



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

**ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA RESUSPENSIÓN VISCOSA EN FLUJO
LAMINAR**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

DANIEL IGNACIO CAICHAC AVILÉS

PROFESOR GUÍA:

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:

CHRISTIAN IHLE BASCUÑÁN

YARKO NIÑO CAMPOS

SANTIAGO DE CHILE

OCTUBRE 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL.
POR: DANIEL CAICHAC A.
FECHA: 25/10/2012.
PROF. GUÍA: Sr. ALDO TAMBURRINO.

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LA RESUSPENSIÓN VISCOSA EN FLUJO LAMINAR

El presente trabajo de título es un estudio experimental acerca del fenómeno de la resuspensión viscosa de partículas bajo la acción de un flujo laminar inducido por un gradiente de presiones dentro de un conducto cerrado. Este fenómeno está presente en ciertas instalaciones industriales tales como sedimentadores de flujo inclinado o equipamiento de microfiltración. El objetivo principal del trabajo es verificar cómo se comportan algunos modelos físicos propuestos por otros autores para un flujo de Poiseuille, y proponer eventuales mejoras.

Los experimentos se realizaron en un conducto cerrado, de paredes transparentes, con área transversal cuadrada, el cual se encontraba dentro de una cámara oscura y fue llenado con una mezcla de glicerina con agua y partículas esféricas de boyancia negativa a distintas concentraciones. Mediante la instalación de una cámara de alta velocidad normal a las paredes verticales e iluminación adecuada, fue posible medir un plano de intensidades de luz una vez que el fenómeno se encontrara en régimen permanente, a partir del cual se obtuvieron perfiles de concentraciones y alturas de resuspensión para distintas condiciones de alturas iniciales sedimentadas.

Se realizaron experiencias para concentraciones en volumen entre 5% al 30% para lechos monodispersos y ligeramente bidispersos ($d_{\max}/d_{\min} = 1.4$) y para caudales de mezclas glicerina-agua entre 3,2 y 10,8 ml/s.

Al comparar los resultados experimentales de alturas de resuspensión viscosas con los teóricos, obtenidos con el modelo de Leighton y Acrivos (1986) y el modelo de Shauly et al. (2000) se determinó que el primero se ajustaba bien a los resultados empíricos para el caudal alto y razonablemente bien para el caudal bajo. Sin embargo, el comportamiento general puede considerarse aceptable si se considera que el modelo de Leighton y Acrivos no contiene parámetros ajustables. Por su parte el modelo de Shauly et al. no se ajustaba bien a los datos experimentales, pero contiene una constante empírica K , la cual originalmente fue calibrada para flujos de Couette en geometrías anulares. Mediante un análisis dimensional y posterior calibración con los datos de la presente memoria, se obtuvo una relación entre el coeficiente K , la concentración en volumen de partículas ϕ_s y el número de Shields modificado, Ψ , que representa la relación entre fuerzas viscosas y gravitatorias sobre las partículas. Con el coeficiente K , expresado en función del flujo se obtuvieron buenos ajustes teórico-experimentales para el modelo de Shauly et al., inclusive mejor que para el modelo de Leighton y Acrivos. En cuanto a los perfiles de concentración, los resultados basados en ambos modelos presentan diferencias apreciables al compararlos con los resultados experimentales.

Las alturas de la interfaz del material resuspendido obtenidas a partir de perfiles de velocidad predichos por los modelos de Leighton y Acrivos y Shauly et al. concuerdan con las medidas en los experimentos de esta memoria, así como los perfiles de velocidad obtenidos experimentalmente por Schaflinger et al. (1995) en una geometría similar.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Albo, al Cacique y al Popular. Eterno campeón.

Por Colo-Colo vivo, por Colo-Colo mato, por Colo-Colo muero.

Gracias a la empresa BRASS por prestarme el reómetro, y a Erick Baeza por enseñarme a usarlo.

A Sergio Palma por prestarme el recurso computacional en momentos críticos.

A mis profesores guías, Aldo Tamburrino y Christian Ihle, por su apoyo y correcciones a lo largo del semestre. Sin ellos esta tesis no hubiera salido adelante.

A los cabros por las risas y el vacilón, Peladocus, Lapi, TT, Chalom, JC, Jujitsu. Colombo es un caso aparte, pues no es nadie.

A mi familia, pues es de mala clase no agradecer a la familia, y quien quiere ser mala clase?

A Manuel y Juan del laboratorio, por su ayuda con mi experimento.

ESTUDIO DE LA RESUSPENSIÓN VISCOSA EN FLUJO LAMINAR

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción.....	1
1.1. Estudio de la resuspensión viscosa.....	1
1.2. Objetivo General	1
1.3. Objetivos Específicos.....	1
1.4. Organización del informe	2
1.5. Alcances.....	2
2. Revisión bibliográfica	4
3. Diseño experimental y metodología	10
3.1. Instalación experimental.....	10
3.2. Metodología	16
3.2.1. Preparación de las muestras y medición de parámetros físicos de interés.....	17
3.2.2. Medición perfil de concentraciones y altura de resuspensión	22
4. Procesamiento de datos y presentación de resultados.....	24
4.1. Calibración experimental	24
4.2. Propagación de errores	28
4.3. Perfiles de concentración	30
4.4. Alturas de resuspensión	30
5. Análisis de resultados.....	34
5.1. Modelos teóricos	34
5.2. Resultados experimentales	43
6. Conclusiones	62
7. Bibliografía	66
ANEXOS	68

Glosario:

- a : Radio de las partículas
- $B = \frac{2}{9}g \frac{\Delta\rho}{\mu_0}$: Constante que acompaña al flujo de sedimentación de partículas
- $\tilde{D} = \frac{1}{3}\Phi^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^{8.8\Phi}\right)$: Coeficiente de difusión inducida por el esfuerzo de corte (Leighton & Acrivos, 1986)
- d_{max} : Diámetro máximo de partículas.
- d_{min} : Diámetro mínimo de partículas.
- d : Diámetro de partículas
- $f(\phi)$: Función de escondimiento de las partículas.
- F : Flujo total de partículas
- g : Aceleración de gravedad.
- H : Altura total del canal utilizado en los experimentos.
- h_{res} : Altura de resuspensión
- h_0 : Altura del lecho sedimentado
- $\Delta h = h_{res} - h_0$: Diferencia de altura de resuspensión menos sedimentada
- M : Masa
- P : Presión
- $P_x = \frac{\partial P}{\partial x}$: Gradiente de presiones en la dirección longitudinal al flujo
- Q : Caudal
- $q = \frac{Q}{w}$: Caudal por unidad de ancho
- R : Radio de curvatura de las líneas de corriente
- $R_h = \frac{\Omega}{\chi}$: Radio hidráulico
- $Re = U \frac{4R_h}{\nu_0}$: Número de Reynolds
- $U = \frac{Q}{\Omega}$: Velocidad media del flujo
- $V = [u_i, v_j, w_k]$: Vector velocidad del flujo
- V_{ol} : Volumen
- V_{ols} : Volumen de sólidos
- V_{olL} : Volumen de líquido
- $V_{olT} = V_{ols} + V_{olL}$: Volumen total

- w : Ancho del canal
- Z : Eje de coordenadas en la dirección vertical o \hat{k} , paralelo a la aceleración de gravedad.
- χ : Perímetro mojado
- Ω : Área de escurrimiento
- $\epsilon = \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f}$: Peso específico
- $\dot{\gamma}$: Tasa de deformación angular
- $\phi(z)$: Concentración en volumen de partículas en función de la altura Z
- ϕ_0 : Concentración máxima de empaquetamiento para lecho monodisperso
- ϕ_m : Concentración de empaquetamiento máxima para lecho bidisperso
- $\phi_s = \frac{Vol_s}{Vol_T}$: Concentración en volumen de partículas dentro del experimento.
- ϕ_w : Concentración de partículas en el fondo del canal
- ρ_f : Densidad del fluido
- ρ_s : Densidad de las partículas
- $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$: Diferencia de densidades entre las partículas y el fluido.
- μ_0 : Viscosidad dinámica del fluido puro
- μ : Viscosidad dinámica de la mezcla.
- $\mu_{ef} = \mu/\mu_0$: Viscosidad efectiva adimensional.
- ν_0 : Viscosidad cinemática del fluido puro
- $\Psi = \frac{3}{2} \frac{qv_0}{(H/2)^2 ag\epsilon}$: Número de Shields modificado.
- τ : Esfuerzo de Corte

1. Introducción

1.1. Estudio de la resuspensión viscosa

Es de esperarse que en flujos turbulentos que escurran por sobre un lecho de partículas previamente sedimentadas exista una resuspensión de las mismas debido a las fluctuaciones de velocidad y presión asociadas a la turbulencia, la cual es capaz de levantar partículas desde el lecho fácilmente. Sin embargo, se ha observado que en condiciones de flujo laminar también existe una resuspensión de partículas asociada a efectos como la difusión debido a las variaciones locales del esfuerzo de corte o “*shear induced diffusion*”, y no a las fluctuaciones turbulentas.

El tema propuesto plantea realizar un estudio experimental acerca de la resuspensión viscosa en flujo laminar, en particular para un flujo de Poiseuille. En el estudio se realizarán experimentos con lechos monodispersos y bidispersos, tema que se encuentra poco estudiado en la actualidad.

La motivación de este estudio proviene de sus aplicaciones potenciales en minería, tanto para el diseño y optimización de sedimentadores inclinados, donde se intenta obtener el menor grado de resuspension de partículas, como para el transporte de flujos bifásicos en condiciones laminares, donde, en muchos casos, se desea tener un transporte generalizado de las mismas.

Si bien la motivación principal de este estudio es su aplicación en la minería, también puede aplicarse a otras industrias donde se trabaje con fluidos muy viscosos y por lo tanto sea mas probable tener un flujo laminar, como lo es la industria alimenticia u otras industrias químicas donde existan procesos de micro filtración.

1.2. Objetivo General

- Verificar experimentalmente y, si corresponde, proponer modificaciones a los modelos de resuspensión viscosa publicados por diferentes autores aplicados en un flujo laminar debido a un gradiente de presiones en un conducto cerrado.

1.3. Objetivos Específicos

- Diseñar y construir una instalación experimental que permita la existencia del fenómeno

- Diseñar y habilitar técnicas de visualización que permitan caracterizar y cuantificar el fenómeno de resuspensión viscosa
- Verificar la validez de los modelos de resuspensión existentes según los resultados experimentales obtenidos
- Modificar los modelos utilizados, en caso de ser necesario.

1.4. Organización del informe

El informe se estructura en 6 capítulos, los cuales son descritos a continuación:

- **Introducción:** Algunos aspectos generales y motivación del estudio. Se presentan los objetivos y alcances del trabajo y por último se presenta la revisión bibliográfica del tema, la cual introduce los conceptos básicos del fenómeno y orienta el enfoque del trabajo a realizar.
- **Revisión bibliográfica:** En este capítulo se presenta la revisión bibliográfica del tema, la cual introduce los conceptos básicos del fenómeno y orienta el enfoque del trabajo a realizar.
- **Diseño experimental y metodología:** En este capítulo se muestra en detalle cual serán las instalaciones experimentales a diseñar y construir, y también se explica la metodología experimental asociada a la toma de datos.
- **Procesamiento de datos y presentación de resultados:** En este capítulo se explican los procedimientos utilizados para el procesamiento de los datos y se presentan los resultados en forma de parámetros de interés.
- **Análisis de resultados:** En este capítulo se analizan los resultados presentados en el capítulo anterior y se comparan con aquellos de otros autores.
- **Conclusiones:** En este capítulo se presentan las conclusiones más relevantes del estudio experimental.

1.5. Alcances

En esta sección se discuten los alcances del presente estudio experimental:

- Dentro de los alcances del presente trabajo de título, se encuentra el diseño y montaje de la instalación experimental. Para esto se diseñará un equipo que permita obtener un flujo laminar en el cual se alcance la condición de resuspensión en régimen de equilibrio. Además de este diseño físico de la instalación, es necesario proponer y verificar una técnica que permita observar el fenómeno.
- Es necesario medir los parámetros de interés involucrados en el proceso de la resuspensión viscosa, dentro de los cuales se incluyen medir la viscosidad del fluido a utilizar (para lo cual se utilizará un reómetro); medir la densidad de las partículas a resuspender y del fluido que actuará como medio de transporte; medir cual será el caudal que estará fluyendo por el aparato, además de medir la altura de resuspensión de las partículas.
- A partir de la revisión bibliográfica del tema se van a obtener las hipótesis que permitan el análisis de resultados obtenidos y sus vínculos con estudios anteriores del tema.
- Si bien para medir el perfil de concentraciones de partículas en el ducto con gran precisión se necesitan equipos sofisticados como una resonancia magnética nuclear (Phillips et al. 1992, Altobelli et al. 1991), se medirá el perfil de concentraciones de forma aproximada con una técnica visual basada en la intensidad de luz, la cual se detalla en la metodología. Esta técnica permitirá obtener de forma más precisa cual es la altura de resuspensión de las partículas, equivalente al punto donde la concentración es nula.
- Queda fuera de los alcances el desarrollo de un modelo numérico del fenómeno y la incorporación de efectos como las corrientes secundarias o el considerar un tensor de tensiones totales anisotrópico. También queda fuera de los alcances el realizar experimentos con fluidos no newtonianos. Los experimentos serán analizados en régimen permanente por lo que el análisis transiente no será tomando en consideración.

2. Revisión bibliográfica

Se sabe que en un escurrimiento en régimen turbulento, son los efectos inerciales asociados a las fluctuaciones turbulentas de velocidad y presión, aquellos que controlan el proceso de resuspensión de partículas desde su lecho. Sin embargo se ha observado que flujo en régimen laminar, donde los efectos inerciales son despreciables, bajo la aplicación de un esfuerzo de corte existe una resuspensión de partículas desde el lecho, inclusive cuando las partículas son lo suficientemente grandes ($\text{Radio}_{\text{partículas}} > 40 \mu\text{m}$) como para despreciar los efectos brownianos de difusión molecular (Leighton & Acrivos 1987a). Este fenómeno ha sido denominado como “resuspensión viscosa”.

El fenómeno de la resuspension viscosa ha sido previamente estudiado por una serie de autores (Leighton & Acrivos 1986; Leighton & Acrivos 1987a, 1987b; Acrivos et al. 1993) desde su descubrimiento o primera descripción por Gadala-Maria (1979), principalmente desarrollando estudios experimentales y modelos teóricos de los mecanismos que dominan este fenómeno en régimen permanente. El fenómeno fue observado por primera vez por Gadala-Maria (1979) cuando se encontraba midiendo los parámetros reológicos de una mezcla de silicona con partículas de carbón en una concentración del 10% en volumen. Estas partículas poseían una densidad mayor a la del fluido por lo que sedimentaban. El fenómeno lo observó luego de haber dejado a las partículas sedimentando toda la noche y al día siguiente haberlas sometido a un esfuerzo de corte, al hacer girar a baja tasa un plato sobre otro (en lo que se conoce como geometría de platos paralelos). Observó que si bien no existía turbulencia, a medida que aumentaba la tasa de deformación también aumentaba la viscosidad y las partículas resuspendían desde su lecho. Lo que le llamó la atención fue que aparte de existir la resuspension de partículas en flujo laminar, la viscosidad de la mezcla iba aumentando a medida que aumentaba la tasa de deformación hasta llegar a un equilibrio, en el cual pudo concluir que el proceso de resuspension se encontraba completo o en régimen permanente.

En este tipo de resuspensión de partículas, son tres los efectos que predominan para lograr un levantamiento desde el lecho. Estos son el asociado a las fuerzas de sustentación de la partícula, y la fuerza asociada a la difusión del esfuerzo de corte, más conocida como *shear-induced diffusion*. La primera corresponde a la fuerza que existe cuando una partícula única es sometida a un campo de

velocidades el cual está en contacto con el lecho y, debido a la deformación de las líneas de corriente, existe una aceleración del flujo por encima de la partícula, resultando en una fuerza neta ascendente y por consecuencia un levantamiento de la partícula. La segunda fuerza, o difusión debida al esfuerzo de corte, ocurre cuando una partícula que se traslada por su línea de corriente interactúa con otras partículas, generando un movimiento aleatorio que la traslada fuera de su línea de flujo hacia lugares de menor concentración y por consecuencia menor viscosidad (Leighton & Acrivos 1987b). La tercera fuerza corresponde a la difusión debido al gradiente en los esfuerzos de corte. En este caso las partículas se mueven desde lugares de mayores esfuerzos de corte hacia lugares de menores esfuerzos de corte, y esta difusión tiene asociado un coeficiente de difusión distinto al de la difusión inducida por el esfuerzo de corte. Esta última fuerza sin embargo no está siempre presente, ya que en geometrías como un flujo de Couette entre placas paralelas el esfuerzo de corte es constante, mientras que para geometrías como flujos de Poiseuille en conductos cerrados esta fuerza usualmente se desprecia pues es de menor orden de magnitud que la asociada a la difusión por esfuerzo de corte (*shear-induced diffusion*). En la Figura 1 y Figura 2 se aprecian esquemas de estas primeras dos fuerzas.

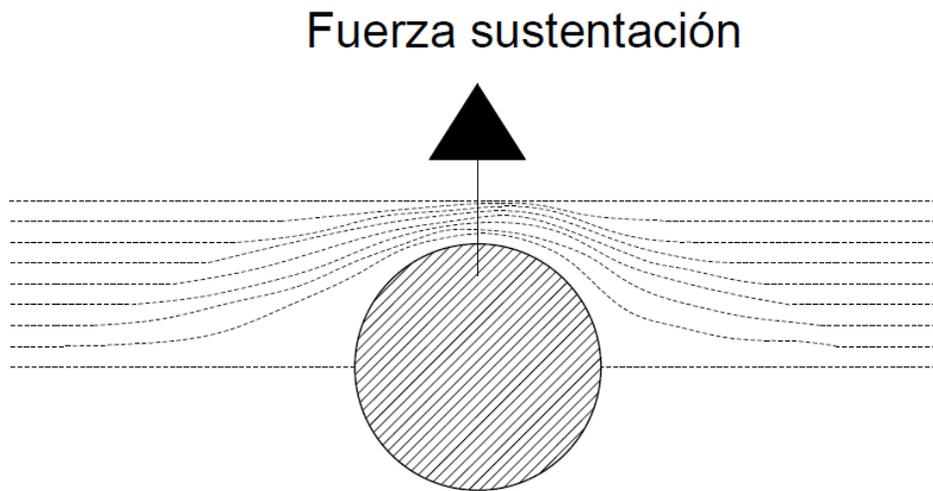


Figura 1: Esquema explicativo de la fuerza de sustentación. Debido a la aceleración del flujo por sobre la partícula existe una fuerza neta ascendente.

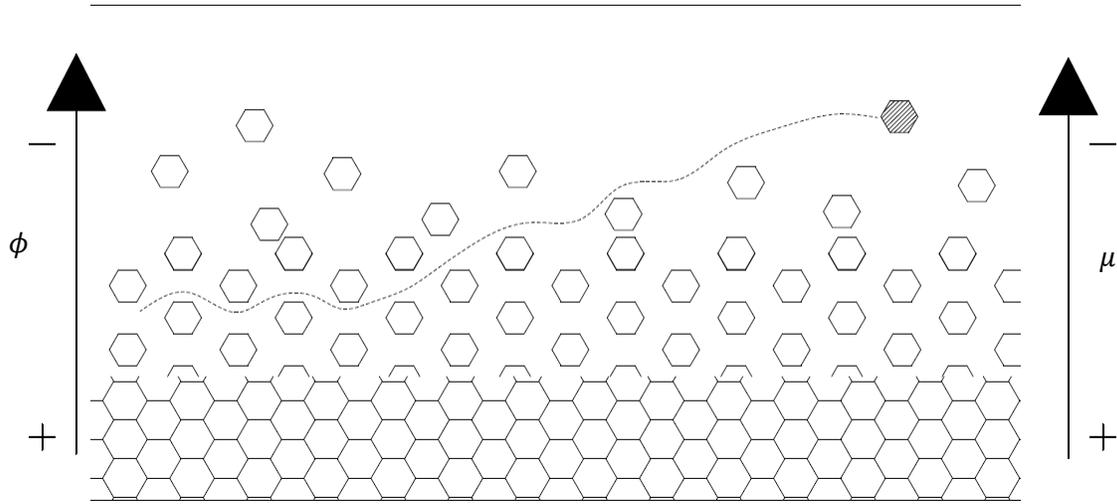


Figura 2: Esquema de la difusión inducida por el esfuerzo de corte. Las partículas emigran de zonas con mayor concentración, donde existe una mayor frecuencia de colisiones, a zonas de menor concentración, donde existe una menor frecuencia de colisiones. Este gradiente en concentraciones producto de la migración de partículas significa también un gradiente en la viscosidad local.

Uno de los primeros modelos para describir este fenómeno fue propuesto por Leighton & Acrivos (1986), donde se supone que el fenómeno ha llegado a un estado de régimen permanente o equilibrio, i.e. cuando la altura de resuspensión ha llegado a un valor máximo y existe un equilibrio entre las partículas que se suspenden y sedimentan. En este modelo, para el flujo gravitacional hacia abajo se supone que las partículas sedimentan con la velocidad de sedimentación de Stokes, corregidos por la función de obstaculización que da cuenta de las interacciones de las partículas con partículas vecinas. Por otra parte, para el flujo en la dirección contraria a la gravitacional, la difusión inducida por el esfuerzo de corte fue modelada como una difusión hidrodinámica debido a un gradiente en la concentración de partículas, la cual escala con el producto entre la tasa de deformación y el radio de las partículas al cuadrado (Leighton & Acrivos, 1987a), por lo que para un flujo con un esfuerzo de corte constante, como lo sería un flujo de Couette, se tiene la siguiente ecuación de balance:

$$\frac{2}{9} f(\Phi) \frac{a^2 g \Delta \rho}{\mu_0} \Phi = -a^2 \gamma \tilde{D} \frac{d\Phi}{dz} \quad (1)$$

donde a : radio de la partícula; g : aceleración de gravedad; $f(\phi)$: función de obstaculización o escondimiento; μ_0 : viscosidad dinámica del fluido puro; $\dot{\gamma}$: tasa de deformación angular;

Φ : concentración en volumen de partículas; \tilde{D} : coeficiente de difusión debido al esfuerzo de corte adimensionalizado por $a^2\dot{\gamma}$, y $\Delta\rho$: Diferencia de densidades entre la partícula y el fluido.

Otros supuestos de este modelo son que la suspensión se trata como un medio continuo, que el flujo es permanente, y que la altura de resuspensión es mucho más grande que el diámetro de las partículas.

Uno de los primeros problemas que se presentó al momento de plantear estas ecuaciones fue que la función de obstaculización no había sido medida para sedimentación bajo la presencia de un esfuerzo de corte (Leighton & Acrivos 1986), por lo que fue necesario aproximarla por

$$f(\Phi) = \frac{1 - \Phi}{\mu_{ef}} \quad (2)$$

donde μ_{ef} : viscosidad efectiva adimensional, la cual depende fuertemente de la concentración de partículas, y está dada por la siguiente relación (Leighton, 1985)

$$\mu_{ef} = \left(1 + \frac{1.5\Phi}{1 - \frac{\Phi}{\Phi_0}} \right)^2 \quad (3)$$

donde $\Phi(z)$: concentración volumétrica de partículas; Φ_0 : concentración de empaquetamiento máxima, $\Phi_0 \approx 0.58$ para partículas esféricas.

Un modelo bastante utilizado por los distintos autores para caracterizar la función de obstaculización es el que se presenta en la ecuación (2), presentado por Leighton & Acrivos (1986), aunque existen otros como el de Richardson & Zaki (1954) el cual dice que:

$$f(\Phi) = (1 - \Phi)^{5.1} \quad (4)$$

O el modelo de Revay & Higdon (1992) el cual dice que:

$$f(\Phi) = (1 - \Phi)^{6.55}(1 + 3.458\Phi^2 + 8.990\Phi^3) \quad (5)$$

Sin embargo poca influencia tiene en el resultado final la función que se utilice, siempre y cuando sea monótonamente decreciente con ϕ (Schaflinger et al. 1990). Para lechos bidispersos estas expresiones no se encuentran disponibles por lo que es común que se utilice el primer modelo

presentado, incorporando la viscosidad efectiva adimensional (Tripathi & Acrivos, 1999; Shauly et al. 1998).

En la práctica la aproximación presentada en la ecuación (2) fue usada hasta estudios más recientes como en Shauly et al. (2000). Otro factor que fue necesario evaluar fue el coeficiente de difusión adimensional debido al esfuerzo de corte, el cual fue propuesto originalmente por Leighton & Acrivos (1987b) como:

$$\tilde{D} \cong \frac{1}{3} \Phi^2 \left(1 + \frac{1}{2} e^{8.8\Phi} \right) \quad (6)$$

Este ha sido utilizado por otros autores (Acrivos et al. 1993; Schaflinger et al. 1990 y 1995, Zhang & Acrivos 1994). Si bien este coeficiente fue determinado en una configuración de flujo anular, ha sido utilizado en otros tipos de flujo y se han obtenido buenos resultados (Schaflinger et al. 1990 y 1995).

Una vez que fueron sentadas las bases de la resuspensión en flujos anulares, como lo son los flujos de Couette que ocurren en los reómetros de este tipo (Leighton & Acrivos 1986, 1987a, 1987b; Acrivos et al. 1993), fueron otros autores los que llevaron el problema a geometrías más comunes en la práctica, como canales y tuberías (Schaflinger et al. 1990 y 1995, Zhang & Acrivos 1994). Fue entonces cuando se tuvo que considerar el efecto de un problema en 3 dimensiones, junto con la presencia de corrientes secundarias que estas geometrías involucraban. Así tanto Zhang & Acrivos (1994) como Ramachandran & Leighton (2000) desarrollaron modelos numéricos, pues debido al alto número de ecuaciones diferenciales acopladas no lineales no era posible resolverlas en forma analítica, para ver como se comportaba el efecto de resuspensión viscosa en estas geometrías cuando se estaba en el régimen de equilibrio mencionado previamente. Las principales diferencias fueron que el modelo de Zhang & Acrivos consideraba un comportamiento isotrópico del tensor de tensiones totales, mientras que el modelo de Ramachandran & Leighton comparaba efectivamente la diferencia entre considerar un tensor isotrópico y uno anisotrópico. Es más, Ramachandran & Leighton llevaron más allá su análisis, comparando los resultados obtenidos entre considerar una reología newtoniana y no newtoniana.

Sin embargo hasta el momento la mayoría de los trabajos experimentales se han centrado en el estudio de la resuspensión en lechos monodispersos, es decir con un radio de partículas uniforme, y en reómetros. Shauly et al. (2000) proponen un modelo para lechos polidispersos, pero que fue validado con los datos de Acrivos et al. (1993), cuyos experimentos fueron en lechos uniformes, y en el caso más extremo con los datos de Tripathi & Acrivos (1998), que realizaron experimentos en

lechos bidispersos. Luego es de interés realizar experimentos en un flujo de Poiseuille y analizar los resultados de la resuspensión con el modelo propuesto por Shauly et al.

Como el objetivo principal de este trabajo de título es verificar y en caso de ser necesario proponer modificaciones a las relaciones que permiten modelar el proceso de resuspensión en flujos inducidos por diferencias de presión longitudinales en conductos cerrados, es probable que no se tome en cuenta modelos tan complejos como el de Ramachandran & Leighton Jr., pues el desarrollo de un modelo numérico para considerar los efectos de corrientes secundarias en la condición de equilibrio va más allá de los alcances de este trabajo, junto con la complejidad que involucra medir el perfil de concentraciones en las distintas secciones del experimento. Por otra parte el modelo de Shauly presenta gran interés debido a la inclusión del lecho bidisperso y por contener parámetros empíricos explícitos y de fácil manipulación.

Un valor importante a tomar en cuenta es el parámetro de Shields modificado, el cual se define como la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas gravitatorias sobre las partículas, donde en una tubería cuadrada queda definido como (Schaflinger et al. 1990):

$$\Psi = \frac{3}{2} \frac{qv_0}{\left(\frac{H}{2}\right)^2 ag\epsilon} \quad (7)$$

donde q : caudal por unidad de ancho en la tubería; g : fuerza de gravedad; H : longitud característica de la tubería, definida como la altura total del canal; ν_0 : viscosidad cinemática del fluido puro; a : radio de las partículas; ϵ : Peso específico relativo, definido como:

$$\epsilon = \frac{(\rho_{sólido} - \rho_{fluido})}{\rho_{fluido}} \quad (8)$$

Este parámetro es importante pues relaciona las fuerzas de gravedad con las viscosas. A primera vista, debiese esperarse que si es un número grande debiese ocurrir el proceso de resuspensión, mientras que si es pequeño las fuerzas gravitatorias dominan sobre las viscosas, por lo que no se debería observar el fenómeno.

3. Diseño experimental y metodología

En este capítulo se describe el diseño de la instalación experimental y se presenta el detalle de cual será la metodología utilizada para medir los distintos parámetros de interés relacionados con el proceso de la resuspensión viscosa. También se detalla cuales serán las muestras a utilizar y como serán preparadas para ser ingresadas a la instalación experimental.

3.1. Instalación experimental

Para poder observar el fenómeno de la resuspensión viscosa se va a construir un circuito cerrado por donde escurrirá el fluido de tal forma de generar un régimen permanente que permita llegar a la condición de equilibrio antes mencionada. Este circuito cerrado o “loop”, en el que estará presente el fluido, es similar al experimento de Altobelli (1991), que se aprecia en la Figura 3, pero con algunas modificaciones.

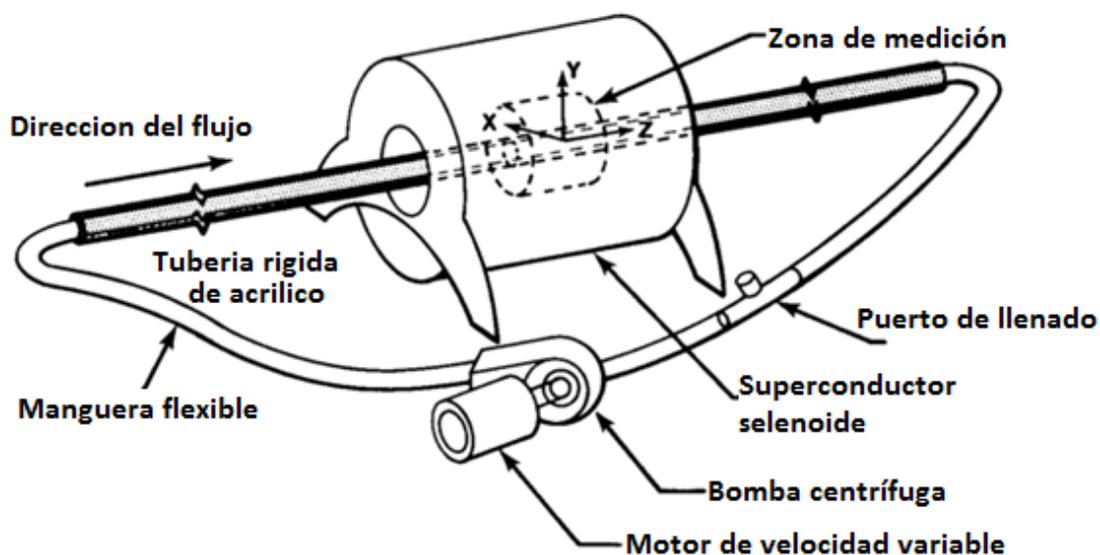


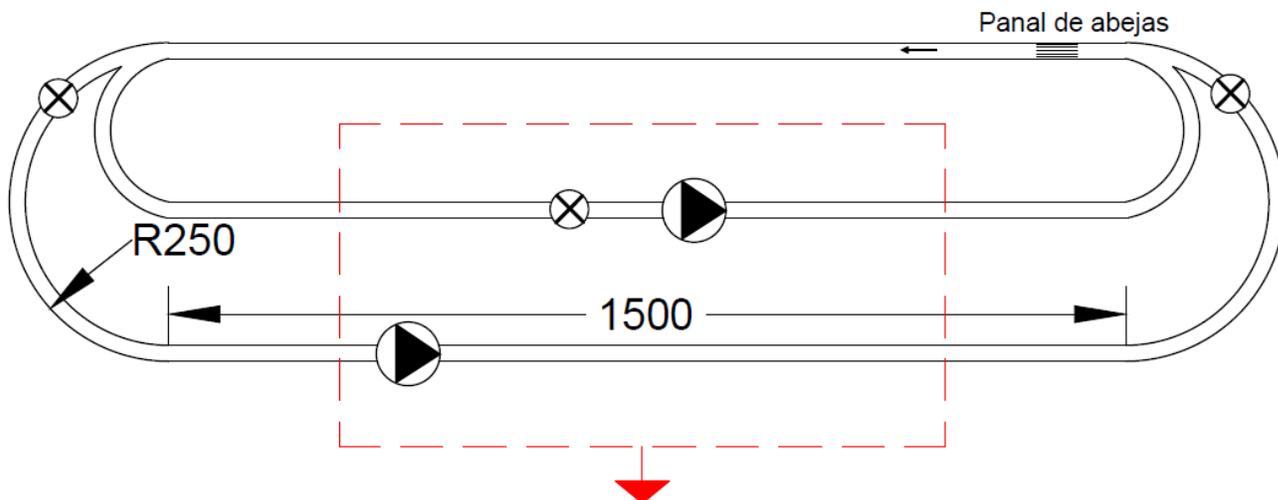
Figura 3 : Esquema del loop experimental de Altobelli (1991). Consiste en un puerto de llenado y vaciado, una bomba centrífuga cuyo motor está conectado a un variador de frecuencia y un NMR o resonancia magnética nuclear que permite medir las concentración $\Phi(x,y)$ en toda la zona de observación. Fuente: Altobelli (1991).

La instalación experimental que se encuentra ubicada en el laboratorio de Hidráulica Francisco Javier Domínguez de la Universidad de Chile, consta de dos circuitos de tuberías de 2,5 cm. de diámetro y 1,5 m. de largo, conectada mediante tuberías semicirculares, con un radio de curvatura de 25 cm, a un canal cerrado, de dimensiones interiores de $3 \times 3 \text{ cm}^2$. A una de las tuberías de 1,5 m de largo se encuentra conectada una bomba, cuyo objetivo es generar un flujo homogéneo que arrastre tanto las partículas como el fluido a lo largo de toda la zona de observación, para luego ser apagada y dejar el sistema sedimentando. Con esto se asegura que en todo el dominio inicial el lecho de partículas sea lo más uniforme posible, es decir que el empaquetamiento y altura del lecho sea constante en toda la zona de observación, a lo largo del eje longitudinal. La bomba empleada corresponde a una bomba marca Askoll con una potencia de 30 W, usualmente empleada en lavadoras domiciliarias.

En la otra tubería de 2,5 cm de diámetro existe una bifurcación en diagonal hacia una trampa de sedimentos de dimensiones 25x40x15 cm (ancho, largo, alto), luego de la cual se encuentra conectada otra bomba centrífuga marca Humboldt con una potencia de 0,5 HP. El objetivo de esta bomba centrífuga es generar un flujo laminar, sin vórtices y sin partículas, a diferencia de la bomba de lavadora. Es decir, el objetivo de esta segunda bomba es impulsar fluido puro. Es por esto que se instaló la trampa de sedimentos. Esta trampa de sedimentos funciona gracias el principio de continuidad, pues al no haber compresión del fluido ni de las partículas, la expansión en la sección significa una menor velocidad del flujo, por lo que si alguna partícula llega a resuspender a tal punto de entrar en esta trampa, debería sedimentar gracias a las bajas velocidades que existen en ésta. En las Figura 4 y Figura 5 se presentan unos esquemas de vista en planta y elevación del experimento. Otra medida de seguridad que se implementó para asegurar que el flujo impulsado por la bomba centrífuga que entra a la zona de observación se encuentre libre de partículas, fue la incorporación de un filtro en su entrada, de tal manera de retener toda partícula que entre a la trampa de sedimentos. Este filtro también cumple con un propósito operacional pues sirve para lavar de sedimentos el montaje experimental. Simplemente se hace funcionar por un período prolongado el experimento y todas las partículas quedan atrapadas en el filtro, evitando así el vaciado total del sistema cuando se quieren cambiar las partículas a estudiar.

En la Figura 6 se observa una foto del montaje experimental ya construido.

Zona de medición



Detalle tramo con bombas

Figura 4: Esquema en planta de la instalación experimental. En el tramo superior se observa la zona de medición y en el tramo inferior se encuentra todo el sistema de llenado/vaciado y las bombas que le entregan presión al sistema. Al comienzo de la zona de medición se encuentra un panal de abejas o alineador de flujo.

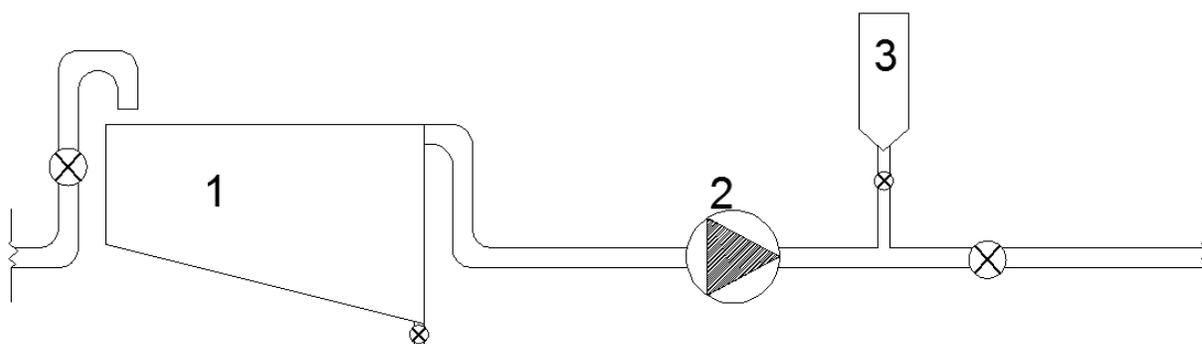


Figura 5: Esquema en elevación de la sección de la instalación experimental donde no se realizarán las mediciones. El detalle de que representa cada número es el siguiente: (1) Trampa de sedimentos, (2) Bomba centrífuga, (3) Estanque de carga, Todas las cruces encerradas en un círculo representan válvulas.

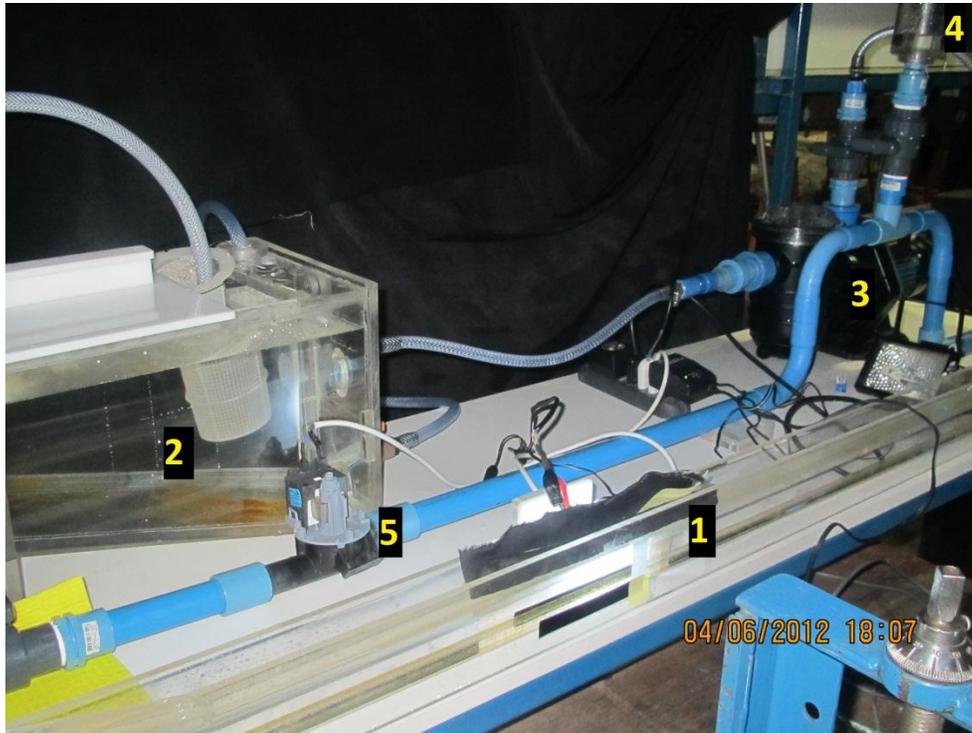


Figura 6: Esquema general del montaje experimental. En la fotografía se puede apreciar (1) Zona de observación; (2) Trampa de sedimentos; (3) Bomba centrífuga; (4) Estanque de carga; (5) Bomba de lavadora

En el tramo rectangular, que es el lugar donde se observará el fenómeno, se instalará un *honeycomb* o panal de abejas, el cual consiste en una serie de cilindros de pequeños diámetros ($d=5$ mm) los cuales tienen la función de neutralizar las corrientes secundarias producto del pequeño radio de curvatura a la entrada, pero a la vez dejen pasar el fluido y los sedimentos. Esto se aprecia en la Figura 7.



Figura 7: Detalle del panal de abejas o alineador de flujo.

La trampa de sedimentos se encuentra abierta a la atmosfera y en su punto más alto existe una caída de agua la cual permitirá aforar el flujo. Para evitar esta caída de agua genere burbujas cuando se están realizando las mediciones, se le agregará una manguera la cual irá conectada hasta el fondo de la trampa, evitando así el impacto del chorro en la interfaz fluido-atmósfera. Además en el circuito de la bomba de lavadora se instalará un estanque de carga el cual permite llenar el sistema con partículas. Como se puede apreciar en la Figura 5 se instalarán una serie de válvulas que permiten tanto el llenado, el vaciado o la operación del sistema, dependiendo cuales están abiertas y cerradas. Finalmente, la trampa de sedimentos tiene una válvula en su parte inferior, la cual permite el vaciado del sistema pues actúa como un desagüe.

Es importante mencionar el detalle correspondiente a la entrada y salida del flujo en la sección de medición, o canal de área transversal de $3 \times 3 \text{ cm}^2$. Este tramo tiene 2 entradas y 2 salidas, correspondientes a las secciones conectadas a la bomba de lavadora y a la bomba centrífuga. El circuito correspondiente a la bomba de mezcla entra y sale de forma horizontal (paralela) a la zona de medición y pasa a través del alineador de flujo. Por su parte el circuito conectado a la segunda bomba entra y sale con un ángulo inclinado a la zona de medición. El objetivo de esto es evitar la resuspensión de las partículas debido al impacto generado por la inercia que trae el flujo, lo que ocurriría si llegara en forma perpendicular. Aparte de esto en esta llegada existe un aumento de la sección lo que reduce la velocidad del flujo en la entrada y la salida, evitando que se produzcan socavaciones locales. Una ventaja de la independización de los circuitos es que ayuda a evitar el

confundir fenómenos, pues al funcionar la bomba centrífuga va a entrar fluido puro por la parte superior del canal, con lo que se puede afirmar que la resuspensión de partículas se debe por efecto de la resuspensión viscosa, mientras que si llegara de forma horizontal entrarían tanto fluido como sedimentos a la zona de medición, con lo que podría ocurrir que algunas de las partículas que se vean flotando sean las que estaban sedimentadas dentro del alineador de flujo. Este detalle de ambas entradas se puede ver en la Figura 8.

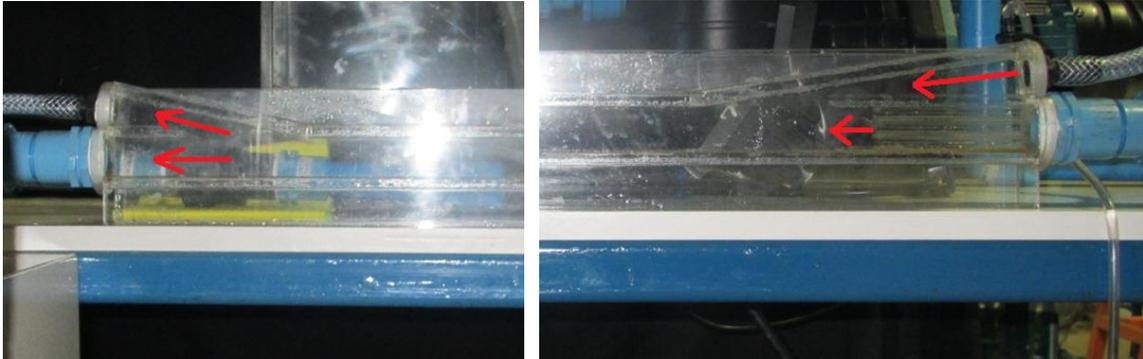


Figura 8: Detalle de la entrada y salida de la sección de medición

En la Figura 9 se observa el detalle del filtro ubicado en la trampa de sedimentos, junto con la manguera conectada desde el punto de aforo hasta el fondo del estanque, la cual sirve para evitar la generación de burbujas.

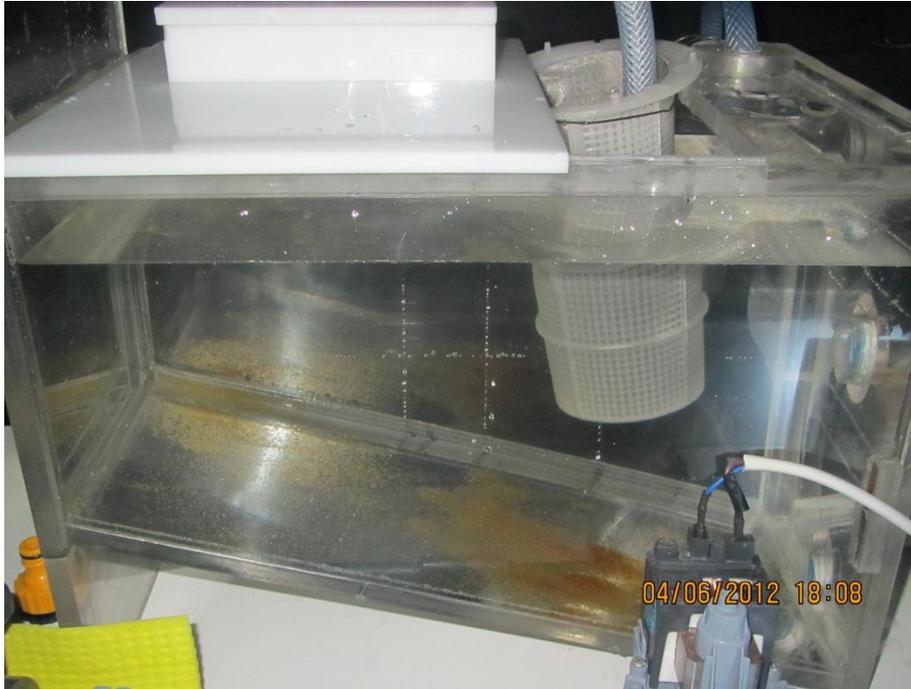


Figura 9: Detalle de la trampa de sedimentos con el filtro para retener las partículas.

Todo el montaje experimental está ubicado dentro de una cámara oscura, la cual es iluminada por una luz artificial y constante. Esto se debe a que para poder determinar el perfil de concentraciones de forma válida es necesario aislarse de las fluctuantes luces naturales y se explica en detalle en la Sección 3.2.2.

3.2. Metodología

La metodología a seguir consiste principalmente en dos pasos. El primero corresponde a preparar las muestras y realizar ensayos preliminares con un lecho monodisperso, los que corresponderían a “ensayos de prueba”. En estos experimentos lo que se busca es validar el proceso de toma de datos y calibrar aquellos parámetros que necesiten una calibración. Básicamente con estos ensayos preliminares se busca cumplir el objetivo específico de buscar una técnica de visualización y visualizar el fenómeno. Una vez que se haya cumplido este objetivo se dará paso a la siguiente parte del experimento la cual consiste en utilizar la técnica de visualización previamente desarrollada para medir las condiciones experimentales finales tanto el lecho monodisperso como bidisperso.

3.2.1. Preparación de las muestras y medición de parámetros físicos de interés

Para los ensayos experimentales se seleccionaron cuáles serían las partículas y el fluido a utilizar. Como partículas, se seleccionaron unas resinas utilizadas en el proceso de la producción de agua desionizada. Estas resinas son esféricas y de un color miel, con diversos tamaños en su mayoría entre los 200 y 600 μm . En la Figura 10 se aprecia una imagen vista al microscopio de las resinas antes del proceso de tamizado.

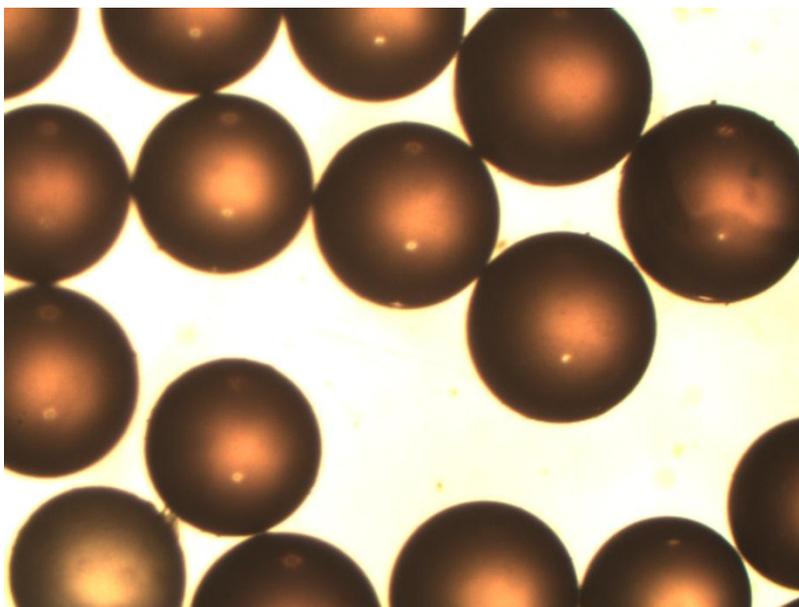


Figura 10: Detalle de las resinas en su color natural antes de ser tamizadas.

El primer problema que hubo que resolver fue que al separar las partículas en 2 tamaños distintos y mezclarlas, se hacía muy difícil diferenciarlas de forma visual sin la ayuda de un microscopio. Para resolverlo lo que se hizo fue teñir un tamaño de partículas con permanganato de potasio. Se vierte el permanganato en una fuente con agua para formar una solución de color morado oscuro, casi negro, y luego se vierten las partículas secas dentro de esta mezcla, se dejan reposar una noche y a continuación se secan. En la Figura 11 se puede observar una muestra de partículas ya teñidas, antes de separarlas por tamaños.

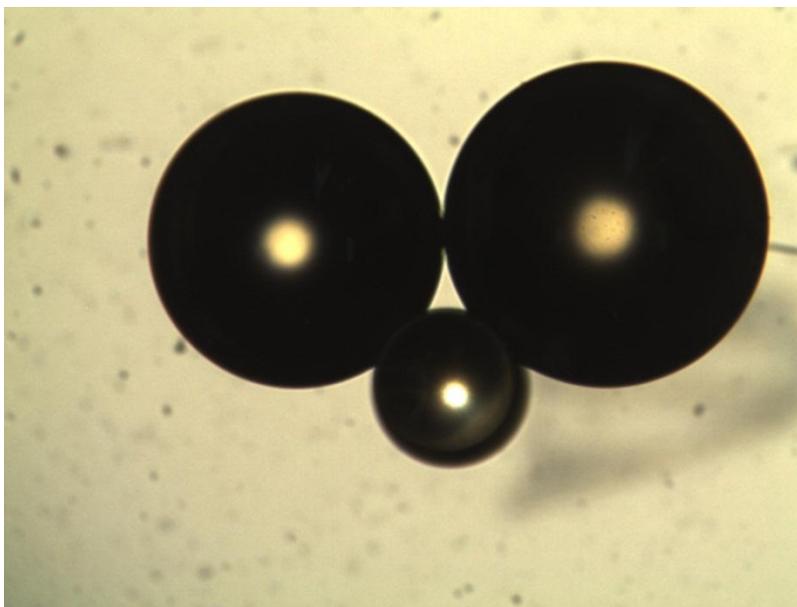


Figura 11: Detalle de las resinas una vez teñidas con permanganato de potasio.

Una vez resuelto el problema del color de las partículas, el siguiente paso fue separarlas en distintos tamaños. Para esto se tamizaron las muestras de acuerdo a los tamaños que se obtienen de la malla Tyler, como se observa en la Tabla 1.

Tabla 1: Espaciamento (mm) para la distintas mallas de la norma Tyler.

Numero de malla	Espaciamento (mm)
42	0.351
35	0.417
32	0.495
30	0.589

Con estas 4 mallas se obtuvieron 3 tamaños de partículas en seco, que se encuentran en los intervalos de las mallas 30 & 32, 32 & 35, y 35 & 42, como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Diametros medios de las partículas secas seleccionadas para los experimentos.

Intervalo de partículas	Diámetro medio (mm)
42<d<35	0,384
35<d<32	0,456
32<d<30	0,542

De estas partículas las de tamaño 0.45 mm serán utilizadas en los experimentos preliminares, mientras que las partículas de 0.38 y 0.54 mm son las que serán utilizadas en los experimentos definitivos.

Para la determinación de la densidad de las partículas, simplemente se midió su masa con una balanza de precisión +/- 0,5 gr y su volumen con una probeta, midiendo el volumen de agua desplazado de acuerdo al principio de arquímedes. Al realizar estos ensayos se observó que las partículas son permeables, por lo que la densidad a utilizar en los experimentos es la densidad húmeda. Para medirla se dejó a las partículas reposar dentro de un volumen de agua por toda la noche y al día siguiente se midió la densidad de las partículas mojadas. Se obtuvo que la densidad promedio de las partículas es 1274,1 kg/m³. El detalle de la medición se adjunta en el Anexo A.

Esta permeabilidad de las partículas también significó un aumento en su tamaño. Se observaron partículas al microscopio óptico antes y después de reposar toda la noche en agua, y se determinó que su tamaño medio aumenta en un 25% al estar mojadas. Así el diámetro final de las partículas que estarán dentro del experimento se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3: Diametros medios de las partículas húmedas seleccionadas para los experimentos.

Intervalo de partículas	Diámetro medio (mm)
42<d<35	0,480
35<d<32	0,570
32<d<30	0,677

Para determinar la densidad del fluido simplemente se mide su masa y su volumen en una probeta, generando un gráfico que se adjunta en el Anexo B. Se decidió utilizar una mezcla de glicerina con

agua debido a su alta viscosidad y comportamiento newtoniano. La densidad del fluido a utilizar en los experimentos se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4: Densidad media de la mezcla a utilizar en los experimentos.

% de Glicerina	% de Agua	Densidad (kg/m³)
90	10	1249,5

Para medir el flujo se realizó un aforo midiendo distintos volúmenes para distintos tiempos y luego realizando una regresión lineal de tal forma de obtener el volumen que entra por unidad de tiempo. Mediante un reductor de flujo que consiste en una reducción del área de escurrimiento a la salida fue posible obtener 2 caudales, uno con el reductor y otro sin el reductor. Las mediciones pueden apreciarse en la Figura 12, con lo que se obtuvo que el caudal máximo es 35,8 mL/s y el mínimo es 10,7 mL/s. Sin embargo estos caudales aforados no son los mismos que se obtienen al momento de realizar los experimentos por 3 razones principales:

- 1) Al momento de aforar se está descargando a la atmósfera, mientras que al momento de realizar los experimentos el flujo está descargando dentro del estanque con glicerina
- 2) Cuando se aforó no se estaba utilizando el filtro, el cual genera una gran pérdida de carga al tener un espaciamento tan fino ($Luz_{filtro} \approx 0.17 \text{ mm}$), en especial para un fluido tan viscoso como la glicerina
- 3) El funcionamiento de la bomba centrífuga es tal que a mayores pérdidas de carga entrega un menor flujo.

Como no se contaba con una curva de la bomba, y si se tuviera tampoco sería válida para un fluido tan viscoso, se determinó empíricamente que los 3 factores previamente mencionados disminuían el caudal aproximadamente a 1/3 del caudal aforado. Con esto se tiene que los caudales finales son $Q_{max} = 10.84 \text{ mL/s}$ y $Q_{min} = 3.24 \text{ mL/s}$. Con estos valores se calculó el número de Reynolds del canal para determinar si se estaba en flujo laminar, el cual se define como:

$$Re = \frac{4R_h U}{\nu_0} \quad (9)$$

donde R_h es el radio hidráulico y U la velocidad media del flujo. Se obtuvo que los números de Reynolds son del orden de 2.88 y 0.86 para el caso de Q_{max} y Q_{min} respectivamente. Con estos valores del número de Reynolds es posible asegurar que el flujo será laminar.

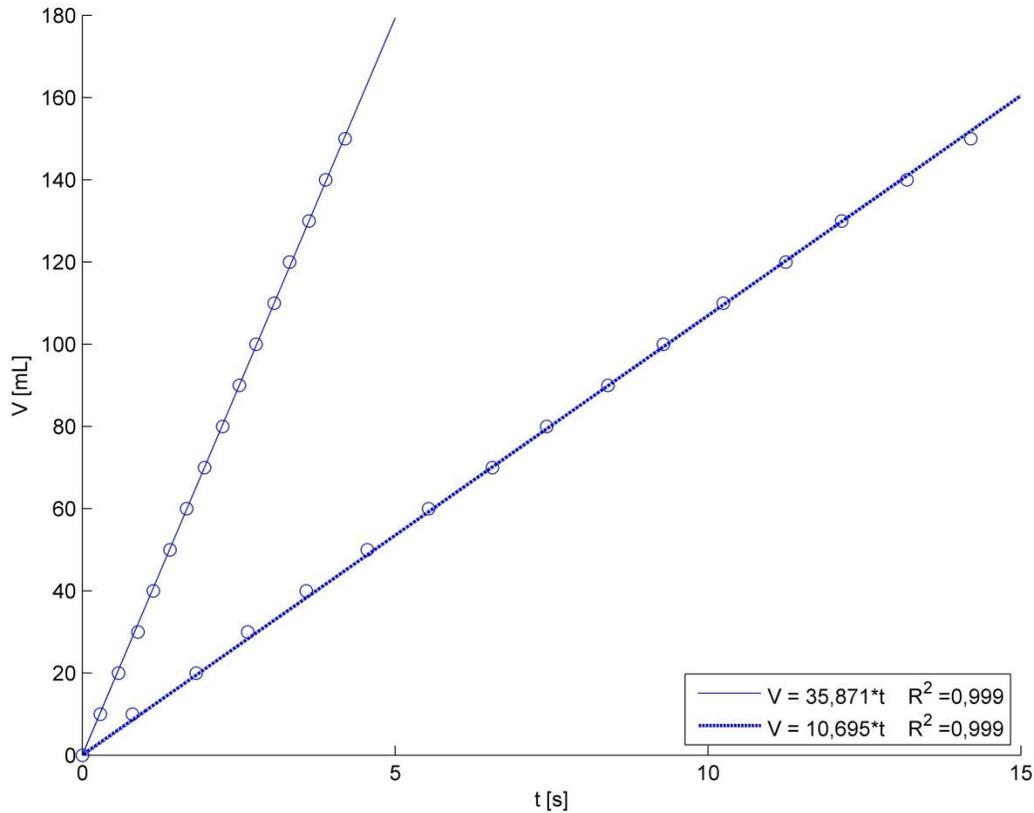


Figura 12: Gráficos de Volumen [mL] v/s tiempo [s]. Las pendientes de las rectas representan Q_{max} y Q_{min} .

Para medir la viscosidad del fluido se utilizó el reómetro marca Anton Paar modelo Rheolab QC. El procedimiento para determinar la viscosidad se explica en el Anexo C. Se obtuvo que la viscosidad dinámica del fluido a utilizar en los experimentos es $0,156 Pa \cdot s$ y la viscosidad cinemática es de $1,254E-4 m^2/s$.

3.2.2. Medición perfil de concentraciones y altura de resuspensión

Para medir la altura de resuspension y el perfil de concentraciones se utilizó una cámara de alta velocidad marca FOR-A modelo VFC300, la cual puede llegar a capturar hasta 300 imágenes por segundo. Sin embargo como el fenómeno a estudiar es en régimen permanente solo se obtendrán fotos a una frecuencia de 45 imágenes por segundo.

El procedimiento consiste en sacar una foto lateral al lecho sedimentado, para luego con la cámara en la misma posición grabar un video de 20 segundos con lo que se obtiene un total de 900 fotos. Lo que se graba es el lecho visto de forma perpendicular a la dirección del flujo a una distancia de 25 cm aproximadamente. En la parte posterior del canal existe una capa de papel mantequilla y atrás de esta un panel de iluminación LED, la cual es una luz fría de color blanco.

En la sección que se está grabando existe un segmento de papel milimetrado la cual permite darle escala a las fotos. Una vez que se tienen las 900 fotos lo que se hace es mediante el software *Matlab* generar una secuencia que capte la intensidad de luz para las distintas alturas de la foto. Esto se logra calculando la intensidad de luz de cada pixel en cada foto, como

$$\text{Intensidad de luz} = \sqrt{(R^2 + G^2 + B^2)}$$

donde R=red, G=green y B=blue. Luego se saca el promedio de intensidad de luz para cada fila, la cual en teoría debiese ser parecida pues para cierta altura la intensidad no varía en el eje longitudinal. A continuación se promedian los distintos vectores *intensidad de luz v/s cantidad de pixeles* para obtener un vector representativo de los 20 segundos de grabación que indique la *intensidad de luz v/s altura* para cada pixel en la vertical, pues es posible escalar de pixeles a milímetros gracias a la regleta instalada al frente del canal.

Con este gráfico es posible determinar de forma inmediata los parámetros h_{res} y h_0 , correspondientes a la altura de resuspensión y altura sedimentada respectivamente, pues se sabe que la altura máxima se logra cuando la concentración de partículas es cero, o en este caso cuando la intensidad de luz es máxima y se transforma en un valor constante. Esto se debe a que mientras mayor sea la concentración de partículas en la foto, menos luz deja pasar, con lo que el máximo valor de intensidad corresponde a la sección de la foto donde haya fluido puro.

Para determinar el perfil de concentraciones es necesario hacer una conversión de intensidad de luz a concentración de partículas. Para esto se cuenta con una sección de acrílico de igual área

transversal del canal de $3 \times 3 \text{ cm}^2$, pero de tan solo 20 cm de largo. Instalando esta pequeña sección en la misma cámara oscura y con la cámara montada a la misma distancia focal y apertura del diafragma que cuando se graban los experimentos, es posible obtener la conversión de intensidad de luz a concentración de partículas. Este procedimiento consta en llenar la sección de prueba con el mismo fluido y las mismas partículas a concentraciones en volumen conocidas, revolviendo la mezcla previamente, para luego sacar una foto y obtener cual es la intensidad de luz promedio para distintas concentraciones y así poder ligar ambas.

Es por este motivo que es muy importante el hecho de realizar las experiencias en una cámara oscura, pues para que la calibración de *intensidad de luz v/s concentración* sea válida todas las experiencias deben realizarse con la misma luz, lo cual solo es posible de ejecutar con luces artificiales y aisladas de las variaciones diarias y estacionales de la luz natural.

En la Figura 13 se observa la pequeña sección de calibración de donde se obtendrá la relación *intensidad de luz v/s concentración de partículas*.

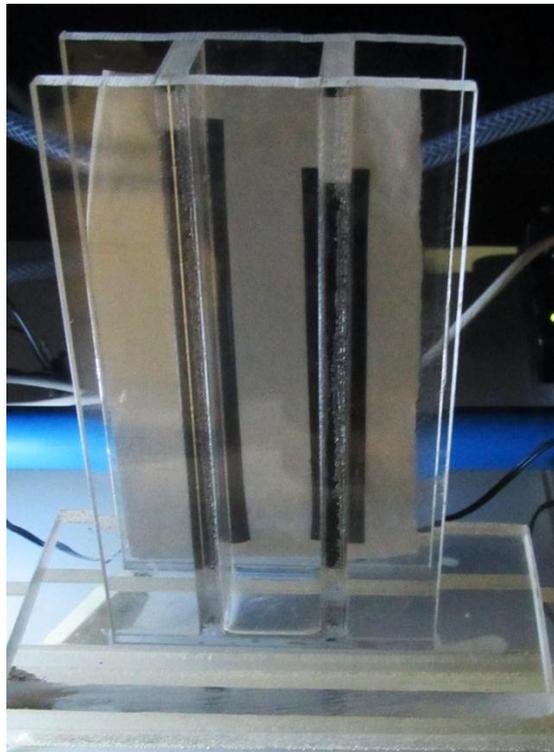


Figura 13: Sección con las mismas dimensiones de la zona de medición donde se calibrará la concentración de partículas v/s su intensidad de luz

4. Procesamiento de datos y presentación de resultados

4.1. Calibración experimental

Tal como se explicó en la metodología, los primeros experimentos que se realizaron fueron los experimentos de prueba. En estos experimentos se fue probando mediante ensayo y error distintas aperturas del diafragma de la cámara junto con distintas intensidades de luz de tal manera de visualizar el fenómeno de la mejor manera posible. Estos ensayos se realizaron en un lecho monodisperso con partículas de 0,57 mm de diámetro medio, a una concentración en volumen de $\phi_s = 9,71\%$. Mediante la técnica explicada en la metodología de obtener la intensidad de luz promedio a lo largo de la altura se obtuvo el gráfico de Altura v/s intensidad de luz que se muestra en la Figura 14.

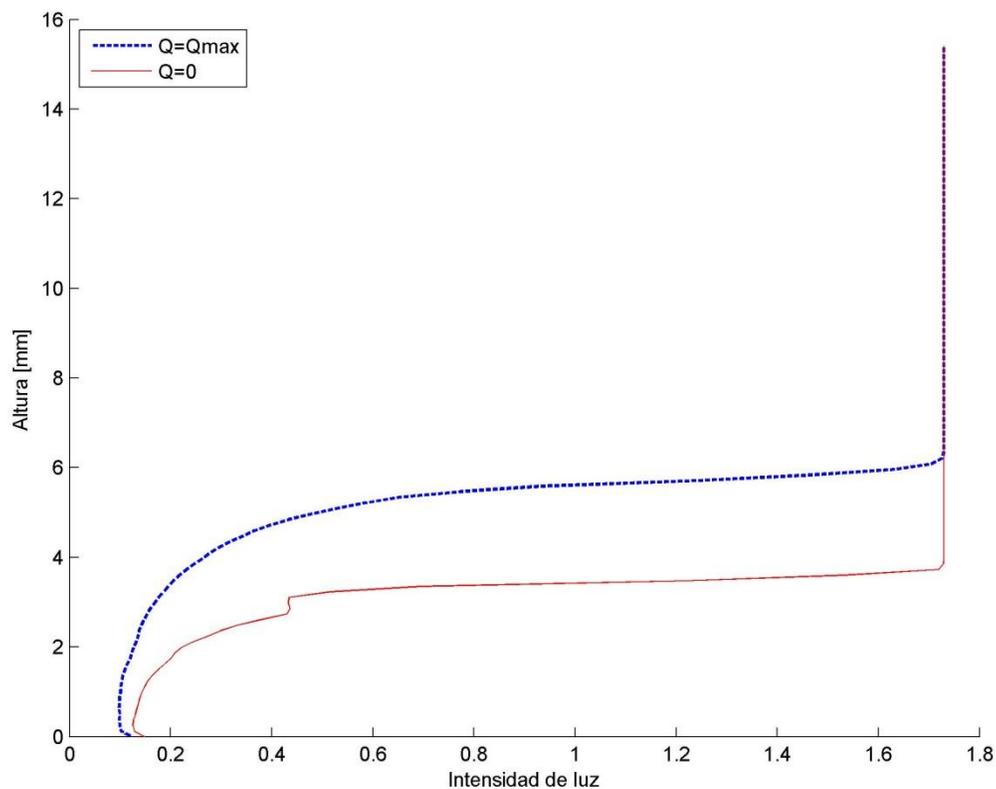


Figura 14: Altura v/s Intensidad de luz del experimento de prueba. $d = 0,57 \text{ mm}$; $\phi_s = 0,097$.

En el gráfico de la Figura 14 se presentan dos curvas correspondientes al resultado que se obtiene al grabar el lecho cuando se encuentra sedimentado, es decir caudal igual a cero, y la otra curva

corresponde al resultado que se obtiene de grabar el lecho con Q_{max} . Se distingue claramente la diferencia entre la altura de la interfaz para ambos casos, correspondiente al punto donde la intensidad de luz se vuelve constante, lo cual es un indicador de la altura de resuspensión. Para obtener este gráfico fue necesario recortar las imágenes de tal forma de independizarla de las condiciones de borde lumínicas. Estas condiciones corresponden a la disminución en la intensidad de luz hacia los bordes de la zona de medición. De las imágenes captadas con la cámara, que tienen una resolución de 512x512 píxeles, se analizarán recuadros de 200 píxeles de ancho por 100 a 300 píxeles de alto, dependiendo la altura de resuspensión. El recuadro que se analizó finalmente se muestra en la Figura 15.

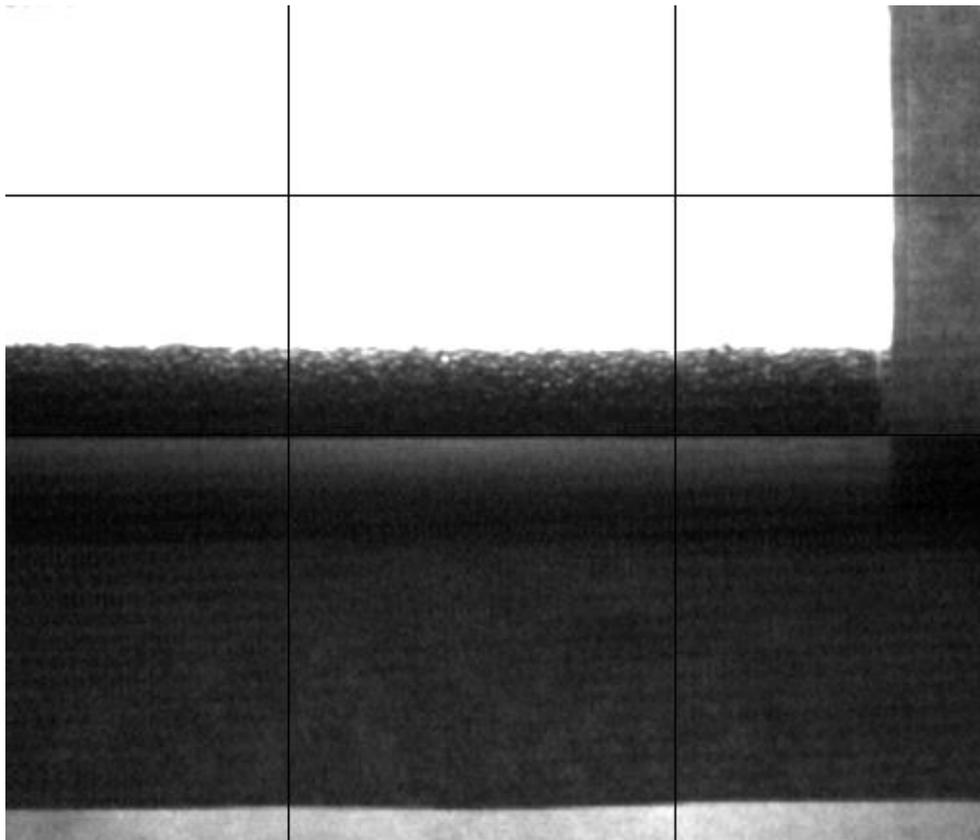


Figura 15: Fotografía tomada por la cámara en el experimento de prueba. El recuadro central es aquel que se analiza por intensidades de luz para obtener el gráfico de la Figura 14.

Como se explicó en la metodología para transformar de intensidad de luz a concentración se utilizó una sección equivalente a la sección de medición donde se registraron distintas intensidades de luz v/s concentraciones en volumen. Una vez que se tenían estos puntos se ajustó una función de interpolación que permitiera tener un gráfico continuo, tal como se presenta en la Figura 16.

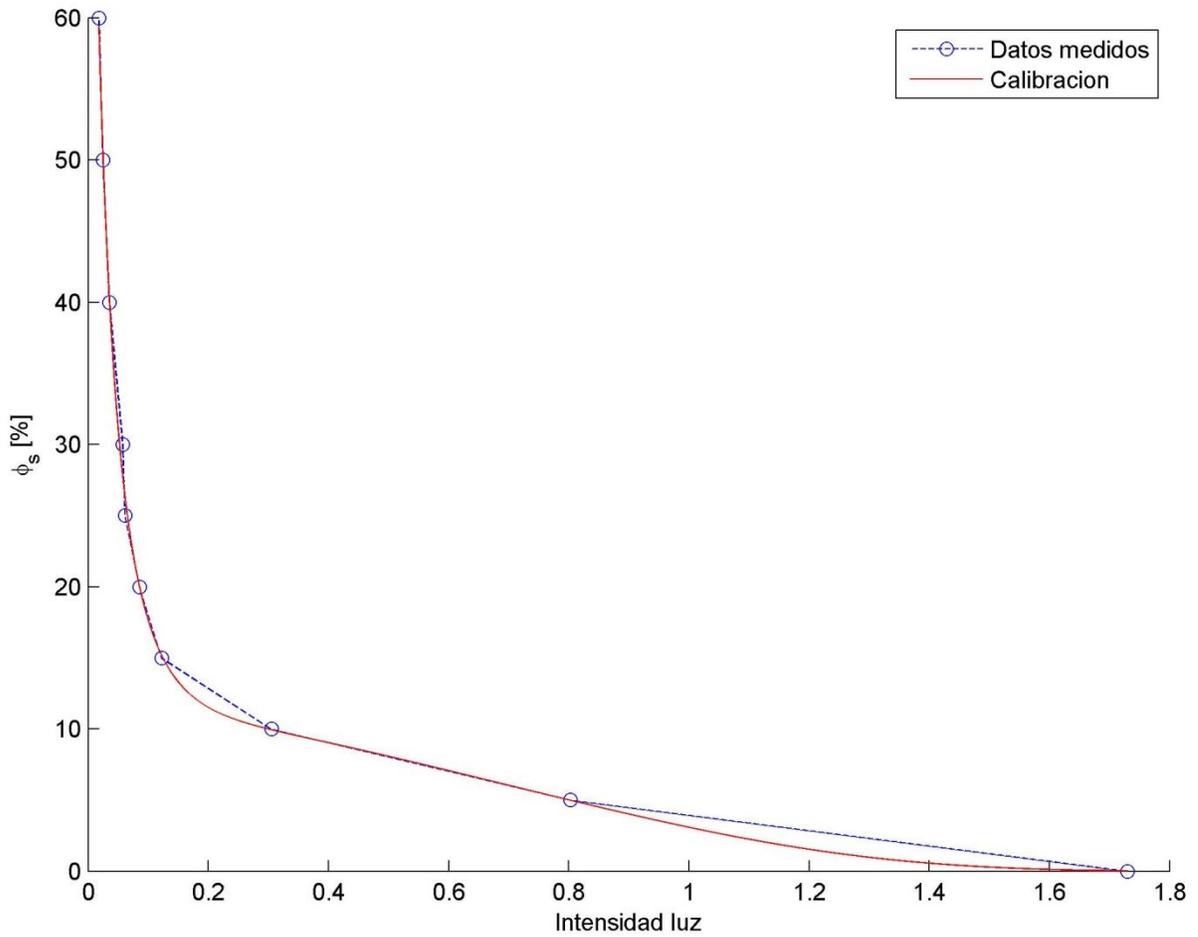


Figura 16: Calibración de Concentración en volumen ϕ_s [%] v/s Intensidad de Luz.

Del gráfico de la Figura 16 es posible ver que se tenían concentraciones entre el 60% a 0%, las cuales fueron ajustadas con la función presentada en la ecuación (10). Si bien se nota que la precisión del ajuste se pierde un poco para grandes valores de intensidad de luz, esto no es preocupante pues es para valores pequeños de intensidad de luz donde se tiene un mejor ajuste y tal como se observa un mayor gradiente, luego es preferible tener un ajuste mejor en esta zona que en el intervalo de menores concentraciones. La función ajustada, representada por la línea continua, se presenta en la ecuación (10):

$$\phi(x) = \frac{c_1}{(e^{-c_2x+c_3e^{-c_4x+c_5e^{-c_6x+c_8e^{-c_9x+c_{10}e^{-c_{11}x}})}}}c_7(c_{12}e^{-c_{13}x+c_{14}e^{-c_{15}x}})} \quad (10)$$

donde los coeficientes C_1 a C_{15} fueron ajustados de tal forma de obtener el menor error cuadrático medio y X representa la intensidad de luz. Se obtuvo un coeficiente de correlación de $R^2 = 0,998$. Los coeficientes se presentan en la Tabla 5:

Tabla 5: Coeficientes calibrados de la ecuación (10).

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
15.9	-0.84	0.44	1.46	-1.94	4.77	-1.26	0.48
C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	
1.47	0.28	1.46	-0.31	-1.30	-1.66	7.57	

Una vez terminados los experimentos de prueba, donde se logró visualizar el fenómeno y calibrar la curva de concentración v/s intensidad, se realizaron los experimentos definitivos. Se midieron 30 condiciones experimentales distintas, las cuales se presentan en la Tabla 6. Se pueden observar 15 experimentos, donde cada uno se realizó con caudal mínimo y máximo, además de medir la altura del lecho sedimentado.

Tabla 6: Lista de las condiciones experimentales.

No.	$\phi_{d=0.67\text{ mm}}$	$\phi_{d=0.48\text{ mm}}$	ϕ_{total}	No.	$\phi_{d=0.67\text{ mm}}$	$\phi_{d=0.48\text{ mm}}$	ϕ_{total}
Experimento	[%]	[%]	[%]	Experimento	[%]	[%]	[%]
1	0	5	5	9	10	0	10
2	5	5	10	10	15	0	15
3	10	5	15	11	20	0	20
4	10	10	20	12	25	0	25
5	15	10	25	13	27	0	27
6	15	12	27	14	5	10	15
7	20	12	32	15	10	12	22
8	5	0	5				

4.2. Propagación de errores

En los experimentos realizados en este estudio existen parámetros que se miden de forma directa y otros de forma indirecta, que resultan de operaciones matemáticas de los datos medidos directamente. Cada parámetro medido está expuesto a distintos tipos errores, como lo son los errores experimentales, de operación, o personales. Algunos tipos de errores son más fáciles de cuantificar que otros, como lo son los errores experimentales por sobre los personales o de operación. Además existen los errores sistemáticos, que corresponden a errores presentes en todas las mediciones, y los aleatorios, debido a singularidades en algunos experimentos. Para cuantificar el nivel de error y la precisión de las mediciones realizadas se utilizará la teoría de propagación de errores.

La teoría de propagación de errores dice que si $f(\vec{x})$ es una función de n variables conocidas, el error asociado a la función f es el siguiente:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2} \quad (11)$$

donde σ_{x_i} es el error asociado a la variable x_i y σ_f es el error total de la función f . Con esta metodología es posible a partir del error instrumental de las variables independientes, correspondientes a la mitad de la menor medida de los distintos equipos, calcular el error de los parámetros dependientes.

En la Tabla 7 se presentan los errores de las variables independientes, correspondientes a la mitad de la menor medida instrumental:

Tabla 7: Variables independientes del experimento y su error asociado.

Variable, x_i	Error, σ_{x_i}
H	$\sigma_H = 0.5 \text{ mm}$
w	$\sigma_w = 0.5 \text{ mm}$
Q	$\sigma_q = 0.5 \text{ mL/s}$
Escala (conversión de <i>pixel</i> \rightarrow <i>mm</i>)	$\sigma_{esc} = 2.5 \text{ pixel}$

M	$\sigma_m = 0.5 \text{ gr.}$
V_{ol}	$\sigma_{V_{ol}} = 0.5 \text{ mL}$
Pixel	$\sigma_{pix} = 0.5 \text{ pixel}$
Intensidad Luz	$\sigma_I = 1.96E-3 [-]$

Con los errores de las variables independientes es posible determinar la propagación de errores en las variables dependientes, de acuerdo a la ecuación (11), lo cual se aprecia en la Tabla 8.

Tabla 8: Variables dependientes del experimento y su error asociado

Variable, x_i	Error, σ_{xi}
ρ	$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{V_{ol}}\right)^2 + \left(\frac{m}{V_{ol}^2} \sigma_{V_{ol}}\right)^2}$
h_{res}	$\sigma_{h_{res}} = \sqrt{(Escala \sigma_{pix})^2 + (Pixel \sigma_{esc})^2}$
h_0	$\sigma_{h_0} = \sqrt{(Escala \sigma_{pix})^2 + (Pixel \sigma_{esc})^2}$
$\frac{\Delta h}{H}$	$\sigma_{\frac{\Delta H}{H}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{h_{res}}}{H}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{h_0}}{H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{H^2} \sigma_H\right)^2}$
ϕ_s	$\sigma_{\phi_s} = \sqrt{\left(\sigma_{V_{olp}} \left(\frac{1}{V_{olT}} - \frac{V_{olp}}{V_{olT}^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{V_{olp}}{V_{olT}^2} \sigma_{V_{olL}}\right)^2}$
$\phi(z)$	$\sigma_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \sigma_I\right)^2} \text{ con } \phi(x) = \text{Ec. (10)}$

4.3. Perfiles de concentración

En esta sección se presentan los perfiles de concentración obtenidos en los Experimentos 1 al 4 y 12 al 15, los cuales se observan en las Figura 17 y Figura 18, respectivamente. Estos perfiles se tienen para todos los experimentos pero aquí se muestran estos, en particular, para notar las singularidades que existen en algunos de ellos. En los Experimentos 1 al 4 se observa como a medida que aumenta la concentración los perfiles van tomando la forma de una curva asintótica hasta un valor máximo, mientras que en los experimentos 12 al 15 se observa una singularidad cerca del fondo. Para solucionar este error en la medición, como se sabe que la concentración debe ir aumentando a medida que la altura disminuye, lo que se hará al momento de analizar los resultados es completar el perfil de concentración desde su concentración máxima hasta $Z=0$ con una pendiente constante obtenida de la solución teórica del problema. La totalidad de los perfiles se presenta en el Anexo D.

4.4. Alturas de resuspensión

Otro resultado experimental de interés corresponde a los resultados de la altura de resuspensión para diferentes concentraciones. La altura de resuspensión se definió como el punto donde la intensidad de luz corresponde a un 98% de la intensidad de luz con concentración nula. De forma gráfica puede observarse que en la Figura 14 correspondería a una altura aproximada de 6 mm. Se escogió este punto pues en las cercanías de la interfaz sólido-líquido de los gráficos de intensidad de luz se observaban algunas singularidades, como aumentos o disminuciones de la intensidad de luz, las cuales no se tenían tan solo un poco antes de este punto. En las Figura 19 y Figura 20 se presentan las alturas de resuspensión relativas a la altura del lecho sedimentado, $\Delta h = h_{res} - h_0$, adimensionalizadas por la altura total del canal H , para los casos de lecho monodisperso y bidisperso, respectivamente. En ambas figuras se muestran los resultados del caudal mínimo y máximo. En el análisis de resultados se compararan estos resultados con las alturas teóricas que se obtienen de los modelos que se detallan en el capítulo 5.

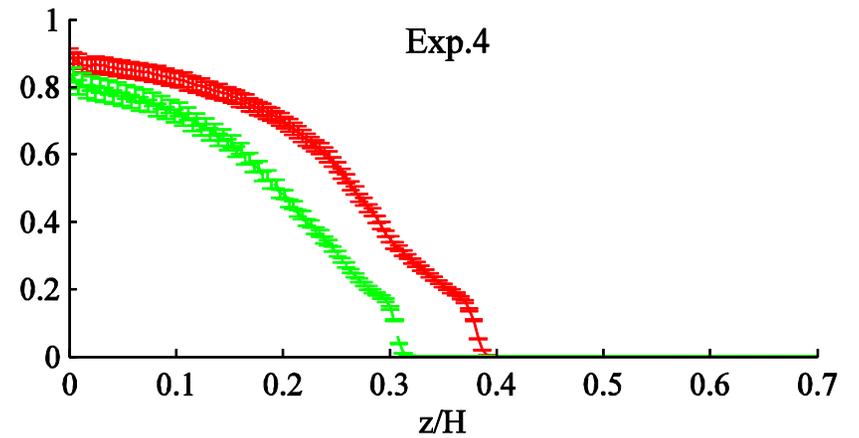
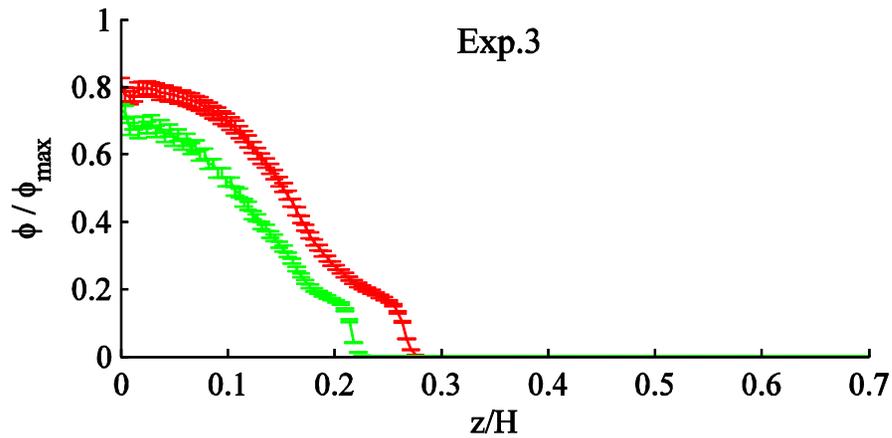
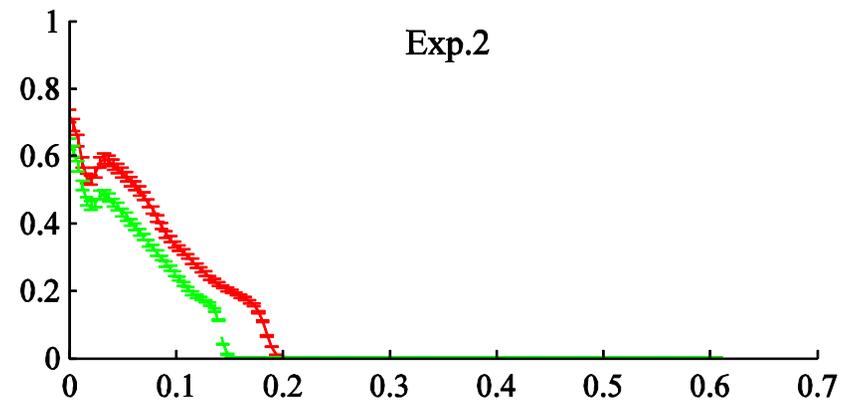
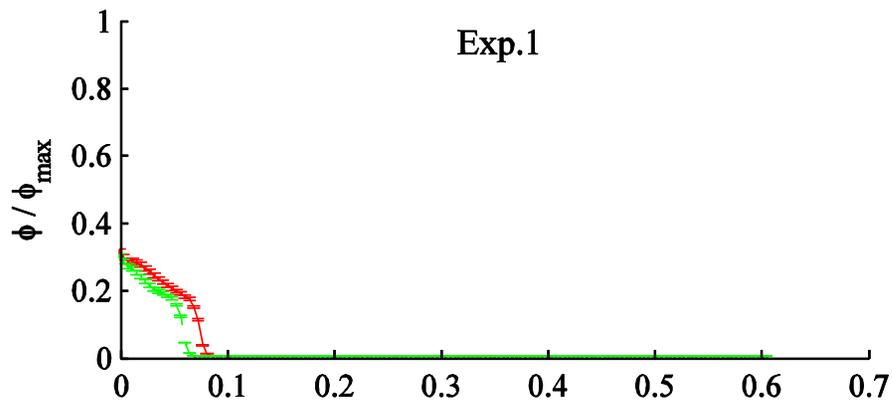


Figura 17: Resultados experimentales perfiles de concentración experimentos 1-4.

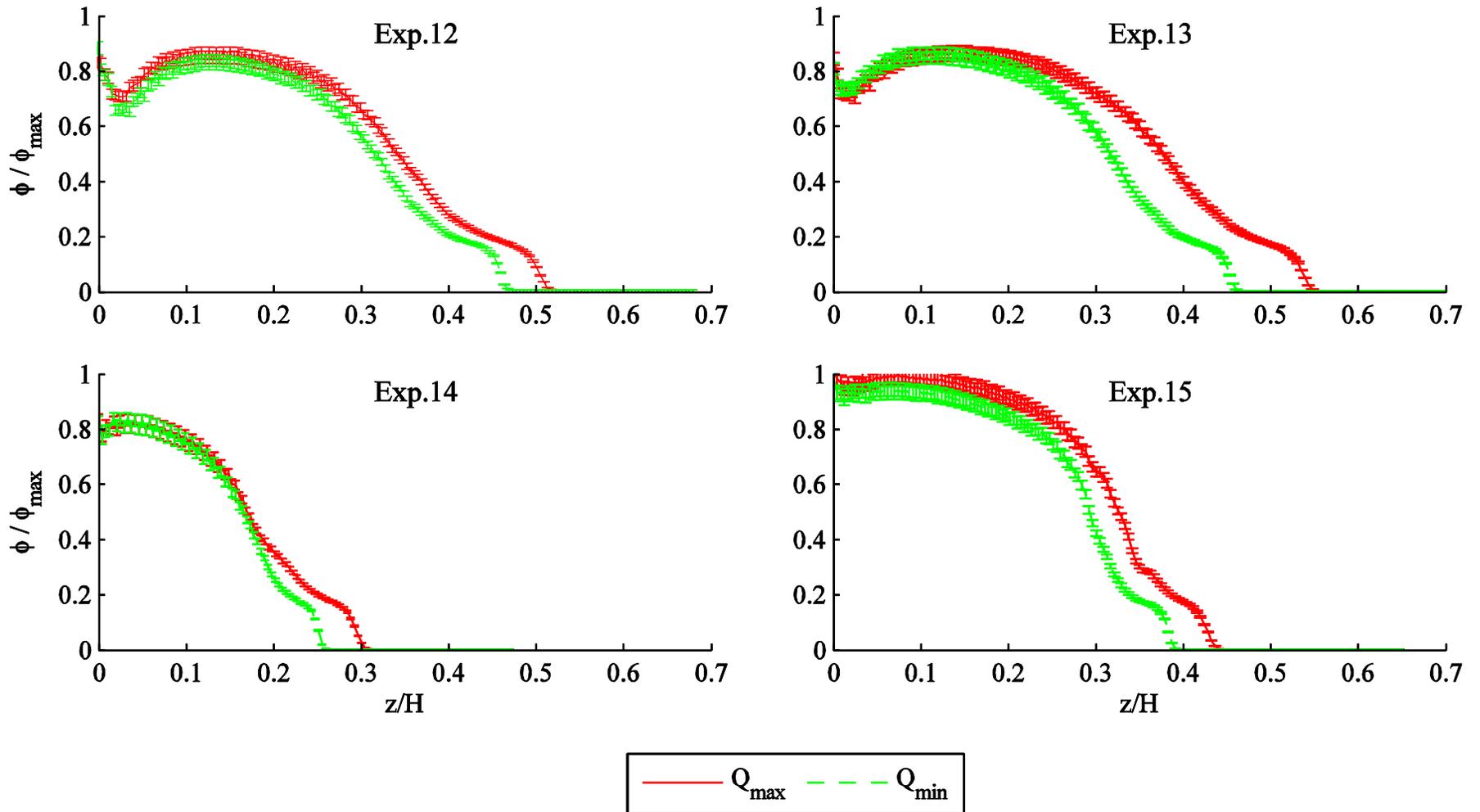


Figura 18: Resultados experimentales perfiles de concentración experimentos 12-15.

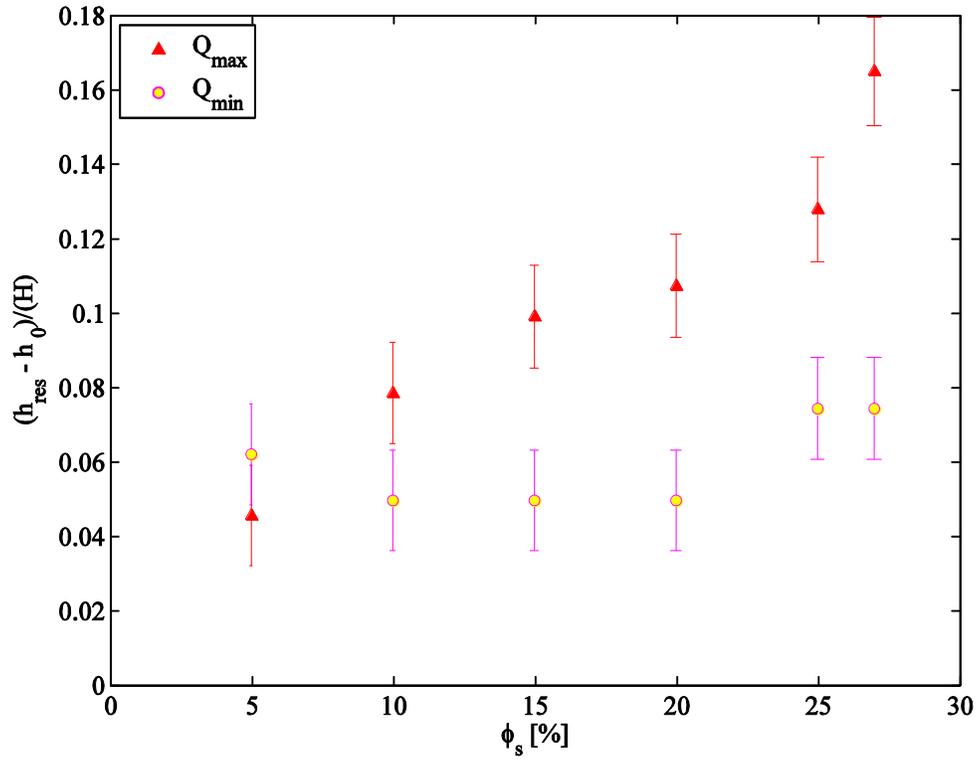


Figura 19: Gráfico $\Delta h/H$ vs ϕ_s para lecho monodisperso.

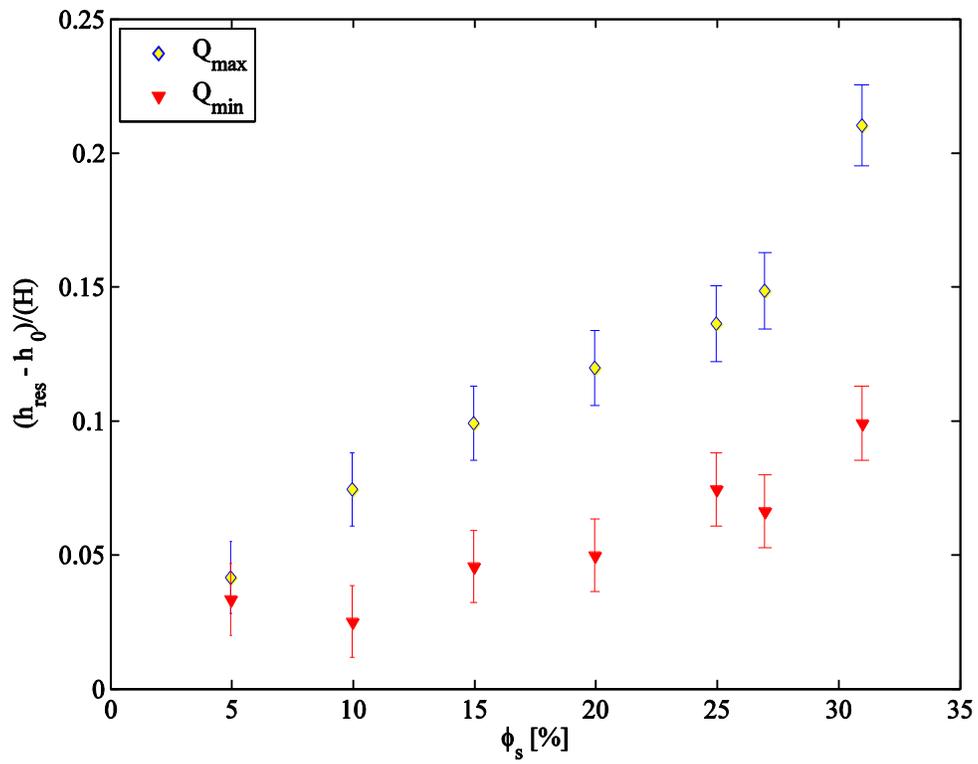


Figura 20: Gráfico $\Delta h/H$ vs ϕ_s para lecho bidisperso.

5. Análisis de resultados

5.1. Modelos teóricos

Para analizar el comportamiento de los resultados y poder compararlos con los modelos de otros autores, es necesario entrar en detalle acerca de estos modelos.

Para analizar el fenómeno primero se plantean las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \tau \quad (12)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (13)$$

donde V es el vector velocidad, P corresponde al escalar de la presión y τ el tensor de tensiones. Como se va a analizar el fenómeno en régimen permanente, y considerando que sólo existe flujo en la dirección longitudinal dentro del canal, la ecuación (12) se reduce a:

$$0 = -\nabla P + \nabla \cdot \tau \quad (14)$$

Analizado el problema de forma bidimensional, según el sistema de referencia presentado en la Figura 21, se tiene que el gradiente de presiones varía solo en la dirección longitudinal y el gradiente del esfuerzo de corte varía sólo en la vertical.

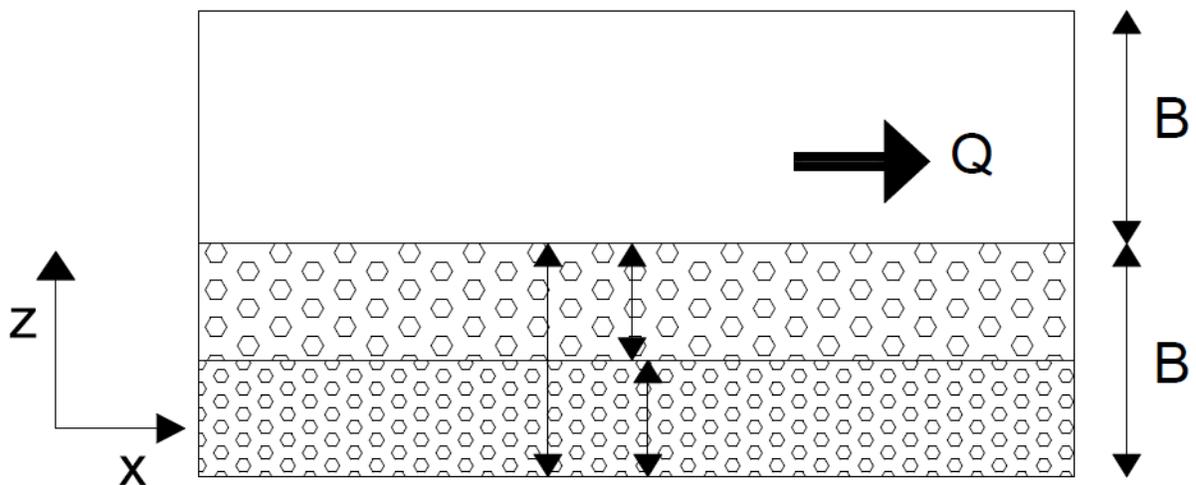


Figura 21: Esquema del flujo de Poiseuille en 2-D con los ejes de referencia. $2B$ representa la altura total de la tubería, Q la dirección del flujo, h_0 la altura sedimentada, h_{res} la altura de resuspensión y $\Delta h = h_{res} - h_0$

Con estas simplificaciones la ecuación (14) se transforma en:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (15)$$

donde el primer término puede considerarse constante a lo largo del eje Z, y a partir de ahora será llamado P_x . Por otro lado como se sabe que el fluido es newtoniano, el esfuerzo de corte se puede modelar como:

$$\tau_{zx} = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (16)$$

donde μ corresponde a la viscosidad de la mezcla para todo Z, por lo que es función de ϕ . En los modelos tanto de Leighton & Acrivos (1985) como el de Shauly et al. (2000) se expresa como:

$$\mu = \mu_0 \mu_{ef} \quad (17)$$

Con μ_0 la viscosidad del fluido puro y μ_{ef} expuesto en la ecuación (3). Luego juntando las ecuaciones (15) con (16) queda lo siguiente:

$$P_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (18)$$

Integrando una vez con respecto a Z se obtiene:

$$\frac{P_x z + C_1}{\mu} = \frac{P(z)}{\mu} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (19)$$

donde C_1 es una constante de integración. Por otro lado, planteando la ecuación de continuidad de masa se tiene que:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \nabla F \quad (20)$$

Donde F representa al flujo de partículas, y es principalmente donde se diferencian los distintos modelos. Para el modelo propuesto por Leighton & Acrivos se utiliza el flujo presentado en la ecuación (1). Para el modelo de Shauly et al. se utilizan otros términos que serán explicados más adelante. Considerando que el problema se analizará en la situación de equilibrio, y de forma bidimensional donde solo se considera un gradiente de concentración en la vertical, la ecuación (20) se reduce a lo siguiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (21)$$

de donde se concluye que el flujo es constante. Luego imponiendo como condición de borde que el flujo de partículas en la pared (ya sea el fondo o el techo del canal) es nulo, se obtiene que:

$$F = 0 \quad (22)$$

Si se utiliza el modelo de flujo propuesto por Leighton y Acrivos de la ecuación (1), y se reemplaza dentro de ésta la ecuación (19), se obtiene que:

$$-Bf(\phi)\phi = \frac{P(z)}{\mu} \tilde{D}(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (23)$$

donde $B = \frac{2}{9} g \frac{\Delta \rho}{\mu_0}$. Despejando variables es posible ver que se tiene una ecuación diferencial ordinaria de orden 1, en la cual el lado izquierdo es fácilmente integrable, como se muestra a continuación:

$$-\int_{z=0}^z \frac{dz}{P_x z + C_1} = \frac{1}{B} \int_{\phi=\phi_w}^{\phi(z)} \frac{\tilde{D}(\phi) d\phi}{\phi \mu f(\phi)} \quad (24)$$

$$\frac{1}{P_x} \ln\left(\frac{C_1}{P_x z + C_1}\right) = \frac{1}{B} \int_{\phi=\phi_w}^{\phi(z)} \frac{\tilde{D}(\phi) d\phi}{\phi \mu f(\phi)} \quad (25)$$

$$z = \frac{C_1}{P_x} \left(\frac{1}{\exp\left(\frac{P_x}{B} \int_{\phi=\phi_w}^{\phi(z)} \frac{\tilde{D}(\phi) d\phi}{\phi \mu f(\phi)}\right)} - 1 \right) \quad (26)$$

Cuya ecuación permite obtener un valor de Z para cualquier valor de ϕ de forma sencilla. El procedimiento a seguir consiste en darse un intervalo pequeño $\Delta\phi$, para el que se eligió $\Delta\phi = 0,1\%$, calcular la integral numéricamente y con esto obtener el valor de Z donde se alcanza esta concentración. En las ecuaciones (24), (25) y (26) el valor ϕ_w corresponde a la concentración en el fondo del canal, luego en la ecuación (26) se tienen las incógnitas P_x, C_1 y ϕ_w . Para obtenerlas lo primero que se hace es imponer la condición de no deslizamiento o velocidad nula en los extremos superior e inferior del canal. Esto se hace integrando la ecuación (19) entre $Z=0$ y $Z=H$:

$$\int_0^H \frac{P_x z}{\mu} dz + \int_0^H \frac{C_1}{\mu} dz = u_{z=H} - u_{z=0} = 0 \quad (27)$$

$$C_1 = \frac{-P_x \int_0^H \frac{z}{\mu} dz}{\int_0^H \frac{1}{\mu} dz} \quad (28)$$

Para obtener el valor de P_x , se impone que la integral de velocidad por diferencial de área sea igual al caudal que escurre por el canal. Para esto se integra una vez la ecuación (19) de tal forma de obtener el perfil de velocidades, y se multiplica por $(1 - \phi)$ correspondiente al área de escurrimiento efectiva:

$$\int_0^z \frac{P_x z}{\mu} dz + \int_0^z \frac{C_1}{\mu} dz = u(z) \quad (29)$$

$$q = \int_0^{z=H} u(z)(1 - \phi) dz \quad (30)$$

$$q = \int_0^H \left(\int_0^z \frac{P_x \tilde{z}}{\mu} d\tilde{z} + \int_0^z \frac{C_1}{\mu} d\tilde{z} \right) (1 - \phi) dz \quad (31)$$

Finalmente para conocer el valor de ϕ_w se impone la ecuación de conservación de masa. En este caso el supuesto que se hizo es que, al momento de revolver todas las partículas con la bomba de lavadora, se obtenía un perfil de concentraciones uniforme y constante en toda la columna de agua. La integral de la concentración en volumen a lo largo de la altura, correspondiente a la masa de

partículas, debe ser igual a la concentración que se sabe que existe en el sistema, presentada en la Tabla 6, por la altura total de la zona de observación:

$$\int_0^H \phi dz = \phi_s H \quad (32)$$

El otro modelo monodisperso que se analizó fue el modelo propuesto por Shauly et al. (2000), el cual está basado en los modelos de Leighton & Acrivos (1985) y Phillips et al. (1992). El modelo de Shauly et al. se resuelve de igual manera que el de Leighton y Acrivos, donde las tres ecuaciones que hay que satisfacer son las ecuaciones (28), (31) y (32). Lo que lo diferencia con el modelo previamente explicado es la ecuación de flujo. Shauly et al. propone que el flujo total es la sedimentación de partículas menos la migración potencial de las partículas, en cuyo término están involucrados todos los mecanismos de migración de partículas propuestos tanto por Leighton y Acrivos como por Phillips et al.

Así la ecuación de flujo propuesta por Shauly et al., imponiendo la misma condición de borde de flujo nulo en las paredes del canal, queda de la siguiente forma:

$$\frac{2}{9} g \frac{\Delta\rho}{\mu_0} a^2 f(\phi) \phi + \dot{\gamma} a^2 \phi^2 K \nabla(\ln(\phi \dot{\gamma} \mu^\lambda R)) = 0 \quad (33)$$

donde R : radio de curvatura de las líneas de corriente. K : constante empírica adimensional. λ : coeficiente empírico estimado como $\lambda \approx 2$ por Phillips et al. (1992).

Si se resuelve el caso de flujo unidireccional, y se supone que el radio de curvatura de las líneas de corriente es infinita y ortogonal a la dirección del flujo y de la gravedad, la ecuación (33) se transforma en lo siguiente:

$$B \phi f(\phi) + \dot{\gamma} \phi^2 K \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = 0 \quad (34)$$

con μ de la ecuación (17), $B = \frac{2}{9} g \frac{\Delta\rho}{\mu_0}$ y $f(\phi)$ de la ecuación (2). Luego si se invoca a la ecuación (16) y (19) para definir $\dot{\gamma}$, se puede realizar el mismo despeje de Z en función de una integral de ϕ , llegando a la ecuación:

$$z = \frac{C_1}{P_x} \left(\frac{1}{\exp \left(P_x \int_{\phi=\phi_w}^{\phi(z)} \frac{\frac{K}{\mu} \left(\frac{\phi}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \phi} - 1 - \frac{\lambda \phi}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \right)}{Bf(\phi) - P_x \phi \frac{K}{\mu}} d\phi \right)} - 1 \right) \quad (35)$$

donde la función $\frac{\partial \mu}{\partial \phi} \frac{1}{\mu}$ no es más que derivar la ecuación (17) con respecto a ϕ y dividirla por si misma, luego, empleando el modelo de viscosidad de Leighton & Acrivos (1986), este término se escribe como:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \phi} \frac{1}{\mu} = 2 \left(1 + \frac{1.5\phi_0\phi}{\phi_0 - \phi} \right)^{-1} \left(\frac{1.5\phi_0}{\phi_0 - \phi} + \frac{1.5\phi_0\phi}{(\phi_0 - \phi)^2} \right) \quad (36)$$

Por su parte los parámetros C_1 , ϕ_w y P_x se obtienen de la misma manera que para el caso del modelo de Leighton & Acrivos. Sin embargo en el modelo de Shauly et al. queda un coeficiente más, el llamado K , el cual fue calibrado por Phillips et al. (1992) para una un flujo de Couette, en una geometría anular, donde llegó a que el valor es $K \approx 0.4$. Este valor sin embargo puede y será ajustado para los experimentos de este trabajo.

Una vez propuestos ambos modelos de resuspensión viscosa en lechos monodispersos, para resolverlos solo basta con encontrar los valores de ϕ_w , P_x y C_1 que cumplan las ecuaciones (28), (31) y (32), dados un caudal q y una concentración de partículas en el experimento ϕ_s . Luego el problema es posible plantearlo como un problema de optimización para encontrar los valores \vec{x} tal que $\vec{F}(\vec{x}) = 0$, donde \vec{x} son las incógnitas del problema y $\vec{F}(\vec{x})$ son las ecuaciones (28), (31) y (32) reordenadas, es decir:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ C_1 \\ \phi_w \end{bmatrix} = \vec{x} \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 + \frac{P_x \int_0^H \frac{z}{\mu} dz}{\int_0^H \frac{1}{\mu} dz} \\ q - \int_0^H \left(\int_0^z \frac{P_x \tilde{z}}{\mu} d\tilde{z} + \int_0^z \frac{C_1}{\mu} d\tilde{z} \right) (1 - \phi) dz \\ \int_0^H \phi dz - \phi_s H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{bmatrix} = \vec{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Se busca el valor $\vec{x} = \vec{x}_0$ tal que cumpla que $\vec{F}(\vec{x})$ sea igual a cero. Este sistema de ecuaciones vectorial se puede resolver utilizando algún método numérico basado en el método del gradiente, como el algoritmo de Newton-Raphson o Levenberg-Marquardt. El inconveniente de usar estos métodos para este problema en particular, es que el conjunto de ecuaciones a resolver presenta muchos mínimos locales, por lo que la solución que entregan estos algoritmos depende fuertemente del punto de partida y por lo general el resultado al que llegan no es el mínimo global sino uno de los locales. Para solucionar esto se determinó que el mejor camino a seguir era barrer una serie de puntos de partida para así obtener una serie de soluciones, y elegir aquella que más se aproxime a $\vec{F}(\vec{x}) \sim 0$. Después de realizar una calibración por ensayo y error se determinó que el espacio de puntos de partida a barrer era el siguiente:

$$\begin{aligned} P_x &\in (-1, -500) \frac{N}{m^3} \\ C_1 &\in (1, 10) \frac{N}{m^2} \\ \phi_w &\in (0.3, \phi_0) \end{aligned}$$

Luego con un intervalo $\Delta P_x = 1, \Delta C_1 = 0.025, \Delta \phi_w = 0.01$, se llega a el dominio valores de puntos de partida tiene un tamaño aproximado de 5.200.000 soluciones. Luego lo que se hace es barrer todas estas soluciones y escoger aquella con menor error, definido como:

$$Error_{solucion} = \sqrt{\left(\frac{F_1(\vec{x})}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2(\vec{x})}{q}\right)^2 + \left(\frac{F_3(\vec{x})}{\phi_s H}\right)^2} \quad (39)$$

Para el caso bidisperso se determinó que en vista de que los resultados experimentales no presentaban una diferencia sustancial entre la resuspension del lecho monodisperso y bidisperso, y la diferencia de tamaños entre las partículas pequeñas y grandes no es demasiado ($\frac{d_{max}}{d_{min}} = 1.4$), el

lecho bidisperso podría ser modelado como un lecho monodisperso con un tamaño de partículas intermedio $\bar{d} = \frac{(d_{max}+d_{min})}{2}$, pero considerando el efecto sobre la concentración de empaquetamiento, que resulta de tener partículas de distinto tamaño.

Para esto se consideraron dos modelos, uno desarrollado por Gondret & Petit (1997) que se basa en un modelo propuesto por Ouchiyama & Tanaka (1981), y otro modelo propuesto por Shauly et al. (1998). El primer modelo dice que la concentración de empaquetamiento para un lecho bidisperso es:

$$\phi_m = \min(\phi_1^*, \phi_2^*) \quad (40)$$

donde ϕ_1^* se define dependiendo de la relación que exista entre el volumen de partículas pequeñas sobre el volumen total de partículas:

$$\xi = \frac{V_{d_1}}{V_{d_1} + V_{d_2}} \quad (41)$$

$$\phi_1^* = \frac{\phi_0}{1 - \xi}, \quad \text{si } \xi \rightarrow 0 \quad (42)$$

$$\phi_1^* = \frac{\phi_0}{1 - (1 - \xi)(1 - \phi_0)}, \quad \text{si } \xi \rightarrow 1 \quad (43)$$

donde V_{d_1} : volumen de partículas pequeñas, V_{d_2} : volumen de partículas grandes, ϕ_0 : concentración máxima de empaquetamiento, $\phi_0 \approx 0.64$.

El problema de este primer modelo es que para valores medios de ξ la concentración de empaquetamiento queda sobrestimada. En particular en los experimentos realizados ξ se encuentra entre 0.3 y 0.6. El segundo modelo propuesto por Gondret & Petit queda en función no solo de ξ , sino que también de la relación entre ambos diámetros, como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\lambda = \frac{d_{max}}{d_{min}} = 1.4 \quad (44)$$

$$\phi_2^* = \frac{N_s \bar{d}_s + N_L \bar{d}_L}{\frac{N_s}{\Gamma} (\bar{d}_s + 1)^3 + N_L \left\{ (\bar{d}_L - 1)^3 + \frac{1}{\Gamma} [(\bar{d}_L + 1)^3 - (\bar{d}_L - 1)^3] \right\}} \quad (45)$$

$$N_s = \frac{\xi \lambda^3}{\xi \lambda^3 + (1 - \xi)} \quad N_L = \frac{1 - \xi}{\xi \lambda^3} \quad (46)$$

$$\bar{d}_s = \frac{\xi \lambda^3 + (1 - \xi)}{\xi \lambda^3 + (1 - \xi) \lambda} \quad \bar{d}_L = \lambda \bar{d}_s \quad (47)$$

$$\Gamma = 1 + \frac{\frac{4}{13} (8\phi_0 - 1) \left(N_s (\bar{d}_s + 1)^2 \left(1 - \frac{3}{8 \left(\frac{1}{\bar{d}_s + 1} \right)} \right) + N_L (\bar{d}_L + 1)^2 \left(1 - \frac{3}{8 \left(\frac{1}{\bar{d}_L + 1} \right)} \right) \right)}{N_s \bar{d}_s^3 + N_L [\bar{d}_L^3 - (\bar{d}_L - 1)^3]} \quad (48)$$

Este modelo predice que a mayor diferencia de tamaño entre las partículas, mayor será la concentración de empaquetamiento, dependiendo del parámetro ξ , como se muestra en la Figura 22.

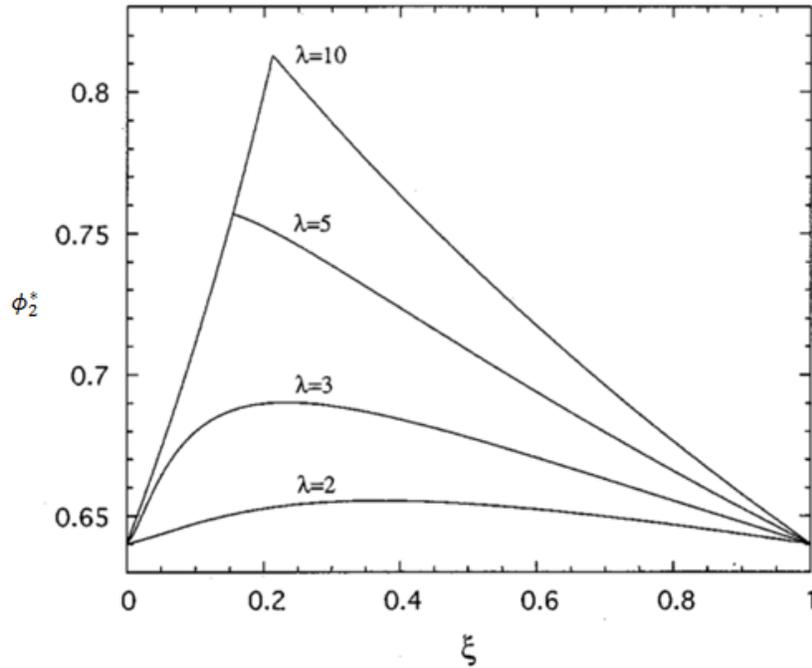


Figura 22: Concentración máxima de empaquetamiento para un lecho bidisperso en función de la relación de tamaños de las partículas. Fuente: Gondret & Petit (1997).

El otro modelo que se consideró para estimar la concentración máxima es el propuesto por Shauly et al. (1998), y es considerablemente más simple. Este modelo dice que la concentración máxima de empaquetamiento en un lecho bidisperso es:

$$\phi_m = \phi_0 \left[1 + \frac{3}{2} |b|^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\phi_1}{\phi_s} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\phi_2}{\phi_s} \right) \right] \quad (49)$$

$$b = \frac{(d_{min} - d_{max})}{(d_{max} + d_{min})} \quad (50)$$

donde ϕ_1 : concentración en volumen de partículas grandes, ϕ_2 : concentración en volumen de partículas pequeñas, $\phi_s = \phi_1 + \phi_2$: concentración total de partículas, ϕ_0 : concentración máxima de empaquetamiento, $\phi_0 \approx 0.58$.

Luego la concentración máxima de empaquetamiento ϕ_m se escogerá como el mínimo entre el resultante de la ecuación (40) y (49).

5.2. Resultados experimentales

Una vez planteados los modelos teóricos, es posible comparar los resultados que entregan con los resultados experimentales expuestos en el Capítulo 4. En las Figura 23 y Figura 24 se presenta el gráfico de altura de resuspensión relativa $\Delta h/H$ v/s las distintas concentraciones en volumen de partículas, para caudal mínimo y máximo, y su comparación con el modelo teórico de Leighton & Acrivos, en lecho monodisperso y bidisperso respectivamente.

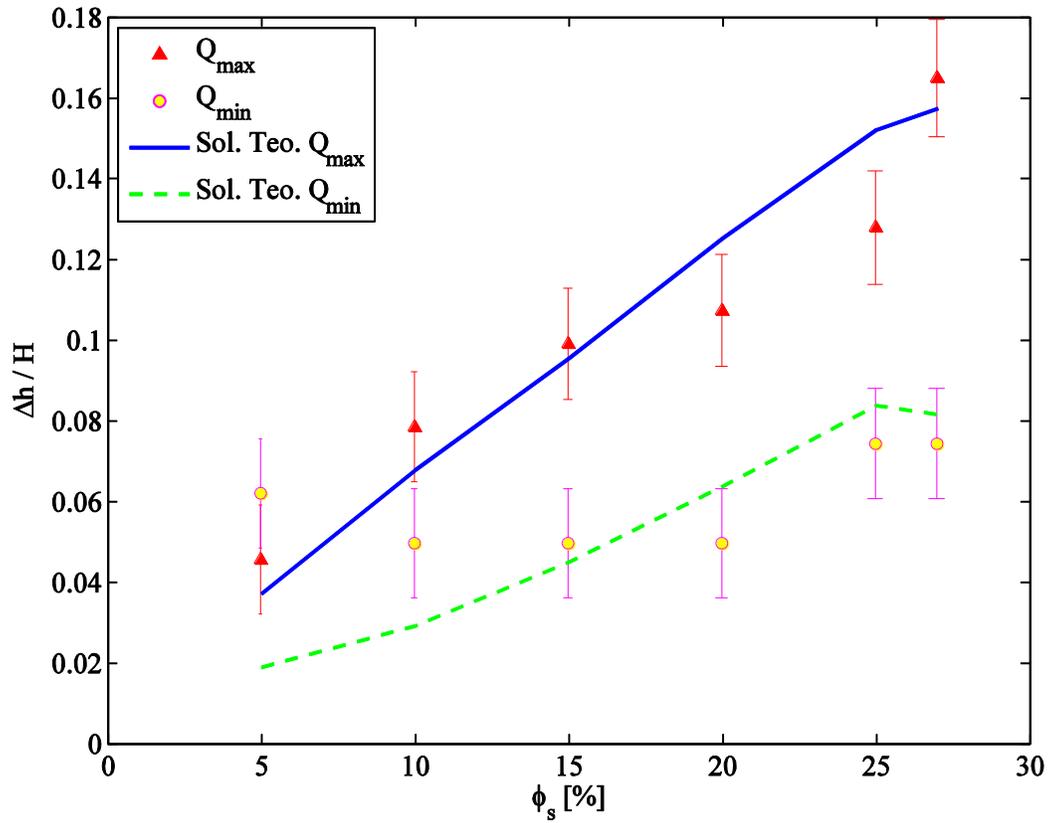


Figura 23: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho monodisperso y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos(1985).

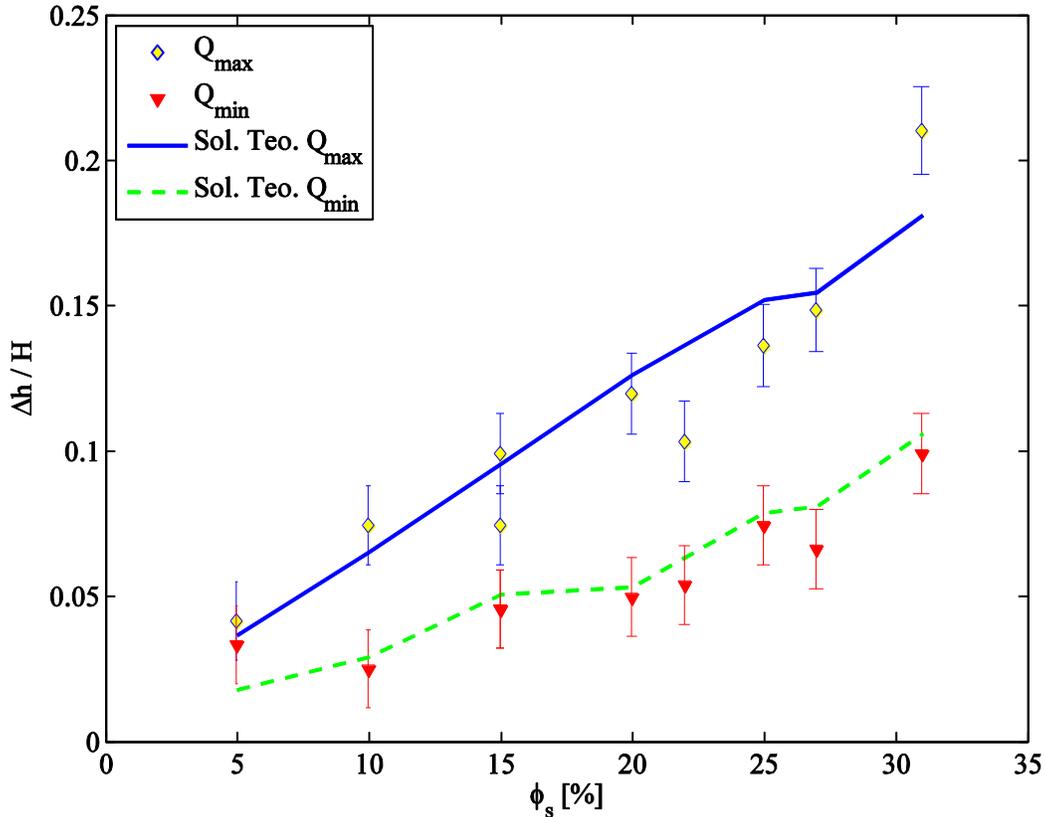


Figura 24: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho bidisperso y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos(1985).

De estos gráficos se observa que tanto para el caso bidisperso como monodisperso el modelo se ajusta adecuadamente para los experimentos realizados con caudal máximo. Para los experimentos realizados con caudal mínimo el modelo se ajusta bien en el caso bidisperso y no tan bien para el caso monodisperso. Esto puede tener distintas explicaciones posibles. La primera puede ser un error experimental en la toma de los datos con concentraciones bajas, pues si se observa el caso bidisperso para caudal mínimo las alturas de resuspensión aumentan a medida que aumenta la concentración, mientras que en el caso monodisperso para los primeros datos la altura es relativamente constante. Otro motivo por el cual el modelo no se ajusta muy bien a los datos en este tramo, es que para concentraciones bajas el coeficiente de difusión de la ecuación (6) se encuentra subestimado (Leighton & Acrivos, 1985), prediciendo menores alturas de resuspensión que las que efectivamente se tienen. Sin embargo, independiente de esto, los resultados obtenidos con este modelo son bastante buenos, especialmente si se considera que el modelo no contiene parámetros ajustables.

En cuanto a los perfiles de concentración, los resultados son más variados. En la Figura 25 se presentan algunos de los perfiles de concentración corregidos y su comparación con los perfiles

teóricos obtenidos mediante el modelo de Leighton & Acrivos. Se observa que si bien tanto los perfiles teóricos como los experimentales siguen una tendencia de ser monótonamente decrecientes con la altura, existe una notoria diferencia entre ambos. En este caso la diferencia entre ambos perfiles, de seguro, se debe a la calibración expuesta en la Figura 16, donde se observa que la transformación de intensidad de luz a concentración es extremadamente sensible, en particular para bajas intensidades de luz. En particular para experimentos con bajas concentraciones, $\phi_s \leq 20\%$, se observa que no solo no se cumple la conservación de masa, pues el área bajo la curva de los perfiles experimentales debiese ser similar al área bajo la curva de los perfiles teóricos, sino que tampoco se obtiene una buena correlación teórico-experimental para la concentración de partículas en el fondo del canal. Por otro lado se observa que a grandes concentraciones de partículas, $\phi_s > 20\%$, los perfiles teóricos se asemejan más a los experimentales. Esto debe tener influencia por el hecho de que las partículas utilizadas son semitransparentes, luego para pequeñas concentraciones la luz debe atravesar las partículas obteniéndose mayores intensidades que las que efectivamente se tienen, lo cual se traduce en menores concentraciones. Por el contrario para grandes concentraciones, la luz no atraviesa a través de las partículas tan fácilmente, generando un resultado más parecido al que entregan el modelo teórico. La totalidad de los perfiles se presenta en el Anexo D.

En el modelo de Shaully et al. existe un coeficiente empírico K el cual fue calibrado para flujos de Couette en geometrías anulares y partículas neutramente boyantes, con un valor constante $K \approx 0.4$. Sin embargo en el flujo presente en estos experimentos, y con partículas negativamente boyantes, un coeficiente empírico constante no se ajustaba satisfactoriamente bien al modelo. El valor de K que mejor se ajustaba al modelo es de $K=0.225$. Los resultados de resuspensión relativa v/s distintas concentraciones en volumen se presentan en las Figura 26 y Figura 27, donde se puede apreciar que si bien el modelo sigue una tendencia, no se ajusta muy bien a los datos, en particular para caudales bajos, como sí lo hacía el modelo de Leighton & Acrivos.

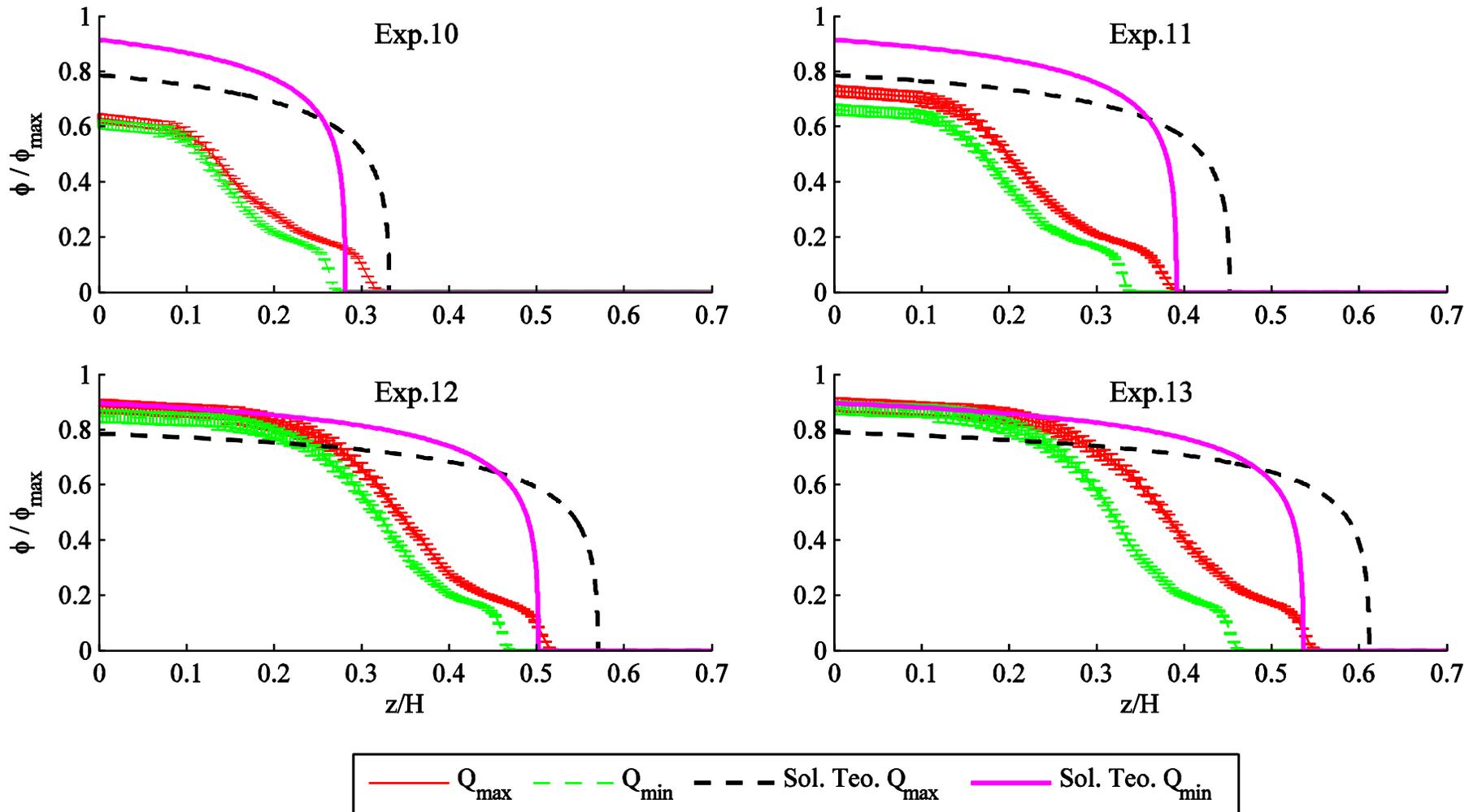


Figura 25: Perfiles de concentración v/s altura y su comparación con el perfil teórico obtenido con el modelo de Leighton & Acrivos (1985). ϕ_{\max} corresponde a la concentración de empaquetamiento.

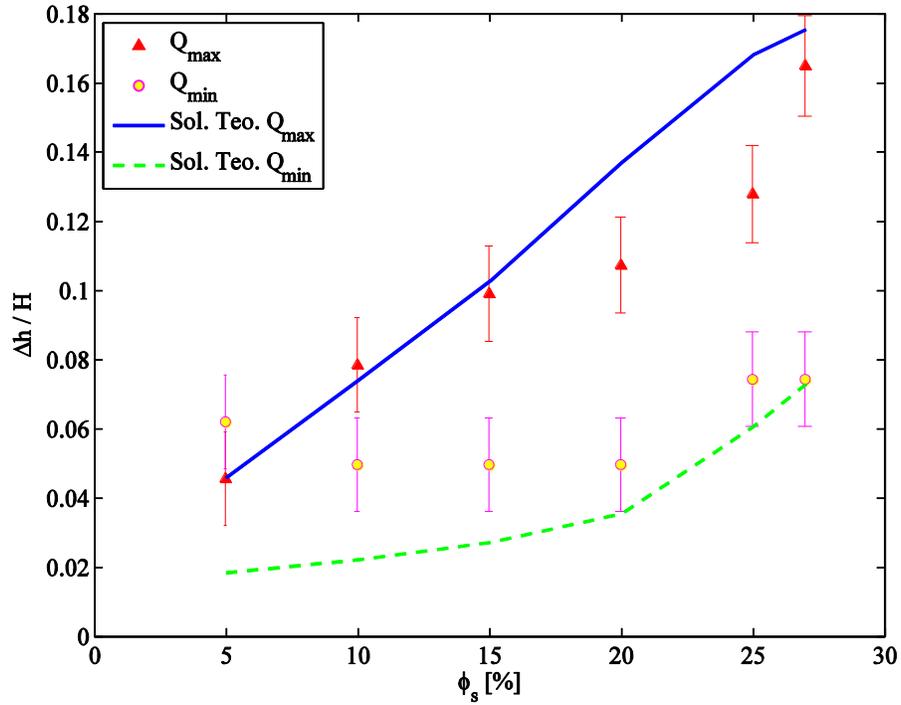


Figura 26: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho monodisperso y su comparación con el modelo de Shauly et al. (2000) considerando un valor constante $K=0.225$

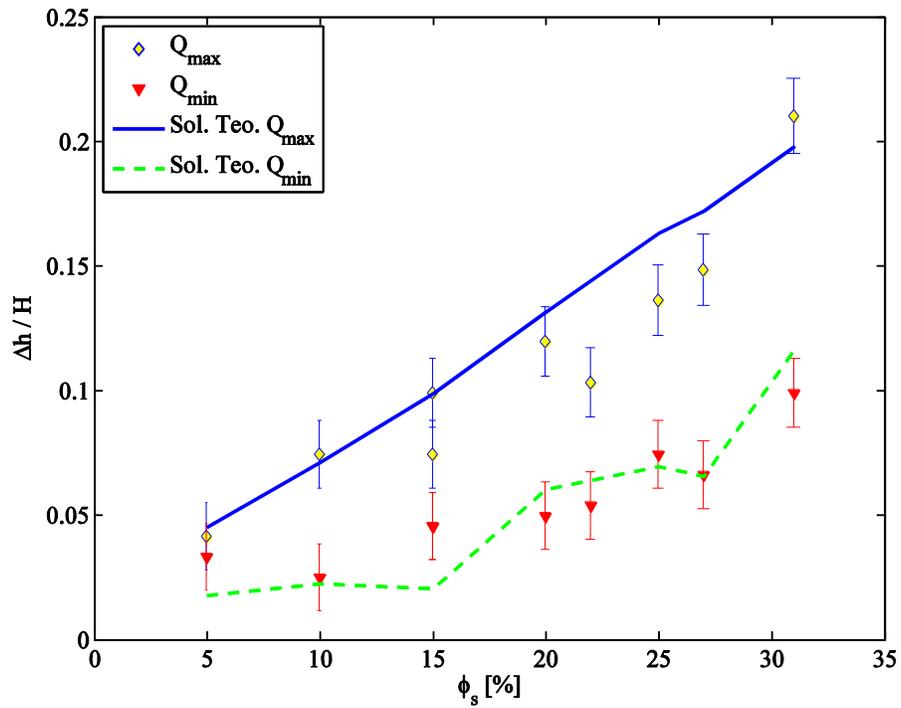


Figura 27: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho bidisperso y su comparación con el modelo de Shauly et al. (2000) considerando un valor constante $K=0.225$

Para solucionar estas discrepancias entre la solución teórica y los resultados experimentales, se propuso ajustar un coeficiente de resuspensión que dependa de la concentración de partículas, de la forma $K = K(\phi)$, lo cual sería parecido al coeficiente \tilde{D} del modelo de Leighton & Acrivos visto en la ecuación (6), o similar al trabajo de Tetlow et al. (1998), donde calibran los coeficientes empíricos de Phillips et al. (1992) de la forma $K(\phi) = a + b\phi$.

Fue así como se fueron probando distintos valores del coeficiente K en el rango $[0.1, 0.6]$ observando el mejor ajuste para las distintas concentraciones. Al momento de ver los valores del coeficiente K que mejor se ajustaban a los resultados experimentales, se observaron dos tendencias claras, una para el caudal máximo y otra para el caudal mínimo. Estos resultados se presentan en la Figura 28.

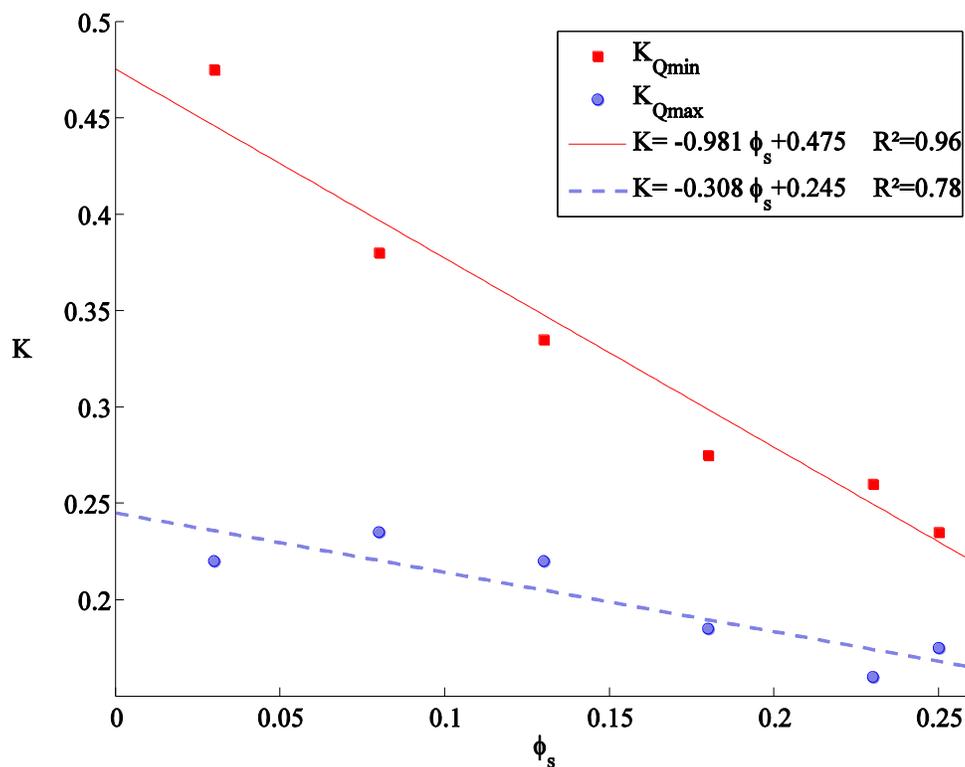


Figura 28: Coeficiente K del mejor ajuste v/s concentración en volumen de partículas. Las rectas corresponden a las regresiones lineales para los coeficientes K asociados a caudales bajos y altos.

En esta figura se puede apreciar que un ajuste del tipo $K = a\phi + b$ sería válido si se incorporara de alguna forma el efecto del caudal en este coeficiente empírico. Fue entonces cuando se propuso calibrar el coeficiente K en función no sólo de la concentración, sino también de algún otro parámetro adimensional que domine el fenómeno. Para encontrar estos parámetros se realizó un análisis dimensional utilizando el teorema Π de Buckingham. Asumiendo que el fenómeno de la

resuspensión viscosa depende de las siguientes variables independientes: $\phi_s, \phi_0, q, g, H, \rho_f, \rho_s, \nu_f, \alpha, K$, donde se observan las tres las dimensiones fundamentales, $[M, T, L]$, se pueden formar 7 números adimensionales:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \phi_s & \Pi_2 &= \phi_0 & \Pi_3 &= a/H \\ \Pi_4 &= \frac{q}{\nu_f} & \Pi_5 &= \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} & \Pi_6 &= \frac{q\nu_f}{gH^3} \\ & & \Pi_7 &= K & & \end{aligned}$$

donde q representa el caudal por unidad de ancho. Es posible hacer combinaciones de adimensionales para lograr nuevos adimensionales que le den sentido físico al problema. Por ejemplo combinando Π_6 con Π_3 y Π_5 es posible formar el número de Shields, el cual representa la relación entre las fuerzas viscosas y gravitatorias:

$$\frac{\Pi_6}{\Pi_3\Pi_5} = \frac{q\nu_f}{gH^3a\left(\frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}\right)} = \Psi \quad (51)$$

Luego es posible agregar este adimensional a la base y quitar Π_6 para que los números sigan siendo independientes. Combinando Ψ con Π_4 se arma el número de Froude densimétrico, el cual representa la relación entre fuerzas inerciales y gravitacionales, y se quita Π_4 de la base:

$$\sqrt{\Psi\Pi_4} = \frac{q/H}{\sqrt{ga\left(\frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}\right)}} = F_d \quad (52)$$

Por su parte el número de Shields se puede multiplicar por $3/2$ para obtener el número de Shields modificado, como fue definido por Schaflinger et al. (1990). Luego es posible escribir K en función de los otros números adimensionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Pi_7 &= f(\Pi_1, \dots, \Pi_6) \\ K &= f\left(\phi_s, \phi_0, \Psi, \frac{\Delta\rho}{\rho_s}, F_d, \frac{a}{H}\right) \quad (53)\end{aligned}$$

En vista que en todos los experimentos no se varió los parámetros $\phi_0, \frac{\Delta\rho}{\rho_f}, \frac{a}{H}$, pero se sabe que el valor K si varía en los distintos resultados, y en apoyo a la simplicidad de la solución, se buscó un ajuste adimensional que sólo dependiera de 3 adimensionales: ϕ_s, Ψ y F_d , de la forma $\alpha g(\phi_s)^c \Psi^d F_d^e$ donde $g(\phi_s)$ fuera una función de ϕ_s con la que se logre un buen ajuste. Probando con distintos ajustes de $g(\phi_s)$ y distintos valores de las constantes α, c, d y e , se obtuvo el siguiente número adimensional:

$$\Lambda = \alpha [\log_{10}(1 + b\phi_s)]^c \Psi^d \quad (54)$$

Este adimensional le da distintas ponderaciones al efecto que tiene la relación entre fuerzas viscosas y gravitatorias y la concentración en volumen de partículas sobre el valor del coeficiente K . Se obtuvo que el mejor ajuste era independiente del valor del Froude densimétrico. Los valores de los coeficientes α, b, c, d se presentan en la Tabla 9 y en la Figura 29 se muestran como se distribuyen los valores de K que mejor se ajustan a los resultados experimentales v/s el parámetro adimensional Λ .

Tabla 9: Coeficientes de la ecuación (54)

Coeficiente				
	α	b	c	d
Valor	0.2	1.5	0.1	0.2

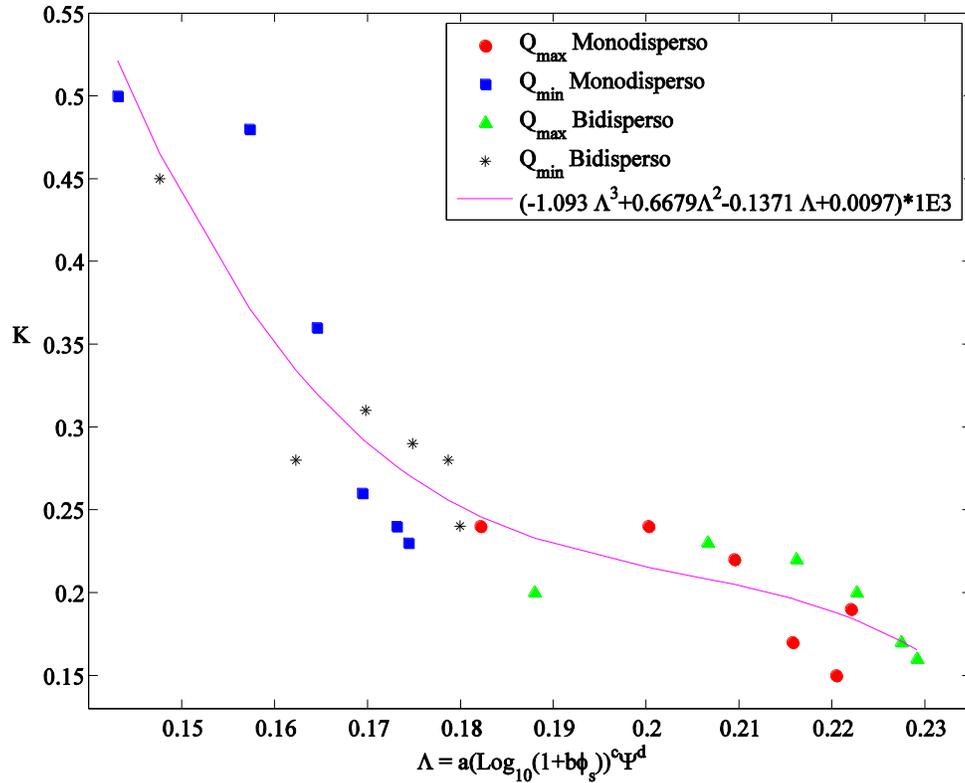


Figura 29: Valores del coeficiente K que mejor se ajustan a los resultados experimentales v/s Λ . La línea continua representa una regresión cúbica.

En la Figura 29 se aprecia que los datos en función del parámetro Λ siguen aproximadamente una tendencia cúbica. Si se define un valor de K ajustado o calculado con esta regresión cúbica cómo:

$$K_{ajuste} = 1E3(-1.093\Lambda^3 + 0.6679\Lambda^2 - 0.1371\Lambda + 0.0097) \quad (55)$$

es posible graficar para los distintos valores del parámetro Λ el valor de K que mejor se ajusta a los experimentos v/s el valor de K ajustado con la regresión cúbica. En este caso la identidad correspondería al caso en el cual el valor obtenido con la ecuación (55) es exactamente el valor que mejor se ajusta a los resultados experimentales. Este gráfico se presenta en la Figura 30:

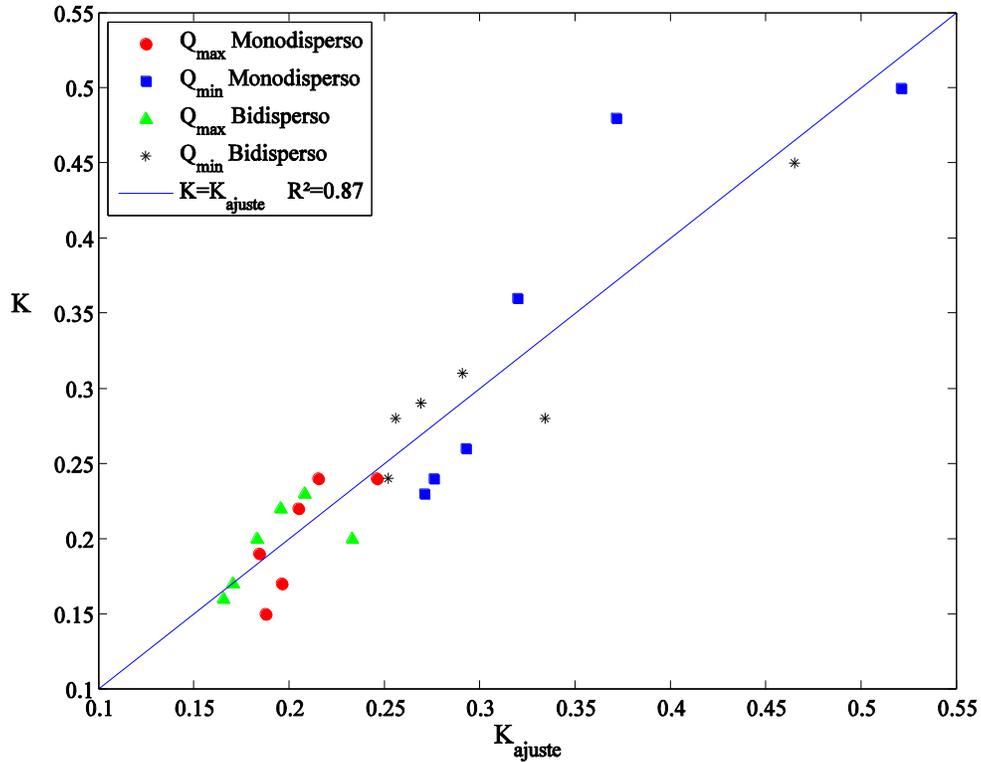


Figura 30: Coeficiente K del mejor ajuste v/s coeficiente K obtenido con la ecuación (55)

En la Figura 30 se aprecia que los valores del coeficiente K que se predicen con el ajuste cúbico no se alejan mucho del valor que mejor se ajusta al modelo de Shauly et al., con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.87$. Gráficamente se ve que la dispersión de los datos es baja y la mayoría de los datos se encuentran cercanos a la línea que representa la identidad o ajuste perfecto. En las Figura 31 y Figura 32 se presentan los gráficos de altura de resuspensión relativa $\Delta h/H$ v/s las distintas concentraciones en volumen de partículas y su comparación con el modelo de Shauly et al. considerando el valor el coeficiente K obtenido mediante la ecuación (55).

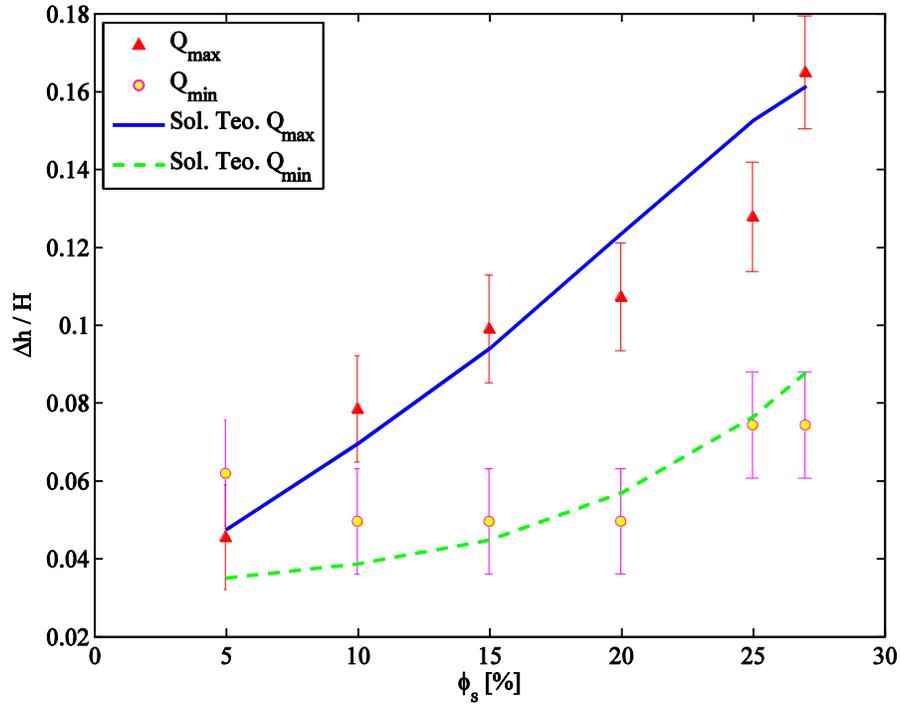


Figura 31: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho monodisperso y su comparación con el modelo de Shauly et al. (2000).

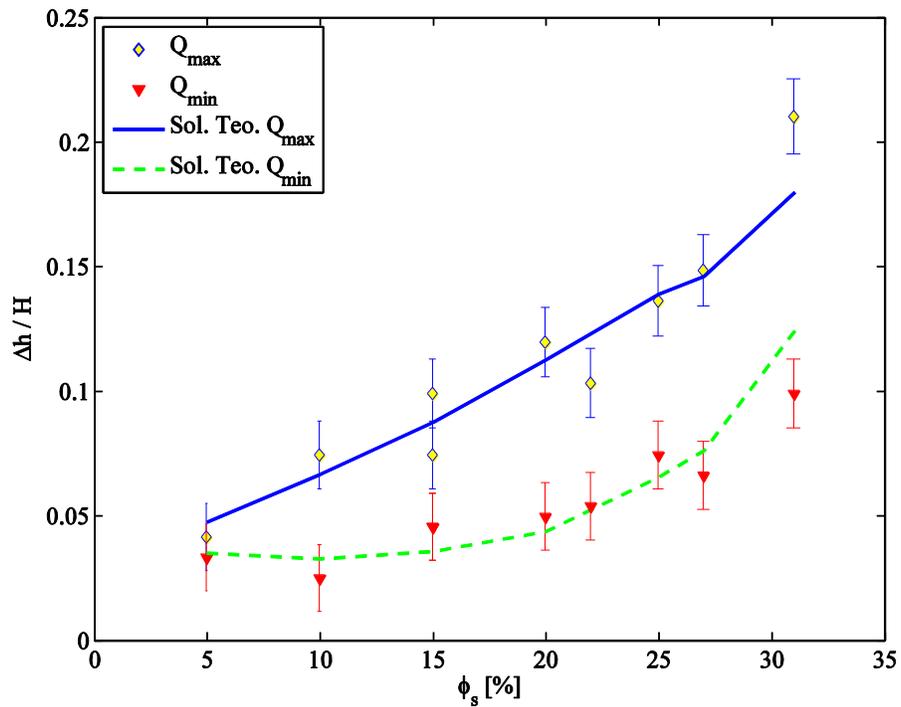


Figura 32: Gráfico $\Delta h/H$ v/s ϕ_s para lecho bidisperso y su comparación con el modelo de Shauly et al. (2000).

Al ver las Figura 31 y Figura 32 se puede observar cómo el modelo representa un buen ajuste de los datos experimentales para ambos caudales. En particular si se comparan estos resultados con los expuestos en la Figura 26 y Figura 27 donde se consideró un valor del coeficiente K como constante, se ve una mejora en el ajuste de los modelos tanto monodisperso como bidisperso para caudal máximo y mínimo, siendo este último caso donde se logra la mayor mejoría.

Si se compara el modelo de Leighton & Acrivos con el de Shauly et al., se observa que el segundo se ajusta mejor a los datos experimentales que el primero, en particular para caudales bajos (o números de Shields $\Psi < 2$). La diferencia más importante entre ambos modelos reside en que el primero no contiene parámetros ajustables, mientras que el segundo sí, lo que permitió encontrar una relación tal que el modelo se ajuste mejor a los resultados obtenidos experimentalmente.

Un resultado interesante que se obtuvo de los resultados del modelo de Shauly et al., es la connotación que lleva el ajuste del parámetro K , pues hasta la fecha los distintos modelos que presentaban este coeficiente empírico tales como el ajuste realizado por Tetlow et al. (1998) o Rao et al. (2002), concluyeron que estos factores eran sólo función de la concentración ϕ_s , es decir de un parámetro geométrico dentro del flujo o cuanto volumen ocupan las partículas en la mezcla, mientras que en los experimentos aquí realizados se observa que el mejor ajuste no sólo depende de un parámetro geométrico sino también de las interacciones hidrodinámicas del flujo, como lo son los esfuerzos de corte aplicados sobre el lecho y términos como la boyancia de las partículas, factores que se encuentran incluidos en el número de Shields.

En cuanto a los perfiles de concentración, con el modelo de Shauly et al. se tienen los mismos problemas que se tienen con el modelo de Leighton & Acrivos, que para concentraciones menores al 20% los resultados teóricos se alejan bastante de los experimentales, en particular para el valor de la concentración máxima, ubicada en $Z=0$. Donde si existe un mejor ajuste es el punto de concentración cero, equivalente a la altura de resuspensión. En la Figura 33 se muestran los perfiles de concentración para los experimentos 9 al 12, correspondientes a concentraciones $\phi_s = [0.1; 0.15; 0.20; 0.25]$ y su comparación con la solución teórica del modelo de Shauly et al. y del modelo de Leighton & Acrivos. Aquí se observa que ambas soluciones tienen una forma similar, pero el primero presenta una curvatura menos brusca. En el modelo de Leighton & Acrivos el cambio de concentración nula a una concentración igual al 60% de la concentración de empaquetamiento, ocurre en una distancia menor a la que predice el modelo de Shauly et al. Esto se debe a que el modelo de Shauly et al. anticipa que habrá una mayor concentración en el fondo (en

Z=0) que la que se observa con el modelo de Leighton & Acrivos, y por conservación de masa, fenómeno que se encuentra representado por la ecuación (32), el segundo modelo debe llegar a concentración cero en una altura mayor o tener un menor radio de curvatura, que es lo que se obtiene en los gráficos.

Una vez resueltos ambos modelos es fácil obtener los perfiles de velocidad teóricos, pues se encuentran descritos por la ecuación (29). Estos perfiles para el modelo de Leighton & Acrivos y Shauly et al. se presentan en la Figura 34 y Figura 35 respectivamente, para los experimentos 8 al 13. El resto de los perfiles se presentan en el Anexo E. En ambos gráficos es posible ver que a medida que la concentración tiende a cero, el perfil de velocidades se asemeja al perfil parabólico que se obtiene de la solución teórica de un flujo sin partículas, donde la viscosidad es constante en todas las dimensiones. Por otro lado a medida que la concentración ϕ_s va aumentando, es posible ver como el perfil parabólico se empieza a achatar. Esto se explica pues la zona donde el perfil de velocidades se asemeja a una recta corresponde a la parte del canal donde está el lecho, mientras que el punto de inflexión donde ocurre la transición de un perfil lineal a un perfil parabólico corresponde al punto de máxima resuspensión. Por este motivo, y de los resultados experimentales, se sabe que a mayor concentración de partículas, mayor altura de resuspensión, y por lo tanto mayor es la longitud del tramo lineal en el perfil de velocidades. En los perfiles de Q_{max} y Q_{min} , para ambos modelos, se pueden observar unas rectas horizontales, las cuales representan el punto de máxima resuspensión medido experimentalmente. Aquí puede observarse una buena correlación entre el punto teórico donde empieza el perfil parabólico y el punto experimental.

Los perfiles teóricos que se obtienen con ambos modelos son muy similares, aunque es posible notar algunas diferencias, como por ejemplo las velocidades dentro de la altura contenida por el lecho siguen una tendencia más lineal en el modelo de Leighton & Acrivos, mientras que en el modelo de Shauly et al. este tramo tiene una mayor curvatura. Esto se observa con más claridad en la Figura 36 (c) y (e). En esta misma figura se nota la similitud de ambas soluciones, donde son prácticamente iguales para concentraciones $\phi_s \leq 15\%$, tanto para el caso de Q_{max} y Q_{min} .

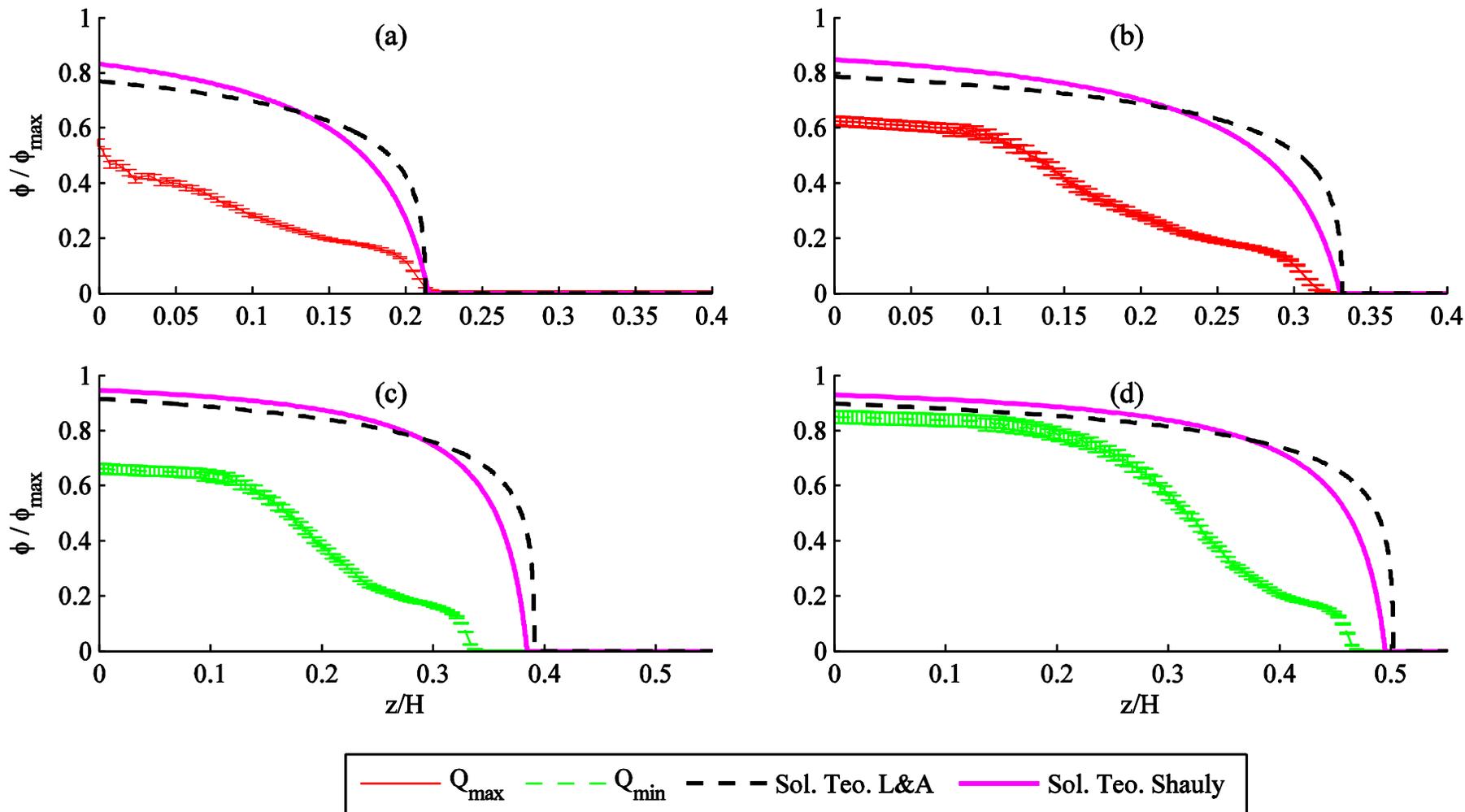


Figura 33: Perfiles de concentración v/s altura y su comparación con las soluciones teóricas de ambos modelos. Las distintas figuras son: (a) Exp. 9, $\phi_s = 0.10$, Q_{\max} ; (b) Exp. 10, $\phi_s = 0.15$, Q_{\max} ; (c) Exp. 11, $\phi_s = 0.20$, Q_{\min} ; (d) Exp. 12, $\phi_s = 0.25$, Q_{\min} .

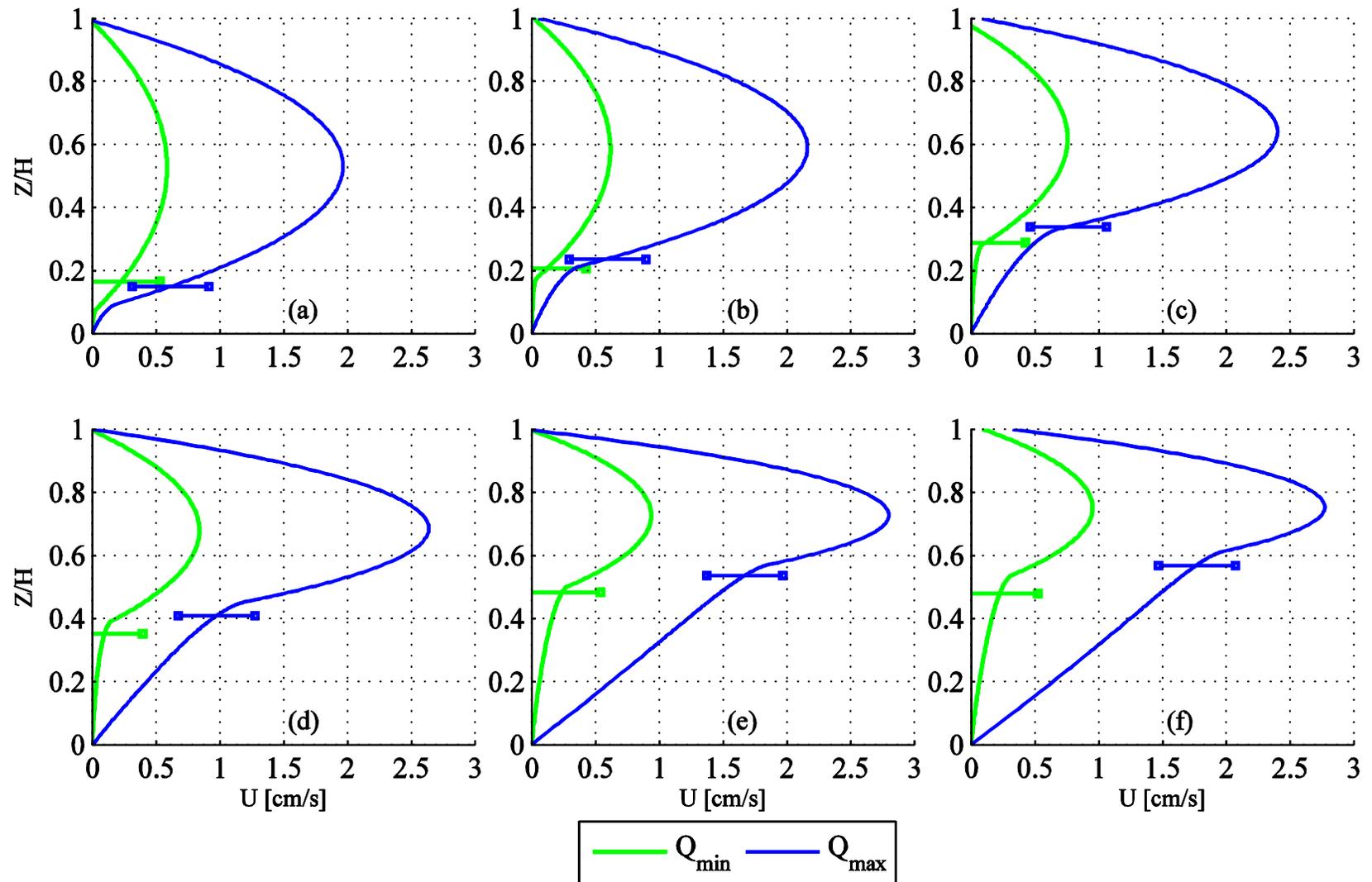


Figura 34: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Leighton & Acrivos, para distintos experimentos. (a) Exp. 8, $\phi_s = 0.05$; (b) Exp. 9, $\phi_s = 0.10$; (c) Exp. 10, $\phi_s = 0.15$; (d) Exp. 11, $\phi_s = 0.20$; (e) Exp. 12, $\phi_s = 0.25$; (f) Exp. 13, $\phi_s = 0.27$. Las líneas horizontales son las alturas de resuspensión medidas experimentalmente.

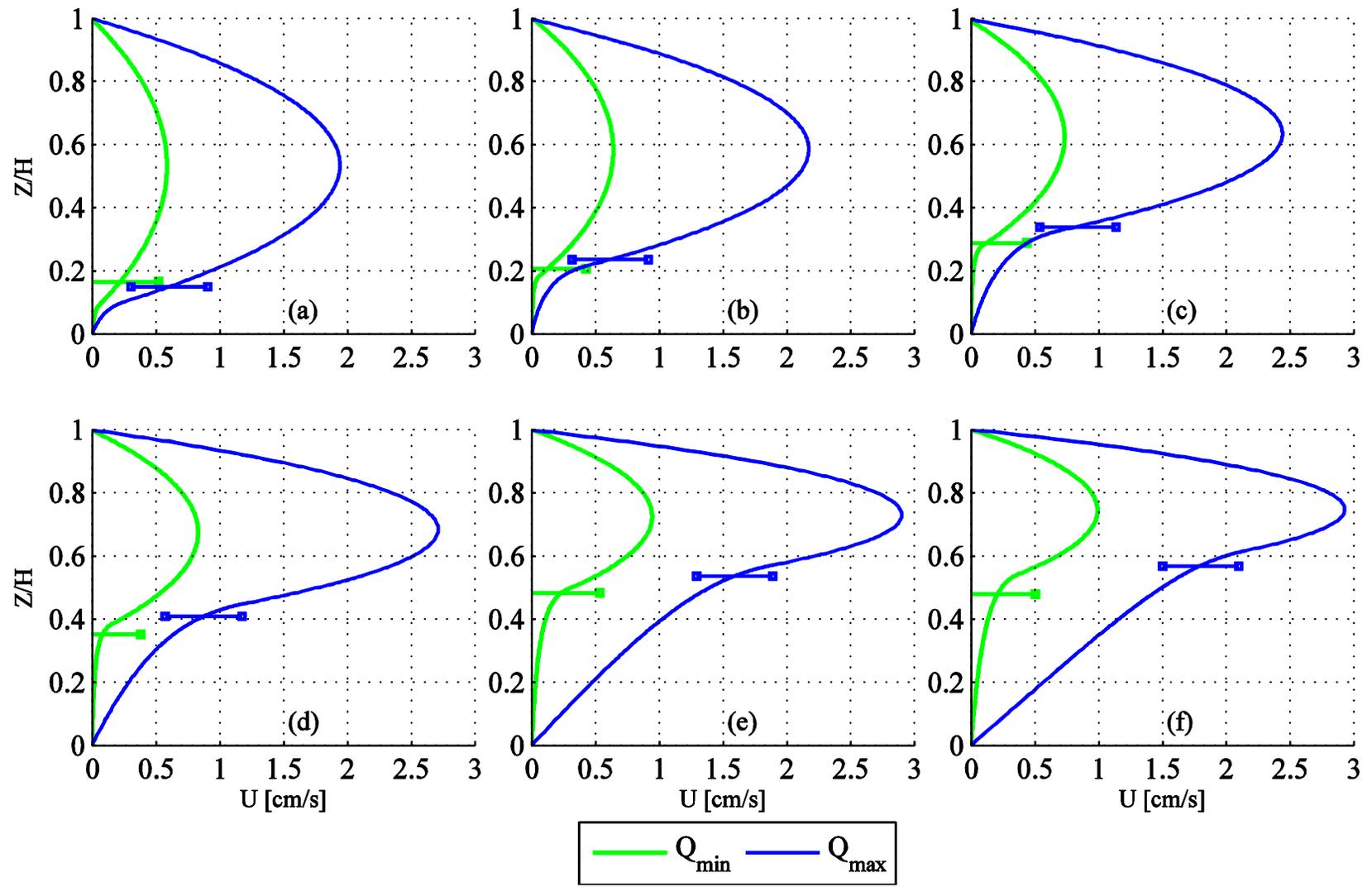


Figura 35: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Shaulyet al., para distintos experimentos. (a) Exp. 8, $\phi_s = 0.05$; (b) Exp. 9, $\phi_s = 0.10$; (c) Exp. 10, $\phi_s = 0.15$; (d) Exp. 11, $\phi_s = 0.20$; (e) Exp. 12, $\phi_s = 0.25$; (f) Exp. 13, $\phi_s = 0.27$. Las líneas horizontales son las alturas de resuspensión medidas experimentalmente.

Hubiera sido de particular interés haber medido la velocidad en la interfaz para poder compararla con el valor teórico para distintas concentraciones, sin embargo esto no fue posible. Se trató de implementar un método de PIV (*Particle Image Velocimetry*) pero no se tenía una buena resolución ni iluminación de las imágenes, por lo que no se logró hacer funcionar el método. Por otra parte las soluciones teóricas de los perfiles de velocidad son muy similares a las presentadas por Schaflinger et al. (1995), donde se midió la velocidad en la interfaz instalando otra cámara en la parte superior del canal. Por esto en vista de la similitud en la forma de los perfiles, y de la buena correspondencia entre resultados teóricos y experimentales relacionados con el punto donde termina el lecho y empieza la zona con perfil parabólico, hubiese sido interesante conocer y comparar la velocidad en la interfaz. Otra posible mejora experimenta podría ser emplear partículas con el mismo índice de refracción que el agua. Esto podría mejorar las medidas en los perfiles de concentración.

Una de las limitaciones que tienen ambos modelos es que independiente del valor de la concentración que se tenga en el fondo del canal, ya sea $\phi_w = \phi_0$ o $\phi_w < \phi_0$, la concentración va disminuyendo a medida que la altura aumenta. Con esto se obtiene que siempre existirá un perfil de velocidades positivo para todo el alto del canal, es decir $u(z) \geq 0 \forall z$, lo que significa que el modelo predice que el lecho siempre se estará moviendo. Sin embargo, en los experimentos se observó que en algunos casos, en particular para concentraciones $\phi_s \geq 0.2$, parte del lecho se encontraba en movimiento y parte estática. Este problema tiene poca influencia para los casos de caudal bajo, pues como se ve en la Figura 36 (a), (b) y (c), las velocidades del lecho son bajísimas inclusive para altas concentraciones, sin embargo para aquellos casos con caudal alto existe una mayor discrepancia entre la solución teórica y experimental. Este problema viene dado por el planteamiento matemático del problema, pues en las ecuaciones (26) y (35) fue donde se impuso que la concentración debe ir disminuyendo monótonamente (al momento de integrar entre $\phi = \phi_w$ y $\phi = 0$), con lo que se está imponiendo que no exista una capa con concentración igual a la de empaquetamiento, que es la zona donde no existe movimiento de partículas.

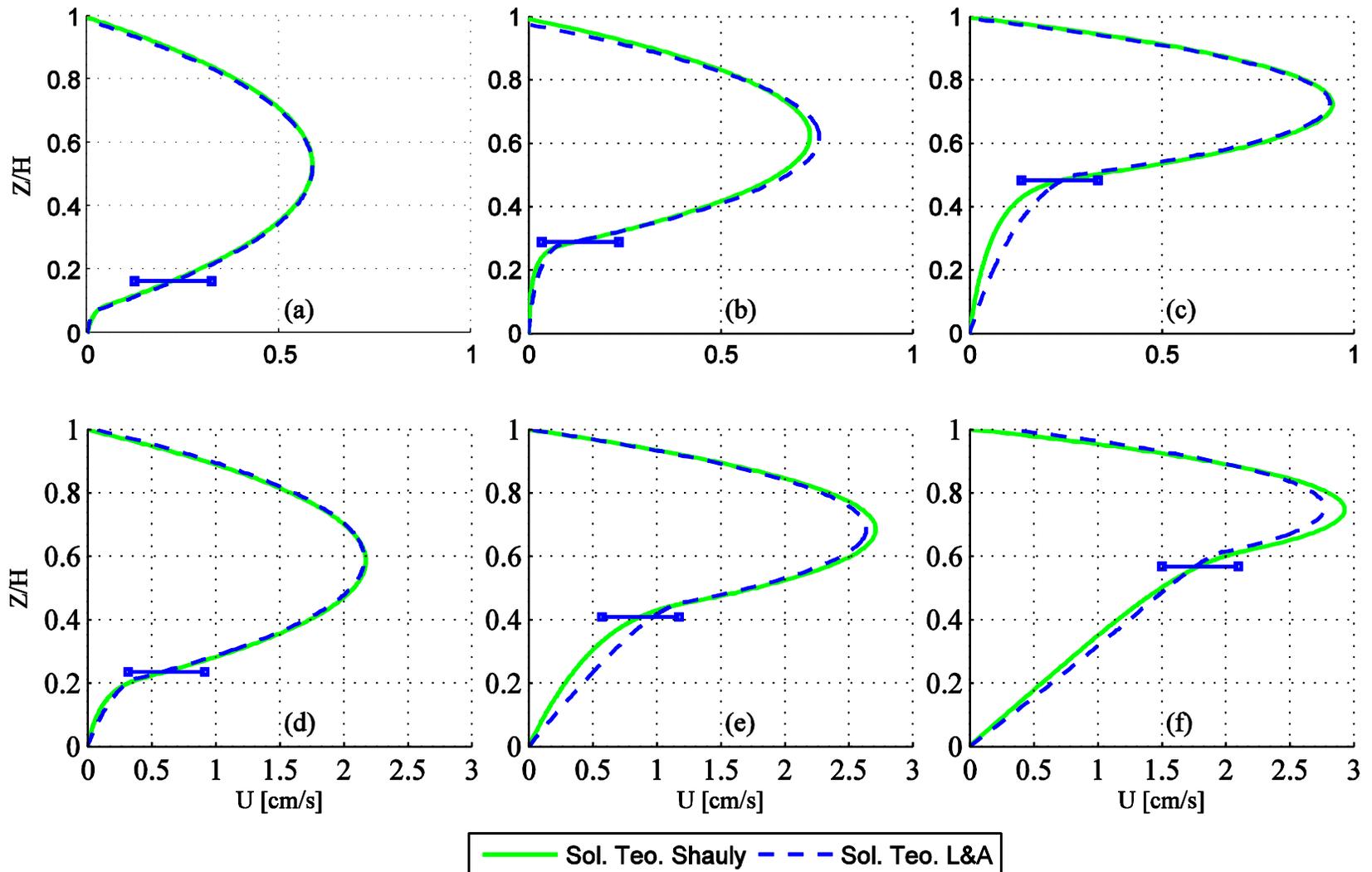


Figura 36: Comparación de perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Shauly et al. y Leighton & Acrivos para distintos experimentos. (a) Exp. 8, $\phi_s = 0.05$, Q_{min} ; (b) Exp 10, $\phi_s = 0.15$, Q_{min} ; (c) Exp. 12, $\phi_s = 0.25$, Q_{min} ; (d) Exp. 8, $\phi_s = 0.05$, Q_{max} ; (e) Exp 10, $\phi_s = 0.15$, Q_{max} ; (f) Exp. 12, $\phi_s = 0.25$, Q_{max}

6. Conclusiones

En el presente estudio se han realizado mediciones para determinar y cuantificar cómo un lecho de partículas no cohesivas, previamente sedimentadas, resuspenden por la acción de un flujo laminar debido a un gradiente de presiones en un conducto cerrado. Dentro de estas mediciones se consideraron dos condiciones de flujo, distintas concentraciones en volumen de partículas dentro del conducto, un fluido con una muy alta viscosidad y se realizaron experimentos para lechos monodispersos y bidispersos, con dos tamaños de partículas que se diferencian en un 40%.

La longitud de la instalación experimental diseñada es similar a la de otros estudios experimentales del tema (Altobelli 1991, Schafingler et al. 1990), mientras que los parámetros experimentales tales como densidad y viscosidad del fluido y densidad y diámetro de las partículas se encuentra dentro del orden de estudios previos (Schafingler et al. 1995, Leighton & Acrivos 1985, Tripathi & Acrivos 1999). La mayoría de los estudios experimentales acerca del tema han sido realizados en flujos de Couette en geometrías anulares, por lo que uno de los objetivos de este trabajo fue validar las fórmulas obtenidas en estos análisis para un tipo de flujo más común como lo es un flujo de Poiseuille.

La altura de resuspensión de las partículas fue determinada de manera visual mediante la grabación y post procesamiento de imágenes donde se observara el fenómeno. Para esto se desarrolló una técnica que consistió en capturar la intensidad de luz promedio a lo largo del eje vertical para una serie de fotos y determinar el punto donde se alcance una intensidad de luz igual al 98% de la intensidad que se observa en un fluido sin partículas, el cual sería definido como el punto de resuspensión máxima. Se escogió este valor pues se deseaba obtener el punto más alto adonde lleguen las partículas pero evitando las singularidades que la cámara capta en la interfaz sólido-líquido. También se trató de obtener los perfiles de concentración con el mismo procedimiento y calibrando en una sección independiente del canal una curva de intensidad de luz *v/s* concentración en volumen.

Para cuantificar cuál es la altura de resuspensión a la que llegan las partículas debido al esfuerzo de corte que actúa sobre ellas se desarrollaron dos modelos teóricos, uno propuesto por Leighton & Acrivos (1985) el cual no contiene parámetros ajustables y otro propuesto por Shauly et al. (2000) el cual considera distintos efectos de potencial migración de partículas propuestos por otros autores (Phillips et al. 1992, Kirshnan et al. 1996) y si contiene parámetros empíricos que se pueden ajustar.

Al momento de analizar los resultados y compararlos con estos modelos lo primero que se determinó es que debido a la pequeña diferencia entre los tamaños de las partículas del lecho bidisperso ($\lambda = \frac{d_{max}}{d_{min}} = 1.4$) este podía modelarse como un lecho monodisperso ajustando la concentración de empaquetamiento máxima, de acuerdo a un modelo propuesto por Shauly et al. y otro propuesto por Gondret & Petit (1997). Con estos modelos se obtuvo que la concentración máxima de empaquetamiento no variaba en más de un 1% con respecto a la de lecho monodisperso para un valor de λ tan cercano a la unidad.

Al momento de comparar los resultados entregados por los modelos con los resultados obtenidos experimentalmente se obtuvo que el modelo de Leighton & Acrivos se ajusta bien para los casos con caudales altos y no tan bien para los casos con caudales bajos, pero es aceptable si se considera que no tiene parámetros ajustables. Por otro lado el modelo de Shauly et al. se probó con un valor constante del parámetro empírico K , de igual manera que fue propuesto por los autores, pero se obtuvieron resultados poco satisfactorios. Para resolver este problema se propuso calibrar esta constante como una función únicamente de la concentración, como ya lo han propuesto otros autores (Tetlow et al. 1998, Rao et al. 2002). Aquí se obtuvo uno de los resultados más interesantes del trabajo, al descubrir que el parámetro K no solo dependía de la concentración de partículas sino también del flujo a través de un balance dinámico. Así se determinó mediante un análisis dimensional que el parámetro K dependía de 6 números adimensionales, sin embargo por simplicidad y por restricciones experimentales sólo se variaron 3 de estos números, con lo que se buscó un ajuste de K en función del número de Shields Ψ , el Froude densimétrico F_d y la concentración en volumen de partículas dentro del canal ϕ_s . Los números que no se variaron fueron la relación entre el radio de la partícula y el alto del canal $\frac{a}{H}$, la densidad relativa $\frac{\Delta\rho}{\rho_s}$ y la concentración de empaquetamiento ϕ_0 . De estos números el primero no debiese influir mucho en los resultados pues para lechos monodispersos las ecuaciones son independientes del radio de las partículas, mientras que el último adimensional sólo se varió en un 1% como se explicó previamente, debido al valor de λ tan cercano a la unidad. Por su parte la densidad relativa no se varió porque no se contaban con otro tipo de partículas ni de fluido, pero sería interesante variarla en futuros estudios pues tanto el número de Shields como el Froude densimétrico dependen de este valor. Así se encontró una función dependiente del número de Shields y la concentración de partículas que se ajustaba de forma cúbica a los resultados, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.87$.

Al correr el modelo de Shauly et al. con este coeficiente K , dependiente no solo de la concentración sino también de la relación entre fuerzas viscosas y gravitatorias, se obtuvieron resultados mucho mejores, cuyo ajuste a los resultados experimentales es mejor que el obtenido con el modelo de Leighton & Acrivos. También se concluyó que para el lecho bidisperso ambos modelos monodispersos se ajustaron bien a los resultados, variando sólo la concentración de empaquetamiento. Este buen ajuste se debe a que el valor de λ es muy cercano a la unidad.

Se obtuvieron los perfiles de velocidad teóricos para ambos modelos y se comparó el punto donde termina el lecho y empieza un perfil de velocidades parabólico con la altura de resuspensión medida experimentalmente, obteniéndose buenos resultados. Aquí se intentó implementar un método de PIV (Particle Image Velocimetry) para obtener el perfil de velocidades en el lecho pero no se obtuvo ningún resultado debido a la calidad de las fotos, pues no se cumplía una serie de criterios necesarios que requiere el método. Hubiera sido interesante haber obtenido el perfil de velocidades, y quizás haber agregado un trazador que no afecte la viscosidad del fluido, para también poder observarlo en la sección con fluido puro, pues las soluciones teóricas de los perfiles son muy similares a las obtenidas por Schafingler et al. (1995) donde si se midió la velocidad del lecho en su interfaz. Otro análisis interesante que se obtuvo del perfil de velocidades, es que el modelo siempre entrega velocidades mayores a cero excepto en las condiciones de borde, lo cual se observó que no siempre es así. Esto se debe a que los modelos de mezcla utilizados no consideran en ninguna parte el ángulo de fricción interna de las partículas, por lo que para cualquier caudal van a predecir cierta resuspensión, y también al hecho de que por la forma en que solucionó el problema sólo puede existir concentración de empaquetamiento en el fondo del canal, expuesto en las ecuaciones (25) y (36). Eso podría solucionarse agregando otra ecuación y otra incógnita, pero complejizando más el error a minimizar expuesto en la ecuación (39).

Se realizó un análisis de propagación de errores para determinar el rango de confiabilidad de los resultados obtenidos, donde se consideraron principalmente los errores instrumentales. Sin embargo hay algunos errores que no se tomaron en cuenta, como por ejemplo el error de medición de la viscosidad, debido a que no se conocía el error asociado al reómetro. También existe un error de cierre en las ecuaciones, al momento de obtener la solución teórica. Este se debe a que el sistema a resolver expuesto en la ecuación (39) es un problema de optimización donde se busca el menor error posible probando puntos en una malla discreta, por lo que siempre existe un error de cierre cuya magnitud depende de la fineza de la malla con la que se está trabajando. El otro error difícil de cuantificar es la pérdida de carga asociada al filtro. Se determinó que el caudal que escurría por el sistema era aproximadamente $1/3$ del caudal aforado sin el filtro, aunque este valor no es exacto. El

ideal hubiera sido contar con sensores de presiones o con flujómetros que permitieran determinar el caudal de forma directa. En el diseño experimental originalmente se contaba con una bomba de engranaje la cual entrega un caudal fijo independiente de las pérdidas de carga, pero fue necesario cambiarla por una bomba centrífuga por problemas técnicos con la primera. Si ésta hubiera funcionado correctamente habría una fuente menos de error.

En cuanto a los perfiles de concentración, los teóricos difieren bastante de los experimentales, especialmente para concentraciones $\phi_s \leq 0.2$. Esto se debe a que la calibración obtenida en la ecuación (10) es extremadamente sensible para concentraciones mayores al 10%, pues la cámara pasa de un punto donde capta mucha intensidad de luz a un punto donde capta muy poca, de forma muy brusca, habiendo poca diferencia entre la luz captada para concentraciones mayores a la previamente mencionada.

Dentro de las recomendaciones para futuros estudios está el usar una cámara con mejor resolución y una mejor iluminación de las fotos de tal forma de cumplir con los criterios de PIV y poder obtener perfiles de velocidad. También se recomienda tener una mayor dispersión en el tamaño de las partículas, para tener un lecho notoriamente bidisperso, ojalá $\lambda > 3$, y buscar alguna manera de calibrar la curva intensidad de luz v/s concentración con una menor sensibilidad. Otra recomendación es la inclusión de iluminación frontal, pues en los experimentos realizados al existir sólo iluminación trasera no fue posible distinguir entre las partículas pintadas y aquellas con su color natural, lo cual también podría aplicarse para distinguir trazadores.

En síntesis, el presente trabajo experimental verificó y modificó algunos modelos de resuspensión viscosa propuestos por otros autores aplicados a un flujo y geometría diferente a la mayoría de los trabajos experimentales previos, obteniéndose buenos resultados para flujos con números de Reynolds tan bajos como $Re < 5$, debido a la alta viscosidad de los fluidos utilizados.

7. Bibliografía

- Acrivos A., Mauri R., Fan X., 1993, “Shear-induced resuspension in a Couette device”, *Int. J. Multiphase Flow* 19, 797-802
- Altobelli S. A., Givler R. C., Fukushima E., 1991, “Velocity and concentration measurements of suspensions by nuclear magnetic resonance imaging”, *J. Rheol.* 35, 721-734
- Borhan A., 1989, “An experimental study of the stability and efficiency of inclined super settlers”, *Phys. Fluids A* 1, 108-12
- Gadala-Maria F. A., 1979, “The rheology of concentrated suspensions”, Ph.D. Thesis, Stanford, University of California.
- Gondret P., Petit L., 1997, “Dynamic viscosity of macroscopic suspensions of bidmodal sized solid spheres”, *J. Rheol.* 41, 1261-1274
- Krishnan G. P., Beimfohr S., Leighton D. T., 1996, “Shear-induced radial segregation in bidisperse suspension”, *J. Fluid Mech.* 321, 371-393
- Leighton D., 1985, “The shear induced migration of particles in concentrated suspensions” Ph.D. Thesis, Stanford, University of California.
- Leighton D., Acrivos A., 1986, “Viscous Resuspension,” *Chem. Engng Sci.* 41, 1377-1384.
- Leighton D., Acrivos A., 1987a, “The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions,” *J. Fluid Mech.* 181, 415-439.
- Leighton D., Acrivos A., 1987b, “Measurement of shear-induced migration of particles in concentrated suspensions of spheres,” *J. Fluid Mech.* 177, 109-131.
- Ouchiya N., Tanaka T., 1981, “Porosity of a mass of solid particles having a range of sizes”, *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 20, 66-71
- Phillips R. J., Armstrong R. C., Brown R. A., 1992, “A constitutive equation for concentrated suspension that accounts for shear-induced particle migration”, *Phys. Fluids A* 4, 30-40
- Ramachandran A., Leighton D. T. Jr., 2007, “Viscous resuspension in a tube: The impact of secondary flows resulting from second normal stress differences,” *Physics of fluids* 19, 053301-15.

- Rao R., Mondy L., Sun A., Altobelli S., 2002, "A numerical and experimental study of batch sedimentation and viscous resuspension", *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 39, 465-483.
- Revay J.M., Higdon J.J.L, 1992, "Numerical simulation of polydisperse sedimentation: equal-sized spheres", *J. Fluid Mech.* 243, 15-32
- Richardson J.F., Zaki W.N., 1954, "Sedimentation and fluidisation: Part I", *Trans. Inst. Chem. Eng.* 32, 35.
- Schaflinger U., Acrivos A., Zhang K., 1990, "Viscous resuspension of a sediment within a laminar and stratified flow," *Int. J. Multiphase Flow* 16, 567-578.
- Schaflinger U., Acrivos A., Stibi H., 1995, "An experimental study of viscous resuspension in pressure driven plane channel flow," *Int. J. Multiphase Flow* 21, 693-704.
- Shauly A., Wachs A., Nir A., 1998, "Shear-induced particle migration in polydisperse concentration suspension", *J. Rheol.* 42, 1329-1348.
- Shauly A., Wachs A., Nir A., 2000, "Shear-induced particle resuspension in settling polydisperse concentrated suspension," *Int. J. Multiphase Flow* 26, 1-15.
- Tetlow N., Graham A. L., Ingber M. S., Samuel R. Subia, Lisa A. Mondy, Steve A. Altobelli, 1998, "Particle migration in a Couette apparatus: Experiment and modeling", *J. Rheol.* 42, 307-327.
- Tripathi A., Acrivos A., 1999, "Viscous resuspension in a bidensity suspension", *Int. J. Multiphase Flow* 25, 1-14.
- Zhang K., Acrivos A., 1994, "Viscous resuspension in fully developed laminar pipe flows," *Int. J. Multiphase Flow* 20, 579-591.

ANEXOS

Anexo A: Determinación densidad de partículas

La densidad de las partículas utilizadas en los experimentos se determinó mediante el principio de arquímedes. El gráfico masa v/s volumen se presenta en la Figura A.1, donde la pendiente corresponde a la densidad de las partículas:

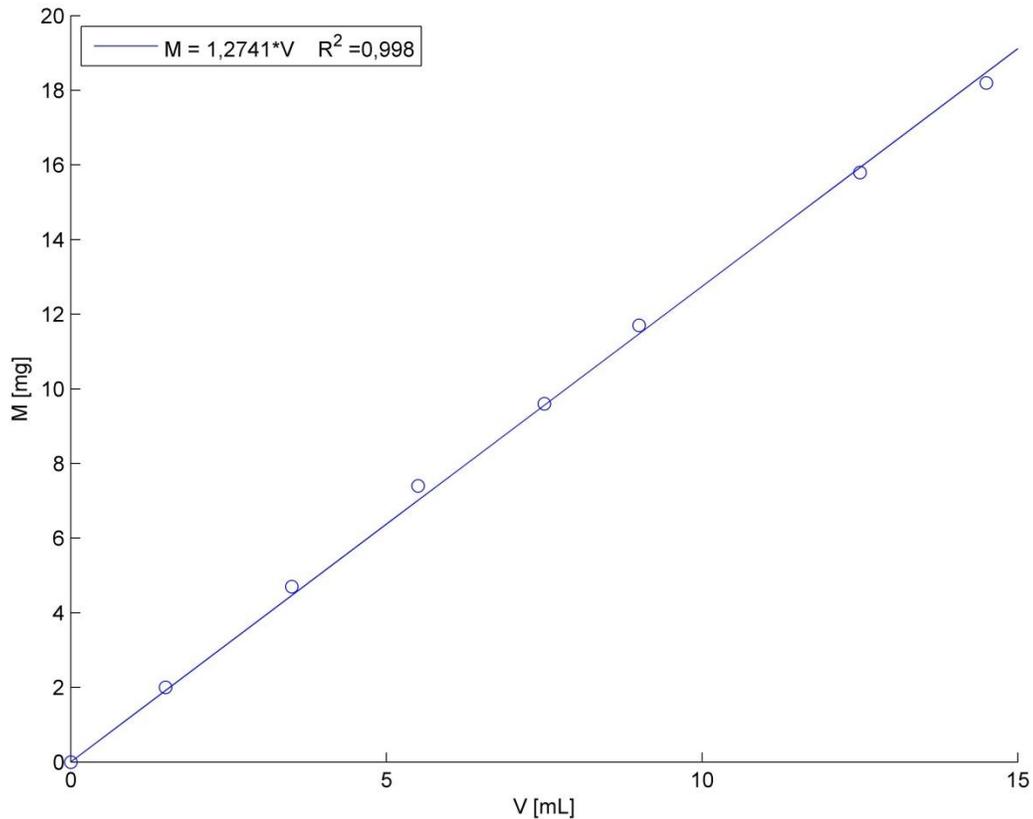


Figura A.1: Masa v/s Volumen de las resinas de intercambio iónico. Su densidad es $1,274 \text{ kg/m}^3$.

Anexo B: Determinación densidad del fluido

La determinación de la densidad de la mezcla de agua con glicerina se realiza midiendo la masa para distintos volúmenes y luego realizando una regresión lineal, donde la pendiente representa la densidad. El resultado se puede apreciar en la Figura B.1.

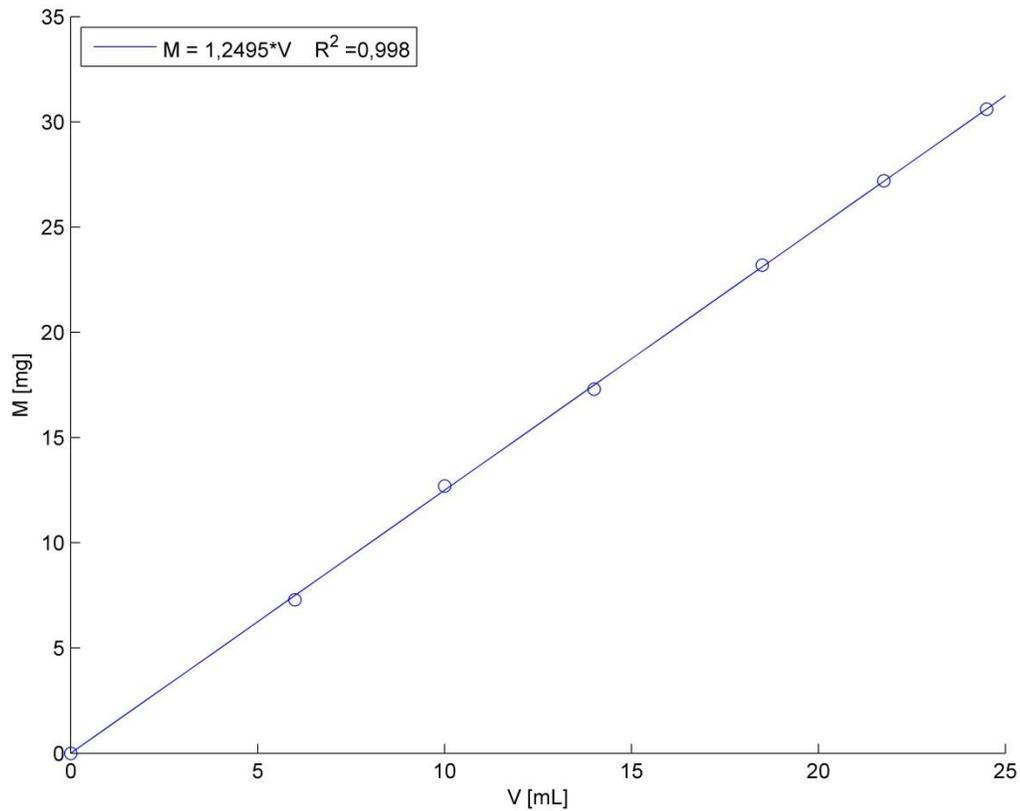


Figura B.1: Masa v/s Volumen de la mezcla en peso de 90% glicerina y 10 % agua. Su densidad es $1,249 \text{ kg/m}^3$.

Anexo C: Determinación viscosidad del fluido

Para determinar la viscosidad de la mezcla de agua con glicerina se utilizó un reómetro de cilindros concéntricos Rheolab de la marca Anton Paar. Para un ensayo con 100 puntos donde se va aumentando la tasa de deformación angular se obtienen distintos valores del esfuerzo de corte, y como se sabe que el fluido es newtoniano la viscosidad dinámica corresponde a la pendiente de la recta, la cual se presenta en la Figura C.1.

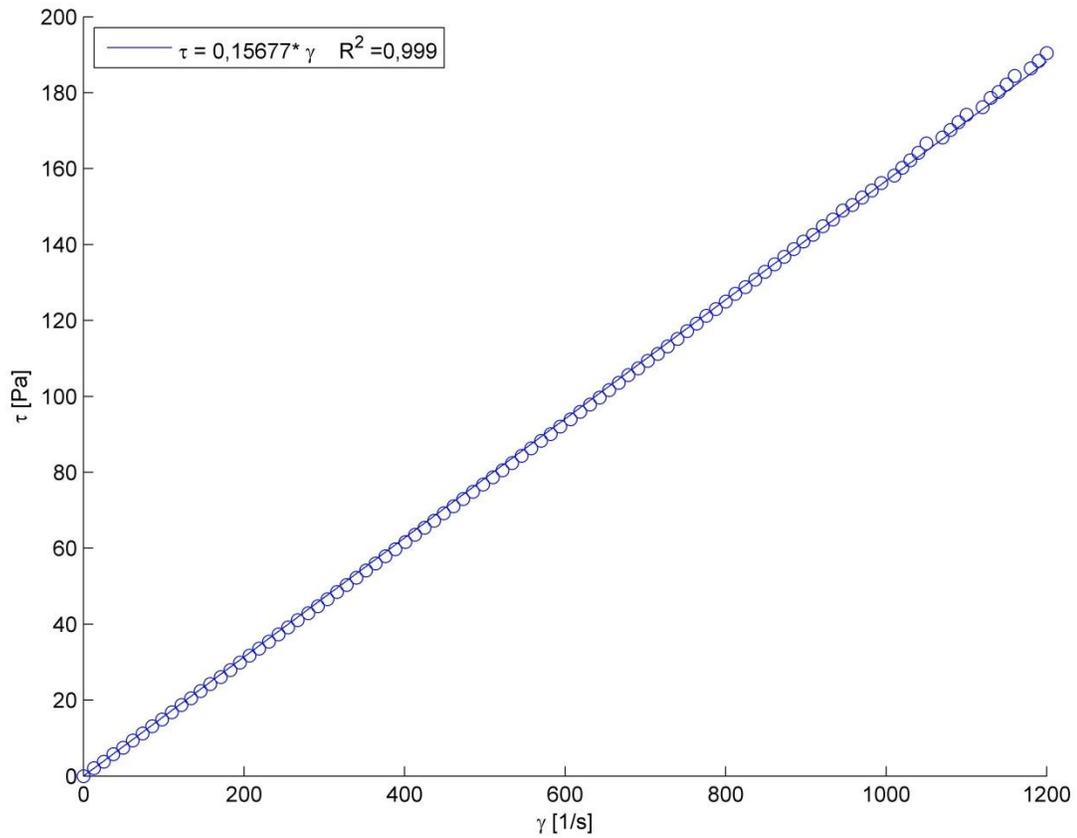


Figura C.1: Esfuerzo de corte v/s Tasa de deformación angular de la mezcla en peso de 90% glicerina y 10 % agua. La viscosidad dinámica es de 0,15677 Pa·s.

Con este mismo gráfico también se obtiene la viscosidad cinemática, la cual tiene un valor de $1,2547E-4 \text{ m}^2/\text{s}$.

Anexo D: Perfiles de concentración

A continuación se presentan de los perfiles de concentración y su comparación con los modelos para todos los experimentos.

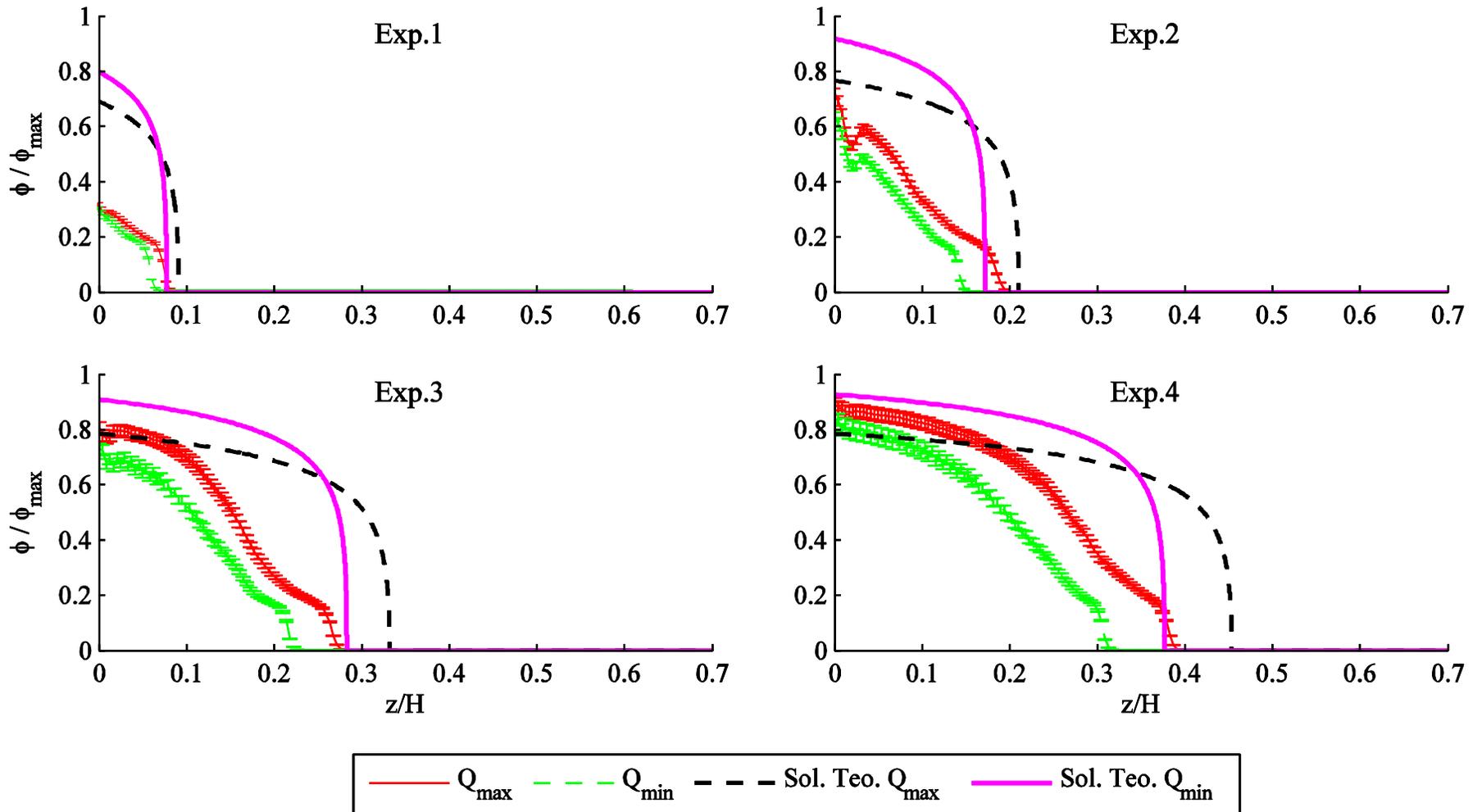


Figura D. 1: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos. Experimentos 1 a 4.

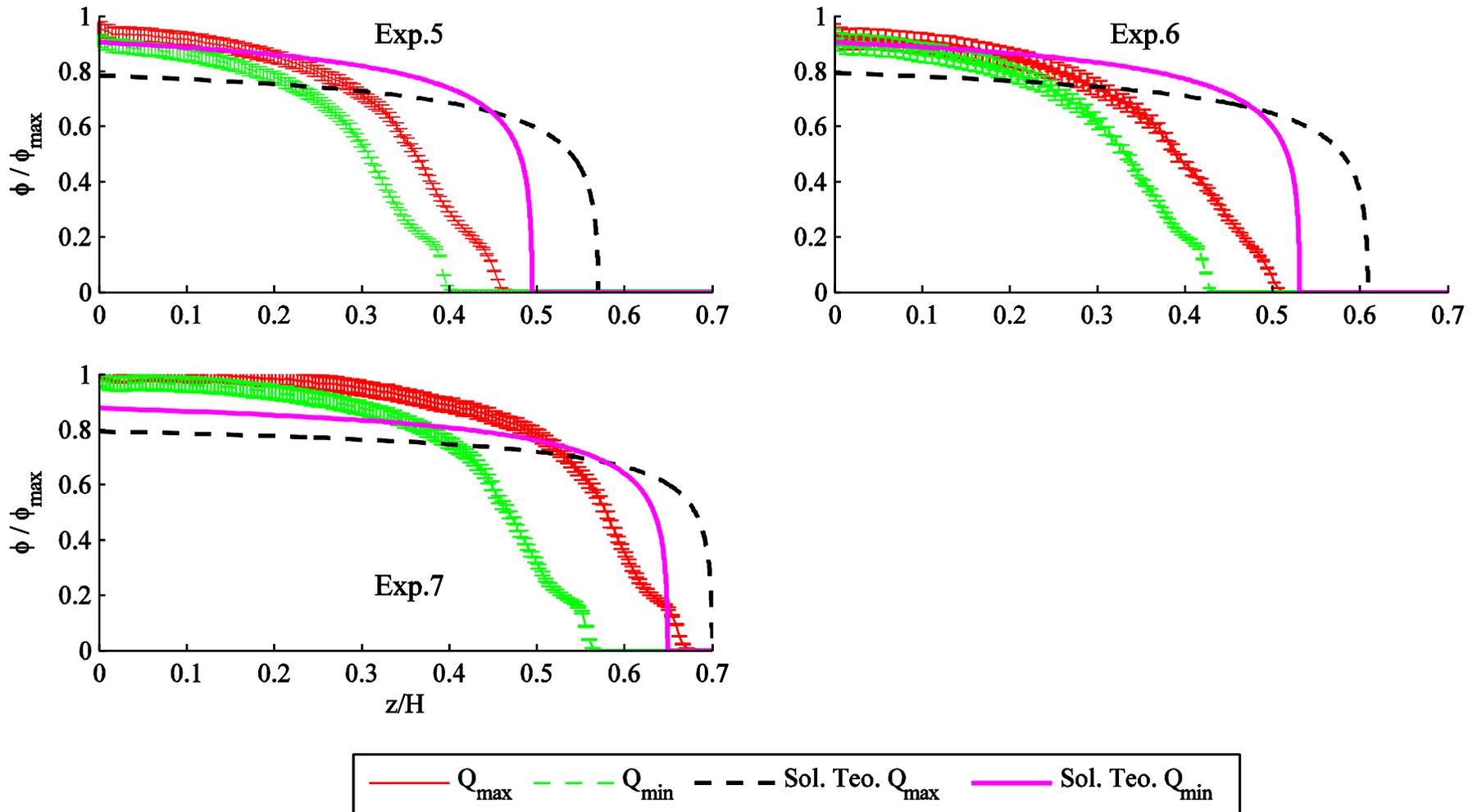


Figura D. 2: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos. Experimentos 5 a 7.

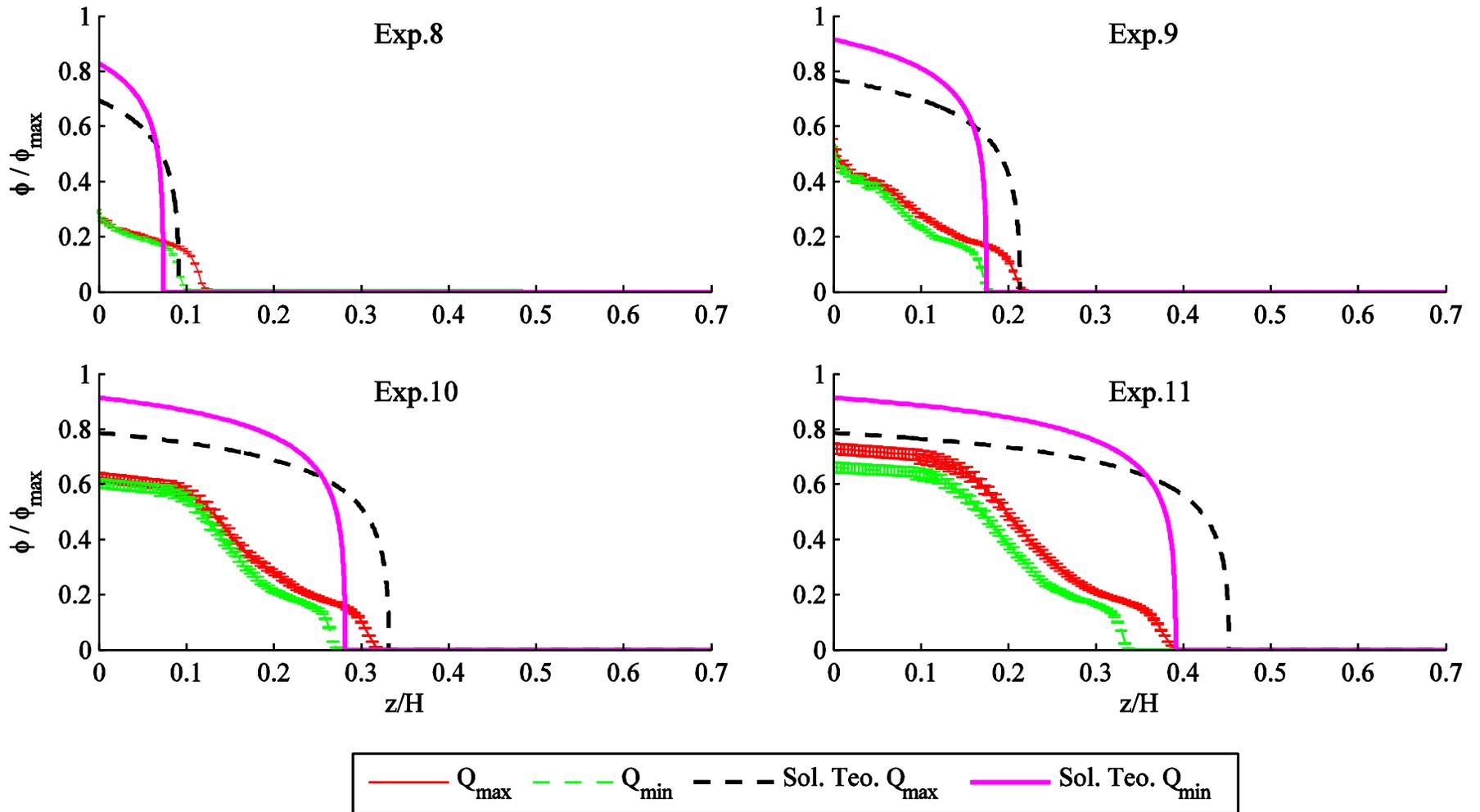


Figura D. 3: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos. Experimentos 8 a 11.

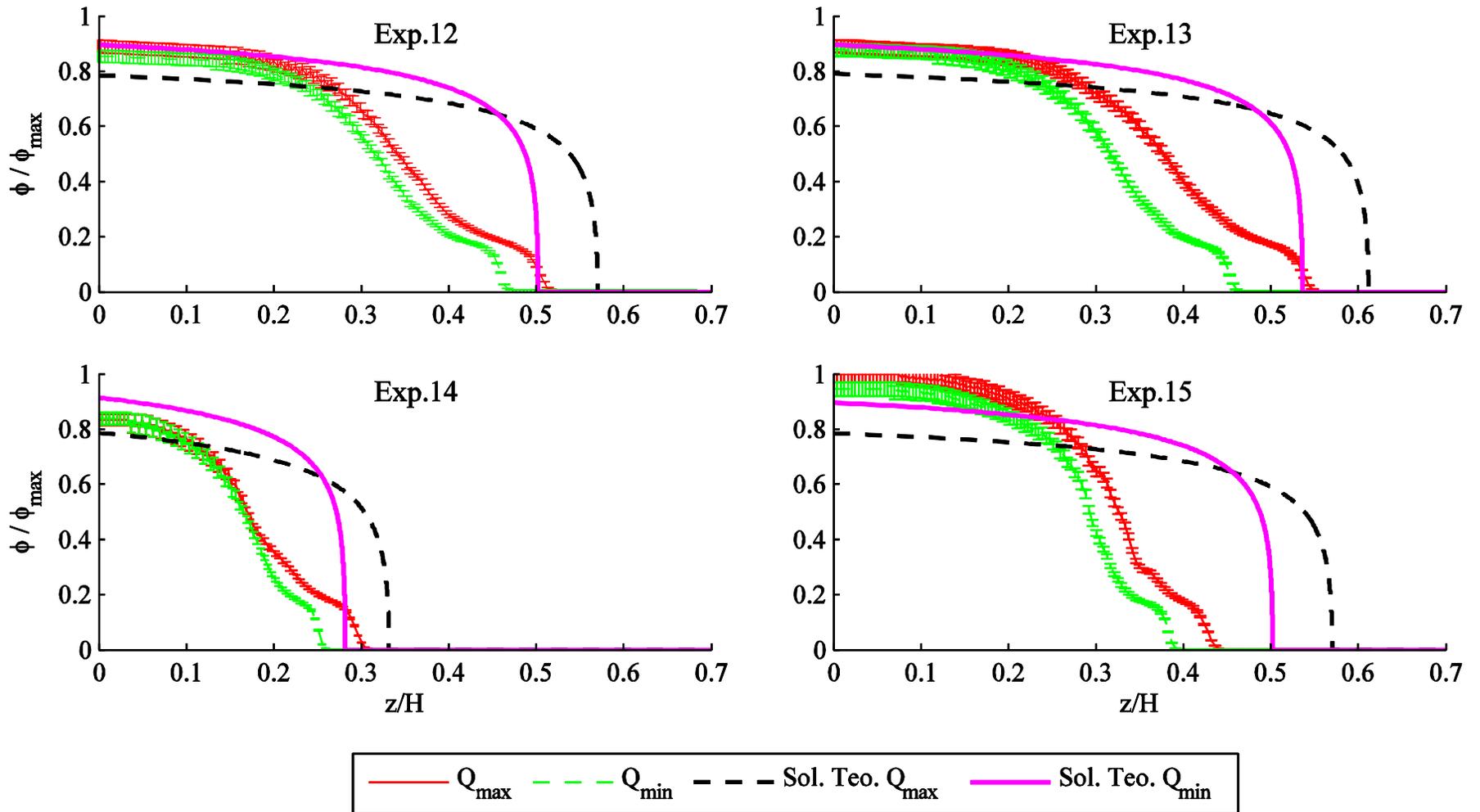


Figura D. 4: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Leighton & Acrivos. Experimentos 12 a 15.

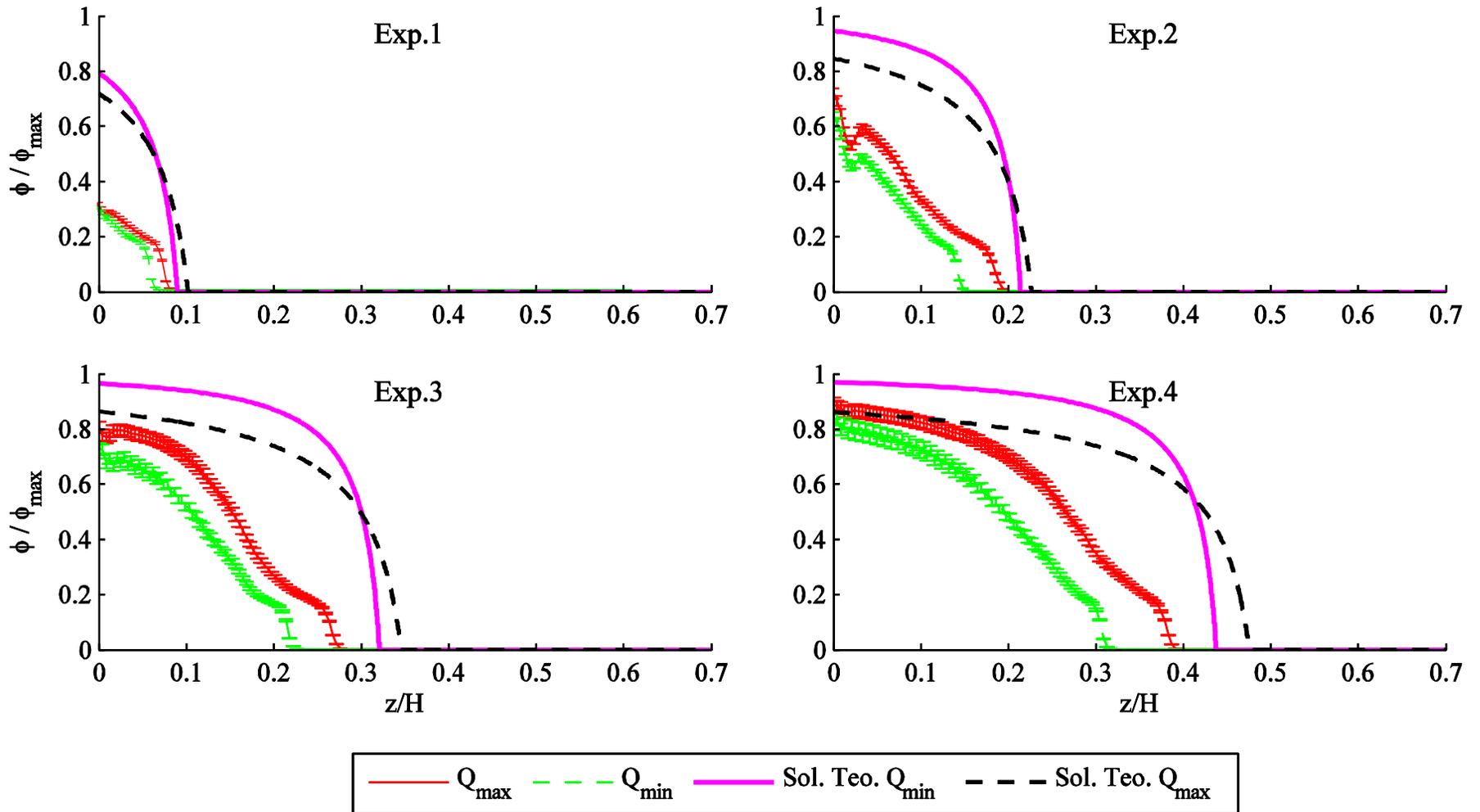


Figura D. 5: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Shauly. Experimentos 1 a 4.

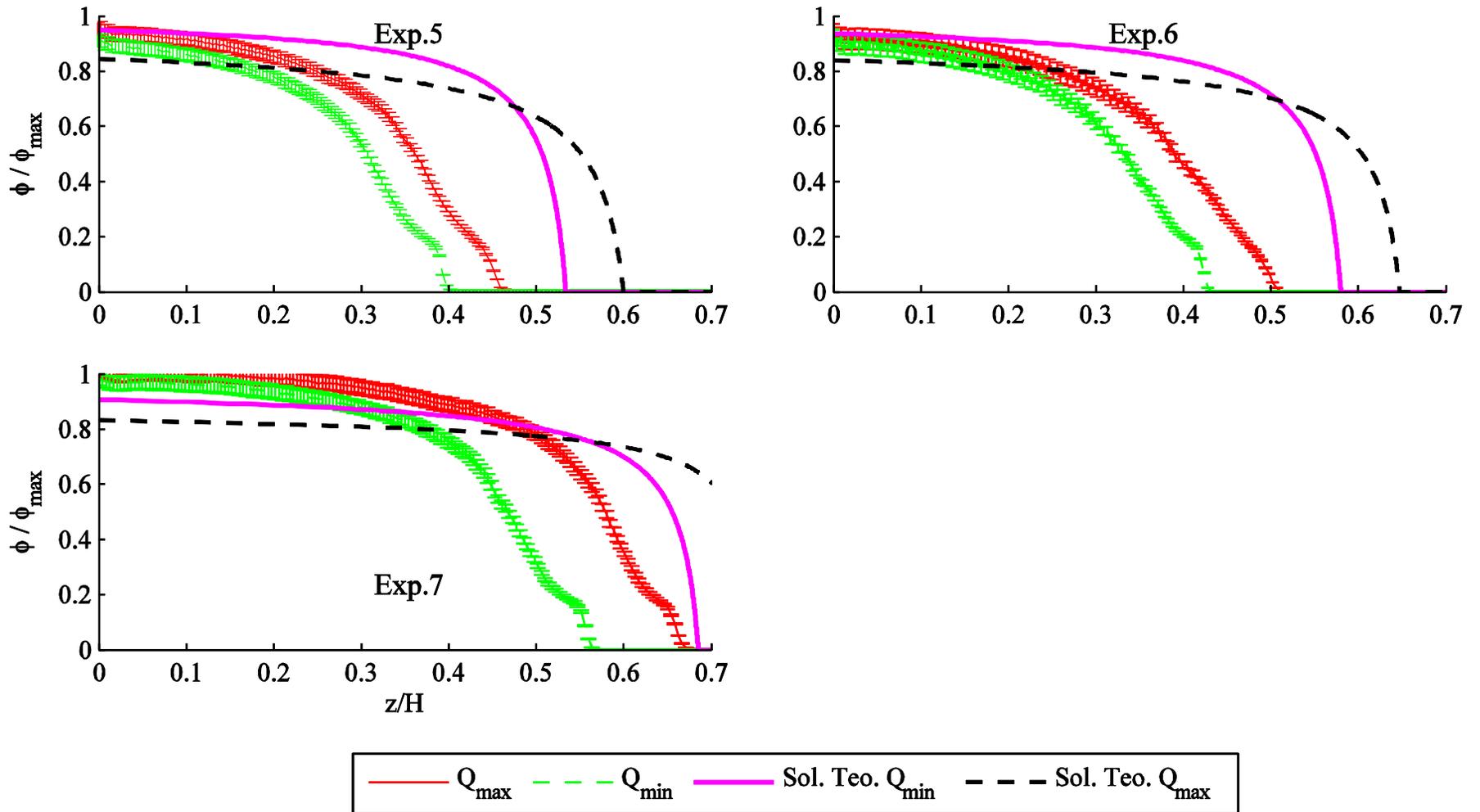


Figura D. 6: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Shauly. Experimentos 5 a 7.

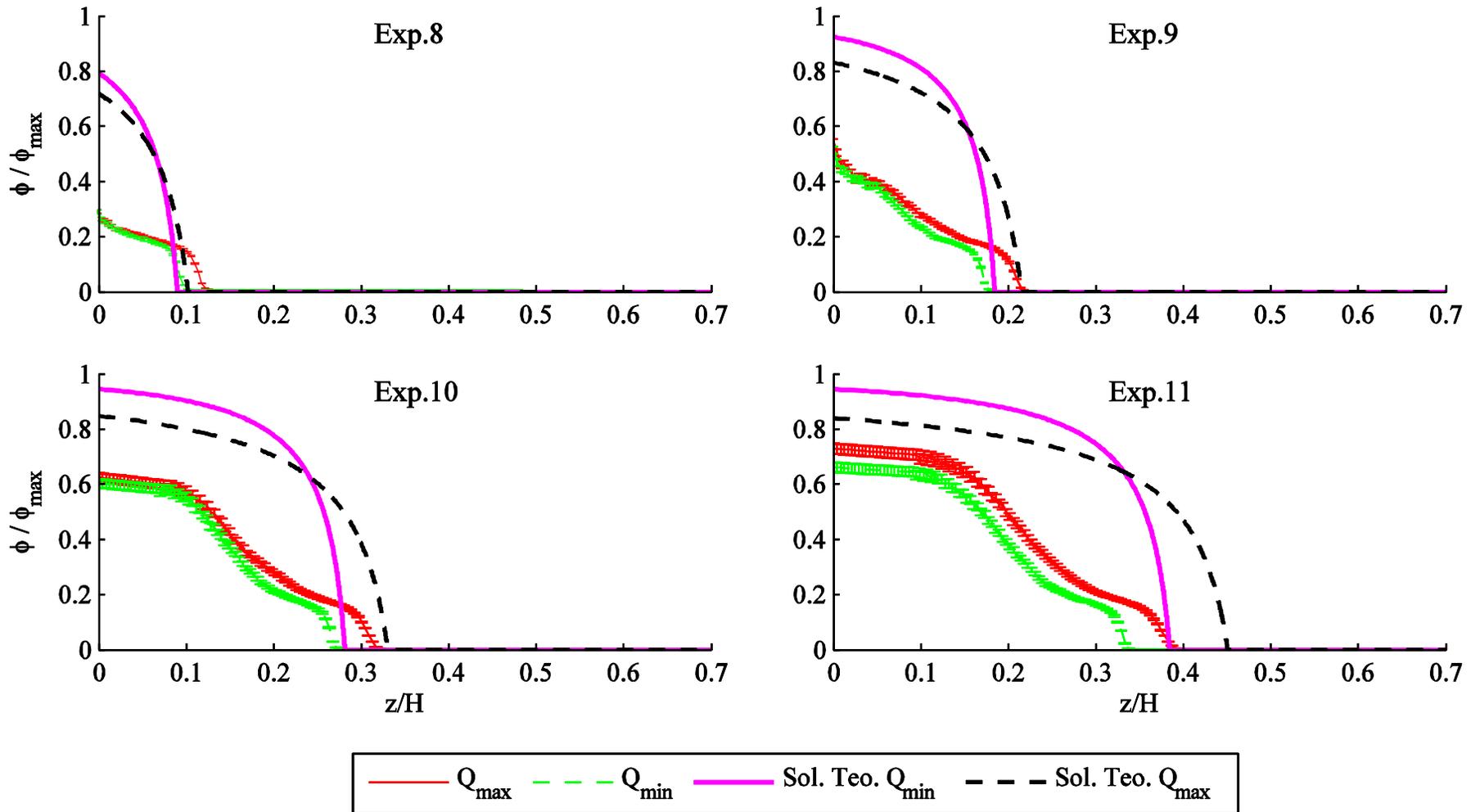


Figura D. 7: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Shauly. Experimentos 8 a 11.

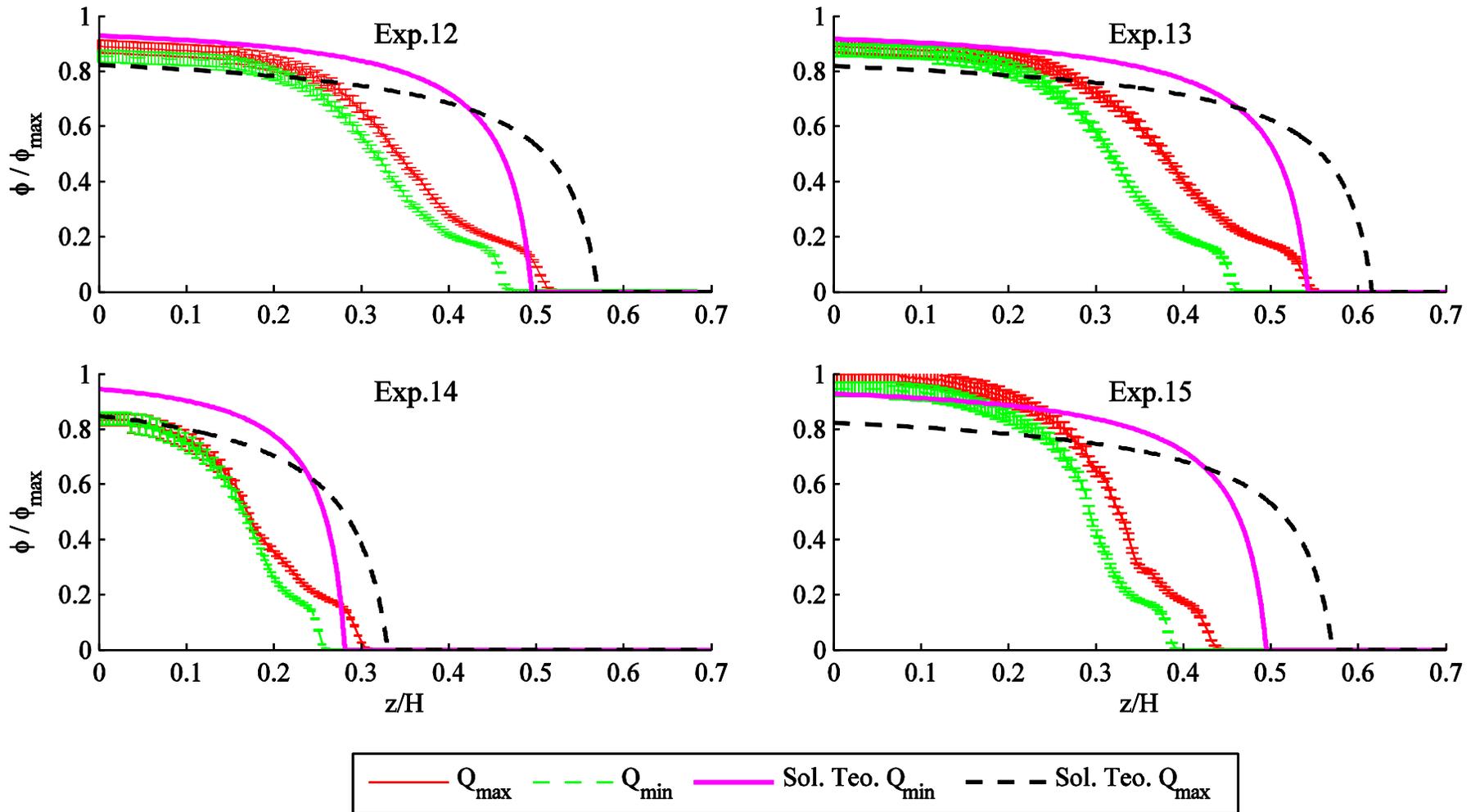


Figura D. 8: Perfiles de concentración y su comparación con el modelo de Shauly. Experimentos 12 a 15.

Anexo E: Perfiles de concentración

A continuación se presentan de los perfiles de velocidad para ambos modelos. Las líneas rectas representan el punto de máxima resuspensión medido experimentalmente para cada caso.

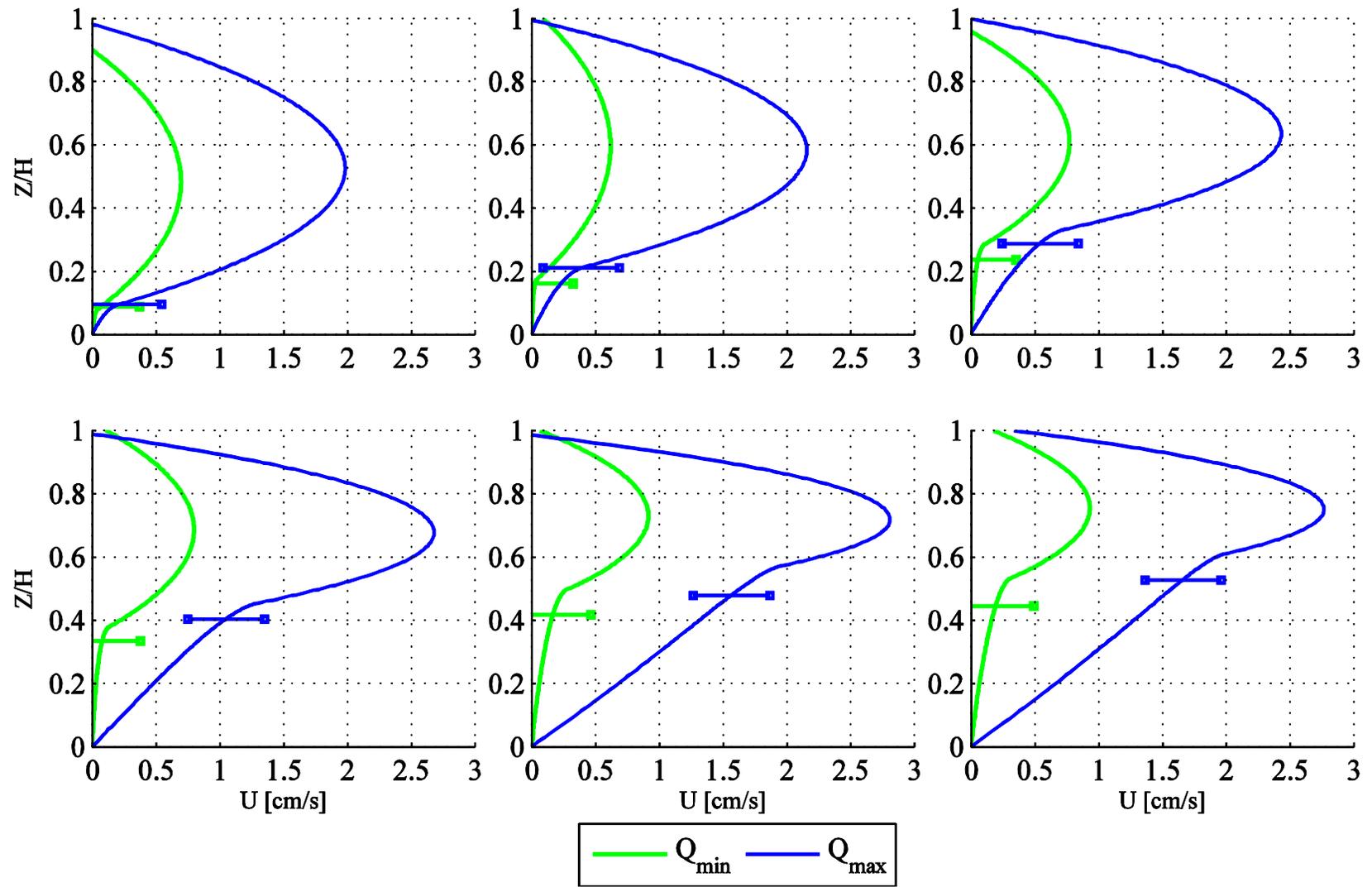


Figura E. 1: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Leighton & Acrivos. (a) Exp. 1, (b) Exp. 2, (c) Exp. 3, (d) Exp. 4, (e) Exp. 5, (f) Exp. 6.

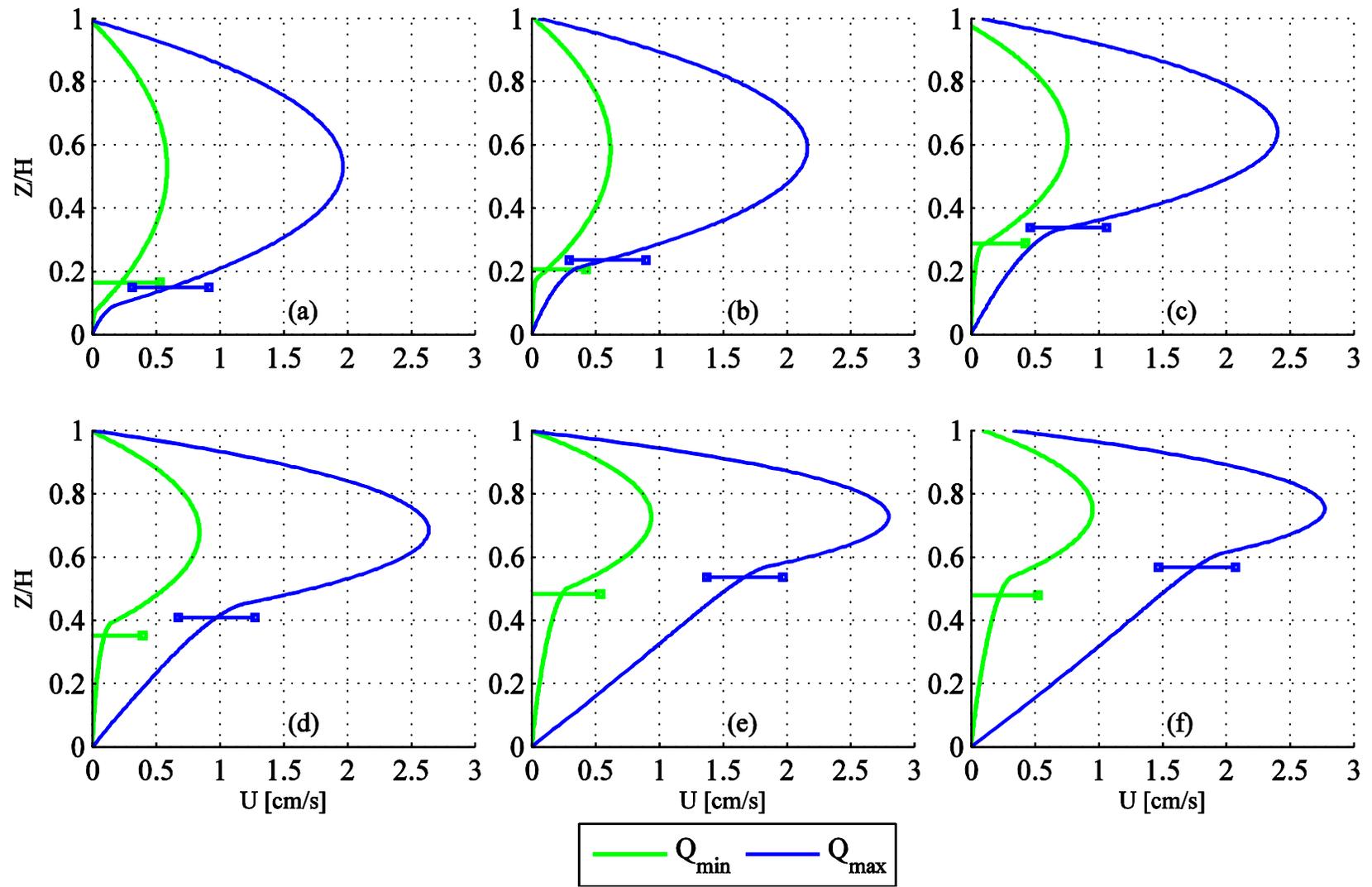


Figura E. 2: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Leighton & Acrivos. (a) Exp. 8, (b) Exp. 9, (c) Exp. 10, (d) Exp. 11, (e) Exp. 12, (f) Exp. 13.

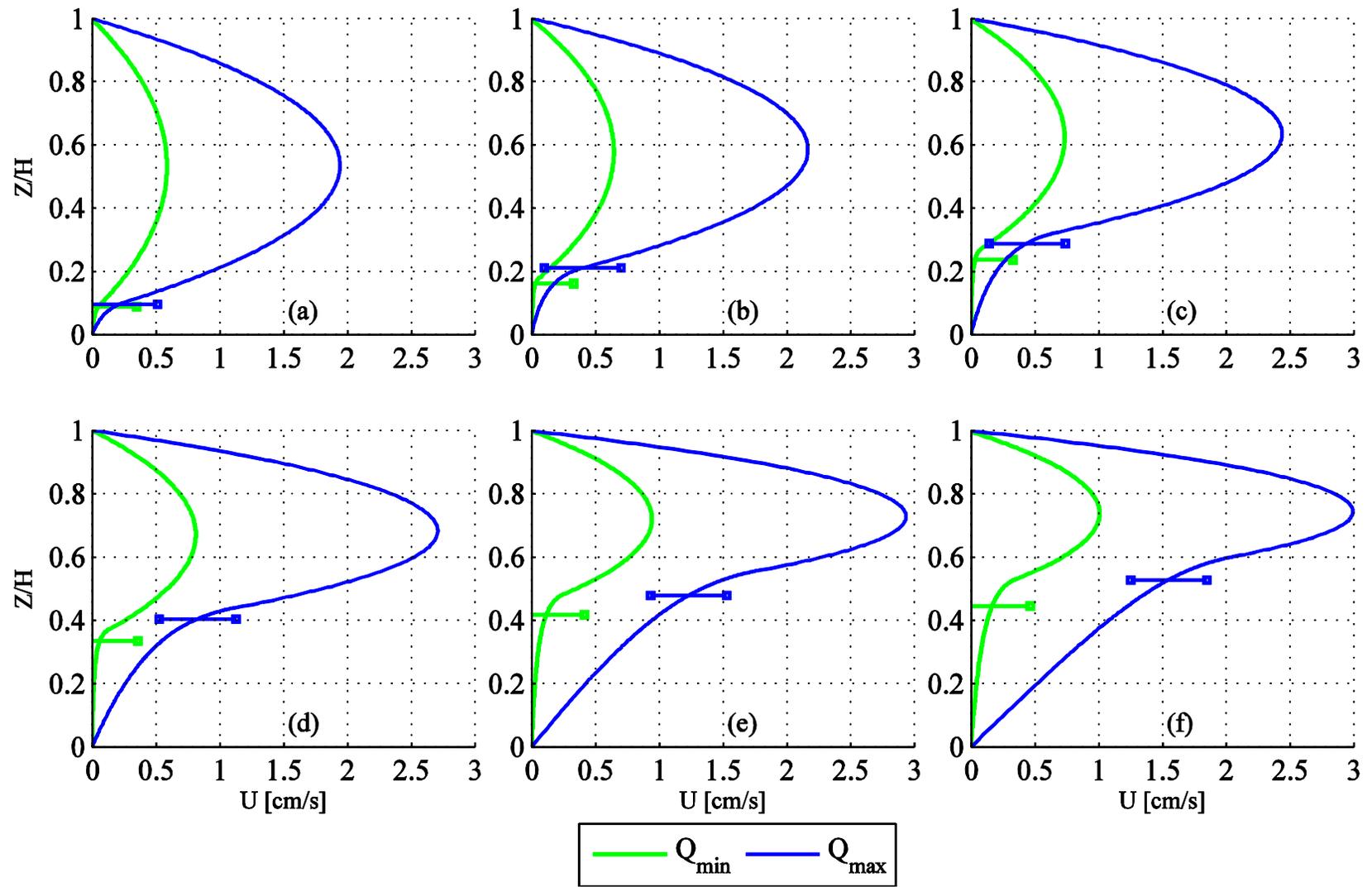


Figura E. 3: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Shauly et al. (a) Exp. 1, (b) Exp. 2, (c) Exp. 3, (d) Exp. 4, (e) Exp. 5, (f) Exp. 6.

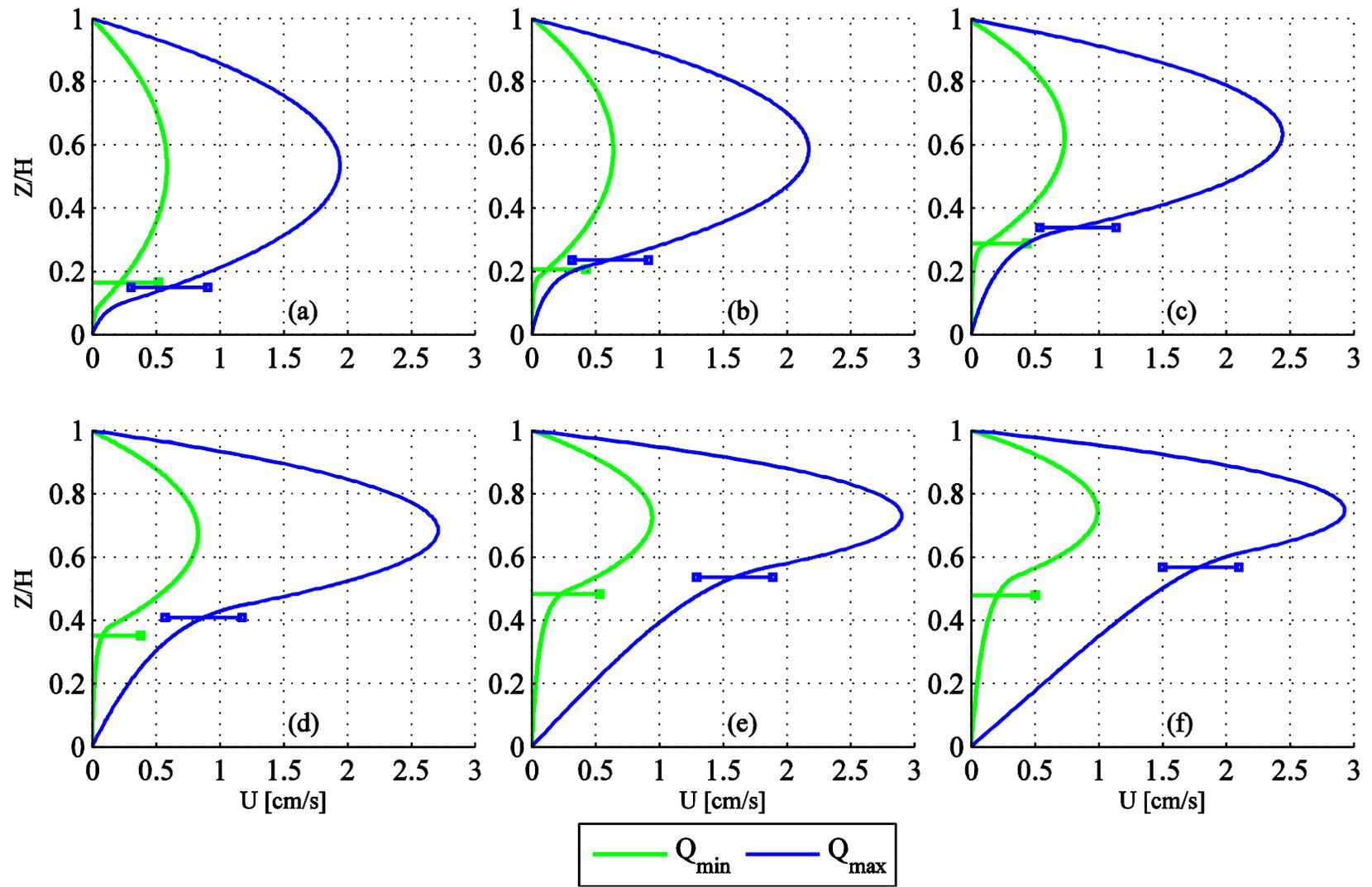


Figura E. 4: Perfiles de velocidad teóricos según el modelo de Shauly et al.. (a) Exp. 8, (b) Exp. 9, (c) Exp. 10, (d) Exp. 11, (e) Exp. 12, (f) Exp. 13.