b}}$ el abierto:*

$$\Omega_{\tilde{f}}^{\tilde{b}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{b}(x) < y < 1 + \tilde{f}(x)\}.$$

Entonces, existe $F_0 \in (0, 1)$ y $\tilde{c} > 0$ tal que, para todo $0 < c < \tilde{c}$, existe una vecindad \mathcal{V}_c de cero en $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ de modo que para todo $\text{Fr} \in (0, F_0) \cup (1, \infty)$, si $\tilde{b} \in \mathcal{V}_c$, existe una única función $\tilde{f} \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ y una función $\varphi \in B_c^{2,\lambda}(\tilde{\Omega}_{\tilde{f}}^{\tilde{b}})$ de modo que el par (\tilde{f}, φ) es solución del problema (7.4)-(7.5). Además, existe una aplicación $g: \mathcal{V}_c \rightarrow B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ de clase C^1 tal que $\tilde{f} = g(\tilde{b})$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $\psi_p = \psi - y$, entonces ψ_p es solución del siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} \Delta \psi_p(x, y) &= 0 && \text{en } \tilde{\Omega}_{\tilde{f}}^{\tilde{b}}, \\ \psi_p(x, y) &= -\tilde{b}(x) && \text{sobre } y = \tilde{b}(x), \\ \psi_p(x, y) &= -\tilde{f}(x) && \text{sobre } y = 1 + \tilde{f}(x), \\ \frac{1}{2} \left(|\nabla \psi_p|^2 + 2 \frac{\partial \psi_p}{\partial y} + 1 \right) + \text{Fr}^{-2} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2} && \text{sobre } y = 1 + \tilde{f}(x). \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Ahora, transformamos el dominio $\Omega_{\tilde{f}}^{\tilde{b}}$ en la franja infinita

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\},$$

a través del siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} \hat{x} = x, \\ \hat{y} = \frac{y - \tilde{b}(x)}{1 + \tilde{f}(x) - \tilde{b}(x)}. \end{cases}$$

Definiendo $\psi_p(x, y) = \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y})$ el sistema (7.13) se convierte en

$$\left. \begin{aligned} \Delta \hat{\psi}_p + \mathcal{P}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}} \hat{\psi}_p &= 0 && \text{en } Q, \\ \hat{\psi}_p(\hat{x}, 0) &= -\tilde{b}(\hat{x}) && \text{sobre } \hat{x} \in \mathbb{R}, \\ \hat{\psi}_p(\hat{x}, 1) &= -\tilde{f}(\hat{x}) && \text{sobre } \hat{x} \in \mathbb{R}, \\ \frac{1}{2} \left(|\hat{\nabla}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}} \hat{\psi}_p|^2 + \frac{2}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}} \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \hat{y}} + 1 \right) + \text{Fr}^{-2} \tilde{f}(\hat{x}) &= 0 && \text{sobre } \hat{x} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|\hat{x}| \rightarrow +\infty} \hat{\psi}_p(\hat{x}, \hat{y}) &= 0 && \hat{y} \in (0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Donde, el operador gradiente $\hat{\nabla}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}}$ está dado por

$$\hat{\nabla}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}} = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \frac{-\tilde{b}' - \hat{y}(\tilde{f}' - \tilde{b}')}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}}, \frac{1}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right),$$

y el operador

$$\mathcal{P}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + a_3 \frac{\partial}{\partial \hat{y}},$$

donde,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \frac{\hat{y}(\tilde{b}' - \tilde{f}') - \tilde{b}'}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}}, \\ a_2 &= \left(\frac{a_1}{2} \right)^2 - 1 + \frac{1}{(1 + \tilde{f} - \tilde{b})^2}, \\ a_3 &= \frac{-1}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}} [\tilde{b}'' + \hat{y}(\tilde{f}'' - \tilde{b}'')] + \frac{1}{(1 + \tilde{f} - \tilde{b})^2} (\tilde{f}' - \tilde{b}') [\tilde{b}' + \hat{y}(\tilde{f}' - \tilde{b}')]. \end{aligned}$$

A continuación se define el operador $T: B_c^{2,\lambda} \times B_c^{2,\lambda} \rightarrow B_c^{1,\lambda}$ que a cada (\tilde{b}, \tilde{f}) le asocia $T(\tilde{b}, \tilde{f})$, definido por

$$T(\tilde{b}, \tilde{f}) = \frac{1}{2} \left(|\hat{\nabla}_{\tilde{b}}^{\tilde{f}} \hat{\psi}_p|^2 + \frac{2}{1 + \tilde{f} - \tilde{b}} \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \hat{y}} + 1 \right) + \text{Fr}^{-2} \tilde{f}(\hat{x}),$$

donde $\hat{\psi}_p$ es solución del problema (7.14). Por la Proposición 7.1, $T(0, 0) = 0$, luego para $b \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ vamos a aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación

$$T(\tilde{b}, \tilde{f}) = 0.$$

(i) Diferenciabilidad de T con respecto a \tilde{b} y \tilde{f} .

Lema *Existe una bola abierta B de radio r_0 centrada en el origen de $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R}) \times B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ tal que T es continuamente diferenciable en B .*

DEMOSTRACIÓN. véase la Sección 4.1 de [4]. \square

(ii) Invertibilidad de $\frac{\partial T}{\partial \tilde{f}}(0, 0)$

Sea $h \in B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$, poniendo $\tilde{b} = 0$ en $T(\tilde{b}, \tilde{f}) = 0$, derivando con respecto a \tilde{f} en la dirección h y evaluando la derivada en $\tilde{f} = 0$. Se obtiene

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{f}}(0, 0) \cdot h = h + Fr^2 \frac{\partial w_h}{\partial \hat{y}}(\cdot, 1),$$

donde

$$w_h = \left. \frac{\partial \hat{\psi}_p}{\partial \tilde{f}} \right|_{\tilde{b}=\tilde{f}=0} \cdot h,$$

y w_h satisface

$$\begin{aligned} \Delta w_h &= 0 && \text{en } Q, \\ w_h(\hat{x}, 0) &= 0 && \hat{x} \in \mathbb{R}, \\ w_h(\hat{x}, 1) &= -h(\hat{x}) && \hat{x} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Lema *Existe $F_0 < 1$ tal que si $Fr > 1$ ó $0 < Fr < F_0$, el operador $h \rightarrow h + Fr^2 \frac{\partial w_h}{\partial \hat{y}}(\cdot, 1)$ es un isomorfismo desde $B_c^{2,\lambda}(\mathbb{R})$ en $B_c^{1,\lambda}(\mathbb{R})$, w_h es la solución del sistema (7.15).*

DEMOSTRACIÓN. Para $Fr > 1$ véase el Teorema 1 de [27]. Para la existencia de Fr_0 y la invertibilidad para $Fr \in (0, F_0)$ véase la Sección 4.3 de [4]. \square

La conclusión sigue del teorema de la función Implícita. \square

7.3. Truncamiento del dominio

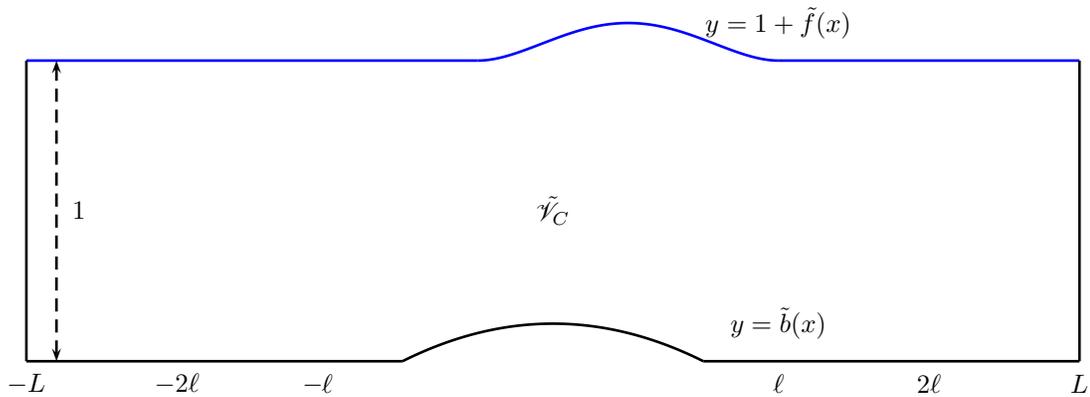
El problema (7.4)-(7.5), definido en el dominio no acotado $\tilde{\mathcal{V}}$, en general, es difícil de tratar usando las técnicas habituales de ecuaciones en derivadas parciales. Es por esto que típicamente se trunca el dominio $\tilde{\mathcal{V}}$ a uno acotado, que llamaremos $\tilde{\mathcal{V}}_T$, y se resuelve el problema truncado reemplazando adecuadamente la condición (7.5).

En lo que sigue supondremos que $\tilde{b}, \tilde{f} \in C^3$. Además, debido a la condición (7.5) y a (7.1), si $\ell > 0$, es suficientemente grande, sin pérdida de generalidad, se supondrá que

$$\begin{aligned} \text{sop}(\tilde{f}) &\subset (-2\ell, 2\ell), \\ \text{sop}(\tilde{b}) &\subset (-\ell, 2\ell). \end{aligned}$$

Así, para $L \gg 2\ell$, se define el abierto $\tilde{\mathcal{V}}_C$ (Fig. 7.2) como

$$\tilde{\mathcal{V}}_C = \{(x, y) : \tilde{b}(x) < y < 1 + \tilde{f}(x), x \in (-L, L)\}.$$


 Figura 7.2: Dominio $\tilde{\mathcal{V}}_C$.

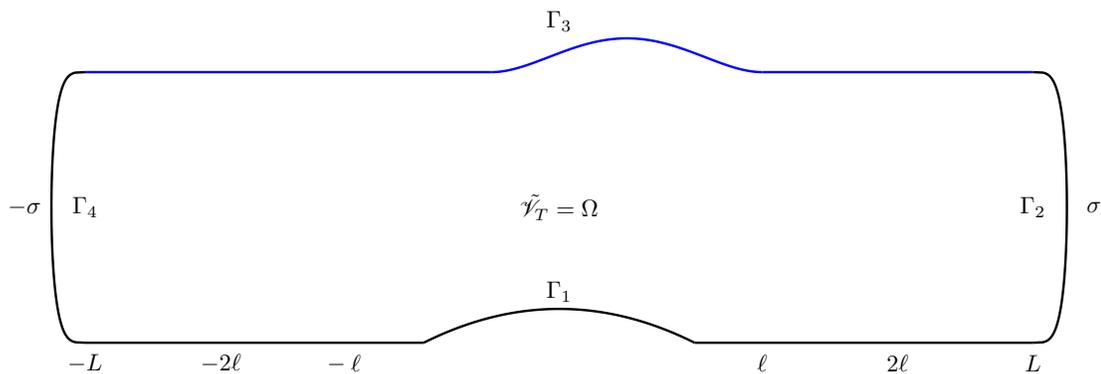
Se tiene que el dominio $\tilde{\mathcal{V}}_C$ es de clase Lip^1 . Además, consideremos una curva $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, suave y simple, tal que

$$\sigma(0) = (L, 0), \sigma(1) = (L, 1) \text{ y } \sigma([0, 1]) \subset [L, L + \frac{1}{2}] \times [0, 1].$$

Sea $\tilde{\mathcal{V}}_T$ el dominio cuya frontera está definida por $\partial\tilde{\mathcal{V}}_T = \gamma_1 \cup \sigma \cup \gamma_2 \cup -\sigma$, donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(x, \tilde{b}(x)) : x \in [-L, L]\}, \\ \gamma_2 &= \{(x, 1 + \tilde{f}(x)) : x \in [-L, L]\}. \end{aligned}$$

Para σ adecuado, el dominio $\tilde{\mathcal{V}}_T$ es de clase C^3 (Fig. 7.3). En particular, el dominio U , cuya


 Figura 7.3: Dominio truncado $\tilde{\mathcal{V}}_T = \Omega$.

frontera está definida por $U = \gamma_3 \cup \sigma \cup \gamma_4 \cup -\sigma$, donde,

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \{(x, 0) : x \in [-L, L]\}, \\ \gamma_4 &= \{(x, 1) : x \in [-L, L]\}, \end{aligned}$$

es de clase C^3 .

Con el objeto de simplificar la notación, de ahora en adelante, escribiremos

$$\Omega = \tilde{\mathcal{V}}_T \quad \begin{array}{ll} \Gamma_1 = \gamma_1, & \Gamma_3 = \gamma_2, \\ \Gamma_2 = \sigma, & \Gamma_4 = -\sigma. \end{array}$$

Una vez definido el dominio truncado Ω , debemos reemplazar la condición (7.5) por otra equivalente sobre las curvas $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$. Suponiendo

$$\varphi \approx x + \text{Cte para } |x| > L$$

la condición (7.5) se puede intercambiar por

$$\text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = \nu_1 \quad \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad (7.16)$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$ es la normal exterior unitaria al abierto U .

Así, a partir de (7.4) y (7.16), se define el problema con superficie libre en el dominio truncado

$$(\Phi) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi = 0 & \text{en } \Omega, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = \nu_1 & \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ \frac{1}{2} |\text{grad } \varphi|^2 + \text{Fr}^{-2} y = \frac{1}{2} + \text{Fr}^{-2} & \text{sobre } \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (7.17)$$

Es claro que en el problema (Φ) la superficie Γ_3 es desconocida y, por lo tanto, ésta debe ser encontrada como parte de la solución del problema. Luego, el problema con superficie libre se puede plantear como

$$\text{Encontrar una curva } \Gamma_3 \text{ y una función } \varphi \text{ que cumplan } (\Phi). \quad (7.18)$$

Si Γ_3 es una curva para la que existe una función φ de modo que (Γ_3, φ) sea solución de (7.18), diremos que el dominio generado por Γ_3 , $\Omega = \Omega(\Gamma_3)$, es un dominio óptimo.

7.4. Formulación de diseño óptimo

En la formulación (Φ) hay dos condiciones sobre la superficie Γ_3 . Éstas son: la *condición cinemática*

$$\text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_3, \quad (7.19)$$

y la *condición dinámica*

$$p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_3. \quad (7.20)$$

Usando la condición (7.20) el problema (7.18) se puede reformular en uno equivalente de diseño óptimo. En esta nueva formulación, la idea consiste en encontrar una curva Γ_3 que minimiza una norma del residuo de la condición dinámica sobre la frontera libre, sujeto a un problema de valores en la frontera.

Para obtener una formulación de diseño óptimo del problema con superficie libre, se define el funcional de costo

$$E(\Gamma_3, \varphi) = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} p^2 dS, \quad (7.21)$$

donde p es la presión sobre el fluido (7.6), y la restricción C como el siguiente problema de valores en la frontera

$$C(\Gamma_3, \varphi) = \begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \Omega, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = \nu_1 & \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases} \quad (7.22)$$

Por lo tanto, (7.18) es equivalente al siguiente problema de diseño óptimo:

$$\min_{\Gamma_3, \varphi} \{E(\Gamma_3, \varphi) : C(\Gamma_3, \varphi)\}, \quad (7.23)$$

i.e. minimizar el funcional $E(\Gamma_3, \varphi)$ sobre las superficies Γ_3 y las funciones φ , sujeto a que (Γ_3, φ) cumpla la restricción $C(\Gamma_3, \varphi)$. Como el problema (7.22) no necesariamente tiene una única solución el funcional de costo $E(\Gamma_3, \varphi)$ depende de la superficie libre Γ_3 y de φ . En el caso en que para cada Γ_3 exista una única solución φ de (7.22) usaremos la notación $E(\Gamma_3)$ y $C(\Gamma_3)$ en vez de $E(\Gamma_3, \varphi)$ y $C(\Gamma_3, \varphi)$, respectivamente.

Observación 7.3 Si Cte es una constante, entonces el funcional de costo (7.21) satisface

$$E(\Gamma_3, \varphi) = E(\Gamma_3, \varphi + Cte).$$

7.5. Extensión de la condición sobre la frontera

Sean c, d números tales que $a < c < H < d$. Consideremos el abierto U de clase C^3 , descrito en la Sección 7.3, y la función g definida por

$$g(\mathbf{x}) = \nu_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (7.24)$$

donde ν_1 es la primera componente de la normal exterior unitaria a U . Es inmediato verificar que

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \nu_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \end{cases}$$

Vamos a extender la función a todo \mathbb{R}^2 , de manera que su extensión sea nula en las vecindades de $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$. Para ello necesitamos el siguiente

Lema 7.4 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto acotado de clase C^3 , entonces existe una función $f \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tal que

$$f = \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Dado que Ω es clase C^3 , existen $\alpha, \beta > 0$, un sistemas de coordenadas $(x, a_r(x))$ y un intervalo cerrado $\bar{\Delta}_r = \{x : |x| < \alpha\}$ tales que a_r es de clase C^3 en $\bar{\Delta}_r$. Consideremos la aplicación

$$\delta : (x, \tau) \in (-\alpha, \alpha) \times (-\beta, \beta) \rightarrow (x, a_r(x)) + \tau \mathbf{n}(x, a_r(x)).$$

A partir de esto se define la función dist , llamada “distancia con signo a $\partial\Omega$ ”, a través de la fórmula

$$\text{dist}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ y - a_r(x) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}(x, a_r(x)) \quad \text{para todo } \mathbf{x} = (x, y) \text{ en una vecindad } \mathcal{V} \text{ de } \mathbf{x}_0.$$

De aquí se deduce que

$$\mathbf{x} = \delta(x, \text{dist}(\mathbf{x})) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (7.25)$$

Se tiene que dist es de clase $C^2(\mathcal{V})$. Probemos además que

$$\text{dist es de clase } C^3(\mathcal{V}) \text{ y que } |\nabla \text{dist}| = 1 \text{ en } \mathcal{V}. \quad (7.26)$$

En efecto, derivando implícitamente (7.25), se obtiene:

$$\nabla \text{dist}(\mathbf{x}) = \frac{(-a'_r(x), 1)^t}{\sqrt{1 + a'_r(x)^2}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{V}.$$

De donde se deduce (7.26) y que $\nabla \text{dist} = \mathbf{n}$ en $\bar{\Delta}_r$. Usando particiones de la unidad, podemos suponer que existe un entorno \mathcal{W} de $\partial\Omega$ tal que

$$\text{dist} \in C^3(\mathcal{W}), \quad |\nabla \text{dist}| = 1.$$

Consideremos tres abiertos $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$, verificando

$$\partial\Omega \subset\subset \mathcal{W}_3 \subset\subset \mathcal{W}_2 \subset\subset \mathcal{W}_1 \subset\subset \mathcal{W}$$

y sea $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\alpha \equiv 1 \text{ en } \mathcal{W}_1 \text{ y } \alpha = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}_2.$$

Entonces, se define

$$f = \begin{cases} \alpha \nabla \text{dist} & \text{en } \mathcal{W}_1 \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}_1. \end{cases}$$

□

A partir del lema anterior se puede construir la prolongación buscada.

Proposición 7.5 *Existe una prolongación $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de g , tal que*

$$\text{sop}(g) \subset\subset (-L - 1, L + 1) \times (-1, d/H) \setminus [-2\ell, 2\ell] \times [-1, d/H]. \quad (7.27)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que U es de clase C^3 , por el Lema 7.4 existe una función $f = (f_1, f_2)^t \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tal que

$$f = \nu \quad \text{sobre } \partial U.$$

Sean \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 dos abiertos tales que

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}_2 \subset\subset (-L - 1, L + 1) \times (-1, d/H) \setminus [-2\ell, 2\ell] \times [-1, d/H].$$

y consideremos una función $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} h &= 1 && \text{en } \mathcal{V}_1, \\ h &= 0 && \text{en } \mathcal{V}_2^c. \end{aligned}$$

Si se define $\tilde{g} = h \cdot f_1$, entonces, $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ es una extensión de g a todo \mathbb{R}^2 y satisface (7.27). \square

Corolario 7.6 *Para cada $u \in Lip^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, $\tilde{g} \in W^{2-1/p}(\partial\Omega + u)$.*

Capítulo 8

Diferenciación respecto del dominio

En este capítulo se aplicará la técnica de variaciones con respecto al dominio. Para esto, se usarán como referencia los trabajos de J. Simon [22, 23, 24, 25].

De acuerdo con la Sección 7.4 el problema con superficie libre equivale a encontrar un par (Γ_3^*, φ^*) solución del problema

$$\min_{\Gamma_3, \varphi} \{E(\Gamma_3, \varphi) : C(\Gamma_3, \varphi)\}, \quad (8.1)$$

sobre todas las superficies Γ_3 “admisibles” y funciones φ satisfaciendo $C(\Gamma_3, \varphi)$. En lo que sigue, se supondrá que para cada curva Γ_3 existe una única función φ satisfaciendo la restricción $C(\Gamma_3, \varphi)$ y, por lo tanto, se puede denotar $E(\Gamma_3) = E(\Gamma_3)$ y $C(\Gamma_3) = C(\Gamma_3, \varphi)$.

La dificultad al tratar con el problema (8.1) es que el conjunto de las superficies “admisibles” no posee estructura de espacio vectorial y, por lo tanto, no se puede utilizar el esquema clásico de optimización diferenciable. Para superar este inconveniente se puede considerar un dominio inicial Ω de clase Lip^k , con $k \geq 1$, una función $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ($C_{ub}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$), con $k \geq 2$ ($k = 1$), y perturbar el abierto Ω en la dirección u , a través del homeomorfismo $(I + u)$, i.e.,

$$\Omega + u = (I + u)(\Omega) = \{\mathbf{x} + u(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

Para $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_k$ es suficientemente pequeña, en virtud a la Proposición 6.11, el conjunto $\Omega + u$ es un abierto de clase Lip^k . Denotemos por $\Gamma_3 + u = (I + u)(\Gamma_3)$, nos gustaría definir la aplicación

$$u \rightarrow E(\Gamma_3 + u), \quad (8.2)$$

desde un entorno de 0 en $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} y, bajo ciertas condiciones, probar que es Fréchet diferenciable.

El presente capítulo se centra en justificar que la aplicación (8.2) está bien definida, demostrar que es Fréchet diferenciable y calcular su derivada. Para ello, se definirá la noción de “derivada con respecto al dominio”, se verá bajo qué condiciones la “derivada existe” y, además, que la derivada de Fréchet de la aplicación (8.2) depende a su vez de un problema de contorno involucrando a la función φ , solución de $C(\Gamma_3)$.

8.1. Definición de derivada local

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 . Para todo $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, de norma suficientemente pequeña, $\Omega + u$ es un abierto de \mathbb{R}^2 . Consideremos una aplicación $u \rightarrow z(u)$ verificando lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{Para cada } u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ tal que } \|u\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(u) \in W^{m,r}(\Omega + u), \text{ con } k \geq m \geq 1 \text{ y } 1 \leq r < \infty. \end{cases} \quad (8.3)$$

Dado $\omega \subset\subset \Omega$, se puede tomar $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ de norma suficientemente pequeña para que $\omega \subset\subset \Omega + u$. Entonces $z(u)$ está definida en ω y tiene sentido hablar de la diferenciabilidad en el origen de la función $u \rightarrow z(u)|_\omega$.

Definición 8.1 (Derivada local) *Se dice que la aplicación $u \rightarrow z(u)$ tiene una derivada local (o bien, que es localmente derivable) en el origen, si cumple (8.3) y para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la correspondiente aplicación $z_\omega(u) \equiv z(u)|_\omega$, que está definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ y toma valores en $W^{m,r}(\omega)$, es Fréchet diferenciable en el origen. En tal caso, la derivada local en 0 en la dirección u , que se denotará por $z'(u)$, está bien definida en todo el dominio Ω para cualquier $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, y satisface*

$$z'(u) = Dz_\omega(0)u = \frac{d}{dt}z_\omega(tu) \quad \text{en } \omega, \text{ para cada abierto } \omega \subset\subset \Omega,$$

donde $Dz_\omega(0)$ es la derivada de Fréchet en el origen de $u \rightarrow z_\omega(u)$ (naturalmente, una aplicación lineal continua en $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $W^{m,r}(\omega)$).

El próximo teorema entrega una condición suficiente para la existencia de la derivada local en el origen.

Teorema 8.2 (Existencia de la derivada local) *Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^2 . Sea $u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $k \geq 1$, de norma suficientemente pequeña. Consideremos la aplicación $u \rightarrow z(u)$ y supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:*

$$\begin{cases} \text{Para cada } u \in \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ tal que } \|u\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(u) \in W^{m,r}(\Omega + u), \text{ con } k \geq m \geq 1 \text{ y } 1 \leq r < \infty. \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} u \rightarrow z(u) \circ (I + u), \text{ definida de un entorno de 0 en } \text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ en } W^{m,r}(\Omega), \\ \text{es derivable en 0, con derivada en la dirección } u \text{ denotada } \dot{z}(u). \end{cases} \quad (8.5)$$

Entonces, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación $u \rightarrow z(u)|_\omega$, considerada una como aplicación definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $W^{m-1,r}(\omega)$, es derivable en 0. Su derivada local en la dirección u está dada por

$$z'(u) = \dot{z}(u) - u \cdot \text{grad } z(0).$$

DEMOSTRACIÓN. véase [25] Teorema 2.13 pp. 48-50. □

8.2. Existencia de la derivada local

Para c y d como en la Sección 7.5 se define el abierto

$$\Omega_{sop} = (-2\ell, 2\ell) \times (c/H, d/H).$$

Para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, el conjunto $\Omega + u$ es un abierto de clase Lip^2 . Así, para todo $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, tiene sentido definir la siguiente familia de problemas perturbados:

$$(\Phi(u)) \begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{en } \Omega + u, \\ \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = \tilde{g} & \text{sobre } \partial\Omega + u, \\ \int_{\Omega+u} \varphi \, d\mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

Se tiene entonces

Proposición 8.3 *Consideremos la aplicación $u \rightarrow \varphi(u)$. Entonces*

1. *Existe una única función $\varphi(0) \in W^{3,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$, solución de $(\Phi(0))$.*
2. *Para cada $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, existe una única función $\varphi(u) \in W^{2,p}(\Omega + u) \cap C^\infty(\Omega + u)$, con $1 \leq p < +\infty$, solución de $(\Phi(u))$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Supongamos que $1 < p < +\infty$.

Por el Corolario 7.6 se tiene que $\tilde{g} \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)$ y Ω es de clase C^3 , luego, de la Proposición 6.23, se obtiene el resultado.

Supongamos que $p = 1$. Entonces, para todo $f \in L^2(\Omega)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (8.6)$$

donde $C(\Omega)$ es una constante que depende de Ω . En efecto, si $f \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_{\Omega} |f| \, d\mathbf{x} \\ &\leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

Luego, dado que $\varphi(0) \in W^{3,2}(\Omega)$, usando (8.6), se obtiene que $\varphi(0) \in W^{3,1}(\Omega)$.

2. Supongamos que $1 < p < +\infty$.

Por el Corolario 7.6 se tiene que $\tilde{g} \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega + u)$ y $\Omega + u$ es de clase Lip^2 , luego, por la Proposición 6.23, se obtiene el resultado.

Supongamos que $p = 1$. Entonces, para todo $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\|f\|_{L^1(\Omega+u)} \leq C(\Omega)(1 + \|u\|_1)^{1/2}\|f\|_{L^2(\Omega+u)}, \quad (8.7)$$

donde $C(\Omega)$ es una constante que depende de Ω . En efecto, si $f \in L^2(\Omega + u)$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\Omega+u)} &\leq \int_{\Omega+u} |f| d\mathbf{x} \\ &\leq \left(\int_{\Omega+u} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega+u)} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \text{Jac}(I + u) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega+u)} \\ &\leq C(\Omega)(1 + \|u\|_1)^{1/2} \|f\|_{L^2(\Omega+u)}. \end{aligned}$$

Luego, dado que $\varphi(u) \in W^{2,2}(\Omega + u)$, usando (8.7), se obtiene que $\varphi(u) \in W^{2,1}(\Omega)$. □

Usando la Proposición (8.3) se puede hacer la siguiente

Definición 8.4 Para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña. Considere las aplicaciones

$$\begin{aligned} u &\mapsto \varphi(u), \\ u &\mapsto \varphi(u) \circ (I + u). \end{aligned}$$

Entonces, para todo $1 \leq p < +\infty$,

1. La aplicación $u \rightarrow \varphi(u)$ está definida desde una vecindad de $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{2,p}(\Omega + u) \cap C^\infty(\Omega + u)$.
2. La aplicación $u \mapsto \varphi(u) \circ (I + u)$ está definida desde una vecindad de $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{2,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Directo de la Proposición 8.3.

2. Sea $1 \leq p < +\infty$. Dado que $\varphi(u) \in W^{2,p}(\Omega + u)$, aplicando la Proposición 6.13, se obtiene que $\varphi(u) \circ (I + u) \in W^{2,p}(\Omega)$. □

Se tiene el siguiente

Teorema 8.5 La aplicación

$$u \mapsto \varphi(u) \circ (I + u), \tag{8.8}$$

está bien definida desde un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{2,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, y es derivable en 0. Su derivada en la dirección u será denotada por $\dot{\varphi}(u)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathcal{W} una vecindad de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$. Para $u \in \mathcal{W}$, se denota

$$M(u) = {}^t [\partial_j (I + u)_i]^{-1}.$$

Para $1 < p < +\infty$, consideremos la aplicación

$$F: \mathcal{W} \times W^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times W^{1-1/p}(\partial\Omega) \times \mathbb{R},$$

definida por:

$$\begin{aligned} F_1(u, \phi) &= -\operatorname{div}(\operatorname{Jac}(I+u)M^t(u)M(u)\operatorname{grad}\phi), \\ F_2(u, \phi) &= \mathbf{n} \cdot (\operatorname{Jac}(I+u)M^t(u)M(u)\operatorname{grad}\phi) - \tilde{g} \circ (I+u)\operatorname{Jac}_{\partial\Omega}(I+u), \\ F_3(u, \phi) &= \int_{\Omega} \phi \operatorname{Jac}(I+u) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Debido a que $\varphi(u)$ satisface $(\Phi(u))$, entonces, $\varphi(u)$ es solución débil del mismo problema, luego, haciendo cambios de variables, se obtiene

$$F(u, \varphi(u) \circ (I+u)) = (0, 0, 0)^t. \quad (8.9)$$

Además, se verifica que

1. F es de clase $C^1(\mathcal{W} \times W^{2,p}(\Omega))$.
- 2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \phi}(0, \varphi(0)).w &= -\Delta w, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \phi}(0, \varphi(0)).w &= \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} w, \\ \frac{\partial F_3}{\partial \phi}(0, \varphi(0)).w &= \int_{\Omega} w \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

3. La aplicación

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(0, \varphi(0)): W^{2,p}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \times W^{1-1/p}(\partial\Omega) \times \mathbb{R},$$

es un isomorfismo.

Por lo tanto, aplicando el teorema de la función implícita a (8.9), existen una vecindad \mathcal{U} de 0 en $\operatorname{Lip}^2(\Omega_{\operatorname{sop}}; \mathbb{R}^2)$, una vecindad \mathcal{V} de 0 en $W^{2,p}(\Omega)$ y una única función $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de clase C^1 tal que

$$F(u, \phi) = 0 \text{ en } \mathcal{U} \times \mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad \phi = g(u) \quad u \in \mathcal{U}, \phi \in \mathcal{V}.$$

De (8.9) se obtiene que $\varphi(u) \circ (I+u)$ es de clase C^1 .

Por otro lado, si $p = 1$, usando que la identidad de $W^{1,2}(\Omega)$ en $W^{1,1}(\Omega)$ es lineal continua, se obtiene el resultado. □

Teorema 8.6 (Existencia de la derivada local.) *Sea $1 \leq p < +\infty$. Para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación*

$$u \rightarrow \varphi(u)|_{\omega},$$

considerada como una aplicación de un entorno de 0 en $\operatorname{Lip}^2(\Omega_{\operatorname{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}(\omega)$ es derivable en 0. Su derivada local en la dirección u está dada por:

$$\varphi'(u) = \dot{\varphi}(u) - u \cdot \operatorname{grad} \varphi(0). \quad (8.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\varphi(u) \in W^{2,p}(\Omega+u) \cap C^\infty(\Omega+u)$ y por el Teorema 8.5, $\varphi(u)$ cumple las hipótesis del Teorema 8.2, con $k = m = 2$ y $r = p$, de donde se obtiene el resultado. \square

8.2.1. Diferenciación de la ecuación

Teorema 8.7 *La derivada local en el origen de la aplicación $u \rightarrow \varphi(u)$ en la dirección u , denotada $\varphi'(u)$, verifica*

$$\Delta\varphi'(u) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \subset\subset \Omega$ un abierto y consideremos el operador

$$A\varphi = \Delta\varphi,$$

definido de $W^{1,p}(\omega)$ en $\mathcal{D}'(\omega)$. Entonces A aplica en forma lineal y continua $W^{1,p}(\omega)$ en $\mathcal{D}'(\omega)$. Además, para todo $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña,

$$A\varphi(u) = 0 \text{ en } \Omega + u. \quad (8.11)$$

Gracias al Teorema 8.6, la aplicación $u \rightarrow \varphi_\omega(u) = \varphi(u)|_\omega$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}(\omega)$, es derivable en 0.

Por otro lado, el operador A definido en $W^{1,p}(\omega)$ es Fréchet-derivable en todo punto y coincide con su derivada. Por lo tanto, la función $u \rightarrow (A \circ \varphi_\omega)(u) = A(\varphi_\omega(u))$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $\mathcal{D}'(\omega)$, es derivable en 0 y, además,

$$D(A \circ \varphi_\omega)(0).u = AD\varphi_\omega(0).u = A\varphi'(u) \text{ en } \mathcal{D}'(\omega).$$

A partir de (8.11) se obtiene:

$$A\varphi'(u) = 0 \text{ en } \mathcal{D}'(\omega),$$

y, como $\omega \subset\subset \Omega$ es arbitrario, se obtiene el resultado. \square

8.2.2. Variación total de las derivadas parciales

Teorema 8.8 *La aplicación $u \rightarrow (\text{grad}\varphi(u)) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, es derivable en 0.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 6.14, se tiene que la aplicación $u \rightarrow {}^t[\partial_j(I+u)_i]^{-1}$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $\text{Lip}^1(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^{2 \times 2})$, es derivable en 0. Además, la aplicación $u \rightarrow \text{grad } u$, definida de $W^{2,p}(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ es lineal y continua. Luego, por el Teorema 8.5, la aplicación $u \rightarrow \text{grad}(\varphi(u) \circ (I + u))$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, es derivable en 0. Finalmente, gracias a la Proposición 6.13,

$$(\text{grad } \varphi(u)) \circ (I + u) = {}^t[\partial_j(I + u)_i]^{-1} \text{grad}(\varphi(u) \circ (I + u)),$$

de donde se obtiene el resultado. \square

Observación 8.9 *A partir del Teorema 8.8 se obtienen las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned}(\partial_i \varphi)'(u) &= (\dot{\partial}_i \varphi)(u) - u \cdot \text{grad}(\partial_i \varphi(0)), \\ \partial_i(\varphi'(u)) &= \partial_i(\dot{\varphi}(u)) - \partial_i(u \cdot \text{grad} \varphi(0)), \\ (\partial_i \varphi)' &= \partial_i \varphi'.\end{aligned}$$

8.3. Diferenciación de la condición sobre la frontera

La técnica para diferenciar la condición sobre la frontera consiste en extender la normal a todo el espacio y estudiar su variación con respecto al dominio. Para ello se necesita el siguiente

Teorema 8.10 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de clase C^2 . Entonces*

1. *Para cada $u \in \text{Lip}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ con $\|u\|_2$ suficientemente pequeña existe*

$$\nu(u) \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

tal que

$$\begin{aligned}\nu(u) &= \mathbf{n}(\Omega + u) \quad \text{sobre } \partial\Omega + u, \\ \nu(0) &\in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2), \\ \frac{\partial \nu(0)}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

2. *La aplicación $u \rightarrow \nu(u)$ definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ es derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección, denotada $\nu'(u)$, verifica*

$$\nu'(u) = -\text{grad}_{\partial\Omega}(u \cdot \mathbf{n}) \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

(igualdad en $(L^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R}^2))$).

3. *La aplicación $u \rightarrow \nu(u) \circ (I + u)$ definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en $\text{Lip}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ es derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección u se denota $\dot{\nu}(u)$.*

DEMOSTRACIÓN. Véase el Teorema 4.1 pp. 85-96 de [25]. □

Una vez extendida la normal se tiene el siguiente

Teorema 8.11 *Para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$ la aplicación*

$$u \rightarrow \varphi(u)|_\omega,$$

definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sup}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\omega)$, es derivable en 0. Es decir, $u \rightarrow \varphi(u)$ es localmente diferenciable en 0. Su derivada local en la dirección u verifica:

$$\begin{cases} \varphi'(u) = \dot{\varphi}(u) - u \cdot \text{grad} \varphi(0), \\ \varphi'(u) \in W^{2,1}(\Omega). \end{cases} \quad (8.12)$$

y, además,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \mathbf{n}}(u) = -u_n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \text{grad} \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial \Omega} u_n \quad \text{sobre } \partial \Omega. \quad (8.13)$$

(igualdad en $L^1(\partial \Omega)$), donde

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} = \sum_{j,k=1}^2 \mathbf{n}_k \mathbf{n}_j \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

representa la segunda derivada en la dirección normal.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \subset\subset \Omega$ un abierto.

1. En virtud del Teorema 8.6 la aplicación $u \rightarrow \varphi(u)|_\omega$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\omega)$ es derivable en 0. En consecuencia, $u \rightarrow \varphi(u)$ es localmente derivable en 0 y satisface

$$\varphi'(u) = \dot{\varphi}(u) - u \cdot \text{grad} \varphi(0).$$

Luego, dado que $\varphi(0) \in H^3(\Omega)$, su derivada local en 0 en la dirección u verifica (8.12).

2. (i) Para cada $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ la aplicación $u \rightarrow \tilde{g} \circ (I + u)$ no depende de u . En efecto, si $\mathbf{x} \in \text{sop}(\tilde{g})$, entonces,

$$\tilde{g} \circ (I + u)(\mathbf{x}) = \tilde{g}(\mathbf{x} + u(\mathbf{x})) = \tilde{g}(\mathbf{x}),$$

pues el $\text{sop}(u) \cap \text{sop}(\tilde{g}) = \emptyset$.

- (ii) Dado que Ω es de clase C^3 , por el Teorema 8.10, existe una prolongación de la normal $\nu(u) \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nu(u) = \mathbf{n}(\Omega + u) \text{ sobre } \partial \Omega + u.$$

Consideremos la aplicación

$$u \rightarrow \tau(u) = \text{grad} \varphi(u) \cdot \nu(u) - \tilde{g} \circ (I + u), \quad (8.14)$$

definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\Omega)$. Por el Teorema 8.8, el apartado 3 del Teorema 8.10 y el apartado (i), la función $u \rightarrow \tau(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\Omega)$, es derivable en 0 y, además,

$$\tau(u) = 0 \text{ sobre } \partial \Omega + u. \quad (8.15)$$

Lema Para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\begin{cases} u \rightarrow \tau_\omega(u) = \tau(u)|_\omega, \text{ definida de un entorno de 0} \\ \text{en } \text{Lip}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \text{ en } L^1(\omega), \text{ es derivable en 0.} \end{cases} \quad (8.16)$$

En consecuencia, $u \rightarrow \tau(u)$ es localmente derivable en 0 y su derivada local en 0 en la dirección u , denotada $\tau'(u)$, verifica:

$$\tau'(u) \in W^{1,1}(\Omega), \quad (8.17)$$

$$\tau'(u) = -u_n \frac{\partial \tau(0)}{\partial \mathbf{n}} \text{ sobre } \partial \Omega \text{ (en } L^1(\partial \Omega) \text{)}, \quad (8.18)$$

donde $u_n = u \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a $\partial \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, $\tau(u) \in W^{1,1}(\Omega + u)$. Por lo dicho anteriormente, la aplicación

$$u \rightarrow \tau(u) \circ (I + u),$$

definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\Omega)$, es derivable en 0, con derivada en la dirección u denotada $\dot{\tau}(u)$. Luego, aplicando el Teorema 8.2, con $k = 2$, $m = 1$ y $r = 1$, se obtiene (8.16) y la igualdad

$$\tau'(u) = \dot{\tau}(u) - u \cdot \text{grad } \tau(0) \quad \forall u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2). \quad (8.19)$$

Por otro lado, de (8.15), se deduce que

$$\dot{\tau}(u) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (8.20)$$

Además, $\dot{\tau}(u) \in W^{1,1}(\Omega)$ y, como $\tau(0) \in W^{2,1}(\Omega)$, $\text{grad } \tau(0) \in W^{1,1}(\Omega)$, luego, de (8.19), se obtiene que $\tau'(u) \in W^{1,1}(\Omega)$, y, por lo tanto se puede hablar de la traza de $\tau'(u)$. Entonces, a partir de (8.20) y (8.19), se obtiene

$$\tau'(u) = -u \cdot \text{grad } \tau(0) \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Por otro parte, $\tau(0)$ es constante sobre $\partial\Omega$ y, en consecuencia,

$$\text{grad } \tau(0) = \vec{n} \cdot \frac{\partial \tau(0)}{\partial \mathbf{n}},$$

de donde se obtiene (8.18). □

Sea $z(u) = \text{grad } \varphi(u)$, entonces, derivando la aplicación (8.14) localmente en la dirección u ,

$$\tau'(u) = z'(u) \cdot \nu(0) + z(0) \cdot \nu'(u)$$

Aplicando el operador traza, usando la relación (8.18) y notando que $\nu(0) = \mathbf{n}$ en $\partial\Omega$, se obtiene:

$$z'(u) \cdot \mathbf{n} = -z(0) \cdot \nu'(u) - u_n \frac{\partial \tau(0)}{\partial \mathbf{n}} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Por otro lado, por el apartado 1 del Teorema 8.10,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau(0)}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial z(0)}{\partial \mathbf{n}} \cdot \nu(0) + z(0) \frac{\partial \nu(0)}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}}, \\ &= \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned}$$

y, sobre $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} z'(u) \cdot \mathbf{n} &= -u_n \frac{\partial \tau(0)}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} + z(0) \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} u_n && \text{sobre } \partial\Omega, \\ &= u_n \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} \right) + \text{grad } \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} u_n && \text{sobre } \partial\Omega, \\ &= -u_n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \text{grad } \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} u_n && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$u_n \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0.$$

Finalmente, por la observación 8.9,

$$(\text{grad } \varphi)'(u) = \text{grad } \varphi'(u),$$

de donde se obtiene (8.13).

□

Observación 8.12 *En el teorema anterior, la hipótesis Ω es de clase C^3 se utiliza solamente para poder hablar, respectivamente, de la traza de $z'(u)$ y $\tau'(u)$. Luego, el Teorema 8.3 aún es válido si se supone que Ω es de clase C^2 y se agrega la condición $\varphi(0) \in H^3(\Omega)$.*

8.4. Diferenciación del funcional de costo

Lema 8.13 *Para cada $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, se define la aplicación $u \rightarrow p(u)$ por*

$$p(u) = \frac{1}{2} + Fr^{-2} - \left(\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(u)|^2 + Fr^{-2}u \right). \quad (8.21)$$

Se tiene que:

- (i) *La aplicación $u \rightarrow p(u)$ está definida para todo $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña y toma valores en $H^1(\Omega + u)$.*
- (ii) *La aplicación $u \rightarrow p(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $H^1(\Omega)$, es derivable en 0, con derivada en la dirección u denotada $\dot{p}(u)$.*
- (iii) *Para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación $u \rightarrow p(u)|_\omega$, considerada como una aplicación definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $L^2(\omega)$, es derivable en 0.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Para cada $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, por la proposición 6.23, $\varphi(u) \in W^{2,4}(\Omega + u)$ y, por lo tanto, $p(u) \in H^1(\Omega + u)$.

(ii) Por el Teorema 8.8 la aplicación $u \rightarrow \text{grad } \varphi(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $W^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ es derivable en 0, luego, como la aplicación $v \rightarrow |v|^2$, definida de $W^{1,4}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ en $H^1(\Omega)$, es derivable en todo punto, se obtiene el resultado.

(iii) Gracias a (i) y (ii) se cumplen las hipótesis del Teorema 8.2, con $k = 2$, $m = 1$ y $r = 2$, de donde se obtiene el resultado.

□

Lema 8.14 *Sea $p(u)$ la aplicación definida por (8.21). Entonces,*

1. *La aplicación $u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u)$ está definida para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ suficientemente pequeña y toma valores en $W^{1,1}(\Omega + u)$.*

2. La aplicación $u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\Omega)$, es derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección u vale $p(0)\dot{p}(0)$.
3. Se tiene que

$$\frac{1}{2}p^2(0) \in W^{2,1}(0). \quad (8.22)$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Gracias al Lema 8.21, $p(u) \in H^1(\Omega + u)$, luego, $\frac{1}{2}p^2(u) \in W^{1,1}(\Omega + u)$.

2. Por el Lema 8.14, la aplicación $u \rightarrow p(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $H^1(\Omega)$, es derivable en 0. Por otro lado, la aplicación $K(v) = |v|^2$, definida de $H^1(\Omega)$ en $W^{1,1}(\Omega)$, es derivable en todo punto y su derivada en a en la dirección u verifica,

$$K'(a; v) = 2av.$$

Dado que

$$K(p(u) \circ (I + u)) = p^2(u) \circ (I + u), \quad (8.23)$$

se obtiene que $u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u) \circ (I + u)$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$ en $W^{1,1}(\Omega)$, es derivable en 0. Más aún, Por el Lema 8.21, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación $u \rightarrow p(u)|_{\omega}$, definida de un entorno de 0 en $\text{Lip}^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ en $L^2(\omega)$. En consecuencia, $u \rightarrow z(u) = \frac{1}{2}p^2(u)$ también es localmente derivable en 0. Su derivada local en la dirección u está dada por

$$z'(u) = p(0)p'(u) \quad \text{para todo } u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2).$$

Por lo tanto,

$$\dot{z}(u) = p(0) (p'(u) + u \cdot \text{grad } p(0)) = p(0)\dot{p}(0).$$

3. Dado que Ω es de clase C^3 , por la Proposición 6.23, $\varphi(0) \in W^{3,4}(\Omega)$, y luego, $\frac{1}{2}p^2(0) \in W^{2,1}(\Omega)$.

□

Por el lema anterior, para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, $\frac{1}{2}p^2(u) \in W^{1,1}(\Omega + u)$ y $\Omega + u$ es de clase Lip^2 , luego, tiene sentido hablar de la traza de $\frac{1}{2}p^2(u)$ y

$$\frac{1}{2}p^2(u) \in L^1(\partial\Omega + u).$$

Por lo tanto tiene sentido hacer la siguiente

Definición 8.15 (Funcional de costo) *Para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sop}}; \mathbb{R}^2)$, tal que $\|u\|_2$ es suficientemente pequeña, se define el funcional $J(u)$ como*

$$J(u) = \int_{\Gamma_3(u)} \frac{1}{2}p^2(u) dS.$$

Se tiene el siguiente

Teorema 8.16 *Para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación*

$$u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u)|_\omega,$$

definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en $L^1(\omega)$, es derivable en 0. En consecuencia, $u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u)$ es localmente derivable en 0. Para cada $u \in Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$, la derivada local $p(0)p'(u)$ en la dirección u , verifica

$$p(0)p'(u) = p(0)\dot{p}(u) - p(0)u \cdot \text{grad}p(0) \quad (8.24)$$

y

$$p(0)p'(u) \in L^1(\partial\Omega). \quad (8.25)$$

Además, la aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y su derivada en la dirección u está dada por

$$J'(u) = \int_{\Gamma_3} p(0)p'(u)dS + \int_{\Gamma_3} \left(p(0)u \cdot \text{grad}p(0) + \frac{1}{2}p^2(0) \text{div}_{\partial\Omega}u \right) dS, \quad (8.26)$$

donde $\text{div}_{\partial\Omega}$ es el operador divergencia tangencial definido en la Sección 6.3.2.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \subset\subset \Omega$ un abierto. En virtud del Lema 8.14, la aplicación $\frac{1}{2}p^2(u)|_\omega$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en $L^1(\omega)$, es derivable en 0. Su derivada en la dirección u satisface (8.24).

Por otra parte, $\frac{1}{2}(p^2)'(u) = p(0)p'(u)$, luego, por el apartado 3 del Lema 8.14, se tiene (8.25), por lo tanto, tiene sentido hablar de la traza de $\frac{1}{2}(p^2)'(u)$ en $L^1(\partial\Omega)$.

Finalmente, por el Lema 6.16,

$$\int_{\Gamma_3(u)} \frac{1}{2}p^2(u)dS = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2}p^2(u) \circ (I + u)\text{Jac}_{\partial\Omega}(I + u)dS.$$

Gracias al apartado 2 del Lema 8.14 y a la Proposición 6.19, la aplicación

$$u \rightarrow \frac{1}{2}p^2(u) \circ (I + u)\text{Jac}_{\partial\Omega}(I + u),$$

definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en $L^1(\partial\Omega)$, es derivable en 0 y, además, su derivada en la dirección u está dada por

$$\frac{1}{2}\dot{p}^2(u) + \frac{1}{2}p^2(0) \text{div}_{\partial\Omega}u = p(0)\dot{p}(u) + \frac{1}{2}p^2(0) \text{div}_{\partial\Omega}u.$$

Obtenemos así que la aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y teniendo en cuenta (8.24) y (8.25), se obtiene (8.26).

□

Corolario 8.17 *La aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y su derivada en la dirección u está dada por*

$$J'(u) = \int_{\Gamma_3} p(0)p'(u)dS + \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{1}{2}Hp^2(0) + p(0)\frac{\partial p(0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

El Corolario 8.17 se puede formular de la siguiente manera:

Corolario 8.18 Para cada $u \in Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ con norma suficientemente pequeña se tiene

$$\int_{\Gamma_3(u)} \frac{1}{2} p^2(u) dS = \int_{\Gamma_3} \frac{1}{2} p^2(0) dS + \int_{\Gamma_3} p(0) p'(u) dS + \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{1}{2} H p^2(0) + p(0) \frac{\partial p(0)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS + \theta(u),$$

donde θ es una función que satisface

$$\lim_{\|u\|_2 \rightarrow 0} \frac{\theta(u)}{\|u\|_2} = 0.$$

Lema 8.19

$$\frac{\partial p(0)}{\partial \mathbf{n}} = -Fr^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \text{ sobre } \Gamma_3 \quad (8.27)$$

donde \mathbf{e}_2 es el vector $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^t$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \equiv \partial_{\mathbf{n}}$, y calculemos $\partial_{\mathbf{n}} p(0)$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} p(0) &= \partial_{\mathbf{n}} \left(\frac{1}{2} + Fr^{-2} - \left(\frac{1}{2} |\text{grad } \varphi(0)|^2 + Fr^{-2} y \right) \right), \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{\mathbf{n}} |\text{grad } \varphi(0)|^2 - Fr^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

y, además,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} (\text{grad } \varphi(0) \cdot \text{grad } \varphi(0)) &= \partial_{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}} + \text{grad}_{\partial \Omega} \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial \Omega} \varphi(0) \right), \\ &= 2 \partial_{\mathbf{n}} \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) \cdot \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) + 2 \partial_{\mathbf{n}} \text{grad}_{\partial \Omega} \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial \Omega} \varphi(0). \end{aligned}$$

Pero $\varphi(0)$ satisface

$$\partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) = 0 \text{ sobre } \Gamma_3,$$

luego, sobre Γ_3 ,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} \text{grad}_{\partial \Omega} \varphi(0) &= \text{grad}_{\partial \Omega} \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0), \\ &= \text{grad } \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) - (\text{grad } \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \\ &= (\text{grad } \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - (\text{grad } \partial_{\mathbf{n}} \varphi(0) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde se concluye (8.27). □

Lema 8.20

$$p'(u) = -2 \text{grad } \varphi(0) \cdot \text{grad } \varphi'(u). \quad (8.28)$$

DEMOSTRACIÓN. Derivando (8.21) se obtiene

$$p'(u) = -2 \text{grad } \varphi(0) \cdot (\text{grad } \varphi)'(u),$$

y por la Observación 8.9, se tiene que $(\text{grad } \varphi)'(u) = \text{grad } \varphi'(u)$, de donde se obtiene (8.28). □

Usando las fórmulas (8.27) y (8.28) el corolario 8.17 se puede reescribir como

Proposición 8.21 *La aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y su derivada en la dirección u está dada por*

$$\int_{\Gamma_3} \varphi'(u) \operatorname{div}_{\partial\Omega} (p(0) \operatorname{grad} \varphi(0)) \, dS + \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{1}{2} H p^2(0) - p(0) F r^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \, dS.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación $u \rightarrow I(u)$ definida por,

$$I(u) = - \int_{\Gamma_3} p(0) \operatorname{grad} \varphi(0) \cdot \operatorname{grad} \varphi'(u) \, dS,$$

usando el Lema 6.21, con $u = p(0) \operatorname{grad} \varphi(0)$ y $f = \varphi'(u)$, se tiene que

$$I(u) = \int_{\Gamma_3} \varphi'(u) \operatorname{div}_{\partial\Omega} (p(0) \operatorname{grad} \varphi(0)) \, dS.$$

Finalmente, usando las relaciones (8.27) y (8.28) se obtiene el resultado. \square

8.5. El resultado principal

El análisis realizado en las secciones 8.1-8.4 se puede resumir en el siguiente

Teorema 8.22 *La aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es Fréchet derivable en 0 y su derivada en la dirección u está dada por*

$$J'(u) = \int_{\Gamma_3} \varphi'(u) \operatorname{div}_{\partial\Omega} (p(0) \operatorname{grad} \varphi(0)) \, dS + \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{1}{2} H p^2(0) - p(0) F r^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \, dS,$$

donde, $\varphi'(u)$ es solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta \varphi'(u) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi'(u)}{\partial \mathbf{n}} = -u_n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \operatorname{grad} \varphi(0) \cdot \operatorname{grad}_{\partial\Omega} u_n & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.29)$$

Capítulo 9

El método de optimización adjunta

En este capítulo se deduce el método de optimización adjunta. En la Sección 9.1 se introduce el problema dual, en la Sección 9.2 se deduce una condición de optimalidad y en la Sección 9.3 se deduce la forma del método y se aplica un caso particular de variaciones con respecto al dominio: las variaciones normales.

9.1. El problema dual

Dado que la derivada de la aplicación J depende indirectamente de $u \cdot \mathbf{n}$ a través de $\varphi'(u)$, conviene introducir el estado adjunto:

$$\begin{cases} \Delta \lambda = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} = \text{div}_{\partial \Omega} (p(0) \text{grad } \varphi(0)) \mathbf{1}_{\Gamma_3} & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \quad (9.1)$$

Además, consideremos el *problema primal*:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} I = \int_{\Gamma_3} \phi \text{div}_{\partial \Omega} (p(0) \text{grad } \varphi(0)) \, dS \\ \text{s.a } \begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = -u_n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \text{grad } \varphi(0) \cdot \text{grad}_{\partial \Omega} u_n & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \end{cases}$$

y el *problema dual*,

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} J = - \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \text{div}_{\partial \Omega} (\text{grad}_{\partial \Omega}(\varphi(0)) \lambda) \right) \, dS \\ \text{s.a } \begin{cases} \Delta \lambda = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} = \text{div}_{\partial \Omega} (p(0) \text{grad } \varphi(0)) \mathbf{1}_{\Gamma_3} & \text{sobre } \partial \Omega. \end{cases} \end{cases}$$

Los problemas primal y dual son equivalentes, como se muestra en la siguiente

Proposición 9.1 *Si I y J son soluciones de los problemas primal y dual, respectivamente, entonces*

$$I = J.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la definición de I e integrando por partes,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_3} \phi \operatorname{div}_{\partial\Omega} (p(0)\operatorname{grad} \varphi(0)) \, dS, \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \\ &= \int_{\Omega} (\phi \Delta \lambda - \lambda \Delta \phi) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \\ &= \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \, dS, \\ &= \int_{\partial\Omega} \lambda \left(-u_n \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \operatorname{grad} \varphi(0) \cdot \operatorname{grad}_{\partial\Omega} u_n \right) \, dS, \end{aligned} \quad (9.2)$$

integrando por partes el segundo término de (9.2) y usando la condición cinemática 7.19,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \lambda \operatorname{grad} \varphi(0) \cdot \operatorname{grad}_{\partial\Omega} u_n \, dS &= \int_{\partial\Omega} \lambda (\operatorname{grad} \varphi(0) \cdot \mathbf{n}) H u_n - u_n \operatorname{div}_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} \varphi(0) \lambda) \, dS, \\ &= - \int_{\partial\Omega} u_n \operatorname{div}_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} \varphi(0) \lambda) \, dS, \\ &= - \int_{\partial\Omega} u_n \operatorname{div}_{\partial\Omega} (\operatorname{grad}_{\partial\Omega}(\varphi(0)) \lambda) \, dS, \end{aligned} \quad (9.3)$$

luego, reemplazando (9.3) en (9.2) se obtiene:

$$I = - \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \operatorname{div}_{\partial\Omega} (\operatorname{grad}_{\partial\Omega}(\varphi(0)) \lambda) \right) \, dS$$

y, por lo tanto, $I = J$. □

Usando el estado adjunto y la proposición 9.1 se obtiene el siguiente

Teorema 9.2 *La aplicación $u \rightarrow J(u)$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y su derivada en la dirección u está dada por*

$$- \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \operatorname{div}_{\partial\Omega} (\operatorname{grad}_{\partial\Omega}(\varphi(0)) \lambda) \right) \, dS + \int_{\Gamma_3} u_n \left(\frac{1}{2} H p^2(0) - p(0) F r^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \, dS, \quad (9.4)$$

donde λ es solución del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta \lambda = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} = \operatorname{div}_{\partial\Omega} (p(0)\operatorname{grad} \varphi(0)) \mathbf{1}_{\Gamma_3} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.5)$$

9.2. Una condición necesaria de optimalidad

Supongamos que el dominio Ω es solución del problema de diseño óptimo, i.e., 0 es un mínimo del funcional $J(u)$, entonces para todo $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sup}}; \mathbb{R}^2)$ de norma suficientemente pequeña se tiene,

$$J(0) \leq J(u).$$

Además, para $t > 0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} J(0) &\leq J(tu), \\ J(0) &\leq J(0) + J'(tu) + \theta(tu), \\ 0 &\leq J'(u) + \frac{\theta(tu)}{t\|u\|_2} \cdot \|u\|_2, \end{aligned}$$

haciendo $t \rightarrow 0^+$, se obtiene:

$$0 \leq J'(u),$$

y como u es arbitrario se deduce

$$J'(u) = 0. \tag{9.6}$$

Por lo tanto si Ω es el dominio solución del problema (7.23), entonces se debe cumplir la condición (9.6). Así, todo dominio óptimo debe satisfacer la condición (9.6).

9.3. El método de optimización adjunta

De acuerdo con el Corolario 8.18 para $u \in \text{Lip}^2(\Omega_{\text{sup}}; \mathbb{R}^2)$ fija, de norma suficientemente pequeña y t pequeño,

$$J(tu) = J(0) + J'(tu) + \theta(tu).$$

Si $t = -\gamma J'(u)$ con $\gamma > 0$, entonces, si γ es suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} J(ut) - J(0) &= -\gamma J'(u)^2 + \theta(ut), \\ &\leq 0 + \theta(tu), \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $-\gamma J'(u)u$ es una dirección de descenso para J , y el dominio $\Omega - \gamma J'(u)u$ disminuye el valor de este funcional. A partir de lo anterior se puede generar un algoritmo tipo método del gradiente para resolver el problema con superficie libre.

Método de optimización adjunta

- (a) Para Ω dado, resolver el problema (7.22) para φ .
- (b) Resolver el problema (9.5) para λ .
- (c) Determinar $J'(u)$ desde (9.4).
- (d) Elegir un paso $\gamma > 0$, ajustar Ω a $\Omega - \gamma J'(u)u$ y volver a (a).

El proceso iterativo (a)-(d) se conoce como *el método de optimización adjunta*, y claramente, el dominio óptimo Ω^* se obtiene cuando $J'(u) = 0$.

9.4. Variaciones normales

Un tipo particular de variaciones con respecto al dominio, corresponde al caso de variaciones normales, i.e.,

$$u(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

donde α es una función de clase $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R}^2)$. Este tipo de variaciones, introducida en 1908 por Hadamard [12], es común en física. En particular, para el problema con superficie libre, Van Brummelen [30] estudió numéricamente este tipo de variaciones. Se tiene

Teorema 9.3 *La aplicación $\alpha \rightarrow J(\alpha\mathbf{n})$, definida de un entorno de 0 en $Lip^2(\Omega_{sop}; \mathbb{R})$ en \mathbb{R} , es derivable en 0 y su derivada en la dirección α está dada por*

$$-\int_{\Gamma_3} \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial \mathbf{n}^2} + \text{div}_{\partial\Omega}(\text{grad}_{\partial\Omega}(\varphi(0)) \lambda) \right) \mathbf{n} \, dS + \int_{\Gamma_3} \alpha \left(\frac{1}{2} H p^2(0) - p(0) Fr^{-2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \mathbf{n} \, dS, \quad (9.7)$$

donde λ es solución del siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta \lambda = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}} = \text{div}_{\partial\Omega}(p(0) \text{grad} \varphi(0)) \mathbf{1}_{\Gamma_3} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.8)$$

En este caso, $-\gamma J'(\alpha\mathbf{n})\mathbf{n}$ es una dirección de descenso para J y el dominio $\Omega - \gamma J'(\alpha\mathbf{n})\alpha$ disminuye el valor de éste funcional.

Finalmente, se observa que las fórmulas (9.7) y (9.8) corresponden exactamente a las encontradas por Van Brummelen [30].

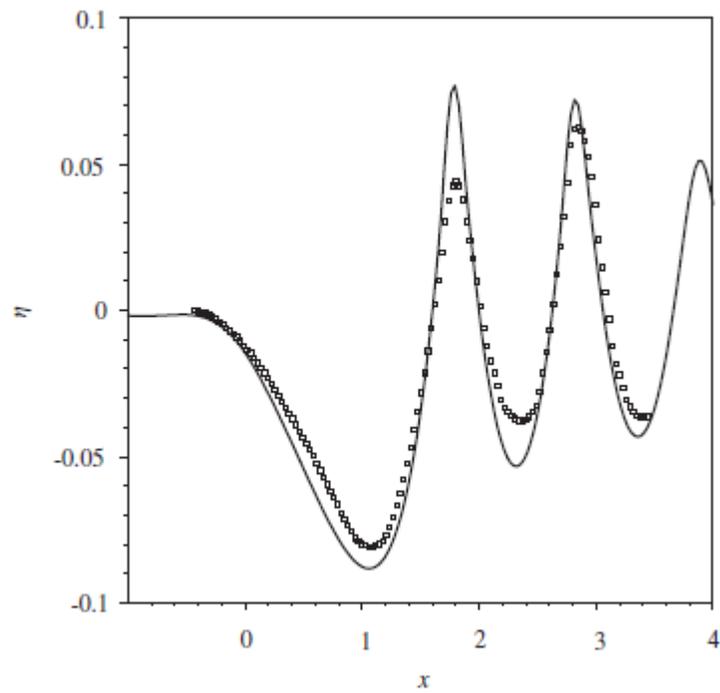
9.4.1. Resultados numéricos

En esta subsección se entregan resultados numéricos para el caso de las variaciones normales. Estos experimentos numéricos fueron calculados por Van Brummelen [30] y muestran una buena correspondencia con los resultados empíricos obtenidos por Cahouet [5].

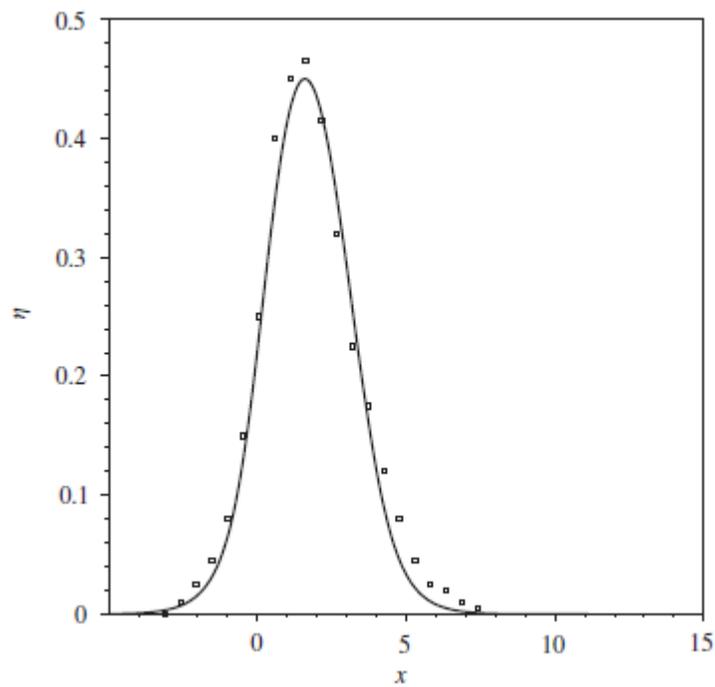
Consideremos un obstáculo de ecuación:

$$y(x) = \frac{27}{4} \frac{H}{L^3} x(x-L)^2, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (9.9)$$

donde H y L son la altura y el largo del obstáculo, respectivamente. Se eligen $H = 0,2$, $L = 2$ para el caso de prueba subcrítico y $H = 0,44$ y $L = 4,4$ para el caso de prueba supercrítico, de acuerdo con el montaje experimental de [5]. En las Figs. 9.1(a) y 9.1(b) se muestra, respectivamente, la concordancia entre la superficie calculada y las mediciones experimentales.



(a) Caso de prueba subcrítico: superficie calculada con $H = 0,2$ (línea sólida) y medidas experimentales de [5].



(b) Caso de prueba supercrítico: superficie calculada con $H = 0,44$ (línea sólida) y medidas experimentales de [5].

Figura 9.1: Pruebas numéricas del método de optimización adjunta.

Capítulo 10

Conclusiones

En este trabajo se investigó el flujo, irrotacional de un fluido no viscoso e incompresible, con superficie libre. Para ello, se definió matemáticamente dicho problema y mostraron sus dificultades. Luego, se introdujo el método de Sautreaux y se aplicó en algunos ejemplos concretos. Posteriormente, se aplicó la técnica de variaciones con respecto al dominio al caso particular del flujo sobre un obstáculo.

Los temas tratados se pueden dividir principalmente en dos partes:

1. La primera parte consiste en la obtención del método de Sautreaux y su aplicación a algunos ejemplos concretos.
2. La segunda parte trata acerca del flujo sobre un obstáculo y la aplicación de la técnica de variaciones con respecto al dominio.

La contribución de la primera parte de esta Memoria es la deducción rigurosa del método de Sautreaux y la obtención y estudio completo de tres nuevos ejemplos. Lo desarrollado en los Capítulos 3 al 5 permite concluir que el método de Sautreaux provee ejemplos de problemas con superficies libre, pero que difícilmente entrega soluciones con aplicaciones prácticas, más aún, las soluciones obtenidas con este método son limitadas.

La contribución de la segunda parte de esta Memoria es el cálculo riguroso de la derivada con respecto al dominio y la deducción del método de optimización adjunta para resolver el problema del flujo sobre el obstáculo. Esto generaliza un resultado de Van Brummelen [30] para el caso de variaciones normales. El análisis desarrollado al problema del flujo sobre el obstáculo se puede extender fácilmente a otros problemas con superficie libre y, por lo tanto, el método se puede usar como una herramienta extensiva para el análisis de este tipo de problemas.

Apéndice A

Elementos de variable compleja

En este capítulo se entregan los elementos de variable compleja necesarios para resolver problemas de flujo con superficie libre. Para un tratamiento mas profundo de los temas entregados acá véase [26].

El primer concepto que vamos a definir es el de función derivable en el sentido complejo o función *holomorfa*.

Definición A.1 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $u, v: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares de modo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$.

(i) f se dirá derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si es Fréchet-derivable en (x_0, y_0) como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (\text{A.2})$$

En tal caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

(ii) Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$ se dirá que es holomorfa en Ω .

A continuación se define el concepto de función analítica.

Definición A.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto.

(i) Una función f definida sobre Ω se dice analítica en el punto $z_0 \in \Omega$ si existe una serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ centrada en z_0 , con radio de convergencia positivo, tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \text{ en una vecindad de } z_0.$$

(ii) Si f tiene una expansión en serie de potencias en cada punto en Ω , se dirá que f es analítica en Ω .

Una consecuencia profunda de las definiciones A.1 - A.2 y la fórmula integral de Cauchy (véase [26], pp. 45-50.) es el siguiente

Teorema A.3 *Sea f una función definida sobre un abierto Ω . Entonces*

$$f \text{ es analítica en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ es holomorfa en } \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Es directo que toda función analítica es holomorfa. Para el recíproco véase [26] Teorema 4.4, pp. 49-50. \square

De ahora en adelante, en virtud del Teorema A.3, usaremos los términos holomorfa y analítica indiferentemente.

La primera conclusión de la definición A.2 es que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son suaves y satisfacen la ecuación de Laplace

Proposición A.4 *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $u, v: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares de modo que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$. Si f es holomorfa, entonces $u, v \in C^\infty(\Omega)$ y satisfacen la ecuación de Laplace en Ω , i.e.,*

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 & z = x + iy \in \Omega, \\ \Delta v(x, y) &= 0 & z = x + iy \in \Omega. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Que u, v sean $C^\infty(\Omega)$ es una consecuencia del Teorema A.3 y que u y v cumplan la ecuación de Laplace resulta directo de derivar con respecto a x e y las condiciones (A.1) y (A.2), respectivamente. \square

Una clase especial de funciones analíticas son las funciones holomorfas y biyectivas, que llamaremos mapeos conformes. Esta noción juega un rol fundamental en el tratamiento de problemas a superficie libre.

Definición A.5 *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dos abiertos. Una función $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ se dirá mapeo conforme si es holomorfa y biyectiva.*

La propiedad más importante de los mapeos conformes es el hecho de que la inversa de un mapeo conforme define automáticamente una función analítica.

Proposición A.6 *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dos abiertos. Si $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfa e inyectiva, entonces $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega_1$. En particular la inversa de f definida sobre $f(\Omega_1)$ es holomorfa, y así la inversa de un mapeo conforme también es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. véase [26], proposición 1.1, pp. 206-207. \square

Si $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es un mapeo conforme y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ se dice que la transformación $w = f(z)$ mapea conformemente un subconjunto del plano z en un subconjunto del plano w (Figura A.1).

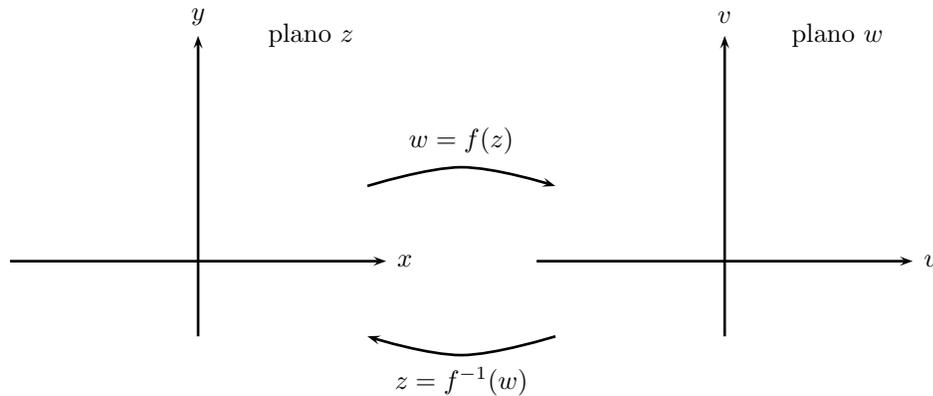


Figura A.1: Transformación conforme

Una propiedad interesante de las funciones holomorfas es el llamado *Principio de continuación analítica*, que establece que dos funciones analíticas son idénticas si coinciden en subconjuntos arbitrariamente pequeños.

Teorema A.7 (Principio de continuación analítica) *Sean f y g dos funciones holomorfas definidas en un abierto conexo Ω y tal que $f(z) = g(z)$ para todo z en alguna sucesión de puntos distintos con límite en Ω . Entonces $f(z) = g(z)$ en todo Ω .*

DEMOSTRACIÓN. véase [26] Teorema 4.8 y Corolario 4.9 pp. 52-53. □

Observación A.8 (i) *Como consecuencia del Teorema A.7 se tiene que si dos funciones analíticas coinciden en un abierto o en una recta, entonces ellas deben ser idénticas.*

(ii) *Si $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variable real y F es una función analítica tal que*

$$F(x) = f(x) \quad x \in (a, b).$$

Entonces F define una extensión analítica de f .

El siguiente teorema asegura que toda función analítica definida sobre un abierto simplemente conexo tiene primitiva.

Teorema A.9 *Sea f una función holomorfa definida sobre un abierto simplemente conexo Ω . Sea $z_0 \in \Omega$. Para cualquier punto $z \in \Omega$ la integral*

$$g(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

es independiente del camino en Ω desde z_0 a z , y g es una primitiva para f , esto es $g'(z) = f(z)$.

DEMOSTRACIÓN. véase [26], Teorema 5.2, pp. 96-97.

□

Bibliografía

- [1] G. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [2] G. Birkhoff and E. Zarantonello. *Jets, wakes, and cavities*. Academic Press Inc., 2nd, 1972 edition, 1957.
- [3] H. Blasius. Funktionentheoretische methoden in der hydrodynamik. *Z. Math.Phys.*, 58:90–110, 1910.
- [4] D. Boukari, R. Djouadi, and D. Teniou. Free surface flow over an obstacle. Theoretical study of the fluvial case. *Abstract and Applied Analysis*, 7:413–429, 2001.
- [5] J. Cahouet. *Numérique et expérimentale du probleme bidimensional de la résistance de vagues non-linéaire*. PhD thesis, ENSTA, 1984.
- [6] A. Craya. Recherches théoriques sur l'écoulement de couches superposées de fluides de densités différentes. *La Houille Blanche*, 4:44–55, 1949.
- [7] L. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2nd. edition, 2010.
- [8] L. Evans and R. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [9] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 3rd edition, 2001.
- [10] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Publishing Inc., 1985.
- [11] M. Gurevich. *Theory of jets in ideal fluids*. Academic Press Inc., 1965.
- [12] J. Hadamard. Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Mémoires des Savants Etrangers*, 33, 1908.
- [13] G. Hocking. Cusp-like free-surface flows due to a submerged source or sink. *Australian Mathematical Society*, 26(September 1983):470–486, 1985.
- [14] J. Jost. *Partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1st edition, 2002.

- [15] H. Lewy. On steady free surface flow in a gravity field. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5:413–414, 1952.
- [16] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Technical Report 76015, University P. et M. Curie (Paris VI), 1976.
- [17] A. Richardson. Stationary waves in water. *Phil. Mag.*, 40:97–110, 1920.
- [18] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1991.
- [19] C. Sautreaux. Sur une question d’hydrodynamique. *Annales scientifiques de l’É.N.S.*, 3e série(tome 10):95–182, 1893.
- [20] C. Sautreaux. Mouvement d’ un liquide parfait soumis à la pesanteur. Détermination des lignes de courant. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5e série(tome 7):125–160, 1901.
- [21] J. Serrin. Mathematical principles of classical fluid mechanics. In S. Flugge and C. Truesdell, editors, *Handbuch der Physik VIII/1*. Springer-Verlag, 1959.
- [22] J. Simon. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numer. Funct. and Optimiz.*, 2(7-8):649–687, 1980.
- [23] J. Simon. Optimal design for Neumann condition and for related boundary value conditions. In J.P. Zolesio, editor, *Boundary control and boundary variations*. Springer, 1988.
- [24] J. Simon. Differentiation on a Lipschitz manifold. In Bermúdez A., editor, *Optimal control of systems governed by pde.*, pages 277–283. Springer, 1989.
- [25] J. Simon. *Diferenciación de problemas de contorno respecto del dominio*. Universidad de Sevilla, 1991.
- [26] M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*. Princeton University Press, 2003.
- [27] C. Titri-Bouadjenak, D. Hernane, R. Ait-Yahia, and D. Teniou. Existence and uniqueness of the solution of a supercritical free surface flow problem over an obstacle. *Revista Matemática Complutense*, 23(2):515–527, April 2010.
- [28] E. O. Tuck. On air flow over free surfaces of stationary water. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, Series B.(19):66–80, 1975.
- [29] E. O. Tuck and A. J. Roberts. Bow-like free surfaces under gravity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 355:655–677, 1997.
- [30] E. Van Brummelen and A. Segal. Numerical solution of steady free-surface flows by the adjoint optimal shape design method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41:3–27, 2003.
- [31] J.-M. Vanden-Broeck. *Gravity-capillary free-surface flows*. Cambridge University Press, New York, 2010.

- [32] J.-M. Vanden-Broeck, L.W. Schwartz, and E.O. Tuck. Divergent low-Froude-number series expansion of nonlinear free-surface flow problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, 361(361):207–224, 1978.
- [33] H. Villat. Sur l'écoulement des fluides pesants. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3e série(tome 32):177–214, 1915.
- [34] M. Vitousek. Some flows in a gravity field satisfying the exact free surface condition. Technical Report 25, Standford University, Standford, California, 1954.
- [35] J. Wehausen and E. Laitone. Surface waves. *In Handbuch der Physik*, Vol. 8:736–740, 1960.
- [36] J. Wilton. On the highest wave in deep water. *Phil. Mag.*, 26:1053–1058, 1913.
- [37] R. Yeung. Numerical methods in free-surface flows. *Annual Review of Fluid Mechanics.*, 14(1):395–442, 1982.
- [38] D. Young, B. Munson, T. Okiishi, and W. Huebsch. *A brief introduction to fluid mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 5th edition, 2011.