



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DE UNA DINÁMICA ADAPTATIVA PARA JUEGOS REPETIDOS Y SU
APLICACIÓN A UN JUEGO DE CONGESTIÓN.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FELIPE ANDRÉ MALDONADO CARO

PROFESOR GUÍA:
ROBERTO MARIO COMINETTI COTTI-COMETTI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARIO BRAVO GONZÁLEZ
JOSÉ CORREA HAEUSSLER
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

SANTIAGO DE CHILE
DICIEMBRE 2012

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: FELIPE MALDONADO CARO
FECHA: 19/12/2012
PROF. ROBERTO COMINETTI

ESTUDIO DE UNA DINÁMICA ADAPTATIVA EN JUEGOS REPETIDOS Y UNA APLICACIÓN A UN JUEGO DE CONGESTIÓN..

El propósito de esta memoria es estudiar un modelo de aprendizaje en juegos repetidos. A diferencia de otros esquemas estudiados en la literatura, en este caso se estudia una situación en que los jugadores disponen de muy poca información, pudiendo observar solamente el pago recibido en cada etapa pero sin observar las estrategias usadas por los demás jugadores ni sus correspondientes pagos. En base a la información individual recolectada a medida que se desarrolla el juego, cada jugador genera una percepción del pago esperado de las distintas estrategias puras, y en base a estas percepciones adapta su comportamiento para las siguientes etapas del juego.

En el capítulo **1** se presentan los modelos de las principales referencias bibliográficas, junto a los resultados mas relevantes que allí se obtienen. Se definen además las instancias y variantes a los modelos anteriores con las que se trabajará a lo largo de esta memoria.

El capítulo **2** contiene todas las herramientas técnicas y conocimientos previos que fueron necesarias para desarrollar los resultados obtenidos. Se comienza con una sección de introducción a la topología diferencial, cuya principal referencia es el texto *Topology from the differentiable viewpoint* de Milnor, donde el resultado de mayor interés es el conocido Teorema de Poincaré-Hopf. En la siguiente sección se describen resultados referentes a martingalas, diferencias de martingalas y algunos teoremas de convergencia. La última sección está dedicada a estudiar los algoritmos de aproximación estocástica, basado en trabajos de las principales referencias en el tema, como Benaïm, Chen y Kushner.

El capítulo **3** está dedicado a estudiar el proceso de aprendizaje propuesto, que consiste en una regla de actualización de las percepciones de los jugadores sobre su espacio de estrategias puras al enfrentarse a un juego repetido, los resultados asintóticos (cuando la iteración n tiende a ∞) guarda estrecha relación con una dinámica continua asociada, cuyos puntos estacionarios corresponden a los equilibrios de Nash de un juego potencial subyacente. Bajo la regla de decisión Logit y algunas condiciones sobre los parámetros del modelo, se obtienen interesantes resultados de convergencia casi segura y con probabilidad positiva a atractores de la dinámica continua.

Finalmente en el capítulo **4** se estudia el modelo de Cominetti et al. [7], para unas instancias específicas (caso de 2 y 3 jugadores con 2 rutas) con el objetivo de contar a cantidad de equilibrios del sistema.

AGRADECIMIENTOS

Comienzo agradeciendo a mi familia por acompañarme en este proceso, particularmente a mi madre, mis tíos Jaime y Cecilia, a mis primas Fran y Dani, y por supuesto a mi hermanito Oscar, por todo el amor y alegría que le entrega a mi vida.

En esta memoria tuve la oportunidad de trabajar con el que a mi gusto fue el mejor profesor que tuve en mi paso por la Universidad, le agradezco al profesor Roberto Cominetti por su paciencia y entusiasmo con el tema que estuvimos desarrollando por más de un año y por haber tenido la posibilidad de ser su profesor auxiliar en un curso tan interesante como es Teoría de Juegos. Agradezco también a los miembros de la comisión, los profesores José Correa, Jaime San Martín y Mario Bravo, quienes tuvieron la mejor disponibilidad para discutir temas relacionado con esta memoria.

Mi paso por la Universidad ha sido una experiencia increíble, tener clases y/o trabajar con tan buenos profesores, a quienes les apasiona los temas con los que trabajan es algo impagable, entre ellos hago un especial reconocimientos a los anteriormente mencionados y además a los profesores: José Maza, Patricio Felmer, Carlos Conca, Alejandro Jofré, Michal Kowalczyk y Abderrahim Hantoute. Aprovecho de agradecer también al CMM y al ISCI, por su constante difusión de conocimientos a través de Seminarios y Charlas; agradezco además al ISCI por brindarme apoyo financiero para participar en ELAVIO 2012, que fue una experiencia inolvidable. Agradezco también al financiamiento para el desarrollo de esta memoria, provisto por el proyecto FONDECYT 1100046.

Agradezco a mis mejores amigos, por incontables momentos gratos vividos, abrazos gigantes a Jannik, Leo, Johanna, Paci y Marita. No puedo dejar de mencionar a los amigos hechos en mi paso por plan común y el DIM, por tantas tardes y noches de estudio, comida y risas: muchas gracias Guille, Ságuila, Víctor, Donoso, Rocco, Robert, Johan, Abelino, Mónica, Poly, Amitai, Vale, Álvaro, Niko, Pancho y obviamente a los Chanchos: Franco, Tata, Mauricio y el Rey César. También agradezco a Unda, Cristóbal y Zuñi por las interesantes conversaciones que tuvimos sobre nuestros trabajos.

Antes de terminar, quería agradecer a los míticos amigos del colegio, con quienes tratamos siempre de mantenernos en contacto, aunque ya hayan pasado 7 años desde que salimos, siempre es un agrado reunirse con los contertulios César, Jalil, Rulo, Rata, Colorín y Manolito. Tampoco puedo dejar afuera de mis agradecimientos a mis profesores de básica y media que más me incentivaron a seguir una carrera relacionada con matemáticas, muchas gracias profesores Ricardo Padilla (qepd) y Fernando Pavez.

Finalmente agradecerle a mi polola, Coni, por hacerme tan feliz día a día y por acompañarme aún a la distancia, con ella cobra todo sentido la frase *La felicidad sólo es real cuando es compartida.*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Primer modelo	2
1.1.1. El Modelo	2
1.1.2. Principales Resultados	4
1.2. Segundo modelo.	6
1.2.1. Variantes	6
1.2.2. Principales Resultados	7
1.3. Modelo propuesto	9
1.3.1. Variante del Segundo Modelo	9
1.3.2. Estudio Detallado del Juego de Congestión para el Primer Modelo	9
2. Herramientas Técnicas	10
2.1. Teorema de Poincaré-Hopf	10
2.1.1. Variedades y Homotopías	10
2.1.2. Grado de Brouwer	12
2.1.3. Índice, Característica de Euler y Teorema de Poincaré-Hopf	13
2.2. Martingalas y Teoremas de Convergencia	15
2.3. Algoritmos de Aproximación Estocástica	16
2.3.1. Pseudotrayectorias Asintóticas	17
2.3.2. Pseudotrayectorias Asintóticas y Procesos de Aproximación Estocástica	17
2.3.3. Conjuntos Límites de Pseudotrayectorias Asintóticas	20
2.3.4. Dinámica de Pseudotrayectorias Asintóticas	22
2.3.5. Convergencia con Probabilidad Positiva Hacia un Atractor	23
2.3.6. Otros Resultados Relevantes	25
3. Dinámica Adaptativa y Resultados de Convergencia	26
3.1. Definición del Modelo	26
3.1.1. Regla de actualización	26
3.2. Análisis Asintótico	27
3.3. Regla Logit	35
3.3.1. Convergencia casi segura	35
3.3.2. Convergencia con probabilidad positiva	42
3.3.3. Un juego de congestión	53

4. Estudio en Detalle del Juego de Congestión de Cominetti-Melo-Sorin para Instancias Pequeñas	58
4.1. Caso 2 jugadores, 2 rutas	58
4.2. Caso 3 jugadores, 2 rutas	69
4.2.1. Caso simétrico	70
4.2.2. Caso Semisimétrico	71
5. Conclusiones y Problemas Abiertos	77
5.1. Aportes Realizados	77
5.2. Trabajo Futuro	78
Bibliografía	79

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se estudia un modelo de una dinámica adaptativa para un juego repetido de N personas, en donde se considera un comportamiento míope de los jugadores, en el sentido que adaptan su comportamiento basado sólo en experiencias pasadas, no permitiendo anticiparse a las acciones de los otros jugadores.

La decisión que un jugador pueda tomar en cada etapa depende fuertemente de la información que éste tiene disponible. En la literatura se pueden encontrar distintos enfoques para abordar tales situaciones. *Fictitious Play* por ejemplo, es uno de los procedimientos mejores estudiados (ver [Fudenberg and Levine](#)). Los jugadores adaptan su comportamiento utilizando la mejor respuesta a las jugadas promedio utilizadas por los oponentes a lo largo del tiempo. En este caso, cada jugador requiere conocer su propia función de pago y recibir información completa respecto a las estrategias de los demás jugadores. Un modelo menos restrictivo es cuando cada jugador es informado de todos los posibles pagos que podría haber recibido utilizando estrategias alternativas, un ejemplo de este tipo de procesos adaptativos es el procedimiento exponencial (ver [Freund and Schapire](#)).

En el modelo que se presentará en el transcurso de esta memoria se supone que los jugadores eligen sus estrategias mediante una regla de decisión que depende de una variable de estado. Tal variable de estado será actualizada mediante alguna regla que estará basada en la experiencia previa y el pago asociado a utilizar determinada estrategia. Un modelo muy estudiado que aborda una situación como la descrita es el procedimiento *cumulative reinforcement learning*, donde los jugadores conservan un vector de percepción, en el cual cada coordenada representa el desempeño de la estrategia correspondiente y la regla de actualización es definida agregando el pago recibido de utilizar alguna estrategia a la percepción previa siempre que haya sido utilizada.

Acá se considera una regla de actualización particular, donde los jugadores mantienen un vector de percepción de sus estrategias puras y tal vector es actualizado en la coordenada que corresponde a la estrategia utilizada (dejando las demás coordenadas igual a la etapa anterior) mediante un promedio entre el pago observado y la percepción previa, el proceso resultante es entonces una variante de lo presentado en las principales referencias de este trabajo, que para mayor claridad se describen a continuación:

1.1. Primer modelo

Este modelo es presentado en el artículo *A payoff-based learning procedure and its application to traffic games* [7](Cominetti-Melo-Sorin).

1.1.1. El Modelo

Se introduce un modelo dinámico del comportamiento adaptativo en un juego repetido, en el cual cada jugador ajusta su estrategia en base a los pagos observados anteriores mientras el juego evoluciona.

Sea $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ el espacio de los jugadores. Cada jugador $i \in \mathcal{P}$ está caracterizado por un conjunto finito S^i de estrategias puras y por una función de pago $G^i : S^i \times S^{-i} \rightarrow \mathbb{R}$, con $S^{-i} = \prod_{j \neq i} S^j$. Se denota por $\Delta^i = \{z \in \mathbb{R}^{|S^i|} : z^i \geq 0, \sum_i z^i = 1\}$ el espacio de estrategias mixtas sobre S^i , y se define $\Delta = \prod_{i \in \mathcal{P}} \Delta^i$. $G^i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ es la extensión multilinear de la función de pagos al conjunto de estrategias mixtas.

El juego se repite indefinidamente. En la etapa n , cada jugador $i \in \mathcal{P}$ selecciona su jugada $s_n^i \in S^i$ de manera aleatoria utilizando estrategias mixtas $\pi_n^i = \sigma^i(x_n^i) \in \Delta^i$, que dependen del vector $x_n^i = (x_n^{is})_{s \in S^i}$ que representa la percepción del pago de las estrategias puras disponibles. La función $\sigma^i : \mathbb{R}^{S^i} \rightarrow \Delta^i$ es un mapeo continuo del espacio de las percepciones al espacio de estrategias mixtas. Se asume adicionalmente que $\sigma^{is}(\cdot)$ es estrictamente positiva $\forall s \in S^i$.

Al final de la etapa, el jugador i observa su propio pago $g_n^i = G^i(s_n^i, s_n^{-i})$, y utiliza sólo esta información para ajustar su percepción de los resultados obtenidos con la estrategia escogida (y mantiene sin modificar el resto de estrategias), esto es,

$$x_{n+1}^{is} = \begin{cases} (1 - \gamma_n)x_n^{is} + \gamma_n g_{n+1}^i & \text{si } s = s_{n+1}^i, \\ x_n^{is} & \text{si no,} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\gamma_n \in (0, 1)$ es una secuencia de ponderadores deterministas tales que $\sum_n \gamma_n = \infty$ y $\sum_n \gamma_n^2 < \infty$ (por ejemplo $\gamma_n = \frac{1}{n}$). La dinámica (1.1) puede ser reescrita como sigue:

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_n [w_n - x_n], \quad (1.2)$$

con

$$w_n^{is} = \begin{cases} g_{n+1}^i & \text{si } s = s_{n+1}^i, \\ x_n^{is} & \text{si no.} \end{cases} \quad (1.3)$$

En el siguiente capítulo se detallarán las herramientas utilizadas para los análisis realizados, en particular (1.2) (al dividirla por un parámetro pequeño γ_n) se puede interpretar como la iteración de diferencias finitas de Euler, sin embargo el lado derecho no es determinista, haciéndose necesaria la introducción de la teoría de algoritmos estocásticos ([13],[14]) que establece, entre otros resultados, una conexión entre los resultados asintóticos de un proceso aleatorio a tiempo discreto (1.2) para $n \rightarrow \infty$ y el comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$ de una dinámica determinística a tiempo continuo

$$\frac{dx}{dt} = \mathbb{E}(w|x) - x, \quad (1.4)$$

donde $\mathbb{E}(\cdot|x)$ corresponde a la esperanza inducida por las estrategias mixtas $\sigma^i(x^i)$.

Se considera ahora el espacio de percepciones $\Omega = \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathbb{R}^{|S^i|}$ y $\Sigma : \Omega \rightarrow \Delta$ el perfil de estrategias mixtas de los jugadores en el estado x , dado por $\Sigma(x) = (\sigma^i(x^i))_{i \in \mathcal{P}}$.

Se introduce el mapeo $C : \Omega \rightarrow \Omega$ de vectores de pagos esperados como función del estado

$$C(x) = F(\Sigma(x)), \quad (1.5)$$

con $F : \Delta \rightarrow \Omega$ dada por $F(\pi) = (F^i(\pi))_{i \in \mathcal{P}}$, donde $F^i(\pi) = (F^{is}(\pi))_{s \in S^i}$ es el vector de pagos esperados del jugador i , esto es,

$$F^{is}(\pi) = G^i(s, \pi^{-i}). \quad (1.6)$$

Esto último representa el pago esperado del jugador i cuando elige $s \in S^i$ y los otros jugadores usan estrategias mixtas $\{\pi^j\}_{j \neq i}$. Notar que F^i no depende de π^i y que $G^i(\pi) = \langle \pi^i, F^i(\pi) \rangle$.

La dinámica (1.4) puede representarse como

$$\frac{dx^{is}}{dt} = \sigma^{is}(x^i)[C^{is}(x) - x^{is}] := \Phi^{is}(x(t)) \quad (1.7)$$

Para más detalle sobre esto, ver [7], pag 5.

A (1.7) se le llama la *dinámica adaptativa* asociada al *proceso de aprendizaje* (1.2).

Puntos Estacionarios y Juego Perturbado

De acuerdo a resultados generales sobre algoritmos estocásticos, los puntos estacionarios de la dinámica continua (1.7) son candidatos naturales para ser puntos límites (en un sentido que se definirá más adelante) para el proceso estocástico (1.2). Del hecho que $\sigma^{is}(x^i) > 0$ estos puntos estacionarios son puntos fijos del mapeo $x \mapsto C(x)$.

Se denota por \mathcal{E} al conjunto de puntos estacionarios de (1.7). Notar que un punto $x \in \mathcal{E}$ queda completamente caracterizado por su imagen $\pi = \Sigma(x)$, esto pues, la ecuación de punto fijo $x = C(x)$ se puede escribir como un sistema acoplado en (x, π)

$$\begin{cases} \pi &= \Sigma(x), \\ x &= F(\pi). \end{cases} \quad (1.8)$$

Una elección particular para el mapeo $\sigma^i(\cdot)$ viene dada por la regla Logit,

$$\sigma^{is}(x^i) = \frac{\exp(\beta_i x^{is})}{\sum_{a \in S^i} \exp(\beta_i x^{ia})}, \quad (1.9)$$

donde el parámetro $\beta_i > 0$ tiene un efecto suavizante cuando $\beta_i \downarrow 0$ llevando a una elección uniforme, mientras que para $\beta_i \uparrow \infty$ la probabilidad se concentra en las estrategias puras con percepciones más altas.

Bajo la fórmula de elección Logit la correspondencia uno a uno entre los puntos estacionarios y los π 's asociados permiten establecer un enlace entre el conjunto \mathcal{E} y los equilibrios de Nash para un juego \mathcal{G} de N personas definido por su espacio de estrategias Δ^i para $i \in \mathcal{P}$ y una función de pagos $\mathcal{G}^i : \Delta^i \times \Delta^{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{G}^i(\pi) = \langle \pi^i, F^i(\pi) \rangle - \frac{1}{\beta_i} \sum_{s \in S^i} \pi^{is} [\ln(\pi^{is}) - 1],$$

el cual es una perturbación del juego original por un término de entropía.

Proposición 1.1.1 ([7, Proposición 3]). *Si el mapeo $\sigma^i(\cdot)$ viene dado por la regla Logit (1.9) entonces $\Sigma(\mathcal{E})$ es el conjunto de los equilibrios de Nash del juego perturbado \mathcal{G} .*

1.1.2. Principales Resultados

Convergencia Asintótica de las Dinámicas

Teorema 1.1.2 ([7, Teorema 4]). *Si $C : \Omega \rightarrow \Omega$ es una $\|\cdot\|_\infty$ -contracción, entonces su único punto fijo $\bar{x} \in \Omega$ es un atractor global para la dinámica adaptativa (1.7) y el proceso de aprendizaje (1.2) converge casi seguramente a \bar{x} .*

Se considera ahora $\omega := \max_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j \neq i} \beta_j$ y θ una cota superior sobre el impacto del pago de los jugadores cuando un sólo jugador cambia su movimiento, esto es,

$$|G^i(s, u) - G^i(s, v)| \leq \theta$$

para cada jugador $i \in \mathcal{P}$, cada estrategia pura $s \in S^i$, y todos los pares $u, v \in S^{-i}$ tales que $u^j = v^j$ salvo solamente por un $j \neq i$.

Proposición 1.1.3 ([7, Proposición 5]). *Bajo la regla Logit (1.9), si $2\omega\theta < 1$ entonces $C(\cdot)$ es una $\|\cdot\|_\infty$ -contracción.*

Aplicación a Juegos de Congestión

En el contexto de un juego como el descrito en este modelo, en el que los jugadores modifican su percepción de sus estrategias utilizando como única información, su percepción anterior y el pago observado de utilizar una u otra estrategia, el ejemplo más natural en donde un sistema así se utiliza es un juego de congestión, que por simplicidad del análisis se supondrá descrito por un único par origen-destino unido por un conjunto de rutas paralelas.

Formalmente un juego de congestión como el descrito anteriormente se define como sigue. Cada día un conjunto de N usuarios, $i \in \mathcal{P}$, eligen, entre M rutas alternativas de un conjunto \mathcal{R} . Las alternativas combinadas de todos los usuarios determinan que tan saturada está cada ruta y el tiempo de viaje (promedio) asociado. Cada usuario percibe sólo el costo de la ruta que utiliza en ese día y con tal información actualiza la percepción

de esa ruta particular, afectando las estrategias mixtas que serán jugadas en la siguiente etapa.

Más precisamente, una ruta $r \in \mathcal{R}$ está caracterizada por una secuencia creciente $c_1^r \leq \dots \leq c_N^r$, donde c_u^r representa el tiempo de viaje promedio de la ruta r cuando ésta tiene u usuarios en ella. El conjunto de estrategias puras para cada jugador $i \in \mathcal{P}$ es $S^i = \mathcal{R}$ y si $r_n^i \in \mathcal{R}$ denota la ruta elegida por el jugador i en la etapa n , entonces la función de pago del jugador i viene dada como el negativo de el tiempo de viaje experimentado $g_n^i = G^i(r_n) = -c_u^r$ con $r = r_n^i$ y $u = \#\{j \in \mathcal{P} : r_n^j = r\}$.

Se asume que cada ruta r_n^i es elegida aleatoriamente de acuerdo a las estrategias mixtas $\pi_n^i = \sigma^i(x_n^i)$ que dependen de la percepción previa sobre el pago de esa ruta, vía el modelo Logit

$$\sigma^{is}(x^i) = \frac{\exp(\beta_i x^{is})}{\sum_{a \in \mathcal{R}} \exp(\beta_i x^{ia})}, \quad (1.10)$$

donde la evolución de las percepciones viene dado por el proceso de aprendizaje (1.2).

Se considera el siguiente mapeo $H : [0, 1]^{\mathcal{P} \times \mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$H(\pi) = -\mathbb{E}_\pi^B \left[\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{u=1}^{U^r} c_u^r \right], \quad (1.11)$$

donde \mathbb{E}_π^B denota a la esperanza respecto a las variables aleatorias $U^r = \sum_{i \in \mathcal{P}} X^{ir}$, con X^{ir} variables aleatorias Bernoulli independientes y no homogéneas tales que $\mathbb{P}(X^{ir} = 1) = \pi^{ir}$.

Observación 1.1.4. Notar que $H(\pi)$ está definido para $\pi \in [0, 1]^{\mathcal{P} \times \mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ y no sólo para $\pi \in \Delta$, lo que permite diferenciar H respecto a cada variable π^{ir} .

Lema 1.1.5 ([7, Lema 7]). *Para una ruta $r \in \mathcal{R}$ dada y para un jugador $i \in \mathcal{P}$ se define $U_i^r = \sum_{k \neq i} X^{kr}$, con X^{ir} variables aleatorias Bernoulli independientes y no homogéneas tales que $\mathbb{P}(X^{kr} = 1) = \pi^{kr}$. Entonces*

$$F^{ir}(\pi) = \mathbb{E}_\pi^B[-c_{U_i^r}^r | X^{ir} = 1] = \mathbb{E}_\pi^B[-c_{U_i^r+1}^r] \quad (1.12)$$

Proposición 1.1.6 ([7, Proposición 8]). $F(\pi) = \nabla H(\pi)$, $\forall \pi \in \Delta$.

Se introduce ahora el parámetro que mide el efecto de congestión producido por un usuario adicional, esto es,

$$\theta = \max\{c_u^r - c_{u-1}^r : r \in \mathcal{R}, u = 2, \dots, N\}. \quad (1.13)$$

Teorema 1.1.7 ([7, Teorema 10]). *Asumiendo que en el juego de congestión se tiene que $\omega\theta < 2$, entonces la correspondiente dinámica adaptativa (1.7) tiene un único punto estacionario \bar{x} el cual es un atractor global y el proceso (1.2) converge casi seguramente a \bar{x} .*

El Caso Simétrico

Se considera ahora el caso en que todos los jugadores son idénticos con $\beta_i \equiv \beta \forall i \in \mathcal{P}$. Se denota $\sigma(\cdot)$ la función Logit (1.10) común para los jugadores.

Teorema 1.1.8. *Si $\beta_i \equiv \beta \forall i \in \mathcal{P}$ entonces la dinámica adaptativa (1.7) tiene exactamente un punto estacionario simétrico $\hat{x} = (\hat{y}, \dots, \hat{y})$. Más aún, si $\beta\theta < 2$ entonces cada punto estacionario es simétrico.*

Corolario 1.1.9. *Si $\beta_i \equiv \beta \forall i \in \mathcal{P}$ entonces el juego \mathcal{G} tiene un único equilibrio simétrico. Más aún, si $\beta\theta < 2$ entonces cada equilibrio es simétrico (y por lo tanto único).*

Teorema 1.1.10. *Si $\beta_i \equiv \beta \forall i \in \mathcal{P}$ con $\beta\theta < 2$ entonces el único punto estacionario $\hat{x} = (\hat{y}, \dots, \hat{y})$ es simétrico y un atractor local para la dinámica (1.7).*

Las demostraciones de estos resultados pueden ser encontradas en [7, pags. 12,13].

1.2. Segundo modelo.

Este modelo es presentado en el artículo *An adjusted payoff-based procedure for normal form games* [3] (M. Bravo), y muestra una variante al anterior al introducir en la regla de actualización un contador de cuantas veces ha sido jugada una estrategia.

1.2.1. Variantes

Se consideran las mismas definiciones del modelo anterior, salvo que se crea una modificación en la regla de actualización (1.1), la que viene dada por:

$$x_{n+1}^{is} = \begin{cases} (1 - \frac{1}{\theta_n^{is}})x_n^{is} + \frac{1}{\theta_n^{is}}g_{n+1}^i & \text{si } s = s_{n+1}^i, \\ x_n^{is} & \text{si no,} \end{cases} \quad (1.14)$$

donde θ_n^{is} denota el número de veces que la estrategia s ha sido utilizada por el jugador $i \in \mathcal{P}$ hasta la etapa n .

Por problemas de factibilidad se asume que $\theta_0^{is} > 0 \forall i \in \mathcal{P}$, y $\forall s \in S^i$, perdiéndose un poco la noción de que θ_n^{is} sea exactamente el número de veces que la acción $s \in S^i$ ha sido utilizada, pero se conservará esa interpretación, ya que lo que interesa son los resultados asintóticos.

Análisis Asintótico

A continuación se detallan representaciones equivalentes del proceso (1.14) para encontrar una dinámica adaptativa

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} &= \frac{1}{\theta_n^{is}}(g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \\ &= \frac{1}{(n+1)\lambda_n^{is}}(g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_n^{is} = \frac{\theta_n^{is}}{n+1}$ es interpretado como la frecuencia empírica de la acción s por el jugador i en la etapa n . Sin pérdida de generalidad se asume que $0 < \theta_0^{is} \leq 1$, para cada $i \in \mathcal{P}$ y $s \in S^i$, de manera que $\lambda_n^i \in \Delta^i \forall n \in \mathbb{N}$. Cálculos básicos muestran que,

$$\lambda_{n+1}^{is} - \lambda_n^{is} = \frac{1}{n+1} (\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} + b_{n+1}(s)),$$

y

$$b_{n+1}(s) = -\frac{1}{n+2} (\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.15)$$

Entonces se puede expresar (1.14) de manera equivalente, introduciendo la frecuencia empírica de juego. La nueva forma es de (agregándole un término que se anula) un esquema de diferencia de martingalas.

$$\begin{cases} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sigma^{is}(x_n^{is})}{\lambda_n^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x_n)) - x_n^{is}) + N_{n+1}^{is} \right], \\ \lambda_{n+1}^{is} - \lambda_n^{is} &= \frac{1}{n+1} \left[\sigma^{is}(x_n^{is}) - \lambda_n^{is} + M_{n+1}^{is} \right], \end{cases} \quad (1.16)$$

donde los términos de ruido son:

$$\begin{aligned} N_{n+1}^{is} &= \frac{1}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \mathbb{E} \left(\frac{1}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \middle| \mathcal{F}_n \right), \\ M_{n+1}^{is} &= (\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is}) - \mathbb{E} \left((\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is}) \middle| \mathcal{F}_n \right) + b_{n+1}(s). \end{aligned}$$

Desde ahora se denota $\epsilon_n := (N_n, M_n)$ al ruido del proceso.

Análogamente a lo realizado en el modelo anterior se obtiene una dinámica adaptativa asociada al proceso de aprendizaje (1.16), de esta manera tal dinámica queda descrita por,

$$\begin{cases} \frac{dx^{is}}{dt} &= \frac{\sigma^{is}(x^{is})}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) := \Psi_x^{is}(x(t), \lambda(t)), \\ \frac{d\lambda^{is}}{dt} &= \sigma^{is}(x^{is}) - \lambda^{is} := \Psi_\lambda^{is}(x(t), \lambda(t)). \end{cases} \quad (1.17)$$

Con $\Psi_x : \Omega \times \Delta \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathbb{R}^{|S^i|}$ y $\Psi_\lambda : \Omega \times \Delta \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{P}} \Delta_0^i$, y $\Delta_0^i = \{z \in \mathbb{R}^{|S^i|} : \sum_{s \in S^i} z^s = 0\}$. Se denota Ψ a la función definida por $\Psi(x, \lambda) = (\Psi_x(x, \lambda), \Psi_\lambda(x, \lambda))$.

Observación 1.2.1. Notar que se cumple lo siguiente:

$(x, \sigma(x)) \in \Omega \times \Delta$ es punto estacionario de (1.17) $\Leftrightarrow x \in \Omega$ es punto estacionario de (1.7)

1.2.2. Principales Resultados

Convergencia Casi Segura

Proposición 1.2.2 ([3, proposición 4.5]). *Asumiendo que la función $C : \Omega \rightarrow \Omega$ (1.5) es una $\|\cdot\|_\infty$ -contracción y que, para cada $i \in \mathcal{P}$ la función σ^i es Lipschitz para la norma infinito. Entonces existe un único punto estacionario $(x_*, \sigma(x_*)) \in \Omega \times \Delta$ de (1.17). Más aún, el conjunto $\{(x_*, \sigma(x_*))\}$ es un atractor global y el proceso (1.16) converge casi seguramente a $(x_*, \sigma(x_*))$.*

Tal como en el modelo anterior se tiene la siguiente notación:

$$\omega = \max_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j \neq i} \beta_j, \quad (1.18)$$

$$\theta = \max_{\substack{i \in \mathcal{P}, s \in S^j \\ u, v \in \tilde{S}^{-i}}} |G^i(s, u) - G^i(s, v)|, \quad (1.19)$$

donde $\tilde{S}^{-i} = \{(u, v) \in S^{-i} \times S^{-i} : u^k \neq v^k \text{ para exactamente un } k\}$

Proposición 1.2.3 ([3, Proposición 5.2]). *Si $2\omega\theta < 1$, el proceso discreto (1.16) converge casi seguramente al único punto estacionario $(x_*, \sigma(x_*))$ de la dinámica (1.17).*

Convergencia con Probabilidad Positiva

Se denota por $\rho(\mathcal{B})$ a la parte real maximal de los valores propios de la matriz $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, esto es,

$$\rho(\mathcal{B}) = \max\{\Re(\mu_j) : j = 1, \dots, k; \mu_j \in \mathbb{C} \text{ valor propio de la matriz } \mathcal{B}\} \quad (1.20)$$

Se dice que la matriz \mathcal{B} es estable si $\rho(\mathcal{B}) < 0$.

Lema 1.2.4 ([3, Lema 5.3]). *Suponer que $2\omega\theta < 1$. Sea (x_*, λ_*) y x_* los únicos puntos estacionarios de las dinámicas (1.17) y (1.7) respectivamente. Entonces*

$$-1 \leq \rho(\nabla\Psi(x_*, \lambda_*)) < \frac{-1}{2} \leq -\frac{N}{\sum_{k \in \mathcal{P}} |S^k|} \leq \rho(\nabla\Phi(x_*)) < 0 \quad (1.21)$$

Las cotas dadas por el Lema 1.2.4 permiten aumentar el rango de parámetros en los cuales se tienen resultados generales de convergencia para el proceso (1.16).

Sea $\mathcal{Y} \subset \Omega \times \Delta$ el conjunto de los puntos estacionarios de (1.17) y sea $B(\mathcal{A})$ el dominio de atracción [1] correspondiente al atractor \mathcal{A} .

Proposición 1.2.5 ([3, Proposición 5.8]). *Asumir que $1 \leq 2\omega\theta < 2$. Entonces existe un único punto estacionario (x_*, λ_*) para la dinámica (1.17), el cual es un atractor local.*

Se denota por $\mathcal{L}(z_n)$ al conjunto límite [1] de la secuencia $(z_n)_n$. El siguiente resultado es el principal de esta subsección.

Proposición 1.2.6 ([3, Proposición 5.11]). *Bajo la regla de decisión Logit (1.9), si $1 \leq 2\omega\theta < 2$, entonces \mathcal{Y} se reduce a un punto (x_*, λ_*) y $\mathbb{P}((x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)) > 0$.*

Aplicación a un juego de congestión

Se conservan las mismas instancias definidas para el modelo anterior, y adicionalmente se agrega el supuesto de que todos los jugadores tienen iguales parámetros $\beta_i = \beta$.

Proposición 1.2.7 ([3, Proposición 5.15]). *Si $\theta\beta < 1$, (1.17) tiene un único punto estacionario $(x_*, \lambda_*) \in \Omega \times \Delta$ el cual es simétrico, en el sentido que $x_* = (\hat{x}, \dots, \hat{x})$ y $\lambda_* = (\hat{\lambda}, \dots, \hat{\lambda})$. Más aún, $\{(x_*, \lambda_*)\}$ es un atractor para (1.17) y $\mathbb{P}((x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)) > 0$.*

1.3. Modelo propuesto

Teniendo en consideración los modelos anteriores se decidió trabajar en problemas específicos, que se detallan a continuación:

1.3.1. Variante del Segundo Modelo

Se conservan las notaciones previas para ambos modelos y se modifica levemente la regla de actualización (1.14), por el siguiente proceso

$$x_{n+1}^{is} = \begin{cases} (1 - \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}})x_n^{is} + \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}g_{n+1}^i & \text{si } s = s_{n+1}^i, \\ x_n^{is} & \text{si no,} \end{cases} \quad (1.22)$$

donde nuevamente θ_n^{is} denota el número de veces que la estrategia s ha sido utilizada por el jugador $i \in \mathcal{P}$ hasta la etapa n (esta vez sin el problema de tener que considerar $\theta_0^{is} > 0$). Por otra parte $a_i, b_i > 0$ son constantes características del jugador $i \in \mathcal{P}$. La incorporación de estas constantes se justifica como la presencia de indicadores propios para cada jugador, de sus propios gustos, de este modo distintos jugadores al recibir un mismo pago al jugar una estrategia s , y teniendo una igual percepción previa, pueden actualizar sus preferencias de manera distinta.

Los detalles del análisis de este nuevo proceso se verán en el Capítulo 3.

1.3.2. Estudio Detallado del Juego de Congestión para el Primer Modelo

En el Capítulo 4 se desarrollará en detalle los casos en que sólo hay dos rutas en el juego de congestión, variando el número de jugadores se establecerán resultados relacionados a la cantidad y/o finitud de los equilibrios de tal juego.

Capítulo 2

Herramientas Técnicas

Este capítulo resume las herramientas necesarias para los análisis posteriores.

2.1. Teorema de Poincaré-Hopf

2.1.1. Variedades y Homotopías

Para una revisión en mas detalle de los temas de variedades topológicas y variedades suaves se recomienda consultar los textos [16] y [17] respectivamente, acá se presentan sólo los resultados principales.

Definición 2.1.1. Un mapeo $F : X \rightarrow Y$ se dice *difeomorfismo* si f lleva X de manera homeomorfa a Y , y tanto f como f^{-1} son suaves.

Definición 2.1.2. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ se dice que es una variedad suave m -dimensional si, para cada $x \in M$, existe alguna vecindad $W \cap M$ que es difeomorfa a un conjunto abierto U en un espacio euclidiano \mathbb{R}^m . Cualquier difeomorfismo particular $g : U \rightarrow W \cap M$ es llamado una *parametrización* de la región $W \cap M$ (el difeomorfismo inverso $W \cap M \rightarrow U$ es llamado un *sistema de coordenadas* de $W \cap M$).

Para definir la noción de *derivada* df_x para un mapeo suave $f : M \rightarrow N$ de variedades suaves, primero se asocia a cada $x \in M \subset \mathbb{R}^k$ un subespacio lineal $TM_x \subset \mathbb{R}^k$ de dimensión m llamado el *espacio tangente* de M en x . Entonces df_x será un mapeo lineal de TM_x en TN_y , con $y = f(x)$.

Se estudia previamente el caso especial de los mapeos entre conjuntos abiertos. Para cada conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^k$ el espacio tangente TU_x está definido por todo el espacio vectorial \mathbb{R}^k . Para cada mapeo $f : U \rightarrow V$ la derivada $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ está definido por la fórmula

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

para cada $x \in U, h \in \mathbb{R}^k$.

Se define ahora el *espacio tangente* TM_x para una variedad suave arbitraria $M \subset \mathbb{R}^K$. Se escoge una parametrización $g : U \rightarrow M$ de una vecindad $g(U)$ de $x \in M$, con $g(u) = x$

y $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. Pensar g como un mapeo de U a \mathbb{R}^k , de tal manera que su derivada $dg_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ quede definida. Se considera entonces TM_x como la imagen $dg_u(\mathbb{R}^m)$ de dg_u .

Observación 2.1.3 ([20, pag. 4]). Se satisfacen las siguientes propiedades:

- La construcción no depende de la parametrización g .
- TM_x es un espacio vectorial m -dimensional.

Ahora considerar dos variedades suaves, $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^l$, y un mapeo suave $f : M \rightarrow N$ con $f(x) = y$. La derivada $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$ queda definida como sigue. Dado que f es suave entonces existe un conjunto abierto W que contiene a x y un mapeo suave $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$ que coincide con f en $W \cap M$. Se define entonces $df_x(v)$ igual a $dF_x(v)$ para todo $v \in TM_x$.

Observación 2.1.4 ([20, pag. 6]). Se satisfacen las siguientes propiedades:

- $dF_x(v) \in TN_y$.
- La definición de df_x no depende de la elección particular de F .

Con la Observación anterior se prueba que $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$ queda bien definido y es un mapeo lineal.

Proposición 2.1.5 ([20, pag. 7]). *Se satisfacen las siguiente propiedades:*

- Si $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ son mapeos suaves, con $f(x) = y$ entonces $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.
- Si I es el mapeo identidad de M , entonces dI_x es el mapeo identidad de TM_x . Más generalmente, si $M \subset N$ con el mapeo inclusión i , entonces $TM_x \subset TN_x$ con el mapeo inclusión di_x .

Corolario 2.1.6. *Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular la dimensión de M debe ser igual a la dimensión de N .*

Variedades con frontera.

Considerar el semiplano cerrado

$$H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_m \geq 0\}.$$

La frontera ∂H^m queda definida como el hiperplano $\mathbb{R}^{m-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^m$.

Definición 2.1.7. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^k$ es llamado una m -variedad suave con frontera si cada $x \in X$ tiene una vecindad $U \cap X$ difeomorfa a un subconjunto abierto $V \cap H^m \subset H^m$. La frontera ∂X es el conjunto de todos los puntos en X que corresponden a puntos de ∂H^m bajo tal difeomorfismo.

Observación 2.1.8. Se cumplen las siguientes propiedades análogas a las descritas anteriormente

- ∂X es una variedad suave de dimensión $m - 1$ bien definida.
- El espacio tangente TX_x queda definido igual que en el caso sin frontera, de modo que TX_x es un espacio vectorial m -dimensional completo, incluso si x es un punto de frontera.

Homotopías e isotopías suaves

Dado $X \subset \mathbb{R}^k$ se denota $X \times [0, 1]$ al subconjunto de \mathbb{R}^{k+1} que consiste en todos los puntos (x, t) , con $x \in X$ y $0 \leq t \leq 1$. Dos mapeos continuos f y g de un espacio topológico X a un espacio topológico Y se dicen *suavemente homotópicos* si existe un mapeo suave $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$, $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$.

Definición 2.1.9. El difeomorfismo f es *suavemente isotópico* a g si existe una homotopía suave $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de f a g de modo que para cada $t \in [0, 1]$, la correspondencia $x \mapsto F(x, t)$ mapea X en Y difeomorficamente.

2.1.2. Grado de Brouwer

Las siguientes definiciones y resultados se basan en lo descrito en [20].

Definición 2.1.10. Sea $f : M \rightarrow N$ un mapeo suave entre variedades de la misma dimensión. Si df_x como un mapeo lineal descrito anteriormente es singular, esto es, satisface que el determinante de la matriz es 0, entonces $x \in M$ es llamado un *punto crítico*. Se dice que $y \in N$ es un valor crítico si algún $x \in f^{-1}(y)$ es crítico. Recíprocamente, si df_x no es singular en $x \in M$, entonces x es llamado un *punto regular*, e $y \in N$ se conoce como un *valor regular* si todos los $x \in f^{-1}(y)$ son regulares.

Definición 2.1.11. Una *orientación* para un espacio vectorial de dimensión finita es una clase de equivalencia de bases ordenadas como sigue: la base ordenada (b_1, \dots, b_n) determina la *misma orientación* que la base (b'_1, \dots, b'_n) si $b'_i = \sum a_{ij} b_j$ con $\det[(a_{ij})_{i,j}] > 0$. Y tiene la *dirección opuesta* si $\det[(a_{ij})_{i,j}] < 0$. El espacio vectorial \mathbb{R}^n tiene una orientación *standard* correspondiente a las bases canónicas.

Definición 2.1.12. Una variedad suave *orientada* consiste en una variedad M junto con una elección de orientación para cada espacio tangente TM_x . Si la dimensión de la variedad es $m \geq 1$, se requiere lo siguiente: para cada punto de M debe existir una vecindad $U \subset M$ y un difeomorfismo h que mapa un conjunto abierto de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^m preservando orientación, en el sentido que para cada $x \in U$ el isomorfismo dh_x lleva la orientación especificada para TM_x en la orientación standard para \mathbb{R}^m .

Observación 2.1.13. Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si M es conexa y orientable, entonces tiene precisamente dos orientaciones.
- Si M tiene frontera, se pueden distinguir tres tipos de vectores en el espacio tangente TM_x en un punto de frontera:

1. están los vectores tangentes a la frontera, formando un subespacio $(m - 1)$ -dimensional $T(\partial M)_x \subset Tm_x$;
2. están los vectores que *apuntan hacia afuera*, formando un semiespacio abierto acotado por $T(\partial M)_x$;
3. están los vectores que *apuntan hacia dentro*, formando un semiespacio complementario.

Cada orientación para M determina una orientación para ∂M como sigue: Para cada $x \in \partial M$ elegir una base orientada positivamente (v_1, \dots, v_m) para TM_x de forma que v_2, \dots, v_m sean tangentes a la frontera y que v_1 apunte hacia dentro. Entonces (v_2, \dots, v_m) determina la orientación requerida para ∂M en x .

Sean ahora M, N dos variedades n -dimensionales sin frontera y sea $f : M \rightarrow N$ un mapeo suave. Si M es compacta y N conexa, entonces el grado de f se define como sigue:

Definición 2.1.14. Sea $x \in M$ un punto regular de f , de modo que $df_x : TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales orientados. Se define el *sign* de df_x como $+1, -1$ según si preserva o revierte orientación. Para cada valor regular $y \in N$ se define

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}(df_x).$$

Teorema 2.1.15 ([20, Pag. 28]). *El entero $\deg(f; y)$ es localmente constante en y . Además no depende de la elección del valor regular y .*

Teorema 2.1.16 ([20, Pag. 28]). *Si f es suavemente homotópica a g , entonces $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.*

2.1.3. Índice, Característica de Euler y Teorema de Poincaré-Hopf

Definición 2.1.17. Sea v un campo vectorial suave en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $z \in U$ un cero aislado de v , y N_ϵ un pequeño disco conteniendo al cero, donde se toma de forma que no exista otro cero dentro de N_ϵ . Se define $\bar{v}(x) : \partial N_\epsilon \rightarrow S^{n-1}$, (del borde de la bola N_ϵ a la esfera unitaria de dimensión $n - 1$, dada por $\bar{v}(x) = v(x)/\|v(x)\|$). Y se orienta la frontera de cada N_ϵ como la frontera del disco que contiene al cero. El *índice* de v en z es el grado de \bar{v} y se denota por $\text{ind}_v(z)$.

Sean M, N dos variedades suaves y un mapeo $f : M \rightarrow N$, con un campo vectorial en cada variedad.

Definición 2.1.18. El campo vectorial v en M , y v' en N *corresponden* bajo f si la derivada df_x lleva $v(x)$ en $v'(f(x))$ para cada $x \in M$.

Si f es un difeomorfismo, entonces v' está únicamente determinada por v . Se utilizará la notación $v' = df \circ v \circ f^{-1}$.

Lema 2.1.19 ([20, Pag. 33]). *Suponer que el campo vectorial v en U corresponde a $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ en U' bajo el difeomorfismo $f : U \rightarrow U'$. Entonces el índice de v en un cero aislado z es igual al índice de v' en $f(z)$.*

Utilizando el lema anterior es posible definir el concepto de índice para un campo vectorial w en una variedad arbitraria M como sigue: Si $g : U \rightarrow M$ es una parametrización de una vecindad de $z \in M$, entonces el índice $ind_w(z)$ es definido como el índice de un campo vectorial correspondiente $dg^{-1} \circ w \circ g$ en U en el cero $g^{-1}(z)$.

Lema 2.1.20 ([18, Lema 3.9]). *En un cero no degenerado¹ de un campo vectorial v , el índice es $+1$ si el determinante de dv_x es positivo y -1 si el determinante es negativo.*

Observación 2.1.21 ([2, pag. 2]). El índice de un punto crítico aislado estable, $z_0 \in U$, para el campo vectorial v , es $(-1)^n$ si alguna de las siguientes condiciones se cumple :

- i) El determinante del Jacobiano de v en z_0 es diferente de cero.
- ii) z_0 es un atractor (esto es, existe una vecindad V_{z_0} tal que cualquier solución del sistema $\dot{z} = v(z)$, con condición inicial en V_{z_0} tiende a z_0 cuando $t \rightarrow \infty$.)

Un análisis en mas detalle de este tema puede ser encontrado en [6].

Definición 2.1.22. Sean una secuencia de espacios vectoriales $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y los mapeos lineales $\partial_n : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{C}_{n-1}$ tales que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ para todo n . Tal secuencia se le conoce como *cadena compleja* y los homomorfismos ∂_n son llamados *operadores de frontera*.

Definición 2.1.23. Suponer que se tiene alguna cadena compleja que consiste de grupos \mathcal{C}_n y homomorfismos ∂_n . Se define el *n -ésimo grupo de homología* como

$$H_n(X; \mathbb{R}) = \ker \partial_n / \text{im}(\partial_{n+1})$$

Definición 2.1.24. Sea $H_i(M)$ el i -ésimo grupo de homología de M . La *Característica de Euler* de M , $\chi(M)$, viene dada por $\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \text{rang}[H_i(M)]$.

El siguiente Teorema es el conocido Teorema de Poincaré-Hopf, existen varias versiones en cuanto a las hipótesis que se requieren, para el caso que interesa en este trabajo se supondrá lo siguiente: considerar M una variedad compacta y v un campo vectorial con ceros aislados, si M tiene frontera, entonces se requiere que v apunte hacia afuera en todos los puntos de frontera.

Teorema 2.1.25 ([20, pag. 35]). *La suma $\sum_j ind_v(z_j)$ de los índices del campo vectorial v en los ceros z_j es igual a la característica de Euler de la variedad M , $\chi(M)$.*

Observación 2.1.26. En la esfera S^m existe un campo vectorial v que apunta al *norte* en cada punto (considerar por ejemplo $v(x) = p - (p \cdot x)x$, con p el punto norte.) En el polo sur los vectores irradian hacia afuera y por lo tanto el índice es $+1$, por el contrario en el polo norte los vectores convergen hacia adentro y consecuentemente su índice es $(-1)^m$. Sigue entonces que el invariante $\sum_j ind_v(z_j)$ es igual a 0 o 2 de acuerdo si m es impar o par respectivamente.

¹ z es un cero no degenerado de v si dv_z es no singular.

Observación 2.1.27 ([19, Pag. 49]). $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, la n -bola unitaria tiene como característica de Euler $\chi(B^n) = +1$.

Observación 2.1.28. Para cada variedad sin frontera y de dimensión impar, el invariante $\sum_j \text{ind}_v(z_j)$ es cero, esto pues si el campo vectorial es reemplazado por $-v$, entonces cada índice es multiplicado por $(-1)^m$, y la igualdad $\sum_j \text{ind}_v(z_j) = (-1)^m \sum_j \text{ind}_v(z_j)$, para m impar implica que $\sum_j \text{ind}_v(z_j) = 0$.

2.2. Martingalas y Teoremas de Convergencia

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sea $\{M_n\}$ una secuencia de vectores aleatorios y que satisfacen $\mathbb{E}|M_n| < \infty$ para cada n . Si

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | M_i, i \leq n] = M_n \text{ c.s para todo } n \quad (2.1)$$

entonces $\{M_n\}$ se dice *Martingala*. La diferencia $\delta M_n = M_{n+1} - M_n$ es llamada *diferencia de martingalas*. Por la definición de una martingala, si $\mathbb{E}|M_n|^2 < \infty$ para cada n , las diferencias de martingalas son no correlacionadas, en el sentido que para $m \neq n$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} - M_n][M_{m+1} - M_m]' = 0.$$

Existe una definición más general de martingala y es la que se describe a continuación. Sea $\{\mathcal{F}_n\}$ una secuencia de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ para todo n y que M_n es medible respecto a \mathcal{F}_n . Si se tiene

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}[M_{n+1}] := \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \text{ c.s para todo } n, \quad (2.2)$$

se dice que $\{M_n, \mathcal{F}_n\}$ es una martingala o $\{M_n\}$ es una \mathcal{F}_n -martingala. Si simplemente se dice que $\{M_n\}$ es una martingala, se asumirá que se considera respecto a la σ -álgebra generada por $\{M_i, i \leq n\}$, a esta σ -álgebra se le conoce como *filtración natural*.

Proposición 2.2.1. *Considerar una secuencia de variables aleatorias cualquiera $\{Y_n\}_n$ que satisfacen $\mathbb{E}|Y_n| < \infty$ para cada n , entonces se puede descomponer como:*

$$Y_n = (Y_n - \mathbb{E}[Y_n | Y_i : i < n]) + \mathbb{E}[Y_n | Y_i : i < n],$$

donde la primera parte corresponde a una diferencia de martingalas.

Demostración. Basta notar que el proceso definido por la suma

$$M_n = \sum_{j=0}^n (Y_j - \mathbb{E}[Y_j | Y_i : i < j]) \quad (\text{Mart})$$

es una martingala (pues la σ -álgebra generada por $\{M_i, i < n\}$ es la misma que la generada por $\{Y_i, i < n\}$) y $M_n - M_{n-1} = Y_n - \mathbb{E}[Y_n | Y_i : i < n]$. □

Se hace relevante enunciar algunas desigualdades fundamentales, las conocidas desigualdades de Doob y Kolmogorov.

Teorema 2.2.2 ([22, pag. 493]). *Sea (M_n) una martingala, $\lambda > 0$ y $p \geq 1$. Entonces*

$$\mathbb{P}\{\sup_{k \leq n} |M_k| \geq \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}|M_n|^p}{\lambda^p},$$

y si $p > 1$

$$(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}[\sup_{0 \leq j \leq n} |M_j|^p])^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/p}.$$

Teorema 2.2.3 ([22, pag. 384]). *Sea $M_n = m_0 + \dots + m_n$, con $(m_k)_{k \geq 0}$ una secuencia de variables aleatorias independientes tal que $\mathbb{E}[m_k] = 0$, $\mathbb{E}[m_k^2] < \infty$. Entonces para todo $\lambda > 0$ se tiene*

$$\mathbb{P}\{\max_{1 \leq j \leq n} |M_j| \geq \lambda\} \leq \frac{\mathbb{E}M_n^2}{\lambda^2}.$$

Observación 2.2.4. Una secuencia (m_k) de diferencia de martingalas satisface las hipótesis del Teorema anterior.

Se enuncian a continuación dos teoremas de convergencia para martingalas, las demostraciones se pueden encontrar en [22, pag. 508] y [4, pag. 89].

Teorema 2.2.5. *Sea $\{M_n\}$ martingala, que satisface $\sup_n \mathbb{E}|M_n| < \infty$, entonces con probabilidad 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_\infty$ existe y $\mathbb{E}|M_\infty| < \infty$.*

Teorema 2.2.6. *Considerar $\{M_n\}$ martingala tal que para algún $q > 1$, $\sup_n \mathbb{E}|M_n|^q < \infty$, entonces existe $M_\infty \in L^q(\mathbb{P})$ tal que $M_n \rightarrow M_\infty$ casi seguramente y en $L^q(\mathbb{P})$. En particular $M_n = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n]$ para todo n .*

2.3. Algoritmos de Aproximación Estocástica

Para esta sección hay tres referencias principales: *Seminaire de Probabilites XXXIII* [1], *Approximization and Weak Convergence Methods for Random Processes* [13] y *Stochastic Approximization Algorithms and Applications* [14].

Los *algoritmos de aproximación estocástica* son procesos estocásticos a tiempo discreto cuya forma general puede ser escrita como

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1} V_{n+1}, \quad (2.3)$$

donde x_n toma sus valores en algún espacio euclidiano, V_{n+1} es una variable aleatoria y $\gamma_n > 0$ es un paso pequeño. Típicamente x_n representa el parámetro de un sistema que es adaptado a una filtración (\mathcal{F}_n) sobre el tiempo y $V_{n+1} = f(x_n, \xi_{n+1})$. En cada paso el sistema recibe nueva información ξ_{n+1} causando que x_n se vaya actualizado de acuerdo a una regla caracterizada por la función f .

Para analizar el comportamiento asintótico de (2.3), es conveniente a menudo, reescribir el término de ruido como

$$V_{n+1} = F(x_n) + U_{n+1}, \quad (2.4)$$

donde $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial determinista y $\mathbb{E}[U_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0$. Una aproximación natural del comportamiento asintótico de la secuencia $(x_n)_n$ es considerarlas como aproximaciones de soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx}{dt} = F(x). \quad (2.5)$$

Se puede pensar entonces (2.3) como una especie de esquema de diferencias finitas para resolver numéricamente (2.5) con un paso γ_n . Es natural pensar que si γ_n es pequeño, el ruido se anule y que el comportamiento asintótico de $(x_n)_n$ esté íntimamente relacionado con el comportamiento asintótico de la EDO.

2.3.1. Pseudotrayectorias Asintóticas

Definición 2.3.1. Un *semiflujo* Φ en un espacio métrico (M, d) es una función continua

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times M &\rightarrow M, \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x) \end{aligned}$$

tal que $\Phi_0 = \text{Identidad}$ y $\Phi_{s+t} = \Phi_t \circ \Phi_s$ para todo $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Reemplazando \mathbb{R}_+ por \mathbb{R} se define un flujo.

Definición 2.3.2. Una función continua $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ es una *pseudotrayectoria asintótica* para Φ si para cada $T > 0$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \Phi_h(X(t))) = 0. \quad (2.6)$$

Luego para cada $T > 0$ fijo, la curva

$$\begin{aligned} [0, T] &\rightarrow M \\ h &\mapsto X(t+h) \end{aligned}$$

sigue la Φ -trayectoria desde el punto $X(t)$ sobre el intervalo $[0, T]$ con arbitraria precisión para t suficientemente grande. Se dirá que X es *precompacto* si su imagen tiene clausura compacta en M .

2.3.2. Pseudotrayectorias Asintóticas y Procesos de Aproximación Estocástica

Notación y Resultados Preliminares

Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo continuo. Considerar un proceso a tiempo discreto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuya forma general puede ser escrita como

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1}(F(x_n) + U_{n+1}), \quad (2.7)$$

donde

- $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ es una secuencia dada de números no negativos tales que

$$\sum_k \gamma_k = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0.$$

- $U_n \in \mathbb{R}^m$ son perturbaciones (deterministas o aleatorias).

La fórmula (2.7) se puede considerar como la versión perturbada de un esquema de aproximación de diferencias finitas (Cauchy-Euler) para resolver numéricamente $\dot{x} = F(x)$. Es natural entonces comparar el comportamiento del muestreo $\{x_k\}$ con las trayectorias del flujo inducido por el campo vectorial F .

Se considera para tal fin $\tau_0 = 0$ y $\tau_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ para $n \geq 1$, y se define el proceso a tiempo continuo interpolado $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, por

$$X(\tau_n + s) = x_n + s \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1} - \tau_n}, \quad (2.8)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s < \gamma_{n+1}$.

Asimismo se definen $\bar{U}, \bar{\gamma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\bar{X} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ los procesos a tiempo continuo constantes a trozos definidos por

$$\bar{U}(\tau_n + s) = U_{n+1}, \quad \bar{\gamma}(\tau_n + s) = \gamma_{n+1} \quad \text{y} \quad \bar{X}(\tau_n + s) = x_n, \quad (2.9)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq s < \gamma_{n+1}$.

Utilizando esta notación (2.8) puede ser reescrito como

$$X(t) - X(0) = \int_0^t [F(\bar{X}(s)) + \bar{U}(s)] ds. \quad (2.10)$$

El inverso de $n \mapsto \tau_n$ es el mapeo $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ definido por

$$m(t) = \sup\{k \geq 0 : t \geq \tau_k\}. \quad (2.11)$$

El campo vectorial F se dice *globalmente integrable* si tiene una única curva integral. Por ejemplo un campo vectorial acotado localmente Lipschitz es siempre globalmente integrable.

Proposición 2.3.3 ([1, Proposición 4.1]). *Sea F un campo vectorial continuo globalmente integrable. Asumir que*

A1 *Para todo $T > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{i=n}^{k-1} \gamma_{i+1} U_{i+1} \right\| : k = n+1, \dots, m(\tau_n + T) \right\} = 0 \quad (2.12)$$

o equivalentemente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\sup_{0 \leq h \leq T} \left\| \int_t^{t+h} \bar{U}(s) ds \right\|}_{:= \Delta(t, T)} = 0. \quad (2.13)$$

A2 $\sup_n \|x_n\| < \infty$, ó

A2' F es Lipschitz y acotada en una vecindad de $\{x_n : n \geq 0\}$.

Entonces el proceso interpolado X es una pseudotrayectoria asintótica del flujo Φ inducido por F . Más aún, bajo **A2'**, para $t \geq 0$ suficientemente grande se tiene la estimación

$$\sup_{0 \leq h \leq T} \|X(t+h) - \Phi_h(X(t))\| \leq C(T)[\Delta(t-1, T+1) + \sup_{t \leq s \leq t+T} \bar{\gamma}(s)] \quad (2.14)$$

donde $C(T)$ es una constante que depende solo de T y F .

Procesos de Robbins-Monro

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_n\}$ una secuencia no decreciente de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} . Se dice que el proceso estocástico $\{x_n\}$ dado por (2.7) satisface la condición Robbins-Monro (o ruido de diferencia de martingalas) [14] si

1. $\{\gamma_n\}$ es una secuencia determinista.
2. $\{U_n\}$ es adaptada: U_n es medible con respecto a \mathcal{F}_n para cada $n \geq 0$.
3. $\mathbb{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$.

Proposición 2.3.4 ([1, Proposición 4.2]). *Sea $\{x_n\}$ dado por (2.7) un algoritmo Robbins-Monro. Suponer que para algún $q \geq 2$*

$$\sup_n \mathbb{E}(\|U_{n+1}\|^q) < \infty$$

y

$$\sum_n \gamma_n^{1+q/2} < \infty$$

Entonces la condición **A1** de la Proposición 2.3.3 se cumple con probabilidad 1.

Observación 2.3.5. Suponer que $\{\gamma_n\}$ es una secuencia de variables aleatorias tales que γ_{n+1} es \mathcal{F} medible. Entonces la Proposición 2.3.4 se mantiene válida siempre que se fortalezca la hipótesis sobre $\{U_n\}$ a

$$\sup_n \mathbb{E}(\|U_{n+1}\|^q | \mathcal{F}_n) \leq C$$

para alguna constante $C < \infty$, y reemplazando la hipótesis sobre $\{\gamma_n\}$ por

$$\mathbb{E}(\sum_n \gamma_n^{1+q/2}) < \infty.$$

La secuencia $\{U_n\}$ se dice *subgaussiana* si existe un número positivo Γ tal que $\forall \theta \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbb{E}(\exp[\langle \theta, U_{n+1} \rangle] | \mathcal{F}_n) \leq \exp\left[\frac{\Gamma}{2} \|\theta\|^2\right]. \quad (2.15)$$

Esto se tiene cuando por ejemplo $\|U_n\| \leq \sqrt{\Gamma}$.

Proposición 2.3.6 ([1, Proposición 4.4]). Sea $\{x_n\}$ dado por (2.7) un algoritmo Robbins-Monro. Suponer que $\{U_n\}$ es subgaussiana y que $\{\gamma_n\}$ es una secuencia determinista tal que

$$\sum_n e^{-c/\gamma_n} < \infty$$

para cada $c > 0$. entonces la hipótesis **A1** de la Proposición 2.3.3 se satisface con probabilidad 1. Por lo tanto si **A2** y **A2'** se tienen casi seguramente y F tiene una única curva integral, el proceso interpolado X es casi seguramente una pseudotrayectoria asintótica de el flujo.

Observación 2.3.7. Las Proposiciones 2.3.4 y 2.3.6 asumen un algoritmo tipo Robbins-Monro. Sin embargo no es difícil verificar que las conclusiones a tales propiedades se mantienen si $\{x_n\}$ satisface una recursión mas general

$$x_{n+1} - x_n = \gamma_{n+1}(F(x_n) + U_{n+1} + b_{n+1}), \quad (2.16)$$

donde U_n es un ruido de diferencia de martingalas y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ casi seguramente.

2.3.3. Conjuntos Límites de Pseudotrayectorias Asintóticas

Nociones Básicas de Recurrencia

Sea Φ un flujo o semiflujo en el espacio métrico (M, d) . Se denota por $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ si Φ es un semiflujo y $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ si Φ es flujo.

Un subconjunto $A \subset M$ se dice *positivamente invariante* si $\Phi_t(A) \subset A$ para todo $t \geq 0$. Se dice *invariante* si $\Phi(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Un punto $p \in M$ es un *equilibrio* si $\Phi_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Cuando M es una variedad y Φ es el flujo inducido por un campo vectorial F , los equilibrios coinciden con los ceros de F . Se denota $E_q(\Phi)$ al conjunto de equilibrios.

Un punto $p \in M$ es un *punto periódico* de período $T > 0$ si $\Phi_T(p) = p$ para algún $T > 0$ y $\Phi_t(p) \neq p$ para $0 < t < T$. Se denota $Per(\Phi)$ la clausura del conjunto de órbitas periódicas.

Un punto $p \in M$ es un *punto omega límite* de x si $p = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \Phi_{t_k}(x)$ para alguna secuencia $t_k \rightarrow \infty$. El *conjunto omega límite* de x , $\omega(x)$ es el conjunto de los puntos omega límite de x . Se denota $\mathcal{L}_+(\Phi) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)}$ al conjunto límite.

La *órbita hacia adelante* de $x \in M$ es el conjunto $\gamma^+(x) = \{\Phi_t(x) : t \geq 0\}$ y la *órbita* de x es $\gamma(x) = \{\Phi_t(x) : t \in \mathbb{T}\}$. Si $\gamma^+(x)$ tiene clausura compacta, entonces $\omega(x)$ es un conjunto compacto, conexo e invariante, y además se tiene que $\overline{\gamma^+(x)} = \gamma^+(x) \cup \omega(x)$.

Cadena-Recurrencia y Atractores

Sea $\delta > 0, T > 0$. Una (δ, T) -pseudo-órbita desde $a \in M$ hasta $b \in M$ es una secuencia finita de trayectorias parciales

$$\{\Phi_t(y_i) : 0 \leq t \leq t_i\}; i = 0, \dots, k-1; t_i \geq T$$

tal que

$$\begin{aligned} d(y_0, a) &< \delta, \\ d(\Phi_{t_j}(y_j), y_{j+1}) &< \delta, j = 0, \dots, k-1; \\ y_k &= b. \end{aligned}$$

Se escribe $a \leftrightarrow b$ si para cada $\delta > 0, T > 0$ existe una (δ, T) -pseudo-órbita de a hasta b . Si $a \leftrightarrow a$ entonces a se dice *cadena-recurrente*. Si cada punto de M es cadena-recurrente, entonces Φ es un semiflujo (o flujo) cadena-recurrente. Si $a \leftrightarrow b$ para todo $a, b \in M$ se dice que el (semi) flujo Φ es *cadena-transitivo*.

Se denota por $R(\Phi)$ al conjunto de puntos cadena-recurrentes para Φ . Es fácil verificar que $R(\Phi)$ es un conjunto cerrado, positivamente invariante y que

$$E_q(\Phi) \subset Per(\Phi) \subset \mathcal{L}(\Phi) \subset R(\Phi).$$

Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto invariante no vacío. Φ es llamado cadena-recurrente en Λ si cada punto $p \in \Lambda$ es un punto cadena-recurrente para $\Phi|_\Lambda$, la restricción de Φ a Λ . En otras palabras, $\Lambda = R(\Phi|_\Lambda)$.

Un conjunto invariante compacto en el cual Φ es cadena-recurrente (o cadena-transitivo) es llamado un conjunto *internamente cadena-recurrente* (o *internamente cadena-transitivo*).

Un subconjunto $A \subset M$ es un *atractor* para Φ siempre que:

1. A es no vacío, compacto e invariante ($\Phi_t A = A$); y
2. A tiene una vecindad $W \subset M$ tal que $dist(\Phi_t x, A) \rightarrow 0$ uniformemente en $x \in W$, cuando $t \rightarrow \infty$.

La vecindad W es usualmente llamada una *vecindad fundamental* de A . El *dominio de atracción* de A ($\mathcal{B}(A)$) es el conjunto abierto positivamente invariante que contiene todos los puntos x tal que $dist(\Phi_t x, A) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si $A \neq M$ entonces A es llamado un *atractor propio*. Un *atractor global* es un atractor cuyo dominio de atracción es todo el espacio M . Un equilibrio (= punto estacionario) que es un atractor es llamado *asintóticamente estable*.

Lema 2.3.8 ([1, Lema 5.2]). *Sea $U \subset M$ un conjunto abierto con clausura compacta tal que $\Phi_T(\bar{U}) \subset U$ para algún $T > 0$. Entonces existe un atractor $A \subset U$ cuyo dominio de atracción $\mathcal{B}(A) \supset \bar{U}$.*

La siguiente proposición establece precisamente la relación entre las diferentes nociones que se han introducido en esta subsección.

Proposición 2.3.9. *Sea $\Lambda \subset M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Λ es internamente cadena-transitivo (ICT).
2. Λ es conexo e internamente cadena-recurrente.
3. Λ es un conjunto compacto, invariante y $\Phi|_\Lambda$ no admite atractores propios.

Corolario 2.3.10. *Sea A un atractor. Si un conjunto internamente cadena-transitivo K satisface que $K \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$, entonces $K \subset A$.*

Teorema 2.3.11. *Si M es compacto entonces $R(\Phi)$ es internamente cadena-recurrente.*

Las demostraciones de estos resultados se encuentran en [1], pag 23.

Corolario 2.3.12 ([1, Corolario 5.6]). *Sea $x \in M$ (no necesariamente compacto). Si $\gamma^+(x)$ es compacto, entonces $\omega(x)$ es internamente cadena-transitivo.*

Teorema del Conjunto Límite

Sea $X : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ una pseudotrayectoria asintótica de un semiflujo Φ . El conjunto límite $L(X)$ de X se define en analogía al conjunto omega límite de una trayectoria, es el conjunto de límites de secuencias convergentes $X(t_k)$, $t_k \rightarrow \infty$. Esto es

$$L(X) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{X([t, \infty))}.$$

Teorema 2.3.13 ([1, Teorema 5.7]). *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Sea X una pseudotrayectoria asintótica precompacta de Φ . Entonces $L(X)$ es internamente cadena-transitivo.*
2. *Sea $L \subset M$ un conjunto internamente cadena-transitivo, y asumir que M es localmente conexo por caminos. Entonces existe una pseudotrayectoria asintótica X tal que $L(X) = L$.*

2.3.4. Dinámica de Pseudotrayectorias Asintóticas

Atractores

Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow M$ una pseudotrayectoria asintótica de Φ . Para cada $T > 0$ se define

$$d_X(T) = \sup_{k \in \mathbb{N}} d(\Phi_T(X(kT)), X(kT + T)). \quad (2.17)$$

Si un punto $x \in M$ pertenece a la base de atracción de un atractor $A \subset M$ entonces $\Phi_t(x) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$. El próximo lema muestra que lo mismo es cierto para una pseudotrayectoria asintótica X siempre que $d_X(T)$ sea lo suficiente pequeño y M sea localmente compacto.

Lema 2.3.14 ([1, Lema 6.8]). *Sea M localmente compacto. Sea $A \subset M$ un atractor con base $\mathcal{B}(A)$ y sea $K \subset \mathcal{B}(A)$ un conjunto compacto no vacío. Existen números $T > 0, \delta > 0$ que dependen sólo de K tales que: Si X es una pseudotrayectoria asintótica con $X(0) \in K$ y $d_X(T) < \delta$, entonces $L(X) \subset A$.*

Teorema 2.3.15 ([1, Teorema 6.10]). *Sea A un atractor con base W , y $K \subset W$ un conjunto compacto. Si $X(t_k) \in K$ para alguna secuencia $t_k \rightarrow \infty$, entonces $L(X) \subset A$.*

Corolario 2.3.16 ([1, Corolario 6.11]). *Suponer que M es no compacto, pero si localmente compacto y que Φ es disipativa, esto es que existe un atractor global para Φ . Denotar $M \cup \{\infty\}$ la compactificación de un punto de M . Entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$ ó $L(X)$ es un subconjunto de M internamente cadena transitivo.*

Cuando se aplica al proceso estocástico de aproximación (2.7), las Proposiciones 2.3.4 y 2.3.6 bajo el supuesto que F es acotada y Lipschitz, el Corolario 2.3.16 implica que con probabilidad uno $X(t) \rightarrow \infty$ ó $L(X)$ es internamente cadena transitivo para el flujo inducido por F .

2.3.5. Convergencia con Probabilidad Positiva Hacia un Atrac-tor

Sea X un proceso estocástico a tiempo continuo definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con trayectorias continuas (o càd làg) que toman valores en M .

Suponer que $X(\cdot)$ es adaptado a una secuencia no decreciente de sub- σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ y que para todo $\delta > 0, T > 0$

$$\mathbb{P}(\sup_{s \geq t} [\sup_{0 \leq h \leq T} d(X(s+h), \Phi_h(X(s)))] \geq \delta | \mathcal{F}_t) \leq w(t, \delta, T) \quad (2.18)$$

para alguna función $w : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, \delta, T) \downarrow 0$.

Observación 2.3.17. Una condición suficiente para (2.18) es que

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq h \leq T} d(X(t+h), \Phi_h(X(t))) \geq \delta | \mathcal{F}_t) \leq \int_t^{t+T} r(t, \delta, T) dt \quad (2.19)$$

para alguna función $r : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\int_t^\infty r(t, \delta, T) < \infty$.

Conjuntos Alcanzables

Un punto $p \in M$ se dice *alcanzable* por X si para cada $t > 0$ y cada vecindad abierta U de p

$$\mathbb{P}(\exists s \geq t : X(s) \in U) > 0.$$

Lema 2.3.18 ([1, Lema 7.1]). *El conjunto $\text{Att}(X)$ de puntos alcanzables por X es cerrado, positivamente invariante bajo Φ y contiene casi seguramente a $L(X)$.*

Teorema 2.3.19 ([1, Teorema 7.3]). *Suponer que M es localmente compacto. Sea $A \subset M$ un atractor para Φ , con base de atracción $\mathcal{B}(A)$. Si $\text{Att}(X) \cap \mathcal{B}(A) \neq \emptyset$, entonces*

$$\mathbb{P}(L(X) \subset A) > 0.$$

Más aún, si $U \subset M$ es un conjunto abierto relativamente compacto, con $\bar{U} \subset \mathcal{B}(A)$, existen $\delta > 0, T > 0$ (dependiendo de U) tales que

$$\mathbb{P}(L(X) \subset A) \geq (1 - w(t, \delta, T))\mathbb{P}(\exists s \geq t : X(s) \in U).$$

Ejemplos

Proposición 2.3.20 ([1, Proposición 7.4]). *Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial Lipschitz. Considerar el proceso de difusión*

$$dX = F(X)dt + \sqrt{\epsilon(t)}dB_t,$$

donde ϵ es una función positiva decreciente tal que $\forall c > 0$

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{c}{\epsilon(t)}\right) < \infty.$$

Entonces

1. Para cada atractor $A \subset \mathbb{R}^m$ de F el evento

$$\Omega_A = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} d(X(t), A) = 0 \right\} = \{L(X) \subset A\}$$

tiene probabilidad positiva de ocurrencia y para cada conjunto abierto U relativamente compacto con $\bar{U} \subset \mathcal{B}(A)$

$$\mathbb{P}(\Omega_A) \geq \mathbb{P}(\exists s \geq t : X(s) \in U) \left(1 - \int_t^\infty C_1 \exp(-\delta^2) C_2(T) / \epsilon(s) ds\right) \quad (2.20)$$

con δ, T dados por el Lema 2.3.14 y $C_1, C_2(T)$ son constantes positivas (que dependen de F .)

2. En Ω_A , $L(X)$ es casi seguramente internamente cadena transitiva.
3. Si F es un campo vectorial disipativo (es decir, sin atractores propios), con atractor global A , entonces

$$\mathbb{P}(\Omega_A) = 1 - \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = \infty) > 0. \quad (2.21)$$

Proposición 2.3.21 ([1, Proposición 7.5]). *Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial Lipschitz acotado. Considere un algoritmo Robbins-Monro (2.7) satisfaciendo las hipótesis de las Proposiciones 2.3.4 ó 2.3.6. Entonces*

1. Para cada atractor $A \subset \mathbb{R}^m$ cuya base tiene intersección no vacía con $\text{Att}(X)$, el evento

$$\Omega_A = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} d(X(t), A) = 0 \right\} = \{L(X) \subset A\}$$

tiene probabilidad positiva de ocurrencia y para cada abierto U relativamente compacto tal que $\bar{U} \subset \mathcal{B}(A)$

$$\mathbb{P}(\Omega_A) \geq \mathbb{P}(\exists s \geq t : X(s) \in U) \left(1 - \int_t^\infty r(s, \delta, T) ds\right) \quad (2.22)$$

donde

$$r(s, \delta, T) = C_1 \exp\left(\frac{-\delta^2 C_2(T)}{\bar{\gamma}(s)}\right)$$

si $\{U_n\}$ es subgaussiano (Proposición 2.3.4), y

$$r(s, \delta, T) = C_3(q, T) \left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}(s)}}{\delta} \right)^q$$

bajo hipótesis más débiles dadas por la Proposición 2.3.6. δ, T dados por el Lema 2.3.14, $\bar{\gamma}$ definido en (3.17) y $C_1, C_2(T), C_3(q, T)$ constantes positivas.

2. En Ω_A , $L(X)$ es casi seguramente, internamente cadena transitiva.
3. Si F es un campo vectorial disipativo con atractor global A

$$\mathbb{P}(\Omega_A) = (1 - \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = \infty)) > 0. \quad (2.23)$$

2.3.6. Otros Resultados Relevantes

Teorema 2.3.22 ([5, Theorem 3.1.1]). Considerar un proceso discreto del tipo (2.3). Asumir que se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, $\sum_n \gamma_n = \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n - \gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}\gamma_n} = \hat{\gamma} \geq 0.$$

- (b) $x_n \rightarrow \bar{x}$ casi seguramente.

- (c) Existe un $\delta \in (0, 1]$ tal que

- (c.1) para una realización tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$, con $F(\bar{x}) = 0$, el ruido U_n puede ser descompuesto en $U_n = U'_n + U''_n$, donde

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n^{1-\delta} U'_{n+1} < \infty \quad \text{y} \quad U''_n = \mathcal{O}(\gamma_n^\delta),$$

- (c.2) la función F descrita en (2.4) es localmente acotada y es diferenciable en \bar{x} tal que $F(x) = \bar{F}(x - \bar{x}) + r(x)$, con $r(\bar{x}) = 0$ y $r(x) = o(\|x - \bar{x}\|)$ cuando $x \rightarrow \bar{x}$, y,

- (c.3) la matriz \bar{F} es estable, es decir, satisface que

$$\rho(\bar{F}) = \max\{\Re(\mu_j) : j = 1, \dots, k; \text{ con } \mu_j \in \mathbb{C} \text{ valor propio de la matriz } \bar{F}\} < 0,$$

mas aún la matriz $\bar{F} + \delta\hat{\gamma}\mathbf{I}$ es también estable.

Entonces, casi seguramente

$$\frac{1}{\gamma_n^\delta} (x_n - \bar{x}) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Capítulo 3

Dinámica Adaptativa y Resultados de Convergencia

En este capítulo se presenta el desarrollo de la variante a los modelos descritos en el Capítulo 1, se muestran los resultados obtenidos y las mejoras asociadas.

3.1. Definición del Modelo

Tal como en el capítulo introductorio se establece el modelo sobre el cual se trabajará:

Se considera un modelo dinámico del comportamiento adaptativo en un juego repetido, en el cual a medida que el juego evoluciona, cada jugador ajusta la percepción de sus estrategias en base a los pagos observados.

Se recuerdan las definiciones hechas en el Capítulo 1. Sea $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ el espacio de los jugadores. Para cada jugador $i \in \mathcal{P}$, S^i constituye el conjunto finito de sus estrategias puras y $G^i : S^i \times S^{-i} \rightarrow \mathbb{R}$ su función de pago, donde $S^{-i} = \prod_{j \neq i} S^j$. El espacio de estrategias mixtas sobre S^i se denota por $\Delta^i = \{z \in \mathbb{R}^{|S^i|} : z^i \geq 0, \sum_i z^i = 1\}$, y se define $\Delta = \prod_{i \in \mathcal{P}} \Delta^i$. Se considera finalmente $G^i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión multilineal de la función de pagos al conjunto de estrategias mixtas.

En la etapa n del juego repetido, cada jugador $i \in \mathcal{P}$ selecciona su jugada $s_n^i \in S^i$ de manera aleatoria utilizando estrategias mixtas $\pi_n^i = \sigma^i(x_n^i) \in \Delta^i$, que dependen del vector $x_n^i = (x_n^{is})_{s \in S^i}$ de percepciones del pago de las estrategias puras disponibles. La función $\sigma^i : \mathbb{R}^{|S^i|} \rightarrow \Delta^i$ es un mapeo continuo del espacio de las percepciones al espacio de estrategias mixtas. Se asume adicionalmente que $\sigma^{is}(\cdot) > 0 \forall s \in S^i$.

3.1.1. Regla de actualización

Al final de la etapa n , el jugador i observa su propio pago $g_n^i = G^i(s_n^i, s_n^{-i})$, y utiliza sólo esta información para ajustar su percepción de los resultados obtenidos con la estrategia escogida (y mantiene sin modificar el resto de estrategias), esto es,

$$x_{n+1}^{is} = \begin{cases} (1 - \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}})x_n^{is} + \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}g_{n+1}^i & \text{si } s = s_{n+1}^i, \\ x_n^{is} & \text{si no,} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde θ_n^{is} denota el número de veces que la estrategia s ha sido utilizada por el jugador $i \in \mathcal{P}$ hasta la etapa n . Por otra parte $a_i, b_i > 0$ son constantes características del jugador $i \in \mathcal{P}$. La incorporación de estas constantes se justifica como la presencia de indicadores propios para cada jugador, de sus propios gustos, de este modo distintos jugadores al recibir un mismo pago al jugar una estrategia s , y teniendo una igual percepción previa, pueden actualizar sus preferencias de manera distinta.

Como es usual la σ -álgebra generada por la historia hasta la etapa n se denota por $\mathcal{F}_n = \sigma((s_m, g_m)_{1 \leq m \leq n})$, donde $s_m = (s_m^1, \dots, s_m^N)$ y $g_m = (g_m^1, \dots, g_m^N)$.

3.2. Análisis Asintótico

El problema que presenta (3.1), y que no permite utilizar de inmediato las herramientas descritas en la Sección 2.3, es que el paso $\gamma_n^{is} = \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}$ es aleatorio y depende del vector de actualización, por esta razón se hace necesaria una reescritura del proceso de aprendizaje. Notar previamente que (3.1) se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} &= \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}(g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \\ &= \frac{a_i}{b_i + n\lambda_n^{is}}(g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_n^{is} = \frac{\theta_n^{is}}{n}$ se interpreta como la frecuencia empírica de la acción s para el jugador i en la etapa n . Dada la estructura particular de (3.1) se puede suponer que x_n vive en un subconjunto compacto del espacio de percepciones $\Omega = \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathbb{R}^{|S^i|}$ y por lo tanto los x_n^{is} , para cada $i \in \mathcal{P}, s \in S^i, n \in \mathbb{N}$ se consideran acotados. Notar que a diferencia con el modelo presentado en (1.2), por ahora no es necesario suponer que $\theta_0^{is} > 0$, y que por otra parte, la actualización se puede representar análogamente como:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} &= \frac{1}{n} \left(\frac{a_i}{\lambda_n^{is}}(g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n} \underbrace{\left[\frac{a_i}{\frac{b_i}{n} + \lambda_n^{is}} - \frac{a_i}{\lambda_n^{is}} \right]}_{:= \mathfrak{c}_{n+1}^{i,x}} (g_{n+1}^i - x_n^{is})\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \end{aligned}$$

Notar por otra parte que:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{c}_{n+1}^{i,x}| &\leq |g_{n+1}^i - x_n^{is}| \left| \frac{a_i}{\frac{b_i}{n} + \lambda_n^{is}} - \frac{a_i}{\lambda_n^{is}} \right| \\ &= \frac{1}{n} |g_{n+1}^i - x_n^{is}| \left| \frac{a_i b_i}{\lambda_n^{is} (b_i + \lambda_n^{is})} \right| \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis que λ_n^{is} se mantenga uniformemente alejado de 0, esto es, que exista una constante $\bar{\lambda} > 0$ tal que para todo $i \in \mathcal{P}, s \in S^i$, $\lambda_n^{is} \geq \bar{\lambda}$ (donde $\bar{\lambda}$ depende del vector de percepciones iniciales y de la aleatoriedad), entonces $\mathbf{c}_{n+1}^{i,x}$ converge a cero casi seguramente, más aún $\mathbf{c}_{n+1}^{i,x} = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

Se pretende ahora buscar un proceso que sea satisfecho por λ_n^{is} y que tenga el mismo tamaño de paso $\frac{1}{n}$. Para ello notar que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (n+1)\lambda_{n+1}^{is} &= \theta_{n+1}^{is} \\ &= \theta_n^{is} + \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \\ &= n\lambda_n^{is} + \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} \\ &= (n+1)\lambda_n^{is} + \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^{is} - \lambda_n^{is} &= \frac{1}{n+1} \left[\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \left[\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} \right] \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n+1} \left[\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} \right] + \underbrace{\frac{-1}{n+1} \left[\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} \right]}_{:=\mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} + \mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda} \right). \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda} = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

Con esto es posible escribir el proceso (3.1) como un proceso conjunto con un paso de tamaño común ($1/n$) para x_n^{is} y λ_n^{is} , tal como sigue,

$$\begin{cases} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} = \frac{1}{n} \left(\frac{a_i}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} + \mathbf{c}_{n+1}^{i,x} \right) \\ \lambda_{n+1}^{is} - \lambda_n^{is} = \frac{1}{n} \left(\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} + \mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda} \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

Aplicando la Proposición 2.2.1 al lado derecho del sistema (3.2), considerando para ello las variables aleatorias $Y_n^1 = \frac{a_i}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}}$ para la primera ecuación e $Y_n^2 = \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is}$ para la segunda, se obtiene la siguiente representación equivalente del proceso:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{is} - x_n^{is} &= \frac{1}{n} \left(\mathbb{E} \left[\frac{a_i}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} | \mathcal{F}_n \right] + \mathfrak{M}_{n+1}^{is} \right), \\ \lambda_{n+1}^{is} - \lambda_n^{is} &= \frac{1}{n} \left(\mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}}] - \lambda_n^{is} | \mathcal{F}_n \right] + \mathfrak{N}_{n+1}^{is}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Con

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{n+1}^{is} &= \frac{a_i}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \mathbb{E} \left[\frac{a_i}{\lambda_n^{is}} (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} | \mathcal{F}_n \right] + \mathbf{c}_{n+1}^{i,x} \\ &= \frac{a_i}{\lambda_n^{is}} \left[(g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \sigma^{is}(x_n^i) (G^i(s, \sigma^{-i}(x_n)) - x_n^{is}) \right] + \mathbf{c}_{n+1}^{i,x}, \\ \mathfrak{N}_{n+1}^{is} &= \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} - \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} | \mathcal{F}_n] + \mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda} \\ &= \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \lambda_n^{is} - (\sigma^{is}(x_n^i) - \lambda_n^{is}) + \mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda} \\ &= \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \sigma^{is}(x_n^i) + \mathbf{c}_{n+1}^{i,\lambda}. \end{aligned}$$

Desde ahora, se denota $\mathbf{e}_n = (\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n)$ al ruido asociado al proceso.

El esquema (3.3) permite hacer frente al carácter aleatorio del paso en (3.2). El objetivo es utilizar la Propiedad (2.3.3), para ello interesa el comportamiento asintótico de una dinámica continua relacionada al proceso (3.3), y ésta viene dada por,

$$\begin{cases} \dot{x}_t^{is} &= \frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{\lambda_t^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x_t)) - x_t^{is}) &:= \Xi_x^{is}(x_t, \lambda_t), \\ \dot{\lambda}_t^{is} &= \sigma^{is}(x_t^i) - \lambda_t^{is} &:= \Xi_\lambda^{is}(x_t, \lambda_t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Con $\Xi_x : \Omega \times \Delta \rightarrow \Omega$ y $\Xi_\lambda : \Omega \times \Delta \rightarrow \prod_{i \in \mathcal{P}} \Delta_0^i$, donde $\Delta_0^i = \{z \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}^i|} : \sum_{s \in \mathcal{S}^i} z^s = 0\}$, el espacio tangente de Δ^i . Se denota Ξ a la función definida por $\Xi(x, \lambda) = (\Xi_x(x, \lambda), \Xi_\lambda(x, \lambda))$.

Se recuerda que el proceso de aprendizaje para el modelo mostrado por [Cominetti et al.](#) se puede considerar como sigue:

$$x_{n+1}^{is} - x_n^{is} = \frac{1}{n} \left(\sigma^{is}(x_n^i) [G^i(s, \sigma^{-i}(x_n)) - x_n^{is}] + \mathfrak{L}_{n+1}^{is} \right), \quad (3.5)$$

donde el término de ruido es nuevamente una diferencia de martingalas, dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{n+1}^{is} &= (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \mathbb{E} [(g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} | \mathcal{F}_n] \\ &= (g_{n+1}^i - x_n^{is}) \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \sigma^{is}(x_n^i) [G^i(s, \sigma^{-i}(x_n)) - x_n^{is}] \end{aligned}$$

Se recuerda además que la dinámica continua asociada a ese proceso viene dada por la ecuación 1.7, y tiene la siguiente forma:

$$\dot{x}_t^{is} = \sigma^{is}(x_t^i) [G^i(s, \sigma^{-i}(x_t)) - x_t^{is}] := \Phi^{is}(x_t) \quad (3.6)$$

Observación 3.2.1. Se cumple que:

$(x, \sigma(x)) \in \Omega \times \Delta$ es punto estacionario de (3.4) $\Leftrightarrow x \in \Omega$ es punto estacionario de (3.6)

A continuación se presenta el conocido *Lema de Kronecker*, resultado que usualmente se utiliza para estudiar convergencia de series que involucran variables aleatorias.

Lema 3.2.2. *Sea $(d_n)_n$ una secuencia infinita de números reales, tales que $\sum_n d_n = d$, $d \in \mathbb{R}$. Entonces para $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$ y $b_n \rightarrow \infty$ se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k d_k = 0.$$

Demostración. Se considera las sumas parciales:

$$S_N = \sum_{k=1}^N b_k d_k, \quad D_N = \sum_{k=1}^N d_k.$$

Y notando que $D_1 = d_1$, simples manejos algebraicos llevan a lo siguiente:

$$\begin{aligned} S_N &= b_1 d_1 + \sum_{k=2}^N b_k (D_k - D_{k-1}) \\ &= b_1 d_1 + [b_N D_N + \sum_{k=2}^{N-1} b_k D_k] - [\sum_{k=2}^{N-1} b_{k+1} D_k + b_2 D_1] \\ &= b_N D_N - D_1 (b_2 - b_1) - \sum_{k=2}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k) \\ &= b_N D_N - \sum_{k=1}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k). \end{aligned}$$

Se considera $\epsilon > 0$ y un N suficientemente grande, tal que $|D_k - d| < \epsilon$ para $k \geq N$, entonces para $n > N$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k d_k \right| &= \left| D_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n-1} D_k (b_{k+1} - b_k) \right| \\ &= \left| D_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k) - \frac{1}{b_n} \sum_{k=N}^{n-1} D_k (b_{k+1} - b_k) \right| \\ &\leq \left| D_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k) - \frac{1}{b_n} \sum_{k=N}^{n-1} d (b_{k+1} - b_k) \right| + \left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) (D_k - d) \right| \\ &\leq \left| D_n - \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k) - \frac{d}{b_n} [b_n - b_N] \right| + \underbrace{\frac{1}{b_n} \sum_{k=N}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)}_{<1} \underbrace{|D_k - d|}_{<\epsilon} \\ &\leq |(D_n - d)| + \underbrace{\left| \frac{1}{b_n} \left[\sum_{k=1}^{N-1} D_k (b_{k+1} - b_k) + d b_N \right] \right|}_{\leq K} + \epsilon \end{aligned}$$

Con $K > 0$ una constante suficientemente grande. Tomando $n \rightarrow \infty$ el primer término converge a 0, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = d$ y el segundo también converge a 0, pues $b_n \rightarrow \infty$. En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k d_k \leq \epsilon$ para ϵ arbitrario, de donde se tiene lo pedido. \square

El siguiente lema es un resultado trascendental en cuanto relaciona el acotamiento de $\sigma^{is}(x_n^i)$ con el acotamiento asintótico (por debajo) de λ_n^{is} .

Lema 3.2.3. *Asumir que existe $\bar{\sigma}$ tal que $\pi_n^{is} = \sigma^{is}(x_n^i) \geq \bar{\sigma}$, para todo $i \in \mathcal{P}, s \in S^i$, entonces*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{is} \geq \bar{\sigma},$$

casi seguramente, para todo $i \in \mathcal{P}, s \in S^i$.

Demostración. Recordar que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}\}} | \mathcal{F}_n] = \sigma^{is}(x_n^i) \geq \bar{\sigma}$. Por otro lado se definen los siguiente procesos aleatorios $(\mathbf{m}_n^{is})_n, (\mathbf{p}_n^{is})_n$ como siguen:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n^{is} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}], \\ \mathbf{p}_n^{is} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}]). \end{aligned}$$

Notar que por lo probado en 2.2 en la Proposición 2.2.1, ambos procesos son martingalas y más aún $\partial \mathbf{m}_k^{is} = \mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is} = \mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}]$ es una diferencia de martingalas, y está acotada por 2. Por otra parte, claramente $\mathbb{E}[\mathbf{m}_n^{is}]^2 < \infty$ para cada n y en consecuencia $\mathbb{E}[(\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})(\mathbf{m}_l^{is} - \mathbf{m}_{l-1}^{is})] = 0$ para $k \neq l$. De donde,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathbf{p}_n^{is})^2] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})^2\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1, l \neq k}^n \frac{1}{k} \frac{1}{l} (\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})(\mathbf{m}_l^{is} - \mathbf{m}_{l-1}^{is})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})^2\right] + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1, l \neq k}^n \frac{1}{lk} \underbrace{\mathbb{E}[(\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})(\mathbf{m}_l^{is} - \mathbf{m}_{l-1}^{is})]}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \underbrace{\mathbb{E}[(\mathbf{m}_k^{is} - \mathbf{m}_{k-1}^{is})^2]}_{\leq 4}. \end{aligned}$$

Luego tomando supremo en n , y acotando el lado derecho por la serie infinita, se tiene:

$$\sup_n \mathbb{E}[\mathbf{p}_n^{is}] \leq 4 \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k}\right)^2 < \infty.$$

Entonces por el Teorema 2.2.6 de convergencia de martingalas aplicado a $q = 2$, $\exists p \in L^2(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{R})$ variable aleatoria tal que $\mathbf{p}_n^{is} \rightarrow p$ casi seguramente cuando $n \rightarrow \infty$.

Aplicando el Lema de Kronecker para $b_k = k$ y $d_k = \frac{1}{k} (\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}])$, que claramente satisfacen las hipótesis ($0 < b_1 < b_2 < \dots, b_k \rightarrow \infty$ y $\sum_k d_k = p$), se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \frac{1}{k} (\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}]) = 0.$$

Con lo que finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s_k^i=s\}} | \mathcal{F}_{k-1}]) &= \lambda_n^{is} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{\sigma^{is}(x_{k-1}^i)}_{\geq \bar{\sigma}} \\ &\leq \lambda_n^{is} - \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Tomando $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ a ambos lados se obtiene el resultado. \square

Observación 3.2.4. Tras el supuesto que x_n vive en un subconjunto compacto de Ω , se asume acotado, y por lo tanto existe un $\bar{\delta} > 0$ (que puede depender del x_0 y de la aleatoriedad) tal que $\sigma^{is}(x_n^i) \geq \bar{\delta}$ para todo $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$, $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia el Lema anterior es aplicable para el modelo aquí descrito.

Proposición 3.2.5. *El proceso discreto (3.3) converge casi seguramente a un conjunto ICT para la dinámica continua (3.4).*

Demostración. Se utilizará para esto la Proposición 2.3.3 establecida en el Capítulo 2, notar adicionalmente que las Proposiciones 2.3.4 y 2.3.6 entregan condiciones suficientes para establecer una de las hipótesis requeridas.

Claramente $\gamma_n = \frac{1}{n}$ satisface los requerimientos,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$,
- $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$.

Además para cada $c > 0$, $e^{-c} < 1$, entonces $\sum_n (e^{-c})^n < \infty$. Por otro lado, por construcción $\sup_n \|(x_n^{is}, \lambda_n^{is})\| < \infty$ y gracias a la hipótesis inicial la función F que describe la regla de actualización (2.7), que viene dada por

$$F(x_n^{is}, \lambda_n^{is}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{is}(x_n^i)}{\lambda_n^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x_n)) - x_n^{is}) \\ \sigma^{is}(x_n^i) - \lambda_n^{is} \end{bmatrix}$$

satisface las hipótesis de regularidad requeridas. Resta analizar el ruido $\epsilon_n = (\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n)$ asociado al proceso.

Notar que $\mathfrak{N}_{n+1}^{is} = \mathbb{1}_{\{s=s_{n+1}^i\}} - \sigma^{is}(x_n^i) + \mathfrak{c}_{n+1}^i$ es acotado casi seguramente y se puede descomponer por un término de diferencia de martingalas y otro término que converge a 0 casi seguramente. Por su parte \mathfrak{M}_{n+1}^{is} también se descompone como una diferencia de

martingalas y otro término que converge a 0 casi seguramente, además para una constante $D > 0$ suficientemente grande se tiene que $\|\mathfrak{M}_{n+1}^{is}\| \leq \frac{D}{\lambda_n^{is}}$. El Lema 3.2.3 implica que \mathfrak{M}_n es acotado casi seguramente, de donde ϵ_n es acotado casi seguramente por alguna constante positiva \bar{D} , de donde ϵ_n es subgaussiano y por lo tanto se cumplen las hipótesis de la Propiedad 2.3.6, que asegura que la hipótesis **A1** de la Propiedad 2.3.3 se satisface con probabilidad 1.

En consecuencia el proceso interpolado definido en (2.8) es una pseudotrayectoria asintótica precompacta para el flujo inducido por $F(x_n^{is}, \lambda_n^{is})$, finalmente el Teorema 2.3.13 parte 1. implica que el conjunto límite $L(x_n, \lambda_n)$ es un ICT para la dinámica (3.4).

□

Se define como antes la función $C : \Omega \rightarrow \Omega$, como $C^{is}(x) = G^i(s, \sigma^{-i}(x))$. Y en analogía a los resultados sobre atractores globales de los trabajos en que se basa esta memoria, se establece la siguiente proposición.

Proposición 3.2.6. *Asumir que C es $\|\cdot\|_\infty$ -contractante, y que para cada $i \in \mathcal{P}$, la función σ^i es $\|\cdot\|_\infty$ -Lipschitz. Entonces existe un único punto estacionario $(x_*, \sigma(x_*)) \in \Omega \times \Delta$ de la dinámica (3.4). Más aún, el conjunto $\{(x_*, \sigma(x_*))\}$ es un atractor global y el proceso (3.3) converge casi seguramente a $(x_*, \sigma(x_*))$.*

Demostración. De acuerdo a la Observación 3.2.1, $(x_*, \sigma(x_*)) \in \Omega \times \Delta$ es un punto estacionario de (3.4) si y sólo si $C(x_*) = x_*$, y por lo tanto la existencia y la unicidad se obtienen del hecho que C es $\|\cdot\|_\infty$ -contractante (punto fijo de Banach).

Sean $0 \leq L < 1$ y K_i las constantes Lipschitz asociadas a las funciones C y σ^i , $i \in \mathcal{P}$, respectivamente. Tomando $a < \min\{\min_{i \in \mathcal{P}} a_i, 1\}$ y $K = \max_{i \in \mathcal{P}} K_i$. Se quiere encontrar una función de Lyapunov estricta, esto es, una función V que decrece a lo largo de la trayectoria de solución, y que verifica $V^{-1}(\{0\}) = \{(x_*, \lambda_*)\} = \{(x_*, \sigma(x_*))\}$. Se considera entonces $V : \Omega \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$V(x, \lambda) = \max \left\{ \frac{1}{a} \|x - x_*\|_\infty, \frac{1}{K} \|\lambda - \lambda_*\|_\infty \right\}.$$

La función V es el máximo de un número finito de funciones suaves, en consecuencia es absolutamente continua y sus derivadas vienen a ser la evaluación de las derivadas de las funciones que alcanzan el máximo. Se distinguen dos casos:

- 1-. $V(x_t, \lambda_t) = \frac{1}{a} \|x_t - x_*\|_\infty$. Sea $i \in \mathcal{P}$, y $s \in S^i$ tales que $\|x_t - x_*\|_\infty = |x_t^{is} - x_*^{is}|$. Dado que x_t es acotado, entonces $\exists \xi > 0$ tal que $\sigma^{is}(x_t^i) \geq \xi$ para todo $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$, $t > 0$. Se asumirá inicialmente que $x_t^{is} - x_*^{is} \geq 0$, ya que el análisis para el otro caso es análogo. Sigue entonces que para casi todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_t, \lambda_t) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dt}(x_t^{is} - x_*^{is}) \\
&= \frac{1}{a} \frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{\lambda_t^{is}} (C^{ris}(x_t) - x_t^{is}) \\
&= \frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{a \lambda_t^{is}} (C^{ris}(x_t) - x_t^{is} + \underbrace{x_*^{is} - C^{ris}(x_*)}_{=0}) \\
&= \frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{a \lambda_t^{is}} (-[x_t^{is} - x_*^{is}] + [C^{ris}(x_t) - C^{ris}(x_*)]) \\
&\leq \frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{a \lambda_t^{is}} (-\|x_t - x_*\|_\infty + \underbrace{\|C(x_t) - C(x_*)\|_\infty}_{\leq L\|x_t - x_*\|_\infty}) \\
&\leq \underbrace{-\frac{a_i \sigma^{is}(x_t^i)}{a \lambda_t^{is}}}_{\leq -\xi} (1 - L)\|x_t - x_*\|_\infty \\
&\leq -\xi(1 - L)\|x_t - x_*\|_\infty \\
&= -\xi(1 - L)\frac{a}{a}\|x_t - x_*\|_\infty \\
&= -a\xi(1 - L)V(x_t, \lambda_t).
\end{aligned}$$

2-. $V(x_t, \lambda_t) = \frac{1}{K}\|\lambda_t - \lambda_*\|_\infty$. Sea $i \in \mathcal{P}$ y $s \in S^i$ tales que se alcanza el máximo $\|\lambda_t - \lambda_*\|_\infty = |\lambda_t^{is} - \lambda_*^{is}|$. Tal como en el caso anterior se asume que $\lambda_t^{is} - \lambda_*^{is} \geq 0$. Entonces para casi todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_t, \lambda_t) &= \frac{1}{K} \frac{d}{dt}(\lambda_t^{is} - \lambda_*^{is}) \\
&= \frac{1}{K} (\sigma^{is}(x_t^i) - \lambda_t^{is} + \underbrace{\lambda_*^{is} - \sigma^{is}(x_*^i)}_{=0}) \\
&\leq \frac{1}{K} |\sigma^{is}(x_t^i) - \sigma^{is}(x_*^i)| - \frac{1}{K} \|\lambda_t - \lambda_*\|_\infty \\
&\leq \frac{\max_i K_i}{K} \|x_t - x_*\|_\infty - V(x_t, \lambda_t) \\
&= a \underbrace{\frac{1}{a} \|x_t - x_*\|_\infty}_{\leq V(x_t, \lambda_t)} - V(x_t, \lambda_t) \\
&\leq -V(x_t, \lambda_t)[1 - a],
\end{aligned}$$

y de las suposiciones iniciales $a < 1$. Nuevamente el caso $\lambda_t^{is} - \lambda_*^{is} < 0$ es análogo.

Se tiene finalmente que para alguna constante $\mathfrak{K} > 0$, $V'(x_t, \lambda_t) \leq -\mathfrak{K}V(x_t, \lambda_t)$. Consecuentemente V decrece a velocidad exponencial a lo largo de las trayectorias de las soluciones de la dinámica, de donde $\{(x_*, \lambda_*)\}$ es un atractor global y por construcción

$V(x, \lambda) = 0$ ssi $(x, \lambda) = (x_*, \lambda_*)$. En consecuencia, por el Corolario 2.3.10, $\{(x_*, \lambda_*)\}$ es el único ICT para la dinámica (3.4), y el proceso (3.3) converge casi seguramente a $(x_*, \sigma(x_*))$ gracias a las Proposición 3.2.5. \square

3.3. Regla Logit

Tal como en los trabajos en que se basa esta memoria, se focalizará el análisis en una regla de decisión particular: la regla Logit, que es bastante utilizada en modelos de decisión discretos así también como en teoría de juegos. Formalmente la regla de decisión $\sigma : \Omega \rightarrow \Delta$ viene dada por:

$$\sigma^{is}(x^i) = \frac{\exp(\beta_i x^{is})}{\sum_{r \in S^i} \exp(\beta_i x^{ir})}, \quad (3.7)$$

para todo $i \in \mathcal{P}$, y $s \in S^i$. Donde el parámetro $\beta_i > 0$ tiene un efecto suavizante cuando $\beta_i \downarrow 0$, conduciendo a una elección uniforme, mientras que cuando $\beta_i \uparrow \infty$ la probabilidad se concentra en las estrategias puras con mas altas percepciones.

Lema 3.3.1 ([7, Proposición 3]). *Bajo la regla de decisión Logit (3.7), si $x_* \in \Omega$ es un punto estacionario para la dinámica (3.4), entonces $\sigma(x)$ es un equilibrio de Nash de un juego subyacente, donde el espacio de estrategias para cada jugador $i \in \mathcal{P}$ es Δ^i , y su función de pago $\mathcal{G}^i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por*

$$\mathcal{G}^i(\pi) = \sum_{s \in S^i} \pi^{is} G^i(s, \pi^{-i}) - \frac{1}{\beta_i} \sum_{s \in S^i} \pi^{is} (\ln(\pi^{is}) - 1). \quad (3.8)$$

3.3.1. Convergencia casi segura

Con el fin de utilizar la Propiedad 3.2.6 para el caso particular de la regla de decisión Logit, se definen, al igual que en los modelos anteriores, las siguientes variables

$$\omega = \max_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j \neq i} \beta_j, \quad (3.9)$$

$$\theta = \max_{\substack{i \in \mathcal{P}, s \in S^j \\ u, v \in \tilde{S}^{-i}}} |G^i(s, u) - G^i(s, v)|, \quad (3.10)$$

donde $\tilde{S}^{-i} = \{(u, v) \in S^{-i} \times S^{-i} : u^k \neq v^k \text{ para exactamente un } k\}$. θ se interpreta como la máxima desviación unilateral del pago que un sólo jugador puede enfrentar.

Teorema 3.3.2. *Si $2\theta\omega < 1$, el proceso discreto (3.3) converge casi seguramente al único punto estacionario $(x_*, \sigma(x_*))$ de la dinámica (3.4).*

Demostración. Utilizando la Proposición 1.1.3, probada en [7, Proposición 5] se tiene que bajo la regla Logit y con $2\theta\omega < 1$ la función $C(x)$ definida antes resulta ser $\|\cdot\|_\infty$ -contratante. Por otro lado notar que para cada $i \in \mathcal{P}$ la función σ^i es una función suave

definida en un conjunto compacto y por lo tanto es $\|\cdot\|_\infty$ -Lipschitz. Se cumplen por lo tanto las hipótesis de la Proposición 3.2.6, y el resultado es inmediato. \square

Radio de convergencia

Se pretende ahora justificar la inclusión de un contador de acciones previas en términos del radio de convergencia con que ambos procesos de aprendizaje (3.3) y (3.5) convergen casi seguramente a (x_*, λ_*) y x_* respectivamente. Tal radio de convergencia está íntimamente relacionado con la mayor parte real de los valores propios de la matriz jacobiana de las funciones $\Xi = (\Xi_x, \Xi_\lambda)$ y Φ en sus respectivos puntos estacionarios.

Se denota por $\rho(\mathcal{B})$ a la parte real maximal de los valores propios de la matriz $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, esto es, $\rho(\mathcal{B}) = \max\{\Re(\mu_j) : j = 1, \dots, k; \text{ donde } \mu_j \in \mathbb{C} \text{ es un valor propio de la matriz } \mathcal{B}\}$. Se dice que la matriz \mathcal{B} es estable si $\rho(\mathcal{B}) < 0$.

De ahora en adelante, en el caso que $\theta\omega < 1$ se asumirá además que, para cada $i \in \mathcal{P}$ $a_i \in (\frac{1}{2(1-\theta\omega)}, \frac{1}{1-\theta\omega}]$ ¹. En analogía al Lema 1.2.4, se establece el siguiente resultado para la dinámica propuesta:

Lema 3.3.3. *Sea $2\theta\omega < 1$, y considerar (x_*, λ_*) y x_* los únicos puntos estacionarios de las dinámicas (3.4) y (3.6) respectivamente. Entonces*

$$-1 \leq \rho(\nabla\Xi(x_*, \lambda_*)) < \frac{-1}{2} \leq \frac{-N}{\sum_{k \in \mathcal{P}} S^k} \leq \rho(\nabla\Phi(x_*)) < 0. \quad (3.11)$$

Demostración. En efecto, se pretende calcular $\nabla\Xi(x_*, \lambda_*)$, para ello notar que tendrá la siguiente forma

$$\nabla\Xi(x_*, \lambda_*) = \begin{pmatrix} \nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*) & \nabla_\lambda \Xi_x(x_*, \lambda_*) \\ \nabla_x \Xi_\lambda(x_*, \lambda_*) & \nabla_\lambda \Xi_\lambda(x_*, \lambda_*) \end{pmatrix}.$$

Notar además que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi_\lambda^{is}}{\partial \lambda^{jr}}(x_*, \lambda_*) &= \frac{\partial}{\partial \lambda^{jr}}[\sigma^{is}(x^i) - \lambda^{is}](x_*, \lambda_*) \\ &= 0 - \mathbb{1}_{\{jr=is\}}, \\ \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial \lambda^{jr}}(x_*, \lambda_*) &= \frac{\partial}{\partial \lambda^{jr}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) \right] (x_*, \lambda_*) \\ &= \underbrace{(G^i(s, \sigma^{-i}(x_*)) - x_*^{is})}_{=0} \frac{\partial}{\partial \lambda^{jr}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} \right] (x_*, \lambda_*) \\ &= 0, \end{aligned}$$

¹Esto se interpreta como que cada jugador adapta su regla de actualización en base al comportamiento apreciado sobre el resto de los jugadores.

para todo $i, j \in \mathcal{P}$, $(s, r) \in S^i \times S^j$ pues (x_*, λ_*) es un punto estacionario para la dinámica continua. Con esto,

$$\nabla_{\lambda} \Xi_x(x_*, \lambda_*) = (0), \quad \nabla_{\lambda} \Xi_{\lambda}(x_*, \lambda_*) = -I,$$

con I la matriz identidad, y (0) la matriz de 0's. De esta manera la matriz $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)$ está formada por bloques, y el bloque superior derecho, es un bloque de ceros, luego los valores propios que interesarán serán los de la matriz $\nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)$, pues el bloque inferior derecho es menos la identidad, en el caso del término diagonal de $\nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)$ se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{is}}(x_*, \lambda_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{is}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) \right] (x_*, \lambda_*) \\ &= (G^i(s, \sigma^{-i}(x_*)) - x_*^{is}) \frac{\partial}{\partial x^{is}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} \right] (x_*, \lambda_*) \\ &\quad + \frac{a_i \sigma^{is}(x_*^i)}{\lambda_*^{is}} \frac{\partial}{\partial x^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) (x_*, \lambda_*) \\ &= 0 + a_i [0 - 1] \\ &= -a_i. \end{aligned}$$

Ahora para el caso $i = j$, $r \neq s$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{ir}}(x_*, \lambda_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{ir}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) \right] (x_*, \lambda_*) \\ &= \frac{a_i \sigma^{is}(x_*^i)}{\lambda_*^{is}} \frac{\partial}{\partial x^{ir}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) (x_*, \lambda_*) \\ &\quad + (G^i(s, \sigma^{-i}(x_*)) - x_*^{is}) \frac{\partial}{\partial x^{ir}} \left(\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} \right) (x_*, \lambda_*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se define

$$\begin{aligned} G^i(s, r, \sigma^{-(i,j)}(x_*)) &:= \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \mathbf{1}_{\{r=s^j\}} \prod_{k \neq i, j} \lambda_*^{ks^k} \\ &= \sum_{s^{-i} \in S^{-i}, s^j=r} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \lambda_*^{ks^k}, \end{aligned}$$

y con esto notar que $|G^i(s, r, \sigma^{-(i,j)}(x_*)) - G^i(s, \sigma^{-i}(x_*))| \leq \theta$.

Finalmente para el último caso, $i \neq j \in \mathcal{P}$, $(s, r) \in S^i \times S^j$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*, \lambda_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left[\frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) \right] (x_*, \lambda_*) \\
&= \frac{a_i \sigma^{is}(x_*^i)}{\lambda_*^{is}} \frac{\partial}{\partial x^{jr}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}) (x_*, \lambda_*) \\
&= a_i \frac{\partial}{\partial x^{jr}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x))) (x_*, \lambda_*) \\
&= a_i \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left(\sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i} \sigma^{ks^k}(x) \right) (x_*, \lambda_*) \\
&= a_i \left(\sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \sigma^{ks^k}(x) \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \sigma^{js^j}(x) \right) (x_*, \lambda_*) \\
&= a_i \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \sigma^{ks^k}(x_*) \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left[\frac{\exp(\beta_j x_*^{js^j})}{\sum_{q \in S^j} \exp(\beta_j x_*^{jq})} \right] (x_*, \lambda_*) \\
&= a_i \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \sigma^{ks^k}(x_*) \left[\frac{-\beta_j \exp(\beta_j x_*^{js^j}) \exp(\beta_j x_*^{jr})}{(\sum_{q \in S^j} \exp(\beta_j x_*^{jq}))^2} \right] \mathbb{1}_{\{r \neq s^j\}} \\
&\quad + \left(\frac{\beta_j \exp(\beta_j x_*^{jr})}{\sum_{q \in S^j} \exp(\beta_j x_*^{jq})} + \frac{-\beta_j (\exp(\beta_j x_*^{jr}))^2}{(\sum_{q \in S^j} \exp(\beta_j x_*^{jq}))^2} \right) \mathbb{1}_{\{r = s^j\}} \\
&= a_i \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \lambda_*^{ks^k} [(-\beta_j \lambda_*^{jr} \lambda_*^{js^j}) \mathbb{1}_{\{r \neq s^j\}} + (\beta_j \lambda_*^{jr} (1 - \lambda_*^{jr})) \mathbb{1}_{\{r = s^j\}}] \\
&= a_i \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \prod_{k \neq i, j} \lambda_*^{ks^k} [(-\beta_j \lambda_*^{jr} \lambda_*^{js^j}) + (\beta_j \lambda_*^{jr}) \mathbb{1}_{\{r = s^j\}}] \\
&= a_i \beta_j \lambda_*^{jr} \left[\sum_{s^{-i} \in S^{-i}} G^i(s, s^{-i}) \mathbb{1}_{\{r = s^j\}} \prod_{k \neq i, j} \lambda_*^{ks^k} - G^i(s, \sigma^{-i}(x_*)) \right] \\
&= a_i \beta_j \lambda_*^{jr} [G^i(s, r, \sigma^{-(i,j)}(x_*)) - G^i(s, \sigma^{-i}(x_*))],
\end{aligned}$$

de donde $\left| \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*, \lambda_*) \right| \leq a_i \beta_j \lambda_*^{jr} \theta$.

El siguiente lema concerniente a álgebra lineal será de mucha ayuda en lo que sigue.

Lema 3.3.4 ([23, Teorema 1.1]). *Considerar una matriz a valores complejos $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{pq})$, se define el p -ésimo disco de Gershgorin $D_p(\mathbf{B}) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \mathbf{B}_{pp}| \leq \mathbf{R}_p\}$, con $\mathbf{R}_p = \sum_{q \neq p} |\mathbf{B}_{pq}|$, entonces cada valor propio de la matriz \mathbf{B} vive dentro de al menos uno de los discos de Gershgorin.*

Para el caso que se estudia se considerará como matriz $\mathbf{B} = \nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)$, entonces para todo $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{is} &= \sum_{\substack{j \in \mathcal{P} \\ j \neq i}} \sum_{r \in S^j} \left| \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*, \lambda_*) \right| \\
&\leq \sum_{\substack{j \in \mathcal{P} \\ j \neq i}} \sum_{r \in S^j} |a_i \beta_j \lambda_*^{jr} \theta| \\
&= a_i \theta \sum_{\substack{j \in \mathcal{P} \\ j \neq i}} \beta_j \underbrace{\sum_{r \in S^j} \lambda_*^{jr}}_{=1} \\
&= a_i \theta \underbrace{\sum_{\substack{j \in \mathcal{P} \\ j \neq i}} \beta_j}_{\leq \omega} \\
&\leq a_i \theta \omega.
\end{aligned}$$

Con esto, para todo $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$,

$$\begin{aligned}
D_{is}(\nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)) &= \{z \in \mathbb{C}, |z - (-a_i)| \leq \mathbf{R}_{is}\} \\
&\subset \{z \in \mathbb{C}, |z - (-a_i)| \leq a_i \theta \omega\},
\end{aligned}$$

consecuentemente, gracias al Lema 3.3.4, todos los valores propios de $\nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)$ están contenidos en algún disco $\{z \in \mathbb{C}, |z - (-a_i)| \leq a_i \theta \omega\}$, notando finalmente que como $a_i \in (\frac{1}{2(1-\theta\omega)}, \frac{1}{1-\theta\omega}]$, entonces

$$\begin{aligned}
a_i \theta \omega - a_i &= a_i(\theta\omega - 1) \\
&< \frac{1}{2(1-\theta\omega)}(\theta\omega - 1) \\
&= \frac{-1}{2}.
\end{aligned}$$

De donde $\rho(\nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)) < \frac{-1}{2}$, más aún $\rho(\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)) < \frac{-1}{2}$. Por otro lado el término $-I$ que aporta $\nabla_\lambda \Xi_\lambda(x_*, \lambda_*)$ implican que $\rho(\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)) \geq -1$.

Ahora para establecer las otras desigualdades se recuerda que la función $\Phi(x)$ queda definida como $\Phi^{is}(x) = \sigma^{is}(x)[G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}]$, luego para $i \neq j \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{is}}{\partial x^{ir}}(x_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{ir}}[\sigma^{is}(x)[G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}]](x_*) \\
&= \frac{\partial \sigma^{is}(x)}{\partial x^{ir}}(x_*)[G^i(s, \sigma^{-i}(x_*)) - x_*^{is}] + \sigma^{is}(x_*) \frac{\partial}{\partial x^{ir}}[G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x_*^{is}](x) \\
&= -\sigma^{is}(x_*) \mathbf{1}_{\{s=r\}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{jr}}[\sigma^{is}(x)[G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is}]](x_*) \\
&= \sigma^{is}(x_*) \frac{\partial}{\partial x^{jr}} G^i(s, \sigma^{-i}(x))(x_*) \\
&= \sigma^{is}(x_*) \beta_j \sigma^{jr}(x_*) [G^i(s, r, \sigma^{-(i,j)}(x_*)) - G^i(s, \sigma^{-i}(x_*))].
\end{aligned}$$

Ahora para cada $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{is} &= \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{P}} \sum_{r \in S^j} \left| \frac{\partial \Phi^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*) \right| \\
&\leq \sigma^{is}(x_*) \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{P}} \sum_{r \in S^j} \beta_j \sigma^{jr}(x_*) |G^i(s, r, \sigma^{-(i,j)}(x_*)) - G^i(s, \sigma^{-i}(x_*))| \\
&\leq \sigma^{is}(x_*) \theta \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{P}} \beta_j \sum_{r \in S^j} \sigma^{jr}(x_*) \\
&\leq \sigma^{is}(x_*) \theta \omega.
\end{aligned}$$

Entonces, para cada $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$

$$D_{is}(\nabla \Phi(x_*, \lambda_*)) = \{z \in \mathbb{C}, |z - (-\sigma^{is}(x_*))| \leq \sigma^{is}(x_*) \theta \omega\},$$

y consecuentemente, como $\sigma^{is}(x_*) (\theta \omega) - \sigma^{is}(x_*) = \sigma^{is}(x_*) (\theta \omega - 1) < \sigma^{is}(x_*) (\frac{1}{2} - 1) < 0$, entonces $\rho(\nabla \Phi(x_*)) < 0$. Finalmente, como la traza de la matriz $\nabla \Phi(x_*)$ es

$$\text{Tr}(\nabla \Phi(x_*, \lambda_*)) = \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{s \in S^i} (-\sigma^{is}(x_*)) = \sum_{i \in \mathcal{P}} (-1) = -N,$$

entonces $\rho(\nabla \Phi(x_*)) \geq \frac{-N}{\sum_k |S^k|}$. □

Observación 3.3.5. Notar que $\frac{1}{2} = \frac{N}{\sum_k |S^k|}$ si y sólo si $|S^k| = 2$ para todo $k \in \mathcal{P}$.

Proposición 3.3.6. *Suponer que $2\theta\omega < 1$ y que $(x_*, \lambda_*) \in \Omega \times \Delta$ y $x_* \in \Omega$ son los únicos puntos estacionarios de las dinámicas (3.4) y (3.6) respectivamente, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *para casi todas las trayectorias de (3.5)*

$$n^\delta (x_n - x_*) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para cada $\delta \in (0, |\rho(\nabla \Phi(x_))|)$,*

(ii) *para casi todas las trayectorias de (3.3)*

$$n^\delta ((x_n, \lambda_n) - (x_*, \lambda_*)) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para cada $\delta \in (0, 1/2)$.

Demostración. Recordar que $\epsilon_n = (\mathfrak{M}_n, \mathfrak{N}_n)$ y \mathfrak{L}_n son los términos de ruido asociados a los procesos (3.3) y (3.5) respectivamente. Se pretende utilizar el Teorema 2.3.22, para ello notar que $\gamma_n = \frac{1}{n}$ satisface claramente las hipótesis requeridas en el punto (a), pues $\frac{1}{n} > 0$ para todo n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 > 0.$$

La condición (b) se satisface gracias al Teorema 3.3.2 y el uso de la Observación 3.2.1. Resta entonces chequear que se satisfaga la condición (c),

- (i) Se fija un $\delta \in (0, |\rho(\nabla\Phi(x_*))|)$. El proceso aleatorio $(\mathfrak{L}_n)_n$ es una diferencia de martingalas acotada casi seguramente, de donde $\mathbb{E}[\mathfrak{L}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0$. Considerando ahora la variable aleatoria $Z_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k})^{1-\delta} \mathfrak{L}_k$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k}\right)^{1-\delta} \mathfrak{L}_k \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Z_n + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\delta} \mathfrak{L}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ &= Z_n + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\delta} \mathbb{E}[\mathfrak{L}_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= Z_n, \end{aligned}$$

de donde Z_n es una martingala, por otro lado por un argumento similar al utilizado en la demostración del Lema 3.2.3 se tiene que $\sup_n \|Z_n\|^2 < C_{\mathfrak{L}} \sum_{k \geq 1} (\frac{1}{k})^{2(1-\delta)}$, con $\|\mathfrak{L}_n\| \leq C_{\mathfrak{L}}$ para todo n , ahora como $\delta < \frac{1}{2}$, entonces $\sum_{k \geq 1} (\frac{1}{k})^{2(1-\delta)} < \infty$, y luego utilizando el Teorema 2.2.6 se tiene que Z_n es convergente, con lo que se satisface la condición (c1). La condición (c2) se cumple trivialmente dado que la función Φ es suave y finalmente gracias al Lema 3.3.3 se cumple que $\nabla\Phi + \delta I$ es estable (con I la identidad), pues $\delta \in (0, |\rho(\nabla\Phi(x_*))|)$. El Teorema 2.3.22 implica entonces que

$$n^\delta (x_n - x_*) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

- (ii) Se considera un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ fijo. Y se repite el argumento anterior, notando que el término de ruido ϵ_n se puede descomponer en $\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + \bar{\tau}_n$, con $\bar{\tau}_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ y gracias a la Observación 3.2.4, $\bar{\epsilon}_n$ una diferencia de martingalas acotada casi seguramente. Se considera esta vez $\bar{Z}_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k})^{1-\delta} \bar{\epsilon}_k$ y se prueba lo mismo que en el punto anterior. Nuevamente gracias a la Observación 3.2.4, Ξ es una función suave y el Lema 3.3.3 implica que $\nabla\Xi + \delta I$ es estable para $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, de donde utilizando nuevamente el Teorema 2.3.22 se concluye que

$$n^\delta ((x_n, \lambda_n) - (x_*, \lambda_*)) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

□

3.3.2. Convergencia con probabilidad positiva

Las cotas obtenidas en el Lema 3.3.3 permiten extender el rango de parámetros que aseguran algún resultado de convergencia para el proceso (3.3). Se denota por $\mathcal{Y} \subset \Omega \times \Delta$ el conjunto de los puntos estacionarios de (3.4), y tal como en el capítulo 2, $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ denota la base de atracción correspondiente a un atractor \mathcal{A} . Antes de presentar los resultados de convergencia, se establece los siguientes lemas que están relacionados con soluciones de ecuaciones de Lyapunov.

Lema 3.3.7. *Sea H una matriz de $l \times l$ invertible y estable. Considerar además una matriz S de $l \times l$ definida negativa cualquiera. Entonces $X = -\int_0^\infty e^{H^T t} S e^{Ht} dt$ es la solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov (ver [15] para detalles de soluciones a ecuaciones mas generales)*

$$H^T X + XH = S.$$

Demostración. En efecto, notar previamente que del hecho que H es estable X está bien definida (y de manera única). Por otro lado

$$\begin{aligned} X &= -\int_0^\infty e^{H^T t} S e^{Ht} dt \\ &= -\int_0^\infty e^{H^T t} S d(e^{Ht}) H^{-1} \\ &= -e^{H^T t} S e^{Ht} H^{-1} \Big|_0^\infty + H^T \int_0^\infty e^{H^T t} S e^{Ht} dt H^{-1} \\ &= S H^{-1} - H^T X H^{-1} \end{aligned}$$

que implica $H^T X + XH = S$.

Finalmente considerar un vector $v \in \mathbb{R}^l$, entonces, utilizando que S es definida negativa se tiene que

$$\begin{aligned} v^T X v &= -v^T \int_0^\infty e^{H^T t} S e^{Ht} dt v \\ &= -\int_0^\infty v^T e^{H^T t} S e^{Ht} v dt \\ &= -\int_0^\infty \underbrace{(e^{Ht} v)^T}_{:=\hat{v}} S (e^{Ht} v) dt \\ &= -\int_0^\infty \underbrace{\hat{v}^T S \hat{v}}_{<0} dt \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Observación 3.3.8. Notar que si S es simétrica, entonces X también lo es.

Lema 3.3.9. *Considerar un campo vectorial diferenciable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface el siguiente sistema diferencial*

$$\dot{z} = f(z). \tag{3.12}$$

Suponer además que este sistema tiene un equilibrio aislado z_0 (sin pérdida de generalidad se tomará $z_0 = 0$). Si la matriz jacobiana $A := \nabla f(z_0)$ es estable, entonces z_0 es un atractor local para el sistema (3.12).

Demostración. Se considera la linealización del sistema (3.12), vía una expansión de Taylor en torno a z_0 , esto es

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + Az + o(z)\|z\| \\ &= Az + o(z)\|z\| \end{aligned}$$

Con $\lim_{\|z\| \rightarrow 0} o(z) = 0$. Como la matriz A es estable se utiliza el lema anterior y se considera la solución definida positiva del sistema $A^T X + XA = -I$ (con I la identidad de $m \times m$), que viene dada por $X = -\int_0^\infty e^{A^T t} I e^{At} dt$ y con esto se define la función de Lyapunov (definida positiva) $V(z) := z^T X z$. Sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dV(z)}{dt} &= \nabla V(z) \cdot \dot{z} \\ &= \nabla V(z) \cdot f(z) \\ &= 2z^T X (Az + o(z)\|z\|) \\ &= z^T (A^T X + XA)z + 2z^T X o(z)\|z\| \\ &= -z^T z + 2z^T X o(z)\|z\| \\ &= \|z\|^2 \left(-1 + \frac{2z^T X o(z)}{\|z\|} \right). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que:

$$\begin{aligned} |2z^T X o(z)| &= |\langle z, 2X o(z) \rangle| \\ &\leq \|z\| \|2X o(z)\| \\ &\leq 2\|z\| \|X\| \|o(z)\|. \end{aligned}$$

De donde $\frac{2z^T X o(z)}{\|z\|} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow 0$. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que $\frac{dV(z)}{dt} \leq -\|z\|^2 < 0$ para todo $z \in B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$, y consecuentemente $\frac{dV(z)}{dt}$ es definida negativa allí, de donde $z_0 = 0$ es un atractor (local) gracias al Teorema de Lyapunov (ver [12, Teorema 4.1]). \square

Observación 3.3.10. El resultado anterior es fácilmente extendible al caso $z_0 \neq 0$.

Proposición 3.3.11. *Suponer que $\theta\omega < 1$. Entonces, existe un único punto estacionario (x_*, λ_*) para la dinámica (3.4), el cual es un atractor local.*

Demostración. Sea $(x_*, \lambda_*) \in \mathcal{Y}$ un punto estacionario de la dinámica (3.4). Si $\theta\omega < 1$, el Lema 3.3.3 muestra que la matriz $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)$ es estable, utilizando ahora el Lema 3.3.9 y la Observación 3.3.10 para $z_0 = (x_*, \lambda_*)$ y $f = \Xi(x, \lambda)$ se tiene que tomando $V(x, \lambda) = ((x, \lambda - (x_*, \lambda_*))^T X ((x, \lambda - (x_*, \lambda_*)))$ como función de Lyapunov, con X la solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)^T X + X \nabla \Xi(x_*, \lambda_*) = -I$, el punto estacionario (x_*, λ_*) es un atractor local para la dinámica.

Ahora del hecho que las bases de atracción no se pueden superponer y que el campo vectorial Ξ es regular en el compacto $\Omega \times \Delta$, entonces \mathcal{Y} es un conjunto finito. Se quiere probar que aún más tal conjunto se reduce a un sólo elemento, para ello se utilizará el Teorema de Poincaré-Hopf, descrito en la Sección 2.1.

Se considera el campo vectorial Ξ en una bola abierta U de dimensión $n = \#(\Omega \times \Delta) = 2 \sum_{i \in \mathcal{P}} |S^i|$, sea (x_*, λ_*) un cero aislado de Ξ y se considera la variedad M como la bola cerrada que contiene a U , gracias a la Observación 2.1.27 y el hecho de que la característica de Euler es invariante bajo homeomorfismo, M tiene característica de Euler $\chi(M) = 1$. Como (x_*, λ_*) es un atractor, se utiliza la Observación 2.1.21 que implica que $\text{ind}_{\Xi}(x_*, \lambda_*) = (-1)^n = 1$, pues n es par.

Se concluye entonces que en cada punto estacionario su índice es 1, si existiese al menos otro atractor distinto a (x_*, λ_*) se obtiene que $\sum_i \text{ind}_{\Xi}(x_i, \lambda_i) > 1$, lo que es una contradicción con el Teorema de Poincaré-Hopf, que asegura para este caso que $1 = \chi(M) = \sum_i \text{ind}_{\Xi}(x_i, \lambda_i)$. □

Tal como fue descrito en la Sección 2.3, se hace relevante el concepto de puntos alcanzables, una adaptación de la definición utilizada en el Lema 2.3.18 al problema que acá se analiza viene dada por lo siguiente:

Definición 3.3.12. Sea (z_n) un proceso estocástico discreto con espacio de estados Z . Un punto $z \in Z$ es *alcanzable* por (z_n) si para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada vecindad abierta U_z , $\mathbb{P}(\exists n \geq m : z_n \in U_z) > 0$.

De la mano con esta definición se establece el siguiente Lema, que hace fuertemente uso de la regla de actualización (3.1).

Lema 3.3.13. Fijar $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \in \Delta$. Considerar $x^i \in \mathbb{R}^{|S^i|}$ tal que $x^{is} = G^i(s, \lambda^{-i})$ para todo $s \in S^i$ y denotar $x = (x^1, \dots, x^N) \in \Omega$. Entonces el punto $(x, \lambda) \in \Omega \times \Delta$ es alcanzable por el proceso (x_n, λ_n) descrito en (3.3). En particular, cualquier punto estacionario de la dinámica (3.4) es alcanzable.

Demostración. El hecho que $\sigma_n^{is} > 0$ para cada $i \in \mathcal{P}$, $s \in S^i$ y $n \in \mathbb{N}$ implica que la secuencia finita generada por la regla de actualización (3.3) tiene probabilidad positiva de ocurrencia.

Considerar $v^{is}(k) = \inf\{q \geq 1 : \theta_q^{is} = k\}$, que se interpreta como la primera etapa en que el jugador i ha jugado la estrategia $s \in S^i$ por k -ésima vez y notar que la regla de actualización (3.1) se puede reescribir como sigue

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{is} &= x_0^{is} \left(1 - \frac{a_i}{b_i + 1}\right) \left(1 - \frac{a_i}{b_i + 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}\right) \\
&\quad + g_{v^{is}(1)}^i \frac{a_i}{b_i + 1} \left(1 - \frac{a_i}{b_i + 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + g_{v^{is}(\theta_n^{is}-1)}^i \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is} - 1} \left(1 - \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}\right) \\
&\quad + g_{v^{is}(\theta_n^{is})}^i \frac{a_i}{b_i + \theta_n^{is}}.
\end{aligned} \tag{Iter}$$

Ahora, si se considera $a_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{P}$ entonces lo anterior permite recuperar lo mostrado en el [3, Lema 5.10], esto es,

$$\bar{x}_{n+1}^{is} = \frac{1}{b_i + \theta_n^{is}} (b_i x_0^{is} + g_{v^{is}(1)}^i + \cdots + g_{v^{is}(\theta_n^{is}-1)}^i + g_{v^{is}(\theta_n^{is})}^i). \tag{3.13}$$

Lo que se pretende es probar que el comportamiento asintótico de \bar{x}_{n+1}^{is} es equivalente al de x_{n+1}^{is} , para ello en lo que sigue se fijará el análisis en un jugador específico $i \in \mathcal{P}$ y una estrategia $s \in S^i$, para este efecto se define lo siguiente: $g_j := g_{v^{is}(j)}^i$; $j \in \{1, \dots, \theta_n^{is}\}$, $a := a_i$, $b := b_i$, $K := \theta_n^{is}$, $g_0 := b x_0^{is}$ y se notará $n = n(K)$ como la dependencia inversa de K respecto a n , de esta manera el lado derecho de (3.13) se interpreta como un promedio,

$$\bar{x}_{n(K)+1}^{is} = \frac{1}{K + b} \sum_{j=0}^K g_j := \bar{g}_K. \tag{3.14}$$

Bajo la misma notación previa se define el promedio ponderado \mathfrak{U}_K como una pequeña variante del lado derecho de (Iter), que difiere sólo en el primer término con x_{n+1}^{is} :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_K &:= g_0 \left(1 - \frac{a}{b + 1}\right) \left(1 - \frac{a}{b + 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{a}{b + K}\right) \\
&\quad + g_1 \frac{a}{b + 1} \left(1 - \frac{a}{b + 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{a}{b + K}\right) \\
&\quad + \vdots \\
&\quad + g_{K-1} \frac{a}{b + K - 1} \left(1 - \frac{a}{b + K}\right) \\
&\quad + g_K \frac{a}{b + K}.
\end{aligned}$$

Se probará que si $\bar{g} = G^i(s, \lambda^{-i})$ es alcanzable por \bar{g}_K , entonces también lo es por x_{n+1}^{is} .

Notar que

$$\begin{aligned}
g_{K+1} &= \sum_{j=0}^{K+1} g_j - \sum_{j=0}^K g_j \\
&= (K+1+b) \frac{1}{K+1+b} \sum_{j=0}^{K+1} g_j - (K+b) \frac{1}{K+b} \sum_{j=0}^K g_j \\
&= (K+1+b) \bar{g}_{K+1} - (K+b) \bar{g}_K.
\end{aligned}$$

Definiendo $\mathfrak{W}_{K+1} = (a-1)(\bar{g}_{K+1} - \bar{g}_K)$, y al realizar una iteración mas para \mathfrak{U}_K se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_{K+1} &= \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) \mathfrak{U}_K + \frac{a}{b+K+1} g_{K+1} \\
&= \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) \mathfrak{U}_K + \frac{a}{b+K+1} [(K+1+b) \bar{g}_{K+1} - (K+b) \bar{g}_K] \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\mathfrak{U}_{K+1} - \bar{g}_{K+1}}_{:=\mathfrak{W}_{K+1}} = \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) [\mathfrak{U}_K - \bar{g}_K] + \mathfrak{W}_{K+1} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{W}_{K+1} = \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) \mathfrak{W}_K + \mathfrak{W}_{K+1}.
\end{aligned}$$

Se define $\bar{\mathfrak{W}}_K := (a-1)\bar{g}_K$ y $\bar{\mathfrak{W}} := (a-1)\bar{g}$, con $\bar{\mathfrak{W}}_K = \bar{\mathfrak{W}} + \varpi_K$, donde $\varpi_K \rightarrow 0$. Y con esto se construye una representación equivalente de \mathfrak{W}_{K+1} ,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{W}_{K+1} &= \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) \mathfrak{W}_K + \bar{\mathfrak{W}}_{K+1} - \bar{\mathfrak{W}}_K \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\mathfrak{W}_{K+1} - \bar{\mathfrak{W}}_{K+1}}_{:=\mathfrak{Z}_{K+1}} = \left(1 - \frac{a}{b+K+1}\right) [\mathfrak{W}_K - \bar{\mathfrak{W}}_K] - \frac{a}{b+K+1} \bar{\mathfrak{W}}_K \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathfrak{Z}_{K+1} - \mathfrak{Z}_K}{\varepsilon_K} = -(\mathfrak{Z}_K + \bar{\mathfrak{W}}_K) \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathfrak{Z}_{K+1} - \mathfrak{Z}_K}{\varepsilon_K} = -(\mathfrak{Z}_K + \bar{\mathfrak{W}} + \varpi_K).
\end{aligned}$$

Tomando $K \rightarrow \infty$ el sistema discreto anterior se transforma en la ecuación diferencial $\dot{\mathfrak{Z}} = -(\mathfrak{Z} + \bar{\mathfrak{W}})$, para la cual se tiene que $\mathfrak{Z}(t) \rightarrow -\bar{\mathfrak{W}}$ exponencialmente, y por lo tanto $\bar{\mathfrak{W}}$ es un atractor global, de esto se sigue que $\mathfrak{Z}_K \rightarrow -\bar{\mathfrak{W}}$, con lo cual $\mathfrak{W}_K \rightarrow 0$, es decir, $\mathfrak{U}_K - \bar{g}_K \rightarrow 0$ y en consecuencia si \bar{g} es alcanzable por \bar{g}_K , entonces también lo es por \mathfrak{U}_K .

Finalmente la diferencia entre \mathfrak{U}_K y $x_{n(K)+1}^{is}$ es sólo el primer término, que converge a 0 cuando $K \rightarrow \infty$, por lo tanto bajo el supuesto que \bar{g} es alcanzable por \bar{g}_K , entonces también es alcanzable por x_{n+1}^{is} .

Ahora, adaptando lo probado en [3, Lema 5.10], se probará que efectivamente $\bar{g} = G^i(s, \lambda^{-i})$ es alcanzable por \bar{g}_K .

Considerar ζ_n^s , que indica el número de veces que el perfil de estrategias $\mathbf{s} \in S$ ha sido jugado a la etapa n . Por lo tanto para cada $i \in \mathcal{P}$ y $s \in S^i$, (3.13) implica que

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1}^{is} &= \sum_{\mathbf{r} \in S^{-i}} G^i(s, \mathbf{r}) \frac{\zeta_n^{s, \mathbf{r}}}{\theta_n^{is} + b_i} + \frac{b_i x_0^{is}}{\theta_n^{is} + b_i} \\ &= \sum_{\mathbf{r} \in S^{-i}} G^i(s, \mathbf{r}) \frac{\zeta_n^{s, \mathbf{r}}}{\theta_n^{is}} + \bar{b}_n, \end{aligned}$$

con $\bar{b}_n = \mathcal{O}((\theta_n^{is})^{-1})$. Donde $\theta_n^{is} \rightarrow \infty$ casi seguramente debido al Lema de Borel-Cantelli condicional [4, pag. 41].

Se fija $\epsilon > 0$ y se consideran aproximaciones racionales de λ^{is} , \bar{k}_s^i que satisfacen $|\lambda^{is} - \bar{k}_s^i| < \epsilon$ y $\sum_{s \in S^i} \bar{k}_s^i = 1$. Sea $M \in \mathbb{N}$ que satisfaga $k_s^i := M \bar{k}_s^i \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \mathcal{P}, s \in S^i$. Sea un perfil de estrategias $\mathbf{s} = (s^1, s^2, \dots, s^N) \in S$ y se define $n_{\mathbf{s}} := \prod_{i \in \mathcal{P}} k_s^i = M^N \bar{k}_{s^1}^1 \cdots \bar{k}_{s^N}^N \in \mathbb{N}$. Finalmente se define $\bar{n} = \sum_{\mathbf{s} \in S} n_{\mathbf{s}}$ y se considera la secuencia generada por $l \in \mathbb{N}$ bloques de tamaño \bar{n} , donde en cada bloque, cada perfil $\mathbf{s} \in S$ es jugado $n_{\mathbf{s}}$ veces.

Se fija ahora $i \in \mathcal{P}$ y $\mathbf{r} \in S^{-i}$, luego por construcción se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{l\bar{n}}^{s, \mathbf{r}}}{\theta_{l\bar{n}}^{is}} &= \frac{(\prod_{j \neq i} k_{\mathbf{r}^j}^j) k_s^i}{\sum_{\mathbf{u} \in S^{-i}} (\prod_{j \neq i} k_{\mathbf{u}^j}^j) k_s^i} \\ &= \frac{M^{N-1} \prod_{j \neq i} \bar{k}_{\mathbf{r}^j}^j}{M^{N-1} \sum_{\mathbf{u} \in S^{-i}} \prod_{j \neq i} \bar{k}_{\mathbf{u}^j}^j} \\ &= \frac{\prod_{j \neq i} \bar{k}_{\mathbf{r}^j}^j}{\prod_{j \neq i} (\sum_{u_j \in S^j} \bar{k}_{u_j}^j)} \end{aligned}$$

Pero como $|\lambda^{j\mathbf{r}^j} - \bar{k}_{\mathbf{r}^j}^j| < \epsilon$ y $\sum_{u_j \in S^j} \bar{k}_{u_j}^j = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{l\bar{n}}^{s, \mathbf{r}}}{\theta_{l\bar{n}}^{is}} &= \prod_{j \neq i} \bar{k}_{\mathbf{r}^j}^j \\ &= \prod_{j \neq i} \lambda^{j\mathbf{r}^j} + \bar{k}_{\epsilon}, \end{aligned}$$

con $\bar{k}_{\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{l\bar{n}+1}^{is} &= \sum_{\mathbf{r} \in S^{-i}} G^i(s, \mathbf{r}) \frac{\zeta_{l\bar{n}}^{s, \mathbf{r}}}{\theta_{l\bar{n}}^{is}} + \bar{b}_{l\bar{n}} \\
&= \sum_{\mathbf{r} \in S^{-i}} G^i(s, \mathbf{r}) \prod_{j \neq i} \lambda^{j r^j} + \bar{k}_\epsilon + \bar{b}_{l\bar{n}} \\
&= G^i(s, \lambda^{-i}) + \bar{k}_\epsilon + \bar{b}_{l\bar{n}} \\
&= x^{is} + \bar{k}_\epsilon + \bar{b}_{l\bar{n}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, dado $\bar{\epsilon} > 0$, se toma $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y ϵ pequeño de modo que $\|\bar{x}_{l\bar{n}} - x\| < \frac{\bar{\epsilon}}{4}$, de donde x es alcanzable por \bar{x}_n . Para concluir sólo basta notar que se debe tomar un n^* suficientemente grande de modo que $\forall n \geq n^*$, $\|x_n - \bar{x}_n\| < \frac{\bar{\epsilon}}{4}$. De esta manera considerando n^{**} que satisfaga ambas restricciones y ϵ suficientemente pequeño se concluye que $\|(x_n, \lambda_n) - (x, \lambda)\| < \bar{\epsilon}$, $\forall n \geq n^{**}$, de donde (x, λ) es alcanzable por el proceso (x_n, λ_n) . \square

Teorema 3.3.14. *Si un atractor \mathcal{A} para la dinámica (3.4) satisface que $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$, entonces $\mathbb{P}[\mathcal{L}(x_n, \lambda_n) \subset \mathcal{A}] > 0$. En particular, bajo la regla de decisión Logit (3.7), si $\theta\omega < 1$ entonces \mathcal{Y} se reduce a un solo punto (x_*, λ_*) y $\mathbb{P}[(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)] > 0$.*

En orden a probar este teorema se reescribe el proceso (3.3) de una manera mas compacta:

$$(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) - (x_n, \lambda_n) = \frac{1}{n}(\Xi(x_n, \lambda_n) + \mathbf{e}_n) \quad (3.15)$$

con \mathbf{e}_n el ruido del proceso, que se puede descomponer en $\mathbf{e}_n = \bar{\mathbf{e}}_n + \bar{\mathbf{c}}_n$, con $\bar{\mathbf{c}}_n \rightarrow 0$ casi seguramente y $\bar{\mathbf{e}}_n$ es una diferencia de martingalas acotada casi seguramente.

Antes de probar el Teorema 3.3.14, se hace necesario recordar conceptos introducidos en la Sección 2.3.2. Sea $\tau_0 = 0$ y $\tau_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ para $n \geq 1$, ϕ el semiflujo inducido por la ecuación diferencial (3.4). El inverso de $n \mapsto \tau_n$ como el mapeo $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ definido por

$$m(t) = \sup\{k \geq 0 : t \geq \tau_k\}. \quad (3.16)$$

Considerar $\bar{e}, \bar{\gamma} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ los procesos a tiempo continuo definidos por

$$\bar{e}(\tau_n + u) = \mathbf{e}_{n+1}, \text{ y } \bar{\gamma}(\tau_n + u) = \frac{1}{n+1}, \quad (3.17)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq u < \frac{1}{n+1}$.

$Y(t)$ el proceso interpolado afín a tiempo continuo asociado al proceso discreto (x_n, λ_n) , esto es,

$$Y(\tau_n + u) = (x_n, \lambda_n) + u \frac{(x_{n+1}, \lambda_{n+1}) - (x_n, \lambda_n)}{\tau_{n+1} - \tau_n}, \quad (3.18)$$

$\bar{Y}(t)$ es el proceso interpolado constante por pedazos, definido como sigue

$$\bar{Y}(\tau_n + u) = (x_n, \lambda_n), \quad (3.19)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y $u \in [0, \frac{1}{n+1})$. Y finalmente $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es la filtración natural. Notar que con estas definiciones, la regla de actualización (3.1) se puede reescribir como

$$Y(t) - Y(0) = \int_0^t [\Xi(\bar{Y}(u)) + \bar{e}(u)] du, \quad (3.20)$$

y que además

$$\begin{aligned} \bar{Y}(u) &= \bar{Y}(0) + \int_0^{\tau_m(u)} [\Xi(\bar{Y}(s)) + \bar{e}(s)] ds \\ &= Y(0) + \int_0^{\tau_m(u)} [\Xi(\bar{Y}(s)) + \bar{e}(s)] ds. \end{aligned}$$

Observación 3.3.15. El análisis de convergencia positiva a atractores que se presentará a continuación, requiere que cada componente de λ se mantenga alejada uniformemente de cero, de manera de asegurar que la función Ξ sea localmente Lipschitz en una vecindad en torno a $\{x_n, \lambda_n\}_n$. Esto último se justifica ya que en torno a los atractores no hay problemas de regularidad de la función, y al iterar suficientemente la regla de actualización, con probabilidad positiva se estará cerca de tales puntos.

Se pretende utilizar el Teorema 2.3.19, pero para ello se requiere verificar previamente que se cumpla el siguiente lema.

Lema 3.3.16. *Para todo $T > 0$ y $\delta > 0$,*

$$\mathbb{P}(\sup_{u \geq t} [\sup_{0 \leq h \leq T} d(Y(u+h), \phi_h(Y(u)))] \geq \delta | \mathcal{F}_t) \leq w(t, \delta, T) \quad (3.21)$$

para alguna función $w : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, \delta, T) \downarrow 0$.

Demostración. Por la Observación 2.3.17, es suficiente probar que

$$\mathbb{P}(\sup_{0 \leq h \leq T} \|Y(t+h) - \phi_h(Y(t))\| \geq \delta | \mathcal{F}_t) \leq \int_t^{t+T} r(t, \delta, T) dt \quad (3.22)$$

para alguna función $r : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\int_t^\infty r(t, \delta, T) < \infty$.

Por otro lado, las Proposiciones 2.3.4 y 2.3.6 implican que la condición **A1** de la Proposición 2.3.3 se satisface con probabilidad 1, se quiere por lo tanto verificar, que para $\Delta(t, T) = \sup_{0 \leq h \leq T} \|\int_t^{t+h} \bar{e}(s) ds\|$, se satisface una cota del estilo

$$\sup_{0 \leq h \leq T} \|Y(t+h) - \phi_h(Y(t))\| \leq C(T) [\Delta(t-1, T+1) + \sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u)] \quad (3.23)$$

donde $C(T)$ es una constante que depende sólo de T y Ξ y $t \geq 0$ suficientemente grande.

En efecto por la continuidad de la función Ξ y el hecho que $\sup_n \|(x_n, \lambda_n)\| < \infty$, existe constante $K > 0$ tal que $\|\Xi(Y(t))\| < K$ para $t \geq 0$ suficientemente grande, luego utilizando la ecuación (3.20) y el hecho que **A1** se satisface con probabilidad 1, entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq h \leq T} \|Y(t+h) - Y(t)\| \leq KT,$$

de donde Y es uniformemente continua con probabilidad 1.

Por otro lado la ecuación (3.20) se puede escribir como

$$Y(t+u) = Y(t) + \int_t^{t+u} \Xi(Y(s))ds + \underbrace{\int_t^{t+u} [\Xi(\bar{Y}(s)) - \Xi(Y(s))]ds}_{:=A_t(u)} + \underbrace{\int_t^{t+u} \bar{e}(s)ds}_{:=B_t(u)}.$$

Recordando ahora que ϕ es el flujo generado por Ξ , se tiene que

$$\phi_h(Y(t)) = Y(t) + \int_0^h \Xi[\phi_u(Y(t))]du,$$

de donde,

$$\begin{aligned} \|Y(t+h) - \phi_h(Y(t))\| &= \|Y(t) + \int_t^{t+h} \Xi(Y(s))ds + A_t(h) + B_t(h) \\ &\quad - Y(t) - \int_0^h \Xi[\phi_s(Y(t))]ds\| \\ &\leq \| \int_t^{t+h} \Xi(Y(s))ds - \int_0^h \Xi[\phi_s(Y(t))]ds \| + \|A_t(h)\| + \|B_t(h)\| \\ &\leq \| \int_0^h [\Xi(Y(s+t)) - \Xi[\phi_s(Y(t))]]ds \| + \|A_t(h)\| + \|B_t(h)\| \\ &\leq \int_0^h \|\Xi(Y(s+t)) - \Xi[\phi_s(Y(t))]\|ds + \|A_t(h)\| + \|B_t(h)\|. \end{aligned}$$

Además se cumple que $\|B_t(h)\| \leq \Delta(t, T)$ y $\Delta(t, T) \leq 2\Delta(t-1, T+1)$.

Sea L la constante de Lipschitz de la función Ξ en torno a una vecindad de $\{x_n, \lambda_n\}$ y notando que

$$\begin{aligned} \|Y(u) - \bar{Y}(u)\| &= \left\| \int_{\tau_m(u)}^u \Xi(\bar{Y}(s)) + \bar{e}(s)ds \right\| \\ &\leq \int_{\tau_m(u)}^u \|\Xi(\bar{Y}(s))\|ds + \left\| \int_{\tau_m(u)}^u \bar{e}(s)ds \right\| \\ &\leq K \underbrace{(u - \tau_m(u))}_{\leq \bar{\gamma}(u)} + \left\| \int_{\tau_m(u)}^u \bar{e}(s)ds \right\| \\ &\leq K\bar{\gamma}(u) + \left\| \int_{t-1}^{\tau_m(u)} \bar{e}(s)ds \right\| + \left\| \int_{t-1}^u \bar{e}(s)ds \right\| \\ &\leq K\bar{\gamma}(u) + \Delta(t-1, T+1) + \Delta(t-1, T+1), \end{aligned}$$

sigue que

$$\begin{aligned}
A_t(h) &\leq \int_t^{t+h} \|\Xi(\bar{Y}(u)) - \Xi(Y(u))\| du \\
&\leq L \int_t^{t+h} \|\bar{Y}(u) - Y(u)\| \\
&\leq LKT \sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) + 2LT\Delta(t-1, T+1).
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la desigualdad de Gronwall [9, Teorema 1] se tiene que,

$$\begin{aligned}
\|Y(t+h) - \phi_h(Y(t))\| &\leq \int_0^h L\|Y(t+s) - \phi_s(Y(t))\| ds + \|A_t(h)\| + \|B_t(h)\| \\
&\leq \|A_t(h)\| + \|B_t(h)\| + \int_0^h L(\|A_t(s)\| + \|B_t(s)\|) \exp\left(\int_s^h L du\right) ds \\
&\leq (LKT \sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) + 2LT\Delta(t-1, T+1) + 2\Delta(t-1, T+1)) \\
&\quad \cdot (1 + L \int_0^h e^{L(h-s)} ds) \\
&\leq (LKT \sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) + 2(LT+1)\Delta(t-1, T+1)) (1 + L \frac{1 - e^{Lh}}{-L}) \\
&\leq e^{LT} (LKT \sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) + (2LT+1)\Delta(t-1, T+1)) \\
&= C(T, L, K) \left[\sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) + \Delta(t-1, T+1) \right].
\end{aligned}$$

Pero de la definición de $\bar{\gamma}(u)$ se cumple que $\bar{\gamma}(u) = \bar{\gamma}(\tau_{m(u)} + u') = \frac{1}{m(u)+1}$, con $0 \leq u' < \frac{1}{m(u)+1}$, como $m(u)$ es creciente, entonces $\sup_{t \leq u \leq t+T} \bar{\gamma}(u) = \frac{1}{m(t)+1}$. Por su parte como $\bar{e}(s) = \bar{e}(\tau_{m(s)} + s') = \mathbf{e}_{m(s)+1}$, con $s' \in [0, \frac{1}{m(s)+1})$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(t, T) &= \sup_{0 \leq h \leq T} \left\| \int_t^{t+h} \bar{e}(s) ds \right\| \\
&= \sup_{0 \leq h \leq T} \left\| \int_t^{t+h} \mathbf{e}_{m(s)+1} ds \right\| \\
&= \sup_{0 \leq h \leq T} \left\| \sum_{l=m(t)}^{m(t+h)} \frac{\mathbf{e}_{l+1}}{l+1} \right\|.
\end{aligned}$$

Luego, siguiendo la idea de lo probado en [21, Teorema 2.6],

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\sup_{0 \leq h \leq T} \|X(t+h) - \phi_h(X(t))\| \geq \delta | \mathcal{F}_t) \\
& \leq \mathbb{P}[C(T, L) \left(\frac{1}{m(t)+1} + \sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\mathbf{e}_{l+1}}{l+1} \right\| \right) \geq \delta | \mathcal{F}_t] \\
& = \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\mathbf{e}_{l+1}}{l+1} \right\| \geq \frac{\delta}{C(T, L)} - \frac{1}{m(t)+1} \middle| \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned}$$

Para t suficientemente grande, $\frac{1}{m(t)+1}$ es pequeño, luego se puede suponer que $\frac{\delta}{C(T, L)} - \frac{1}{m(t)+1} \sim \delta' > 0$. Además notando que $\left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\mathbf{e}_{l+1}}{l+1} \right\| = \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} + \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| \leq \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| + \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\|$, la probabilidad anterior se puede mayorar como sigue:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\mathbf{e}_{l+1}}{l+1} \right\| \geq \delta' | \mathcal{F}_t \right] \\
& \leq \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| \geq \delta' | \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| \geq \delta' | \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

Notar ahora que

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| & \leq \sup_{0 \leq h \leq T+1} \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \left\| \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1} \right\| \\
& \leq \sup_{0 \leq h \leq T+1} \sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \left\| \bar{\mathbf{e}}_{l+1} \right\| \frac{1}{l+1} \\
& \leq \sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \frac{C_{\bar{\mathbf{e}}}}{l+1} \frac{1}{l+1},
\end{aligned}$$

y recordando que $\bar{\mathbf{e}}_{l+1}$ es una diferencia de martingalas acotadas casi seguramente, y que más aún $M_k := \sum_{l=m(t-1)}^k \frac{\bar{\mathbf{e}}_{l+1}}{l+1}$ es una martingala, pues $\mathbb{E}[M_{k+1} | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[M_k + \frac{\bar{\mathbf{e}}_{k+1}}{k+1} | \mathcal{F}_k] = M_k + \frac{1}{k+1} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{e}}_{k+1} | \mathcal{F}_k] = M_k$, se aplica la desigualdad de Doob (Teorema 2.2.2) para $p = 2$ y se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq h \leq T+1} \left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t-1+h)} \frac{\bar{\epsilon}_{l+1}}{l+1} \right\| \geq \delta' | \mathcal{F}_t\right] &\leq \frac{\mathbb{E}\left\| \sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \frac{\bar{\epsilon}_{l+1}}{l+1} \right\|^2}{(\delta')^2} \\
&\leq \frac{1}{(\delta')^2} \mathbb{E}\left[\sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \left\| \frac{\bar{\epsilon}_{l+1}}{l+1} \right\|^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{(\delta')^2} \mathbb{E}\left[\sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \frac{C_{\bar{\epsilon}}}{(l+1)^2} \right] \\
&= \frac{1}{(\delta')^2} \left[\sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \frac{C_{\bar{\epsilon}}}{(l+1)^2} \right].
\end{aligned}$$

De donde

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq h \leq T} \|X(t+h) - \phi_h(X(t))\| \geq \delta | \mathcal{F}_t\right) \leq \frac{C_{\epsilon}}{\delta^2} \sum_{l=m(t-1)}^{m(t+T)} \frac{1}{(l+1)^2} \leq \int_{t-1}^{t+T} \frac{C_{\epsilon}}{\delta^2 T (m(x)+1)^2} dx.$$

Donde finalmente se considera como función $r(\delta, x, T) = \frac{C_{\epsilon}}{\delta^2 T (m(x)+1)^2}$, notando que para $x \in [0, 1)$, $m(x) = 0$ y que para $x > 1$, $m(x) \geq x$, por lo que

$$\int_0^{\infty} r(\delta, x, T) dx < \frac{C_{\epsilon}}{\delta^2} \left[\int_0^1 \frac{1}{1} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \right] < \infty$$

□

Demostración de Teorema 3.3.14. Para la primera parte, gracias a que el lema anterior proporciona la única hipótesis faltante, el resultado es directo del Teorema 2.3.19. Para la segunda parte, el Lema 3.3.13 prueba que los puntos estacionarios de la dinámica son alcanzables, la Proposición 3.3.11, prueba que \mathcal{Y} , el conjunto de los puntos estacionarios, se reduce al singleton (x_*, λ_*) , luego aplicando nuevamente el Teorema 2.3.19, se concluye que $\mathbb{P}[(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)] > 0$. □

3.3.3. Un juego de congestión

Nuevamente como en lo explicado en el Capítulo 1, un juego de congestión en el que los jugadores sólo actualizan sus percepciones sobre las rutas, conociendo únicamente su propio pago al utilizar determinada ruta y desconociendo lo que hace el resto de los jugadores, es el ejemplo más natural del modelo anteriormente descrito.

Se considerará por lo tanto, tal como en [3],[7] el marco de aplicación para un juego de congestión específico. Un conjunto de N usuarios, $i \in \mathcal{P}$, eligen, cada día, entre M rutas alternativas de un conjunto \mathcal{R} . Las elecciones combinadas de todos los usuarios del juego determinan qué tan saturada está cada ruta y el tiempo promedio de viaje asociado a elegir una u otra ruta. Cada usuario percibe sólo el costo de la ruta utilizada por él en ese día y con esa información actualiza la percepción de esa ruta particular, afectando las

estrategias mixtas que serán jugadas en la siguiente etapa.

Formalmente, una ruta $r \in \mathcal{R}$ viene caracterizada por una secuencia creciente $c_1^r \leq \dots \leq c_N^r$, en donde c_u^r representa el tiempo promedio de viaje de la ruta r cuando hay u usuarios en ella. El conjunto de estrategias puras para cada jugador $i \in \mathcal{P}$ es $S^i = \mathcal{R}$. Si $r_n^i \in \mathcal{R}$ denota la ruta elegida por el jugador i en la etapa n , entonces la función de pago del jugador i viene dada como menos el tiempo de viaje experimentado $g_n^i = G^i(r_n) = -c_u^r$ con $r = r_n^i$ y $u = \#\{j \in \mathcal{P} : r_n^j = r\}$.

Suponer que cada ruta r_n^i es elegida aleatoriamente de acuerdo a las estrategias mixtas $\pi_n^i = \sigma^i(x_n^i)$ que dependen de la percepción previa sobre el pago de esa ruta, vía el modelo Logit (3.7) y la evolución de las percepciones viene dado por el proceso de aprendizaje (3.3).

Se considera el siguiente mapeo $H : [0, 1]^{\mathcal{P} \times \mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$H(\pi) = -\mathbb{E}_\pi^B \left[\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{u=1}^{U^r} c_u^r \right], \quad (3.24)$$

donde \mathbb{E}_π^B denota a la esperanza respecto a las variables aleatorias $U^r = \sum_{i \in \mathcal{P}} X^{ir}$, con X^{ir} variables aleatorias Bernoulli independientes y no homogéneas que satisfacen $\mathbb{P}(X^{ir} = 1) = \pi^{ir}$.

Observación 3.3.17. $H(\pi)$ está definido para $\pi \in [0, 1]^{\mathcal{P} \times \mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ y no sólo para $\pi \in \Delta$, lo que permite diferenciar H respecto a cada variable π^{ir} .

Proposición 3.3.18 ([7, Proposición 8]). $F(\pi) = \nabla H(\pi) \forall \pi \in \Delta$.

Luego $H(\pi)$ se interpreta como un potencial, tal que $\frac{\partial H}{\partial \pi^{is}}(\lambda) = G^i(s, \lambda^{-i})$.

Se prueba también en [7, Lema 9] que las segundas derivadas de $H(\pi)$ son cero, excepto por

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \pi^{jr} \partial \pi^{ir}}(\pi) = \mathbb{E}_\pi(c_{U_{ij}^r+1}^r - c_{U_{ij}^r+2}^r) \in [-\theta, 0], \quad (3.25)$$

con $i \neq j$, y $U_{ij}^r = \sum_{k \neq i, j} X^{kr}$.

Suponer adicionalmente que los parámetros suavizantes son idénticos para todos los jugadores, esto es, $\beta_i := \beta$ para todo $i \in \mathcal{P}$ y que también hay simetría en como actualizan los jugadores, es decir, $a_i = a$ para todo $i \in \mathcal{P}$. Notar además que para este caso los valores de θ y ω se pueden expresar de una forma más sencilla,

$$\begin{aligned} \omega &= \max_{i \in \mathcal{P}} \sum_{j \neq i} \beta_j = (N-1)\beta, \\ \theta &= \max\{\theta_u^r : r \in \mathcal{R}, 2 \leq u \leq N\} = \max\{c_u^r - c_{u-1}^r : r \in \mathcal{R}, 2 \leq u \leq N\}. \end{aligned}$$

La siguiente propiedad enuncia dos resultados que son probados en [7, Teorema 10] y [7, Teorema 17] respectivamente:

Proposición 3.3.19. *Se cumple lo siguiente*

- (i) Si $\theta\omega < 2$, la función $C : \Omega \rightarrow \Omega$, con $C^{is}(x) = G^i(s, \sigma^{-i}(x))$ es $\|\cdot\|_\infty$ -contractante y el proceso (3.5) converge casi seguramente al único punto estacionario de (3.6).
- (ii) Si $\theta\beta < 2$, (3.6) tiene un único punto estacionario $x_* \in \Omega$ el cual es simétrico, en el sentido que $x_* = (\hat{x}_*, \dots, \hat{x}_*)$. Más aún $\{x_*\}$ es un atractor para (3.6).

Lema 3.3.20. *Si $\theta\beta < 2$, entonces (3.4) tiene un único punto estacionario $(x_*, \lambda_*) \in \Omega \times \Delta$, con $x_* = (\hat{x}_*, \dots, \hat{x}_*)$ y $\lambda_* = (\hat{\lambda}_*, \dots, \hat{\lambda}_*) = \sigma(x_*)$.*

Demostración. La existencia, unicidad y simetría vienen dados por la utilización de la Proposición 3.3.19 (ii) y la Observación 3.2.1. □

Lema 3.3.21. *Si $\theta\beta < 1$, entonces la matriz $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)$ es estable.*

Demostración. Considerar la matriz $J := \nabla_x \Xi_x(x_*, \lambda_*)$, que es el bloque superior izquierdo de la matriz $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)$. Notar que $\Xi_x^{is}(x, \lambda) = \frac{a_i \sigma^{is}(x^i)}{\lambda^{is}} (G^i(s, \sigma^{-i}(x)) - x^{is})$ y que σ^i depende sólo de x^i se tiene que:

$$\begin{aligned}
J_{is,jr} &= \frac{\partial \Xi_x^{is}}{\partial x^{jr}}(x_*, \lambda_*) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left[a \frac{\sigma^{is}(x)}{\lambda^{is}} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{is}}(\sigma(x)) - x^{is} \right) \right] (x_*, \lambda_*) \\
&= \underbrace{a \frac{\sigma^{is}(x_*)}{\lambda_*^{is}}}_{=a} \left[\frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^{is}}(\sigma(x)) \right) (x_*, \lambda_*) - \mathbf{1}_{\{is=jr\}} \right] \\
&= a \left[\sum_{k \in \mathcal{P}} \sum_{r' \in \mathcal{R}} \frac{\partial^2 H}{\partial \pi^{kr'} \partial \pi^{is}}(\lambda_*) \frac{\partial \sigma^{kr'}}{\partial x^{jr}}(x_*) - \mathbf{1}_{\{is=jr\}} \right] \\
&= a \left[\sum_{r' \in \mathcal{R}} \frac{\partial^2 H}{\partial \pi^{jr'} \partial \pi^{is}}(\lambda_*) \frac{\partial \sigma^{jr'}}{\partial x^{jr}}(x_*) - \mathbf{1}_{\{is=jr\}} \right] \\
&= a \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \pi^{jr} \partial \pi^{ir}}(\lambda_*) \frac{\partial \sigma^{jr}}{\partial x^{jr}}(x_*) \mathbf{1}_{\{i \neq j, s=r\}} - \mathbf{1}_{\{is=jr\}} \right],
\end{aligned}$$

en donde se utilizó que las segundas derivadas de H son 0, salvo para $i \neq j, s = r$. Adicionalmente la ecuación (3.25) y el hecho que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^{jr}}{\partial x^{jr}}(x_*) &= \frac{\partial}{\partial x^{jr}} \left(\frac{\exp(\beta x^{jr})}{\sum_{r' \in S^j} \exp(\beta x^{jr'})} \right) (x_*) \\
&= \frac{\beta \exp(\beta x^{jr})}{\sum_{r' \in S^j} \exp(\beta x^{jr'})} (x_*) - \frac{\exp(\beta x^{jr})}{[\sum_{r' \in S^j} \exp(\beta x^{jr'})]^2} \beta \exp(\beta x^{jr})(x_*) \\
&= \beta \lambda_*^{jr} - \beta \lambda_*^{jr} \lambda_*^{jr} \\
&= \beta \lambda_*^{jr} (1 - \lambda_*^{jr}),
\end{aligned}$$

implican que

$$J_{is,jr} = a \left[\beta \lambda_*^{jr} (1 - \lambda_*^{jr}) \mathbb{E}_\pi (c_{U_{ij}^r+1}^r - c_{U_{ij}^r+2}^r) \mathbf{1}_{i \neq j, s=r} - \mathbf{1}_{\{is=jr\}} \right]. \quad (3.26)$$

Ahora utilizando el Lema 3.3.20 (pues se está en el supuesto que $\theta\beta < 1$), la simetría de λ_* ($\lambda_*^{ir} = \lambda_*^{jr}, \forall i, j \in \mathcal{P}$), implica que J es simétrica. Se probará a continuación que más aún J es definida negativa.

En efecto, se considera $h \in \mathbb{R}^{NM} \setminus 0$, y utilizando (3.26) se tiene que,

$$\begin{aligned} h^T J h &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \left[\beta \sum_{i \neq j} a h^{ir} \lambda_*^{jr} (1 - \lambda_*^{jr}) \mathbb{E}_\pi (c_{U_{ij}^r+1}^r - c_{U_{ij}^r+2}^r) h^{jr} - \sum_i a (h^{ir})^2 \right] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \left[\beta \sum_{i \neq j} h^{ir} \sqrt{a \lambda_*^{ir} (1 - \lambda_*^{ir})} h^{jr} \sqrt{a \lambda_*^{jr} (1 - \lambda_*^{jr})} \mathbb{E}_\pi (c_{U_{ij}^r+1}^r - c_{U_{ij}^r+2}^r) - \sum_i a (h^{ir})^2 \right]. \end{aligned}$$

Para cada $i \in \mathcal{P}$ y $r \in \mathcal{R}$, se define $v^{ir} := h^{ir} \frac{a(1-\lambda_*^{ir})}{\lambda_*^{ir}}$, $Z^{ir} := v^{ir} X^{ir}$ y se fijan $\theta_0^r = \theta_1^r = 0$, con esto $\mathbb{E}_{\lambda_*}(Z^{ir}) = v^{ir} \mathbb{E}_{\lambda_*}(X^{ir}) = v^{ir} \lambda_*^{ir}$. Sigue que

$$\begin{aligned} h^T J h &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \left[\beta \sum_{i \neq j} v^{ir} \lambda_*^{ir} v^{jr} \lambda_*^{jr} \mathbb{E}_{\lambda_*} (c_{U_{ij}^r+1}^r - c_{U_{ij}^r+2}^r) - \sum_i a \frac{\lambda_*^{ir}}{a(1-\lambda_*^{ir})} (v^{ir})^2 \right] \\ &= \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}_{\lambda_*} \left[\underbrace{(c_{U^r-1}^r - c_{U^r}^r)}_{=-\theta_{U^r}^r} \beta \sum_{i \neq j} Z^{ir} Z^{jr} - \sum_i \underbrace{\frac{(Z^{ir})^2}{1-\lambda_*^{ir}}}_{\geq (Z^{ir})^2} \right] \\ &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}_{\lambda_*} \left[-\theta_{U^r}^r \beta \sum_{i \neq j} Z^{ir} Z^{jr} - \sum_i (Z^{ir})^2 \right]. \end{aligned}$$

Pero $\sum_{i \neq j} Z^{ir} Z^{jr} = (\sum_i Z^{ir})^2 - \sum_i (Z^{ir})^2$, sumado al hecho que $\theta_{U^r}^r \leq \theta$ y que $\theta\beta < 1$ se cumple que

$$\begin{aligned} h^T J h &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}_{\lambda_*} \left[-\theta_{U^r}^r \beta \left(\sum_i Z^{ir} \right)^2 + (\theta_{U^r}^r \beta - 1) \sum_i (Z^{ir})^2 \right] \\ &\leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbb{E}_{\lambda_*} \left[-\theta_{U^r}^r \beta \left(\sum_i Z^{ir} \right)^2 + (\theta\beta - 1) \sum_i (Z^{ir})^2 \right] \\ &< 0. \end{aligned}$$

Con esto $\nabla \Xi(x_*, \lambda_*)$ es definida negativa, pues el bloque inferior derecho es $-I$, de donde se deduce su estabilidad. \square

Proposición 3.3.22. *Si $\theta\beta < 1$, entonces (3.4) tiene un único punto estacionario $(x_*, \lambda_*) \in \Omega \times \Delta$, con $x_* = (\hat{x}_*, \dots, \hat{x}_*)$ y $\lambda_* = (\hat{\lambda}_*, \dots, \hat{\lambda}_*) = \sigma(x_*)$. Más aún, $\{(x_*, \lambda_*)\}$ es un atractor para (3.4) y $\mathbb{P}[(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)] > 0$.*

Demostración. Dado $\theta\beta < 1 < 2$, se utiliza el Lema 3.3.20 para la existencia, unicidad y simetría del punto estacionario (x_*, λ_*) . Por otro lado el Lema 3.3.21 muestra que $\nabla\Xi(x_*, \lambda_*)$ es estable y por lo tanto $\{(x_*, \lambda_*)\}$ es un atractor local para (3.4), finalmente utilizando el Teorema 3.3.14 se concluye que $\mathbb{P}[(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x_*, \lambda_*)] > 0$. \square

Capítulo 4

Estudio en Detalle del Juego de Congestión de Cominetti-Melo-Sorin para Instancias Pequeñas

En este capítulo se presenta un estudio en detalle del modelo presentado en el artículo [7], para analizar los tipos de equilibrios (cantidad, finitud) en el caso de un juego de congestión mas particular (en donde la cantidades de jugadores y rutas son conocidas).

4.1. Caso 2 jugadores, 2 rutas

Tal como en la subsección 1.1.2 se define el modelo particular que describe el juego de congestión, para ello se utilizan las variables aleatorias bernoulli X^{jr} que vienen descritas como sigue,

$$X^{jr} = \begin{cases} 1 & \text{si el jugador } j \text{ elige la ruta } r \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mathbb{P}(X^{jr} = 1) = \pi^{jr} \quad (4.2)$$

$$U^r := \sum_{j \in \mathcal{P}} X^{jr}, \quad i \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.3)$$

donde U^r se interpreta como la carga de la ruta r . En la condición de equilibrio se tiene que $x^{ir^i} = G^i(r^i, \sigma^{-i}(r))$, con $r = (r^1, r^2) \in \{a, b\} \times \{a, b\}$, para este caso particular la función G^i es función de la carga asociada al perfil de rutas escogidos por los jugadores y es función del pago que cada jugador percibe al escoger una u otra ruta, esto es, $x^{ir} = \mathbb{E}(-c_{U^r}^r | X^{ir} = 1)$, con $c_1^r < c_2^r$, los costos asociados a la congestión de una ruta.

De donde:

$$\begin{aligned}
 -x^{1a} &= c_1^a \underbrace{(1 - \pi^{2a})}_{\text{Proba de que 2 no elija a}} + c_2^a \underbrace{(\pi^{2a})}_{\text{Proba de que 2 elija a}} \\
 &= c_1^a + (c_2^a - c_1^a)\pi^{2a} \\
 &= c_1^a + (c_2^a - c_1^a) \frac{e^{\beta x^{2a}}}{e^{\beta x^{2a}} + e^{\beta x^{2b}}} \\
 &= c_1^a + (c_2^a - c_1^a) \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x^{1b} &= c_1^b(\pi^{2a}) + c_2^b(1 - \pi^{2a}) \\
 &= c_2^b - (c_2^b - c_1^b)\pi^{2a} \\
 &= c_2^b - (c_2^b - c_1^b) \frac{e^{\beta x^{2a}}}{e^{\beta x^{2a}} + e^{\beta x^{2b}}} \\
 &= c_2^b - (c_2^b - c_1^b) \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}}
 \end{aligned}$$

y luego:

$$\begin{aligned}
 x^{1b} - x^{1a} &= -(c_2^b - (c_2^b - c_1^b) \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}}) + (c_1^a + (c_2^a - c_1^a) \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}}) \\
 &= (c_1^a - c_2^b) + [(c_2^a - c_1^a) - (c_1^b - c_2^b)] \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}} \\
 &= (c_1^a - c_2^b) + [(c_2^a + c_2^b) - (c_1^b + c_1^a)] \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{2b} - x^{2a})}},
 \end{aligned}$$

simétricamente se tiene

$$x^{2b} - x^{2a} = (c_1^a - c_2^b) + [(c_2^a + c_2^b) - (c_1^a + c_1^b)] \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{1b} - x^{1a})}}$$

Por comodidad se adopta la siguiente notación $A := (c_1^a - c_2^b)$ y $C := [(c_2^a + c_2^b) - (c_1^a + c_1^b)]$. Necesariamente $C \geq 0$, pero A puede ser tanto positivo como negativo dependiendo de los parámetros del problema.

Para lo que sigue en el análisis se considera $\delta_1 := x^{1b} - x^{1a}$ y $\delta_2 := x^{2b} - x^{2a}$, por lo que se tendría el siguiente sistema a resolver:

$$\delta_1 = A + C \frac{1}{1 + e^{\beta \delta_2}} := \phi(\delta_2) \quad (4.4)$$

$$\delta_2 = A + C \frac{1}{1 + e^{\beta \delta_1}} := \phi(\delta_1) \quad (4.5)$$

O equivalentemente, se pretende buscar los puntos fijos de la función $\Psi = \phi \circ \phi$

$$\begin{aligned}
\delta_i &= \Psi(\delta_i) \\
&= A + C \frac{1}{1 + e^{\beta\phi_2(\delta_i)}} \\
&= A + C \frac{1}{1 + e^{\beta(A + C \frac{1}{1 + e^{\beta\delta_i}})}}, \quad i \in \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

En lo que sigue se analizará en detalle el caso en que $\delta_1 = \delta_2 := \delta$ (que se puede traducir como una simetría en las preferencias de los agentes), con esto no será necesario trabajar con las ecuaciones (4.4) y (4.5), sino que bastará con estudiar si existen algunos δ tales que:

$$\delta = A + C \frac{1}{1 + e^{\beta\delta}} := \phi(\delta) \quad (4.6)$$

Lema 4.1.1. *Existe un único δ que satisface (4.6).*

Demostración. Claramente $h(\delta) = \delta - \phi(\delta)$ es estrictamente creciente, con $h(\delta) \rightarrow -\infty$ si $\delta \rightarrow -\infty$ y $h(\delta) \rightarrow \infty$ si $\delta \rightarrow \infty$, de donde se sigue el resultado. \square

Ahora lo que se pretende es estudiar las condiciones sobre los parámetros A, C, β que provoquen que este equilibrio simétrico deje de ser estable (se genere una iteración fija alrededor de uno o mas puntos distintos al equilibrio), se propone que esto ocurre cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\phi(\delta) = A + \frac{C}{1 + e^{\beta\delta}} \quad (4.7)$$

$$\phi'(\delta) \leq -1 \quad (4.8)$$

La condición (4.7) es solamente ser punto fijo, la condición (4.8) es la que realmente entrega información, para ello se procederá a desarrollarla un poco:

$$\begin{aligned}
\phi'(\delta) \leq -1 &\Leftrightarrow \frac{-C\beta e^{\beta\delta}}{(1 + e^{\beta\delta})^2} \leq -1 \\
&\Leftrightarrow C\beta e^{\beta\delta} \geq \underbrace{(1 + e^{\beta\delta})^2}_{:=z} \\
&\Leftrightarrow 0 \geq C\beta - C\beta z + z^2.
\end{aligned}$$

Como es una parábola positiva, sólo puede ser ≤ 0 entre sus raíces, esto es:

$$(4.8) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2}}_{:=z_-} \leq z \leq \underbrace{\frac{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2}}_{:=z_+} \quad (4.9)$$

$$\Leftrightarrow z_- \leq 1 + e^{\beta\delta} \leq z_+ \quad (4.10)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln(z_- - 1)}{\beta}}_{:=\delta_-} \leq \delta \leq \underbrace{\frac{\ln(z_+ - 1)}{\beta}}_{:=\delta_+}. \quad (4.11)$$

La condición (4.11) se traduce en que en (δ_-, δ) la curva $\phi(\cdot)$ esté por sobre la recta $y(\delta) = \delta$, y que en (δ, δ_+) esté por bajo ella, esto es, la condición de inestabilidad (4.8) se puede ver también como:

$$(4.8) \Leftrightarrow \phi(\delta_-) \geq \delta_- \wedge \phi(\delta_+) \leq \delta_+ \quad (4.12)$$

$$\Leftrightarrow A + \frac{C}{z_-} \geq \frac{\ln(z_- - 1)}{\beta} \wedge A + \frac{C}{z_+} \leq \frac{\ln(z_+ - 1)}{\beta} \quad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln(z_- - 1)}{C\beta} - \frac{1}{z_-}}_{:=\xi_-} \leq \frac{A}{C} \leq \underbrace{\frac{\ln(z_+ - 1)}{C\beta} - \frac{1}{z_+}}_{:=\xi_+}. \quad (4.14)$$

Lema 4.1.2. $\xi_+ + \xi_- = -1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \xi_+ + \xi_- &= \frac{\ln(z_+ - 1)}{C\beta} - \frac{1}{z_+} + \frac{\ln(z_- - 1)}{C\beta} - \frac{1}{z_-} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2} - 1\right)}{C\beta} - \frac{2}{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}} \\ &\quad + \frac{\ln\left(\frac{C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2} - 1\right)}{C\beta} - \frac{2}{C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{C\beta - 2 + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2}\right)}{C\beta} + \frac{\ln\left(\frac{C\beta - 2 - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2}\right)}{C\beta} \\ &\quad - \frac{2}{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}} - \frac{2}{C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{[C\beta - 2 + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}][C\beta - 2 - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}]}{4}\right)}{C\beta} \\ &\quad - 2 \frac{C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)} + C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{[C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}][C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}]} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{(C\beta)^2 - 4C\beta + 4 - (C\beta)^2 + 4C\beta}{4}\right)}{C\beta} - 4 \frac{C\beta}{(C\beta)^2 - (C\beta)^2 + 4C\beta} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{4}{4}\right)}{C\beta} - 4 \frac{C\beta}{4C\beta} = -1. \end{aligned}$$

□

Luego, gracias al Lema 4.1.2, la condición (4.14) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
(4.14) &\Leftrightarrow -\xi_+ - 1 \leq \frac{A}{C} \leq \xi_+ \\
&\Leftrightarrow -2\xi_+ - 2 \leq \frac{2A}{C} \leq 2\xi_+ \\
&\Leftrightarrow -2\xi_+ - 1 \leq \frac{2A}{C} + 1 \leq 2\xi_+ + 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{2A}{C} + 1 \right| \leq \underbrace{2\xi_+ + 1}_{:=\xi} \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{2(c_1^a - c_2^b) + (c_2^a + c_2^b) - (c_1^a + c_1^b)}{(c_2^a + c_2^b) - (c_1^a + c_1^b)} \right| \leq \xi \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{(c_2^a + c_1^a) - (c_2^b + c_1^b)}{(c_2^a - c_1^a) + (c_2^b - c_1^b)} \right| \leq \xi.
\end{aligned}$$

La expresión dentro del módulo se puede interpretar como el costo promedio de una ruta por sobre la otra (en la escala correspondiente).

Una expresión análoga para ξ viene dada por:

$$\begin{aligned}
\xi &= 2\xi_+ + 1 \\
&= \frac{2}{C\beta} \ln \left(\frac{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}}{2} - 1 \right) - \frac{4}{C\beta + \sqrt{C\beta(C\beta - 4)}} + 1 \\
&= \frac{2}{C\beta} \ln \left(\frac{4C\beta}{2(C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)})} - 1 \right) - \frac{4(C\beta - \sqrt{C\beta(C\beta - 4)})}{4C\beta} + 1 \\
&= \frac{2}{C\beta} \ln \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}} - 1 \right) - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}} \right) + 1 \\
&= \frac{2}{C\beta} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}} \right) + \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}.
\end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto que un equilibrio (es decir que satisface $\phi(\delta) = \delta$) es inestable si y sólo si

$$\left| \frac{(c_2^a + c_1^a) - (c_2^b + c_1^b)}{(c_2^a - c_1^a) + (c_2^b - c_1^b)} \right| \leq \frac{2}{C\beta} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}}} \right) + \sqrt{1 - \frac{4}{C\beta}} \quad (4.15)$$

Notar que si $C\beta < 4$ entonces el equilibrio simétrico es siempre estable y por lo tanto el proceso discreto converge casi seguramente al único punto estacionario de la dinámica continua, que es un atractor global.

Ahora para el caso $C\beta \geq 4$ se estudiará un poco mas en detalle los distintos casos. Sean las funciones $\xi'_+(x) := \xi_+(x) + \frac{1}{2}$ y $\xi'_-(x) := \xi_-(x) + \frac{1}{2}$, es fácil probar las siguientes propiedades:

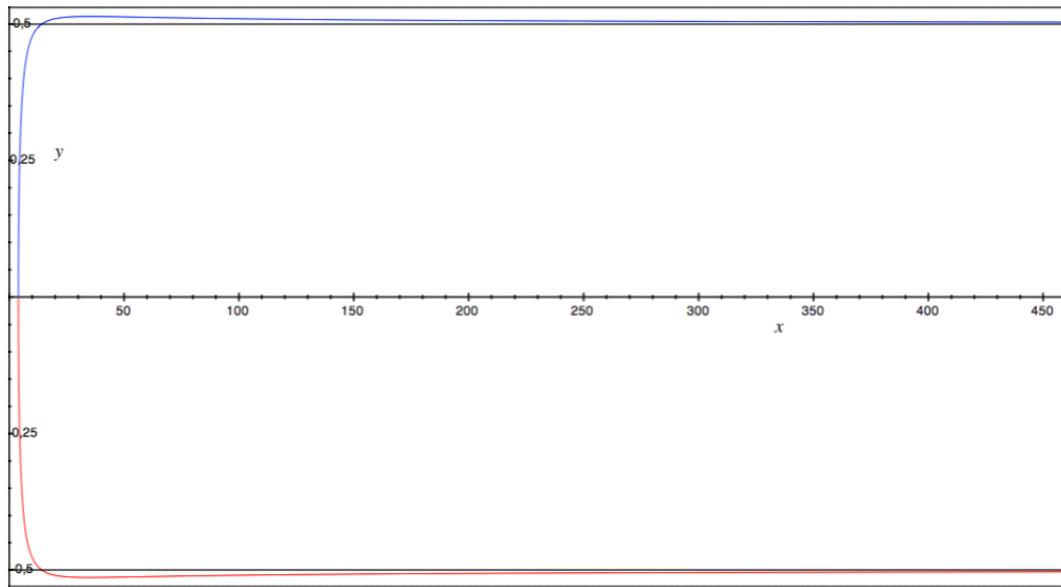


Figura 4.1: Gráfica de las funciones $\xi'_+(x), \xi'_-(x)$ en azul y rojo respectivamente.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi'_+(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \xi'_-(x) = -\frac{1}{2}$,
- $\xi'_+(x)$ tiene un máximo local, donde alcanza un valor $A_1 > \frac{1}{2}$,
- $\xi'_-(x)$ tiene un mínimo local, donde alcanza un valor $A_2 < -\frac{1}{2}$,
- $\xi'_+(4) = \xi'_-(4) = 0$.

El objetivo de la Figura 4.1 es ilustrar la desigualdad que implica la inestabilidad del equilibrio simétrico, dada por (4.14). Notar que para C fijo existen una gama de distintos valores de A que permiten que haya o no inestabilidad, formalmente se tienen los siguientes casos:

1. Si $A \in [-C, 0]$, entonces $\forall \beta$ tal que $C\beta \geq 4$, se satisface que el equilibrio simétrico es inestable y puede dar paso a la existencia de otros equilibrios distintos.
2. Si $A > C(A_1 - \frac{1}{2})$ ó $A < C(A_2 - \frac{1}{2})$, entonces nunca se satisface la condición (4.15) y por lo tanto el equilibrio simétrico es siempre estable, de donde se tiene nuevamente la convergencia casi segura a tal atractor.
3. Si $A \in (0, C(A_1 - \frac{1}{2})]$ ó $A \in [C(A_2 - \frac{1}{2}), -1)$, dependiendo de los valores de β , el equilibrio simétrico pasa de ser estable a inestable, pues a medida que β crece, la curva $y = A$ queda encerrada entre las curvas $\xi'_+(x)$ y $\xi'_-(x)$, y luego como éstas se acercan asintóticamente a $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ respectivamente, se deja de cumplir (4.15) y el equilibrio simétrico pasa nuevamente a ser estable.

En resumen, si no se cumple alguna de las condiciones de inestabilidad entonces el equilibrio simétrico pasa a ser un atractor global para la dinámica continua y con probabilidad 1, el proceso discreto dado por la regla de actualización de las percepciones converge a tal equilibrio. En el caso de que las condiciones de inestabilidad se satisfagan

entonces da paso a la existencia de mas equilibrios y el comportamiento alrededor de ellos dependerá de los parámetros del problema, se sabe que para el caso general de N jugadores M rutas hay condiciones que aseguran la convergencia casi segura y con probabilidad positiva a los atractores de la dinámica continua, no obstante dada la estructura de este caso particular se puede decir mas acerca de los demás posibles equilibrios, en efecto, el siguiente teorema establece que para la dinámica original a lo mas hay 3 equilibrios.

Teorema 4.1.3. *En la dinámica de 2 jugadores y 2 rutas hay a lo mas 3 equilibrios.*

Demostración. Se pretende para tal propósito estudiar los puntos fijos de la siguiente función:

$$\Psi(x) = A + \frac{C}{1 + e^{\beta A + \frac{\beta C}{1 + e^{\beta x}}}}. \quad (4.16)$$

Se considera el siguiente cambio de variables (estrictamente decreciente):

$$y = \frac{1}{1 + e^{\beta x}}, \Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta}, \quad y \in (0, 1).$$

Sea x , punto fijo de Ψ , y considerando las siguientes variables $\bar{A} := \beta A, \bar{C} := \beta C$, se tiene que:

$$\Psi(x) = x \Leftrightarrow \Psi\left(\frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta} \quad (4.17)$$

$$\Leftrightarrow A + C \left[\frac{1}{1 + e^{\beta A + \beta C \left(1 + e^{\beta \frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta}}\right)^{-1}}} \right]^{-1} = \frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta} \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow A + \frac{C}{1 + e^{\beta A + \beta C y}} = \frac{\log\left(\frac{1}{y} - 1\right)}{\beta} \quad (4.19)$$

$$\Leftrightarrow \beta A + \frac{\beta C}{1 + e^{\beta A + \beta C y}} = \log\left(\frac{1}{y} - 1\right) \quad (4.20)$$

$$\Leftrightarrow \bar{A} + \frac{\bar{C}}{1 + e^{\bar{A} + \bar{C} y}} = \log\left(\frac{1}{y} - 1\right). \quad (4.21)$$

La función de la derecha no depende (explícitamente) de los parámetros, por lo que permite un estudio en detalle de su comportamiento:

$$f(y) := \log\left(\frac{1}{y} - 1\right), \quad (4.22)$$

$$f'(y) = \frac{1}{\frac{1}{y} - 1} \left(\frac{-1}{y^2}\right) = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} < 0, \quad (4.23)$$

$$f''(y) = \frac{-1}{(y-1)^2} - \frac{-1}{y^2}. \quad (4.24)$$

Notar primero que como $f'(y) < 0$ entonces $f(y)$ es decreciente. Además $f''(y) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ y $f''(y) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, por lo tanto $f(y)$ es convexa entre $(0, \frac{1}{2})$ y cóncava en $(\frac{1}{2}, 1)$. Por otro lado trivialmente se tiene que:

- $f(\frac{1}{2}) = 0$,
- $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \infty$,
- $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = -\infty$.

Por otra parte la función $g(y) := \bar{A} + \frac{\bar{C}}{1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y}}$ en (4.21) satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{-\bar{C}}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2} e^{\bar{A} + \bar{C}y} \bar{C} \\ &= \frac{-\bar{C}^2}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2} e^{\bar{A} + \bar{C}y} < 0, \\ g''(y) &= -\bar{C}^2 \left[\frac{-1}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^3} 2e^{\bar{A} + \bar{C}y} \bar{C} e^{\bar{A} + \bar{C}y} + \frac{1}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2} e^{\bar{A} + \bar{C}y} \bar{C} \right] \\ &= \frac{-\bar{C}^3 e^{\bar{A} + \bar{C}y}}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^3} [1 - e^{\bar{A} + \bar{C}y}]. \end{aligned}$$

Como $g'(y) < 0$ la función $g(y)$ es decreciente. Además $e^{\bar{A} + \bar{C}y} \in [e^{\bar{A}}, e^{\bar{A} + \bar{C}}]$, con $\bar{A} = \beta(c_1^a - c_2^b)$ y $\bar{C} = \beta(c_2^a + c_2^b - (c_1^a + c_1^b)) \geq 0$, de donde $\bar{A} + \bar{C} = \beta(c_2^a - c_1^b)$, que puede ser tanto negativo como positivo, dependiendo de los parámetros del problema.

Notar ahora que:

$$\begin{aligned} g''(y) = 0 &\Leftrightarrow e^{\bar{A} + \bar{C}y} = 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{A} + \bar{C}y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-\bar{A}}{\bar{C}}. \end{aligned}$$

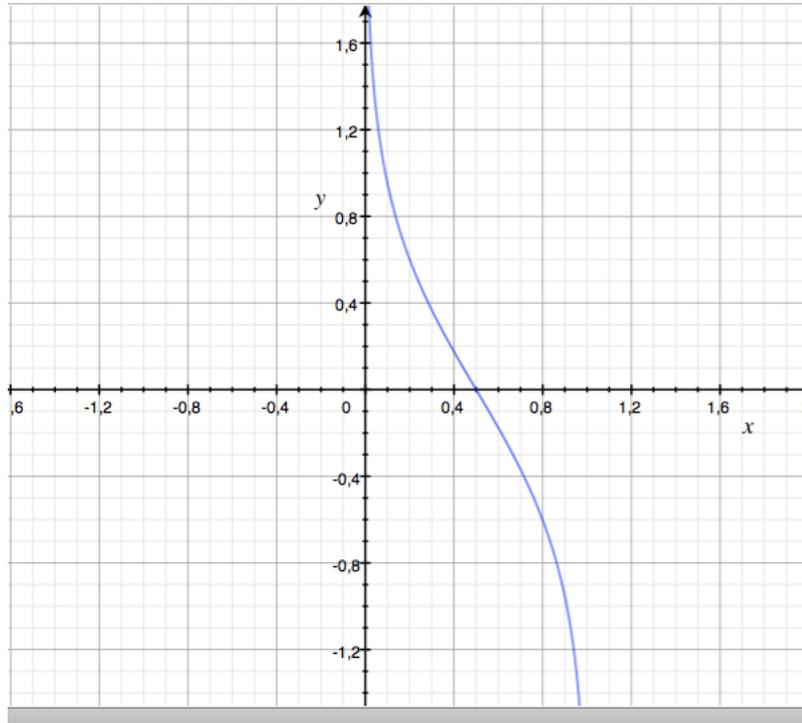
Y esto último sólo es válido si $\bar{A} < 0$ y $\bar{C} > |\bar{A}|$, pues $y \in (0, 1)$. De cumplirse lo anterior $g(y)$ tiene un sólo cambio de curvatura, pasando de ser convexa a cóncava, pues:

- Si $e^{\bar{A} + \bar{C}y} < 1$, $\Rightarrow g''(y) < 0$, es decir, $g(y)$ es cóncava.
- Si $e^{\bar{A} + \bar{C}y} > 1$, $\Rightarrow g''(y) > 0$, es decir, $g(y)$ es convexa.

Notar finalmente que $\infty = f(0) > g(0) = \bar{A} + \frac{\bar{C}}{1 + e^{\bar{A}}} > \bar{A} + \frac{\bar{C}}{1 + e^{\bar{A} + \bar{C}}} = g(1) > f(1) = -\infty$, tal condición asegura que las curvas $f(y), g(y)$ se intersectan al menos una vez (sin importar la curvatura de $g(y)$).

Se define ahora la función $h(y) = f(y) - g(y)$, cuya primera derivada viene dada por:

$$h'(y) = \frac{1}{y(y-1)} + \frac{\bar{C}^2}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2} e^{\bar{A} + \bar{C}y}. \quad (4.25)$$

Figura 4.2: $f(y)$

Notar que los ceros de $h'(y)$ indican la cantidad de mínimos y máximos locales de la función $h(y)$, si tal cantidad es menor o igual a dos, entonces necesariamente $h(y)$ tiene un sólo cambio de curvatura (notar que $h(0) = \infty$ y $h(1) = -\infty$), se tiene entonces la siguiente secuencia de equivalencias:

$$\begin{aligned}
 h'(y) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{y(1-y)} = \frac{\bar{C}^2}{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2} e^{\bar{A} + \bar{C}y} \\
 &\Leftrightarrow \bar{C}^2 y(1-y) = \frac{(1 + e^{\bar{A} + \bar{C}y})^2}{e^{\bar{A} + \bar{C}y}} \\
 &\Leftrightarrow \bar{C}^2 y(1-y) = \left(\frac{1}{e^{\frac{\bar{A} + \bar{C}y}{2}}} + e^{\frac{\bar{A} + \bar{C}y}{2}} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \bar{C}^2 y(1-y) = 4 \left(\frac{e^{-\frac{\bar{A} + \bar{C}y}{2}} + e^{\frac{\bar{A} + \bar{C}y}{2}}}{2} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \bar{C}^2 y(1-y) = 4 \cosh^2\left(\frac{\bar{A} + \bar{C}y}{2}\right).
 \end{aligned}$$

La función de la izquierda es una parábola abierta hacia abajo, y por lo tanto una función estrictamente cóncava. Por su parte la función del lado derecho es estrictamente convexa, y luego esa igualdad a lo más se puede alcanzar en 2 puntos. De donde $h'(y)$ puede tener a lo más dos ceros, y consecuentemente $h(y)$ tiene a lo más un cambio de curvatura, con lo que $f(y)$ y $g(y)$ se pueden intersectar a lo más en tres puntos.

□

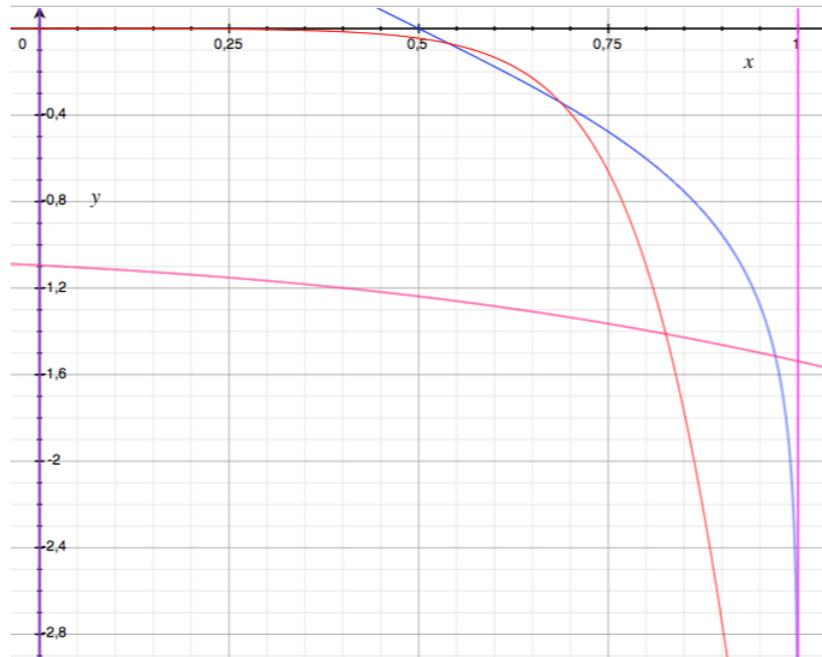


Figura 4.3: $f(y)$ en azul , $g(y)$ en tonalidades rojas, con dos diferentes pares de parámetros

Ahora para una visualización de la dependencia de los parámetros se presenta el siguiente análisis, de todos los casos relevantes:

- Caso $\bar{A} + \bar{C} < 0$:

Notar que para tal caso $\frac{-\bar{A}}{\bar{C}} > 1$ por lo tanto, para g , no hay cambio de curvatura en el intervalo $[0, 1]$ permaneciendo siempre cóncava. Su primer valor extremo es negativo ($\bar{A} + \frac{\bar{C}}{1+e^{\bar{A}}} \leq \bar{A} + \bar{C} < 0$, y como es decreciente, entonces $\bar{A} + \frac{\bar{C}}{1+e^{\bar{A}+\bar{C}}} < 0$). Un aumento de los valores absolutos de los parámetros, hace que la pendiente sea más pronunciada, permitiendo la existencia de más de una intersección con la curva $f(y)$ tal como se ve en la Figura 4.3, sin embargo no puede haber más de 3 cruces, pues $g(y)$ no tiene cambios de curvatura en ese intervalo.

- Caso $\bar{A} > 0$:

Para este caso $\bar{A} + \bar{C} > 0$ y por lo tanto $\frac{-\bar{A}}{\bar{C}} < 0$, de donde g es convexa en $[0, 1]$, por otra parte $g(1) = \bar{A} + \frac{\bar{C}}{1+e^{\bar{A}+\bar{C}}} \geq \bar{A} > 0$ y como g es estrictamente decreciente, entonces g es siempre positiva en el intervalo $[0, 1]$. Nuevamente si los parámetros son muy grandes hacen que la pendiente de la curva crezca (en módulo), como se aprecia con la curva de color rojo en la Figura 4.4, por lo que no pueden haber más de 3 intersecciones (y necesariamente hay al menos 1).

- Caso $\bar{A} < 0$ y $\bar{A} + \bar{C} > 0$:

En este caso la función $g(y)$ tiene un cambio de curvatura en el intervalo en cuestión, y lo que se aprecia en la Figura 4.5 es una situación bastante similar a las de los puntos anteriores, a lo más hay 3 posibles cortes entre ambas curvas y por lo tanto a lo más 3 equilibrios del sistema original.

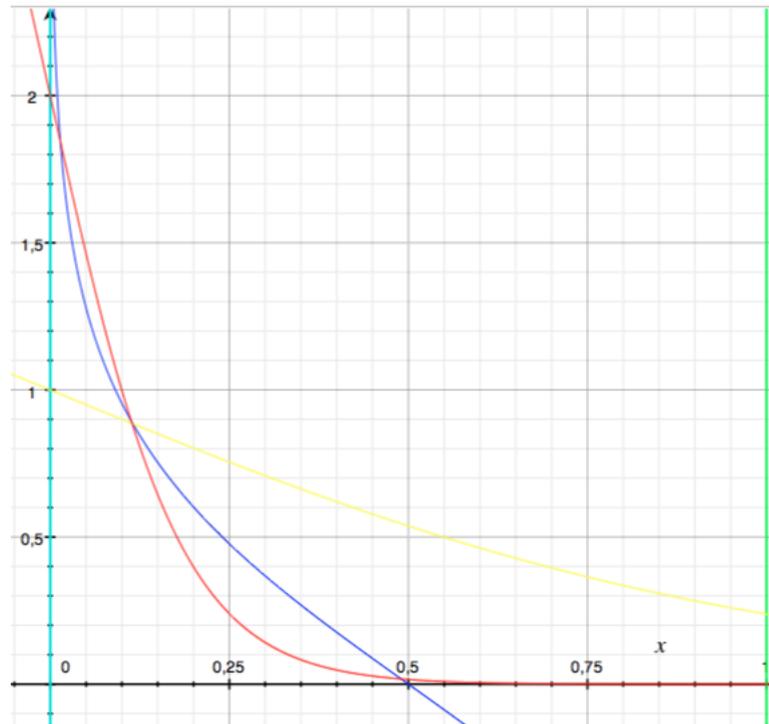


Figura 4.4: $f(y)$ en azul, $g(y)$ en rojo y amarillo (ante distinto par de parámetros)

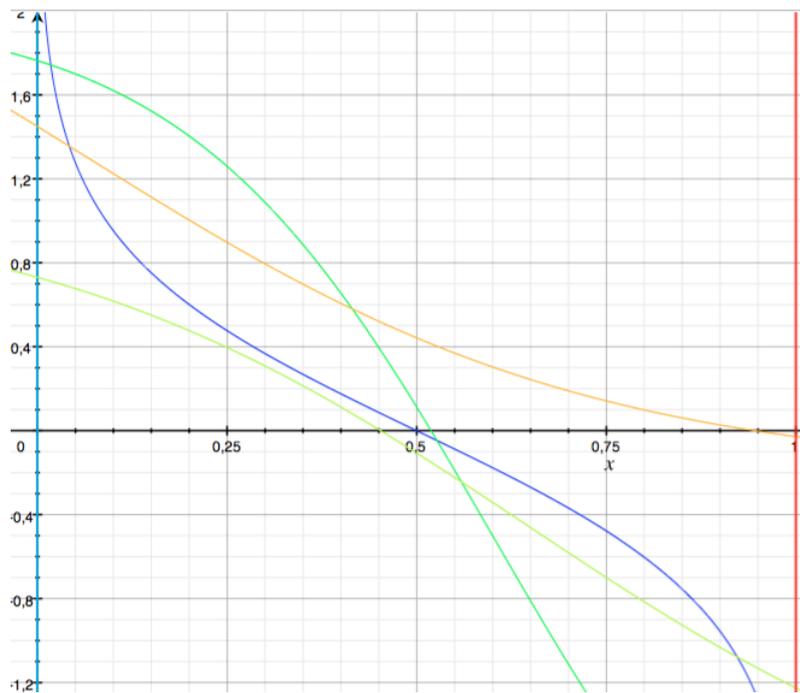


Figura 4.5: $f(y)$ en azul, $g(y)$ en colores anaranjado y variantes de verde para distintos parámetros

4.2. Caso 3 jugadores, 2 rutas

El estudio de este caso es ilustrativo, para mostrar como se complican las ecuaciones al ir incorporando mas agentes. Los equilibrios asociados con las dinámicas vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x^{1a} &= c_1^a(1 - \pi^{2a})(1 - \pi^{3a}) + c_2^a[(1 - \pi^{2a})\pi^{3a} + (1 - \pi^{3a})\pi^{2a}] + c_3^a\pi^{2a}\pi^{3a}, \\ -x^{1b} &= c_1^b\pi^{2a}\pi^{3a} + c_2^b[(1 - \pi^{2a})\pi^{3a} + (1 - \pi^{3a})\pi^{2a}] + c_3^b(1 - \pi^{2a})(1 - \pi^{3a}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^{2a} &= c_1^a(1 - \pi^{1a})(1 - \pi^{3a}) + c_2^a[(1 - \pi^{1a})\pi^{3a} + (1 - \pi^{3a})\pi^{1a}] + c_3^a\pi^{1a}\pi^{3a}, \\ -x^{2b} &= c_1^b\pi^{1a}\pi^{3a} + c_2^b[(1 - \pi^{1a})\pi^{3a} + (1 - \pi^{3a})\pi^{1a}] + c_3^b(1 - \pi^{1a})(1 - \pi^{3a}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^{3a} &= c_1^a(1 - \pi^{2a})(1 - \pi^{1a}) + c_2^a[(1 - \pi^{2a})\pi^{1a} + (1 - \pi^{1a})\pi^{2a}] + c_3^a\pi^{2a}\pi^{1a}, \\ -x^{3b} &= c_1^b\pi^{2a}\pi^{1a} + c_2^b[(1 - \pi^{2a})\pi^{1a} + (1 - \pi^{1a})\pi^{2a}] + c_3^b(1 - \pi^{2a})(1 - \pi^{1a}). \end{aligned}$$

Se define como antes $\delta_i := x^{ib} - x^{ia}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. De donde se tiene que:

$$\delta_1 = \underbrace{(c_1^a - c_3^b)(1 - \pi^{2a})(1 - \pi^{3a}) + (c_2^a - c_2^b)[(1 - \pi^{2a})\pi^{3a} + (1 - \pi^{3a})\pi^{2a}] + (c_3^a - c_1^b)\pi^{2a}\pi^{3a}}_{:=f(\pi^{2a}, \pi^{3a})},$$

$$\delta_2 = f(\pi^{1a}, \pi^{3a}),$$

$$\delta_3 = f(\pi^{2a}, \pi^{1a}).$$

Claramente $f(x, y) = f(y, x)$, y se tiene además que:

$$\begin{aligned} \pi^{ia} &= \frac{e^{\beta x^{ia}}}{e^{\beta x^{ia}} + e^{\beta x^{ib}}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta(x^{ib} - x^{ia})}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta \delta_i}} \\ &\Leftrightarrow \delta_i = \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1}{\pi^{ia}} - 1\right). \end{aligned}$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que sólo involucra π 's.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1}{\pi^{1a}} - 1\right) &= f(\pi^{2a}, \pi^{3a}), \\ \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1}{\pi^{2a}} - 1\right) &= f(\pi^{1a}, \pi^{3a}), \\ \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1}{\pi^{3a}} - 1\right) &= f(\pi^{2a}, \pi^{1a}). \end{aligned}$$

O equivalentemente

$$\pi^{1a} = \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi^{2a}, \pi^{3a})}} := h(\pi^{2a}, \pi^{3a}), \quad (4.26)$$

$$\pi^{2a} = \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi^{1a}, \pi^{3a})}} := h(\pi^{1a}, \pi^{3a}), \quad (4.27)$$

$$\pi^{3a} = \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi^{2a}, \pi^{1a})}} := h(\pi^{2a}, \pi^{1a}). \quad (4.28)$$

Este último sistema, se puede reducir al siguiente sistema de 2 ecuaciones:

$$\pi^{1a} = \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi^{2a}, h(\pi^{2a}, \pi^{1a}))}} = h(\pi^{2a}, h(\pi^{2a}, \pi^{1a})), \quad (4.29)$$

$$\pi^{2a} = \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi^{1a}, h(\pi^{1a}, \pi^{2a}))}} = h(\pi^{1a}, h(\pi^{1a}, \pi^{2a})). \quad (4.30)$$

Observación 4.2.1. Se cumplen trivialmente las siguientes propiedades:

- $\pi^{ia} = 1 - \pi^{ib} := \pi^i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$
- $h(x, y) = h(y, x).$
- $f(x, y) = \underbrace{[(c_1^a - c_3^a) + [(c_3^a - c_2^a) + (c_2^b - c_1^b)]x]}_{:=f_1(x)} + y \underbrace{[(c_3^a - c_2^a) + (c_2^b - c_1^b)] + [(c_3^a - 2c_2^a + c_1^a) - (c_3^b - 2c_2^b + c_1^b)]x}_{:=f_2(x)}.$

4.2.1. Caso simétrico

Llamando $M := c_1^a - c_3^b$, $N := [(c_3^a - c_2^a) + (c_2^b - c_1^b)]$, $O := [(c_3^a - 2c_2^a + c_1^a) - (c_3^b - 2c_2^b + c_1^b)]$ se tiene que:

$$f_1(x) = M + Nx \quad \wedge \quad f_2(x) = N + Ox. \quad (4.31)$$

Notar que $N \geq 0$, M generalmente es ≤ 0 y O se puede suponer ≥ 0 (sino es cuestión de intercambiar los arcos).

Lema 4.2.2. *En el caso de costos lineales afines: $c_j^r = u^r + jv^r$, se tiene que $O = 0$.*

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned} O &= [(c_1^a - 2c_2^a + c_3^a) - (c_1^b - 2c_2^b + c_3^b)] \\ &= [(u^a + v^a - 2(u^a + 2v^a) + u^a + 3v^a) - ((u^b + v^b - 2(u^b + 2v^b) + u^b + 3v^b))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Para el caso simétrico se busca analizar entonces la siguiente ecuación:

$$\pi = h(\pi, \pi) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 + e^{\beta f(\pi, \pi)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta([M+N\pi]+[N+O\pi]\pi)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\beta(M+2N\pi+O\pi^2)}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right) = M + 2N\pi + O\pi^2. \quad (4.34)$$

La función $\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right)$ ya ha sido estudiada anteriormente y se conoce su comportamiento: es una función estrictamente decreciente, con asíntotas verticales en 0 y en 1, con un cero y punto de inflexión en $\pi = \frac{1}{2}$. Es convexa entre $(0, \frac{1}{2})$ y cóncava en $(\frac{1}{2}, 1)$. Por su parte para la función $M + 2N\pi + O\pi^2$ se tienen dos casos:

- $O = 0$ El lado derecho de la ecuación (4.34) pasa a ser la recta creciente $M + 2N\pi$, que interseca sólo una vez a $\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right)$ y por lo tanto hay un único equilibrio.
- $O > 0$
 1. **(raíces reales)** El lado derecho de la ecuación (4.34) es una parábola abierta hacia arriba, con raíces $\pi_1 = -\frac{N+\sqrt{N^2-MO}}{O} < 0$ y $\pi_2 = \frac{-N+\sqrt{N^2-MO}}{O}$. De π_2 no se sabe a priori su signo, sin embargo dado que el valor mínimo de $M + 2N\pi + O\pi^2$ se encuentra en $\frac{-N}{O} < 0$, sólo la rama derecha de la parábola (donde es creciente) se encuentra en el intervalo donde interesa el análisis, entonces allí habrá sólo una intersección con la función $\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right)$ y por lo tanto un único equilibrio.
 2. **(raíces complejas)** En el caso que $N^2 - MO < 0$ la parábola no tiene raíces reales, sin embargo su valor mínimo sigue estando en $\pi = \frac{-N}{O}$, por lo que en el intervalo $[0, 1]$ se encuentra sólo la rama creciente estricta, de donde habrá sólo una intersección con $\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi} - 1 \right)$ y consecuentemente un único equilibrio.

4.2.2. Caso Semisimétrico

Lema 4.2.3. La función $h(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{\beta f(x_1, x_2)}}$ es decreciente en sus dos variables.

Demostración. En efecto, calculando una derivada parcial se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \frac{-1}{(1 + e^{\beta f(x_1, x_2)})^2} e^{\beta f(x_1, x_2)} \beta \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ &= - \underbrace{\frac{\beta e^{\beta f(x_1, x_2)}}{(1 + e^{\beta f(x_1, x_2)})^2}}_{>0} \frac{\partial f}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Como $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + x_2 f_2(x_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= [(c_3^a - c_2^a) + (c_2^b - c_1^b)] + [(c_3^a - 2c_2^a + c_1^a) - (c_3^b - 2c_2^b + c_1^b)]x_1 \\ &= \underbrace{N}_{\geq 0} + \underbrace{O}_{\geq 0} \underbrace{x_1}_{\geq 0} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Segue que $\text{sgn}(\frac{\partial h}{\partial x_2}) = -\text{sgn}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = -1$ y por simetría $\text{sgn}(\frac{\partial h}{\partial x_1}) = -1$, por lo que h es decreciente en sus dos variables. \square

Se pretende, ante la dificultad de calcular un equilibrio total del sistema, suponer alguna de las probabilidades fijas, por ejemplo $\pi^3 = \pi^*$ y analizar el sistema reducido:

$$\pi^1 = h(\pi^2, \pi^*) \quad \wedge \quad \pi^2 = h(\pi^1, \pi^*), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ \pi^1 &= h(h(\pi^1, \pi^*), \pi^*) \quad \vee \quad \pi^2 = h(h(\pi^2, \pi^*), \pi^*). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Lema 4.2.4. *El sistema (4.35) (equivalentemente (4.36)) tiene solución.*

Demostración. Teniendo en consideración que h es una función continua y acotada entre 0 y 1, si se aumenta π^i ($i \in \{1, 2\}$) entonces $h(\pi^i, \pi^*)$ decrece, y por lo tanto $h(h(\pi^i, \pi^*), \pi^*)$ crece. Para $\pi^i = 0$ la función $h(h(\pi^i, \pi^*), \pi^*)$ parte con un valor ≥ 0 y ≤ 1 y a medida que π^i crece, también lo hace (de manera continua), hasta llegar (en $\pi^i = 1$) a un valor en $[0, 1]$. De donde necesariamente se intersecta al menos una vez con la diagonal $y = \pi^i$. \square

Sean $\pi^1 = \pi^1(\pi^*)$ y $\pi^2 = \pi^2(\pi^*)$ (algunas) las soluciones del sistema (4.35). Para tales valores se verifica si se satisface la *condición de compatibilidad* (\mathcal{C}): $\pi^* = h(\pi^1(\pi^*), \pi^2(\pi^*))$. Notar que en general, independiente de como se comporten las funciones $\pi^1(\cdot)$ y $\pi^2(\cdot)$, las curvas $y = \pi$ e $y = h(\pi^1(\pi), \pi^2(\pi))$ se intersectarán al menos en un punto (por un argumento similar al del lema anterior), sin embargo tal intersección no necesariamente ocurrirá en $\pi = \pi^*$, por lo que posee un criterio para determinar cuando, vía este método, se tiene o no un equilibrio del sistema.

Un caso interesante, es cuando se tiene que para un π^3 fijo se obtiene un equilibrio (parcial) simétrico en el sistema reducido (4.35), $\pi_S^1(\pi^3) = \pi_S^2(\pi^3)$, si además se satisface la condición de compatibilidad \mathcal{C} , se dice que la tupla $(\pi_S^1(\pi^3), \pi_S^2(\pi^3), \pi^3)$ es un **equilibrio semisimétrico**.

Proposición 4.2.5. *Los equilibrios (parciales) simétricos $\pi_S^1(\pi^3) = \pi_S^2(\pi^3)$ son decrecientes con π^3 .*

Demostración. En efecto, dado que $\pi_S^1(\pi^3), \pi_S^2(\pi^3)$ son soluciones del sistema reducido satisfacen:

$$\pi_S^1 = h(\pi_S^2, \pi^3) = h(\pi_S^1, \pi^3) = \pi_S^2 \quad (4.37)$$

Se denota $m^i(\pi^3) := h(\pi_S^1, \pi^3 + i)$ y se hace crecer $\pi^3 \nearrow \pi^3 + \delta$, como $h(\pi_S^1, \cdot)$ es decreciente, se tiene que:

$$\pi_S^1 = h(\pi_S^1, \pi^3) \geq h(\pi_S^1, \pi^3 + \delta) = m^\delta(\pi^3) \quad (4.38)$$

Luego para este $\pi^* := \pi^3 + \delta$ se puede encontrar otro equilibrio simétrico del sistema reducido $(\pi_S^{1*}, \pi_S^{1*}) = (h(\pi_S^{2*}, \pi^*), h(\pi_S^{1*}, \pi^*))$, y por (4.38) tal equilibrio necesariamente es menor que (π_S^1, π_S^1) , de donde $\pi_S^1(\pi^3) = \pi_S^2(\pi^3)$ es decreciente. \square

Teorema 4.2.6. *Existen a lo mas 3 equilibrios semisimétricos (salvo permutaciones¹).*

Demostración. En efecto, se considera un equilibrio semisimétrico $(\pi_S^1(\pi^3), \pi_S^2(\pi^3), \pi^3)$, con $\pi_S^1(\pi^3) = \pi_S^2(\pi^3) := \pi_S(\pi^3)$. Tal tupla debe satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$\pi_S(\pi^3) = h(\pi_S(\pi^3), \pi^3) = \frac{1}{1 + e^{\beta[f_1(\pi_S(\pi^3)) + \pi^3 f_2(\pi_S(\pi^3))]}}, \quad (4.39)$$

$$\pi^3 = h(\pi_S(\pi^3), \pi_S(\pi^3)) = \frac{1}{1 + e^{\beta[f_1(\pi_S(\pi^3)) + \pi_S(\pi^3) f_2(\pi_S(\pi^3))]}}, \quad (4.40)$$

Despejando π^3 de la ecuación (4.39) e igualando con la ecuación (4.40) se tiene:

$$\left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi_S(\pi^3)} - 1 \right) - f_1(\pi_S(\pi^3)) \right] \frac{1}{f_2(\pi_S(\pi^3))} = \frac{1}{1 + e^{\beta[f_1(\pi_S(\pi^3)) + \pi_S(\pi^3) f_2(\pi_S(\pi^3))]}}, \quad (4.41)$$

o equivalentemente:

$$\underbrace{\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{\pi_S(\pi^3)} - 1 \right) - f_1(\pi_S(\pi^3))}_{:=g_1(\pi_S(\pi^3))} = \underbrace{\frac{f_2(\pi_S(\pi^3))}{1 + e^{\beta[f_1(\pi_S(\pi^3)) + \pi_S(\pi^3) f_2(\pi_S(\pi^3))]} }_{:=g_2(\pi_S(\pi^3))}. \quad (4.42)$$

En lo que sigue se pretende estudiar el comportamiento de las funciones $g_1(x), g_2(x)$, recordando que por (4.31) $f_1(x), f_2(x)$ se pueden escribir como sigue:

$$f_1(x) = M + Nx \quad \wedge \quad f_2(x) = N + Ox. \quad (4.43)$$

La función $g_1(x) = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1}{x} - 1 \right) - (M + Nx)$, que está conformada por una suma de funciones decrecientes, satisface las siguientes propiedades que se verifican fácilmente:

- $g_1'(x) = \frac{1}{\beta} \frac{-1}{x(1-x)} - N$, de donde $g_1'(x) = 0$ puede tener a lo más dos soluciones, pero ninguna de estas soluciones está en $[0, 1]$, por lo que en ese intervalo g_1 no tiene cambio de monotonía.

¹En el sentido de considerar como fija alguna de las otras probabilidades.

- $g_1(0) = \infty, g_1(1) = -\infty$.
- $g_1(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) = (M + Nx)$ que puede tener a lo más 1 solución. Por lo tanto la función $g_1(x)$ puede tener a lo más 1 cero en $[0, 1]$.
- $g_1''(x) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{-1}{x^2} \right]$, consecuentemente $g_1''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ y $g_1''(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Por lo tanto $g_1(x)$ pasa de convexa a cóncava en $x = \frac{1}{2}$.

La función $g_2(x) = \frac{N+Ox}{1+e^{\beta[M+2Nx+Ox^2]}}$ por su parte es siempre positiva para todo $x \in [0, 1]$, pues $N \geq 0$ y $N + O = (c_2^b - c_1^b) + (c_3^a - c_2^a) \geq 0$. Para un análisis un poco mas detallado se estudiarán 2 casos:

- $O = 0$ (por ejemplo en el caso de costos lineales afines)

En este caso $g_2(x) = \frac{N}{1 + e^{\beta(M+2Nx)}}$, y vía el cambio de variables $y := \beta(M + 2Nx)$, sumado a la utilización de la siguiente función auxiliar $g_3(y) := g_2\left(\frac{y-\beta M}{2N\beta}\right) = \frac{N}{1+e^y}$ se pretende estudiar las propiedades de monotonía y curvatura de $g_2(x)$.

$g_3(y)$ es una función decreciente, pues:

$$g_3'(y) = \frac{-N}{(1 + e^y)^2} e^y < 0.$$

Y $g_3(y)$ tiene a lo más 1 cambio de curvatura:

$$g_3''(y) = \frac{Ne^y}{(1 + e^y)^3} [e^y - 1].$$

De donde

$$g_3''(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-M}{2N}. \quad (4.44)$$

Luego para que haya un cambio de curvatura donde interesa, $x \in (0, 1)$, debe tenerse que $M \geq 0 \wedge -2N \geq |M|$.

Con esto $g_2(x)$ es una función decreciente y con a lo más un cambio de curvatura, de donde, basado en lo probado para el Teorema 4.1.3, a lo más se intersecta 3 veces con la función $g_1(x)$.

- $O > 0$

Se define el cambio de variables $y := N + Ox$ y se utiliza la función auxiliar siguiente:

$$\begin{aligned}
g_4(y) &= g_2\left(\frac{y-N}{O}\right) \\
&= \frac{N + O\frac{y-N}{O}}{1 + e^{\beta[M+N\frac{y-N}{O} + (N+O\frac{y-N}{O})\frac{y-N}{O}]}} \\
&= \frac{y}{1 + e^{\frac{\beta}{O}[NO+2N(y-N)+(y-N)^2]}} \\
&= \sqrt{\frac{O}{\beta}} \frac{\sqrt{\frac{\beta}{O}y}}{1 + \underbrace{e^{\beta(M-\frac{N^2}{O})}}_{:=\rho} e^{\frac{\beta}{O}y^2}} \\
(z := \sqrt{\frac{\beta}{O}y}) &= \sqrt{\frac{O}{\beta}} \frac{z}{\underbrace{1 + \rho e^{z^2}}_{:=g_5(z)}}.
\end{aligned}$$

Se estudia entonces la función $g_5(z)$. Notar previamente que $z \geq 0$.

$$g_5'(z) = \frac{1}{1 + \rho e^{z^2}} + \frac{-\rho e^{z^2} 2z}{(1 + \rho e^{z^2})^2} z = \frac{1}{(1 + \rho e^{z^2})^2} [1 + \rho e^{z^2} - 2\rho z^2 e^{z^2}].$$

Luego

$$g_5'(z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\rho e^{z^2}(2z^2 - 1) - 1}_{:=g_6(z)} = 0.$$

Pero $g_6(0) = -1$, $g_6'(z) = 2\rho z e^{z^2}(2z^2 + 1)$ es positiva y por lo tanto creciente. Por otro lado $g_6''(z) = 2\rho e^{z^2}(4z^4 + 8z^2 + 1) > 0$ de donde se trata de una función convexa. Entonces necesariamente (para $z \geq 0$) $g_6(z)$ tiene un sólo cero y por lo tanto $g_5(z)$ tiene un sólo cambio de monotonía. Como $g_5(z) \geq 0$ si $z \geq 0$ y $\lim_{z \rightarrow \infty} g_5(z) = 0$, se tiene que la función pasa de ser creciente a decreciente.

$$\begin{aligned}
g_5''(z) &= \frac{-\rho e^{z^2} 2z}{(1 + \rho e^{z^2})^2} + 2\rho \left[\frac{2\rho e^{z^2} 2z(z^2 e^{z^2})}{(1 + \rho e^{z^2})^3} + \frac{-(2ze^{z^2} + z^2 e^{z^2} 2z)}{(1 + \rho e^{z^2})^2} \right] \\
&= \frac{2\rho z e^{z^2}}{(1 + \rho e^{z^2})^3} \left[-1 - \rho e^{z^2} + 4\rho z^2 e^{z^2} + (1 + \rho e^{z^2})2(1 + z^2) \right] \\
&= \frac{2\rho z e^{z^2}}{(1 + \rho e^{z^2})^3} \left[\rho e^{z^2}(2z^2 - 3) - (2z^2 + 3) \right].
\end{aligned}$$

$$\text{De donde } g_5''(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee \underbrace{\rho e^{z^2}(2z^2 - 3) - (2z^2 + 3)}_{:=g_7(z)} = 0.$$

Luego $z = 0$ indica un cambio de curvatura, pero además para z muy cercano a 0 (por la derecha) $g_5''(z) < 0$, por lo que el cambio de curvatura es de convexo a cóncavo.

Ahora resta notar que $g_7(0) = -3(1 + \rho) < 0$, $g_7'(z) = 2z[\rho e^{z^2}(2z^2 - 1) - 2]$, que tiene 2 ceros, uno en $z = 0$ y el otro cuando $\rho e^{z^2}(2z^2 - 1) - 2 = 0$ que ocurre en un sólo punto (caso muy similar al visto en el caso $O = 0$) para $z \geq 0$, pero para z cercano a 0 (por la derecha) $g_7'(z) < 0$, entonces $z = 0$ es un máximo local, de donde necesariamente $g_7(z)$ se hace 0 en un solo punto.

Resumiendo, en el caso general, la función $g_5(z)$ tiene 2 cambios de monotonía y 3 cambios de curvatura: comienza cercana a 0 siendo negativa, decrece de manera cóncava, hasta el primer cambio de curvatura pasando a ser convexa, llega a un mínimo local y comienza a crecer (de manera convexa), en $z=0$ tiene un cambio de curvatura, llega a un máximo local y comienza a decrecer de manera cóncava hasta el siguiente punto de inflexión donde pasa a ser convexa y termina decreciendo a 0.

Se tiene luego en este caso que que también a lo mas hay tres cortes y por lo tanto salvo permutaciones sólo hay 3 equilibrios semisimétricos. En esta parte no se estudió la convergencia de la dinámica discreta a estos equilibrios, pues acá se está trabajando con parámetros que podrían ser arbitrariamente grandes y en particular podrían existir equilibrios, que por el método estudiado en el capítulo anterior, nunca sean alcanzados. \square

Capítulo 5

Conclusiones y Problemas Abiertos

5.1. Aportes Realizados

La conclusión general es que este trabajo cumple con los principales objetivos por el cual fue desarrollado. Se lograron extender los resultados de las dos referencias bases. La regla de actualización definida en el capítulo 3 es un poco mas cercana a la realidad, en el sentido que para dos individuos con igual percepción inicial sobre una misma estrategia e igual pago pueden actualizar de manera diferente, reflejando que tanto mas sensible es uno frente al otro.

Los resultados probados en la Proposición 3.3.6, prueban que la velocidad de convergencia en el modelo propuesto es mayor que en los otros modelos, sobre todo cuando se considera $a_i \in (\frac{1}{2(1-\theta\omega)}, \frac{1}{1-\theta\omega}]$, de esta manera en menos iteraciones del juego repetido (ante instancias no muy grandes en la cantidad de jugadores) se puede llegar al equilibrio. Esta diferencia de velocidades, al menos con el modelo de Cominetti et al. [7] se debe que para tal modelo si una estrategia tiene una valoración inicial muy baja se demorará mucho en visitarla, esto pues tal actualización no tiene memoria y no guarda cuantas veces se ha utilizado una estrategia determinada, la incorporación de la variable θ_n^{is} corrige esta falencia.

Bajo la regla de decisión Logit, los Teoremas 3.3.2 y 3.3.14 de convergencia casi segura y convergencia con probabilidad positiva respectivamente, prueban que ante ciertas consideraciones en los parámetros de la dinámica, el proceso de aprendizaje dado por la regla de actualización, descrita en el Capítulo 3 para el juego repetido, converge (cuando las iteraciones tienden a infinito) a los puntos estacionarios de la dinámica continua asociada, que a su vez son los equilibrios de Nash para un juego potencial subyacente.

Se aplicaron los resultados de convergencia descritos anteriormente para un tipo de juego potencial específico, un juego de congestión en el que el espacio de estrategias puras es el mismo para todos los jugadores y consiste en un conjunto de rutas paralelas entre un único par origen-destino.

En el Capítulo 4 se obtuvieron interesantes resultados concernientes a la estabilidad de los equilibrios simétricos y para estos ejemplos con pocas rutas y jugadores, se logró au-

mentar el rango de los parámetros que permitan algún tipo de convergencia hacia los equilibrios del juego subyacente.

5.2. Trabajo Futuro

Si bien se cumplió con lo que se buscaba, quedan aún problemas abiertos que serían interesantes de trabajar. Para el modelo desarrollado en el capítulo 3 podría resultar atractivo aplicar los teoremas de convergencia (casi segura y con probabilidad positiva) para otros juegos potenciales, y en el caso del juego de congestión buscar resultados de convergencia sin suponer simetría de los jugadores, esto es que tengan distintos β_j y a_j para todo $j \in \mathcal{P}$, o aplicarlo para un juego de congestión en el que los jugadores tienen distintos espacios de estrategias puras, es decir una red.

Respecto a lo realizado en el capítulo 4, vale la pena extender la búsqueda de equilibrios para los casos de N jugadores con 2 rutas y el caso general de N jugadores y M rutas. El primero de estos casos fue estudiado en el transcurso de esta memoria, mediante herramientas de estructuras O-minimales [8], [24], se trató de probar la finitud en la cantidad de equilibrios, sin embargo no se logró obtener resultados generales concluyentes.

Bibliografía

- [1] M. Benaïm. Dynamics of stochastic approximation algorithms. *Seminaire de probabilités XXXIII*, pages 1–68, 1999.
- [2] C. Bonatti and J. Villadelprat. The index of stable critical points. *Topology and its Applications*, 126(1):263–271, 2002.
- [3] M. Bravo. An adjusted payoff-based procedure for normal form games. -, 2011. URL <http://arxiv.org/abs/1106.5596>.
- [4] L. Breiman. *Probability (classics in applied mathematics, Vol. 7)*, volume 67. Recherche, 1992.
- [5] H. Chen. *Stochastic approximation and its applications*, volume 64. Springer, 2002.
- [6] A. Cima, F. Mañosas, and J. Villadelprat. A poincaré-hopf theorem for noncompact manifolds. *Topology*, 37(2):261–277, 1998.
- [7] R. Cominetti, E. Melo, and S. Sorin. A payoff-based learning procedure and its application to traffic games. *Games and Economic Behavior*, 70(1):71–83, 2010.
- [8] M. Coste. An Introduction to O-minimal Geometry, 2000.
- [9] S.S. Dragomir and M. City. Some gronwall type inequalities and applications. URL: <http://rgmia.vu.edu.au/SSDragomirWeb.html>, 2002.
- [10] Y. Freund and R.E. Schapire. Adaptive game playing using multiplicative weights. *Games and Economic Behavior*, 29(1):79–103, 1999.
- [11] D. Fudenberg and D.K. Levine. *The theory of learning in games*, volume 2. MIT press, 1998.
- [12] H.K. Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*. Macmillan Publishing Company New York, 1992.
- [13] H.J. Kushner. *Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory*, volume 6. The MIT Press, 1984.
- [14] H.J. Kushner and G. Yin. *Stochastic approximation and recursive algorithms and applications*, volume 35. Springer Verlag, 2003.
- [15] V.B. Larin. On solutions of the lyapunov equations. *Appl. Comput. Math*, 7(2): 162–167, 2008.

-
- [16] J. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2000. ISBN 0387950265.
- [17] J. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2002. ISBN 0387954481.
- [18] J. Libgober. The euler characteristic, poincare-hopf theorem and applications. Uchicago math REU, 2012.
- [19] A. Mas-Colell. *The theory of general economic equilibrium: A differentiable approach*. Cambridge Univ Pr, 1990.
- [20] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Univ Pr, 1997.
- [21] S.J. Schreiber. Urn models, replicator processes, and random genetic drift. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, pages 2148–2167, 2001.
- [22] A.N. Shiryaev. *Probability (Graduate Texts in Mathematics) (v. 95)*. Springer, 2nd edition, 1995. ISBN 0387945490.
- [23] R.S. Varga. *Geršgorin and his circles*. Springer Verlag, 2004.
- [24] A.J. Wilkie. Model Completeness Results for Expansions of the Ordered Field of Real Numbers by Restricted Pfaffian Functions and the Exponential Funtion. *Journal of the American Mathematical Society*, 1996.