



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE CODIFICACIÓN DE REDES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MAURO CÉSAR ESCOBAR SANTORO

PROFESOR GUÍA:
MARCOS KIWI KRAUSKOPF

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
JOSÉ CORREA HAEUSSLER

Agradece financiamiento de CONICYT a través del
Programa Basal Centro de Modelamiento Matemático
y al Proyecto ICM/FIC P10-024-F
Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes.

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: MAURO ESCOBAR SANTORO
FECHA: 18/12/2012
PROF. GUÍA: MARCOS KIWI K.

ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE CODIFICACIÓN DE REDES

Esta memoria tiene como objetivo el análisis de un modelo de transmisión de datos bajo el contexto de *network coding*. El modelo fue inspirado en un estudio de comunicación en redes inalámbricas.

En el escenario a estudiar, se desea enviar información particionada en paquetes, que llegan a un transmisor, a múltiples receptores. Se considera que el tiempo está particionado en períodos de tiempo iguales. Los paquetes, modelados como vectores de un espacio vectorial, llegan al transmisor mediante un proceso de Bernoulli de tasa λ . El transmisor puede enviar, en cada período, una combinación lineal de paquetes por igual a cada uno de los receptores. Las transmisiones pueden fallar en cada período con probabilidad $1 - \mu$ de manera independiente entre cada receptor. Los receptores deben ser capaces de recuperar cada paquete de información original.

En el contexto descrito, el principal parámetro de estudio es el retraso de decodificación de un paquete, definido como el tiempo esperado que transcurre entre que llega el paquete al transmisor y el instante en que un receptor logra decodificarlo (es decir, ser capaz de calcular una combinación lineal entre las transmisiones que el receptor ha recibido, cuyo resultado sea el paquete en consideración). El caso de interés del análisis del retraso de decodificación, es cuando el factor de carga $\rho = \lambda/\mu$, con $\lambda < \mu$, $\rho \rightarrow 1$.

En primer lugar, se analiza el caso en que existen dos receptores. El transmisor ocupa un esquema de codificación propuesto en la literatura para calcular las combinaciones lineales de paquetes que se van a enviar. Se demuestra que el tiempo esperado del retraso de decodificación es $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$, siendo una cota asintóticamente óptima. Se introduce el uso de funcionales de Lyapunov sobre cadenas de Markov, que permiten estudiar y acotar esperanzas que dependen del funcional.

Posteriormente, se estudia si es posible –para el caso de dos receptores– realizar transmisiones, en períodos específicos, que den prioridad al receptor que ha recibido menos paquetes, con el objetivo de acotar el retraso de decodificación de los paquetes que le falta por decodificar a tal receptor. Aquí, se introduce la técnica de *coupling* de cadenas de Markov en el contexto de *network coding*.

Por último, se avanza en el análisis de un esquema de codificación para el caso de tres receptores propuesto en la literatura. Se generalizan resultados que permiten obtener cotas para el caso de dos receptores utilizando funcionales de Lyapunov, adecuando las hipótesis a las que se tienen en el esquema de codificación en consideración.

*A mis padres,
Leonora e Ignacio.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a la familia que tengo. A mi padres, Leonora e Ignacio, por el amor, la dedicación y la enseñanza que me entregaron, por darme sus valores y educación que me han formado como persona, por apoyarme siempre en las decisiones que he tomado, por crear el espíritu aventurero y viajero que tengo, por inculcarme el gusto y la importancia de la matemática, y que me ha traído al lugar donde estoy. A mi hermanos, Matías y Martín, por la compañía, respeto, admiración y unidad que tenemos, por estar siempre presentes. A mi abuela Sylvia y a mi tía Fabiola, que fueron un pilar fundamental durante mi vida universitaria. Y, en general, a la gran familia que tengo, tíos y primos, por mantenernos siempre unidos, en todo momento.

Agradecer a mis profesores. A mi profesor guía, Marcos Kiwi, por motivar mi gusto por las matemáticas discretas, por apoyar, acompañar y promover el trabajo realizado en esta memoria, por la paciencia que me tuvo en estos dos años. A los profesores Jaime San Martín y José Rafael Correa, por la disposición que tuvieron siempre, por complementar las dudas que tuve durante la memoria y por los comentarios que me realizaron.

Agradecer a mis amigos que me acompañaron durante todos este proceso. A la Vale, por ser un pilar fundamental de compañía, apoyo y cariño, por estar siempre presente, por todas las experiencias que vivimos durante todos estos años. A la Javi, por los consejos que me ha dado y las conversaciones que hemos tenido, por las sesiones de estudio que teníamos durante la carrera, por los viajes y carretes que íbamos. Al Alf, por la amistad, confianza y cercanía que hemos tenido en el último año, por el apoyo y la disposición en cuanto al trabajo de cada uno, por las salidas deportivas que realizamos.

Agradecer a mis compañeros y amigos de la generación, Benja Palacios, Andrés, Toño, Figura y Benja Obando, con los que compartimos largas sesiones de estudio, tareas interminables y horas en controles, porque siempre nos apoyamos entre nosotros y cada uno aportando en su área. A mis amigos de la oficina 435, Kiko, Tish, Víctor, Pablo, Nacho y Richi, por incluirme en su ambiente y la compañía en estos últimos años de universidad. Y, a amigos como Vale Miranda, Mene, que han estado también presentes y hemos compartido grandes experiencias.

Finalmente, agradecer a las instituciones que financiaron este trabajo. En particular, a CONICYT a través del Programa Basal Centro de Modelamiento Matemático y al Proyecto ICM/FIC P10-024-F Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Organización	3
2. Marco Teórico	4
2.1. Modelo	4
2.2. Definiciones y Resultados Previos	6
2.3. Contribuciones y Estructura del Trabajo	9
3. El Caso de 2 Receptores	10
3.1. Algoritmo 2R	10
3.2. Propiedades del Algoritmo 2R	11
3.3. Análisis del Algoritmo 2R	12
4. El Caso de 2 Receptores con Retraso Acotado	19
4.1. Algoritmo 2RRA	19
4.2. Análisis del Algoritmo 2RRA	20
4.2.1. Cadena de Markov	20
4.2.2. Coupling	24
4.2.3. Simplificación	29
4.3. Resultados	36
5. Hacia un Análisis del Caso de 3 Receptores	38
5.1. Algoritmo 3R	38
5.2. Propiedades del Algoritmo 3R	40
5.3. Análisis del Algoritmo 3R	41
5.4. Preliminares	44
5.5. Resultado Principal	45
5.6. Otro Resultado	49
6. Conclusión y Trabajo Futuro	51
Referencias	52

Capítulo 1

Introducción

En la presente memoria se estudia el problema de distribución de información desde un origen –o transmisor– a varios destinatarios –o receptores. Problemas de comunicación de información han sido ampliamente estudiados, en particular, se introduce el concepto de *network coding* en el año 1999 en un estudio de comunicación de redes satelitales en [1], y posteriormente se define como tal el término *network coding* en [2] el año 2000.

En redes comunicacionales, se consideran nodos que pueden funcionar como interruptores, en el sentido que pueden traspasar información desde un canal de entrada a un canal de salida, o puede replicar la información recibida desde un canal de entrada a un conjunto de canales de salida. Desde un punto de vista teórico, se puede generalizar la función del nodo, permitiéndole funcionar como un decodificador, en el sentido que recibe información desde canales de entrada, codifica y envía la información a todos los canales de salida. La acción de codificar la información que transmiten nodos se conoce como *network coding*.

Un ejemplo, mencionado en [3], se ilustra en la Figura 1.1. Dos bases vecinas, etiquetadas ST y $S'T'$, de una red comunicacional están al doble de la distancia de alcance de transmisión inalámbrica. A media distancia entre ambas bases, está instalado un transmisor etiquetado UV , el cual en cada período de tiempo puede recibir ó transmitir un *bit*. A través de UV , ambas bases transmiten un *bit* de información entre ellas durante tres períodos de tiempo: En los dos primeros períodos, el transmisor recibe un *bit* de cada uno de las bases. En el tercer período, el transmisor envía el O-exclusivo de ambos *bits* a cada base, con lo cual ellas podrán decodificar el *bit* enviada por la base opuesta.

El principio detrás del ejemplo puede extenderse fácilmente al caso en que existen $N - 1$ transmisores entre dos bases que están a N veces la distancia de alcance de transmisión inalámbrica.

Este ejemplo, puede aplicarse a comunicación satelital, donde los nodos ST y $S'T'$ representan dos bases de comunicación terrestre que desean compartir información a través de un satélite UV .

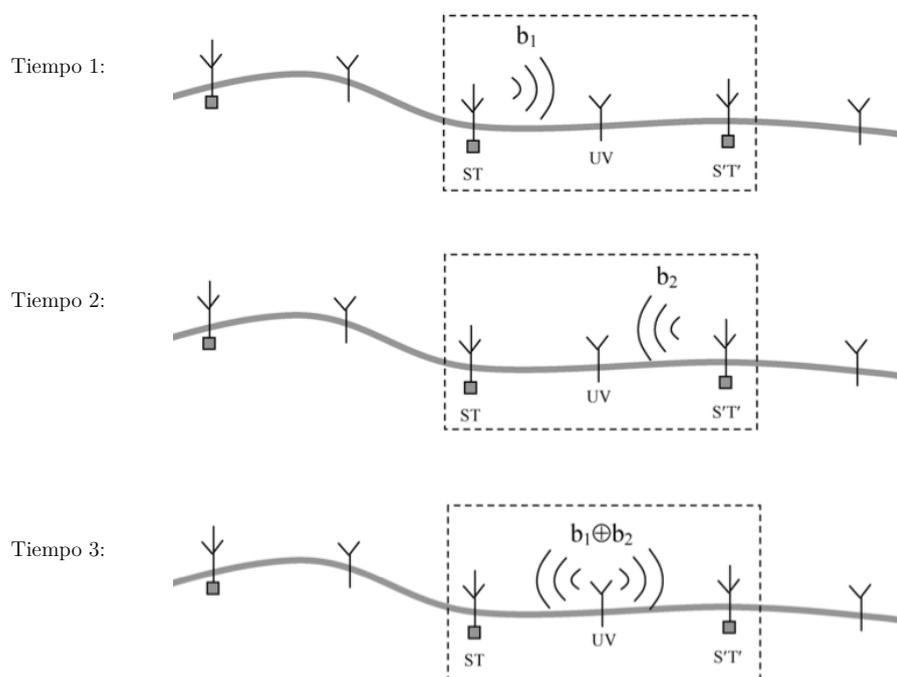


Figura 1.1: Ejemplo de transmisión inalámbrica entre dos bases.

Debido a la generalidad del problema y al potencial de sus aplicaciones, *network coding* ha generado gran interés de estudio en áreas como teoría de la información y codificación [4], redes [5], comunicación inalámbrica [6], criptografía [7], entre otros.

Los estudios realizados en [1, 2] han inspirado a investigadores a estudiar problemas de redes con una sola fuente de información o múltiples fuentes. El análisis de *network coding* se ha ido desarrollando en varias direcciones y sus aplicaciones son cada vez más variadas y frecuentes. Por ejemplo, recientemente fue aplicado en un prototipo de intercambio de archivos en [8].

En particular, el estudio de redes inalámbricas ha sido una área que ha generado múltiples estudios en los últimos años [9, 10, 11, 12, 13]. El estudio realizado en [6] se enfoca en la propuesta de un modelo de *network coding* reducido a la transmisión de datos entre un transmisor y múltiples receptores en una red inalámbrica donde las transmisiones pueden fallar. La característica que posee el modelo es que el transmisor puede combinar información de tal manera que en un envío, varios receptores pueden recuperar los datos que se han perdido. En [6] se estudian condiciones para aumentar la eficiencia en el ancho de banda, realizando demostraciones teóricas y simulaciones.

Si bien, se han propuesto varios modelos para estudiar *network coding*, el presente trabajo se enfoca en el análisis de un modelo en particular propuesto en [14] –similar al descrito en [6]– que consiste en: un transmisor que recibe la información a través del tiempo y particionada en “paquetes” y, múltiples receptores que deben recibir la totalidad de los paquetes que llegan al transmisor. La transmisión de los “paquetes” que se realiza desde el transmisor a cada receptor puede fallar. Por último, el transmisor –que conoce que “paquete” le ha llegado a cada receptor– tiene la facultad de elegir cual va a ser la próxima información que enviará: tiene permitido no solo mandar un “paquete” cada vez,

sino que puede transmitir una combinación de ellos que facilite que cada receptor obtenga información que le sea relevante, es decir, que no obtenga los mismos “paquetes” durante dos transmisiones distintas.

La posibilidad de transmitir distintas combinaciones en distintas situaciones es lo que permite proponer diferentes algoritmos para enviar los “paquetes”, en otras palabras, se propone la elección de la próxima combinación de “paquetes” a enviar en cada instante, dependiendo de la información que ha obtenido cada receptor. En particular, en capítulos posteriores, se estudian dos algoritmos para el caso en que hay dos receptores y se presenta un resultado que se conjetura que permitirá analizar un algoritmo propuesto en la literatura para el caso en que se tienen tres receptores. El estudio de este último caso –cuando existen tres receptores– es de gran interés, en la medida que entrega intuición que permita expandir el análisis y desarrollar nuevas técnicas para el caso en que se tengan más receptores.

En todos los algoritmos estudiados, se busca analizar la optimalidad de cada uno de ellos. En la literatura existen resultados que establecen bajo qué parámetros los algoritmos son óptimos, los cuales se basan principalmente en medir el tiempo que demora un “paquete” desde que llega al transmisor hasta que el receptor lo recibe y lo puede utilizar. Cabe destacar que el análisis de éstos algoritmos resulta interesante cuando la tasa con que llegan los “paquetes” se acerca a la tasa con que se transmiten éstos mismos por los canales a los receptores.

Múltiples estudios se han enfocado en la optimalidad de algoritmos de envío: en [15, 16] se propone una solución heurística para el caso de múltiples receptores; en [14, 17, 18, 19] se estudia la caso genérico de múltiples receptores y se propone un algoritmo para tres receptores; y en [20] se analiza el caso en que los canales de transmisión fallan de manera heterogénea entre los distintos receptores.

1.1. Organización

El Capítulo 2 comienza con la definición formal del modelo, seguido por definiciones y resultados que se han establecido previamente, y finaliza con un resumen de las contribuciones que en esta memoria se realizan. El Capítulo 3 está enfocado en el análisis del modelo para el caso de dos receptores propuesto en [21], comenzando con la descripción del algoritmo de envío de “paquetes”, seguido del análisis matemático de este mismo. En el Capítulo 4, se estudia una generalización que engloba el algoritmo anterior, también para el caso de dos receptores. Esta generalización nos fue propuesta por Widmer [22]. En el Capítulo 5, se estudia el algoritmo que se propone en la literatura para el caso de tres receptores, y se propone una técnica que se conjetura permite analizar este caso. Finalmente, en el Capítulo 6, se presentan las conclusiones de esta memoria.

Capítulo 2

Marco Teórico

En éste capítulo se presentará el modelo matemático que se utilizó para estudiar el problema de *network coding*. Posteriormente, se mencionarán resultados que se han obtenido en estudios anteriores, y se finalizará realizando un resumen de las contribuciones y la estructura del presente trabajo.

2.1. Modelo

El modelo a estudiar consiste en un transmisor que desea traspasar información a n receptores. La información está organizada en paquetes, que esencialmente se modelan como vectores sobre algún cuerpo finito \mathbb{F}_q . Las fallas en los canales que conectan al transmisor con cada receptor se modelan probabilísticamente. El tiempo se considera que transcurre a intervalos discretos. A continuación se detallará la dinámica del modelo y el modelo de colas asociado al transmisor y a los receptores.

Modelo de colas

Se asume que el transmisor tiene un *buffer* infinito, *i.e.*, una cola sin restricciones de tamaño. Se asume también que el transmisor está restringido a usar códigos lineales, por lo tanto, cada transmisión es una combinación lineal de paquetes que están en el *buffer*. Es decir, si el transmisor decide involucrar los paquetes $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}, \dots, \mathbf{p}_{i_n}$ en una transmisión, enviará el paquete $\mathbf{q} = c_1\mathbf{p}_{i_1} + c_2\mathbf{p}_{i_2} + \dots + c_n\mathbf{p}_{i_n}$, donde $c_k \in \mathbb{F}_q$ es el coeficiente que indica la multiplicidad del paquete \mathbf{p}_{i_k} . En adelante, al paquete transmitido se le llamará transmisión, mientras que se utiliza la noción de paquete para aquellos que llegan al transmisor.

Los códigos lineales permiten codificación y decodificación eficiente al tratarse de operaciones básicas –sumas, restas, ponderaciones por escalar– de vectores, además, utilizan espacio mínimo para transmitir la información. Un vector de coeficientes $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ indica la relación entre la transmisión y los paquetes originales, la cual se asume que se envía junto a la transmisión. Se llamará vector de coeficientes extendido de la transmisión $\mathbf{q} = c_1\mathbf{p}_{i_1} + c_2\mathbf{p}_{i_2} + \dots + c_n\mathbf{p}_{i_n}$, detonado por $\tilde{\mathbf{c}}$, a un vector en $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ (*i.e.*, una secuencia infinita de coeficientes en \mathbb{F}_q) que contiene al coeficiente c_k en la posición i_k del vector, para $k \in \{1, \dots, n\}$, y cero en el resto de las posiciones.

Un receptor puede calcular cualquier combinación lineal de vectores de coeficientes que pertenezca al \mathbb{F}_q -subespacio vectorial generado por los vectores recibidos durante las

transmisiones realizadas. En éste contexto definimos la información que posee un receptor.

Definición 2.1 (Información de un receptor). En un instante dado, la información de un receptor es el espacio vectorial de todas las combinaciones lineales de paquetes originales que el receptor puede calcular, basado en las transmisiones que ha recibido exitosamente hasta ese instante. Los vectores de coeficientes de estas combinaciones lineales forman un \mathbb{F}_q -espacio vectorial llamado espacio de información. Esto es, si el j -ésimo receptor ha recibido las transmisiones $\mathbf{q}_{n_1}, \mathbf{q}_{n_2}, \dots, \mathbf{q}_{n_j}$, el espacio de información del receptor j será $V_j = \langle \tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{n_j} \rangle$, donde $\tilde{\mathbf{c}}_k$ es el vector de coeficientes extendido de la transmisión \mathbf{q}_{n_k} . Se llamará rango del receptor j a la dimensión de este espacio vectorial, denotada $\dim(V_j)$.

Se extiende la noción al espacio de información del transmisor –denotado por V –, definido como el \mathbb{F}_q -espacio vectorial generado por los vectores de coeficientes extendidos correspondiente a los paquetes que le han llegado al transmisor. Se utilizará la noción de cola virtual para representar la diferencia de información que pueda existir entre el transmisor y el receptor. Se considerará una cola virtual para cada receptor.

Definición 2.2 (Cola virtual). Para $j = 1, 2, \dots, n$, el tamaño de la j -ésima cola virtual está definida como la diferencia entre la cantidad de paquetes que conoce el transmisor y la dimensión del espacio de información del j -ésimo receptor. En otras palabras, si V es el espacio de información del transmisor y V_j es el espacio de información del receptor j , entonces la j -ésima cola virtual es $\dim(V) - \dim(V_j)$.

Se utilizará el término de cola física para referirse al conjunto de paquetes que están en el *buffer* del transmisor, para distinguirla de las colas virtuales de los receptores.

Definición 2.3 (Paquete innovativo). Una transmisión con vector de coeficientes extendido $\tilde{\mathbf{c}}$ se dice innovativo para un receptor con espacio vectorial de información V_j si $\tilde{\mathbf{c}} \notin V_j$. Si tal transmisión es recepcionado por un receptor, la dimensión del espacio vectorial de información aumentará en una unidad.

Definición 2.4 (Propiedad de innovación). Sea V el espacio de información del transmisor, y V_j el espacio de información del receptor j , para $j = 1, 2, \dots, n$. Un esquema de codificación se dice que posee la propiedad de innovación si en cada período el vector de coeficientes extendido de la combinación lineal transmitida pertenece a $V \setminus V_j$ para cada j que cumpla $V_j \neq V$. Es decir, la transmisión es innovativa para cada receptor que tenga menos información que el transmisor.

Llegadas

Los paquetes llegan a la cola física del transmisor con un proceso de Bernoulli de tasa λ . Una llegada a la cola física significa un aumento en cada cola virtual, debido a que el nuevo paquete es un nuevo grado de libertad que el transmisor posee y que ninguno de los receptores tiene.

Transmisión

Cada canal permite enviar una única transmisión por período de tiempo. Cada receptor recibe las transmisión sin errores (con probabilidad μ) u ocurre un error (con probabilidad $1 - \mu$). Los errores ocurren de manera independiente entre los canales de distintos

receptores y entre períodos distintos. Los receptores se asumen capaces de percibir un error.

Se define el factor de carga denotado por $\rho := \lambda/\mu$. Y se denotará por $\bar{\lambda} := 1 - \lambda$ y $\bar{\mu} := 1 - \mu$.

Feedback

Se asume *feedback* perfecto, es decir, el transmisor sabe de manera exacta cuando ocurre un error en la transmisión a cualquier receptor.

Tiempo

La Figura 2.1 muestra los distintos eventos que ocurren en un período de tiempo. Todas las llegadas se asumen que ocurren al comienzo de cada período. El momento de la transmisión ocurre después de la llegada. Por simplicidad, se asumirá que la transmisión toma poco tiempo. Específicamente, se asumirá que la transmisión, salvo que ocurra un error, llega al receptor antes de que éste envíe su *feedback* de aquel período, y que todos los *feedbacks* de los receptores llegan al transmisor antes del fin del mismo período. Por lo tanto, el *feedback* incluye el período actual. Basado en esto, los paquetes son borrados de la cola física justo antes del fin de cada período, de acuerdo a la regla de actualización del esquema considerado. Los tamaños de las colas son medidos al final del período.

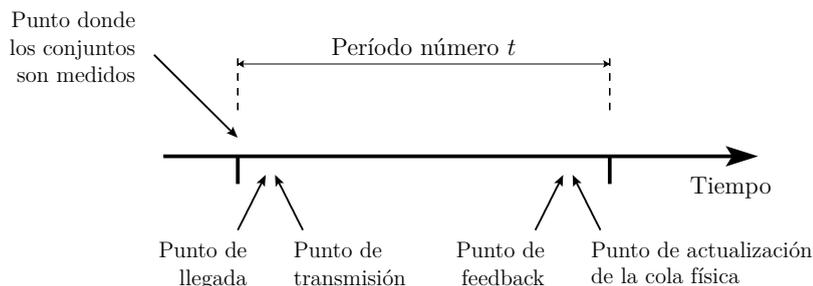


Figura 2.1: Esquema de acontecimientos durante un período.

2.2. Definiciones y Resultados Previos

Extensa literatura motiva el estudio que se realizó en la presente memoria. *Network coding* ha llamado la atención de investigadores durante la última década. Resulta de interés el comportamiento asintótico de esquemas de codificación cuando el factor de carga $\rho \rightarrow 1$, dejando fija la tasa de llegada λ o la tasa con que las transmisiones resultan exitosas μ . En particular, se estudian los tamaños de la cola física y la cola virtual, como también cuanto tiempo “transita” un paquete por el sistema, noción que se define más adelante.

El modelo que se ha considerado fue introducido por Sundararajan, Shah y Médard en el año 2008 [14], donde se define la noción de “ver” un paquete desde el punto de vista de un receptor y se estudian dos tipos de algoritmos de envío de paquetes: botar-al-decodificar y botar-al-ver. Conceptos que se resumen a continuación.

Definición 2.5 (Ver un paquete). Un receptor ha visto un paquete \mathbf{p} si posee información suficiente para calcular $(\mathbf{p} + \mathbf{q})$, donde \mathbf{q} es una combinación lineal de paquetes que ha recibido el receptor y que involucren paquetes que han llegado al transmisor posteriormente a \mathbf{p} . Es decir, si al transmisor han llegado los paquetes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m$, el receptor j ha visto el paquete $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k$, si $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \in V_j$, donde V_j es la información del receptor y $\mathbf{q} = \sum_{i \in I} c_i \mathbf{p}_i$, $I \subseteq \{k + 1, \dots, m\}$.

Notar que de la definición anterior, se tiene que si un receptor decodifica un paquete, también lo ha visto, basta tomar $\mathbf{q} = 0$.

El primer algoritmo de envío estudiado en [14], botar-al-decodificar, esencialmente transmite una combinación lineal aleatoria de paquetes que se encuentran en la cola del transmisor. Desde el punto de vista de un receptor, una recepción exitosa se traduce en conocer el resultado de una ecuación donde las incógnitas son los paquetes originales, los cuales podrá despejar cuando la cantidad de ecuaciones linealmente independientes iguale a la cantidad de incógnitas, es decir, cuando la cola virtual quede vacía. Cada vez que un receptor logre decodificar paquetes, informará al transmisor. En consecuencia, el transmisor podrá eliminar aquellos paquetes que han sido decodificados por todos los receptores. En este algoritmo, se asume que el cuerpo donde se encuentran los paquetes es suficientemente grande como para que sea despreciable la probabilidad de que un paquete recibido no resulte innovativo para un receptor.

Se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 2.6 (Sundararajan et al. [14]). *Para el algoritmo de envío botar-al-decodificar, el tamaño esperado de la cola física en régimen estacionario es $\Omega\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right)$.*

El segundo algoritmo estudiado en [14], botar-al-ver, propone un esquema de codificación de paquetes que solo incluye a paquetes que no han sido vistos por los receptores, y por lo tanto, el transmisor puede desechar los paquetes que ya han sido vistos por todos los receptores. En este contexto, se demuestra:

Teorema 2.7 (Sundararajan et al. [14]). *Para el algoritmo de envío botar-al-ver, el tamaño esperado de la cola física en régimen estacionario es $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.*

El trabajo de Sundararajan, Shah y Médard continúa en [19], donde se revisan los resultados expuestos en [14] y se introducen nuevos conceptos que serán de utilidad en el presente trabajo. Es de interés estudiar el tiempo que permanece un paquete en el sistema, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 2.8 (Retraso de decodificación). El retraso de decodificación de un paquete con respecto a un receptor se define como el tiempo que transcurre entre la llegada del paquete al transmisor y la decodificación del paquete por el receptor en consideración.

Sin embargo, dependiendo de la aplicación del modelo, por ejemplo, cuando se trata de un *streaming* de una película, a veces interesa que los paquetes sean decodificados en orden, ya que un paquete resulta útil cuando se han decodificado todos los que tienen índice menor a él. Es por esta razón que se estudia otro tipo de retraso.

Definición 2.9 (Retraso de entrega). El retraso de entrega de un paquete con respecto a un receptor es el tiempo que transcurre entre la llegada del paquete al transmisor y la entrega del paquete desde el receptor a la aplicación en consideración, con la restricción de que los paquetes deben ser entregados en orden.

Como consecuencia de las definiciones de retraso, siempre se tiene que el retraso de decodificación es menor o igual que el retraso de entrega. Posteriormente, en [19], se estudia el comportamiento asintótico del retraso de decodificación de un paquete cuando $\rho \rightarrow 1$. En primer lugar, se menciona un resultado que acota superiormente el retraso.

Teorema 2.10 (Sundararajan et al. [19]). *El retraso de decodificación esperado de un paquete bajo cualquier algoritmo de transmisión que satisfaga la Propiedad de innovación es $O\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right)$.*

Para la demostración del Teorema 2.10, resulta útil definir un evento de decodificación con respecto a un receptor como aquel instante donde todos los paquetes que han llegado al receptor son decodificados. Además, se dice que un receptor es líder si es el receptor que ha recibido la mayor cantidad de transmisiones. El siguiente teorema da condiciones suficientes para describir un evento de decodificación.

Teorema 2.11 (Sundararajan et al. [19]). *Un evento de decodificación para un receptor ocurre en un período si en tal período ocurre alguno de los siguientes eventos:*

- (a) *El receptor logra una recepción exitosa que resulta en que su cola virtual queda vacía.*
- (b) *El receptor logra una recepción exitosa y además era líder al comienzo del período.*

La demostración del Teorema 2.10 se basa en la frecuencia con que la cola virtual se vacía (caso (a) del Teorema 2.11), sin embargo, el evento que ocurre en el caso (b) resulta en una mejor cota para el retraso de decodificación. Es este caso el que resulta interesante estudiar para obtener cotas más ajustadas.

Por otro lado, se estudian también cotas inferiores para el retraso:

Teorema 2.12 (Sundararajan et al. [19]). *El retraso de decodificación por paquete esperado está acotado inferiormente por $\Omega\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.*

Los dos teoremas que acotan inferior y superiormente los retrasos de decodificación serán útiles para determinar que tan buenos son los algoritmos de envío que se estudian. En particular, Sundararajan, Shah y Médard proponen un algoritmo para el caso de tres receptores en una primera versión en [17], y posteriores mejoras en [19]. El algoritmo tiene la Propiedad de innovación. Los autores enuncian la siguiente conjetura:

Conjetura 2.13 (Sundararajan et al. [19], pág. 25). *Para el algoritmo propuesto para tres receptores, tanto la esperanza del retraso de decodificación por paquete, como la esperanza del retraso de entrega por paquete, desde el punto de vista de un receptor, es $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$, lo que resulta ser asintóticamente óptimo.*

Esta conjetura permitiría acotar también el tamaño esperado de la cola física. Si el transmisor elimina los paquetes mediante la regla de botar los paquetes cuando han sido decodificados, entonces el tamaño de la cola física es también $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.

Si bien, no se han propuesto algoritmos de envío para el caso en que pueda haber cuatro receptores o más, el estudio de esta conjetura –para el caso de tres receptores– puede ayudar y guiar el estudio para el caso en que se tienen más receptores. Más aún, permite el desarrollo de técnicas que no se han utilizado con anterioridad.

Por otra parte, Barros, Costa, Munaretto y Widmer [20], estudian el caso de dos receptores con probabilidades de error de envío heterogéneas entre ambos canales. Posteriormente, se propone un esquema de envío que favorece mandar paquetes sin codificar, lo que disminuye el retraso de decodificación. Finalmente, se estudia el caso en que los paquetes tengan una barrera de tiempo para ser decodificados por los receptores, y se propone un algoritmo que le da prioridad a un paquete cuya barrera de tiempo se acerca. En tal caso, se envía el paquete sin codificar hasta que el receptor –que no lo ha recibido– lo decodifique o hasta que llegue a la barrera de utilidad del paquete. Si bien, no necesariamente se mantiene la Propiedad de innovación, con este algoritmo se puede obtener una reducción en el retraso de decodificación.

2.3. Contribuciones y Estructura del Trabajo

El resto del presente trabajo se distribuye como sigue. En el Capítulo 3 se estudia un algoritmo propuesto en [21] para el caso de dos receptores. Esto fue motivado por el hecho de que en la literatura no se encontró un análisis formal para este caso. Por otra parte, su estudio está motivado por tratar de identificar nuevas técnicas que puedan ser utilizadas para investigar el caso de más receptores, en particular, el caso de tres receptores. En específico, se introduce el uso funcionales de Lyapunov sobre cadenas de Markov, en el contexto de *network coding*, las que permiten estudiar y acotar esperanzas que dependen del funcional. A través de esta técnica, se demuestra que el algoritmo propuesto –para el caso de dos receptores– resulta ser asintóticamente óptimo, obteniendo un retraso de decodificación $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.

En el Capítulo 4 se estudia si es factible –para el caso de dos receptores– lograr un retraso de decodificación asintóticamente óptimo, cuando se favorece el envío de paquetes al receptor que tiene un retraso mayor que el otro en la decodificación. Motivados por el estudio de Barros, Costa, Munaretto y Widmer en [20], y una comunicación privada con Widmer [22], para el caso en que las probabilidades de error de envío siguen siendo homogéneas, se propone un algoritmo en que las dimensiones de los espacios de información de los receptores no pueden alejarse demasiado. Se estudia cuál es la diferencia entre las dimensiones que se puede permitir para seguir teniendo retrasos asintóticamente óptimos. Por otra parte, se introduce una nueva técnica útil en el análisis de cadenas de Markov llamada *coupling*, que permite acotar parámetros asociados a procesos que resultan difíciles de estudiar, por los de otros procesos para los que se conocen mejores propiedades.

En el Capítulo 5, motivados por demostrar la Conjetura 2.13 acerca del retraso de decodificación para el algoritmo que se propone en [19] cuando hay tres receptores, se analiza si la misma técnica de funcionales de Lyapunov utilizadas en el caso de dos receptores puede servir para demostrar la conjetura. Estudiando el comportamiento del algoritmo, se obtiene una cadena de Markov cuyas propiedades no satisfacen las hipótesis para poder aplicar el mismo resultado que en el Capítulo 3, sin embargo, el proceso cumple propiedades un tanto más débiles. Debido a esta razón, se estudian esperanzas de funcionales de Lyapunov cuya cadena de Markov asociada cumple las hipótesis que se tienen en este algoritmo. El principal resultado de este capítulo es una generalización del resultado de Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis [23]. Se cree que el resultado obtenido puede contribuir en estudios posteriores sobre el análisis del referido algoritmo. En particular, se realiza una conjetura concreta acerca de la cadena de Markov que modela el algoritmo considerado.

Capítulo 3

El Caso de 2 Receptores

En este capítulo se analiza el caso en que se transmiten paquetes a sólo dos receptores con un algoritmo –propuesto en [21]– que permite al transmisor enviar un paquete que le posibilita eliminar la cantidad máxima posible de elementos en su cola física, manteniendo la Propiedad de innovación. Se introduce una nueva técnica basada en el análisis de funcionales de Lyapunov sobre cadenas de Markov con estados numerables. Se obtiene una cota en el tamaño de las colas física y virtuales, con lo cual se podrá acotar también el retraso de decodificación de los paquetes.

3.1. Algoritmo 2R

Sean R_1 y R_2 los dos receptores. Para cada período de tiempo t , se define como S_j al conjunto de paquetes que han llegado al transmisor (incluyendo al paquete que pudo haber llegado en t) y que el receptor R_j no ha decodificado, para $j = 1, 2$ (ver Figura 3.1). El transmisor enviará un paquete que cumpla con el primer de los siguientes casos:

- *Caso 1* – $S_1 \setminus S_2 \neq \emptyset$ y $S_2 \setminus S_1 \neq \emptyset$: Se envía la suma de los paquetes¹ más antiguos en los conjuntos $S_1 \setminus S_2$ y $S_2 \setminus S_1$.
- *Caso 2* – $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$: Se envía el paquete más antiguo perteneciente a $S_1 \cap S_2$.
- *Caso 3* – $S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$: Se envía el paquete más antiguo perteneciente a $S_1 \cup S_2$.

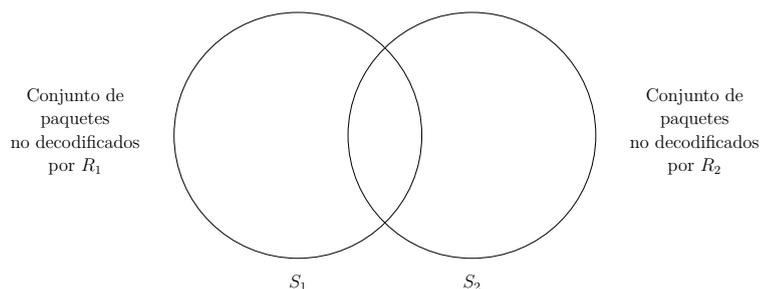


Figura 3.1: Conjuntos relevantes para el algoritmo de envío. Los paquetes considerados son aquellos que ya han llegado al transmisor y no han sido decodificados por algún receptor.

¹Recordar que los paquetes se modelan como vectores, por lo tanto, la suma de paquetes corresponde a la suma de vectores en el espacio vectorial considerado.

Este esquema de codificación prioriza mandar la suma de dos paquetes \mathbf{p} y \mathbf{q} , donde \mathbf{p} ha sido decodificado por S_1 y \mathbf{q} ha sido decodificado por S_2 . De esta manera, en caso de que la transmisión sea exitosa, el transmisor podrá eliminar dos paquetes de su cola en el período actual.

Cuadro 3.1: Ejemplo de transmisión de 7 paquetes con el Algoritmo 2R.

Período	Cola Física			Transmisión	Canales	Paquetes Decodificados	
	$S_1 \setminus S_2$	$S_1 \cap S_2$	$S_2 \setminus S_1$			R_1	R_2
0		\mathbf{p}_1		\mathbf{p}_1	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	\mathbf{p}_1	
1		\mathbf{p}_2	\mathbf{p}_1	\mathbf{p}_2	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$	\mathbf{p}_2
2		\mathbf{p}_3	\mathbf{p}_1	\mathbf{p}_3	$\nrightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$
3	\mathbf{p}_3		\mathbf{p}_1	$\mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{p}_3$	$\nrightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$
4	\mathbf{p}_3	\mathbf{p}_4		\mathbf{p}_4	$\nrightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$
5	\mathbf{p}_3	$\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$		\mathbf{p}_4	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$
6	\mathbf{p}_3	\mathbf{p}_5		\mathbf{p}_5	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$
7	\mathbf{p}_3	\mathbf{p}_6	\mathbf{p}_5	$\mathbf{p}_3 \oplus \mathbf{p}_5$	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$
8		\mathbf{p}_6	\mathbf{p}_5	\mathbf{p}_6	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$
9		\mathbf{p}_7	$\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$	\mathbf{p}_7	$\nrightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_7$
10	\mathbf{p}_7		$\mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$	$\mathbf{p}_5 \oplus \mathbf{p}_7$	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7$
11			\mathbf{p}_6	\mathbf{p}_6	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7$	$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6, \mathbf{p}_7$

3.2. Propiedades del Algoritmo 2R

El algoritmo descrito cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 3.1 (Propiedad de decodificación). Si un receptor recibe exitosamente una transmisión, puede calcular cada paquete original que está involucrado en el paquete transmitido. Esto se debe a que en cada transmisión, desde el punto de vista de un receptor, hay a lo más un paquete que no ha decodificado.

Propiedad 3.2 (Propiedad de innovación). Cada transmisión exitosa se traduce en un aumento en la información que posee el receptor considerado. En efecto, si se envía una transmisión que corresponde a la suma de paquetes en $S_1 \setminus S_2$ y $S_2 \setminus S_1$, el receptor que reciba el paquete podrá decodificar un paquete original, ya que el otro paquete codificado en la transmisión ya lo conoce. Si se envía un paquete en la intersección de S_1 y S_2 , proporciona un nuevo paquete no conocido por los receptores, en caso de una recepción exitosa. Por último, en el tercer caso, se tiene $S_i = \emptyset$ para un receptor R_i , por lo que no hay nada que enviar al receptor, y entonces, la transmisión al otro receptor consistirá de un paquete sin codificar.

Propiedad 3.3 (Tamaño de los conjuntos). En el mismo instante, puede ocurrir $|S_1 \setminus S_2| > 1$ o $|S_2 \setminus S_1| > 1$, pero no ambos. En efecto, en cada período, los tamaños de $S_1 \setminus S_2$, $S_2 \setminus S_1$ y $S_1 \cap S_2$ varían a lo más en una unidad. Por lo tanto, basta ver que si uno de los dos primeros conjuntos tiene un tamaño estrictamente mayor a 1, el otro conjunto no puede crecer si tiene tamaño 1. Sin pérdida de generalidad, se asume que $|S_1 \setminus S_2| > 1$ y $|S_2 \setminus S_1| = 1$, independiente de que llegue un paquete al transmisor (lo que solo afecta a $S_1 \cap S_2$), por lo que se enviará un paquete según el Caso 1 del algoritmo. Por lo tanto, los conjuntos $|S_1 \setminus S_2|$ y $|S_2 \setminus S_1|$ solo pueden decrecer.

Estas propiedades serán utilizadas para probar el resultado principal de éste capítulo.

3.3. Análisis del Algoritmo 2R

En esta sección se analizará el comportamiento de la cola física dejando fija la tasa de llegada λ ó la tasa de envíos exitosos μ , y haciendo tender el factor de carga ρ a 1. Este es el caso que llama la atención de investigadores en la literatura, un análisis asintótico del tamaño de las colas y de los retrasos, cuando $\rho \rightarrow 1$.

Se estudiará el tamaño de los conjuntos definidos en la Figura 3.1 mediante cadenas de Markov, donde se describirán las transiciones según los eventos que suceden en el modelo. Medir el tamaño de aquellos conjuntos es una forma de estimar el tamaño del *buffer* que el transmisor necesita e, indirectamente, estimar los retrasos de decodificación. Bajo el supuesto de que la cadena de Markov asociada posee una distribución estacionaria, se podrá concluir el resultado.

Para cada período de tiempo t , se define el vector $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{N}^3$. Donde $x_1(t)$ indica el tamaño del conjunto $S_1 \setminus S_2$, $x_2(t)$ el tamaño del conjunto $S_2 \setminus S_1$ y $x_3(t)$ el tamaño del conjunto $S_1 \cap S_2$, cada uno medido al comienzo del t -ésimo período.

Lema 3.4. *El proceso $\mathcal{X} := (\mathbf{x}(t))_{t \in \mathbb{N}}$, es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

Demostración. Por la propiedad de los tamaños de los conjuntos $S_1 \setminus S_2$ y $S_2 \setminus S_1$, para todo período t , el vector $\mathbf{x}(t)$ solo puede pertenecer a la región:

$$P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 \in \{0, 1\}\} \cup \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_2 \in \{0, 1\}\}.$$

Se tiene que \mathcal{X} es una cadena de Markov, dado que el Algoritmo 2R decide qué transmisión enviar en base a los tamaños de los conjuntos $S_1 \setminus S_2$, $S_2 \setminus S_1$ y $S_1 \cap S_2$, por lo tanto las probabilidades de transición para \mathcal{X} dependen sólo del valor que tiene el mismo vector y es independiente del período de tiempo en que se encuentre. \square

Notar que $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ representa el tamaño de la cola física en el instante t , para poder acotar el retraso de decodificación será útil obtener una cota para la esperanza de esta suma. A continuación, se analizarán por separado las transiciones en distintas subregiones de P :

- $P_1 = \{(0, 0, 0)\}$: Este caso modela la situación en que los receptores han decodificado todo lo que ha llegado al transmisor. Si no llega nada durante el período, la cadena de Markov se queda igual, es decir, con probabilidad $\bar{\lambda}$ no hay cambio del vector $\mathbf{x}(t)$. En caso contrario, cuando llega un paquete al transmisor, el algoritmo indica que hay que enviar éste paquete por si solo. Las probabilidades de transición se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 3.2:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (0, 0, 0), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda} + \lambda\mu^2, \\ (1, 0, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\mu, \\ (0, 1, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\mu\bar{\mu}, \\ (0, 0, 1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}^2. \end{cases}$$

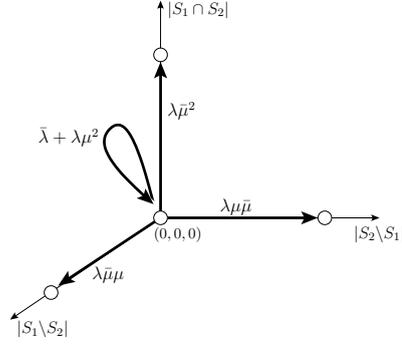


Figura 3.2: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_1$.

- $P_2 = \{(x_1, 0, 0) : x_1 > 0\}$: Este caso modela la situación en que el receptor R_2 ha decodificado todo lo que ha llegado al transmisor. Si llega un nuevo paquete en el período considerado, se debe enviar ese paquete (ya que $S_2 \setminus S_1 = \emptyset$), en caso contrario se envía un paquete de $S_1 \setminus S_2$. Las probabilidades de transición, para el caso en que $\mathbf{x}(t) = (i, 0, 0)$, $i > 0$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 3.3 (A):

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (i, 0, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\mu^2 + \bar{\lambda}\bar{\mu}, \\ (i+1, 0, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\bar{\mu}, \\ (i, 1, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\mu, \\ (i, 0, 1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}^2, \\ (i-1, 0, 0), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\mu. \end{cases}$$

- $P_3 = \{(0, x_2, 0) : x_2 > 0\}$: Análogo a P_2 , pero se envía un paquete de $S_2 \setminus S_1$, en caso de que no llegue un paquete al transmisor. Las probabilidades de transición, para el caso en que $\mathbf{x}(t) = (0, j, 0)$, $j > 0$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 3.3 (B):

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (0, j, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\mu^2 + \bar{\lambda}\bar{\mu}, \\ (0, j+1, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\mu\bar{\mu}, \\ (1, j, 0), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\mu, \\ (0, j, 1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}^2, \\ (0, j-1, 0), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\mu. \end{cases}$$

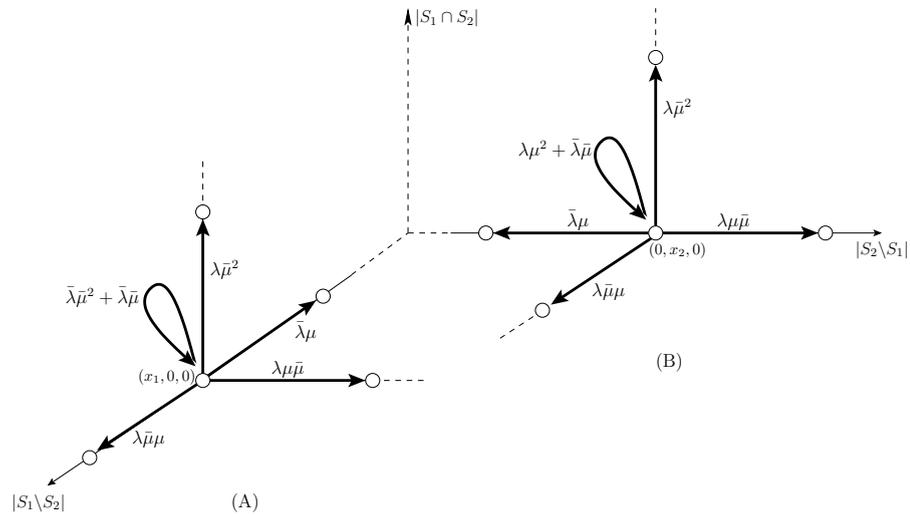


Figura 3.3: Probabilidades de transición para (A) $\mathbf{x}(t) \in P_2$, y (B) $\mathbf{x}(t) \in P_3$.

- $P_4 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 > 0, x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 0\}$: En este caso, siempre se enviará un paquete en $S_1 \cap S_2$, dado que $S_1 \setminus S_2$ o $S_2 \setminus S_1$ son vacíos. Las probabilidades de transición, para el caso en que $\mathbf{x}(t) = (i, j, k)$, $i > 0, j, k \geq 0$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 3.4:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (i, j, k), & \text{con probabilidad } \lambda\mu^2 + \bar{\lambda}\bar{\mu}^2, \\ (i+1, j, k), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\mu, \\ (i, j+1, k), & \text{con probabilidad } \lambda\mu\bar{\mu}, \\ (i, j, k+1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}^2, \\ (i+1, j, k-1), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}\mu, \\ (i, j+1, k-1), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\mu\bar{\mu}, \\ (i, j, k-1), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}^2. \end{cases}$$

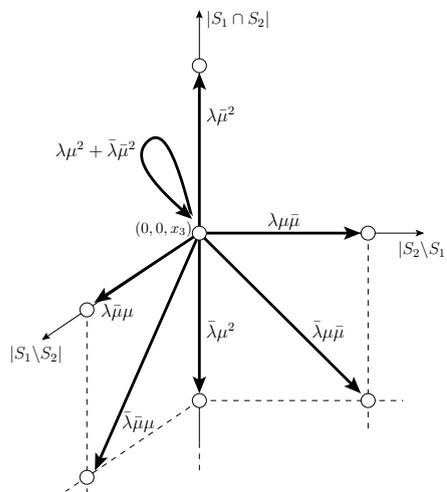


Figura 3.4: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_4$.

- $P_5 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \geq 1\}$: Este caso modela la situación en que se envía la suma de dos paquetes pertenecientes a las diferencias de los conjuntos S_1 y S_2 . Las probabilidades de transición, en el caso en que $\mathbf{x}(t) = (i, j, k)$, $i, j \geq 1$, $k \geq 0$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 3.5:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (i, j, k), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}^2, \\ (i-1, j, k), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{\mu}, \\ (i, j-1, k), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}\mu, \\ (i-1, j-1, k), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\mu^2, \\ (i, j, k+1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}^2, \\ (i-1, j, k+1), & \text{con probabilidad } \lambda\mu\bar{\mu}, \\ (i, j-1, k+1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}\mu, \\ (i-1, j-1, k+1), & \text{con probabilidad } \lambda\mu^2. \end{cases}$$

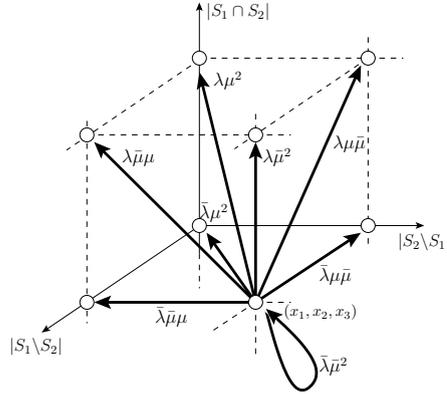


Figura 3.5: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_5$.

Notar que $\{P_i\}_{i=1}^5$ particionan a P . Para estudiar el comportamiento de la cadena \mathcal{X} , se utilizará un resultado obtenido por Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis [23]. En su trabajo, se estudia el comportamiento asintótico de cadenas de Markov con distribuciones estacionarias, las cuales pueden pertenecer a un espacio con numerables estados. Se define un funcional de Lyapunov que satisface tener cambios esperados negativos para todos los estados de la cadena, salvo una cantidad finita de éstos.

Sea $\mathcal{Q} := (Q(t))_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov a tiempo discreto y homogéneo, sobre un espacio discreto numerable X . Para cualquier par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$, se denota por $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ a la probabilidad de transición

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{P}(Q(t+1) = \mathbf{x}' | Q(t) = \mathbf{x}).$$

Una distribución estacionaria se define como una función $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\pi(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in X$,

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} \pi(\mathbf{x}) = 1,$$

y

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}' \in X} \pi(\mathbf{x}') p(\mathbf{x}', \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X. \quad (3.1)$$

Definición 3.5 (Funcional de Lyapunov). Una función no negativa

$$\Phi : X \mapsto \mathbb{R}_+$$

se llama funcional de Lyapunov si existe $\gamma > 0$ y $B \geq 0$, tal que para todo t , y todo $\mathbf{x} \in X$ que satisfaga $\Phi(\mathbf{x}) > B$, se cumple que

$$\mathbb{E}[\Phi(Q(t+1)) | Q(t) = \mathbf{x}] \leq \Phi(\mathbf{x}) - \gamma. \quad (3.2)$$

Los términos γ y B usualmente se llaman *drift* y *excepción*, respectivamente.

Se asumirá que la cadena de Markov es recurrente positiva. Por lo tanto, existe una única distribución estacionaria π , donde $\pi(\mathbf{x})$ corresponde a la probabilidad estacionaria $\mathbb{P}_\pi(Q(t) = \mathbf{x})$. Se denotará por $\mathbb{E}_\pi[\cdot]$ a la esperanza con respecto a la distribución estacionaria π . Se define, para $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu_{max} := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X: p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') > 0} |\Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x})|, \quad (3.3)$$

y

$$p_{max} := \sup_{\mathbf{x} \in X} \sum_{\mathbf{x}' \in X: \Phi(\mathbf{x}) < \Phi(\mathbf{x}')} p(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (3.4)$$

En otras palabras, ν_{max} representa la máxima magnitud que Φ puede variar durante cualquier transición. Por otro lado, p_{max} representa una cota superior de la probabilidad de que Φ crezca en una transición arbitraria.

El principal teorema demostrado en [23] es el siguiente:

Teorema 3.6. *Sea una cadena de Markov $\mathcal{Q} := (Q(t))_{t \in \mathbb{N}}$ con distribución estacionaria π . Si existe un funcional de Lyapunov Φ con drift $\gamma > 0$ y excepción $B \geq 0$, tal que $\mathbb{E}_\pi[\Phi(Q(t))]$ es finita, entonces, para cada $m = 0, 1, \dots$, se tiene*

$$\mathbb{P}_\pi(\Phi(Q(t)) > B + 2\nu_{max}m) \leq \left(\frac{p_{max}\nu_{max}}{p_{max}\nu_{max} + \gamma} \right)^{m+1}.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{E}_\pi[\Phi(Q(t))] \leq B + \frac{2p_{max}(\nu_{max})^2}{\gamma}.$$

Este resultado nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.7. *Si \mathcal{X} posee distribución estacionaria π y se cumple que $\mathbb{E}_\pi[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)]$ es finita. Entonces,*

$$\mathbb{E}_\pi[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)] \leq \frac{4\rho\bar{\mu}}{1-\rho},$$

y, en consecuencia, el tamaño de la cola física es $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.

Demostración. Sea $\Phi : P \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$\Phi(\mathbf{x}(t)) = x_1(t) + x_3(t), \quad \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)). \quad (3.5)$$

Se tiene que Φ es un funcional de Lyapunov. Escogiendo como *drift* $\gamma := \mu - \lambda = \mu(1 - \rho)$ y excepción $B := 0$, se cumple (3.2) para todo $\mathbf{x}(t)$, tal que $\Phi(\mathbf{x}(t)) > 0$ (notar que $\Phi(\mathbf{x}(t)) > 0$ si y solo si $\mathbf{x}(t) \in P \setminus (P_1 \cup P_3)$). En efecto, el Cuadro 3.2 explicita las transiciones de la cadena de Markov \mathcal{X} y las probabilidades y variaciones del funcional Φ asociadas.

Cuadro 3.2: Detalle de probabilidades de transición y variación de Φ .

Región	$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t)$	$p(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t+1))$	$\Phi(\mathbf{x}(t+1)) - \Phi(\mathbf{x}(t))$
P_2	(1, 0, 0)	$\lambda\bar{\mu}\mu$	1
	(0, 1, 0)	$\lambda\mu\bar{\mu}$	0
	(0, 0, 1)	$\lambda\bar{\mu}^2$	1
	(0, 0, 0)	$\lambda\mu^2 + \bar{\lambda}\bar{\mu}$	0
	(-1, 0, 0)	$\bar{\lambda}\mu$	-1
P_4	(1, 0, 0)	$\lambda\bar{\mu}\mu$	1
	(0, 1, 0)	$\lambda\mu\bar{\mu}$	0
	(0, 0, 1)	$\lambda\bar{\mu}^2$	1
	(0, 0, 0)	$\lambda\mu^2 + \bar{\lambda}\bar{\mu}^2$	0
	(1, 0, -1)	$\bar{\lambda}\bar{\mu}\mu$	0
	(0, 1, -1)	$\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$	-1
	(0, 0, -1)	$\bar{\lambda}\mu^2$	-1
P_5	(-1, -1, 1)	$\lambda\mu^2$	0
	(0, -1, 1)	$\lambda\bar{\mu}\mu$	1
	(-1, 0, 1)	$\lambda\mu\bar{\mu}$	0
	(0, 0, 1)	$\lambda\bar{\mu}^2$	1
	(-1, -1, 0)	$\bar{\lambda}\mu^2$	-1
	(0, -1, 0)	$\bar{\lambda}\bar{\mu}\mu$	0
	(-1, 0, 0)	$\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}$	-1
	(0, 0, 0)	$\bar{\lambda}\bar{\mu}^2$	0

En el Cuadro 3.3 se resumen los *drifts* del funcional en las regiones donde $\Phi > B$. Con lo cual, se verifica que Φ es un funcional de Lyapunov.

Cuadro 3.3: *Drifts* de Φ .

Región	$\mathbb{E}_\pi [\Phi(\mathbf{x}(t+1)) \mathbf{x}(t)] - \Phi(\mathbf{x}(t))$
P_2	$\lambda - \mu = -\mu(1 - \rho)$
P_4	$\lambda - \mu = -\mu(1 - \rho)$
P_5	$\lambda - \mu = -\mu(1 - \rho)$

Teniendo en cuenta que para el funcional de Lyapunov Φ considerado, los valores de ν_{max} y p_{max} son 1 y $\lambda\bar{\mu} = \rho\mu\bar{\mu}$, respectivamente, gracias al Teorema 3.6, se obtiene que

$$\mathbb{E}_\pi [x_1(t) + x_3(t)] = \mathbb{E}_\pi [\Phi(\mathbf{x}(t))] \leq \frac{2\rho\bar{\mu}}{1 - \rho}. \quad (3.6)$$

Por último, debido a la simetría de la cadena \mathcal{X} , a que $x_3(t) \geq 0$ y a (3.6)

$$\mathbb{E}_\pi [x_2(t)] = \mathbb{E}_\pi [x_1(t)] \leq \mathbb{E}_\pi [x_1(t) + x_3(t)] \leq \frac{2\rho\bar{\mu}}{1-\rho},$$

y, en consecuencia,

$$\mathbb{E}_\pi [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)] \leq \frac{4\rho\bar{\mu}}{1-\rho}. \quad (3.7)$$

□

Para obtener una cota en el retraso de decodificación se utilizara un importante y bien conocido resultado obtenido por Little en 1961 (Teorema 2, [24]). El resultado enuncia que, en un proceso de colas, si

- L es el número esperado de unidades en el sistema,
- W es el tiempo esperado que permanece una unidad en el sistema, y
- $1/\lambda$ es el tiempo esperado entre dos llegadas consecutivas de unidades al sistema,

entonces, se cumple la siguiente relación:

$$L = \lambda W. \quad (3.8)$$

Lo que permite demostrar el siguiente corolario.

Corolario 3.8. *Para el Algoritmo 2R, bajo los supuestos del Teorema 3.7, el retraso de decodificación de los paquetes es*

$$\frac{4\bar{\mu}}{\mu(1-\rho)} = O\left(\frac{1}{1-\rho}\right).$$

Demostración. Dado que el tamaño esperado de paquetes en el sistema está acotada por el número de paquetes en la cola física del transmisor, es decir, por

$$\frac{4\rho\bar{\mu}}{1-\rho},$$

y los paquetes llegan con una tasa λ , de la relación expuesta en la Ecuación (3.8) se concluye que la esperanza del tiempo que un paquete permanece en el sistema está acotada por

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{4\rho\bar{\mu}}{1-\rho} = \frac{4\bar{\mu}}{\mu(1-\rho)}.$$

Para concluir, basta notar que cuando un paquete sale del sistema (es decir, cuando ya no pertenece a $S_1 \cup S_2$), es porque ya fue decodificado por ambos receptores, por lo que el tiempo que un paquete está en el transmisor es igual al retraso de decodificación. □

Este último resultado prueba que el algoritmo estudiado es asintóticamente óptimo, debido al Teorema 2.12 probado en [19], que establece el hecho de que todo algoritmo de envío tiene retraso de decodificación $\Omega\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.

Capítulo 4

El Caso de 2 Receptores con Retraso Acotado

En este capítulo se analiza el caso en que la transmisión se realiza a dos receptores, sin embargo, se busca equiparar lo que le falta por decodificar a cada receptor. Se propone un algoritmo de envío que disminuye la distancia entre la cantidad de información de cada receptor y se estudian condiciones que permiten mantener la cota obtenida en el capítulo anterior.

4.1. Algoritmo 2RRA

Sean R_1 y R_2 los dos receptores. Se llamará líder, y se denotará con el índice L , al receptor que ha recibido la mayor cantidad de transmisiones de manera exitosa. Si ambos receptores han recibido el mismo número de transmisiones, se escogerá arbitrariamente a un receptor como líder. Al otro receptor se le denotará con el índice N . En otras palabras, si R_L es líder, se cumple que $\dim(V_L) \geq \dim(V_N)$ para $L \neq N$, donde V_L y V_N corresponden a la información de los receptores R_L y R_N , respectivamente.

Definición 4.1 (Ventaja del líder). Se llamará ventaja del líder a la diferencia que pueden tener las dimensiones de la información del receptor líder y la información del receptor que no es líder. Es decir, la ventaja del líder es $\dim(V_L) - \dim(V_N)$.

De ahora en adelante, se considera un algoritmo \mathcal{A} cualquiera de transmisión de paquetes que posea la Propiedad de innovación. Sea un entero positivo D , que corresponderá a la máxima ventaja posible que se le permitirá tener al líder. El algoritmo 2RRA que se considerará –basado en el algoritmo \mathcal{A} – realiza transmisiones según los siguientes casos.

- *Caso 1 – Si la ventaja del líder es D* : Se envía el paquete más antiguo que le falte por decodificar a R_N , pero que el líder ya lo decodificó. Es decir, se envía $\mathbf{p} \in V_L \setminus V_N$.
- *Caso 2 – En otro caso*: Se realiza una transmisión según el algoritmo \mathcal{A} .

De esta manera, se prioriza disminuir la ventaja del líder cuando llega a cierta barrera D . El Cuadro 4.1 muestra un ejemplo en el caso que el algoritmo \mathcal{A} considerado es el 2R del capítulo anterior, y la ventaja máxima es $D = 3$.

Cuadro 4.1: Ejemplo de transmisión de 8 paquetes con el Algoritmo 2RRA, basado en el Algoritmo 2R. Los conjuntos S_1 y S_2 son los que se definieron en 3.1.

Período	Cola Física			Transmisión	Canales	Paquetes Decodificados	
	$S_1 \setminus S_2$	$S_1 \cap S_2$	$S_2 \setminus S_1$			R_1	R_2
0		P1		P1	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	P1	
1		P2	P1	P2	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2	P2
2		P3	P1	P3	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	P1, P2, P3	P2
3		P4	P1, P3	P4	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4	P2
4		P5	P1, P3, P4	P1	$\rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4	P1, P2
5		P5, P6	P3, P4	P5	$\nrightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4	P1, P2, P5
6	P5	P6	P3, P4	P3 \oplus P5	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5	P1, P2, P5
7		P6	P3, P4	P6	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6	P1, P2, P5, P6
8		P7	P3, P4	P7	$\rightarrow R_1, \nrightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	P1, P2, P5, P6
9		P8	P3, P4, P7	P3	$\nrightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	P1, P2, P5, P6
10		P8	P3, P4, P7	P3	$\rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	P1, P2, P3, P5, P6
11		P8	P4, P7	P8	$\nrightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7	P1, P2, P3, P5, P6, P8
12	P8		P4, P7	P4 \oplus P8	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P8
13			P7	P7	$\rightarrow R_1, \rightarrow R_2$	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8

Notar que en los períodos 4, 9 y 10 del ejemplo en el Cuadro 4.1 se transmiten paquetes que le faltan al receptor R_N , pues la ventaja del líder es $D = 3$.

4.2. Análisis del Algoritmo 2RRA

El algoritmo descrito cumple con las Propiedades de decodificación y del tamaño de los conjuntos S_1 y S_2 (Propiedades 3.1 y 3.3) demostradas en la Sección 3.2. Sin embargo, no necesariamente se cumple la Propiedad de innovación, dado que el algoritmo posee el Caso 0, que no es innovativo.

A continuación, se estudiará el retraso de decodificación de los paquetes. Para esto, se considerara una cadena de Markov que estudie el comportamiento de los tamaños de los conjuntos del modelo.

4.2.1. Cadena de Markov

Se considerará un proceso $\mathcal{X} := (\mathbf{x}(t))_{t \in \mathbb{N}}$, de dos variables $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{N}^2$. Las variables son medidas al comienzo del período t , $x_1(t)$ representa la ventaja del líder sobre el segundo receptor, mientras que $x_2(t)$ medirá el tamaño de la cola virtual del líder. Es decir, si $Q_j(t)$ es la cola virtual del receptor R_j al comienzo del período t ,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Q_N(t) - Q_L(t), \\ x_2(t) &= Q_L(t). \end{aligned}$$

Notar que $\dim(V_L) - \dim(V_N) = Q_N - Q_L$. Se tiene que los posibles estados para $\mathbf{x}(t)$ es la región

$$P := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x_1 \leq D\}.$$

Para estudiar las transiciones de \mathcal{X} , se considera el espacio muestral

$$\Omega = (\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\})^{\mathbb{N}},$$

con $\omega \in \Omega$, $\omega = \omega_0\omega_1\omega_2\cdots$, donde $\omega_t = (\alpha_t, \beta_t, \delta_t)$ representa en su primera coordenada si llega un paquete al transmisor en el período t , mientras que la segunda y la tercera coordenada indican si las transmisiones a los dos receptores fueron exitosas. El Cuadro 4.2 detalla el significado de los valores que puede tomar la variable ω_t .

Cuadro 4.2: Significado de los valores que toman las variables α_t , β_t y γ_t .

Variable	Toma el valor 1	Toma el valor 0
α_t	Llega un paquete al transmisor en el período t	No llega paquete al transmisor en el período t
β_t	Transmisión exitosa a R_L en el período t	Falla la transmisión a R_L en el período t
δ_t	Transmisión exitosa a R_N en el período t	Falla la transmisión a R_N en el período t

Por lo tanto, se obtiene de manera natural que

$$\mathbb{P}_t[\omega_t = (a, b, d)] = \lambda^a \cdot \bar{\lambda}^{1-a} \cdot \mu^{b+d} \cdot \bar{\mu}^{2-b-d}.$$

Así, se obtiene el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \otimes_t \mathbb{P}_t)$, donde \mathcal{F} es la σ -álgebra discreta sobre Ω y $\otimes_t \mathbb{P}_t$ es la probabilidad producto.

Retomando el análisis de la variable aleatoria \mathcal{X} –definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \otimes_t \mathbb{P}_t)$ –, se particiona la región P , en 5 subregiones y se estudiará el caso en que $\mathbf{x}(t)$ pertenece a cada una de ellas:

- $P_1 = \{(0, 0)\}$: En este caso, ambas colas virtuales son vacías. Luego, si no llega ningún paquete durante el período, la cadena no cambia de estado. En caso contrario, el algoritmo de envío indica que hay que enviar una transmisión según el Caso 2, obteniéndose las siguientes probabilidades de transición que se ilustran en la Figura 4.1:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}, \\ (1, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}, \\ (0, 1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 0). \end{cases}$$

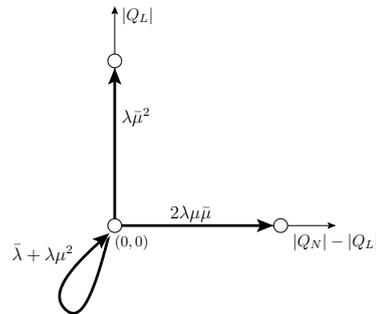


Figura 4.1: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_1$.

- $P_2 = \{(x_1, 0) : 1 \leq x_1 \leq D - 1\}$: En este caso, el receptor líder tiene la misma información que el transmisor, por lo que si no llega ningún paquete en el período t , se le enviará un paquete al otro receptor. En caso contrario, se enviará el paquete que llegue. Las probabilidades de transición, para el caso en que $\mathbf{x}(t) = (i, 0)$, $1 \leq i \leq D - 1$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 4.2:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (i-1, 1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 1), \\ (i-1, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\ (i, 1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 0), \\ (i, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \\ (i+1, 0), & \text{si } \omega_t = (1, 1, 0). \end{cases}$$

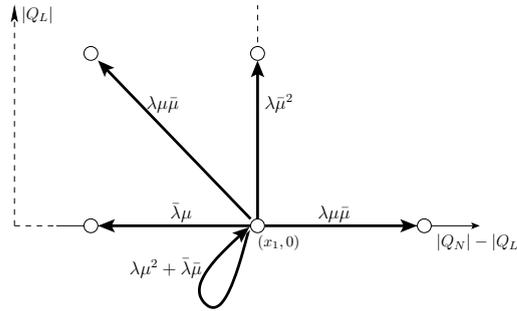
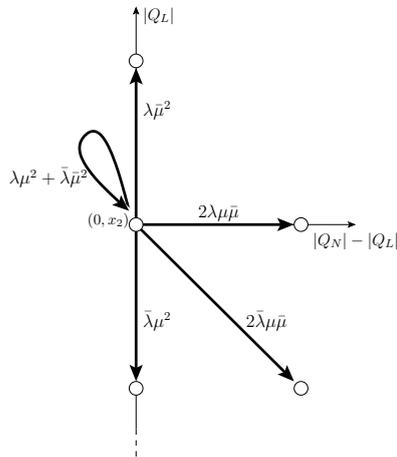


Figura 4.2: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_2$.

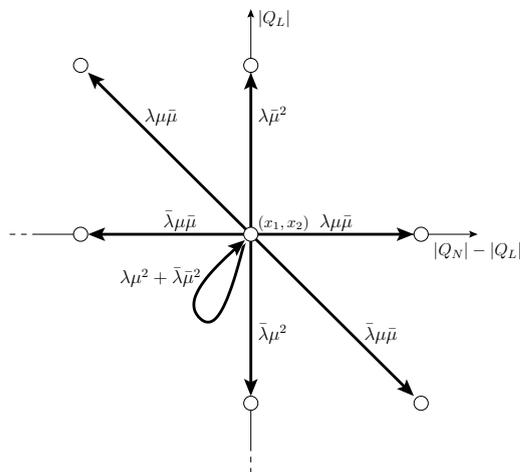
- $P_3 = \{(0, x_2) : x_2 \geq 1\}$: En este caso, ambos receptores tienen igual dimensión de información. Si $\mathbf{x}(t) = (0, j)$, $j \geq 0$, se obtienen las siguientes probabilidades de transición que se ilustran en la Figura 4.3:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (0, j+1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 0), \\ (0, j), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 1, 1), (0, 0, 0)\}, \\ (0, j-1), & \text{si } \omega_t = (0, 1, 1), \\ (1, j), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}, \\ (1, j-1), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 0)\}. \end{cases}$$

Figura 4.3: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_3$.

- $P_4 = \{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq D - 1, x_2 \geq 1\}$: Las probabilidades de transición, en el caso en que $\mathbf{x}(t) = (i, j)$, $1 \leq i \leq D - 1$, $j \geq 1$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 4.4:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (i-1, j+1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 1), \\ (i-1, j), & \text{si } \omega_t = (0, 0, 1), \\ (i, j+1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 0), \\ (i, j), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}, \\ (i, j-1), & \text{si } \omega_t = \{0, 1, 1\}, \\ (i+1, j), & \text{si } \omega_t = (1, 1, 0), \\ (i+1, j-1), & \text{si } \omega_t = (0, 1, 0). \end{cases}$$

Figura 4.4: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_4$.

- $P_5 = \{(D, x_2) : x_2 \geq 0\}$: Por último, en este caso, cuando el líder tiene ventaja D , se le envía un paquete al otro receptor, y por lo tanto las probabilidades de transición, en el caso en que $\mathbf{x}(t) = (D, j)$, $j \geq 0$, se especifican a continuación y se ilustran en la Figura 4.5:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} (D-1, j+1), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}, \\ (D-1, j), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\ (D, j+1), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}, \\ (D, j), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0)\}. \end{cases}$$

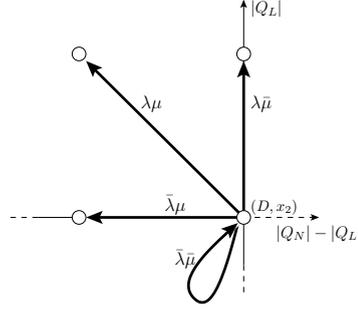


Figura 4.5: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t) \in P_5$.

Lo anterior permite concluir el siguiente lema, debido a que las transiciones solo dependen del estado actual del proceso $\mathbf{x}(t)$.

Lema 4.2. *El proceso $\mathcal{X} = (\mathbf{x}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

Para encontrar una cota en el retraso de decodificación, en primer lugar se encontrará una cota en el tamaño de ambas colas virtuales. Y, si el algoritmo \mathcal{A} –algoritmo en el cual 2RRA está basado–, sigue una estrategia de botar los paquetes al decodificar –como lo cumple el algoritmo 2R–, entonces se podrá acotar también el retraso de decodificación.

En lo que sigue, se introduce la técnica de *coupling*, que permitirá acotar el valor esperado de la coordenada $x_2(t)$, proceso que regularmente se llamará “altura” de la cadena.

4.2.2. Coupling

La cadena de Markov definida en la sección previa tiene como estado inicial $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$, considerando que ambas colas virtuales resultan estar vacías al principio del primer período. Sin embargo, será útil considerar una cadena de Markov cuyo inicio podría ser un punto arbitrario en el conjunto $\{(x_1, 0) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq x_1 \leq D\}$.

Se probará que la esperanza de la variable $x_2(t)$ de un proceso como el de la sección anterior, que comienza en $(0, 0)$, es menor o igual que la de un proceso que –con algunas transiciones que se han modificado– comienza en $(i, 0)$, $i \in \{0, \dots, D\}$. Específicamente, sea $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ e $\mathcal{Y} := (\mathbf{y}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ el proceso, definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \otimes_t \mathbb{P}_t)$, cuyas probabilidades de transición en las regiones P_1, P_2 y P_3 previamente definidas son las siguientes y se ilustran en la Figura 4.7:

- $P_1 = \{(0, 0)\}$: Si $\mathbf{y}(t) = (0, 0)$,

$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{cases} (0, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}, \\ (0, 1), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}, \\ (1, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}, \\ (1, 1), & \text{si } \omega_t \in \{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}. \end{cases}$$

- $P_2 = \{(x_1, 0) : 1 \leq x_1 \leq D-1\}$: En el caso en que $\mathbf{y}(t) = (i, 0)$, $1 \leq i \leq D-1$,

$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{cases} (i-1, 1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 1), \\ (i-1, 0), & \text{si } \omega_t = (0, 0, 1), \\ (i, 1), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}, \\ (i, 0), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}, \\ (i+1, 1), & \text{si } \omega_t = (0, 1, 0), \\ (i+1, 0), & \text{si } \omega_t = (1, 1, 0). \end{cases}$$

- $P_3 = \{(0, x_2) : x_2 \geq 1\}$: En el caso en que $\mathbf{y}(t) = (0, j)$, $j \geq 1$,

$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{cases} (0, j+1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 0), \\ (0, j), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}, \\ (0, j-1), & \text{si } \omega_t = (0, 1, 1), \\ (1, j+1), & \text{si } \omega_t = (1, 0, 1), \\ (1, j), & \text{si } \omega_t \in \{(0, 0, 1), (1, 1, 0)\}, \\ (1, j-1), & \text{si } \omega_t = (0, 1, 0). \end{cases}$$

En las regiones P_4 y P_5 , la $\mathbf{y}(t)$ se comporta de igual manera que el proceso $\mathbf{x}(t)$. En las Figuras 4.6 y 4.7 se pueden contratar las diferencias de los dos procesos en las distintas regiones donde se definen.

Al igual que para el proceso \mathcal{X} , se tiene:

Lema 4.3. *El proceso $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

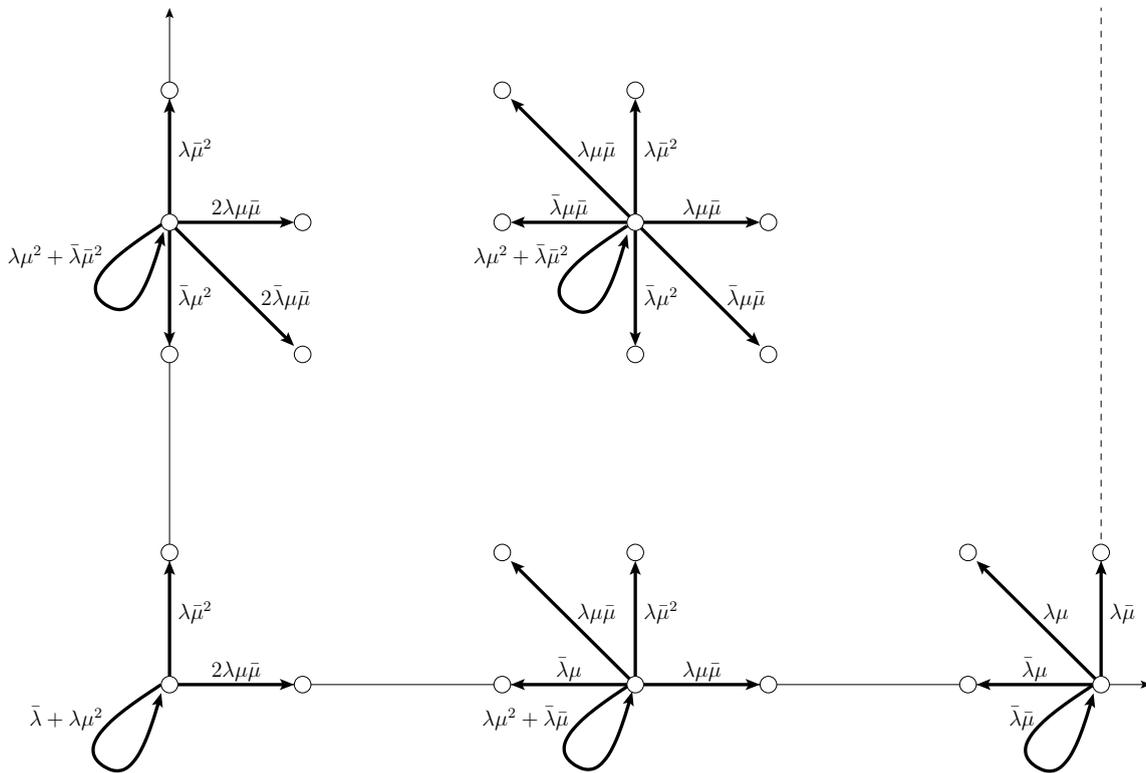


Figura 4.6: Probabilidades de transición para $\mathbf{x}(t)$.

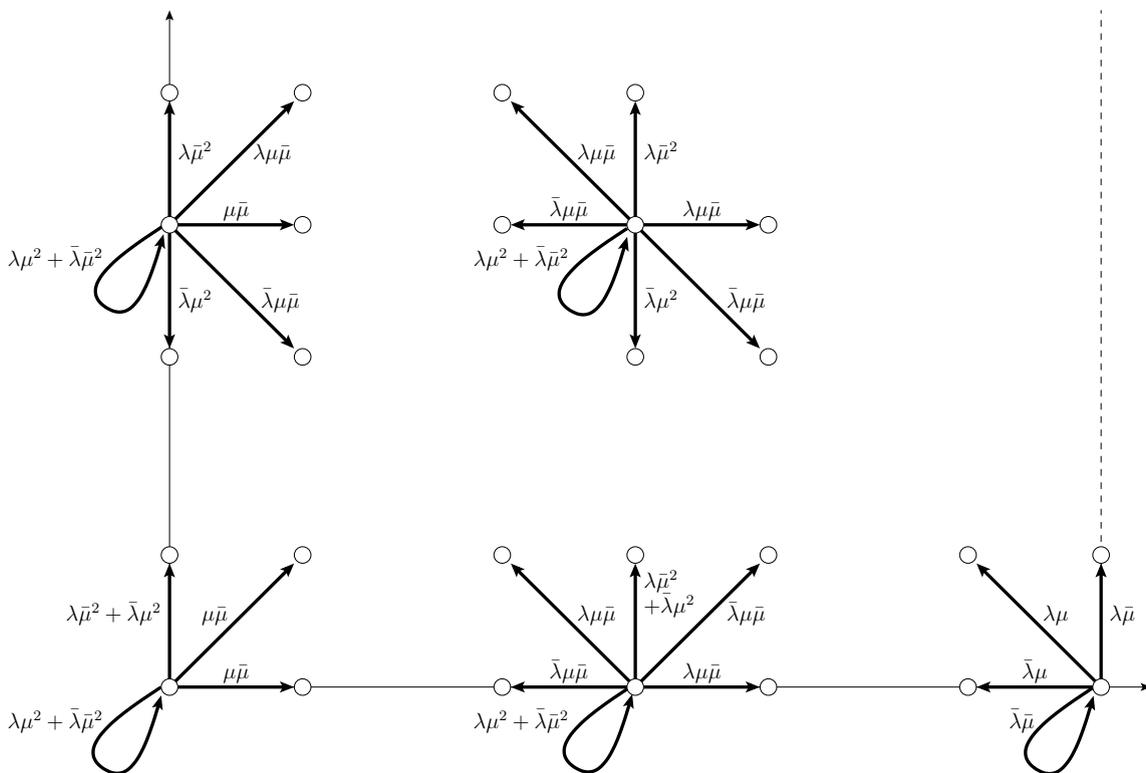


Figura 4.7: Probabilidades de transición para $\mathbf{y}(t)$.

Sea $\omega \in \Omega$. Se denotará por $(\mathbf{x}^\omega(t))_{t \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}^\omega(t) = (x_1^\omega(t), x_2^\omega(t))$, la realización del proceso \mathcal{X} en el evento ω . De manera análoga, se denota una realización de la cadena \mathcal{Y} . Gracias a la técnica de *coupling*, se puede probar el siguiente resultado.

Lema 4.4. *Sea $\omega \in \Omega$. Las cadenas de Markov $\mathcal{X} = (\mathbf{x}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ definidas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \otimes_t \mathbb{P}_t)$ cumplen que, para todo $t \in \mathbb{N}$,*

$$x_2^\omega(t) \leq y_2^\omega(t).$$

Demostración. Se probará por inducción en t que si $\mathbf{x}^\omega(t) = (x_1^\omega(t), x_2^\omega(t))$ e $\mathbf{y}^\omega(t) = (y_1^\omega(t), y_2^\omega(t))$ son las realizaciones de los procesos \mathcal{X} e \mathcal{Y} en $\omega \in \Omega$, entonces una de las siguientes condiciones se cumple:

$$(C1) \quad x_1^\omega(t) \leq y_1^\omega(t) \quad \text{y} \quad x_2^\omega(t) \leq y_2^\omega(t), \text{ o}$$

$$(C2) \quad y_1^\omega(t) = x_1^\omega(t) - 1 \quad \text{y} \quad x_2^\omega(t) < y_2^\omega(t).$$

En efecto, para $t = 0$, por definición de \mathcal{X} e \mathcal{Y} se cumple (C1). Se asume que se cumple la hipótesis de inducción para t , para probar el caso inductivo se tendrán que analizar todos los estados para del proceso \mathcal{X} en el instante t :

1. $\mathbf{x}(t) = (0, 0)$: por hipótesis de inducción, $\mathbf{y}(t)$ puede pertenecer a cualquier región.
 - En el caso en que $\omega_t = (1, 0, 0)$, ya sea $\mathbf{x}(t)$ en $(0, 0)$, como $\mathbf{y}(t)$ en cualquier estado en que se encuentre, tienen una transición con dirección $(0, 1)$. Por lo tanto, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}(t)$ tiene una transición con dirección $(1, 0)$, al igual que $\mathbf{y}(t)$ si pertenece a las regiones P_1, P_2, P_3 y P_4 . Si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, tiene transición con dirección $(0, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}(t)$ también tiene transición con dirección $(1, 0)$, sin embargo, si $\mathbf{y}(t) \in P_1 \cup P_3$, tiene transición con dirección $(1, 1)$, cumpliendo el paso inductivo. En el caso en que $\mathbf{y}(t) \in P_2 \cup P_4 \cup P_5$, tiene transición con dirección $(-1, 1)$, cumpliendo con la inducción. Notar que si $y_1(t) = 1$, se cumple la condición (C2) en $t + 1$.
 - En cualquier otro caso, $\mathbf{x}(t + 1) = (0, 0)$, cumpliendo trivialmente la condición (C1) en $t + 1$.
2. $\mathbf{x}(t) \in P_2$: se asume que $\mathbf{x}(t) = (i, 0)$, $1 \leq i \leq D - 1$. Por hipótesis de inducción, si $i = 1$, $\mathbf{y}(t)$ puede pertenecer a P_2, P_3, P_4 o P_5 . Sin embargo, si $i \geq 2$, $\mathbf{y}(t)$ puede estar en P_2, P_4 o P_5 .
 - Si $\omega_t = (1, 0, 0)$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t)$ en cualquier estado en que se encuentre, tienen una transición con dirección $(0, 1)$. Por lo tanto, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}(t)$ tiene una transición con dirección $(1, 0)$, al igual que $\mathbf{y}(t)$ si pertenece a las regiones P_2, P_3 y P_4 . Si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, tiene transición con dirección $(0, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.

- Si $\omega_t = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}(t)$ tiene una transición con dirección $(-1, 1)$, al igual que $\mathbf{y}(t)$ si pertenece a las regiones P_2, P_4 y P_5 . Si $\mathbf{y}(t) \in P_3$, tiene transición con dirección $(1, 1)$, cumpliendo la condición (C1) en $t + 1$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$, $\mathbf{x}(t)$ tiene una transición con dirección $(-1, 0)$, por lo tanto, sin importar la transición que tenga $\mathbf{y}(t)$, se seguirá cumpliendo la inducción.
 - Si $\omega_t = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}(t)$ se mantiene en su estado, sin embargo, si $\mathbf{y}(t) \in P_3 \cup P_4$, tiene una transición con dirección $(1, -1)$, cumpliéndose (C1) en $t + 1$. Si $\mathbf{y}(t) \in P_2$, tiene una transición con dirección $(1, 1)$, y si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, no cambia de estado, en ambos casos, también se cumple (C,1).
 - Si $\omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, $\mathbf{x}(t)$ no cambia de estado, al igual que $\mathbf{y}(t)$, salvo que $\mathbf{y}(t) \in P_5$, donde tiene una transición con dirección $(-1, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
3. $\mathbf{x}(t) \in P_3$: se asume que $\mathbf{x}(t) = (0, j)$, $j \geq 0$. Por hipótesis de inducción, $\mathbf{y}(t)$ puede pertenecer a las regiones P_3, P_4 o P_5 .
- Si $\omega_t = (1, 0, 0)$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t)$ en cualquier estado en que se encuentre, tienen una transición con dirección $(0, 1)$. Por lo tanto, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t) \in P_3 \cup P_4$ realizan el mismo tipo de transición. Luego, como las transiciones de $\mathbf{y}(t) \in P_5$ nunca decrecen en la segunda coordenada, se cumple la hipótesis inductiva.
 - Si $\omega_t = (0, 0, 1)$, $\mathbf{x}(t)$ tiene transición con dirección $(1, -1)$. Mientras que, si $\mathbf{y}(t) \in P_3$, tiene transición con dirección $(1, 0)$, y si $\mathbf{y}(t) \in P_4 \cup P_5$, tiene transición con dirección $(-1, 0)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo. Notar que si $y_1(t) = 1$, se cumple la condición (C2) en $t + 1$.
 - Si $\omega_t = (1, 0, 1)$, $\mathbf{x}(t)$ tiene transición con dirección $(1, 0)$. Mientras que, si $\mathbf{y}(t) \in P_3$, tiene transición con dirección $(1, 1)$, y si $\mathbf{y}(t) \in P_4 \cup P_5$, tiene transición con dirección $(-1, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo. Notar que si $y_1(t) = 1$, se cumple la condición (C2) en $t + 1$.
4. $\mathbf{x}(t) \in P_4$: se asume que $\mathbf{x}(t) = (i, j)$, $1 \leq i \leq D - 1$, $j \geq 1$. Por hipótesis de inducción, si $i = 1$, $\mathbf{y}(t)$ puede pertenecer a P_3, P_4 o P_5 . Por otra parte, si $i \geq 2$, $\mathbf{y}(t)$ puede estar en P_4 o P_5 solamente.
- Si $\omega_t = (1, 0, 0)$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t)$ en cualquier estado en que se encuentre, tienen una transición con dirección $(0, 1)$. Por lo tanto, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t) \in P_3 \cup P_4$ permanecen en su estado en $t + 1$. Si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, tiene transición con dirección $(-1, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.

- Si $\omega_t = (0, 1, 1)$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t) \in P_3 \cup P_4$ tienen transición con dirección $(0, -1)$. Si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, tiene transición con dirección $(-1, 0)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t) \in P_3 \cup P_4$ realizan la misma transición. Si $\mathbf{y}(t) \in P_5$, $\mathbf{y}(t)$ mantiene su estado o tiene una transición con dirección $(0, 1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t) \in P_4 \cup P_5$ realizan la misma transición. Si $\mathbf{y}(t) \in P_3$, $\mathbf{y}(t)$ tiene una transición con dirección $(1, 0)$ o $(1, -1)$. En cualquier caso, se cumple el paso inductivo.
5. $\mathbf{x}(t) \in P_5$: se asume que $\mathbf{x}(t) = (D, j)$, $j \geq 0$. Por hipótesis de inducción, $\mathbf{y}(t)$ puede pertenecer a P_4 (con $y_2(t) = D - 1$) o a P_5 . Se analiza el caso en que $\mathbf{y}(t) \in P_4$, pues el otro caso se cumple inmediatamente el paso inductivo.
- Si $\omega_t \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$, tanto $\mathbf{x}(t)$ como $\mathbf{y}(t)$, realizan la misma transición. Por lo tanto, se cumple el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$, $\mathbf{y}(t)$ se traslada a la columna D , pero queda con altura mayor que $\mathbf{x}(t + 1)$. Cumpliéndose el paso inductivo.
 - Si $\omega_t \in \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$, $\mathbf{x}(t)$ se traslada a la columna $D - 1$, quedando con altura menor que $\mathbf{y}(t + 1)$. Cumpliéndose el paso inductivo.

Por lo tanto, se cumple la inducción enunciada. Con esto, se concluye que, para cualquier $t \in \mathbb{N}$, se obtiene que los procesos \mathcal{X} e \mathcal{Y} en el evento $\omega \in \Omega$ cumplen que

$$x_2^\omega(t) \leq y_2^\omega(t).$$

□

El Lema 4.4 permite concluir inmediatamente el siguiente resultado que acota la altura esperada del proceso \mathcal{X} en términos de la del proceso \mathcal{Y} .

Corolario 4.5. Si $\mathcal{X} = (\mathbf{x}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}(t))_{t \in \mathbb{N}}$, se tiene que, para todo $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[x_2(t)] \leq \mathbb{E}[y_2(t)].$$

4.2.3. Simplificación

A continuación, se realizará una observación clave: En el proceso $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ definido en la Sección 4.2.2, se verifica que $(y_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$ es independiente de $(y_2(t))_{t \in \mathbb{N}}$. La Figura 4.8 representa las transiciones del proceso $(y_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$.

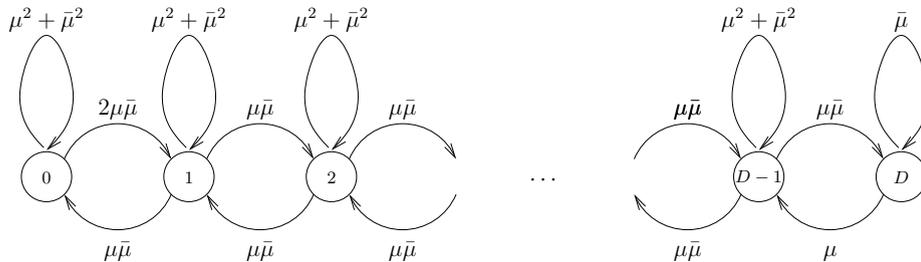


Figura 4.8: Probabilidades de transición para $y_1(t)$.

Proposición 4.6. *La distribución estacionaria del proceso $(y_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$ está dada por $\pi = (\pi_i : 0 \leq i \leq D)$,*

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{2D - 1 + 2\bar{\mu}}, \\ \pi_i &= \frac{2}{2D - 1 + 2\bar{\mu}}, \quad 1 \leq i \leq D - 1, \\ \pi_D &= \frac{2\bar{\mu}}{2D - 1 + 2\bar{\mu}},\end{aligned}$$

Demostración. Basta reemplazar los valores de π en las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= (\mu^2 + \bar{\mu}^2) \cdot \pi_0 + \mu\bar{\mu} \cdot \pi_1, \\ \pi_1 &= 2\mu\bar{\mu} \cdot \pi_0 + (\mu^2 + \bar{\mu}^2) \cdot \pi_1 + \mu\bar{\mu} \cdot \pi_2, \\ \pi_i &= \mu\bar{\mu} \cdot \pi_{i-1} + (\mu^2 + \bar{\mu}^2) \cdot \pi_i + \mu\bar{\mu} \cdot \pi_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq D - 2, \\ \pi_{D-1} &= \mu\bar{\mu} \cdot \pi_{D-2} + (\mu^2 + \bar{\mu}^2) \cdot \pi_{D-1} + \mu \cdot \pi_D, \\ \pi_D &= \mu\bar{\mu} \cdot \pi_{D-1} + \bar{\mu} \cdot \pi_D.\end{aligned}$$

□

Se define el proceso \mathcal{Y}_1 definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \otimes_t \mathbb{P}_t)$, como aquel proceso que posee las mismas transiciones que el proceso \mathcal{Y} , pero su estado inicial está distribuido según π en su primera coordenada y 0 en la segunda. En otras palabras, $\mathbb{P}(\mathbf{y}(0) = (i, 0)) = \pi_i$, $0 \leq i \leq D$.

Para encontrar la altura de la cadena \mathcal{Y}_1 se considerará un proceso $\mathcal{Z} := (\mathbf{z}(t))_{t \in \mathbb{N}}$, con

$$\mathbf{z}(t) = (\mathbb{I}_{y_1(t)=D}, y_2(t)), \quad \text{donde } \mathbb{I}_{y_1(t)=D} = \begin{cases} 1, & \text{si } y_1(t) = D, \\ 0, & \text{si } y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\}. \end{cases}$$

Por lo tanto, los estados donde estará definida \mathcal{Z} son $\{(i, j) : 0 \leq i \leq 1, j \geq 0\}$. Asimismo, $\mathbb{P}(\mathbf{z}(0) = (0, 0)) = \sum_{i=0}^{D-1} \pi_i$ y $\mathbb{P}(\mathbf{z}(0) = (1, 0)) = \pi_D$.

Lema 4.7. *El proceso $\mathcal{Z} = (\mathbf{z}(t))_{t \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

Demostración. En primer lugar, hay que notar que las transiciones horizontales –es decir, las transiciones del proceso $(z_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$ – son independientes de la altura, debido a que el proceso \mathcal{Y} cumple esta propiedad.

Por último, se considera que $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t))$. Conociendo el valor de la variable $z_1(t)$, la transición que realizará $\mathbf{z}(t)$ solo dependerá de la altura $z_2(t)$. Por lo que se puede concluir que \mathcal{Z} es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto. □

Como el proceso $(z_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$ es independiente del proceso $(z_2(t))_{t \in \mathbb{N}}$, se puede calcular,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(z_1(t+1) = 1 | z_1(t) = 0) &= \mathbb{P}(y_1(t+1) = D | y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\}) \\
&= \frac{\mathbb{P}(y_1(t+1) = D, y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\})}{\mathbb{P}(y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(y_1(t+1) = D, y_1(t) = D-1)}{\mathbb{P}(y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(y_1(t+1) = D | y_1(t) = D-1) \mathbb{P}(y_1(t) = D-1)}{\mathbb{P}(y_1(t) \in \{0, 1, \dots, D-1\})} \\
&= \frac{\mu \bar{\mu} \pi_{D-1}}{\sum_{i=0}^{D-1} \pi_i} = \frac{2\mu \bar{\mu}}{1 + 2(D-1)} = \frac{2\mu \bar{\mu}}{2D-1},
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{P}(z_1(t+1) = 0 | z_1(t) = 0) = 1 - \mathbb{P}(z_1(t+1) = 1 | z_1(t) = 0) = \frac{2D-1-2\mu \bar{\mu}}{2D-1}.$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(z_1(t+1) = 1 | z_1(t) = 1) &= \mathbb{P}(y_1(t+1) = D | y_1(t) = D) = \bar{\mu}, \\
\mathbb{P}(z_1(t+1) = 0 | z_1(t) = 1) &= 1 - \mathbb{P}(z_1(t+1) = 1 | z_1(t) = 1) = \mu.
\end{aligned}$$

Sea $\gamma := \frac{2\mu \bar{\mu}}{2D-1}$ y $\bar{\gamma} := 1 - \gamma$, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.8. *La distribución estacionaria del proceso $(z_1(t))_{t \in \mathbb{N}}$ está dada por $\nu = (\nu_0, \nu_1)$,*

$$\nu_0 = \frac{2D-1}{2D-1+2\bar{\mu}} = \frac{\mu}{\mu+\gamma}, \quad \nu_1 = \frac{2\bar{\mu}}{2D-1+2\bar{\mu}} = \frac{\gamma}{\mu+\gamma}. \quad (4.1)$$

Demostración. Basta reemplazar los valores de ν en las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \frac{2D-1-2\mu \bar{\mu}}{2D-1} \cdot \nu_0 + \mu \cdot \nu_1, \\
\nu_1 &= \frac{2\mu \bar{\mu}}{2D-1} \cdot \nu_0 + \bar{\mu} \cdot \nu_1.
\end{aligned}$$

□

En consecuencia, las transiciones para el proceso \mathcal{Z} son las siguientes:

- Si $\mathbf{z}(t) = (D-1, j)$, $j \geq 1$,

$$\mathbf{z}(t+1) = \begin{cases} (D-1, j+1), & \text{con probabilidad } \bar{\gamma} \lambda \bar{\mu}, \\ (D-1, j), & \text{con probabilidad } \bar{\gamma}(\lambda \mu + \bar{\lambda} \bar{\mu}), \\ (D-1, j-1), & \text{con probabilidad } \bar{\gamma} \bar{\lambda} \mu, \\ (D, j+1), & \text{con probabilidad } \gamma \lambda \bar{\mu}, \\ (D, j), & \text{con probabilidad } \gamma(\lambda \mu + \bar{\lambda} \bar{\mu}), \\ (D, j-1), & \text{con probabilidad } \gamma \bar{\lambda} \mu. \end{cases}$$

- Si $\mathbf{z}(t) = (D - 1, 0)$,

$$\mathbf{z}(t+1) = \begin{cases} (D - 1, 1), & \text{con probabilidad } \bar{\gamma}(\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\mu), \\ (D - 1, 0), & \text{con probabilidad } \bar{\gamma}(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}), \\ (D, 1), & \text{con probabilidad } \gamma(\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\mu), \\ (D, 0), & \text{con probabilidad } \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}). \end{cases}$$

- Si $\mathbf{z}(t) = (D, j)$, $j \geq 0$,

$$\mathbf{z}(t+1) = \begin{cases} (D - 1, j + 1), & \text{con probabilidad } \lambda\mu, \\ (D - 1, j), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\mu, \\ (D, j + 1), & \text{con probabilidad } \lambda\bar{\mu}, \\ (D, j), & \text{con probabilidad } \bar{\lambda}\bar{\mu}. \end{cases}$$

Se encontrará la esperanza de la altura de la cadena de Markov \mathcal{Z} , suponiendo la existencia de la distribución estacionaria del proceso. Sea $\sigma = (\sigma_{(i,j)} : 0 \leq i \leq 1, j \geq 0)$ la distribución estacionaria de \mathcal{Z} , y sean $a_j = \sigma_{(0,j)}$ y $b_j = \sigma_{(1,j)}$, para todo $j \geq 0$. De las condiciones de estacionariedad se deducen las siguientes relaciones:

$$a_j = \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_{j+1} + \bar{\gamma}(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_j + \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot a_{j-1} + \bar{\lambda}\mu \cdot b_j + \lambda\mu \cdot b_{j-1}, \quad j \geq 2, \quad (4.2)$$

$$a_1 = \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_2 + \bar{\gamma}(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_1 + \bar{\gamma}(\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\mu) \cdot a_0 + \bar{\lambda}\mu \cdot b_1 + \lambda\mu \cdot b_0, \quad (4.3)$$

$$a_0 = \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_1 + \bar{\gamma}(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_0 + \bar{\lambda}\mu \cdot b_0, \quad (4.4)$$

$$b_j = \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_{j+1} + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_j + \gamma\lambda\bar{\mu} \cdot a_{j-1} + \bar{\lambda}\bar{\mu} \cdot b_j + \lambda\bar{\mu} \cdot b_{j-1}, \quad j \geq 2, \quad (4.5)$$

$$b_1 = \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_2 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_1 + \gamma(\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\mu) \cdot a_0 + \bar{\lambda}\bar{\mu} \cdot b_1 + \lambda\bar{\mu} \cdot b_0, \quad (4.6)$$

$$b_0 = \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_1 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot a_0 + \bar{\lambda}\bar{\mu} \cdot b_0. \quad (4.7)$$

Definiendo las series formales $A(\zeta) = \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j$ y $B(\zeta) = \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j$, al multiplicar (4.2) por ζ^j , (4.3) por ζ y al sumar en j , junto con (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j \\ &= \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot \sum_{j \geq 0} a_{j+1} \zeta^j + \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \sum_{j \geq 1} a_{j-1} \zeta^j + \bar{\lambda}\mu \cdot \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j + \lambda\mu \cdot \sum_{j \geq 1} b_{j-1} \zeta^j + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta \\ &= \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot \frac{1}{\zeta} \sum_{j \geq 1} a_j \zeta^j + \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j + \bar{\lambda}\mu \cdot \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j + \lambda\mu \cdot \zeta \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot A(\zeta) \\ &= \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot \frac{1}{\zeta} [A(\zeta) - a_0] + \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta A(\zeta) + \bar{\lambda}\mu \cdot B(\zeta) + \lambda\mu \cdot \zeta B(\zeta) + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando por ζ y re-agrupando, se obtiene que

$$(-\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) A(\zeta) = (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) \cdot \zeta B(\zeta) + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu \cdot (\zeta^2 - 1) a_0. \quad (4.8)$$

Repitiendo el cálculo con las Ecuaciones (4.5)-(4.7),

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j \\ &= \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot \sum_{j \geq 0} a_{j+1} \zeta^j + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j \\ & \quad + \gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \sum_{j \geq 1} a_{j-1} \zeta^j + \lambda\bar{\mu} \cdot \sum_{j \geq 1} b_{j-1} \zeta^j + \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta \\ &= \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot \frac{1}{\zeta} \sum_{j \geq 1} a_j \zeta^j + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j \\ & \quad + \gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta \sum_{j \geq 0} a_j \zeta^j + \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta \sum_{j \geq 0} b_j \zeta^j + \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot B(\zeta) \\ &= \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot \frac{1}{\zeta} [A(\zeta) - a_0] + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot A(\zeta) + \gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta A(\zeta) + \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta B(\zeta) + \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot a_0 \zeta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando por ζ y re-agrupando, se obtiene

$$(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot \zeta B(\zeta) = (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) + \gamma\bar{\lambda}\mu \cdot (\zeta^2 - 1) a_0. \quad (4.9)$$

Como se desea obtener una expresión para la esperanza de la altura, se buscará despejar los términos $A(\zeta)$ y $B(\zeta)$. Multiplicando (4.8) por $(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot (-\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\ &= (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) \cdot (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot \zeta B(\zeta) + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot (\zeta^2 - 1) a_0, \end{aligned}$$

y reemplazando en el lado derecho el término $(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot \zeta B(\zeta)$ según la Ecuación (4.9), sigue que

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot (-\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \quad (4.10) \\ &= (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) \cdot (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\ & \quad + \gamma\bar{\lambda}(\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) \mu \cdot (\zeta^2 - 1) a_0 + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot (\zeta^2 - 1) a_0. \end{aligned}$$

Definiendo $\bar{\zeta} := 1 - \zeta$, (4.10) se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \bar{\mu} + \lambda\bar{\mu} \cdot \bar{\zeta}) \cdot (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\ & \quad + (\mu - \lambda\mu \cdot \bar{\zeta}) \cdot (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\ & \quad - \bar{\lambda}\mu [\gamma(\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) + \bar{\gamma}(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta)] \cdot \bar{\zeta}(\zeta + 1) a_0 \\ &= \mu ((\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \gamma\lambda\bar{\mu}) \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu} - \gamma\lambda\mu - \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\ & \quad + \lambda\bar{\mu} (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot \bar{\zeta} A(\zeta) \\ & \quad - \lambda\mu (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma(\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot \bar{\zeta} A(\zeta) \\ & \quad - \bar{\lambda}\mu [\gamma(\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) + \bar{\gamma}(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta)] \cdot \bar{\zeta}(\zeta + 1) a_0. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
& (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \gamma\lambda\bar{\mu}) \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu} - \gamma\lambda\mu - \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu + \gamma\bar{\lambda}\mu \\
&= \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 - (1 - \lambda\mu - \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\lambda}\mu \\
&= \lambda\bar{\mu} \cdot (1 - 2\bar{\zeta} + \bar{\zeta}^2) - (\lambda\bar{\mu} + \bar{\lambda}\mu) \cdot (1 - \bar{\zeta}) + \bar{\lambda}\mu \\
&= \lambda\bar{\mu} \cdot \bar{\zeta}^2 + (\bar{\lambda}\mu - \lambda\bar{\mu}) \cdot \bar{\zeta} \\
&= \lambda\bar{\mu} \cdot \bar{\zeta}^2 + (\mu - \lambda) \cdot \bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Luego, la Ecuación (4.11) se puede simplificar por $\bar{\zeta}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \mu (\lambda\bar{\mu} \cdot \bar{\zeta} + \mu - \lambda) \cdot A(\zeta) \\
&\quad + \lambda\bar{\mu} (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\
&\quad - \lambda\mu (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma (\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(\zeta) \\
&\quad - \bar{\lambda}\mu [\gamma (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) + \bar{\gamma} (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta)] \cdot (\zeta + 1) a_0. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Evaluando (4.12) en $\zeta = 1$ ($\bar{\zeta} = 0$), se obtiene una expresión para $A(1) = \sum_j a_j$, en función de a_0 ,

$$\begin{aligned}
0 &= \mu (\mu - \lambda) \cdot A(1) + \lambda\bar{\mu} (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} - 1 + \bar{\gamma}\lambda\mu + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu} + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A(1) \\
&\quad - \lambda\mu (\gamma\lambda\bar{\mu} + \gamma (\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A(1) \\
&\quad - \bar{\lambda}\mu [\gamma (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu) + \bar{\gamma} (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu})] \cdot 2a_0 \\
&= [\mu (\mu - \lambda) - \gamma\lambda\bar{\mu} - \gamma\lambda\mu] \cdot A(1) - \bar{\lambda}\mu [\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu}] \cdot 2a_0 \\
&= [\mu (\mu - \lambda) - \gamma\lambda] \cdot A(1) - \bar{\lambda}\mu^2 \cdot 2a_0. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta que $A(1) = \sum_j a_j$, es la suma de las probabilidades estacionarias de permanecer en la primera columna, que corresponde a la distribución estacionaria de que la variable $z_1(t) = 0$, se obtiene que $A(1) = \nu_0 = \frac{\mu}{\mu + \gamma}$. Luego, reemplazando en (4.13),

$$a_0 = \frac{\mu (\mu - \lambda) - \gamma\lambda}{2\bar{\lambda}\mu (\mu + \gamma)}. \tag{4.14}$$

Para encontrar una expresión para la esperanza de la altura de la cadena de Markov \mathcal{Z} , bastará encontrar el valor de los términos $A'(1) = \sum_j j a_j$ y $B'(1) = \sum_j j b_j$. Se deriva (4.12) para encontrar $A'(1)$:

$$\begin{aligned}
0 &= [-\lambda\mu\bar{\mu} + \lambda\bar{\mu} (2\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu})) - \lambda\mu (2\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta + \gamma (\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}))] \cdot A(\zeta) \\
&\quad + \mu (\lambda\bar{\mu} \cdot \bar{\zeta} + \mu - \lambda) \cdot A'(\zeta) + \lambda\bar{\mu} (\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 - (1 - \bar{\gamma}\lambda\mu - \bar{\gamma}\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \bar{\gamma}\bar{\lambda}\mu) \cdot A'(\zeta) \\
&\quad - \lambda\mu (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + \gamma (\lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A'(\zeta) \\
&\quad - \bar{\lambda}\mu [\gamma\lambda\mu - \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu}] \cdot (\zeta + 1) a_0 - \bar{\lambda}\mu [\gamma (\bar{\lambda}\mu + \lambda\mu \cdot \zeta) + \bar{\gamma} (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta)] \cdot a_0.
\end{aligned}$$

Evaluando en $\zeta = 1$, sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= [-\lambda\mu\bar{\mu} + \lambda\bar{\mu}(\bar{\gamma}\lambda + \bar{\gamma}\bar{\mu} - 1) - \lambda\mu(\gamma\lambda + \gamma\bar{\mu})] \cdot A(1) \\
&\quad + [\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda] \cdot A'(1) - \bar{\lambda}\mu[\gamma\lambda\mu - \bar{\gamma}\lambda\bar{\mu}] \cdot 2a_0 - \bar{\lambda}\mu^2 \cdot a_0 \\
&= \lambda[-\mu\bar{\mu} + \bar{\mu}(\lambda + \bar{\mu} - 1) - \gamma(\lambda\mu + \mu\bar{\mu} + \lambda\bar{\mu} + \bar{\mu}^2)] \cdot A(1) \\
&\quad + [\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda] \cdot A'(1) - \bar{\lambda}\mu[2\gamma\lambda\mu - 2\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \mu] \cdot a_0 \\
&= -\lambda[\mu\bar{\mu} + \bar{\mu}(\mu - \lambda) + \gamma(\lambda + \bar{\mu})] \cdot A(1) \\
&\quad + [\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda] \cdot A'(1) - \bar{\lambda}\mu[2\gamma\lambda\mu - 2\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \mu] \cdot a_0 \\
&= -\lambda[\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)] \cdot A(1) - \lambda[-\mu(\mu - \lambda) + \gamma\lambda] \cdot A(1) \\
&\quad + [\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda] \cdot A'(1) - \bar{\lambda}\mu[2\gamma\lambda\mu - 2\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \mu] \cdot a_0.
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de $A(1) = \frac{\mu}{\mu + \gamma}$ y utilizando (4.14), se obtiene

$$\begin{aligned}
A'(1) &= \frac{\lambda[\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda} \cdot \frac{\mu}{\mu + \gamma} - \lambda \cdot \frac{\mu}{\mu + \gamma} + \frac{2\gamma\lambda\mu - 2\bar{\gamma}\lambda\bar{\mu} + \mu}{2(\mu + \gamma)} \\
&= \frac{\lambda\mu[\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{(\mu + \gamma)[\mu(\mu - \lambda) - \gamma\lambda]} + \frac{\mu - 2\bar{\gamma}\lambda}{2(\mu + \gamma)} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Por otra parte, para encontrar $B'(1)$, se deriva (4.9),

$$\begin{aligned}
&(1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - 2\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot B(\zeta) + (1 - \bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\bar{\mu} \cdot \zeta) \cdot \zeta B'(\zeta) \\
&= (2\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta + \gamma\lambda\mu + \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot A(\zeta) + (\gamma\lambda\bar{\mu} \cdot \zeta^2 + (\gamma\lambda\mu + \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \zeta + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A'(\zeta) \\
&\quad + 2\gamma\bar{\lambda}\mu \cdot \zeta a_0,
\end{aligned}$$

evaluando en $\zeta = 1$ y utilizando que $A(1) = \frac{\mu}{\mu + \gamma}$ y (4.14),

$$\begin{aligned}
&(1 - \bar{\mu} - \lambda\bar{\mu}) \cdot \frac{\gamma}{\mu + \gamma} + (1 - \mu) \cdot B'(1) \\
&= (2\gamma\lambda\bar{\mu} + \gamma\lambda\mu + \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu}) \cdot \frac{\mu}{\mu + \gamma} + (\gamma\lambda\bar{\mu} + \gamma\lambda\mu + \gamma\bar{\lambda}\bar{\mu} + \gamma\bar{\lambda}\mu) \cdot A'(1) \\
&\quad + 2\gamma\bar{\lambda}\mu \cdot \frac{-\gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)}{2\bar{\lambda}\mu(\mu + \gamma)} \\
&= \gamma(\lambda + \bar{\mu}) \cdot \frac{\mu}{\mu + \gamma} + \gamma \cdot A'(1) + \gamma \cdot \frac{-\gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)}{\mu + \gamma} \\
&= \gamma \cdot A'(1) + \gamma \cdot \frac{1 - \gamma\lambda}{\mu + \gamma}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} \cdot B'(1) &= \gamma \cdot A'(1) + \gamma \cdot \frac{1 - \gamma\lambda}{\mu + \gamma} - \gamma \cdot \frac{1 - \bar{\mu} - \lambda\bar{\mu}}{\mu + \gamma} \\
&= \gamma \cdot A'(1) + \gamma \cdot \frac{\bar{\mu} + \lambda\bar{\mu} - \gamma\lambda}{\mu + \gamma},
\end{aligned}$$

y reemplazando el valor de $A'(1)$ de la Ecuación (4.15),

$$\begin{aligned}
B'(1) &= \gamma \cdot \frac{\lambda\mu[\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{\bar{\mu}(\mu + \gamma)[-\gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)]} + \gamma \cdot \frac{\mu - 2\bar{\gamma}\lambda}{2\bar{\mu}(\mu + \gamma)} + \gamma \cdot \frac{\bar{\mu} + \lambda\bar{\mu} - \gamma\lambda}{\bar{\mu}(\mu + \gamma)} \\
&= \frac{\gamma\lambda\mu[\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{\bar{\mu}(\mu + \gamma)[-\gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)]} + \frac{\gamma(\mu + 2\bar{\mu} + 2\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{2\bar{\mu}(\mu + \gamma)}
\end{aligned}$$

Así, se puede concluir que la altura del proceso $\mathbf{z}(t)$ es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z_2(t)] &= A'(1) + B'(1) \\
&= \left(1 + \frac{\gamma}{\bar{\mu}}\right) \cdot \frac{\lambda\mu [\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{(\mu + \gamma)[- \gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)]} + \frac{\mu - 2\bar{\gamma}\lambda}{2(\mu + \gamma)} \\
&\quad + \frac{\gamma(\mu + 2\bar{\mu} + 2\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{2\bar{\mu}(\mu + \gamma)} \\
&= \left(1 + \frac{\gamma}{\bar{\mu}}\right) \cdot \frac{\lambda\mu [\bar{\mu}(\mu + \gamma) + (\mu - \lambda)]}{(\mu + \gamma)[- \gamma\lambda + \mu(\mu - \lambda)]} + \frac{\mu\bar{\mu} - 2\lambda\bar{\mu} + \gamma(\mu + 2\bar{\mu} + 4\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{2\bar{\mu}(\mu + \gamma)}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.3. Resultados

Del análisis anterior, se concluyen los siguientes resultados.

Lema 4.9. *Si*

$$D \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4\mu\bar{\mu}}{\mu - \lambda} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4\bar{\mu}}{1 - \rho} + 1 \right),$$

entonces la altura de la cadena \mathcal{Z} está acotada por

$$\frac{3}{1 - \rho} + \frac{11}{4\bar{\mu}} + 4 = O\left(\frac{1}{1 - \rho}\right).$$

Demostración. Recordando que $\gamma = \frac{2\mu\bar{\mu}}{2D-1}$ y escogiendo $D \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4\mu\bar{\mu}}{\mu - \lambda} + 1 \right)$ se tiene que $\gamma \leq \frac{1}{2}(\mu - \lambda)$. Por lo tanto, acotando (4.16),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z_2(t)] &\leq \left(1 + \frac{\mu - \lambda}{2\bar{\mu}}\right) \cdot \frac{\lambda[\bar{\mu}(3\mu - \lambda) + 2(\mu - \lambda)]}{(2\mu - \lambda)(\mu - \lambda)} \\
&\quad + \frac{2\mu\bar{\mu} - 4\lambda\bar{\mu} + (\mu - \lambda)(\mu + 2\bar{\mu} + 4\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{4\mu\bar{\mu}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\mu - \lambda}{2\bar{\mu}}\right) \cdot \frac{\bar{\mu}(3\mu - \lambda) + 2(\mu - \lambda)}{\mu - \lambda} \\
&\quad + \frac{\mu - 2\lambda}{2\mu} + \frac{(\mu - \lambda)(\mu + 2\bar{\mu} + 4\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{4\mu\bar{\mu}} \\
&= \frac{\bar{\mu}(3\mu - \lambda)}{\mu - \lambda} + 2 + \frac{3\mu - \lambda}{2} + \frac{\mu - \lambda}{\bar{\mu}} \\
&\quad + \frac{\mu - 2\lambda}{2\mu} + \frac{(\mu - \lambda)(\mu + 2\bar{\mu} + 4\lambda\bar{\mu} - 2\lambda)}{4\mu\bar{\mu}} \\
&= \frac{\bar{\mu}(3\mu - \lambda)}{\mu - \lambda} + 2 + \frac{3\mu - \lambda}{2} + \frac{\mu - 2\lambda}{2\mu} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} \cdot \frac{3\mu + 2\bar{\mu} + 4\lambda\bar{\mu} + 2(\mu - \lambda)}{4\bar{\mu}} \\
&\leq \frac{3\mu}{\mu - \lambda} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{11}{4\bar{\mu}} \\
&= \frac{3}{1 - \rho} + \frac{11}{4\bar{\mu}} + 4.
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.10. *Si se cumple que*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4\bar{\mu}}{1-\rho} + 1 \right) \leq D = O \left(\frac{1}{1-\rho} \right),$$

y que el Algoritmo 2RRA está basado en un algoritmo \mathcal{A} que sigue una regla de botar los paquetes al decodificar, entonces la cantidad esperada de paquetes que hay en el sistema es $O \left(\frac{1}{1-\rho} \right)$.

Demostración. Gracias a que los paquetes que están en el sistema están acotados por las colas virtuales de ambos receptores, a la definición de la cadena \mathcal{X} , al Corolario 4.5, a que $y_2(t) = z_2(t)$ y al Lema 4.9, la cantidad esperada de paquetes en el sistema es

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Q_L(t) \cup Q_N(t)|] &\leq \mathbb{E} [|Q_L(t)|] + \mathbb{E} [|Q_N(t)|] \\ &= \mathbb{E} [x_2(t)] + \mathbb{E} [x_1(t) + x_2(t)] \\ &\leq 2 \mathbb{E} [x_2(t)] + D \\ &= O \left(\frac{1}{1-\rho} \right). \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, se obtiene:

Corolario 4.11. *Para un Algoritmo 2RRA, basado en un algoritmo \mathcal{A} que sigue una regla de botar los paquetes al decodificar, si la ventaja permitida cumple*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4\bar{\mu}}{1-\rho} + 1 \right) \leq D = O \left(\frac{1}{1-\rho} \right),$$

entonces el retraso de decodificación de los paquetes es $O \left(\frac{1}{1-\rho} \right)$.

Demostración. Basta aplicar la relación (3.8) demostrada por Little en la cantidad de paquetes esperadas que hay en el sistema. □

Sin embargo, este resultado no permite demostrar que fijando una barrera acotada para la ventaja –independiente de ρ – se pueda obtener un algoritmo asintóticamente óptimo. Más aún, una barrera del mismo orden que el tamaño de los conjuntos que se están midiendo resultaría en retrasos de decodificación eficientes. Luego, en cierto sentido, puede ser que no se pueda exigir ventajas acotadas entre los receptores, o algoritmos que no cumplan la Propiedad de innovación.

Capítulo 5

Hacia un Análisis del Caso de 3 Receptores

En este capítulo se estudia una generalización del resultado de Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis [23] –expuesto en la Sección 3.3– que permite obtener cotas de funcionales sobre cadenas de Markov. La razón que motiva este análisis es que se conjetura que es útil para estudiar el caso de tres receptores y resolver positivamente la Conjetura 2.13 de Sundararajan et al. [19]. En primer lugar, se describe el algoritmo de envío propuesto por Sundararaja et. al. [19] para el caso de tres receptores y las propiedades que posee. Posteriormente, se menciona la conjetura que permitiría avanzar en la prueba de la optimalidad del algoritmo, y se finaliza con el resultado principal del capítulo.

5.1. Algoritmo 3R

Para describir el algoritmo de envío de los paquetes, es necesario una definición previa:

Definición 5.1 (Escuchar un paquete). Se dice que el receptor ha escuchado un paquete \mathbf{p} si conoce alguna combinación lineal que involucre a \mathbf{p} . En otras palabras, si $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \in V$, donde V es la información del receptor y \mathbf{q} es una suma de paquetes.

El esquema de codificación tiene como base un cuerpo de tamaño 3 para los coeficientes que acompañan a los paquetes en cada transmisión. A continuación se presenta el algoritmo, descrito en [19], que modela la interacción entre el transmisor y los receptores en cada período:

- 1) Inicializar $L = 1$, $N = 2$, $D = 3$, $m = 0$. Se utilizará el índice L para representar al receptor líder, D para representar al receptor que presenta un déficit de paquetes y N para representar al receptor que no tiene déficit.
- 2) Calcular los siguientes conjuntos para cada receptor $j = 1, 2, 3$.
 $H_j :=$ Conjunto de paquetes escuchados por el receptor j .
 $D_j :=$ Conjunto de paquetes decodificados por el receptor j .
- 3) Definir un conjunto universo U de paquetes \mathbf{p}_1 hasta \mathbf{p}_m , y también \mathbf{p}_{m+1} si ha llegado al transmisor. Calcular cada uno de los siguientes conjuntos (ver Figura 5.1):

- $S_1 = D_N \cap D_D$

- $S_2 = D_N \cap (H_D \setminus D_D)$
- $S_3 = D_N \setminus H_D$
- $S_4 = D_D \setminus D_N$
- $S_5 = (H_D \setminus D_D) \setminus D_N$
- $S_6 = U \setminus (H_D \cup D_N)$

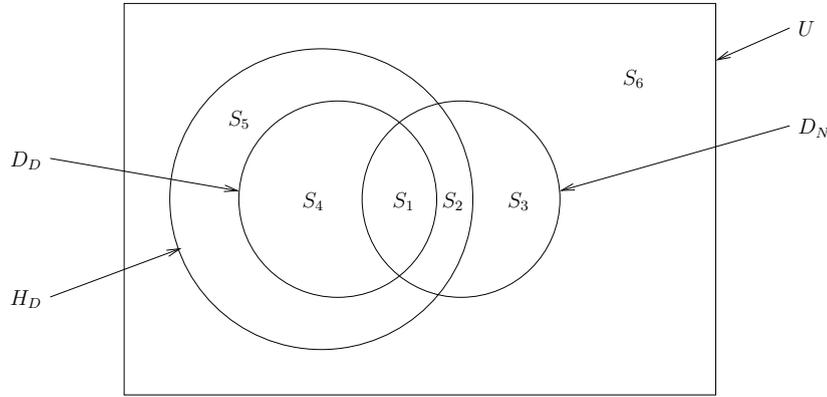


Figura 5.1: Conjuntos utilizados en el esquema de codificación.

- 4) Se escoge una combinación lineal de paquetes para enviar dependiendo de donde esté el paquete \mathbf{p}_{m+1} , según el siguiente esquema:

Caso 1 – \mathbf{p}_{m+1} no ha llegado: Verificar si S_2 y S_4 son ambos no vacíos. Si es así, mandar la suma de los paquetes más antiguos (es decir, con menor índice) en cada uno de los dos conjuntos. Si no, intentar con el par de conjuntos S_3 y S_4 . Si ninguno de ambos pares funciona, entonces mandar el paquete más antiguo en S_5 si no es vacío. Si no, tratar con los conjuntos S_6, S_2, S_3 y S_4 , en ese orden. Si todos los conjuntos resultan ser vacíos, entonces no enviar nada.

Caso 2 – $\mathbf{p}_{m+1} \in S_1$: Idéntico al caso 1, a excepción de que \mathbf{p}_{m+1} debe ser agregado a la combinación lineal que se va a enviar.

Caso 3 – $\mathbf{p}_{m+1} \in S_2$: Enviar \mathbf{p}_{m+1} con otro paquete, el cual será elegido como el paquete más antiguo en el primer de los siguientes conjuntos que resulte no vacío: S_4, S_5, S_6 . (En este caso, como $\mathbf{p}_{m+1} \in S_2$, si el otro paquete \mathbf{p} se elige en el conjunto S_5 , ambos paquetes pertenecen a $H_D \setminus D_D$. Por lo tanto, el receptor D podría conocer $(\mathbf{p}_{m+1} + \mathbf{p})$ ó $(\mathbf{p}_{m+1} + 2\mathbf{p})$, pero no ambos. Luego, el coeficiente para \mathbf{p} en la transmisión podría ser 1 ó 2, de manera que una recepción exitosa para D sea innovativa).

Caso 4 – $\mathbf{p}_{m+1} \in S_3$: Enviar \mathbf{p}_{m+1} con otro paquete, el cual será elegido como el paquete más antiguo en el primer de los siguientes conjuntos que resulte no vacío: S_4, S_5, S_6 .

Caso 5 – $\mathbf{p}_{m+1} \in S_4$: Enviar \mathbf{p}_{m+1} con otro paquete, el cual será elegido como el paquete más antiguo en el primer de los siguientes conjuntos que resulte no vacío: S_2, S_3, S_6 .

Caso 6 – Cualquier otro caso: Enviar \mathbf{p}_{m+1} por sí solo.

- 5) Transmitir la combinación lineal indicada y recolectar el *feedback* de cada receptor. Utilizando ésta información, actualizar los conjuntos H_j y D_j para todos los receptores.
- 6) Definir un nuevo valor para m , el cual será el máximo de los rangos –o dimensiones de información– de los tres receptores. Identificar los receptores que han decodificado todos los paquetes desde \mathbf{p}_1 hasta \mathbf{p}_m . (Se demuestra en [19] que siempre habrá un receptor que haya decodificado dichos paquetes).

Si existe más de un receptor, se escoge el de menor índice para asignarlo como L . Calcular el conjunto de los paquetes que cada receptor ha escuchado, pero que no puede decodificar, $T_j := H_j \setminus D_j$. Si exactamente uno de los receptores tiene el conjunto T_j no vacío, asignar aquel receptor como D , y al otro receptor como N . Si ambos receptores tienen el conjunto T_j vacío o si ambos lo tienen no vacío, asignar D y N arbitrariamente. (Se demuestra en [19] que a lo más un receptor tiene el conjunto T_j no vacío).

5.2. Propiedades del Algoritmo 3R

El algoritmo recién descrito cumple con las propiedades que se mencionan a continuación, todas ellas demostradas en [19]. Estas propiedades serán útiles para entender el Algoritmo 3R, y serán la base de la conjetura que se realiza. En lo que sigue, se utilizará $m(t)$ para denotar el mayor rango entre las informaciones de los receptores.

Propiedad 5.2. Para cada instante $t > 0$, la transmisión en cualquier período entre 1 y t no involucra a ningún paquete con índice posterior a $m(t) + 1$.

Propiedad 5.3. Al comienzo de cualquier período $t > 0$, al menos un receptor ha decodificado todos los paquetes desde \mathbf{p}_1 y $\mathbf{p}_{m(t)}$.

Por lo tanto, el receptor líder será aquel que ha decodificado todos los paquetes entre \mathbf{p}_1 y $\mathbf{p}_{m(t)}$ al comienzo del período t . Si existe más de uno que cumpla con la propiedad, cualquiera de ellos se puede elegir como líder. Notar que la asignación del índice L en el algoritmo se utiliza para identificar al líder.

La siguiente propiedad entrega una herramienta bastante útil para entender el algoritmo.

Propiedad 5.4. Desde el punto de vista de cualquier receptor, en cada período la transmisión de una combinación lineal involucra a lo más dos paquetes no decodificados.

Gracias a la Propiedad 5.4 se puede identificar una estructura en el espacio de información de cada receptor. Para describir esta estructura, primero se define una relación en el conjunto de paquetes recibidos por un receptor en específico. Sea G el conjunto de paquetes que han llegado al transmisor, junto con un paquete ficticio $\mathbf{0}$ que es conocido por todos los receptores (incluso antes de que comiencen las transmisiones). La relación que se define a continuación es respecto a un receptor, y se denotará por \mathcal{R}_j al tratarse de la relación cuando se considera el receptor j . Se dirá que dos paquetes $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y \in G$ están relacionados si el receptor conoce alguna de las siguientes combinaciones lineales, $\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y$ o $\mathbf{p}_x + 2\mathbf{p}_y$.

Se demuestra el siguiente resultado.

Lema 5.5. *La relación \mathcal{R}_j es una relación de equivalencia en G , para todo receptor j .*

Esta relación define una partición en el conjunto G , en clases de equivalencia, estructurando el espacio de información del receptor. Se ha agregado el paquete ficticio de ceros para relacionar a todos los paquetes que se han decodificado en una misma clase. Los paquetes que no han sido transmitidos en ninguna combinación lineal son representados como clases de equivalencias de un solo elemento, estos paquetes son los que el receptor no ha escuchado. El resto de las clases de equivalencia contienen a los paquetes que el receptor ha escuchado, pero que aún no ha decodificado. Dentro de una clase, los paquetes son equivalentes en el sentido de que al decodificar un paquete de una clase, es posible decodificar la clase completa.

Propiedad 5.6. Al comienzo de cualquier período $t > 0$, al menos uno de los dos receptores que no son líderes ha decodificado todos los paquetes que ha escuchado, *i.e.*, $H_i = D_i$.

Es por esta razón que en la Figura 5.1 no se considera el conjunto H_N , ya que se tiene $H_N = D_N$.

Propiedad 5.7. La transmisión de cualquier combinación lineal calculada con el esquema propuesto será innovativa para todos los receptores que no hayan decodificado todo lo que ha llegado al transmisor.

5.3. Análisis del Algoritmo 3R

Se denota por $H_j(t), D_j(t)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, al conjunto de paquetes escuchados y decodificados por el receptor j al inicio del período t . Así mismo, se denota por $U(t)$ y $S_k(t)$, $k \in \{1, \dots, 6\}$, a los conjuntos que se definen en el paso 3 del Algoritmo 3R, al inicio del período t .

Se define

- $n(t)$ como el número de paquetes que han llegado al transmisor,
- $D(t) := \bigcap_{j=1}^3 D_j(t)$, el conjunto los paquetes que han sido decodificados por los tres receptores, y
- $T(t) := \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n(t)}\} \setminus U(t)$, el conjunto de paquetes que han llegado al transmisor y que no se involucran en ninguna transmisión hasta el período t .

La idea es crear un proceso que describa los conjuntos de paquetes que se utilizan para decidir la transmisión del próximo envío. Sin embargo, para que el proceso sea recurrente y pueda tener distribución estacionaria, es útil poner atención en los índices de los paquetes que aún no han sido decodificados, y renombrarlos con un nuevo índice para olvidarse de aquellos paquetes que ya han sido utilizados. Se define

$$\sigma := (\mathbf{i} \in \{1, 2, \dots, n(t)\} : \mathbf{p}_i \notin D(t)),$$

es decir, σ es una tupla ordenada que contiene los índices de los paquetes que no han sido decodificados por los tres receptores. Por lo tanto, si $\mathbf{p}_r \notin D(t)$, $\sigma^{-1}(\mathbf{r})$ es la posición

que ocupa el paquete \mathbf{p}_r dentro de los paquetes que faltan por enviar. Por convención, si $r > n(t)$, $\sigma^{-1}(\mathbf{r}) := 0$.

Se considera el proceso $\mathcal{S} := (S(t))_{t \in \mathbb{N}}$, con

$$S(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t), s_5(t), s_6(t), s_T(t), \sigma^{-1}(m(t)+1), \tilde{m}(t)),$$

donde

- $s_k(t) := \{\sigma^{-1}(\mathbf{r}) : \mathbf{p}_r \in S_k(t)\}$, $k \in \{1, 3, 4, 6\}$,
- $s_k(t) := \{(\sigma^{-1}(\mathbf{r}), \{\sigma^{-1}(\mathbf{u}) : \mathbf{p}_u \mathcal{R}_D \mathbf{p}_r\}) : \mathbf{p}_r \in S_k(t)\}$, $k \in \{2, 5\}$,
- $s_T(t) := \{\sigma^{-1}(\mathbf{r}) : \mathbf{p}_r \in T(t)\}$, y
- $\tilde{m}(t) := m(t) - m(t-1)$.

Por convención, se definirá $m(-1) = -1$. Notar que, si $k \in \{1, 3, 4, 6\}$, la variable $s_k(t)$ (resp. $s_T(t)$) es un conjunto que contiene los índices de los paquetes que pertenecen al conjunto $S_k(t)$ (resp. $T(t)$) cuando se trasladan los índices al borrar los paquetes ya decodificados. En cambio, si $k \in \{2, 5\}$, la variable $s_k(t)$ contiene duplas cuya primera coordenada indica el índice de los paquetes que pertenecen al conjunto $S_k(t)$, mientras que en la segunda coordenada, se indican los índices de los paquetes que pertenecen a la misma clase de equivalencia según la relación \mathcal{R}_D . Por otro lado, la variable $\tilde{m}(t)$ toma el valor 1 solamente si en el período $t-1$ el líder recibió un paquete y, por lo tanto, su rango aumentó en una unidad.

Lema 5.8. *El proceso \mathcal{S} es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

Demostración. Basta notar que en cada período de tiempo llegará un paquete con probabilidad λ al conjunto $T(t)$, lo que se traduce en agregar un índice al conjunto $s_T(t)$. Posteriormente, según la posición que ocupe el paquete $\mathbf{p}_{m(t)+1}$ entre aquellos paquetes que no han sido decodificados, que está indicado en la variable $\sigma^{-1}(m(t)+1)$, se enviará una combinación de paquetes según las reglas definidas en el Algoritmo 3R, estando los conjuntos involucrados descritos en las variables $s_1(t), \dots, s_6(t)$.

Cada combinación de receptores que reciban la transmisión del paquete de manera exitosa tiene una probabilidad asociada, y dependiendo de aquella combinación se puede calcular el índice que tiene asociado cada receptor (L, N, D) , y por lo tanto, describir nuevamente las variables $s_1(t+1), \dots, s_6(t+1), s_T(t+1)$, actualizando de manera adecuada los índices, eliminando aquellos paquetes que han sido decodificados por los tres receptores. La descripción de las variables $s_2(t)$ y $s_5(t)$ permite conocer las clases de equivalencia que existen y, en consecuencia, saber como serán las nuevas clases después de una recepción.

De igual manera, basta analizar si el líder recibió la transmisión realizada para poder calcular las variables $\sigma^{-1}(m(t+1)+1)$ y $\tilde{m}(t+1)$.

Por lo tanto, la probabilidad que $S(t+1)$ tome un valor particular, solo depende del valor que toma $S(t)$. Y, entonces, el proceso \mathcal{S} es una cadena de Markov. \square

Debido a la estructura de los conjuntos S_2 y S_5 –en clases de equivalencia– resulta difícil analizar el cambio que puede tener el tamaño de aquellos conjuntos entre un período a otro. Puede ser que se elimine una clase completa con una cantidad arbitraria de paquetes,

puede ser que se cree una nueva clase, o puede ser que se unan dos clases y se forme una de mayor tamaño.

Para estudiar *drifts* en los conjuntos los tamaños de los conjuntos $s_2(t)$ y $s_5(t)$, se propone analizar el comportamiento de un proceso que considera aquellos estados de la cadena \mathcal{S} cuando $\tilde{m}(t) = 1$, es decir, cada vez que se renueve el paquete $\mathbf{p}_{m(t)+1}$.

Sea $\bar{\mathcal{S}} := (\bar{S}(\tau))_{\tau \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\bar{S}(\tau) = (s_1(\tau), s_2(\tau), s_3(\tau), s_4(\tau), s_5(\tau), s_6(\tau), s_T(\tau), \sigma^{-1}(m(\tau)+1)),$$

donde las variables involucradas son las mismas que se definieron en el proceso \mathcal{S} . Existirá una transición el estado $\bar{S}(\tau) = \Sigma_\tau$ al estado $\bar{S}(\tau+1) = \Sigma_{\tau+1}$, si existen $t_0 < t_1$ tal que

- $S(t_0) = (\Sigma_\tau, 1)$, $S(t_1) = (\Sigma_{\tau+1}, 1)$,
- $\tilde{m}(t) = 0$, para todo t , $t_0 < t < t_1$, y
- exista una transición válida en el proceso \mathcal{S} entre los estados $S(t)$ y $S(t+1)$, para todo t , $t_0 \leq t < t_1$.

Como \mathcal{S} es una cadena de Markov homogénea, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $t_0 = 0$. Se denotará por $(t_1 : \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{t_1})$, con $\Sigma_0 = \Sigma_\tau$ y $\Sigma_{t_1} = \Sigma_{\tau+1}$, a las transiciones válidas de la cadena \mathcal{S} —exceptuando la última coordenada. Por lo tanto, la probabilidad de transición entre $\bar{S}(\tau)$ y $\bar{S}(\tau+1)$ viene dada por

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [\bar{S}(\tau+1) = \Sigma_{\tau+1} \mid \bar{S}(\tau) = \Sigma_\tau] \\ &= \mathbb{P} [\bar{S}(\tau+1) = \Sigma_{t_1} \mid \bar{S}(\tau) = \Sigma_0] \\ &= \sum_{\substack{t_1, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{t_1} : \\ (t_1 : \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{t_1})}} \mathbb{P} [S(t_1) = (\Sigma_{t_1}, 1), S(t) = (\Sigma_t, 0) \text{ si } 1 \leq t < t_1 \mid S(0) = (\Sigma_0, 1)]. \end{aligned}$$

Es decir, es la suma de las probabilidades de todas las transiciones que llevan al proceso $\bar{\mathcal{S}}$ del estado Σ_0 al estado Σ_{t_1} , respetando las condiciones impuestas.

Al igual que para la cadena \mathcal{S} , como las transiciones solo dependen del estado actual del proceso, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 5.9. *El proceso $\bar{\mathcal{S}}$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto.*

Se cree que el siguiente resultado es cierto.

Conjetura 5.10. *Sea $\Phi(\bar{S}(\tau)) := |s_2(\tau)| + |s_5(\tau)|$. Si la cadena de Markov $\bar{\mathcal{S}}$ posee distribución estacionaria π y $\mathbb{E}_\pi[\Phi(\bar{S}(\tau))]$ es finita. Entonces, $\mathbb{E}_\pi[\Phi(\bar{S}(\tau))] = O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.*

Si bien, la cadena de Markov $\bar{\mathcal{S}}$ tiene *drifts* negativos para el funcional Φ , no posee saltos acotados. Es por esta razón que se estudia una modificación del resultado de Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis (Teorema 3.6, [23]), que permitiría obtener el mismo resultado.

A continuación, se plantean los términos generales para demostrar la generalización del resultado de Bertsimas et al.

5.4. Preliminares

Sea $\mathcal{Q} := (Q(t))_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov a tiempo discreto y homogéneo que toma valores en un conjunto numerable X . En adelante, se asumirá que la cadena de Markov posee distribución estacionaria $\pi : X \rightarrow [0, 1]$. Además, se asume que la cadena de Markov \mathcal{Q} es recurrente positiva, y por lo tanto, existe una única distribución estacionaria π —luego, $\pi(\mathbf{x})$ se puede interpretar como la distribución de probabilidad del estado de equilibrio \mathbf{x} , *i.e.*

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbb{P}_{\mathbf{x} \leftarrow X} [Q(t) = \mathbf{x}],$$

donde $\omega \stackrel{D}{\leftarrow} \Omega$ denota que ω es aleatoriamente escogido en Ω de acuerdo a la distribución de probabilidad D (implícitamente se asume que el soporte de D está contenido en Ω).

Se denotará por \mathbb{R}_+ el conjunto de números reales no negativos, y se fijará una función $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis [23] desarrollan un método para obtener cotas a partir de la distribución estacionaria de cadenas de Markov estables sobre conjuntos de estados numerables. Ellos asumen las siguientes hipótesis:

- 1.- Existe un funcional de Lyapunov que satisface (a excepción de un conjunto acotado) tener una propiedad en que los *drifts* son negativos, y
- 2.- Los saltos del funcional de Lyapunov son uniformemente acotados.

Lo que resulta interesante del trabajo realizado en [23], dejando de lado el problema de la estabilidad de la cadena (lo que ha sido estudiado extensamente), fue un estudio acabado en el comportamiento de la cadena de Markov en sí, y obtener información sobre su distribución estacionaria, si es que existe. Para cadenas de Markov sobre un espacio de estados finitos el problema es relativamente sencillo, la distribución estacionaria puede ser—en principio—determinada resolviendo un sistema lineal. Sin embargo, el problema resulta ser más complicado en el caso en que el conjunto de estados es infinito. Bertsimas et al. en [23] resaltan el hecho de que en el análisis de la estabilidad de las cadenas de Markov usualmente está involucrada la construcción de un funcional de Lyapunov, y el mismo potencial de Lyapunov puede ser utilizado para obtener cotas—con un poco más de esfuerzo—para la cola superior del funcional de Lyapunov. En su trabajo, Bertsimas et al. proponen métodos generales para el análisis del comportamiento de cadenas de Markov sobre espacios de estados numerables, basados en funcionales de Lyapunov y desarrollando ecuaciones de equilibrio, se pueden establecer cotas de tipo exponencial para las distribuciones estacionarias de cadenas de Markov. A continuación, se estudiará el comportamiento de una cadena, donde se ha debilitado una de las hipótesis recién expuestas, en lugar de considerar saltos uniformemente acotados para el funcional de Lyapunov, se considera:

- 2'.- La cola superior de la distribución de incrementos del funcional de Lyapunov (a excepción de un conjunto acotado) posee una cota superior de tipo exponencial.

Bajo este último supuesto, se pueden establecer esencialmente el mismo tipo de cotas superiores que en [23]. Al igual que en [23], el argumento que se utilizará se basa en el hecho de que ciertas ecuaciones de equilibrio se tienen. Sin embargo, el análisis es un tanto más delicado y complicado.

5.5. Resultado Principal

Sean \mathcal{Q} , X , $\pi(\cdot)$, y $\Phi(\cdot)$ definidos al igual que en la sección anterior. Además, se consideran $\phi_0, \delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta \neq 0$. Para un entero m , se denotará $\phi_0 + 2\delta m$ por ϕ_m , y se asocia a $\Phi(\cdot)$ el funcional modificado:

$$\widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) = \max \{ \phi_m, \Phi(\mathbf{x}) \}.$$

En primer lugar, se observa el siguiente resultado.

Lema 5.11. *Si $\mathbb{E}_\pi [\Phi(\mathbf{x})]$ es finito, entonces $\mathbb{E}_\pi [\widehat{\Phi}_m(\mathbf{x})]$ es finito para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Basta observar que $0 \leq \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \Phi(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in X$ y $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$0 \leq \mathbb{E}_\pi [\widehat{\Phi}_m(\mathbf{x})] \leq \phi_m + \mathbb{E}_\pi [\Phi(\mathbf{x})] \leq +\infty.$$

□

Dado que π es la distribución estacionaria, $\mathbb{E}_\pi [\widehat{\Phi}_m(Q(t))] = \mathbb{E}_\pi [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1))]$, luego, por el Lema 5.11,

$$\mathbb{E}_\pi [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) - \widehat{\Phi}_m(Q(t))] = 0.$$

Una forma equivalente de expresar la última ecuación, que será útil para derivar cotas para el funcional $\Phi(Q(t))$, es la siguiente:

$$0 = \sum_{\mathbf{x} \in X} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x}] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right). \quad (5.1)$$

O de igual manera, si se definen

$$E_{bajo}(\phi_m, \delta) = \sum_{\mathbf{x}: \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m - \delta} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x}] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right), \quad (5.2)$$

$$E_{med}(\phi_m, \delta) = \sum_{\mathbf{x}: \phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \delta} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x}] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right), \quad (5.3)$$

$$E_{alto}(\phi_m, \delta) = \sum_{\mathbf{x}: \phi_m + \delta < \Phi(\mathbf{x})} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} [\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x}] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right), \quad (5.4)$$

la Ecuación (5.1) se escribe como sigue:

$$0 = E_{bajo}(\phi_m, \delta) + E_{med}(\phi_m, \delta) + E_{alto}(\phi_m, \delta). \quad (5.5)$$

Como se mencionó en la sección anterior, y motivados por la aplicación en la cota del tamaño de los conjuntos en el algoritmo para tres receptores, se restringirá la atención del estudio en cadenas de Markov y funcionales de Lyapunov que satisfacen una propiedad en particular. Debido a que el potencial $\Phi(\bar{S}(t)) = |s_2(t)| + |s_5(t)|$ no posee necesariamente saltos acotados y, por lo tanto, no se cumple la hipótesis 2.- (página 44), se define la siguiente propiedad.

Definición 5.12 (Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos). Se dirá que (\mathcal{Q}, Φ) satisface la Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos si existe $\chi = \chi(\phi_0, \delta) > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \\ & \leq \begin{cases} \chi^{2m+1}, & \text{si } \mathbf{x} \in X \text{ es tal que } \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_0 - \delta, \\ \chi^{2(m-s)-1}, & \text{si } s \in \{0, \dots, m-1\} \text{ y } \mathbf{x} \in X \text{ es tal que } \phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_s + \delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Notar que la Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos no excluye el hecho de que $\Phi(Q(t+1)) - \Phi(Q(t))$ tome valores arbitrariamente grandes, pero de cierto modo dice que tales eventos son poco probables. Se cree que para la aplicación que se le quiere dar uso al principal resultado que se demostrará más adelante –es decir, para el análisis del algoritmo 3R–, dados una cadena y un funcional (\mathcal{Q}, Φ) , la elección de (ϕ_0, δ) se podrá realizar de tal forma que se satisfaga la Propiedad de decaimiento geométrico con un valor relativamente pequeño para $\chi = \chi(\phi_0, \delta)$.

A continuación se probará un resultado previo, que dado (\mathcal{Q}, Φ) que satisfaga la Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos para $\chi = \chi(\phi_0, \delta) > 0$, establece una cota superior para $E_{bajo}(\phi_0, \delta)$ en términos de la probabilidad de la cola superior de $\Phi(Q(t))$ y de χ .

Lema 5.13. *Si (\mathcal{Q}, Φ) satisface la Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos para $\chi = \chi(\phi_0, \delta) > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} E_{bajo}(\phi_0, \delta) & \leq \chi^{2m+1} - \chi \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\ & \quad + (1 - \chi^2) \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Demostración. Basta notar que

$$\begin{aligned}
E_{bajo}(\phi_0, \delta) &= \sum_{\mathbf{x}: \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_0 - \delta} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right) \\
&\quad + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{\mathbf{x}: \phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_s + \delta} \pi(\mathbf{x}) \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right) \\
&\leq \chi^{2m+1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_0 - \delta] + \sum_{s=0}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_s + \delta] \\
&= \chi^{2m+1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_0 - \delta] \\
&\quad + \sum_{s=0}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot (\mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x})] - \mathbb{P}_\pi [\phi_{s+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})]) \\
&= \chi^{2m+1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_0 - \delta] + \chi^{2m-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_0 - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\
&\quad - \chi \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] + (1 - \chi^2) \cdot \sum_{s=1}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\
&= \chi^{2m+1} + (1 - \chi^2) \cdot \chi^{2m-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_0 - \delta < \Phi(\mathbf{x})] - \chi \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\
&\quad + (1 - \chi^2) \cdot \sum_{s=1}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\
&= \chi^{2m+1} - \chi \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\
&\quad + (1 - \chi^2) \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta < \Phi(\mathbf{x})].
\end{aligned}$$

□

Con esto, se puede demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.14. *Sea $\mathcal{Q} = (Q(t))_{t \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov a tiempo discreto y homogéneo que toma valores en un conjunto numerable X y que tiene una única distribución estacionaria $\pi : X \rightarrow [0, 1]$. Sea $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\mathbb{E}_\pi [\Phi(\mathbf{x})]$ es finita. Si, para $\phi_0 \in \mathbb{R}_+$ y $\delta > 0$, se cumplen las siguientes condiciones:*

1. (\mathcal{Q}, Φ) *satisface la Propiedad de decaimiento geométrico con (ϕ_0, δ) -saltos.*
2. *Existen $M_{med}(\phi_0, \delta) > 0$ y $0 > M_{alto}(\phi_0, \delta)$ tal que*

$$\begin{aligned}
M_{med}(\phi_0, \delta) &\geq \max_{m \in \mathbb{N}} \max_{\mathbf{x}: \phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \delta} \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right), \\
M_{alto}(\phi_0, \delta) &\geq \max_{m \in \mathbb{N}} \max_{\mathbf{x}: \phi_m + \delta < \Phi(\mathbf{x})} \left(\mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned}$$

3. *Existe $\epsilon = \epsilon(\phi_0, \delta)$ tal que $1 > \epsilon > \chi^2$, y*

$$\epsilon \geq \frac{\chi \cdot \left(1 - \epsilon + \frac{1 - \chi^2}{\epsilon - \chi^2} \right) + M_{med}(\phi_0, \delta)}{M_{med}(\phi_0, \delta) - M_{alto}(\phi_0, \delta)},$$

entonces $\mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta \leq \Phi(\mathbf{x})] \leq \epsilon^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por contradicción. Se asume que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \in \{0, \dots, m\}$

$$\mathbb{P}_\pi [\phi_s - \delta \leq \Phi(\mathbf{x})] \leq \epsilon^s, \quad (5.7)$$

y

$$\mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta \leq \Phi(\mathbf{x})] > \epsilon^{m+1}. \quad (5.8)$$

Se asumirá que m es el entero no negativo más pequeño que cumple las condiciones anteriores.

Por monotonía de $\mathbb{P}[\cdot]$ y (5.8), para todo $\mathbf{x} \in X$, se cumple que

$$\mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \geq \mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \geq \epsilon^{m+1}.$$

Luego, del Lema 5.13, la cota en (5.7), y la hipótesis de que $\epsilon > \chi^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} E_{bajo}(\phi_0, \delta) &\leq \chi \cdot \epsilon^m - \chi \cdot \epsilon^{m+1} + (1 - \chi^2) \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \chi^{2(m-s)-1} \cdot \epsilon^s \\ &\leq \chi \cdot \epsilon^m \cdot (1 - \epsilon) + (1 - \chi^2) \cdot \chi^{2m-1} \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\epsilon}{\chi^2} \right)^s \\ &= \chi \cdot \epsilon^m \cdot (1 - \epsilon) + (1 - \chi^2) \cdot \chi \cdot \frac{\epsilon^m - \chi^{2m}}{\epsilon - \chi^2} \\ &\leq \chi \cdot \epsilon^m \cdot \left(1 - \epsilon + \frac{1 - \chi^2}{\epsilon - \chi^2} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, por hipótesis, de (5.3), (5.4) y dado que $\phi_m + \delta = \phi_{m+1} - \delta$, se tiene que

$$\begin{aligned} E_{med}(\phi_m, \delta) &\leq M_{med}(\phi_0, \delta) \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \delta], \\ &= M_{med}(\phi_0, \delta) \cdot (\mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] - \mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})]), \\ E_{alto}(\phi_m, \delta) &\leq M_{alto}(\phi_0, \delta) \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m + \delta < \Phi(\mathbf{x})] = M_{alto}(\phi_0, \delta) \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Reemplazando en (5.5) las cotas superiores de $E_{alto}(\phi_0, \delta)$, $E_{med}(\phi_0, \delta)$ y $E_{bajo}(\phi_0, \delta)$ recién establecidas, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi \cdot \epsilon^m \cdot \left(1 - \epsilon + \frac{1 - \chi^2}{\epsilon - \chi^2} \right) + M_{med}(\phi_0, \delta) \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \\ &\quad - (M_{med}(\phi_0, \delta) - M_{alto}(\phi_0, \delta)) \cdot \mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})]. \end{aligned}$$

Luego, por (5.7),

$$\mathbb{P}_\pi [\phi_{m+1} - \delta < \Phi(\mathbf{x})] \leq \epsilon^m \cdot \frac{\chi \cdot \left(1 - \epsilon + \frac{1 - \chi^2}{\epsilon - \chi^2} \right) + M_{med}(\phi_0, \delta)}{M_{med}(\phi_0, \delta) - M_{alto}(\phi_0, \delta)}.$$

Sin embargo, por hipótesis, el término de la derecha de la última ecuación está acotado superiormente por ϵ^{m+1} , lo que contradice (5.8). \square

La relevancia del Teorema 5.14 se basa en el siguiente resultado, que dada una variable aleatoria $U = \Phi(Q(t))$ que satisface la conclusión del resultado anterior, permite obtener una cota para $\mathbb{E}[U]$.

Proposición 5.15. *Sea U una variable aleatoria no negativa a valores reales, tal que para $\phi_0, \delta \in \mathbb{R}_+$, $\delta \neq 0$, existen constantes $P, N, \psi > 0$ (posiblemente dependientes de ϕ_0 y δ), con $\psi < N$, y tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\mathbb{P}[\phi_m - \delta < U] \leq \left(\frac{\psi + P}{P + N} \right)^m.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}[U] \leq \phi_0 - \delta + 2\delta \cdot \frac{P + N}{N - \psi}.$$

Demostración. Observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &\leq (\phi_0 - \delta) \cdot \mathbb{P}[U \leq \phi_0 - \delta] + \sum_{m \in \mathbb{N}} (\phi_m + \delta) \cdot \mathbb{P}[\phi_m - \delta < U \leq \phi_m + \delta] \\ &= (\phi_0 - \delta) + 2\delta \cdot \sum_{m \in \mathbb{N}} (m + 1) \cdot \mathbb{P}[\phi_m - \delta < U \leq \phi_{m+1} - \delta] \\ &= (\phi_0 - \delta) + 2\delta \cdot \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[\phi_m - \delta < U]. \end{aligned}$$

Yor hipótesis, se obtiene que

$$\mathbb{E}[U] \leq (\phi_0 - \delta) + 2\delta \cdot \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\frac{\psi + P}{P + N} \right)^m = \phi_0 - \delta + 2\delta \cdot \frac{P + N}{N - \psi}.$$

Notar que, como $\psi < N$, se tiene $\frac{\psi + P}{P + N} < 1$. □

Para poder aplicar el Teorema 5.14 con el objetivo de probar la Conjetura 5.10, se cree que se puede escoger ϕ_0 y δ de manera tal que $\chi = \chi(\phi_0, \delta)$ sea pequeño y $\epsilon = \epsilon(\phi_0, \delta)$ sea cercano (pero menor) a 1. La Proposición 5.15 permitiría entonces concluir que, en régimen estacionario, la esperanza de $\Phi(\bar{S}(t))$ sería $O\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$, donde $1 - \rho$ sería un valor pequeño cercano a $M_{alto}(\phi_0, \delta)/M_{bajo}(\phi_0, \delta)$.

5.6. Otro Resultado

A continuación, se muestra un resultado que puede ser útil para acotar $M_{med}(\cdot, \cdot)$. Se denota, para $\omega \in \Omega$ escogido según alguna distribución y $A \subseteq \Omega$, la indicatriz del evento $\omega \in A$ como $\mathbb{I}_A(\omega)$, i.e., $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ y 0 en caso contrario.

Proposición 5.16. *Sean $\mathcal{Q}, \Phi, \pi, \phi_0$ y δ definidos como en el Teorema 5.14. Entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{x} \in X$ tal que $\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \delta$,*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \middle| Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \\ &\leq \mathbb{E} \left[(\Phi(Q(t+1)) - \Phi(\mathbf{x})) \mathbb{I}_{\{\Phi(Q(t+1)) > \Phi(\mathbf{x})\}} \middle| Q(t) = \mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, notar que para dos estados $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$, solo una de las dos posibilidades siguientes se pueden dar, dependiendo de si $\Phi(\mathbf{x}') > \Phi(\mathbf{x})$ o $\Phi(\mathbf{x}') \leq \Phi(\mathbf{x})$, respectivamente. Se cumple

$$0 \leq \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}') - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \leq \Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}),$$

o

$$\Phi(\mathbf{x}') - \Phi(\mathbf{x}) \leq \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}') - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \leq 0.$$

Luego, para todo $\mathbf{x} \in X$ tal que $\phi_m - \delta < \Phi(\mathbf{x}) \leq \phi_m + \delta$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) - \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x}) \right) \mathbb{I}_{\{\widehat{\Phi}_m(Q(t+1)) > \widehat{\Phi}_m(\mathbf{x})\}} \mid Q(t) = \mathbf{x} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left(\Phi(Q(t+1)) - \Phi(\mathbf{x}) \right) \mathbb{I}_{\{\Phi(Q(t+1)) > \Phi(\mathbf{x})\}} \mid Q(t) = \mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

Obteniéndose el resultado deseado. □

Capítulo 6

Conclusión y Trabajo Futuro

La presente memoria se ha enfocado en el estudio de un algoritmo de transmisión de datos, bajo el contexto de *network coding*. En particular, se analiza el modelo estudiado por Sundararajan, Shah y Médard en [14, 19]. En estos mismos trabajos, se estudia la optimalidad de algoritmos de transmisión de manera genérica, entregando cotas inferiores y superiores para los tiempos esperados que permanece un paquete en el sistema, cuando se realiza un análisis asintótico –haciendo tender a 1 el factor de carga, que se define como la razón entre la tasa de llegada de los paquetes y la tasa con que los paquetes son transmitidos a los receptores. Estas cotas permiten determinar la optimalidad de los algoritmos estudiados en el presente trabajo.

En primera instancia, se estudia un algoritmo de transmisión para el caso de dos receptores –el cual respeta la Propiedad de innovación– y, utilizando argumentos de potencial de Lyapunov sobre la distribución estacionaria de la cadena de Markov que describe el proceso, se demuestra en el Teorema 3.7 y el Corolario 3.8 que el algoritmo es optimal, es decir, el tiempo esperado del retraso de decodificación por paquete es $\Theta\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$. Para la demostración se utiliza resultados obtenidos por Bertsimas, Gamarnik y Tsitsiklis en [23].

Posteriormente, basados en el trabajo realizado por Barros, Costa, Munaretto y Widmer [20] –donde se habla del concepto de mantener el retraso de los receptores acotado–, se estudia si es posible tener un algoritmo para dos receptores se pueda mantener la optimalidad mientras se fija una barrera en el retraso del receptor que tiene la desventaja. El algoritmo deja de lado la Propiedad de innovación con el objetivo de acotar el retraso. Sin embargo, el Lema 4.9 no permite concluir que se pueda acotar la desventaja entre los receptores. De hecho, indica que para seguir teniendo un algoritmo asintóticamente óptimo, la barrera debe ser del mismo orden que el retraso, *i.e.*, $\Omega\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$.

Por último, se finaliza con un análisis del algoritmo propuesto en [19] para el caso de tres receptores, donde se conjetura que el algoritmo es asintóticamente óptimo. En la presente memoria se realiza un análisis de una cadena de Markov que describe los conjuntos que surgen en la especificación del algoritmo que decide la transmisión de los paquetes. Resulta difícil estudiar el comportamiento de la cadena, y se conjetura que el tamaño de los conjuntos se comportan de manera óptima. En vías de poder probar esta última conjetura, se generaliza el resultado de Bertsimas et al. relajando las hipótesis, obteniendo el mismo tipo de conclusiones para acotar funcionales de Lyapunov. En un trabajo futuro, se cree que estos resultados facilitarían el estudio del caso de tres receptores, para poder concluir que el algoritmo es asintóticamente óptimo, tal como se conjetura en [19].

Bibliografía

- [1] Raymond W. Yeung y Zhen Zhang. Distributed Source Coding for Satellite Communications. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(4):1111–1120, 1999.
- [2] Rudolf Ahlswede, Ning Cai, Shuo-Yen Robert Li y Raymond W. Yeung. Network Information Flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(4):1204–1216, 2000.
- [3] Raymond W. Yeung, Shuo-Yen Robert Li, Ning Cai y Zhen Zhang. Network Coding Theory. *Foundations and Trends® in Communications and Information Theory*, 2(4,5):241–381, 2005.
- [4] Raymond W. Yeung. *Information Theory and Network Coding*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1era edición, 2008.
- [5] Tracey Ho. *Networking from a Network Coding Perspective*. Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, 2004.
- [6] Dong Nguyen, Tuan Tran, Thinh Nguyen y Bella Bose. Wireless Broadcast Using Network Coding. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(2):914–925, 2009.
- [7] Qin Guo, Mingxing Luo, Lixiang Li y Yixian Yang. Secure Network Coding against Wiretapping and Byzantine Attacks. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010(17):1–13, 2010.
- [8] Christos Gkantsidis y Pablo Rodriguez. Network Coding for Large Scale Content Distribution. En *IEEE Infocom*, volume 4, páginas 2235–2245, 2005.
- [9] Yunnan Wu, Philip A. Chou y Sun-Yuan Kung. Information Exchange in Wireless Networks with Network Coding and Physical-layer Broadcast. Reporte Técnico *MSR-TR-2004-78*, Microsoft Research, 2004.
- [10] Amir Salman Avestimehr, Suhas N. Diggavi y David N. C. Tse. Wireless Network Information Flow: A Deterministic Approach. *CoRR*, abs/0906.5394, 2009.
- [11] Xiumin Wang, Jianping Wang y Yinlong Xu. Data Dissemination in Wireless Sensor Networks with Network Coding. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010(2):1–14, 2010.
- [12] Shengli Zhang y Soung Chang Liew. Applying Physical-layer Network Coding in Wireless Networks. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010(1):1–12, 2010.

-
- [13] Xiaohang Li, Chih-Chun Wang y Xiaojun Lin. Throughput and Delay Analysis on Uncoded and Coded Wireless Broadcast with Hard Deadline Constraints. En *IEEE Infocom*, páginas 1–5, 2010.
- [14] Jay Kumar Sundararajan, Devavrat Shah y Muriel Médard. ARQ for Network Coding. *CoRR*, abs/0802.1754, 2008.
- [15] Parastoo Sadeghi, Danail Traskovy Ralf Koetter. Adaptive Network Coding for Broadcast Channels. En *Workshop on Network Coding Theory and Applications*, páginas 80–85, 2009.
- [16] Parastoo Sadeghi, Ramtin Shams y Danail Traskov. An Optimal Adaptive Network Coding Scheme for Minimizing Decoding Delay in Broadcast Erasure Channels. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2010(4):1–14, 2010.
- [17] Jay Kumar Sundararajan, Devavrat Shah y Muriel Médard. Online Network Coding for Optimal Throughput and Delay – the Two-receiver Case. *CoRR*, abs/0806.4264, 2008.
- [18] Jay Kumar Sundararajan, Parastoo Sadeghi y Muriel Médard. A Feedback-based Adaptive Broadcast Coding Scheme for Reducing In-order Delivery Delay. En *Workshop on Network Coding Theory and Applications*, páginas 1–6, 2009.
- [19] Jay Kumar Sundararajan, Devavrat Shah y Muriel Médard. Feedback-based Online Network Coding. *CoRR*, abs/0904.1730, 2009.
- [20] João Barros, Rui A. Costa, Daniele Munaretto y Jörg Widmer. Effective Delay Control in Online Network Coding. En *IEEE Infocom*, páginas 208–216, 2009.
- [21] Mathilde Durvy, Christina Fragouli en Patrick Thiran. Towards Reliable Broadcasting using ACKs. En *IEEE International Symposium on Information Theory*, páginas 1156–1160, 2007.
- [22] Joerg Widmer. Comunicación privada, 2011.
- [23] Dimitris Bertsimas, David Gamarnik y John N. Tsitsiklis. Geometric Bounds for Stationary Distributions of Infinite Markov Chains via Lyapunov Functions. Reporte Técnico, Massachusetts Institute of Technology, Department of Economics, 1998.
- [24] John D. C. Little. A Proof for the Queuing Formula: $L = \lambda W$. *Operations Research*, 9(3):383–387, 1961.