



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

# ANÁLISIS DE TRANSFERENCIA DE CALOR INVERSA EN UN MATERIAL POROSO CATALIZADOR MEDIANTE REGRESIÓN SIMBÓLICA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

DANIEL ANDRÉS HERVÍAS LEAL

PROFESOR GUÍA:  
WILLIAMS RODRIGO CALDERÓN MUÑOZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JUAN CRISTÓBAL ZAGAL MONTEALEGRE  
SICHEM GUERRERO RUZ

SANTIAGO DE CHILE  
DICIEMBRE 2012

# Resumen

Los medios porosos no homogéneos están presentes en un amplio rango de aplicaciones, como es el uso de catalizadores. Estos materiales se generan a partir de compactación de polvos para formar pellets de diferente configuración geométrica. El correcto control de las reacciones químicas en la superficie de catalizadores puede influir en la eficiencia de estos materiales. Por otra parte, la transferencia de calor inversa busca estimar las causas que producen un efecto conocido en un problema de transferencia de calor, siendo uno de los más habituales el de la estimación de propiedades dependientes de temperatura, cuya resolución numérica es la más común.

Este trabajo consiste en la determinación de un modelo de conductividad térmica para el material, en función de la posición espacial y el tiempo, mediante transferencia de calor inversa. Analizando así otro método de estimación de esta propiedad, frente a los métodos utilizados regularmente.

Se dispone de videos termográficos, que muestran la distribución de temperaturas de la superficie de una pastilla de alúmina con platino. A través de un software de regresión simbólica, y luego de procesar los datos del video elegido, se encuentran funciones de temperatura que dependen de la posición en la superficie. Considerando más fotogramas del video, se obtienen funciones dependientes también del tiempo. Mediante análisis de error y forma se escogen las mejores funciones de los dos tipos.

Para encontrar modelos de conductividad térmica se utiliza un método analítico y uno numérico. El método analítico se basa en la resolución de la ecuación diferencial de calor utilizando las funciones de temperatura. El resultado de este método no es satisfactorio por presentar valores sin sentido físico en algunas zonas. El método numérico encuentra modelos realizando regresión simbólica a datos de conductividad encontrados por una iteración numérica que utiliza la ecuación de calor y diferencias finitas. Las funciones de conductividad encontradas no se ajustan bien a todos los datos, pero tienen valores dentro de los rangos esperados.

Los modelos encontrados mediante el método numérico se consideran válidos y aplicables para problemas que utilizan un catalizador de material similar.

# Índice de contenidos

1. Introducción.....	1
1.1. Motivación .....	1
1.2. Antecedentes generales.....	2
1.3. Objetivos.....	3
1.3.1. Objetivo general.....	3
1.3.2. Objetivos específicos.....	3
1.4. Alcances .....	3
1.5. Recursos.....	4
2. Antecedentes .....	6
2.1. Conducción de calor .....	6
2.2. Transferencia de calor inversa .....	7
2.2.1. Concepto del problema de transferencia de calor inversa .....	8
2.2.2. Áreas de aplicación de transferencia de calor inversa .....	10
2.2.3. Aplicación de conducción inversa .....	10
2.3. Materiales porosos y catálisis .....	12
2.4. Regresión simbólica basada en algoritmos genéticos .....	13
2.5. Procesamiento de imágenes .....	14
2.5.1. Convolución gaussiana .....	15
2.6. Diferencias Finitas.....	15
2.6.1. Aproximaciones de diferencias finitas .....	16
2.7. Propiedades del material de la pastilla .....	17
3. Transferencia de calor inversa en catalizadores.....	19
3.1. Experimentos .....	19
3.2. Metodología .....	20
3.2.1. Análisis espacial de conductividad térmica .....	21
3.2.2. Análisis espacial y temporal de conductividad térmica .....	34
3.2.3. Resumen de la metodología .....	40
4. Dependencia espacial de la conductividad térmica.....	42
4.1. Funciones de temperatura superficial $T(x, y)$ .....	42
4.1.1. Funciones $T(x, y)$ encontradas a partir de datos en bruto.....	42
4.1.2. Análisis gráfico de primera función seleccionada $T(x, y)$ .....	44

4.1.3.	Funciones $T(x, y)$ encontradas a partir de datos suavizados ....	50
4.1.4.	Análisis gráfico de segunda función seleccionada $T(x, y)$ .....	53
4.1.5.	Discusión de resultados de funciones $T(x, y)$ .....	59
4.2.	Conductividad térmica $k(x, y)$ .....	60
4.2.1.	Método analítico .....	60
4.2.2.	Método numérico .....	65
4.2.3.	Discusión de resultados de conductividad térmica $k(x, y)$ .....	71
5.	Dependencia espacial y temporal de la conductividad térmica.....	73
5.1.	Funciones $T(x, y, t)$ encontradas.....	73
5.1.1.	Análisis gráfico de funciones $T(x, y, t)$ elegidas.....	77
5.1.2.	Discusión de resultados de funciones $T(x, y, t)$ .....	95
5.2.	Conductividad térmica $k(x, y, t)$ .....	96
5.2.1.	Método analítico .....	96
5.2.2.	Método numérico .....	100
5.2.3.	Discusión de resultados de conductividad térmica $k(x, y, t)$ ....	108
6.	Conclusiones .....	110
	Referencias.....	112
	Anexos.....	114
A.	Discusión de conductividad térmica constante .....	114
B.	Influencia de valores de densidad en método numérico.....	117
C.	Algoritmo de cálculo numérico de conductividad térmica en Mathematica .....	119

# **1. Introducción**

## **1.1. Motivación**

El uso de materiales catalizadores se ha expandido en distintas industrias en las últimas décadas, como refinerías de petróleo, fábricas de plástico, elementos de reducción de contaminantes, etc.

Los catalizadores son generalmente materiales porosos no homogéneos, que se fabrican mediante la compactación de polvos para formar una pieza sólida con la geometría que se estime conveniente según la aplicación.

Para estudiar el comportamiento y el efecto del material poroso en el proceso de catálisis, se utilizan reactores especiales, donde lo típico es que los reactantes líquidos o gaseosos entren por uno de los extremos del reactor, pasen por un lecho del catalizador y los productos se recojan en el otro extremo. Las reacciones químicas en la superficie de estos catalizadores pueden liberar o absorber energía en forma de calor, lo que se traduce en un cambio de temperatura de la superficie del material prensado. El producto final se verá afectado por las variaciones de temperatura en la superficie, las que influyen en la actividad y eficiencia de los catalizadores, específicamente en la tasa de reacciones.

Luego de ser desarrollados estos ensayos en laboratorio, al momento de realizar una validación teórica de los resultados se asume una conductividad térmica constante a lo largo del material catalizador, en el contexto de una simulación de Monte Carlo [1]. Esta es una estimación, dado que el material es el resultado de una compactación de una aleación de polvos, por lo que su composición no es homogénea, y por ende su conductividad térmica no puede ser constante. Por lo tanto, esto puede llevar a errores en la validación teórica de los ensayos. Dada esta situación, sería de mucha utilidad incluir un modelo más realista de la conductividad térmica en la validación teórica.

## **1.2. Antecedentes generales**

Se cuenta con imágenes termográficas obtenidas en el Laboratorio de Catálisis del Departamento de Ingeniería Química de la Universidad de Notre Dame, EE.UU. Estas imágenes (videos) fueron tomadas con una cámara FLIR SC600HS mientras se desarrollaban reacciones catalizadoras en un reactor. Estas imágenes muestran la distribución de temperaturas sobre la superficie de un material catalizador (prensado), las que mediante el uso del software correspondiente de la cámara (ThermaCAM Researcher Professional) pueden ser trabajadas o exportadas a distintos formatos.

Los materiales porosos son materiales que se forman a partir de la compactación de polvos y tienen como característica principal que su alta porosidad entrega una gran superficie de contacto frente a líquidos o gases con los que interactúe. Es por esto que este tipo de material generalmente se utiliza en los procesos de catálisis donde se obtiene una gran superficie en que reaccionen los gases con el catalizador. Estas reacciones generan energía en forma de calor y varían la temperatura en la superficie del catalizador.

Existen problemas de transferencia de calor clásico donde se determinan los efectos producidos a partir de una causa conocida, pero también existen los problemas de transferencia de calor inversa, donde a partir de las consecuencias o efectos de un proceso se estiman las causas que lo generaron. Por ejemplo esta técnica puede emplearse para que a partir del campo de temperaturas sobre un cuerpo, se estimen características físicas desconocidas de él, como pudiera ser el flujo de calor sobre el cuerpo, la conductividad térmica, su calor específico, etc.

La regresión simbólica mediante el uso de algoritmos genéticos es un método utilizado para encontrar funciones complejas que representen un fenómeno difícil de predecir. Actualmente se han desarrollado herramientas computacionales que facilitan la aplicación de esta técnica en diversos estudios científicos.

## **1.3. Objetivos**

### **1.3.1. Objetivo general**

Encontrar un modelo que reproduzca la dinámica temporal y espacial de la conductividad térmica en el material poroso catalizador, bajo condiciones de operación específicas, a través del uso de técnicas de transferencia de calor inversa.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Analizar los datos de temperatura superficial usando una herramienta de regresión simbólica (Eureqa) considerando la variación espacial en la superficie del material.
- Analizar los datos de temperatura superficial usando una herramienta de regresión simbólica (Eureqa) considerando las variaciones en tiempo y espacio.
- Obtener la conductividad térmica y determinar su rango de aplicabilidad y validez.

## **1.4. Alcances**

En el trabajo de título solo se considera un modelo base de conducción de calor bidimensional. No se consideran los fenómenos de convección o radiación que puedan estar presentes en el proceso.

Además, cabe recalcar que el análisis de las reacciones químicas no es parte del trabajo propuesto. Sólo se estudiará un método para que, a partir de imágenes termográficas captadas, se pueda obtener una modelación de la conductividad térmica en la superficie del catalizador.

En los problemas de transferencia de calor, incluyendo los de catálisis, se observa transferencia de energía en forma de calor por los mecanismos de conducción, convección y radiación. En el caso de un proceso catalítico, el gas que actúa con el catalizador, reacciona en la superficie de éste generando la aparición de un gradiente de calor por efecto de radiación y otro por convección, como se ve en la figura 1.1. Sin embargo, si el gas que se utiliza no provoca reacciones químicas al entrar en contacto con el catalizador, el efecto de la convección y radiación es despreciable, por lo que se tiene que  $q_{convección} \sim 0$ , y  $q_{radiación} \sim 0$ .

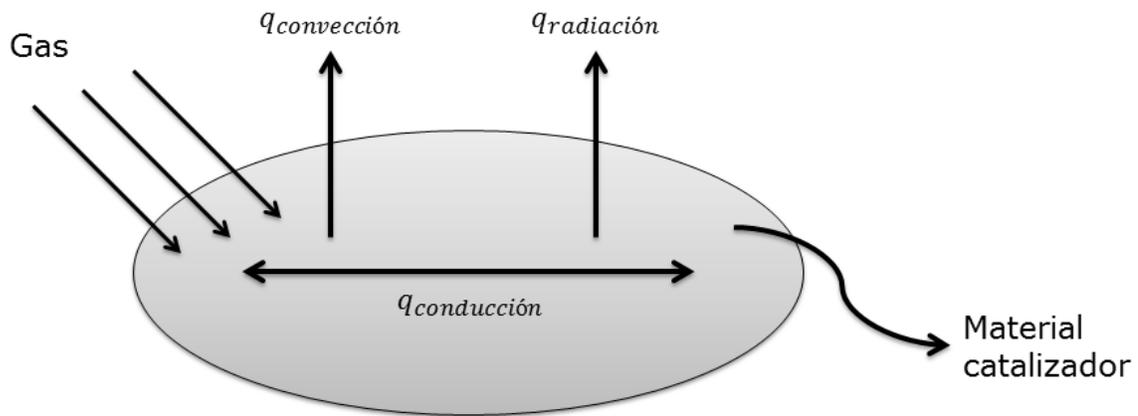


Figura 1.1: Esquema de la transferencia de calor en una reacción catalítica.

## 1.5. Recursos

El trabajo se desarrolla utilizando las instalaciones computacionales del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Se utilizan distintos software mientras se desarrolla el trabajo de título. En primera instancia se procesan las imágenes termográficas con las que se cuenta, mediante el uso del programa ThermaCAM Researcher Professional de FLIR Systems.

También se ocupa el software Matlab de Mathworks, disponible en el Departamento de Ingeniería Mecánica, así como el programa Wolfram Mathematica versión 8.0.0.0., de Wolfram Research Inc.

Además, se utiliza el programa Eureka Formulize, desarrollado por Michael Schmidt y Hod Lipson, de Nutonian. Este es un software gratuito de regresión simbólica basado en algoritmos genéticos. La versión utilizada es la 0.97 Beta (Build 1035).

## 2. Antecedentes

### 2.1. Conducción de calor

Para el cálculo de transferencia de energía por calor, existen algunos métodos que resultan útiles. De estos métodos se desprenden dos mecanismos de transferencia considerados básicos: conducción y radiación térmica. También es posible establecer relaciones empíricas para analizar transferencias de energía que tengan modos combinados. Para efectos del presente trabajo, la conducción de calor es el único mecanismo que es pertinente estudiar.

La transferencia de energía por conducción puede encontrarse en la interacción de elementos en estado sólido, líquido y gaseoso. La conducción se considera como la transferencia de energía de las partículas más energéticas a las menos energéticas de una sustancia debido a las interacciones entre las mismas.

En los gases las moléculas se encuentran muy espaciadas y las interacciones moleculares no son muy frecuentes, por lo que la conducción no es tan fuerte. En los líquidos las moléculas se encuentran más cerca y la interacción molecular es más fuerte y frecuente. En un sólido, la conducción se atribuye a la actividad atómica en forma de vibraciones reticulares.

Es posible formular ecuaciones o modelos para cuantificar el proceso de transferencia de calor por conducción. La ley de Fourier es la ecuación indicada, y para una pared plana unidimensional, con distribución de temperatura  $T(x)$ , se expresa como

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

El flujo de calor por unidad de área  $q_x''$  [W/m<sup>2</sup>] es la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección  $x$  por área unitaria perpendicular a la dirección de transferencia, y es proporcional al gradiente de temperatura,  $dT/dx$  en esta dirección. La constante de proporcionalidad  $k$ , es una propiedad de transporte conocida como *conductividad térmica* [W/m.K] y es

una característica del material, en este caso de la pared. Como el calor se transfiere en dirección de la temperatura decreciente se agrega un signo menos [2].

La conductividad térmica proporciona una indicación de la velocidad a la que se transfiere energía mediante el proceso de difusión, dependiendo de la estructura física de la materia, atómica y molecular, que se relaciona con el estado de la materia.

La ecuación 2.2 es la *ecuación de calor*, o *ecuación de difusión de calor*, en su forma general en coordenadas cartesianas. Esta ecuación es la herramienta básica para el análisis de conducción de calor, donde  $\dot{q}$  es la rapidez a la que se genera energía por unidad de volumen del medio [ $\text{W}/\text{m}^3$ ],  $\rho$  es la densidad y  $c_p$  es el calor específico del medio, y no se consideran los fenómenos de convección ni radiación de calor.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

## 2.2. Transferencia de calor inversa

Los problemas de transferencia de calor inversa se basan en medidas de temperatura o flujo de calor para la estimación de cantidades desconocidas dentro del análisis de problemas físicos en ingeniería térmica. Como ejemplo, los problemas inversos de conducción de calor generalmente se asocian con la estimación de un flujo de calor desconocido en el borde de un material o lugar, usando mediciones de temperatura tomadas en las cercanías del borde de la superficie.

En un problema clásico de transferencia de calor, la causa es dada, y el efecto es lo que se determina. En el problema inverso se estima la causa a partir del conocimiento de los efectos.

La ventaja del problema inverso es la cercanía que genera entre los investigadores experimentales y teóricos, de modo de obtener la máxima información posible del problema en estudio.

El interés sobre la teoría y aplicación de problemas de transferencia de calor inversa ha crecido en los últimos años, encontrándose frecuentemente en el ámbito mecánico, aeroespacial, químico, nuclear, matemático, astrofísico y estadístico, cada uno con aplicaciones diferentes.

En situaciones donde los métodos clásicos de estimación de propiedades no pueden alcanzar la precisión deseada o no se pueden aplicar, generalmente se utiliza la transferencia de calor inversa.

Matemáticamente hablando los problemas de transferencia de calor inversa pertenecen al grupo de problemas llamado "mal planteado" (*Ill-posed*), mientras los problemas clásicos de transferencia de calor corresponden a los llamados "bien planteados" (*Well-posed*). Para que un problema sea "bien planteado", debe cumplir las siguientes condiciones: su solución debe existir; esta debe ser única; y esta debe ser estable bajo cambios pequeños a los datos de entrada. Los problemas de transferencia de calor inversa pueden cumplir estas tres condiciones sólo en algunos casos especiales.

En un principio se pensaba que si no se cumplía alguna de las condiciones mencionadas, el problema sería irresoluble o su solución no tendría sentido. Gracias al trabajo en nuevos métodos para afrontar estos problemas se reactivó el interés en la solución de problemas de transferencia de calor inversa.

### **2.2.1. Concepto del problema de transferencia de calor inversa**

Para representar de mejor manera el concepto y su importancia física se utiliza un ejemplo clásico de transferencia de calor por conducción unidimensional en una placa de grosor  $L$ . La distribución de temperatura en la placa es inicialmente  $F(x)$ . Cuando  $t > 0$ , un flujo de calor transiente  $f(t)$  es aplicado en el borde  $x = 0$ , mientras el borde  $x = L$  se mantiene a

temperatura constante  $T_L$ . La formulación matemática de este problema está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{en } 0 < x < L, \text{ para } t > 0 \quad (2.3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f(t) \quad \text{en } x = 0, \text{ para } t > 0 \quad (2.4)$$

$$T = T_L \quad \text{en } x = L, \text{ para } t > 0 \quad (2.5)$$

$$T = F(x) \quad \text{para } t = 0, \text{ en } 0 < x < L \quad (2.6)$$

Para el caso donde se tienen especificadas las condiciones de borde  $f(t)$  y  $T_L$ , la condición inicial  $F(x)$ , y las propiedades termo-físicas  $\rho$ ,  $c_p$  y  $k$ , el problema se reduce a la determinación de la distribución de la temperatura  $T(x, t)$  en la región interior del sólido como una función del tiempo y la posición. Esto se llama *Problema Directo*.

Para formular un *Problema Inverso*, se puede asumir que la función de condición de borde  $f(t)$  en la superficie  $x = 0$  sea desconocida, y todas las demás propiedades  $T_L$ ,  $F(x)$ ,  $k$ ,  $\rho$  y  $c_p$  conocidas. Entonces lo que se quiere encontrar es la condición de borde desconocida  $f(t)$ . Se puede compensar la falta de información en la condición de borde, mediante datos de la temperatura en un punto interior  $x_m$ ,  $T(x_m, t_i) \equiv Y_i$  en diferentes tiempos  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ), en un intervalo de tiempo específico  $0 < t \leq t_f$ , donde  $t_f$  es el tiempo final. El *Problema Inverso* es una estimación, ya que contiene errores de medición por lo que los resultados no son exactos.

La formulación matemática del *Problema Inverso* dado es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{en } 0 < x < L, \text{ para } 0 < t \leq t_f \quad (2.7)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = f(t) =? \quad \text{en } x = 0, \text{ para } 0 < t \leq t_f \quad (2.8)$$

$$T = T_L \quad \text{en } x = L, \text{ para } 0 < t \leq t_f \quad (2.9)$$

$$T = F(x) \quad \text{para } t = 0, \text{ en } 0 < x \leq L \quad (2.10)$$

El anterior es un problema de transferencia de calor inversa de borde. Análogamente se pueden tener problemas de transferencia de calor inversa de condición inicial, generación de energía, propiedades termo-físicas y más.

Los problemas inversos pueden ser resueltos como una estimación de parámetros o como una estimación de funciones. Si no se cuenta con información previa de la forma de la función desconocida, el problema inverso puede ser definido como un *enfoque de estimación de función en un espacio dimensional infinito de funciones* [3].

### **2.2.2. Áreas de aplicación de transferencia de calor inversa**

Las operaciones industriales modernas se han vuelto cada vez más sofisticadas, con lo cual una estimación termo-física más precisa se ha hecho necesaria. Para esta situación el enfoque de los problemas de transferencia de calor inversa se adapta muy bien, dado que puede realizar experimentos muy cercanos a las condiciones reales. Las aplicaciones prácticas de las técnicas de transferencia de calor inversa incluyen, entre otras, las siguientes áreas:

- Estimación de propiedades termo físicas de materiales
- Estimación de las propiedades de material de radiación y condiciones de borde en materiales semitransparentes
- Control del movimiento de la interface sólido-líquido durante solidificación
- Estimación de la conductancia de interface entre superficies en contacto periódicamente.
- Monitoreo de propiedades de radiación de superficies reflectantes de paneles de calentadores.
- Estimación de liberación de calor durante fricción de dos sólidos.
- Estimación de función de reacción.

### **2.2.3. Aplicación de conducción inversa**

Entre algunas aplicaciones de técnicas utilizadas en la solución de problemas inversos de conducción de calor, se encuentra la de la estimación de propiedades dependientes de temperatura y función de reacción. Se ilustra la

solución en problemas de estimación de conductividad térmica, capacidad calorífica o función de reacción. Este tipo de problemas se encuentran en conducción de calor no lineal, análisis de reactores químicos, combustión, cinética de enzimas, dinámica de población y muchas otras aplicaciones prácticas.

El problema directo, correspondiente a un problema unidimensional de conducción de calor, no lineal, con propiedades dependientes de la temperatura y función de reacción, se presenta como sigue:

$$C(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - g(T) = 0 \quad \text{en } 0 < x < L, \text{ para } t > 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \text{ para } t > 0 \quad (2.12)$$

$$k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = \Phi_L(t) \quad \text{en } x = L, \text{ para } t > 0 \quad (2.13)$$

$$T(x, 0) = F(x) \quad \text{para } t = 0, \text{ en } 0 < x < L \quad (2.14)$$

El problema definido por las ecuaciones 2.11, 2.12, 2.13, y 2.14 toma en cuenta la determinación de la distribución de la temperatura  $T(x,t)$  en el medio cuando se conocen la capacidad calorífica  $C(T)$ , la conductividad térmica  $k(T)$ , las condiciones de borde e iniciales, y la función de reacción  $g(T)$ .

Los problemas inversos de estimación que se pueden considerar son tres:

- $g(T)$  desconocida, pero  $k(T)$  y  $C(T)$  conocidas
- $k(T)$  desconocida, pero  $C(T)$  y  $g(T)$  conocidas
- $C(T)$  desconocida, pero  $k(T)$  y  $g(T)$  conocidas

Para la solución de cada uno de estos problemas inversos, se consideran disponibles las mediciones de temperatura de  $M$  sensores de temperatura en las posiciones  $x_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ . Para resolver estos problemas se necesita minimizar el funcional objetivo  $S[P(T)]$  definido como

$$S[P(T)] = \sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} \{Y_m(t) - T[x_m, t; P(T)]\}^2 dt \quad (2.15)$$

Donde  $P(T) \equiv g(T)$ ,  $k(T)$  o  $C(T)$ , las propiedades desconocidas,  $Y_m(t)$  es la temperatura medida, y  $T[x_m, t; P(T)]$  es la temperatura estimada.

Las temperaturas estimadas se obtienen de la solución del problema directo usando un estimativo para la propiedad desconocida  $P(T)$  [3].

## **2.3. Materiales porosos y catálisis**

Los materiales porosos son definidos como sólidos que contienen poros. Generalmente los materiales porosos tienen una porosidad de 0,2 – 0,95. La porosidad significa la fracción de volumen de poros en relación al volumen total. Los materiales porosos se han utilizado en varias aplicaciones de uso diario, como en la purificación de agua, y en industrias modernas como para remover polvo desde gases de alta pureza para la producción de semiconductores.

Los poros se clasifican en abiertos, que se conectan con el exterior del material, y cerrados que están aislados del exterior.

Para la mayoría de las aplicaciones industriales de los materiales porosos se requieren poros abiertos. Los materiales porosos para filtros y catalizadores necesitan tener una alta fracción de porosidad abierta.

Los poros abiertos en un material cambian sus propiedades. Dos cambios esenciales son la disminución de la densidad, y el aumento del área superficial específica [4].

Para que un sólido pueda actuar como catalizador, al menos uno de los reactantes debe interactuar con su superficie y fijarse sobre ella. Disponer de una extensa superficie donde los reactantes puedan absorberse es fundamental para un catalizador sólido. Por ello, se emplean normalmente materiales porosos, que disponen de una gran superficie, externa e interna, por unidad de masa de sólido (por lo tanto en un volumen reducido). La estructura de las partículas de catalizador sólido (número, tamaño y volumen de poros) es, por lo tanto, fundamental para que el catalizador opere

correctamente. También la composición del catalizador es importante, ya que como la interacción con el reactante es de tipo químico, la adsorción será específica, y el reactante adsorberá sobre algunas sustancias.

Generalmente un catalizador sólido se constituye de un componente o fase activa, un soporte y un promotor o promotores. Sin embargo, no todos los catalizadores tienen los tres tipos de componentes.

El componente activo es el responsable de acelerar la reacción principal. El soporte o portador es un material de área superficial elevada, que facilita la dispersión del componente activo, y lo estabiliza. Se usa cuando el componente activo tiene un área superficial muy reducida. Los promotores suelen incorporarse a la composición del catalizador en concentraciones pequeñas y se clasifican en texturales y químicos. Los químicos son aditivos que mejoran la actividad del componente activo, los texturales tienen la misión de estabilizar el conjunto componente activo-soporte, facilitando la fabricación de los componentes del catalizador en un estado muy disperso y manteniéndolo en condiciones de reacción [5].

## **2.4. Regresión simbólica basada en algoritmos genéticos**

El problema de regresión simbólica consiste en obtener una función algebraica que ajuste en gran medida un conjunto de datos experimentales. Similar a la conocida regresión por mínimos cuadrados, la diferencia es que en regresión simbólica no se conoce el formato de la función a ajustar, por lo tanto se debe obtener la función y los coeficientes óptimos que ajusten los datos experimentales [6].

La regresión simbólica (una aplicación de la Programación Genética) tiene el mismo objetivo de la regresión lineal pero con un espectro mucho mayor de búsqueda y muchas menos limitaciones. Dados los datos, buscará la expresión algebraica que identifique el comportamiento de estos accediendo a todo tipo de funciones y combinaciones algebraicas.

Estos son los pasos que deben darse para hacer Regresión Simbólica (inspirados en cómo trabaja la naturaleza y la evolución de las especies) [7]:

- Se genera una población inicial de N ecuaciones (formadas al azar).
- A cada ecuación se le deduce su correlación de Pearson. El coeficiente de correlación de Pearson es un índice que mide el grado de covariación entre distintas variables cuantitativas relacionadas linealmente.
- Se ordenan las ecuaciones en orden descendente (según el dato de la correlación de Pearson) y se seleccionan las M primeras.
- Esas M ecuaciones son reproducidas y generan Q hijas, pero cada hija al azar se le hace un pequeño cambio (esto se conoce como mutación) o la hija es el producto combinado de dos ecuaciones padres (esto se conoce como cruce).
- Reemplazar las Q ecuaciones peores de la población inicial con las Q ecuaciones hijas.
- Se vuelve al punto 2 repitiéndose el ciclo constantemente hasta que se obtengan ecuaciones con un valor de correlación de Pearson aceptable.

## **2.5. Procesamiento de imágenes**

Habitualmente cuando se trata de procesar imágenes, se hace referencia a la acción de suavizar. El suavizado tiene como objetivo el disminuir el ruido que puede presentarse en una imagen como una consecuencia del proceso de captura, digitalización y transmisión. El ruido es una información no deseada que contamina la imagen, y se manifiesta generalmente en píxeles aislados que toman valores fuera del rango normal en comparación con sus píxeles vecinos.

La reducción de ruido se efectúa mediante la aplicación de diferentes filtros como los filtros lineales y no lineales. Los filtros lineales se desarrollan como una convolución de una imagen con una máscara predefinida, mientras que los filtros no lineales se llevan a cabo mediante operaciones no lineales con los píxeles del entorno de vecindad.

Entre los filtros lineales se encuentran el filtro de la media y el filtro gaussiano. Entre los filtros no lineales el más importante es el de la mediana [8].

### **2.5.1. Convolución gaussiana**

El filtro gaussiano, o método de convolución gaussiana, toma en cuenta el valor de cada pixel vecino con distinto peso. El resultado del valor del pixel tratado es el promedio de los valores de pixeles vecinos y sus respectivos pesos. Una ventaja o desventaja, dependiendo del uso que se le dé, es el difuminado de bordes que conlleva la utilización de este filtro. De todos modos este difuminado es menor frente al que se obtiene con el filtro de media.

Este filtro es ideal para reducir el ruido gaussiano, que produce variaciones mínimas en la imagen, y se genera por diferencias de ganancias de los sensores, ruido en la digitalización, mal estado de equipos, etc. [9].

En resumen, las propiedades del filtro gaussiano son:

- Simetría rotacional, tiene el mismo efecto en todas las direcciones
- Un único lóbulo
  - El peso de los pixeles decrece con las distancias al centro
  - Cuanto más alejado está un pixel, menos importancia tiene
- Preserva las bajas frecuencias y tiende a eliminar las altas
- El grado de filtrado es controlado por  $\sigma$  (desviación estándar)
- A mayor  $\sigma$ , entonces mayor es el suavizado y se tienen en cuenta los puntos más alejados de la media
- Es un filtro previo a la detección de bordes.

### **2.6. Diferencias Finitas**

Las diferencias finitas son usadas frecuentemente para aproximar ecuaciones diferenciales. El proceso se basa en el reemplazo de las derivadas de la ecuación diferencial por sus expresiones en diferencias finitas [10].

Normalmente se consideran tres formas de diferencias:

- Diferencia progresiva, adelantada o posterior
- Diferencia regresiva, atrasada o anterior

- Diferencia central

Las diferencias, producto de su raíz en el teorema de Taylor, pueden ser de distinto orden según sea conveniente. El uso más común se concentra en las diferencias de primer orden  $O(\Delta x)$ , y segundo orden  $O[(\Delta x)^2]$ .

## 2.6.1. Aproximaciones de diferencias finitas

### a. Aproximaciones de diferencia progresiva de $O(\Delta x)$

$$\phi'_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (2.16)$$

$$\phi''_i = \frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + \phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (2.17)$$

$$\phi'''_i = \frac{\phi_{i+3} - 3\phi_{i+2} + 3\phi_{i+1} - \phi_i}{(\Delta x)^3} \quad (2.18)$$

$$\phi''''_i = \frac{\phi_{i+4} - 4\phi_{i+3} + 6\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + \phi_i}{(\Delta x)^4} \quad (2.19)$$

### b. Aproximaciones de diferencia progresiva de $O[(\Delta x)^2]$

$$\phi'_i = \frac{-\phi_{i+2} + 4\phi_{i+1} - 3\phi_i}{\Delta x} \quad (2.20)$$

$$\phi''_i = \frac{-\phi_{i+3} + 4\phi_{i+2} - 5\phi_{i+1} + 2\phi_i}{(\Delta x)^2} \quad (2.21)$$

$$\phi'''_i = \frac{-3\phi_{i+4} + 14\phi_{i+3} - 24\phi_{i+2} + 18\phi_{i+1} - 5\phi_i}{2(\Delta x)^3} \quad (2.22)$$

$$\phi''''_i = \frac{-2\phi_{i+5} + 11\phi_{i+4} - 24\phi_{i+3} + 26\phi_{i+2} - 14\phi_{i+1} + 3\phi_i}{(\Delta x)^4} \quad (2.23)$$

### c. Aproximaciones de diferencia regresiva de $O(\Delta x)$

$$\phi'_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (2.24)$$

$$\phi''_i = \frac{\phi_i - 2\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{(\Delta x)^2} \quad (2.25)$$

$$\phi_i''' = \frac{\phi_i - 3\phi_{i-1} + 3\phi_{i-2} - \phi_{i-3}}{(\Delta x)^3} \quad (2.26)$$

$$\phi_i'''' = \frac{\phi_i - 4\phi_{i-1} + 6\phi_{i-2} - 4\phi_{i-3} + \phi_{i-4}}{(\Delta x)^4} \quad (2.27)$$

#### **d. Aproximaciones de diferencia regresiva de $O[(\Delta x)^2]$**

$$\phi_i' = \frac{3\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{2\Delta x} \quad (2.28)$$

$$\phi_i'' = \frac{2\phi_i - 5\phi_{i-1} + 4\phi_{i-2} - \phi_{i-3}}{(\Delta x)^2} \quad (2.29)$$

$$\phi_i''' = \frac{5\phi_i - 18\phi_{i-1} + 24\phi_{i-2} - 14\phi_{i-3} + 3\phi_{i-4}}{2(\Delta x)^3} \quad (2.30)$$

$$\phi_i'''' = \frac{3\phi_i - 14\phi_{i-1} + 26\phi_{i-2} - 24\phi_{i-3} + 11\phi_{i-4} - 2\phi_{i-5}}{(\Delta x)^4} \quad (2.31)$$

#### **e. Aproximaciones de diferencia central de $O[(\Delta x)^2]$**

$$\phi_i' = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (2.32)$$

$$\phi_i'' = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.33)$$

$$\phi_i''' = \frac{\phi_{i+2} - 2\phi_{i+1} + 2\phi_{i-1} - \phi_{i-2}}{(\Delta x)^3} \quad (2.34)$$

$$\phi_i'''' = \frac{\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{(\Delta x)^4} \quad (2.35)$$

## **2.7. Propiedades del material de la pastilla**

La conductividad térmica de la alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) de 99% en peso, con un 1% de otro material, un 0% de porosidad abierta, y entre 0.01% y 0.08% de porosidad cerrada, se sitúa en el rango de 30-36 [W/m.K] [11][14]. Su densidad absoluta está en el rango de  $3.65 \times 10^3$  -  $3.93 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>]. La densidad aparente de un material puede estimarse como el 10% de su densidad absoluta, si es que no se tienen los equipos adecuados para hacer mediciones y calcularla con mayor exactitud. Aplicando esta estimación, la densidad aparente de la alúmina en 99% estaría en el rango de  $3.65 \times 10^2$  -

$3.93 \times 10^2$  [kg/m<sup>3</sup>]. El calor específico se ubica en el rango de 662 - 712 [J/kg.K] [11].

Para pellets catalizadores de alúmina [12], que presentan una alta porosidad y una densidad en el rango 672-1121 [kg/m<sup>3</sup>], se han registrado conductividades térmicas que se ubican en el rango de 0.07-0.242 [W/m.K].

Por otra parte la conductividad térmica del platino (Pt) es de aproximadamente 70 [W/m.K].

## **3. Transferencia de calor inversa en catalizadores**

### **3.1. Experimentos**

Del trabajo experimental realizado por los profesores Williams Calderón y Sichem Guerrero en la Universidad de Notre Dame en Estados Unidos, se obtuvieron videos termográficos que exponen la variación de la temperatura en la superficie de un material catalizador mientras este se encuentra expuesto al flujo de un gas y a la presencia de calefactores que modifican la temperatura del sistema, ya sea provocando ciclos de calentamiento o enfriamiento.

El material utilizado fue un pequeño disco (pastilla) poroso formado por una matriz de óxido de Aluminio o alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), y Platino (Pt) con una presencia de 1%wt. El disco fue formado por compactación de polvos por lo que es esperable que su composición sea no homogénea, y que se pueda caracterizar como un material poroso, con porosidad abierta. Este disco fue introducido en un reactor circular de acero inoxidable, provisto de entrada y salida de gases, sistema de refrigeración y ventanas de KBr transparentes al infrarrojo. Un par de termocuplas conectadas a un controlador de temperatura y a dos calefactores en el interior del reactor permitieron el adecuado control de las rampas de calentamiento mediante la elección de diferentes set-points. Una vez cerrado el reactor queda aislado del exterior, permitiendo el flujo de gases por su interior mediante controladores de flujo máxicos.

Durante la toma de datos, se utilizaron diferentes flujos de gases como: aire, helio (He) y monóxido de carbono (CO).

Desde el punto de vista del software y el manejo de datos, se hacen distintas pruebas antes de comenzar con el trabajo de título. Primero utilizando el programa Matlab se realizan test para determinar la mejor forma de seleccionar los datos de temperatura de la superficie del catalizador. Se prueba con zonas cuadradas, rectangulares y circulares. No se encuentra problema en generar ninguno de estos tipos de zona, así que se escoge utilizar zonas circulares concéntricas para seleccionar los datos de

temperatura. Es importante señalar que la selección de superficie no puede ser simplificada utilizando simetrías, pues la distribución de temperatura no es simétrica según lo observado de las imágenes termográficas.

Para el programa Eureka se preparó un set de datos de temperatura con una función ficticia  $T(x,y)$ , de modo de comprobar que Eureka fuera capaz de encontrar la función ficticia (ecuación 3.1) con la que se crearon los datos. Los resultados de la prueba fueron exitosos, pues el programa encontró la función de forma precisa, ajustándose a los datos como se ve en la figura 3.1.

$$T(x,y) = 416 + 0.125 x^2 - \cos(1.571 + x + 2 y^2) \quad (3.1)$$

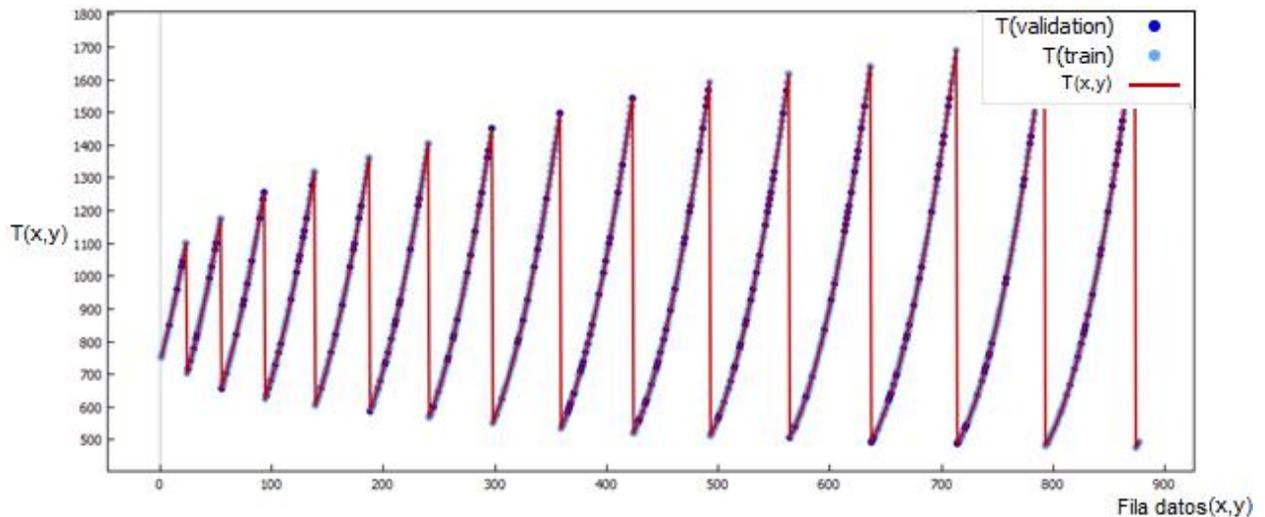


Figura 3.1: Gráfico de función  $T(x,y)$  y su ajuste con respecto a los datos de validación y entrenamiento de Eureka.

## 3.2. Metodología

Debido a que la consideración de reacciones químicas está fuera del alcance de este trabajo, no se utilizan los videos capturados cuando el material estuvo en presencia de CO y oxígeno. Tampoco se consideran los casos donde se utilizó sólo un flujo de aire, pues estos videos se realizaron para familiarizarse con el equipo. Por lo tanto se escoge un video donde el gas que se utilizó fue Helio.

Arbitrariamente se determina trabajar con un video que represente una situación de calentamiento del sistema, con un punto de partida (*set point*) de 90 [°C]. Para este video el flujo de He fue de 100 [cc/min].

El video elegido tiene el nombre de *He\_heating\_90c0001.SEQ*, y tiene las siguientes características:

- Duración: 1 minuto 1.460 segundos
- Frames: 26 783
- Frecuencia de toma de datos (cámara): 439 [Hz]

### **3.2.1. Análisis espacial de conductividad térmica**

#### ***a. Selección de datos***

Para el análisis espacial de la temperatura sobre la superficie, se elige arbitrariamente un frame del video seleccionado. El frame que se escoge es el número 10000, ya que se ubica en el tramo intermedio del intervalo de duración del video.

#### ***b. Procesamiento de datos***

La cámara termográfica FLIR SC600HS, con la cual se capturaron los videos que se ocupan en este trabajo de título, trae consigo un software especial, desarrollado por FLIR Systems, para manipular las imágenes termográficas. Este programa tiene el nombre de ThermaCAM Researcher Professional.

Al abrir el video mediante el software mencionado, se presentan distintas opciones de visualización de las imágenes, y además variadas opciones de exportación de datos. Dentro de estas opciones de exportación se encuentra la de generar un *workspace* de Matlab que contenga la información del video en distintas matrices. Una de las matrices que se crea es la que representa cada pixel de la imagen termográfica como una celda en la matriz, indicando su temperatura en ese punto. Se elige esta opción para trabajar, ya que mediante el programa Matlab se pueden elaborar códigos de forma de poder manejar los datos de temperaturas, y también las coordenadas, más fácilmente.

Exportando los datos del video mediante esta opción se genera, tomando como ejemplo el frame 10000, el archivo *prueba10000.MAT* que contiene las siguientes matrices:

- Prueba10000: de 240 filas y 320 columnas, en la cual cada elemento de la matriz representa un pixel de la imagen, y contiene la temperatura en grados Kelvin en ese punto.
- Prueba10000\_DateTime: es un vector de 7 elementos que indica la fecha y hora exacta en que se comenzó a grabar el video.
- Prueba10000\_ObjectParam: es un vector de 10 elementos que representa valores de: emisividad, distancia del objeto, temperatura reflejada, temperatura atmosférica, humedad relativa, transmisión atmosférica computada y estimada, temperatura de referencia, temperatura de ópticos externos y transmisión de ópticos externos.
- Prueba10000\_Scaling: vector de 9 elementos que entrega información sobre el rango del cuerpo negro, tipo de salida, escala de cámara, rango de escala calculado y real.
- Prueba10000\_FrameInfo: vector de 2 elementos con información del número total de imágenes o frames del video, y del conteo de trig.

La matriz con la que se trabaja es la primera (prueba10000) ya que esta contiene los datos de temperatura, figura 3.2.

El objetivo de crear un código en Matlab, es el de generar un archivo de texto con la información de temperatura para cada coordenada de la superficie seleccionada, de modo de poder importar estos datos de manera rápida al programa Eureka Formulize, en el cual se buscarán las funciones de la temperatura.

Se utilizarán coordenadas cartesianas por lo que el formato del archivo debe incluir, por cada fila, la información de la posición en el eje  $x$  (eje horizontal), la posición en el eje  $y$  (eje vertical), y la temperatura en ese punto  $T(x,y)$  en unidades de grados Celsius. Todos los datos deben estar separados por espacios.

La unidad de los ejes  $x$  e  $y$  es en metros [m]. La conversión de pixeles a metros se realizó mediante la utilización de una fotografía de la ventana del reactor utilizado (figura 3.3), con la cual se estimó el diámetro de la imagen

termográfica de la pastilla como 2 [cm]. Considerando que el diámetro corresponde a 169 pixeles, entonces se tiene:

$$\Delta x = \frac{\varnothing \text{ en metros}}{\varnothing \text{ en pixeles}} = \frac{0.02 [m]}{169} = 1.1834 \times 10^{-4} [m]$$

Además,  $\Delta y = \Delta x$  siendo  $\Delta x$  y  $\Delta y$  el crecimiento correspondiente a cada pixel a lo largo del eje  $x$  e  $y$ , respectivamente.

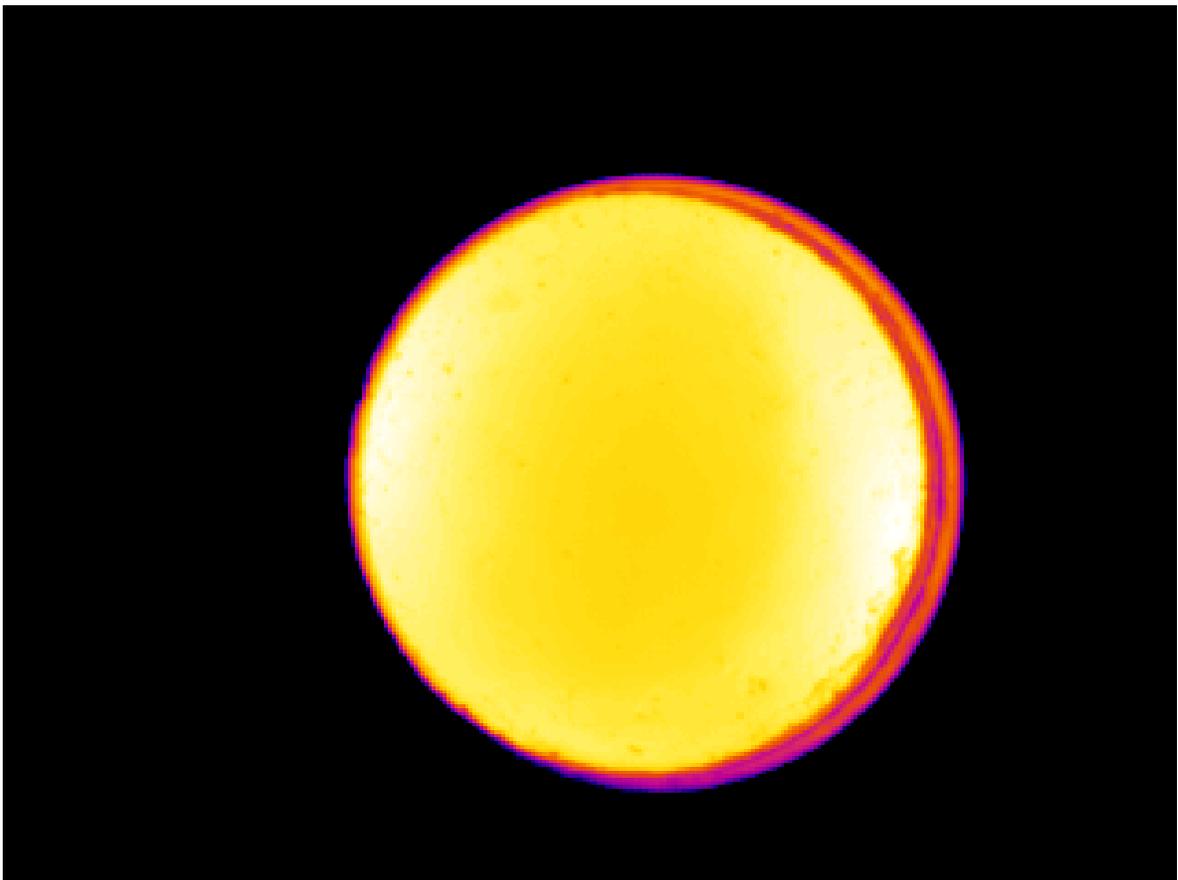


Figura 3.2: Imagen que representa la temperatura superficial de la pastilla en el frame 10000 del video escogido.

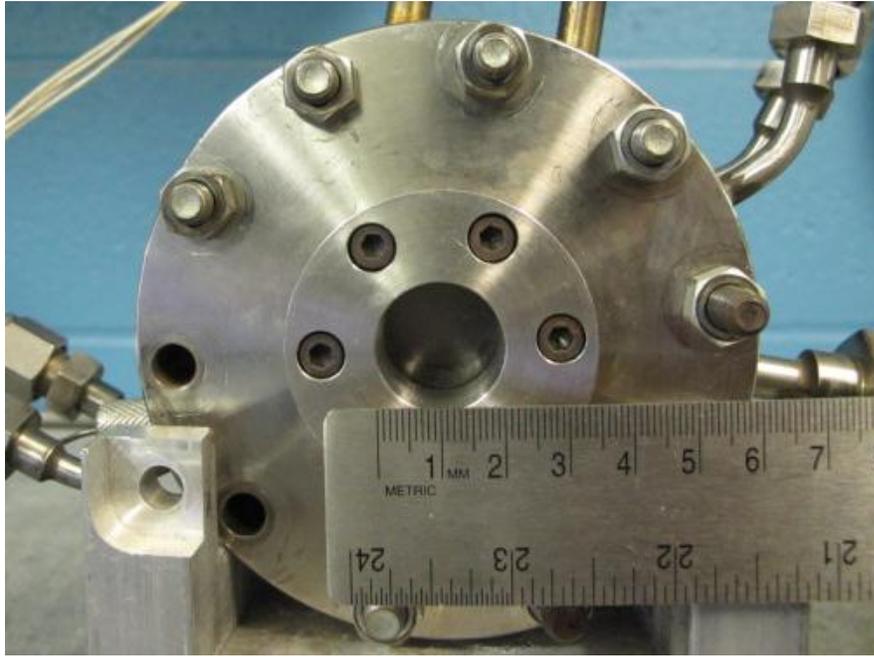


Figura 3.3: Fotografía de la ventana del reactor.

Por lo tanto, en Matlab se crea un código que sea capaz de seleccionar distintas áreas de la superficie que se ve afectada por cambio de temperatura. Las áreas que se seleccionarán son circulares y concéntricas con respecto a la superficie total. El primer paso es crear una matriz más pequeña que la original que contenga inscrita la superficie total que ve afectada su temperatura, como se observa en la figura 3.4. Los ejes de coordenadas, se definen a partir de esta matriz, ubicando el inicio de cada eje (punto  $(0,0)$ ) en la esquina superior izquierda de la matriz. Este sistema cartesiano se ocupará en todo el trabajo.

Luego se determina que esta superficie puede dividirse en cuatro áreas circulares. Para esto se divide el alto y ancho de la matriz nueva en ocho partes iguales (aproximadamente, ya que el número de filas y columnas debe ser un número entero). En la figura 3.5, se muestra una representación del proceso. A las cuatro superficies se les llamará zonas superficiales 1, 2, 3, y 4, que representan aproximadamente un 6%, 24%, 55%, y 100% del área total de temperatura, respectivamente.

Para el análisis espacial de la variación de la temperatura, se opta por tomar la segunda superficie más pequeña (zona superficial 2), que corresponde a un 24,6255% de la superficie total. En general se intenta no ocupar en ninguna instancia la superficie completa (zona superficial 4), ya que se ven

algunas anomalías en la temperatura registrada cerca de los bordes de la superficie.

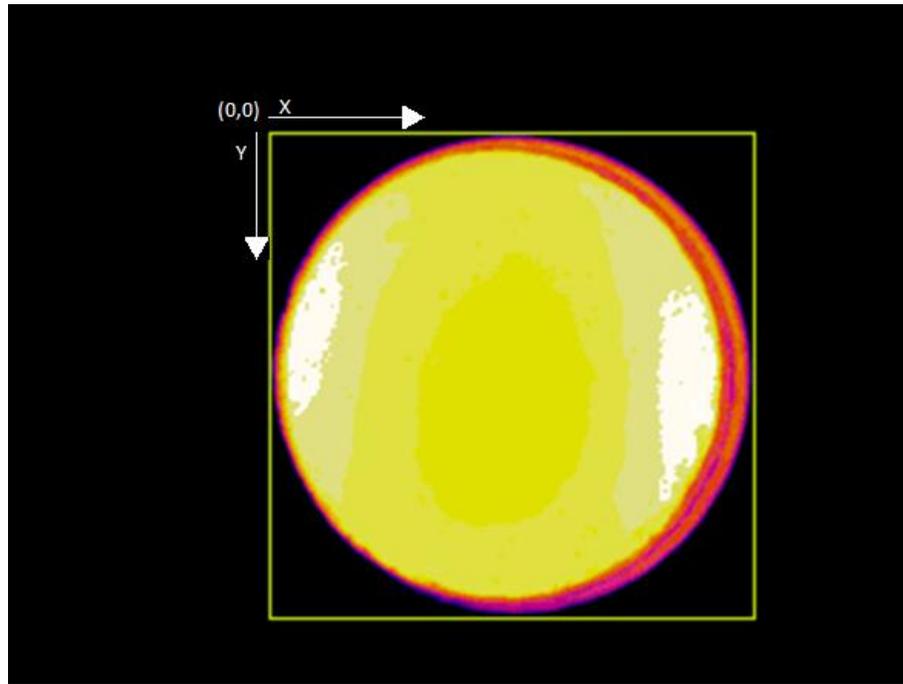


Figura 3.4: Representación de primera matriz creada en el procesamiento de datos y las coordenadas que se utilizarán.

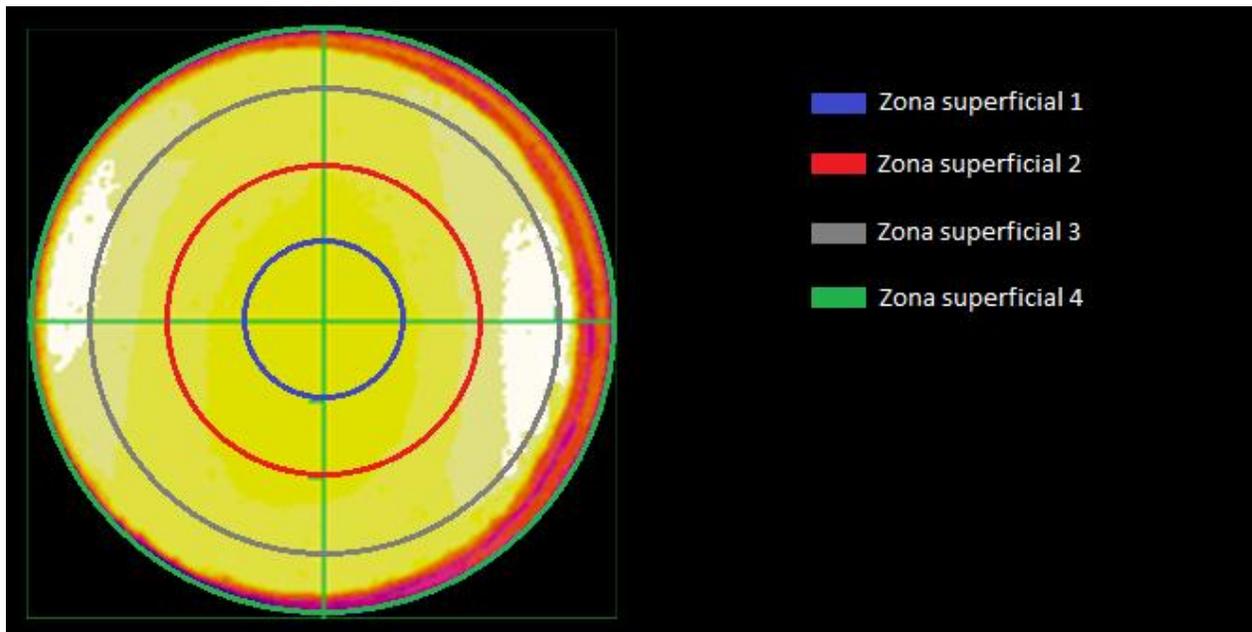


Figura 3.5: División de superficie por segmentación de ejes.

Entonces con la superficie definida se imprimen los datos de temperatura y coordenadas al archivo de texto de valores separados por espacios.

Además, y con el objetivo de realizar comparaciones y de facilitar la búsqueda de funciones para la temperatura, se genera otro set de datos los cuales son suavizados mediante el método de convolución gaussiana directamente en el código de Matlab. Con este método se buscan reducir los gradientes de temperaturas muy grandes entre pixeles contiguos.

Primero se generan varios casos, variando el tamaño de la matriz y la desviación estándar que definen el efecto del método gaussiano en la imagen. Se varía la intensidad de la convolución gaussiana utilizando matrices de 3x3, 6x6, y 9x9, y desviación estándar  $\sigma$  de 0.5 o 1.0.

Se escoge el caso de una matriz de 9x9 y desviación estándar  $\sigma = 1$  debido a que el suavizado es mayor como se ve en la figura 3.6.

### ***c. Configuración de software para búsqueda de funciones espaciales de temperatura superficial***

Para encontrar funciones de temperatura que dependan de la coordenada  $x$  e  $y$  se utiliza el programa Eureka Formulize. Este programa utiliza el método de regresión simbólica mediante el uso de algoritmos genéticos.

Eureka permite importar datos desde archivos de texto, por lo que la importación de los datos preparados previamente se realiza fácilmente.

Una vez importados los datos y definidas las variables  $(x, y)$  se preparan los datos de temperatura mediante suavizado, remoción de valores fuera de rango, y normalización [13].

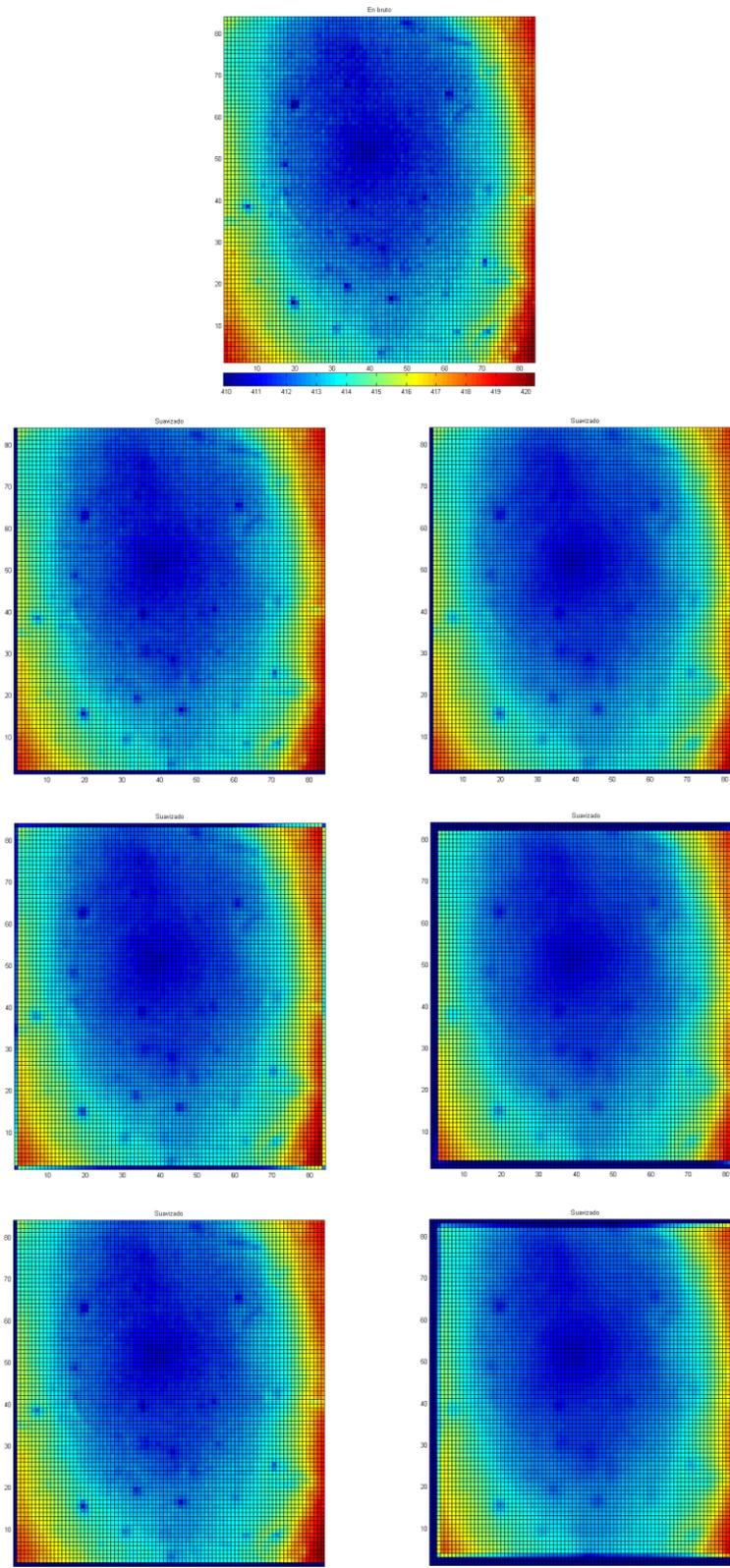


Figura 3.6: Resultados de pruebas de suavizado de datos efectuadas por convolución gaussiana. Arriba la imagen en bruto, segunda fila suavizado con matriz 3x3, tercera fila 6x6, y la cuarta fila 9x9. Columna izquierda  $\sigma=0.5$ , columna derecha  $\sigma=1$ .

La suavización se realiza a través de las filas o pares  $(x, y)$  y el porcentaje de suavizado se elige automáticamente por el programa. Para el caso en que se utilizan los datos en bruto (sin suavizar) el programa elige un suavizado de 29,9%, y para el caso en que se utilizan los datos suavizados por convolución gaussiana el programa elige un valor de 21,8%. Se puede ver que los datos previamente suavizados necesitan menos suavizado en Eureka, un 8,1% menos.

Para la remoción de valores fuera de rango se utiliza la opción de remover valores con un umbral de dos veces el IQR (rango intercuartílico o intercuartil) de los datos. Los valores que queden fuera de este rango no son considerados en la búsqueda de funciones. Se realiza el mismo paso tanto para cuando se buscan funciones a partir de los datos en bruto, como cuando están suavizados por convolución gaussiana.

En la normalización de los datos de temperatura se busca reducir los valores de temperatura a valores en el rango  $[0,1]$ , pues con valores en este rango el programa alcanza su mejor rendimiento de búsqueda. El método que se escoge es el de sustraer a cada valor de temperatura el valor promedio de ésta, y dividirlo por 1.000. Se utiliza el mismo método tanto para el caso de datos en bruto, como para los datos suavizados previamente.

Luego, al tener totalmente listos los datos, se define el tipo de función que se quiere encontrar como  $T = f(x, y)$ , es decir, que se busque una función que represente los valores de temperatura, en función de las coordenadas  $(x, y)$ . Además se especifica que el programa utilice los siguientes bloques de construcción: constante real, constante entera, adición, sustracción, multiplicación, división, seno, coseno, tangente, exponenciales, logaritmos naturales, y potencias. La configuración de estas opciones es idéntica para ambos casos, con los datos en bruto y con los datos suavizados. Se procede entonces a comenzar la búsqueda de funciones que representen la variación de la temperatura superficial de la pastilla.

Una vez que se considera que el tiempo transcurrido en la búsqueda de funciones por parte del programa Eureka es suficiente, este se detiene y se toman las funciones encontradas hasta ese momento. Eureka no tiene un criterio de detención, sino que entrega dos indicadores que permiten determinar cuando conviene detener la búsqueda manualmente por parte del usuario. Estos parámetros son *Stability* y *Maturity*, que indican que tanto ha pasado desde la lista de soluciones no ha cambiado, y cuanto esfuerzo

computacional se ha utilizado en encontrar la lista de soluciones que se tiene en el momento, respectivamente. Según los desarrolladores del software, si estos dos parámetros sobrepasan el 50%, se puede decir que muy probablemente las soluciones no cambien en el futuro, o que lo hagan levemente. Esto conlleva un problema asociado a vigilar estos dos indicadores constantemente, con la eventualidad que aún si los dos indicadores sobrepasan el 50%, el parámetro de estabilidad podría volver a cero si se encuentra una solución diferente a las que se habían encontrado hasta ese momento. Por lo tanto el criterio de detención de búsqueda no se basa solo en estos indicadores, sino también en el tiempo transcurrido de búsqueda.

#### ***d. Análisis de las funciones encontradas***

Para analizar las funciones que se encontraron tanto desde los datos en bruto como desde los datos suavizados, se define un error objetivo (ecuación 3.2).

$$Error = \frac{|T_{exp} - T'|}{T_{exp}} \times 100 \leq 5\% \quad (3.2)$$

Donde  $T_{exp}$  es la temperatura experimental en un punto  $(x, y)$  determinado, y  $T'$  es la temperatura evaluada con la función encontrada en el mismo punto  $(x, y)$ .

Se determina, por experiencia de los profesores, que el máximo error permitido sea de un 5%. Por lo tanto si una función  $T(x, y)$  sobrepasa el 5% de error al ser evaluada en cualquier par  $(x, y)$  del set de datos, esta queda descartada.

Se utilizan dos criterios para el análisis de la calidad de cada función, lo cuales son: error máximo, y error promedio. El error máximo corresponderá al mayor error verificado en cualquier par  $(x, y)$  del set de datos. El error promedio es el promedio de los errores para todos los puntos  $(x, y)$  del set de datos. Se espera que una buena función tenga un error promedio y error máximo menor a 5%.

Todos estos análisis se realizan utilizando el programa Wolfram Mathematica.

*i. Análisis de funciones  $T(x,y)$  encontradas a partir de datos en bruto*

Las funciones encontradas se evalúan en cada uno de los puntos  $(x,y)$  de la superficie seleccionada correspondiente al 24,6255% de la superficie total (zona superficial 2). A Partir de estas evaluaciones, se calculan los errores en cada punto  $(x,y)$ , con lo que luego se determina el máximo error existente y el error promedio para cada una de las funciones  $T(x,y)$ .

Las funciones encontradas también se analizan siendo evaluadas en una mayor superficie de la pastilla. Para esto se selecciona la zona superficial 3, que corresponde a un 55% de la superficie total de la pastilla, y se evalúan las funciones en las coordenadas  $(x,y)$  correspondientes a esta zona. En esta verificación, se consideran datos en bruto, sin suavizar.

Para definir cuáles de las funciones se selecciona para seguir adelante con la búsqueda de la conductividad térmica, se toman en cuenta los errores máximos y mínimos en la zona superficial 2 y 3, y también la complejidad de cada función. En general se elegirá la función más simple que cumpla con tener errores menores al 5%, y cuya forma copie bien los datos experimentales de temperatura al observar los gráficos superficiales de temperatura.

*ii. Análisis de funciones  $T(x,y)$  encontradas a partir de datos suavizados*

La metodología empleada para el análisis de las funciones encontradas a partir de los datos suavizados por convolución gaussiana, es bastante similar a la utilizada en el análisis de funciones obtenidas desde datos en bruto.

Para el grupo de funciones obtenidas, se efectúa una verificación con los datos en bruto correspondientes a la zona superficial 3. La verificación no se lleva a cabo con datos suavizados, en ninguno de los dos casos, pues se entiende que el caso más crítico de verificación es con datos en bruto.

Utilizando los criterios de menor error máximo y menor error promedio, y observando la forma de la función, se escoge finalmente una función  $T(x,y)$  obtenida a partir de datos de temperatura experimental suavizados.

### ***e. Obtención analítica de la conductividad térmica espacial***

Se tienen dos funciones  $T(x,y)$  a partir de las cuales se intenta obtener una expresión de la conductividad térmica que dependa de la posición  $(x,y)$  en la superficie del material catalizador. Se espera que la conductividad térmica no sea constante, lo que se justifica mediante el análisis expuesto en el anexo A.

La ecuación 2.2, representa la ecuación de calor considerando el fenómeno de conducción de calor y la reacción en la superficie del material. Esta ecuación se utiliza ya que no se cuenta con los valores de temperatura del gas que permitan incluir en el análisis al fenómeno de convección, y además, porque el fenómeno de radiación es despreciable. El límite superior de potencia emisiva, queda establecido por la ley de Stefan-Boltzmann, mediante la ecuación 3.3.

$$E_b = \sigma T_s^4 \quad (3.3)$$

Donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann ( $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ) y  $T_s$  la temperatura absoluta de superficie del cuerpo. Considerando  $T_s = 427 \text{ [K]}$ , a partir de los valores máximos de temperatura de la imagen termográfica utilizada, se tiene un límite superior de potencia emisiva  $E_b$  de  $2.4 \times 10^{-5} \text{ [W/m}^2]$ . Para estimar la energía calórica que emite el área del material correspondiente a un pixel de la imagen se considera  $A = (\Delta x)^2$ , por lo que finalmente se tiene

$$Q = E_b A = 3.4 \times 10^{-13} \text{ [W]}$$

Lo que es un valor muy pequeño, y por lo tanto permite despreciar el fenómeno de radiación en este trabajo. Entonces, al eliminar también el efecto de la reacción química, la ecuación 2.2 queda simplificada como se tiene en la ecuación 3.4.

A partir de la ecuación 3.4, y considerando que la conductividad térmica depende en este caso de  $(x, y)$ , se tiene la ecuación 3.5.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

$$0 = \frac{\partial k(x,y)}{\partial x} \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + k(x,y) \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial k(x,y)}{\partial y} \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} + k(x,y) \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \quad (3.5)$$

Desarrollando la ecuación 3.5, a partir de los datos que se tienen, se busca una expresión para la conductividad térmica  $k(x, y)$  utilizando el programa Mathematica. Las expresiones encontradas, y los valores que estas tomen, se analizan determinando si están dentro del rango esperado y si es válido exponerlas como un modelo de conductividad térmica.

#### ***f. Obtención numérica de la conductividad térmica espacial***

Este proceso utiliza una función de  $T(x, y)$  de las escogidas anteriormente. El método se basa en el visto en el capítulo de antecedentes, pero no tiene como objetivo directo el de minimizar la expresión de  $S$ , (ecuación 3.6).

$$S[k(T)] = \sum_m^M \int_{t=0}^{t_f} (T_{exp}(t) - T[x_m, y; k(T)])^2 dt \quad (3.6)$$

Esta expresión escrita considerando la independendencia del tiempo y la notación usada en este trabajo, queda reducida a la expresión de la ecuación 3.7.

$$S[k(T)] = \sum_i^I \sum_j^J (T_{exp}(x_i, y_j) - T(x_i, y_j))^2 \quad (3.7)$$

Donde la matriz  $T_{exp}$ , es la matriz de temperatura calculada a partir de la función  $T(x, y)$  elegida, y  $T$  es la matriz de temperatura que se estará calculando con estimaciones de conductividad térmica.

La matriz  $T$  se inicia estableciendo sus dos primeras filas y dos primeras columnas con valores idénticos en esta posición, a los que tiene la matriz  $T_{exp}$ .

Se genera una matriz  $k$  correspondiente a la conductividad térmica, con valores aleatorios menores a 0.1 [W/m.K].

La matriz  $T$  se rellena mediante el cálculo de las temperaturas utilizando diferencias finitas, con el método regresivo de primer orden. Entonces a partir de la ecuación 3.5 se tiene como resultado la ecuación 3.8.

$$\left(\frac{k_{i,j}-k_{i-1,j}}{\Delta x}\right)\left(\frac{T_{i,j}-T_{i-1,j}}{\Delta x}\right) + \left(\frac{k_{i,j}-k_{i,j-1}}{\Delta y}\right)\left(\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\Delta y}\right) + k_{i,j}\left(\frac{T_{i,j}-2T_{i-1,j}+T_{i-2,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j}-2T_{i,j-1}+T_{i,j-2}}{\Delta y^2}\right) = 0 \quad (3.8)$$

Luego, la ecuación 3.8 se puede simplificar, tomando en cuenta que  $\Delta x = \Delta y$ , obteniendo una expresión para la temperatura calculada en la coordenada  $(i,j)$ , o  $T_{i,j}$  (ecuación 3.9).

$$T_{i,j} = \frac{k_{i,j}(3T_{i-1,j}+3T_{i,j-1}-T_{i-2,j}-T_{i,j-2})-k_{i-1,j}T_{i-1,j}-k_{i,j-1}T_{i,j-1}}{4k_{i,j}-k_{i,j-1}-k_{i-1,j}} \quad (3.9)$$

Entonces, en Mathematica, se crea un ciclo que busque modificar el valor de  $k_{i,j}$  de forma que el error cuadrático de  $T_{i,j}$  con respecto a  $T_{exp,i,j}$  no sea mayor al 0.25% del promedio de  $T_{exp}$ . Además se establece que el valor de conductividad térmica no sobrepase los 31 [W/m.K], que se determina según la referencia de la alúmina en estado sólido.

La estructura del ciclo, cuyo código se encuentra en el anexo C, se detalla a continuación:

- Según la ecuación 3.8, se calculan todos los  $T_{i,j}$  con los valores de la matriz  $k$
- Se barre la matriz  $k$  y  $T$ . Si en cualquier posición  $(i,j)$  se tiene que:
  - o  $\left(T_{exp,i,j} - T_{i,j}\right)^2 > 0.0025 * \overline{T_{exp}}$
  - y

o  $k_{i,j} < 30$

Entonces,  $k_{i,j} = k_{i,j} + 0.1$

- Se repiten los pasos hasta que se llega a la posición final  $(i, j)$ .

El resultado es una matriz modificada  $k$  de conductividad térmica, correspondiente al área seleccionada, y con la cual se logró mantener un error cuadrático menor al 0.25% en todas las coordenadas de las matrices de temperatura  $T_{exp}$  y  $T$ .

Estos valores de conductividad térmica se llevan a Eureka, junto con las coordenadas  $(x, y)$  en metros correspondientes, para encontrar una función  $k(x, y)$  que se ajuste a estos datos.

Las funciones  $k(x, y)$  que se obtienen son analizadas con respecto a los datos de conductividad térmica que se obtuvieron de la iteración, y se escoge una como expresión propuesta de  $k(x, y)$  considerando los errores y la forma que esta tenga.

### **3.2.2. Análisis espacial y temporal de conductividad térmica**

#### **a. Selección de datos**

Se selecciona una cantidad determinada de frames del video seleccionado, los que se deben encontrar equidistantes en el tiempo. La duración del video es de 61 segundos, por lo que se realiza es tomar datos de la primera mitad del video para efectuar la búsqueda de las funciones de temperatura que se ajusten a la temperatura experimental, mientras que los datos de la segunda mitad del video se utilizan para verificar el comportamiento de las funciones preseleccionadas fuera del intervalo que se ocupó para encontrarlas.

El tiempo que transcurre por frame es de 0,0022779 segundos. Se determina utilizar 120 frames del video, desde el frame 1 hasta el frame 13090, en intervalos de 110 frames. Es decir, se usan los frames: 1, 110, 220, 330, ...,

12870, 12980, 13090. El transcurso de tiempo representado es desde el segundo 0 hasta los 29.817711 segundos.

### ***b. Procesamiento de datos***

Se construye en Matlab un algoritmo para abrir los archivos *.MAT* correspondientes a cada uno de los frames utilizados, y recolectar los datos de posición y temperatura experimental en la zona superficial 1, de aproximadamente 6% del área total. Se utiliza la zona más pequeña (zona superficial 1) ya que la suma total de datos, al acumular 120 frames, es lo suficientemente grande como para dificultar el trabajo en el programa Eureka, sobre todo a nivel de interfaz, ya que el programa muestra gráficos en tiempo real, por lo que utilizando la zona superficial 2 el programa demostraba dificultades tratando de mostrar sus gráficos, causando que el programa dejara de responder.

Para facilitar la tarea de la búsqueda de funciones  $T(x, y, t)$ , en este caso también se suaviza cada frame utilizado mediante el método de la convolución gaussiana, donde se usa una matriz 9x9 y desviación estándar  $\sigma = 1$ .

Producto del trabajo en Matlab se generan 5 archivos de texto. Uno con la información de la posición en el eje  $x$ , el segundo posición en el eje  $y$ , el tercero con la temperatura experimental en el punto  $(x, y)$ , el cuarto con el número de imagen o frame correspondiente a la posición  $(x, y)$ , y el quinto con el tiempo transcurrido hasta el momento.

La información contenida en estos archivos se copia al *Datasheet* de Eureka, excepto la información del número de frame que no es relevante para la búsqueda de funciones.

### ***c. Configuración de software para búsqueda de funciones espaciales y temporales de temperatura superficial***

En el programa Eureka se modifican los datos de entrada, normalizando los datos de temperatura, dividiéndolos por 1000 y restándole el promedio de las temperaturas.

Además se especifica que el programa utilice los siguientes bloques de construcción para la búsqueda de funciones  $T(x,y,t)$ : constante real, constante entera, adición, sustracción, multiplicación, división, seno, coseno, tangente, exponenciales, logaritmos naturales, potencias, y raíces cuadradas.

#### ***d. Análisis de las funciones de temperatura encontradas***

Para el análisis de las funciones encontradas, se utiliza el mismo error de la ecuación 3.2, definido en la parte *d.* de la sección 3.2.1.

En primera instancia se analizan las funciones obtenidas, evaluándolas en la misma zona superficial que se utilizó para efectuar la búsqueda de funciones. Es decir, se ocupan los datos en bruto de una zona superficial de 6% del total (zona superficial 1), y sobre unos 120 frames que representan los primeros 30 segundos del video, aproximadamente. Se observa cuáles funciones tienen los menores errores máximos, los menores errores promedio, y cuales copian bien la forma de los datos de temperatura experimentales.

#### ***e. Verificación de funciones de temperatura encontradas***

Las funciones, se evalúan ahora en datos brutos que representen a la misma superficie (zona superficial 1), pero en el segundo tramo del video, desde los 30.06828 hasta los 59.885991 segundos.

Por último se evalúan las funciones en un tramo de tiempo que incluye ambos tramos especificados anteriormente (desde el segundo inicial al segundo 59.885991), en la zona superficial 2 (24%) con datos en bruto, sin suavizar. Esto para analizar la variabilidad del ajuste mientras se aumenta la temperatura con el transcurso del tiempo.

De los dos análisis, se define cuales funciones se comportan mejor como para utilizarlas en el desarrollo de las expresiones de conductividad térmica dependiente de posición y tiempo.

### **f. Obtención analítica de conductividad térmica espacial y temporal**

A partir de las funciones  $T(x, y, t)$  que fueron seleccionadas, se desarrolla una expresión de la conductividad térmica que dependa de la posición  $(x, y)$ , y del tiempo  $t$ , en la superficie del material catalizador.

A partir de la ecuación 3.4, y como la conductividad térmica depende en este caso de  $x$ , de  $y$ , y de  $t$ , se tiene la ecuación 3.10.

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x,y,t)}{\partial x} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial k(x,y,t)}{\partial y} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} + k(x, y, t) \left( \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \quad (3.10)$$

De la ecuación 3.10, y desarrollando con los datos, se procede a buscar una expresión de la conductividad térmica  $k(x, y, t)$ . Estas expresiones luego se verifican si caen dentro del rango de valores esperados para la conductividad térmica del material de la pastilla y se discute si la función resultante tiene validez.

Para la resolución de la ecuación 3.10, se considera el valor de la densidad como  $\rho=672[\text{kg}/\text{m}^3]$ , y del calor específico como  $c_p=662[\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}]$ . El valor de densidad se escoge por ser el valor de densidad de pellets de alúmina porosa más cercano al 10% del valor de densidad absoluta de la alúmina 99% sin porosidad. Se elige el valor de calor específico más bajo según las referencias, entendiendo que también baja mientras mayor sea la porosidad del material.

### **g. Obtención numérica de conductividad térmica espacial y temporal**

Para el método numérico de obtención de una expresión de conductividad térmica dependiente de la posición y el tiempo, se usa una de las funciones de temperatura  $T(x, y)$  escogidas.

El procedimiento es similar al que se efectúa en el caso espacial. Se consideran los primeros 5 segundos del video para realizar este análisis, lo

que corresponde a 20 imágenes o frames, desde los 0.250569 segundos hasta los 5.01138 segundos.

Para cada una de las imágenes se tiene una matriz  $T_{exp}$ , que es la matriz de temperatura calculada a partir de la función  $T(x, y, t)$  elegida, una matriz  $T$  que es la matriz de temperatura que se estará calculando con estimaciones de conductividad térmica, y una matriz  $k$  correspondiente a la conductividad térmica, con valores aleatorios menores a 0.1 [W/m.K].

La matriz  $T$  se inicia estableciendo sus dos primeras filas y dos primeras columnas con valores idénticos en esta posición, a los que tiene la matriz  $T_{exp}$ . Luego  $T$  se rellena mediante el cálculo de las temperaturas utilizando diferencias finitas, con el método anterior de primer orden. Entonces a partir de la ecuación 3.10 de difusión de calor, se tiene la ecuación 3.11.

$$\rho_{i,j} c_{p,i,j} \left( \frac{T_{i,j}^t - T_{i,j}^{t-1}}{\Delta t} \right) = \left( \frac{k_{i,j} - k_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \left( \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \left( \frac{k_{i,j} - k_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \left( \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + k_{i,j} \left( \frac{T_{i,j} - 2T_{i-1,j} + T_{i-2,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j} - 2T_{i,j-1} + T_{i,j-2}}{\Delta y^2} \right) \quad (3.11)$$

En la ecuación 3.11, todos los términos se consideran en el tiempo  $t$ , excepto el término de temperatura  $T_{i,j}^{t-1}$ , que corresponde a la temperatura en la posición  $i, j$  para el instante de tiempo anterior  $t - 1$ . El salto de tiempo  $\Delta t$  es de 0.250569 segundos, mientras que  $\Delta x = \Delta y = 1.1834 \times 10^{-4}$  [m].

Los valores de densidad y calor específico se consideran constantes a lo largo y ancho de la superficie, con los mismos valores utilizados en el método analítico,  $\rho = 672$  [kg/m<sup>3</sup>] y  $c_p = 662$  [J/kg.K]. Se realiza también un estudio paralelo que comprueba que utilizando distintos valores para la densidad, los resultados no varían de forma demasiado significativa y pueden verse en el anexo B.

Simplificando la ecuación 3.11, y recordando que  $\Delta x = \Delta y$ , se obtiene una expresión para la temperatura calculada en la coordenada  $(i, j)$  para el tiempo  $t$ , o  $T_{i,j}^t$  (ecuación 3.12).

$$T_{i,j}^t = \frac{\rho_{i,j} c_{p_{i,j}} T_{i,j}^{t-1} \Delta x^2 + \Delta t (k_{i,j} (-3T_{i-1,j} - 3T_{i,j-1} + T_{i-2,j} + T_{i,j-2}) - k_{i-1,j} T_{i-1,j} - k_{i,j-1} T_{i,j-1})}{\rho_{i,j} c_{p_{i,j}} \Delta x^2 + \Delta t (-4k_{i,j} + k_{i,j-1} + k_{i-1,j})} \quad (3.12)$$

Utilizando Mathematica, se crea un ciclo que busque modificar el valor de  $k_{i,j}$  de forma que el error cuadrático de  $T_{i,j}$  con respecto a  $T_{exp_{i,j}}$  no sea mayor al cuadrado del 2% del promedio de  $T_{exp}$ . Además se establece que el valor de conductividad térmica no sobrepase los 31 [W/m.K], que se determina según la referencia de la alúmina en estado sólido.

La estructura del ciclo, cuyo código puede encontrarse en el anexo C, queda finalmente como se ve a continuación:

- Según la ecuación 3.12, se calculan todos los  $T_{i,j}^t$  con los valores de la matriz  $k$ , y considerando  $T_{i,j}^t$  a partir de los cálculos de la imagen anterior. Para la primera imagen, se utiliza  $T_{i,j}^t$  correspondiente a la temperatura calculada según la función  $T(x, y, t)$  con  $t = 0$ .
- Se barre la matriz  $k$  y  $T$ . Si en cualquier posición  $(i, j)$  se tiene que:
  - o  $(T_{exp_{i,j}} - T_{i,j})^2 > (0.2 * \overline{T_{exp}})^2$
  - y
  - o  $k_{i,j} < 30$

Entonces,  $k_{i,j} = k_{i,j} + 0.1$

- Se repiten los pasos hasta que se llega a la posición final  $(i, j)$ , en el tiempo  $t$ .
- Luego se repite el proceso para el tiempo  $t + 1$ , hasta que este tiempo corresponda a 5.01138 segundos.

El resultado es una matriz modificada  $k$  de conductividad térmica, correspondiente al área seleccionada, para cada uno de las 20 imágenes consideradas, y con la cual se logró mantener un error cuadrático de temperatura en el rango deseado.

Los valores de conductividad térmica calculados se llevan a Eureqa, junto con las coordenadas  $(x, y)$  en metros correspondientes, y al instante de tiempo que corresponde para cada uno, con el fin de encontrar una función que  $k(x, y, t)$  que se ajuste a estos datos.

Para reducir la dispersión de los datos de conductividad térmica que va a utilizar Eureka, se realiza una reducción de tamaño de la matriz calculada  $k$ . Para esto se divide la matriz de 42x42 elementos, en sub-matrices de 3x3 elementos, y se promedian los valores de cada sub-matriz. Una representación del proceso puede verse en la figura 3.7.

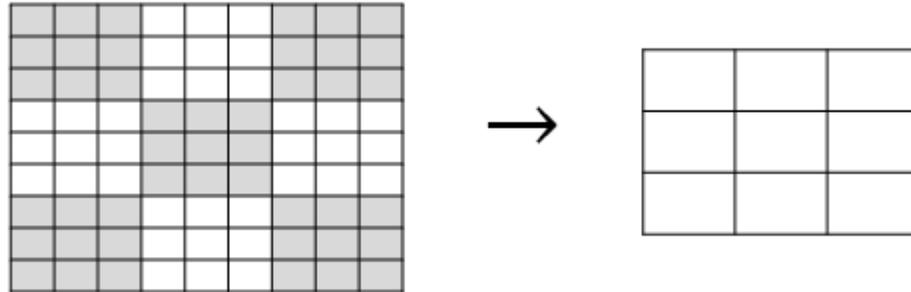


Figura 3.7: División de matriz  $k$  en sub-matrices de 3x3 elementos.

Producto de esto, para cada una de las 20 imágenes, se tiene una matriz final de conductividad térmica de 14x14 elementos, lo que entrega una menor dispersión de valores, facilitando la búsqueda de expresiones  $k(x, y, t)$  por parte de Eureka.

Los resultados obtenidos de  $k(x, y, t)$  son analizados con respecto a los datos de conductividad térmica que se obtuvieron de la iteración, para escoger una expresión  $k(x, y, t)$  que, considerando los errores y la forma que esta tenga, pueda considerarse proponer como estimación apropiada para el problema.

### 3.2.3. Resumen de la metodología

Para complementar la descripción de la metodología empleada, se adjunta un esquema, el que se puede apreciar en la figura 3.8.

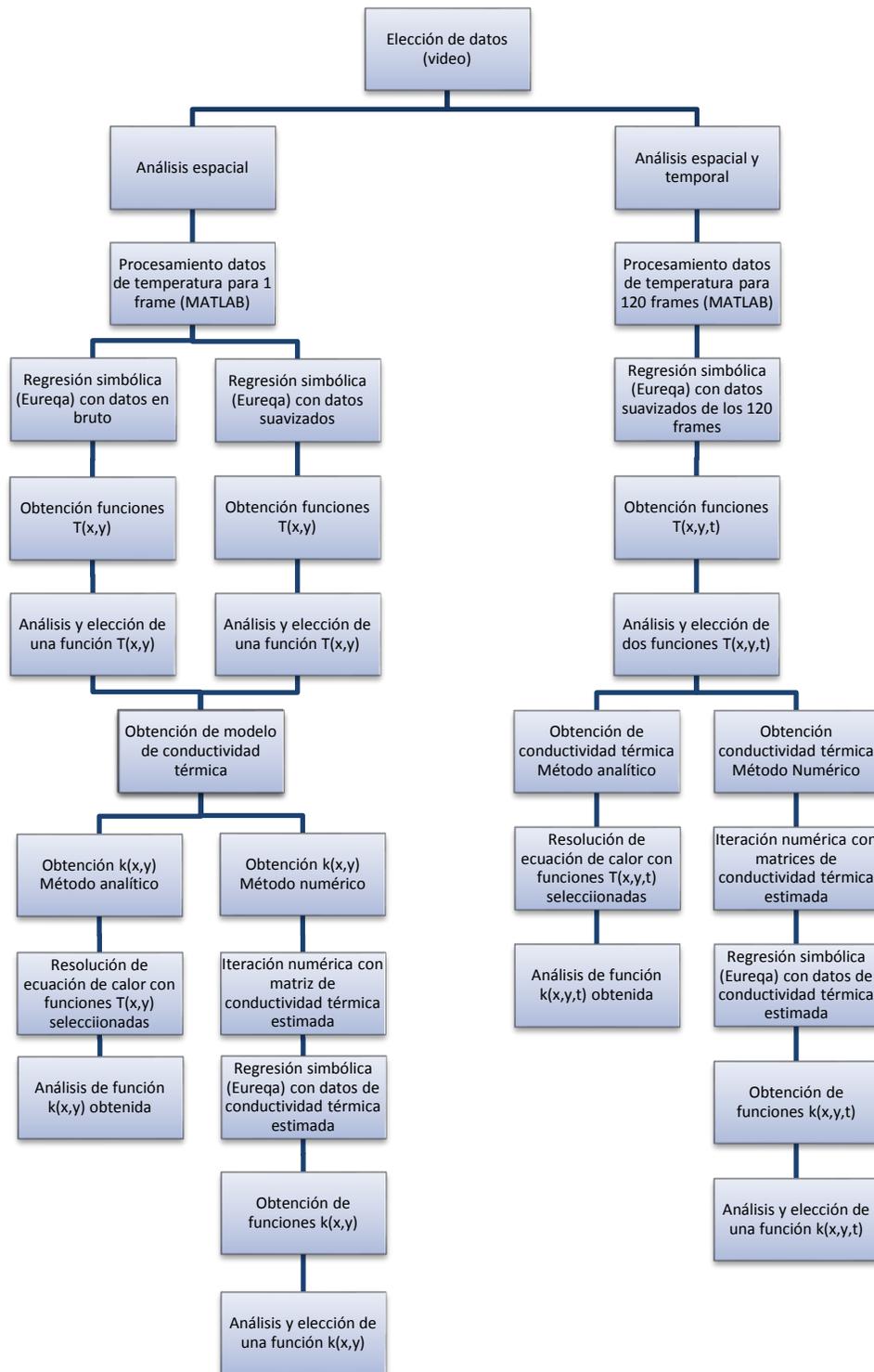


Figura 3.8: Esquema de la metodología empleada.

# 4. Dependencia espacial de la conductividad térmica

## 4.1. Funciones de temperatura superficial $T(x, y)$

### 4.1.1. Funciones $T(x, y)$ encontradas a partir de datos en bruto

Con la búsqueda efectuada en el software Eureka a partir de datos sin suavizar, se encontraron 24 funciones  $T(x, y)$  diferentes. A continuación se muestran estas funciones, todas representando temperatura en grados Celsius.

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0277 + 222 x^2 + 2006 y^3 + y \operatorname{Sin}[8.12 \cdot 10^4 \cdot x^2 + y]}{\operatorname{Cos}[8.12 \cdot 10^4 \cdot x^2 \cdot \operatorname{Sin}[0.0445 - 251 \cdot x^2]]} - y - 4.49 \cdot x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.1)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0277 + 222 \cdot x^2 + 2004 \cdot y^3 + 8.12 \cdot 10^4 \cdot x^2 \cdot y^2}{\operatorname{Cos}[8.12 \cdot 10^4 \cdot x^2 \cdot \operatorname{Sin}[0.0445 - 251 \cdot x^2]]} - y - 4.49 \cdot x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.2)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0264 + 206 \cdot x^2 + 2005 \cdot y^3 + y^2 \cdot \operatorname{Exp}(206 \cdot x)}{\operatorname{Cos}[3.42 \cdot 10^3 \cdot x^2 - 1.93 \cdot 10^7 \cdot x^4]} - y - 4.19 \cdot x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.3)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0273 + 220 \cdot x^2 + 2003 \cdot y^3 + 8.21 \cdot x^2 \cdot y^2}{\operatorname{Cos}[6110 \cdot x^2 - 4.59 \cdot 10^5 \cdot x^3]} - y - 4.43 \cdot x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.4)$$

$$T(x, y) = (0.05455 + 2.17 \cdot 10^3 x^2 + 63.9 y^2 + 31.2 x y + 3.69 \cdot 10^6 x^4 - 1.78 y - 16 x - 1.41 \cdot 10^5 x^3) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.5)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0237 + 158 x^2 + 2.06 \cdot 10^3 y^3 + 1527 x^2 y}{\operatorname{Cos}[4794268 x^4]} - y - 3.48 x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.6)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0239 + 159 x^2 + 2.05 \cdot 10^3 y^3 + 1543 x^2 y}{\operatorname{Cos}[69836 x^3]} - y - 3.51 x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.7)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0241 + 157 x^2 + 2047 y^3 + 1.54 \cdot 10^3 x^2 y}{\operatorname{Cos}[1124 x^2]} - y - 3.53 x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.8)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{0.0246 + 158.6 x^2 + 2042 y^3 + 1456.425587 x^2 y}{\operatorname{Cos}[20.1 \cdot x]} - y - 3.65 \cdot x \right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.9)$$

$$T(x, y) = (0.0253 + 180.5 x^2 + 2043.5 y^3 + y \operatorname{Tan}[1602 x^2] - y - 3.86 \operatorname{Sin}[x]) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.10)$$

$$T(x, y) = (0.0253 + 180.5 x^2 + 2043.3 y^3 + y \operatorname{Tan}[1603 x^2] - y - 3.86 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.11)$$

$$T(x, y) = (0.0254 + 182.6 x^2 + 2044.5 y^3 + 1621 x^2 y - y - 3.89 \operatorname{Sin}[x]) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.12)$$

$$T(x, y) = (0.0254 + 182.6 x^2 + 2044.8 y^3 + 1620 x^2 y - y - 3.89 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.13)$$

$$T(x, y) = (0.026 + 199.7 x^2 + 1604.17 y^2 \operatorname{Sin}[y + 0.95 x] - y - 4.07 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.14)$$

$$T(x,y) = (0.026 + 199.3 x^2 + 1574.72 y^2 \tan[x + y] - y - 4.07 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.15)$$

$$T(x,y) = (0.026 + 199.3 x^2 + 1575.12 y^2 \sin[x + y] - y - 4.067371974 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.16)$$

$$T(x,y) = (0.0244 + 200.35 x^2 + 2289 y^3 - 0.92 y - 3.92 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.17)$$

$$T(x,y) = (0.0261 + 198.97 x^2 + 66.27 y^2 - 1.54 y - 3.89 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.18)$$

$$T(x,y) = (0.023 + 194.5 x^2 + 40.024 y^2 - y - 3.8 x) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.19)$$

$$T(x,y) = \left(0.0155 + 190.35 x^2 + \frac{9.11 \times 10^{-6}}{y - 0.00274} - 3.72 x\right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.20)$$

$$T(x,y) = \left(0.0149 + \frac{2.02 \times 10^{-5}}{y} + 191.98 x^2 - 3.75 x\right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.21)$$

$$T(x,y) = \left(0.000756 + \frac{2.064 \times 10^{-5}}{y} + 0.0043 \cos[320.59 x]\right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.22)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{2.516 \times 10^{-5}}{y} + 0.00399 \cos[320.33 x]\right) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.23)$$

$$T(x,y) = (0.00242 + 0.3715 y \cos[323.258 x]) 1000 + 139.8495 \quad (4.1.24)$$

El análisis de las funciones encontradas a partir de los datos en bruto, evaluadas en estos mismos datos se ve resumido en la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Análisis de error de funciones  $T(x,y)$  en zona superficial 2 con datos en bruto.

Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio
4.1.1	2.77505	0.128581	4.1.13	2.7847	0.153203
4.1.2	2.77626	0.128598	4.1.14	2.77658	0.155424
4.1.3	2.78082	0.130666	4.1.15	2.77902	0.15544
4.1.4	2.78898	0.131938	4.1.16	2.7791	0.155442
4.1.5	2.70083	0.137255	4.1.17	2.64149	0.183029
4.1.6	2.81012	0.145473	4.1.18	2.63169	0.1858
4.1.7	2.8093	0.14801	4.1.19	2.46958	0.202277
4.1.8	2.81196	0.149977	4.1.20	2.46413	0.225139
4.1.9	2.80216	0.151615	4.1.21	2.45922	0.233828
4.1.10	2.79011	0.152661	4.1.22	2.53456	0.246738
4.1.11	2.79011	0.152663	4.1.23	2.62695	0.269165
4.1.12	2.78475	0.153204	4.1.24	2.37695	0.339435

Los resultados de verificación de funciones preseleccionadas en área mayor (zona superficial 3), correspondiente a un 55% de la superficie total aproximadamente, se ven en la tabla 4.2.

Como se observa que todas las funciones cumplen las condiciones de error bajo 5%, en la zona superficial 2, se le da mayor importancia al análisis sobre la zona superficial 3, que corresponde a los resultados de la tabla 4.2.

En la tabla 4.2 se ve que las funciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, y 4.1.20 tienen un error máximo que sobrepasa el 5%, por lo que son descartadas. De las funciones restantes se tiene que la que presenta un menor error máximo es la función 4.1.19, que además tiene un error promedio similar a las demás funciones. Por esto se elige la función 4.1.19 para continuar con la obtención de la conductividad térmica  $k(x,y)$ .

Tabla 4.2: Análisis de error de funciones  $T(x,y)$  en zona superficial 3 con datos en bruto.

Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio
4.1.1	23.3203	0.826417	4.1.13	4.09457	0.393078
4.1.2	23.3585	0.827843	4.1.14	4.19526	0.382214
4.1.3	19.8032	0.717552	4.1.15	4.20016	0.383545
4.1.4	11.2162	0.503751	4.1.16	4.20025	0.383715
4.1.5	6.42087	0.536747	4.1.17	3.80636	0.429412
4.1.6	3.72942	0.298497	4.1.18	3.77158	0.459043
4.1.7	3.78439	0.289185	4.1.19	3.45646	0.550847
4.1.8	3.86007	0.315415	4.1.20	466.512	2.39548
4.1.9	3.97145	0.349267	4.1.21	3.78628	0.640233
4.1.10	4.07165	0.385134	4.1.22	4.37779	0.814131
4.1.11	4.07163	0.38519	4.1.23	4.73359	0.933167
4.1.12	4.0947	0.393099	4.1.24	4.98652	1.13505

## **4.1.2. Análisis gráfico de primera función seleccionada $T(x,y)$**

### ***a. Análisis en zona superficial 2***

Para realizar un análisis gráfico de la función seleccionada, se utilizan tres tipos de gráficos. Primero se emplean gráficos que representen la evolución de la temperatura para una coordenada fija del eje  $x$ , o el eje  $y$ . Se

determina el uso de  $T(x = 0.007573964, y)$  ,  $T(x = 0.01183432, y)$  ,  $T(x, y = 0.007573964)$ , y  $T(x, y = 0.01183432)$ .

De esta forma se obtienen los gráficos que se muestran en las figuras 4.1, 4.2, 4.3, y 4.4.

Se puede observar en la figura 4.1, como hay una separación mayor entre las curvas de temperatura experimental y temperatura según la función 4.1.19, en el extremo derecho del eje  $x$ , lo que indica que en esa zona el error es un poco mayor. Algo similar se ve en la figura 4.2. Se la figura 4.3 puede rescatarse que para  $y$  menor a  $0.008$  [m], el error de la función  $T(x, y)$  también es mayor que para el resto del eje  $y$ .

Además, se grafican las superficies de temperatura evaluada en la función, junto con la superficie de temperatura experimental, de forma de comparar el ajuste de la función seleccionada, en la figura 4.5. También se grafica el error en cada punto de la superficie para la función  $T(x, y)$ , como se ve en la figura 4.6.

De las figuras 4.5 y 4.6 se desprende que el error de la función seleccionada es muy bajo a lo largo y ancho de la zona superficial 2, presentando solo algunos puntos donde el error sube un poco, pero lejos del 5% establecido como límite aceptable.

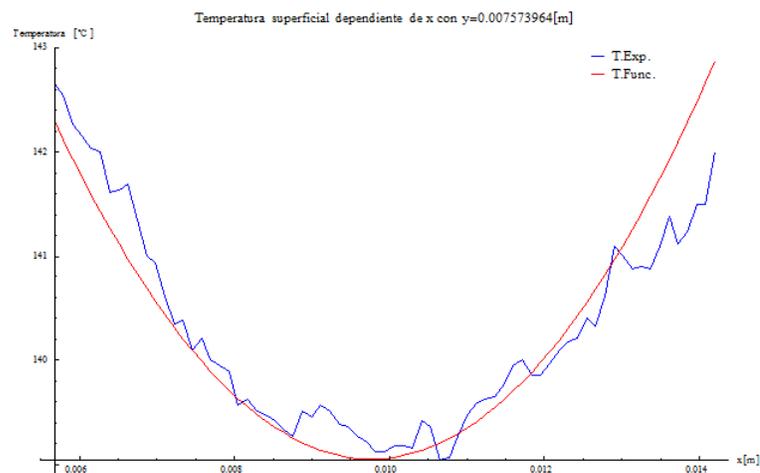


Figura 4.1: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje  $x$  para  $y=0.007573964$  [m] en zona superficial 2.

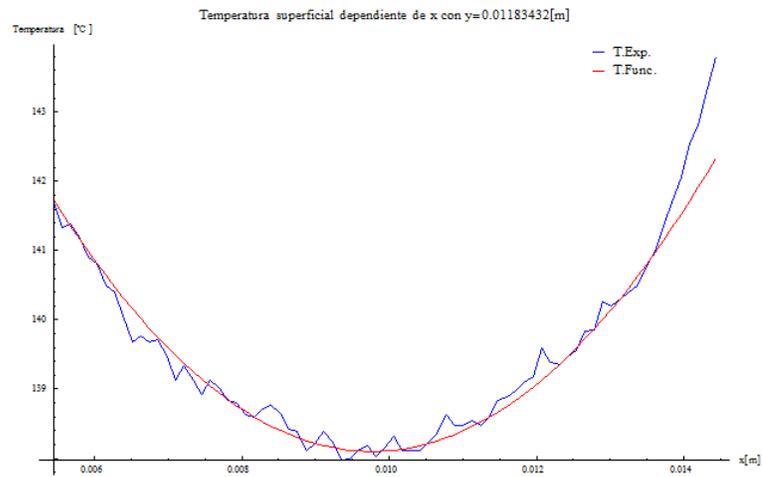


Figura 4.2: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje x para  $y=0.01183432[m]$  en zona superficial 2.

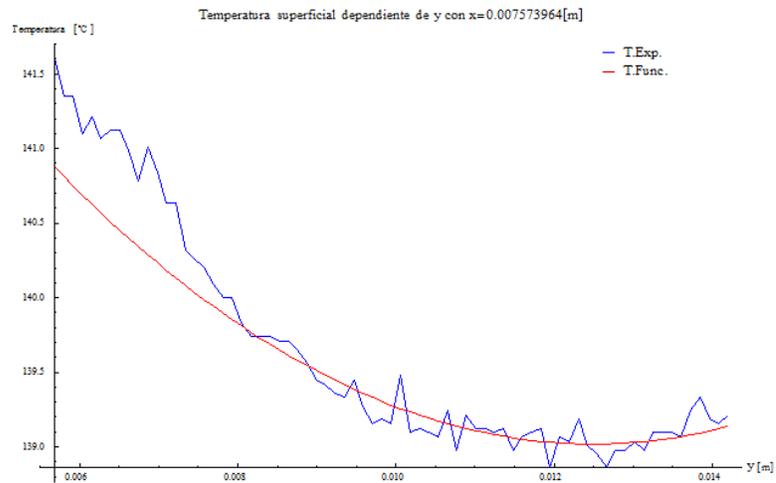


Figura 4.3: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje y para  $x=0.007573964[m]$  en zona superficial 2.

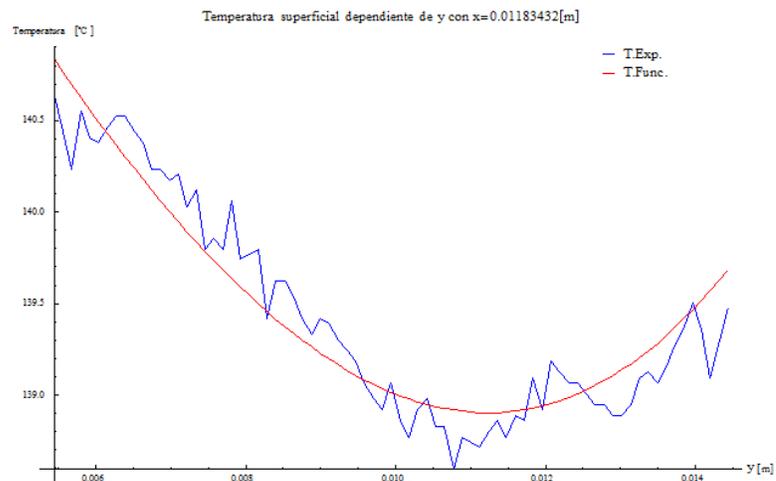


Figura 4.4: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje y para  $x=0.01183432[m]$  en zona superficial 2.

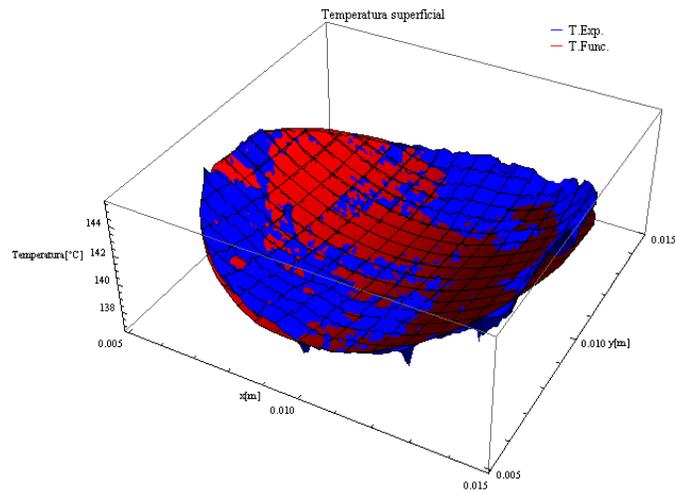


Figura 4.5: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 en zona superficial 2.

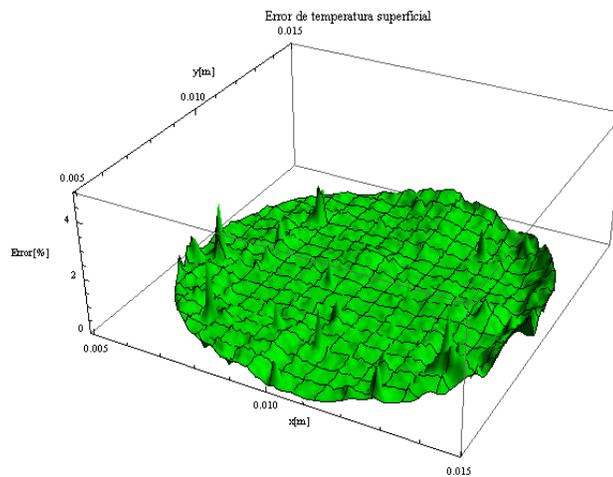


Figura 4.6: Gráfico superficial de error para función de temperatura 4.1.19 en zona superficial 2.

### ***a. Análisis en zona superficial 3***

El análisis para la zona superficial 3 se realiza de la misma forma que para la zona superficial analizada anteriormente, utilizando los mismos tipos de gráficos, cuyos resultados se observan las figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, y 4.12.

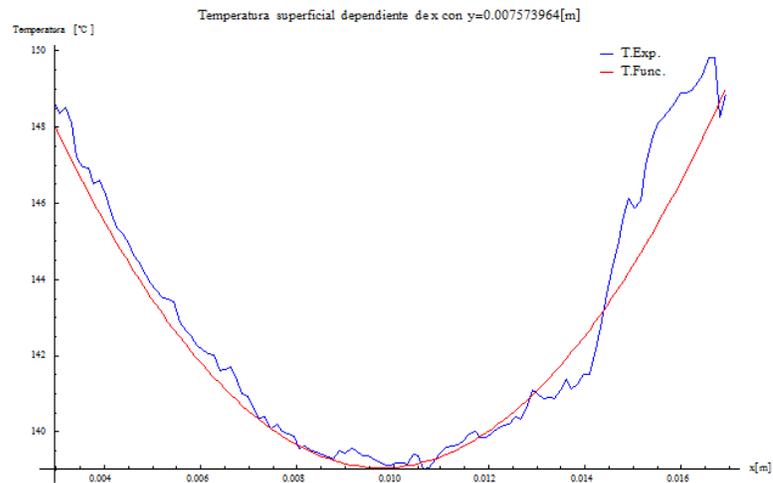


Figura 4.7: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje x para  $y=0.007573964[m]$  en zona superficial 3.

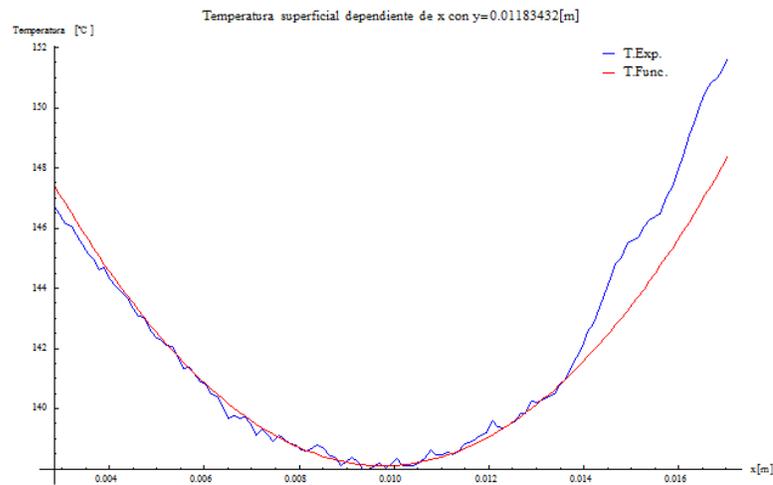


Figura 4.8: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje x para  $y=0.01183432[m]$  en zona superficial 3.

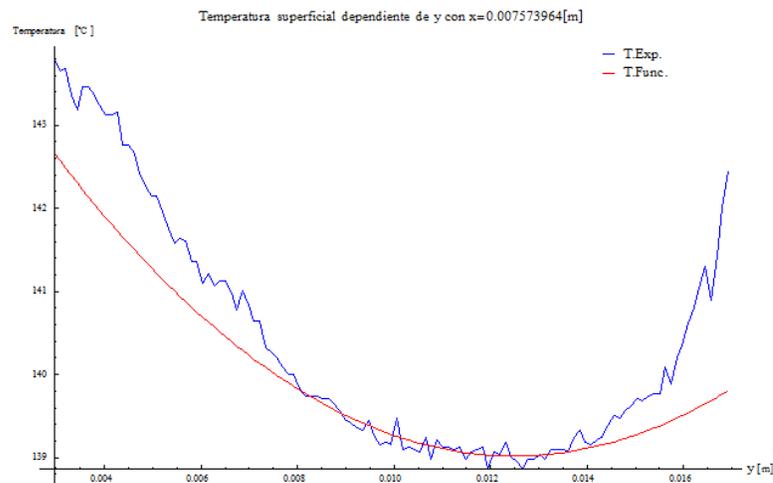


Figura 4.9: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje y para  $x=0.007573964[m]$  en zona superficial 3.

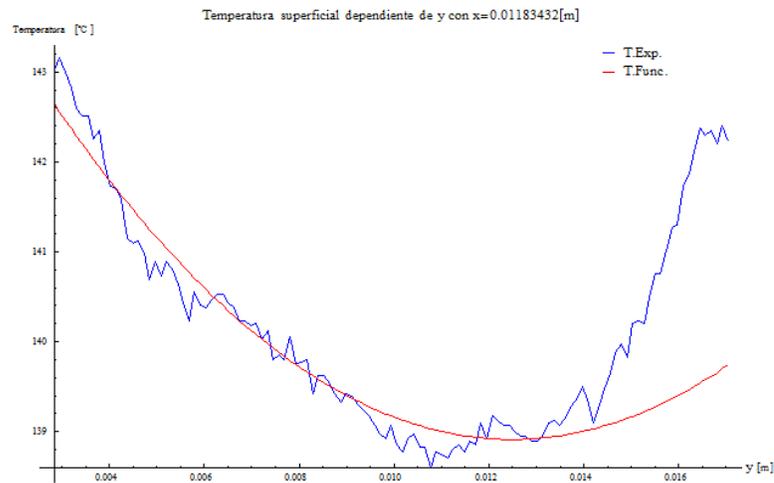


Figura 4.10: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 a lo largo del eje  $y$  y para  $x=0.01183432$ [m] en zona superficial 3.

De las figuras 4.7 y 4.8 se ve que se conserva la tendencia a que el error de la función  $T(x,y)$  se magnifique sobretodo en el eje  $x$  para valores sobre 0.014 [m].

En el eje  $y$ , según lo que se observa en las figuras 4.9 y 4.10, el error de la función de temperatura se incrementa respecto al caso del análisis sobre la zona superficial 2, en especial en ambos extremos del eje.

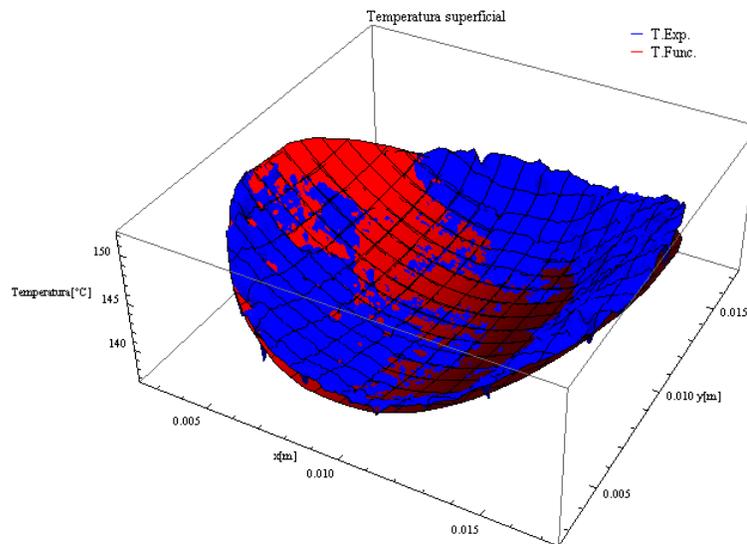


Figura 4.11: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 4.1.19 en zona superficial 3.

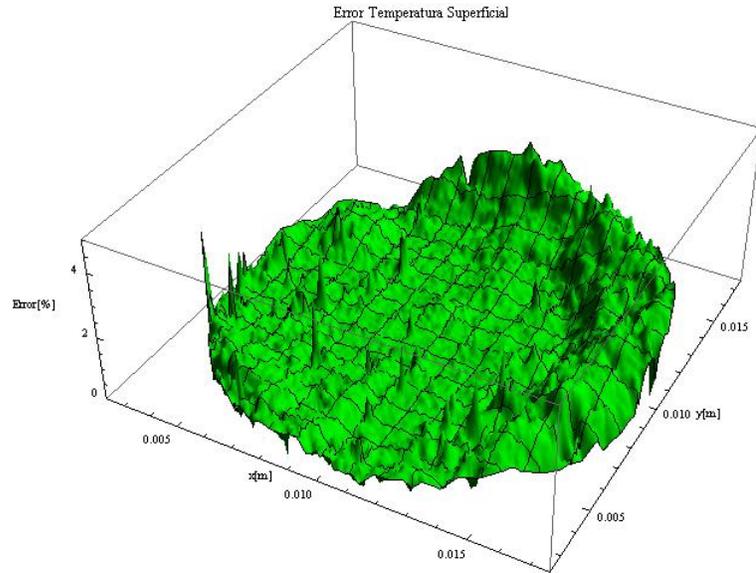


Figura 4.12: Gráfico superficial de error para función de temperatura 4.1.19 en zona superficial 3.

Los gráficos superficiales de las figuras 4.11 y 4.12 ratifican el comportamiento de la función 4.1.19 en la zona superficial 3. Para los extremos de valores mayores de cada eje, la temperatura según la función es claramente menor a la temperatura experimental y por ende su error es mayor al promedio sobre toda la superficie analizada.

### 4.1.3. Funciones $T(x, y)$ encontradas a partir de datos suavizados

Si la búsqueda de funciones  $T(x, y)$  en Eureka se realiza tomando datos experimentales de temperatura suavizados por convolución gaussiana, se obtienen las siguientes 23 funciones.

$$T(x, y) = \left( 0.0281 + \frac{242.98 x^2}{\text{Cos}[\text{Sin}[2.72 + \text{Tan}[11490125 x^4]]]} - y \text{Sin}[1.96 + 28.25 x + 2397 y^2] - 4.89 x \right) 1000 + 139.773 \quad (4.2.1)$$

$$T(x, y) = \left( 0.0281 + \frac{243.22 x^2}{\text{Cos}[\text{Sin}[5.87 + \text{Tan}[11190236 x^4]]]} - y \text{Sin}[1.96 + 28.4 x + 2400 y^2] - 4.89 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.2)$$

$$T(x, y) = \left( 0.028 + \frac{243.02 x^2}{\text{Cos}[\text{Sin}[5.86 + 12085888 x^4]]]} - y \text{Sin}[1.96 + 28.4 x + 2400 y^2] - 4.89 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.3)$$

$$T(x, y) = \left( 0.028 + \frac{242.96 x^2}{\text{Cos}[5.88 + 1.27 \times 10^7 x^4 - 242.96 x^2]} - y \text{Sin}[1.96 + 28.5 x + 2402 y^2] - 4.89 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.4)$$

$$T(x, y) = \left( 0.028 \frac{242 x^2}{\text{Cos}[5.876+11915806 x^4-x]} - y \text{Sin}[1.95 + 28.74 x + 2402 y^2] - 4.86 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.5)$$

$$T(x, y) = \left( 0.028 + \frac{242.39 x^2}{\text{Cos}[5.87+1.177 \times 10^7 x^4]} - y \text{Sin}[1.96 + 28.65 x + 2398 y^2] - 4.87 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.6)$$

$$T(x, y) = \left( 0.026 + \frac{210.65 x^2}{\text{Cos}[5.89+167669 x^3]} - y \text{Sin}[1.95 + 30.49 x + 2370 y^2] - 4.28 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.7)$$

$$T(x, y) = \left( 0.024 + \frac{189.71 x^2}{\text{Cos}[5.85+2774 x^2]} - y \text{Sin}[1.94 + 31.53 x + 2359 y^2] - 3.9 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.8)$$

$$T(x, y) = \left( 0.024 + \frac{189 x^2}{\text{Cos}[5.56+56.27 x]} - y \text{Sin}[1.94 + 32.05 x + 2355 y^2] - 3.87 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.9)$$

$$T(x, y) = \left( 0.025 + \frac{182.8 x^2}{\text{Cos}[13.9 x]} - y \text{Sin}[1.94 + 31.62 x + 2349 y^2] - 3.91 x \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.10)$$

$$T(x, y) = (0.025 + \text{Tan}[x + 190.9 x^2] - y \text{Sin}[1.94 + 31.27 x + 2352 y^2] - 4.99 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.11)$$

$$T(x, y) = (\text{Tan}[0.025 + 190.74 x^2] - y \text{Sin}[1.94 + 31.37 x + 2355 y^2] - 4 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.12)$$

$$T(x, y) = (0.025 + 191.6 x^2 - y \text{Sin}[1.94 + 31.42 x + 2354 y^2] - 4 \text{Sin}[x]) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.13)$$

$$T(x, y) = (0.025 + 191.62 x^2 - y \text{Sin}[1.94 + 31.42 x + 2354 y^2] - 4 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.14)$$

$$T(x, y) = (0.026 + 191.39 x^2 - y \text{Sin}[1.39 + 69.05 y + 28.68 x] - 3.96 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.15)$$

$$T(x, y) = (0.025 + 190.23 x^2 - y \text{Cos}[60.25 y + 25 x] - 3.91 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.16)$$

$$T(x, y) = (0.024 + 194.45 x^2 - y \text{Cos}[x + 73.99 y] - 3.81 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.17)$$

$$T(x, y) = (0.024 + 194.75 x^2 - y \text{Cos}[74.59 y] - 3.8 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.18)$$

$$T(x, y) = (0.023 + 188.52 x^2 + 40.17 y^2 - y - 3.68 x) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.19)$$

$$T(x, y) = \left( 0.0015 + \frac{8.5 \times 10^{-6}}{(y-0.00298)} + 0.00412 \text{Cos}[320.53 x] \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.20)$$

$$T(x, y) = \left( 0.000753 + \frac{1.99 \times 10^{-5}}{y} + 0.0041 \text{Cos}[320.76 x] \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.21)$$

$$T(x, y) = \left( \frac{2.435 \times 10^{-5}}{y} + 0.0038 \text{Cos}[320.96 x] \right) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.22)$$

$$T(x, y) = (0.00234 + 0.352 y \text{Cos}[324.69 x]) 1000 + 139.77278 \quad (4.2.23)$$

En la tabla 4.3, se entrega el resumen del análisis realizado para las funciones encontradas a partir de los datos suavizados, evaluadas en los datos suavizados de la sección superficial determinada.

A partir de lo que se observa en la tabla 4.3, cabe destacar que en ningún caso, ninguna función tiene un error máximo que sobrepase el 5% establecido como cota superior. Es más, en ninguna función el error máximo alcanza el 2%. En tanto el error promedio para las funciones no llega al 0.5%. Estos resultados indican que las funciones encontradas tienen muy buena precisión, por lo que para poder escoger las funciones de temperatura

que mejor representen el fenómeno, éstas se deben evaluar en una zona superficial mayor del material catalizador.

Tabla 4.3: Análisis de error de funciones  $T(x,y)$  en zona superficial 2 con datos suavizados.

Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio
4.2.1	1.02579	0.101622	4.2.13	1.14383	0.123073
4.2.2	1.02828	0.102285	4.2.14	1.14414	0.123075
4.2.3	1.02806	0.103671	4.2.15	1.15995	0.123258
4.2.4	1.02935	0.103654	4.2.16	1.14861	0.127236
4.2.5	-	-	4.2.17	1.14488	0.155661
4.2.6	1.03045	0.104342	4.2.18	1.14873	0.157763
4.2.7	1.05272	0.11312	4.2.19	1.16512	0.1757
4.2.8	1.0687	0.118644	4.2.20	1.43843	0.20741
4.2.9	1.07103	0.121381	4.2.21	1.44196	0.219481
4.2.10	1.08476	0.122413	4.2.22	1.68358	0.241535
4.2.11	1.13704	0.122972	4.2.23	1.65431	0.309491
4.2.12	1.13774	0.122975			

Los resultados de la verificación en la zona superficial 3, correspondiente al 55% del área total, con datos en bruto de temperatura experimental, de las funciones preseleccionadas se ven en la tabla 4.4.

Tabla 4.4: Análisis de error de funciones  $T(x,y)$  en zona superficial 3 con datos en bruto.

Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y)$	Error Máximo	Error Promedio
4.2.1	34.5102	0.999983	4.2.13	4.12475	0.387406
4.2.2	67.202	1.18838	4.2.14	4.12478	0.387491
4.2.3	11.4273	0.51685	4.2.15	4.13498	0.398373
4.2.4	13.6935	0.55509	4.2.16	3.96557	0.436211
4.2.5	-	-	4.2.17	3.68816	0.448258
4.2.6	12.4975	0.52208	4.2.18	3.68242	0.450485
4.2.7	5.37313	0.315351	4.2.19	3.28792	0.573991
4.2.8	3.73229	0.280164	4.2.20	310.545	2.76473
4.2.9	3.74233	0.311022	4.2.21	4.54477	0.850108
4.2.10	4.08603	0.367191	4.2.22	4.8932	0.96708
4.2.11	4.11629	0.385293	4.2.23	4.86189	1.16881
4.2.12	4.11923	0.385113			

Lo que se puede observar en la tabla 4.4, es que las funciones 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.6, 4.2.7, y 4.2.20 tienen errores máximos que sobrepasan el 5%. Por otra parte, el error promedio de cada función se mantiene bajo el 5%, por lo que el criterio para seleccionar una función se basa principalmente en la función que tenga un menor error máximo. La función que se selecciona es la 4.2.19 que tiene un error máximo de 3.28792%, el menor de todas las funciones, y que además mantiene un error promedio bastante bajo de 0.574%.

#### **4.1.4. Análisis gráfico de segunda función seleccionada $T(x, y)$**

##### ***a. Análisis en zona superficial 2***

Se generan gráficos para las posiciones de  $T(x = 0.007573964, y)$ ,  $T(x = 0.01183432, y)$ ,  $T(x, y = 0.007573964)$ , y  $T(x, y = 0.01183432)$  para la función 4.2.19. Estos gráficos se muestran en las figuras 4.13, 4.14, 4.15, y 4.16.

La similitud entre las curvas de temperatura experimental (color azul) y la temperatura dada por la función (color rojo), es considerada suficiente, por lo que se puede decir que la función  $T(x, y)$  predice bien el comportamiento térmico.

Puede observarse, en las figuras 4.13, 4.14, 4.15, y 4.16, como los resultados son muy parecidos a los obtenidos para la función 4.1.19. Se perciben las mismas tendencias de mayor error en los extremos de los ejes  $x$  e  $y$ .

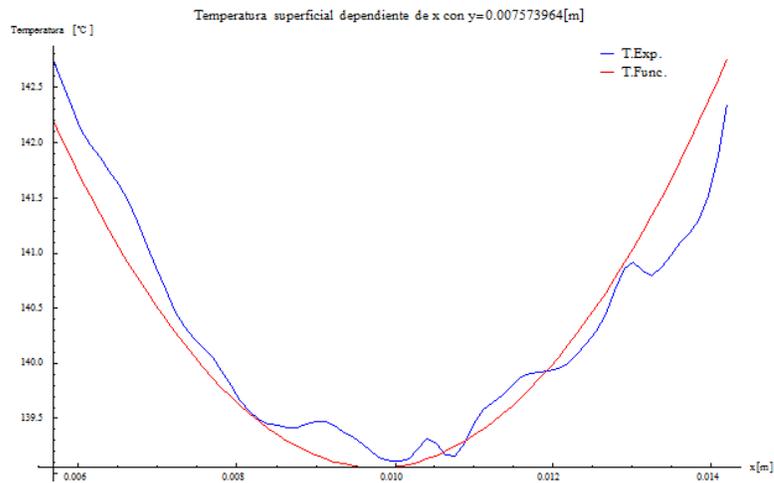


Figura 4.13: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje x para  $y=0.0075733964[m]$  en zona superficial 2.

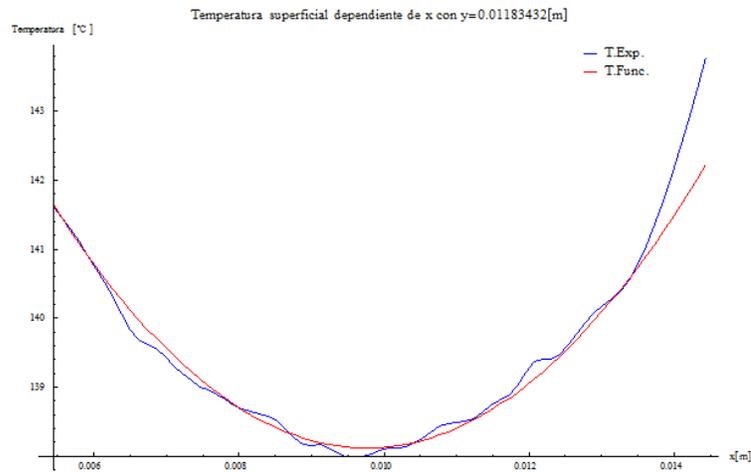


Figura 4.14: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje x para  $y=0.01183432[m]$  en zona superficial 2.

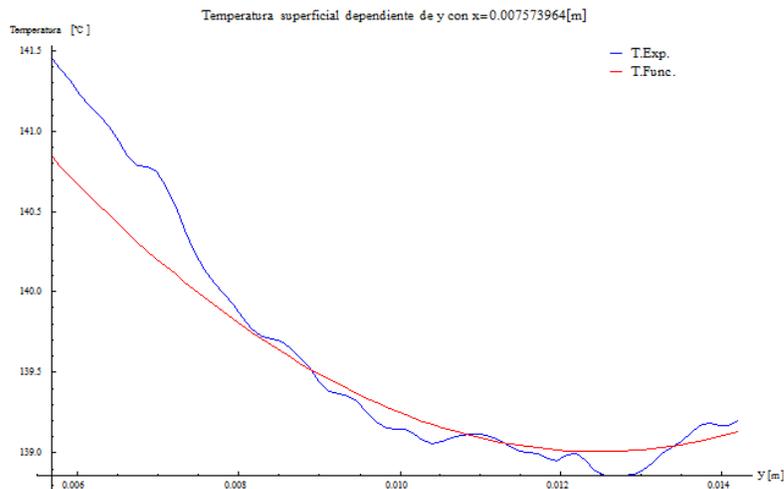


Figura 4.15: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje y para  $x=0.0075733964[m]$  en zona superficial 2.

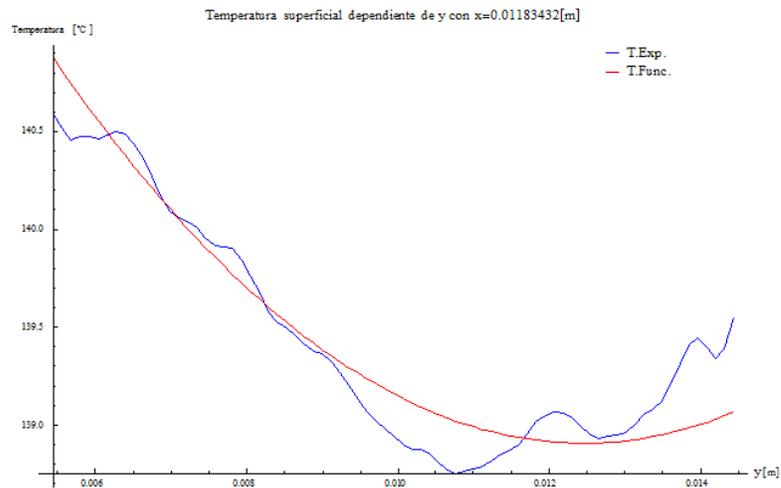


Figura 4.16: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje y para  $x=0.01183432[m]$  en zona superficial 2.

Además se analiza la función con los gráficos de superficie, que contrastan las distribuciones de temperatura del caso experimental y del dado por la función, junto con el gráfico de la distribución de error, como se ve en las figuras 4.17, y 4.18. Estas figuras dejan ver el bajo error distribuido a través de toda la superficie, lo que explica el error promedio de 0.17% en la zona superficial 2.

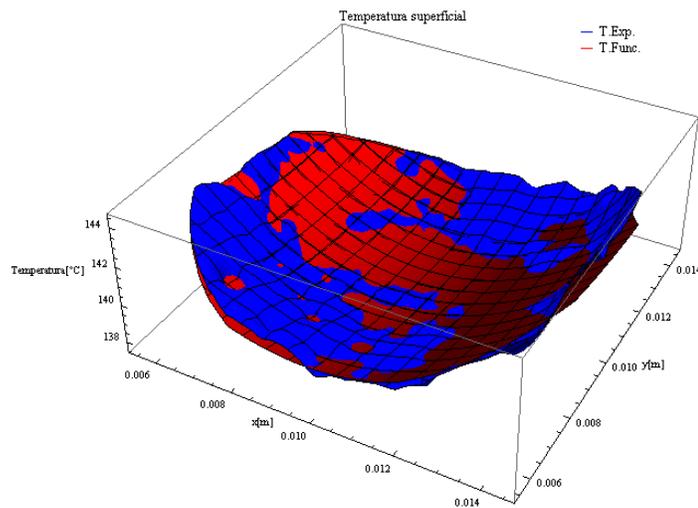


Figura 4.17: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 en zona superficial 2.

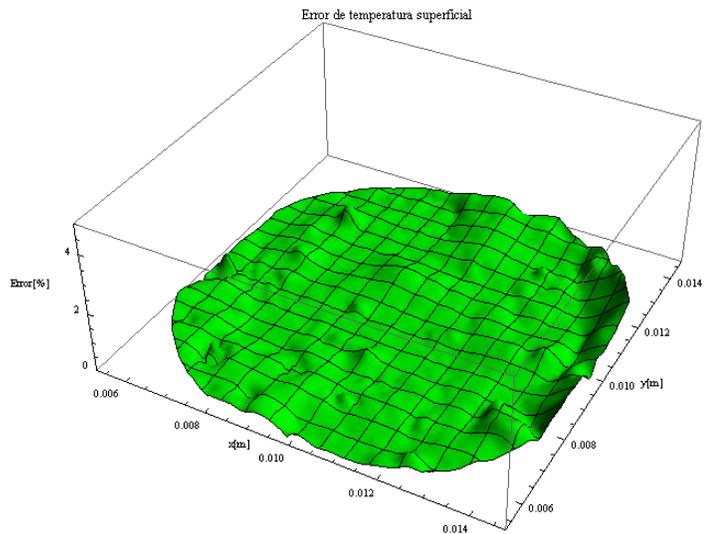


Figura 4.18: Gráfico superficial de error para función de temperatura 4.2.19 en zona superficial 2.

### ***b. Análisis en zona superficial 3***

En primera instancia se usan gráficos que demuestre la evolución de la temperatura a través de una posición en  $x$ , o  $y$  fija. Se utilizan las mismas coordenadas que en el análisis de la sección 3.1.2.,  $T(x = 0.007573964, y)$ ,  $T(x = 0.01183432, y)$ ,  $T(x, y = 0.007573964)$ , y  $T(x, y = 0.01183432)$ . Estos gráficos pueden verse en las figuras 4.19, 4.20, 4.21, y 4.22.

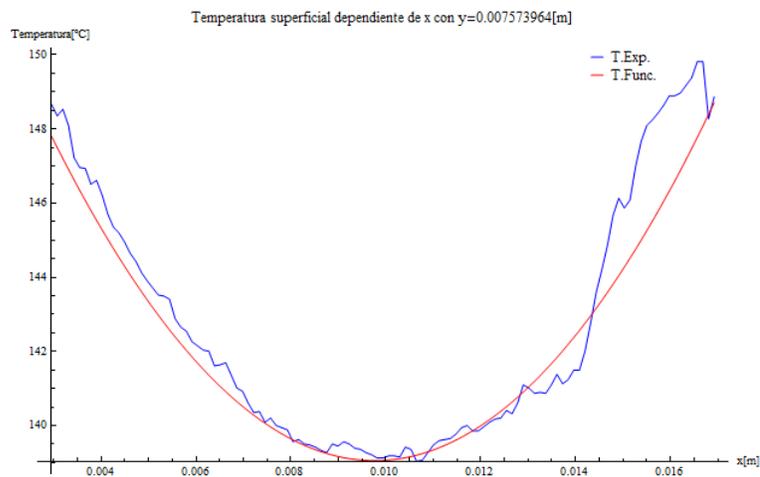


Figura 4.19: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje  $x$  para  $y=0.0075733964$ [m] en zona superficial 3.

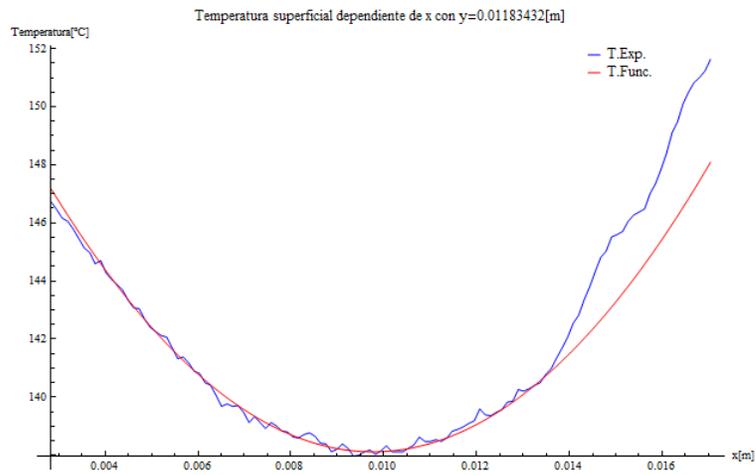


Figura 4.20: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje x para  $y=0.01183432$ [m] en zona superficial 3.

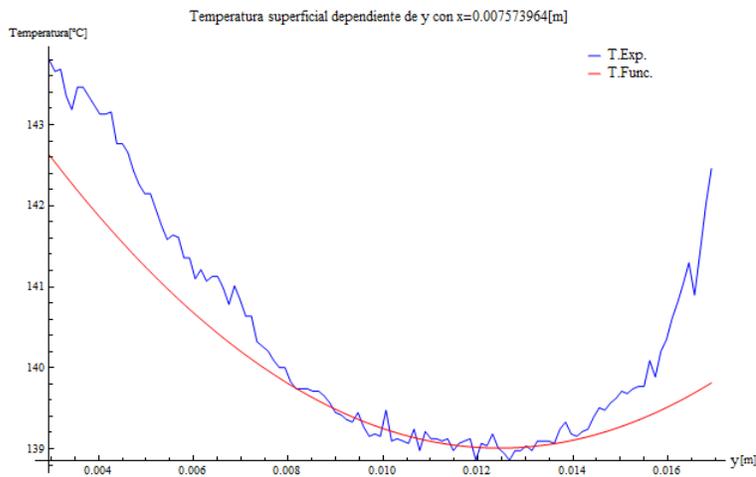


Figura 4.21: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje y para  $x=0.0075733964$ [m] en zona superficial 3.

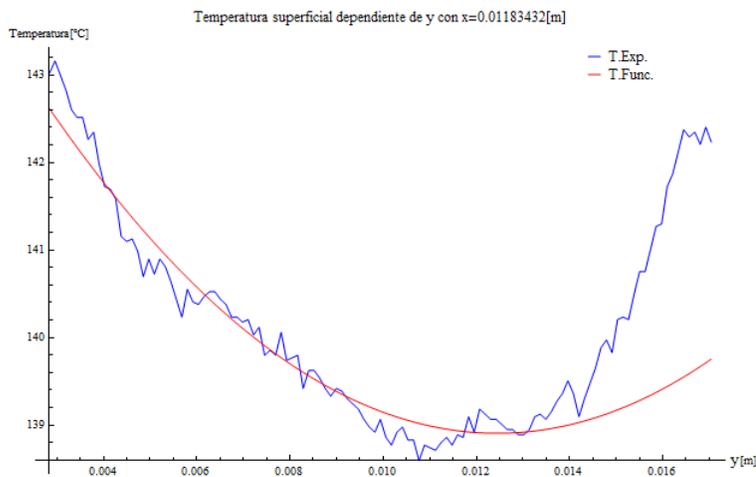


Figura 4.22: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 a lo largo del eje y para  $x=0.01183432$ [m] en zona superficial 3.

Las figuras 4.19, 4.20, 4.21, y 4.22 confirman la tendencia de que el error en los extremos de los ejes  $x$  e  $y$  tienda a incrementarse. Esto era esperado porque la función 4.2.19 tiene la misma forma que la función 4.1.19, variando sólo algunos de sus términos, entonces se comporta de forma prácticamente idéntica.

También se muestran los gráficos superficiales de temperatura, y error, en las figuras 4.23, y 4.24.

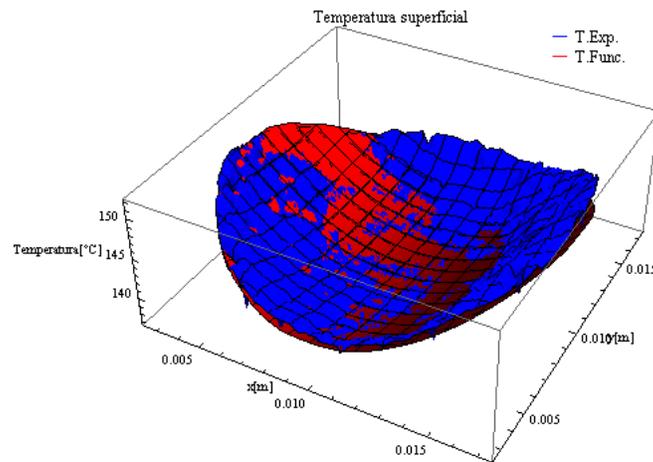


Figura 4.23: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 4.2.19 en zona superficial 3.

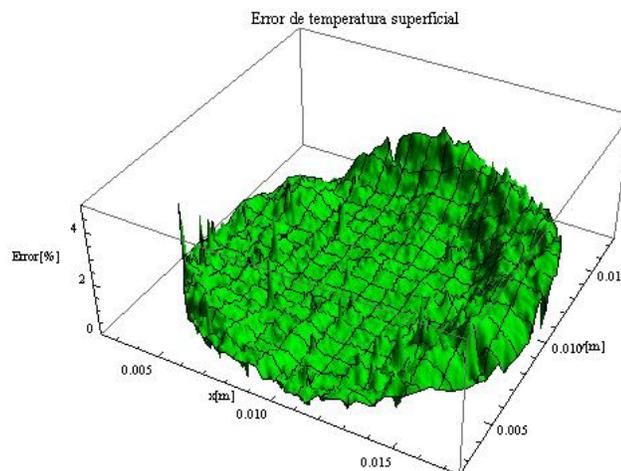


Figura 4.24: Gráfico superficial de error para función de temperatura 4.2.19 en zona superficial 3.

De la figura 4.23 y 4.24, se puede ver como existe una mayor diferencia entre las temperaturas experimentales y las conseguidas mediante la función 4.2.19 para el borde de la zona superficial 3 cuando los valores de  $x$  e  $y$  se acercan a los extremos más alejados del origen.

#### **4.1.5. Discusión de resultados de funciones $T(x, y)$**

De lo que se aprecia en los resultados de la búsqueda de funciones de temperatura superficial que modelen la distribución de temperatura obtenida mediante las imágenes termográficas, el uso del software de regresión simbólica Eureka, dio muy buenos resultados por entregar una variada cantidad de funciones, las que se ajustan muy bien a los datos experimentales.

Los resultados son mejores en la zona de la pastilla que se ocupó para generar los datos que se le entregaron a Eureka para trabajar, y al ampliar el análisis posterior a una superficie mayor, las funciones mostraron errores mayores, pero aún dentro de los rangos establecidos como aceptables.

En los extremos de los ejes  $x$  e  $y$  tiende a aumentar el error de las funciones, producto de que en los datos experimentales de temperatura se ve un crecimiento más acelerado en estas zonas. Esta diferencia puede explicarse por la acción de los calefactores del reactor cerca de estas zonas, lo que influiría en que allí el gradiente de temperatura sea mayor respecto al que se puede encontrar en el centro de la pastilla.

Comparando los resultados obtenidos al utilizar datos experimentales de temperatura en bruto y suavizados, no se nota mayor diferencia. En efecto, el suavizado de los datos puede disminuir el tiempo de búsqueda que toma Eureka encontrando las funciones, pero en definitiva los resultados de las funciones son muy parecidos, y la reducción de tiempo de búsqueda de funciones no es suficiente para justificar el suavizado de los datos.

Debe tomarse en cuenta que las funciones encontradas pueden variar dependiendo de los bloques de construcción que se seleccionen la configurar Eureka, ya que pudieran encontrarse funciones aún mejor ajustadas a los

datos, pero que también pueden resultar mucho más complejas que las expuestas en este trabajo.

## 4.2. Conductividad térmica $k(x, y)$

### 4.2.1. Método analítico

Para encontrar la conductividad térmica, se utilizan entonces las dos funciones de temperatura superficial escogidas, 4.1.19 y 4.2.19. Estas funciones se pueden simplificar, quedando finalmente las funciones 4.3 y 4.4 para trabajar. Nótese que las unidades de temperatura han sido cambiadas a grados Kelvin. Debido a que las dos funciones de temperatura eran muy similares, se modificó levemente la función 4.2.19, eliminando el término que menor influencia tenía en la ecuación, por lo que se observa una diferencia en el último término de las ecuaciones 4.3 y 4.4.

$$T(x, y) = 436.04 + x(-3800.17 + 194507 * x) + y(-1000 + 40023.8 * y) \text{ [K]} \quad (4.3)$$

$$T(x, y) = 435.462 + x(-3682.91 + 188520 * x) - 1000 * y \text{ [K]} \quad (4.4)$$

La expresión de conductividad térmica se busca a partir de las funciones de temperatura  $T(x, y)$  y de la ecuación 3.3, que puede ser simplificada quedando como se tiene en la ecuación 4.5.

$$0 = \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} + k(x, y) \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (4.5)$$

Utilizando Mathematica y la ecuación 4.3, se tiene que la ecuación 4.5 queda expresada cómo se ve en la ecuación 4.6.

$$(1000 - 80047.6 * y) \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} + (3800.17 - 389015 * x) \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} = 469062 * k(x, y) \quad (4.6)$$

Luego, utilizando el comando DSolve, que resuelve ecuaciones diferenciales en Mathematica, se obtiene una expresión de la conductividad térmica dependiente de la posición (ecuación 4.7), donde  $C$  es una constante.

$$k(x, y) = \frac{\left( \frac{y}{(3800.17-389015*x)^{0.20577}} - \frac{0.0124926}{(3800.17-389015*x)^{0.20577}} \right) * C}{(3800.17-389015*x)^{1.20577}} \quad (4.7)$$

La constante  $C$  está incorporada a la expresión de forma tal que no influye en la forma de esta, sino que solamente la desplaza en el rango de valores de conductividad térmica.

Se realiza el mismo procedimiento para la función de temperatura representada por la ecuación 4.4. Utilizando esta función en la ecuación 4.5, se obtiene la ecuación 4.8.

$$1000 * \frac{\partial k(x,y)}{\partial y} + (3682.91 - 377040 * x) \frac{\partial k(x,y)}{\partial x} = 377040 * k(x,y) \quad (4.8)$$

Después, resolviendo la ecuación se obtiene finalmente la expresión de conductividad térmica (ecuación 4.9).

$$k(x, y) = \frac{(y+0.00265224 \text{ Log}(3682.91-377040*x))*C}{3682.91-377040*x} \quad (4.9)$$

Las dos expresiones obtenidas para  $k(x, y)$  son analizadas gráficamente en el dominio de  $x$  e  $y$ , correspondiente a la zona superficial 2, misma área utilizada para generar las funciones  $T(x, y)$  con las que se llegó a las funciones de conductividad térmica.

En la figura 4.25, se muestra la función  $k(x, y)$  correspondiente a la ecuación 4.7. La constante  $C$  se considera con un valor igual a 1.

El valor de la constante  $C$  afecta sólo la amplitud de los valores de la función, como se ve en la figura 4.26, donde  $C = 10000$ .

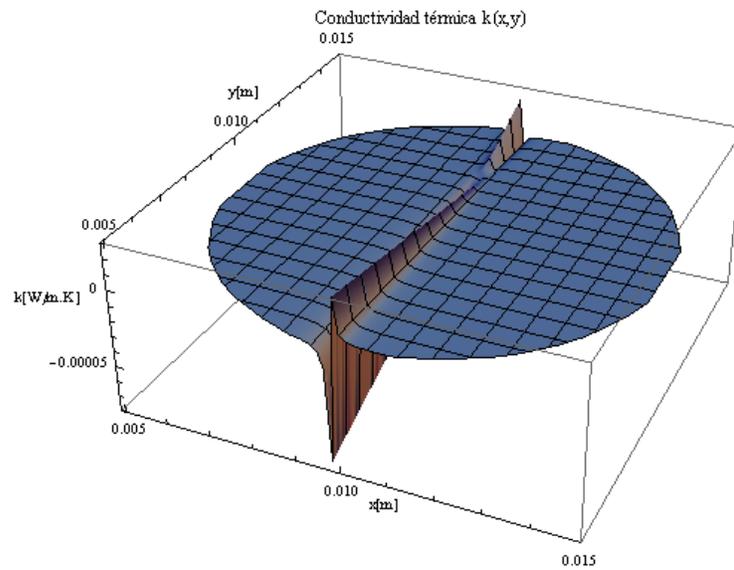


Figura 4.25: Gráfico superficial de conductividad térmica según ecuación 4.7 en zona superficial 2 con  $C=1$ .

También se generan gráficos del comportamiento de  $k(x,y)$  para la evolución a lo largo del eje  $x$  con  $y = 0.007573964 [m]$  y  $y = 0.01183432 [m]$ , con  $C = 1$ . Estos se presentan en las figuras 4.27, y 4.28, donde se ven valores negativos para la conductividad térmica. La función se indefinice para una posición determinada en el eje  $x$  ( $x = 0.0097687[m]$ ) que genera un denominador nulo en la expresión.

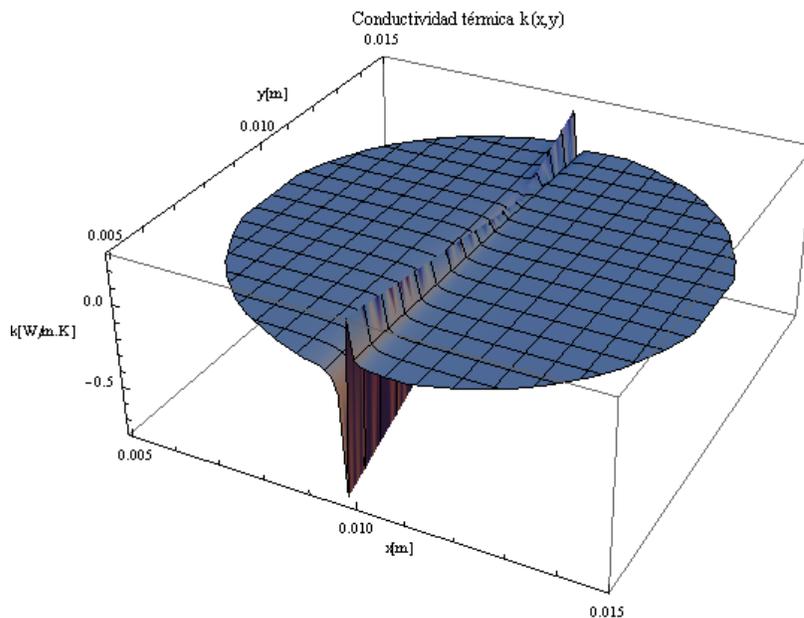


Figura 4.26: Gráfico superficial de conductividad térmica según ecuación 4.7 en zona superficial 2 con  $C=10000$ .

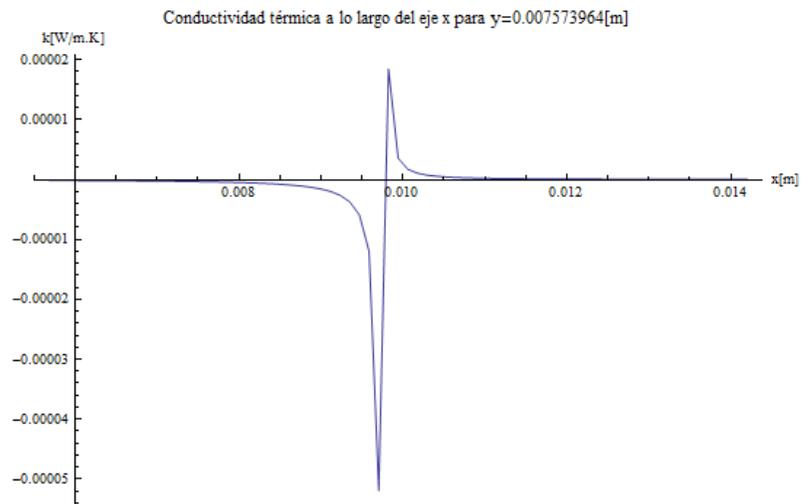


Figura 4.27: Evolución de conductividad térmica según ecuación 4.7 en eje x con  $y=0.007574[m]$  en zona superficial 2 con  $C=1$ .

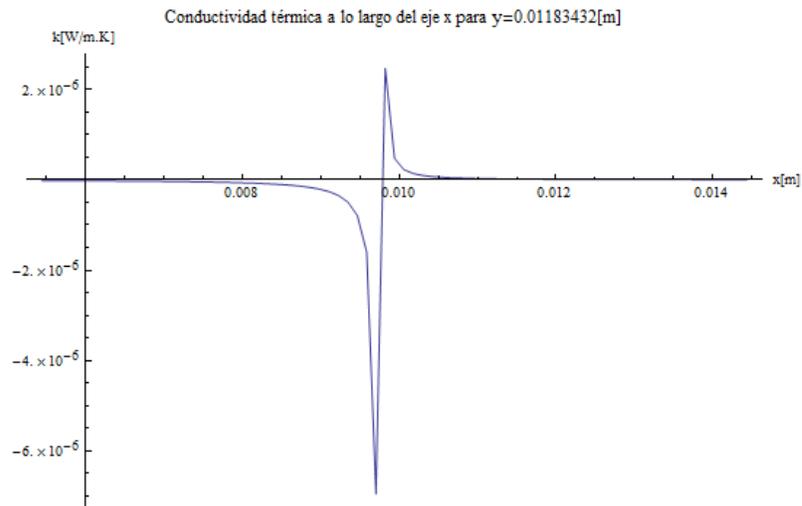


Figura 4.28: Evolución de conductividad térmica según ecuación 4.7 en eje x con  $y=0.011834[m]$  en zona superficial 2 con  $C=1$ .

Similar resultado se obtiene al analizar la función  $k(x,y)$  de la ecuación 4.9, como se ve en las figuras 4.29, 4.30, y 4.31.

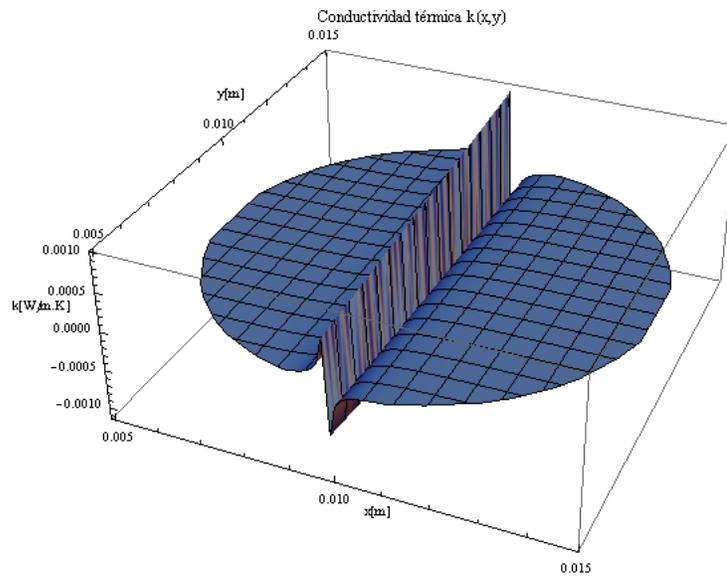


Figura 4.29: Gráfico superficial de conductividad térmica según ecuación 4.9 en zona superficial 2 con  $C=1$ .

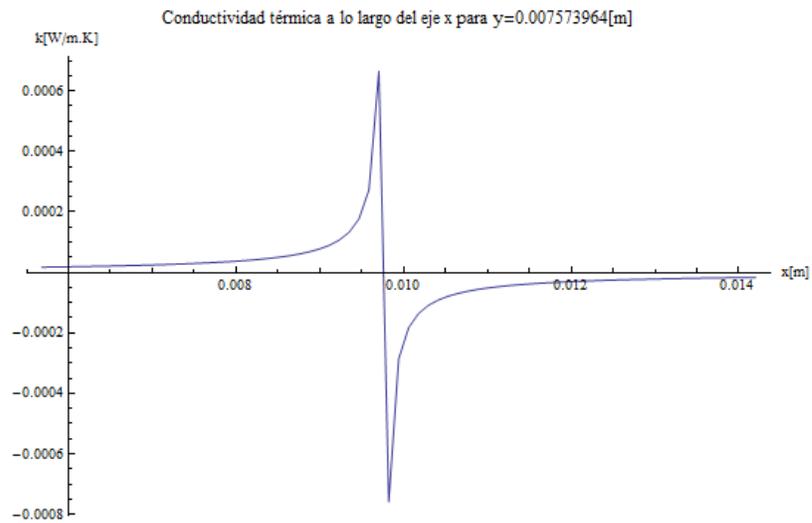


Figura 4.30: Evolución de conductividad térmica según ecuación 4.9 en eje  $x$  con  $y=0.007574[m]$  en zona superficial 2 con  $C=1$ .

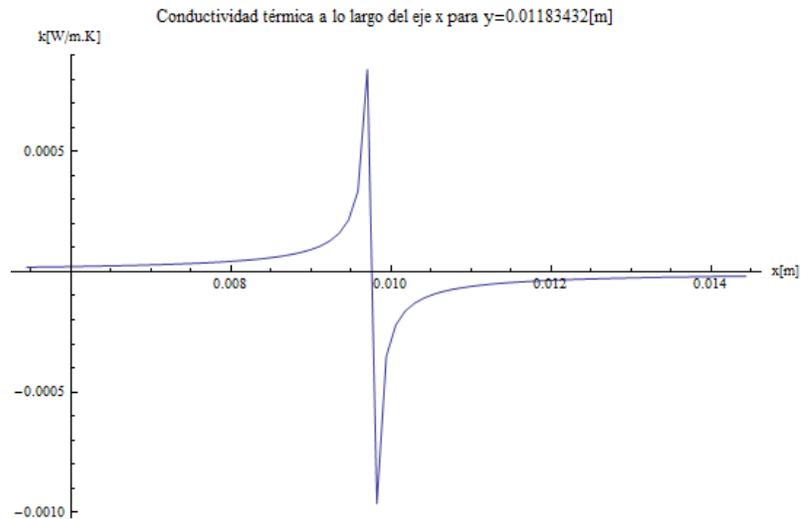


Figura 4.31: Evolución de conductividad térmica según ecuación 4.9 en eje x con  $y=0.011834$ [m] en zona superficial 2 con  $C=1$ .

Para esta función  $k(x,y)$  también se tiene un valor en  $x$  en la que no está definida ( $x=0.0097679$ [m]), y también presenta valores menores a cero en una zona.

Frente a lo observado se intentó repetir el proceso utilizando otras funciones  $T(x,y)$ , pero muchas de estas funciones son lo suficientemente complejas como para no poder resolver la ecuación diferencial 4.5, o mostraron resultados similares a los obtenidos con las funciones 4.1.19 y 4.2.19.

#### 4.2.2. Método numérico

Para llevar a cabo la búsqueda de una expresión de conductividad térmica por un método numérico, se tiene primero la matriz correspondiente a la temperatura superficial experimental del frame 10000 del video termográfico. Se escoge trabajar con la función  $T(x,y)$  de temperatura superficial 4.1.19, encontrada a partir de datos de temperatura en bruto, pues mostró un menor error promedio al ser evaluada en la zona superficial 3. Entonces, se crea la matriz de temperatura calculada a partir de esta función  $T(x,y)$ . Esta matriz es llamada  $T_{exp}$ . Para esto se considera un área de  $74 \times 74$  pixeles, centrada en la pastilla.

A continuación se genera la matriz inicial de temperatura calculada durante la iteración. Esta matriz recibe el nombre de matriz  $T$ , y su forma inicial tiene a sus dos primeras filas y columnas con valores idénticos a los de la matriz  $T_{exp}$  en esas posiciones, para poder calcular el resto de la matriz mediante diferencias finitas.

Luego se crea la matriz inicial de conductividad térmica  $k$  con valores aleatorios entre 0 y 0.1.

Se sigue la metodología planteada en la parte f de la sección 3.2.1, con lo que se obtiene una matriz  $T$  y  $k$  final.

La matriz de temperatura calculada tiene un error mínimo de 0%, un error máximo de 2.726%, y un error promedio de 0.834% con respecto a la temperatura según la función 4.1.19.

En la figura 4.32 se observa la comparación entre la temperatura según la función  $T(x, y)$  (azul), y la temperatura calculada mediante la iteración (rojo). Claramente la diferencia entre ambas estimaciones de temperatura es menor, por lo que se entiende que el resultado es bueno.

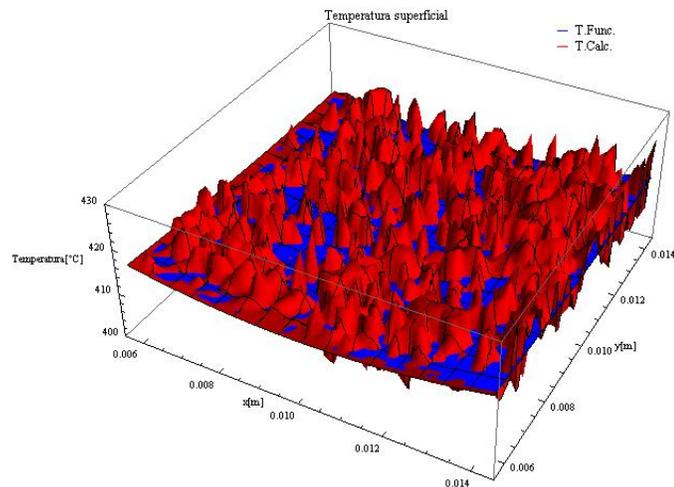


Figura 4.32: Gráfico superficial de temperatura según  $T(x,y)$  y temperatura calculada.

En las figuras 4.33 y 4.34 se observan dos gráficos de puntos, que representan cada punto de la matriz  $T_{exp}$  (azul) y  $T$  (rojo). Estos gráficos se diferencian del de la figura 4.28 porque en estos no hay una interpolación entre cada punto de las matrices, lo que en definitiva crea la superficie. Con estos gráficos se puede ver de mejor forma la dispersión de los valores de la matriz de conductividad térmica.

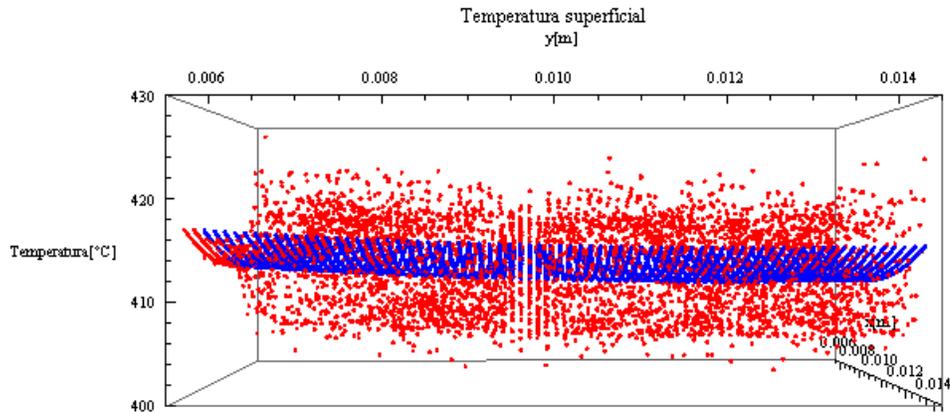


Figura 4.33: Gráfico de puntos de temperatura según  $T(x,y)$  y temperatura calculada vista eje  $y$ .

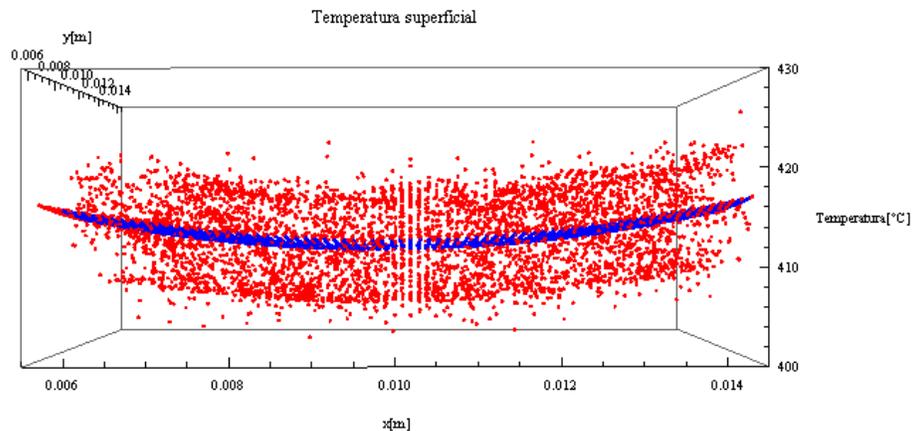


Figura 4.34: Gráfico de puntos de temperatura según  $T(x,y)$  y temperatura calculada vista eje  $x$ .

La matriz final de conductividad térmica tiene una gran dispersión de valores, lo que se ve reflejado con las estadísticas mostradas en la tabla 4.5, y en la figura 4.35.

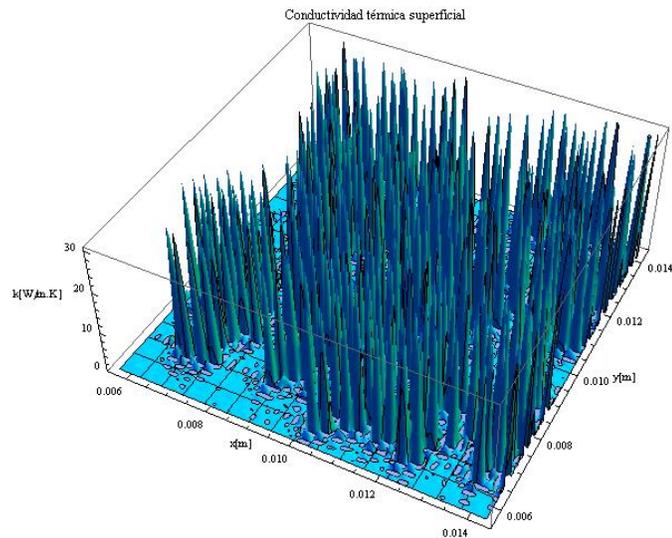


Figura 4.35: Gráfico de conductividad térmica calculada.

Luego se agrupan los valores de conductividad térmica según la coordenada  $(x, y)$  para cada uno y esto se lleva a Eureka para realizar una búsqueda de funciones  $k(x, y)$ .

Tabla 4.5: Rangos de conductividad térmica y su presencia en relación al total.

Rango conductividad térmica $k$ [W/m.K]	Porcentaje del total de datos [%]
$0 < k < 0.1$	73.05
$0.1 \leq k < 0.5$	10.57
$0.5 \leq k < 1$	0.6
$1 \leq k < 5$	1.79
$5 \leq k < 10$	6.85
$10 \leq k < 20$	1.64
$20 \leq k < 31$	5.5

El resultado de la regresión simbólica fue de 14 funciones de conductividad térmica dependientes de  $x$  e  $y$ . Estas funciones se muestran a continuación:

$$k(x, y) = \frac{0.0692 \sin\left(115x + 69.2y - 0.279\left(\left(\frac{y}{x}\right)!\right)\right)}{\exp(x)} - 0.00867((x - 722y)!) \quad (4.10.1)$$

$$k(x, y) = 0.0685 \sin\left(115x + 66.4y - 0.261\left(\left(\frac{y}{x}\right)!\right)\right) - x^2 - 0.00867((x - 722y)!) \quad (4.10.2)$$

$$k(x, y) = 0.0686 \sin\left(115 x + 69.5 y - 0.279 \left(\left(\frac{y}{x}\right)!\right)\right) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.3)$$

$$k(x, y) = 0.0677 \sin\left(106 x + 71.6 y + \frac{-21.6 y^2}{x}\right) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.4)$$

$$k(x, y) = 0.0667 \sin(6.14 x + (223 x)^{55.4 y}) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.5)$$

$$k(x, y) = 0.0671 \sin(122 x + 40.4 y - 1.04 \times 10^3 y^2) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.6)$$

$$k(x, y) = 0.0673 \sin(0.0179 + 125 x + 24.6 y) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.7)$$

$$k(x, y) = 0.0674 \sin(127 x + 24.8 y) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.8)$$

$$k(x, y) = 0.0669 \sin(0.275 + 125 x) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.9)$$

$$k(x, y) = 0.0684 \sin(153 x) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.10)$$

$$k(x, y) = 0.0575 + 0.58 x - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.11)$$

$$k(x, y) = 0.0533 + x - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.12)$$

$$k(x, y) = 0.0631 - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.10.13)$$

$$k(x, y) = 0.0633 - ((x - 1.1 \times 10^3 y)!) \quad (4.10.14)$$

Las funciones tienen errores puntuales bastante grandes, sobre todo para los puntos donde la conductividad térmica es mayor que 1[W/m.K]. Esto se debe a la dispersión de los valores de  $k$ . Sin embargo es importante notar que efectivamente la conductividad térmica depende de la posición sobre la superficie del material.

Las funciones 4.10.1, 4.10.2,..., hasta la 4.10.10, tienen una forma muy parecida, casi idéntica. En vista de buscar una función lo más simple posible, se escoge la función 4.10.10, que es la menos compleja de las 10 primeras funciones.

Por lo tanto la expresión para la conductividad térmica dependiente de la posición en la superficie del material, queda dada por:

$$k(x, y) = 0.0684 \sin(153 x) - 0.00867((x - 722 y)!) \quad (4.11)$$

En las figuras 4.36, 4.37, y 4.38 se muestra la forma que tiene la función de conductividad térmica en la región analizada.

De la figura 4.38 se puede analizar como la función  $k(x,y)$  tiene una dependencia más fuerte a la posición en el eje  $x$ , teniendo valores más altos al centro de este eje, y más bajos al acercarse a los extremos. El comportamiento según el eje  $y$  es más constante, pero aun así se ven variaciones sobre todo para la primera parte del eje, figura 4.37.

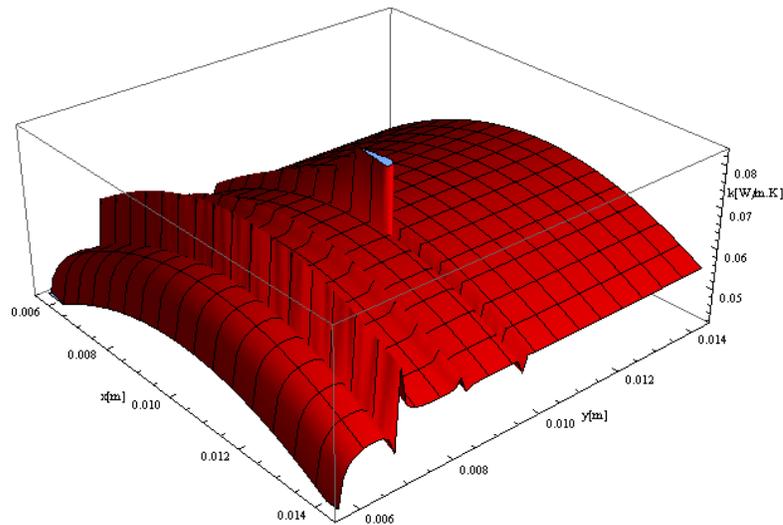


Figura 4.36: Gráfico de conductividad térmica según función  $k(x,y)$ .

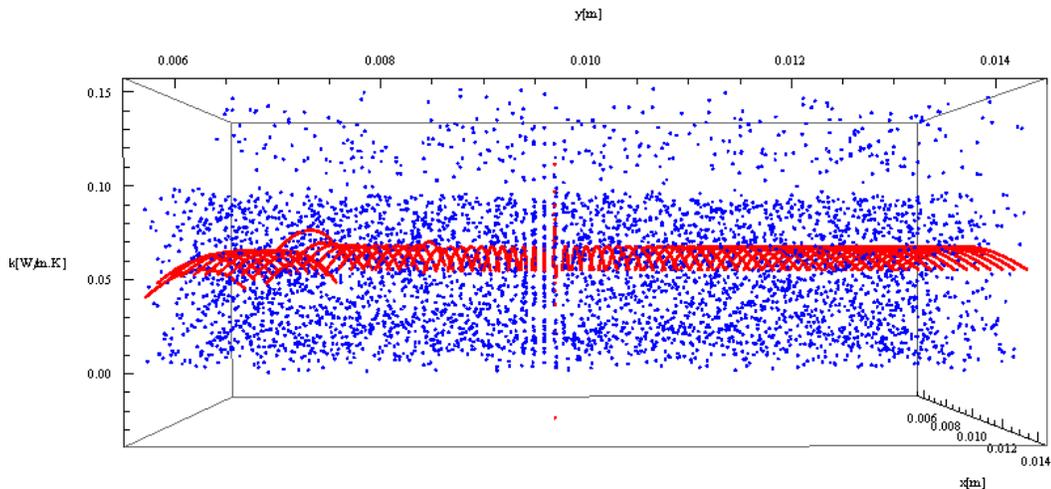


Figura 4.37: Gráfico de puntos de conductividad térmica según matriz  $k$  y según función  $k(x,y)$  vista eje  $y$ .

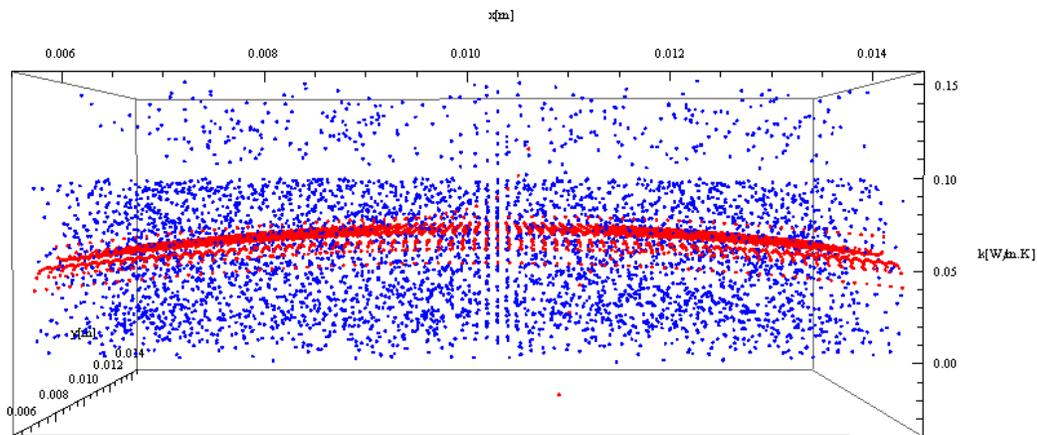


Figura 4.38: Gráfico de puntos de conductividad térmica según matriz  $k$  y según función  $k(x,y)$  vista eje  $x$ .

### 4.2.3. Discusión de resultados de conductividad térmica $k(x,y)$

Los resultados obtenidos mediante el método analítico no se acercan a lo esperado, pues la resolución de la ecuación diferencial da como resultado funciones con comportamientos que no se condicen con el comportamiento que debería tener la conductividad térmica.

Para ambas funciones de temperatura escogidas, las funciones de conductividad térmica resultantes del proceso entregan valores de conductividad térmica menores a cero en algunas zonas, lo cual no debiera ocurrir a partir de lo visto en los trabajos científicos hasta la actualidad. La conductividad térmica negativa puede encontrar interpretaciones por la naturaleza discontinua del material. Esto puede producir gradientes de temperatura importante que no son detectados por la resolución de la cámara termográfica, induciendo a errores en la búsqueda de funciones de temperatura, los que pueden tener repercusión al calcular la conductividad térmica. Además, los valores de conductividad que resultaron positivos, están por debajo del rango esperado según las referencias, en cerca de seis órdenes de magnitud.

Estos resultados se repitieron para las demás funciones con las que se logró resolver la ecuación de calor, por lo que se puede suponer que el problema

radica en la forma que tienen las funciones de temperatura encontradas. Es probable, que configurando Eureka de forma que considere una mayor cantidad de bloques de construcción, y permitiendo que la búsqueda se extienda por más tiempo, las funciones  $T(x,y)$  que se encuentren puedan resolver la ecuación diferencial de forma tal de encontrar una expresión de conductividad térmica que tenga un comportamiento físico más lógico.

En el método numérico se encontraron resultados satisfactorios. Pese a modificar un poco el algoritmo de resolución de este tipo de problemas, los resultados pueden interpretarse físicamente.

El proceso iterativo tuvo como consecuencia una matriz de temperatura que presentó errores menores con respecto a la temperatura según la función  $T(x,y)$ , y una matriz de conductividad con valores dispersos que pueden atribuirse a la naturaleza porosa del material, y también al hecho de que está formado por compactación de polvos, lo que provoca una distribución irregular de sus componentes.

Producto de la dispersión de estos valores de conductividad térmica, las funciones  $k(x,y)$  encontradas mediante Eureka tienen errores grandes.

El algoritmo iterativo utilizado puede ser mejorado en algunos aspectos, por ejemplo en el cálculo de la matriz de conductividad térmica no se finaliza necesariamente con el valor que suponga el menor error entre las matrices de temperatura, sino que se modifica para que pertenezca a un rango determinado. Así por ejemplo, un elemento de la matriz de conductividad térmica podría seguir incrementando su valor y por consiguiente seguir minimizando el error entre las matrices de temperatura, o también se podrían almacenar todos los valores de conductividad desde 0 a 31[W/m.K] y definir el valor final como el que, dentro de ese rango, minimice la diferencia entre las matrices de temperatura.

Este método sin la búsqueda de una función  $k(x,y)$ , podría utilizarse también en algunos casos donde sea suficiente contar con valores numéricos de la conductividad térmica, sin ser necesario un modelo de esta.

## 5. Dependencia espacial y temporal de la conductividad térmica

### 5.1. Funciones $T(x, y, t)$ encontradas

El programa Eureka entrega 21 funciones de temperatura superficial  $T(x, y)$ , que se muestran de la ecuación 5.1 a la 5.21.

$$T(x, y, t) = \left( 0.000115 t + 3.4 \times 10^{-6} t^2 + 0.000329 \cos[1608.4 * x] + \tan[0.000115 + 5.12 \times 10^{-6} t] \sin[1635 y + \frac{0.000115 \cos[1608.4 x]}{(0.000115 + 5.12 \times 10^{-6} t)}] - 0.00132 - 0.134 y \right) * 1000 + 136.785357 \quad (5.1)$$

$$T(x, y, t) = \left( 0.000115 t + 3.4 \times 10^{-6} t^2 + 0.000329 \cos[1608.4 x] + \sin[0.000115 + 5.12 \times 10^{-6} t] \sin[1635 y + 0.000115 \frac{\cos[1608.4 x]}{0.000115 + 5.12 \times 10^{-6} t}] - 0.00132 - 0.134 y \right) * 1000 + 136.785357 \quad (5.2)$$

$$T(x, y, t) = (0.000115 t + 3.4 \times 10^{-6} t^2 + 0.000329 \cos[1608.7 x] + \sin[0.000115 + 5.33 \times 10^{-6} t] \sin[1636 y + 0.598 \cos[1608.7 x]] - 0.00134 - 0.132 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.3)$$

$$T(x, y, t) = (0.000114 t + 3.43 \times 10^{-6} t^2 + 0.000328 \cos[1608 x] + \frac{1.83 \times 10^{-6} \sin[1643 y + 0.759 \sin[\cos[1608 x]]]}{x} - 0.00128 - 0.138 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.4)$$

$$T(x, y, t) = (0.000114 t + 3.43 \times 10^{-6} t^2 + 0.000328 \cos[1608 x] + \frac{1.83 \times 10^{-6} \sin[1643 y + 0.665 \cos[1608 x]]}{x} - 0.00128 - 0.138 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.5)$$

$$T(x, y, t) = (0.000114 t + 3.45 \times 10^{-6} t^2 + 0.000326 \cos[1608.3 x] + 0.000178 \sin[1645 y + 0.68 \cos[1608.36 x]] - 0.00121 - 0.145 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.6)$$

$$T(x, y, t) = (0.000114 t + 3.45 \times 10^{-6} t^2 + 0.00033 \cos[1608 x] + 0.000164 \sin[1656 y + \cos[1608 x]] - 0.001 - 0.163 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.7)$$

$$T(x, y, t) = (0.000115 t + 3.44 \times 10^{-6} t^2 + 0.000115 \sin[1629 y] + 3.44 \times 10^{-6} t \sin[1629 y] + 0.00033 \cos[0.588 + 1552 x] - 0.00138 - 0.128 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.8)$$

$$T(x, y, t) = (0.000115 t + 3.44 \times 10^{-6} t^2 + 0.000329 \cos[0.593 + 1552 x] + \sin[1629 y] \sin[0.000115 + 3.44 \times 10^{-6} t] - 0.00138 - 0.128 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.9)$$

$$T(x, y, t) = (0.000115 t + 3.43 \times 10^{-6} t^2 + 0.000322 \cos[1611 x] + \sin[1629 y] * \tan[0.000119 + 3.43 \times 10^{-6} t] - 0.00138 - 0.128 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.10)$$

$$T(x, y, t) = (0.000115 t + 3.43 \times 10^{-6} t^2 + 0.00032 \cos[1611 x] + \sin[1629 y] \sin[0.000119 + 3.43 \times 10^{-6} t] - 0.00138 - 0.128 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.11)$$

$$T(x, y, t) = (0.000116 t + 3.4 \times 10^{-6} t^2 + 9.55 \times 10^{-6} t \sin[1625 y] + 0.000328 \cos[0.512 + 1559 x] - 0.00126 - 0.141 y) 1000 + 136.785357 \quad (5.12)$$

$$T(x,y,t) = (0.000118 t + 3.36 \times 10^{-6} t^2 + 0.000323 \text{ Cos}[1610 x] + 9.537 \times 10^{-6} t \text{ Sin}[1624 y] - 0.00129 - 0.141 y)1000 + 136.785357 \quad (5.13)$$

$$T(x,y,t) = (0.000113 t + 3.46 \times 10^{-6} t^2 + 0.000324 \text{ Cos}[1611 x] + 0.000167 \text{ Sin}[1635 y] - 0.00135 - 0.13 y)1000 + 136.785357 \quad (5.14)$$

$$T(x,y,t) = (0.000115 t + 3.43 \times 10^{-6} t^2 + 0.00034 \text{ Sin}[994.227 y] + 0.00033 \text{ Cos}[1609 x] - 0.0026)1000 + 136.785357 \quad (5.15)$$

$$T(x,y,t) = (0.000116 t + 3.47 \times 10^{-6} t^2 + 0.000326 \text{ Cos}[1.582 + 1444 x] - 0.000585 - 0.209 y)1000 + 136.785357 \quad (5.16)$$

$$T(x,y,t) = (0.000116 t + 3.47 \times 10^{-6} t^2 + 0.000311 \text{ Cos}[1601.93 x] - 0.000607 - 0.209 y)1000 + 136.785357 \quad (5.17)$$

$$T(x,y,t) = (0.000109 t + 3.66 \times 10^{-6} t^2 + 0.000408 \text{ Sin}[1125.95 x] - 0.2525 y)1000 + 136.785357 \quad (5.18)$$

$$T(x,y,t) = (0.0001165 t + 5.2 x^2 + 3.4 \times 10^{-6} t^2 - 0.00152 - 0.172 y)1000 + 136.785357 \quad (5.19)$$

$$T(x,y,t) = (0.08736 x + 0.000116 t + 3.42 \times 10^{-6} t^2 - 0.00183 - 0.1744 y)1000 + 136.785357 \quad (5.20)$$

$$T(x,y,t) = (0.0001236 t + 0.000308 x t^2 - 0.00096 - 0.176 y)1000 + 136.785357 \quad (5.21)$$

El primer análisis se hace evaluando las funciones  $T(x,y,t)$  en los datos de posición y tiempo, con los cuales se encontraron estas funciones.

En la tabla 5.1, se muestra el error máximo y el error promedio para cada función al ser evaluada en los datos correspondientes al primer tramo de tiempo seleccionado, de 0 a 29 segundos, en la zona superficial 1.

Se puede ver que todas las funciones tienen error máximo y error promedio bajo el 5%, cumpliendo todas con el criterio establecido en la zona superficial 1. Las funciones con menor error máximo son 5.15, y 5.17, y las que presentan menor error promedio son 5.1, 5.2, y 5.3.

Las funciones se evalúan también en los puntos correspondientes a la zona superficial 1, en el segundo tramo de tiempo seleccionado, para poder determinar de mejor forma cuál puede ser una buena función  $T(x,y,t)$  para encontrar la conductividad térmica. Los resultados de este análisis se ven en la tabla 5.2.

Tabla 5.1: Análisis de error de funciones  $T(x,y,t)$  en zona superficial 1 y primer tramo de tiempo.

Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio
5.1	0.497341	0.0768773	5.12	0.512264	0.0842235
5.2	0.497341	0.0768773	5.13	0.52281	0.0854272
5.3	0.497282	0.077331	5.14	0.447563	0.0858723
5.4	0.483651	0.0781989	5.15	0.413791	0.0847847
5.5	0.481526	0.078231	5.16	0.622416	0.103509
5.6	0.469755	0.0798161	5.17	0.34259	0.105457
5.7	0.513236	0.0815024	5.18	0.646476	0.106786
5.8	0.450301	0.0823511	5.19	0.804802	0.165557
5.9	0.451861	0.0823839	5.20	0.786387	0.168191
5.10	0.444775	0.0836274	5.21	0.903031	0.169326
5.11	0.444775	0.0836274			

Tabla 5.2: Análisis de error de funciones  $T(x,y,t)$  en zona superficial 1 y segundo tramo de tiempo.

Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio
5.1	3.59023	0.772484	5.12	3.62461	0.788229
5.2	3.59023	0.772484	5.13	3.54235	0.74889
5.3	3.62019	0.766339	5.14	3.60562	0.807808
5.4	3.61047	0.789041	5.15	3.57012	0.800085
5.5	3.60659	0.789059	5.16	3.72054	0.85913
5.6	3.62238	0.798237	5.17	3.72765	0.856266
5.7	3.63168	0.799668	5.18	3.93887	0.949349
5.8	3.60301	0.798304	5.19	3.57205	0.791265
5.9	3.60156	0.797748	5.20	3.60452	0.799784
5.10	3.59915	0.793715	5.21	3.29468	0.67106
5.11	3.59915	0.793715			

Se aprecia nuevamente que todas las funciones se comportan de tal forma que ningún error máximo ni promedio llega al 5%. De hecho, el mayor error máximo en este caso es el de la función 5.18, y no alcanza el 4%. La misma función tiene el error promedio más alto, de aproximadamente un 0.95%. Por otra parte, los errores máximos de las funciones 5.13, 5.15 y 5.21, son los más bajos, mientras que las funciones 5.3, 5.13, y 5.21 tienen los errores promedios menores.

Para tomar la decisión de que función utilizar en adelante del trabajo, se evaluaron las funciones en un área mayor, la zona superficial 2, y en el tramo de tiempo completo, es decir, considerando aproximadamente el minuto de video. En la tabla 5.3, se muestran los valores de los errores obtenidos en este caso.

Tabla 5.3: Análisis de error de funciones  $T(x,y,t)$  en zona superficial 2 y tramo de tiempo completo.

Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio	Función $T(x,y,t)$	Error Máximo	Error Promedio
5.1	4.82545	0.958117	5.12	4.81167	0.953909
5.2	4.82545	0.958117	5.13	4.78285	0.95731
5.3	4.83269	0.959292	5.14	4.87039	0.955076
5.4	4.91513	0.953372	5.15	4.89774	0.966445
5.5	4.91397	0.953423	5.16	5.03913	0.916978
5.6	4.88178	0.951282	5.17	4.90705	0.938703
5.7	4.89065	0.947904	5.18	5.00616	0.84682
5.8	4.8848	0.950803	5.19	4.59984	0.916503
5.9	4.88466	0.9511	5.20	4.72809	0.932417
5.10	4.83222	0.957555	5.21	5.45631	1.03877
5.11	4.83222	0.957555			

Las funciones 5.16, 5.18, 5.21 y 5.22, presentan errores máximos que sobrepasan el criterio del 5% impuesto, por lo que son descartadas. Los errores promedio de todas las funciones nuevamente presentan valores muy buenos, estando prácticamente todos bajo el 1% de error. Las funciones 5.1 y 5.2 son muy complejas por lo que se dejan de lado. Así mismo se descartan las funciones 5.19, 5.20, y 5.21, ya que la forma de la función al realizar análisis gráficos sobre estas, no copia de forma deseada a los datos experimentales, ya que básicamente son planos inclinados, como se ve en el ejemplo de la figura 5.1.

Finalmente se escogen las funciones 5.3, y 5.17, por obtener los menores valores de error máximo o promedio en algunos de los distintos análisis efectuados. Además escogiendo estas dos funciones se tiene una bastante compleja, la 5.3, y otra más simple, la 5.17.

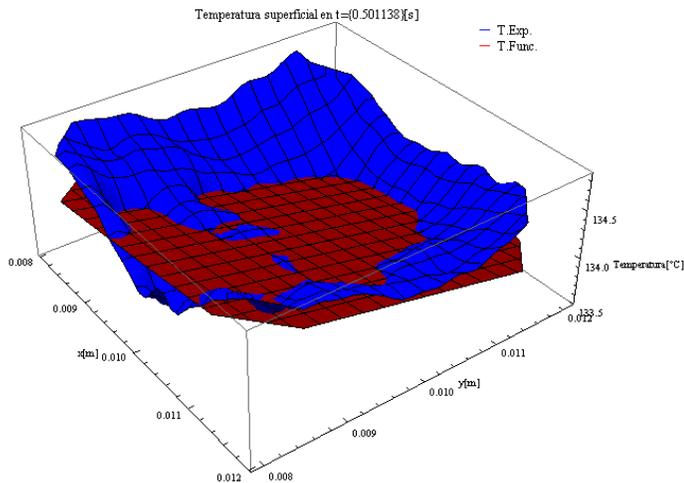


Figura 5.1: Ejemplo de función plana  $T(x,y,t)$  comparada con temperatura experimental.

### 5.1.1. Análisis gráfico de funciones $T(x, y, t)$ elegidas

#### a. Análisis en zona superficial 1 y primer tramo de tiempo

Para ver de mejor forma el comportamiento de cada función, se grafica la evolución de la temperatura en cinco puntos distintos de la superficie. Se escogen los puntos siguientes:

- $(x, y) = (0.0099408, 0.008047)$
- $(x, y) = (0.0080473, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.0099408, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.011953, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.0099408, 0.011953)$

Se grafica la temperatura experimental de cada punto a través del tiempo (en color azul), y la temperatura definida por la función  $T(x, y, t)$  (en color rojo), además de graficarse el error para la función en cada punto en el mismo lapso de tiempo.

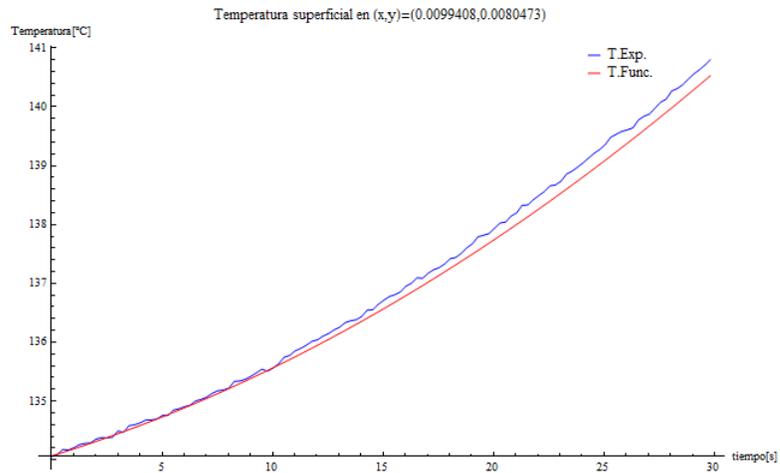


Figura 5.2: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

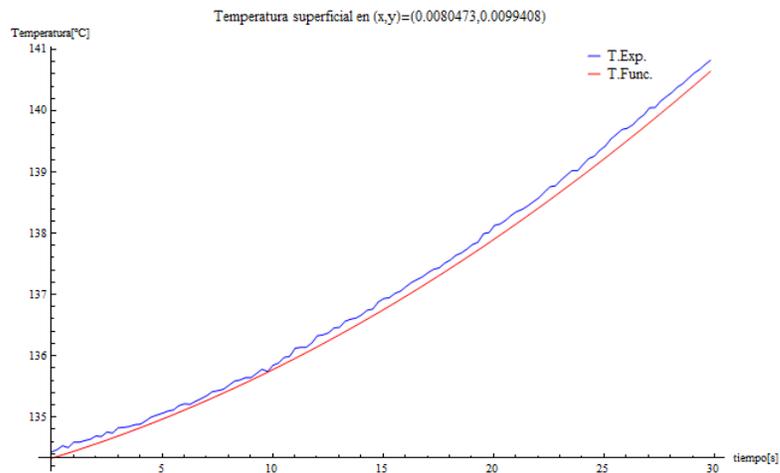


Figura 5.3: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

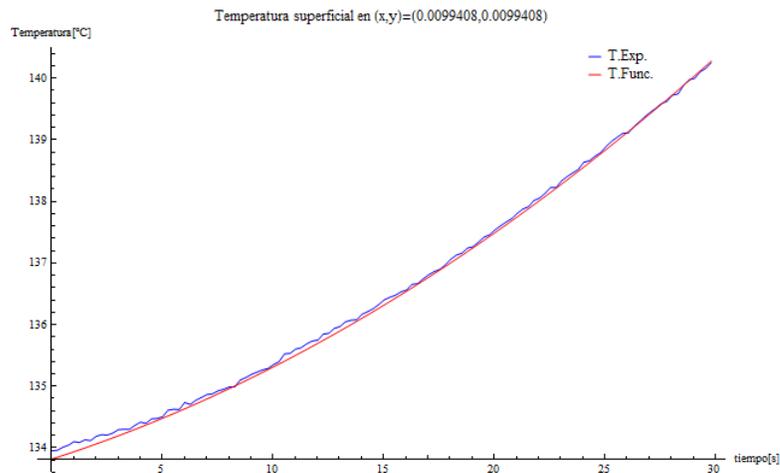


Figura 5.4: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

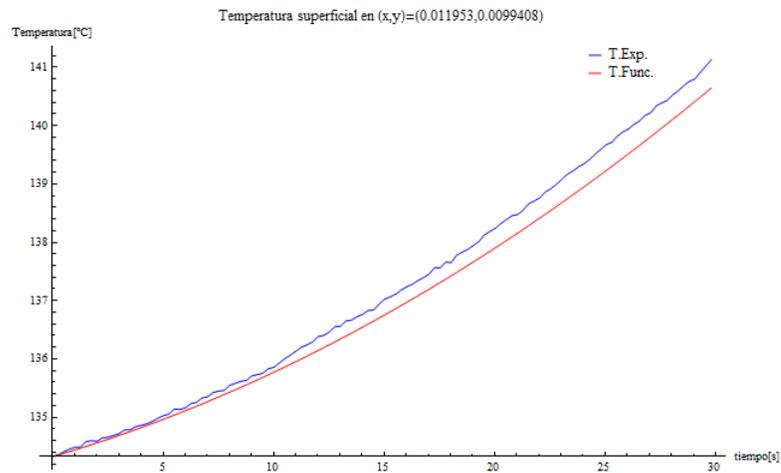


Figura 5.5: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

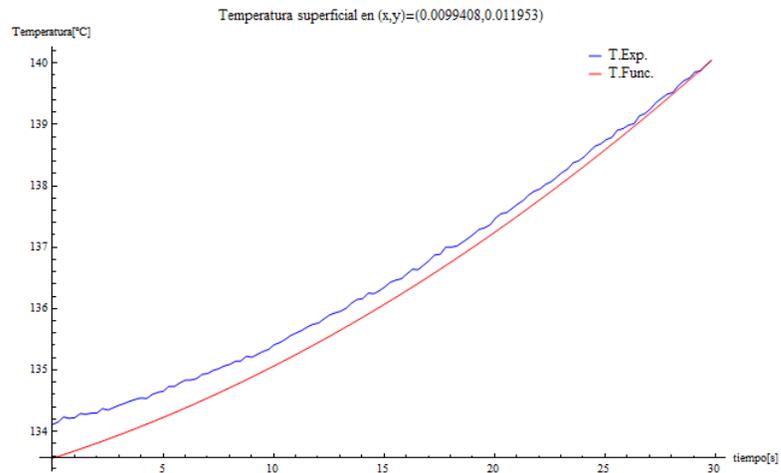


Figura 5.6: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

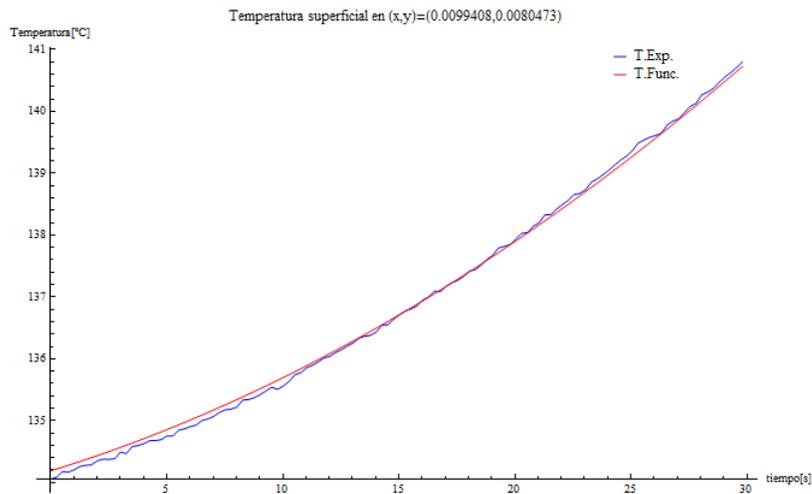


Figura 5.7: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

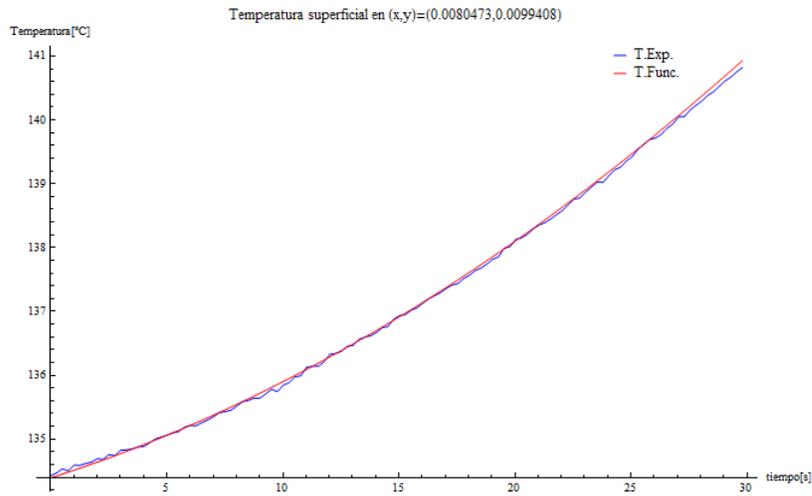


Figura 5.8: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

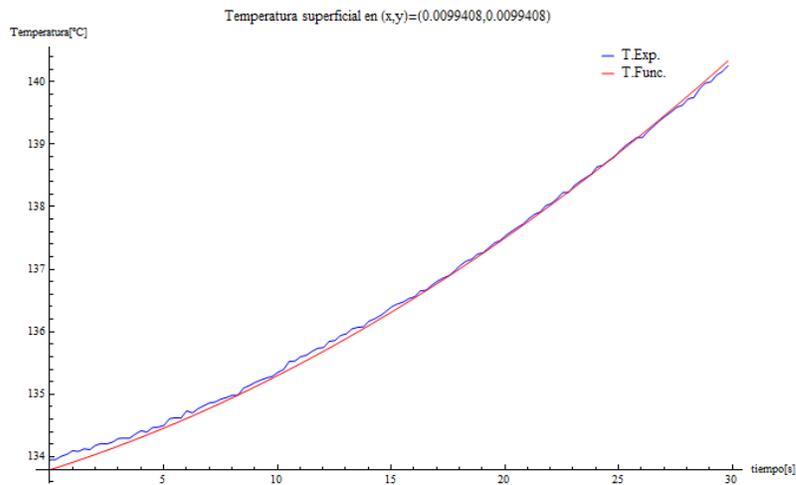


Figura 5.9: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

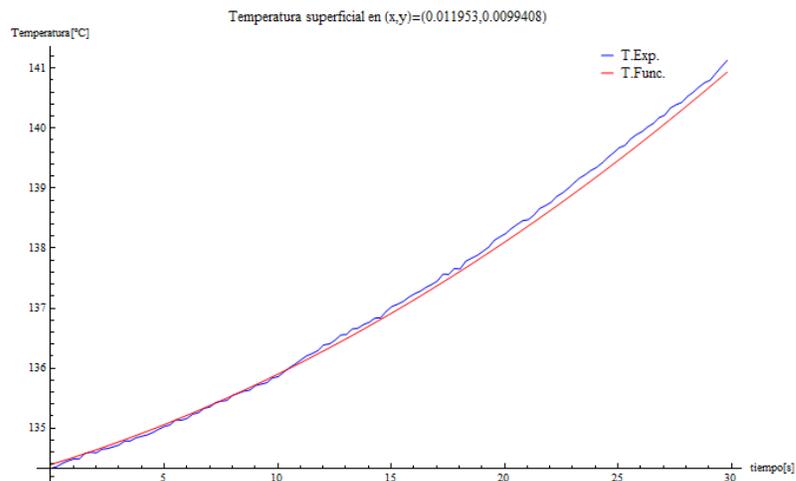


Figura 5.10: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

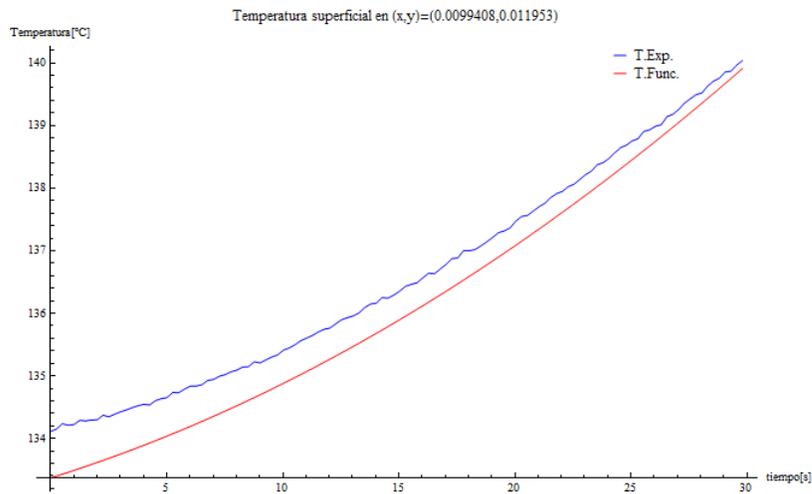


Figura 5.11: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del primer tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

Se observa que ambas funciones tienen un error muy pequeño a lo largo del intervalo de tiempo, siendo el punto  $(x,y) = (0.0099408, 0.011953)$  el que presenta un error mayor al presenciado en los demás puntos, pero que disminuye gradualmente con el paso del tiempo.

También, se entregan gráficos de superficie que representan la función  $T(x,y,t)$ , la temperatura experimental y el error, para el frame donde se encontró el error máximo puntual de la función. Esto puede verse en las figuras 5.12, 5.13, 5.14, y 5.15.

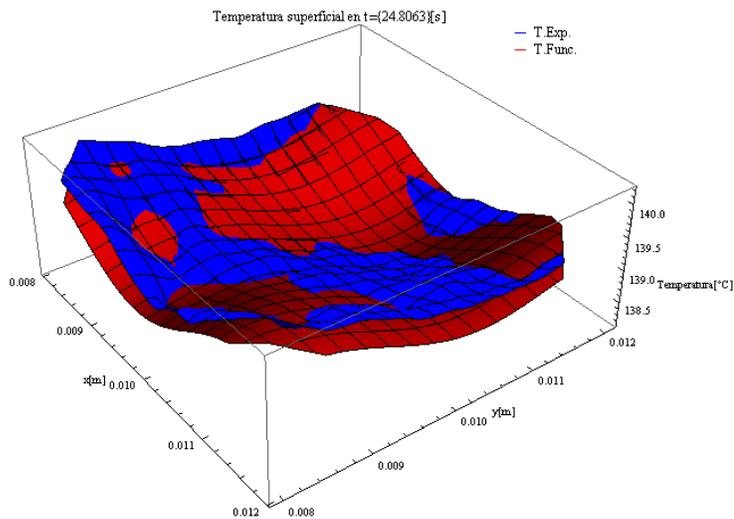


Figura 5.12: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 para  $t=24.8[s]$ .

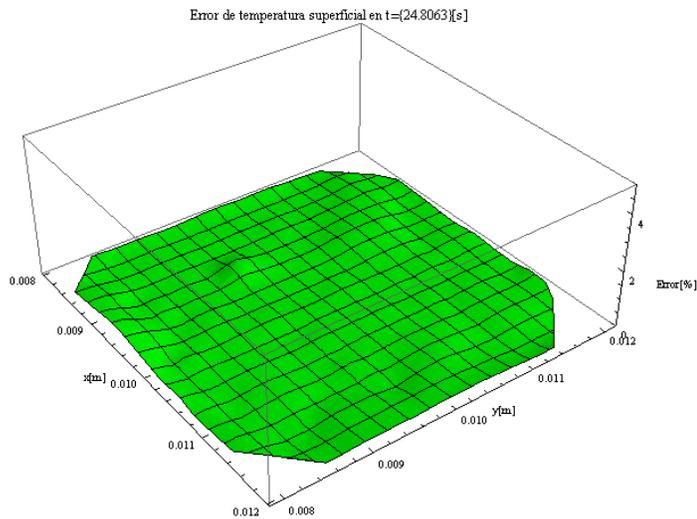


Figura 5.13: Gráfico superficial de error de función 5.3 para  $t=24.8[s]$ .

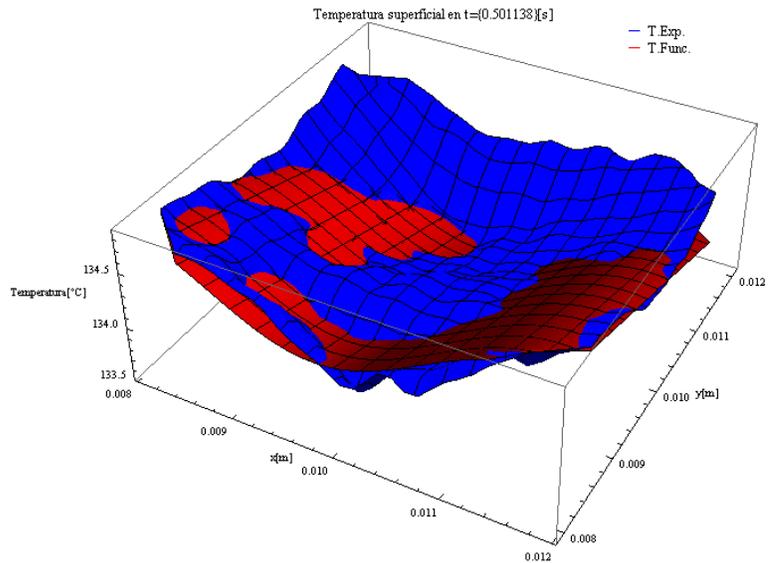


Figura 5.14: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 para  $t=0.5[s]$ .

De los gráficos superficiales se puede ver que para la función 5.3 el error está distribuido casi uniformemente a lo largo de la superficie. Pero para la función 5.17, de las figuras 5.14 y 5.15 se puede notar que existe un error mayor en el eje  $y$  cuando se tienen valores mayores a 0.011 [m].

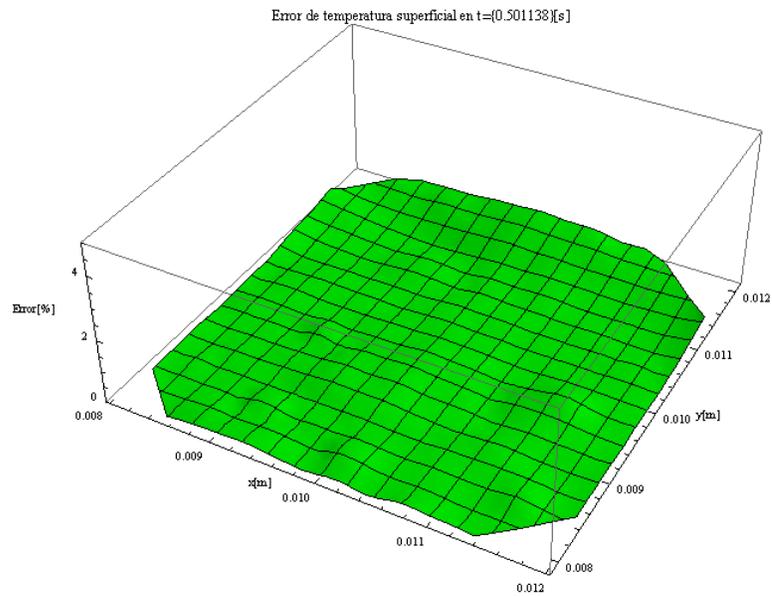


Figura 5.15: Gráfico superficial de error de función 5.17 para  $t=0.5[s]$ .

### ***b. Verificación en zona superficial 1 y segundo tramo de tiempo***

El análisis se lleva a cabo para datos que cubren la misma extensión de superficie de la pastilla, pero para los frames que representan el segundo tramo de tiempo del video, desde los 30 segundos hasta los 60 segundos aproximadamente.

Desde la figura 5.16, hasta la 5.25, se muestra la evolución de la temperatura en los cinco puntos definidos en la sección anterior, para las dos funciones que siguen en estudio.

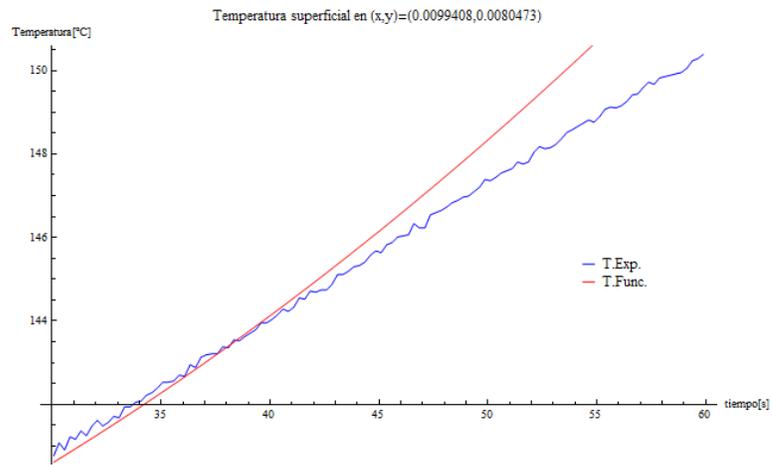


Figura 5.16: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

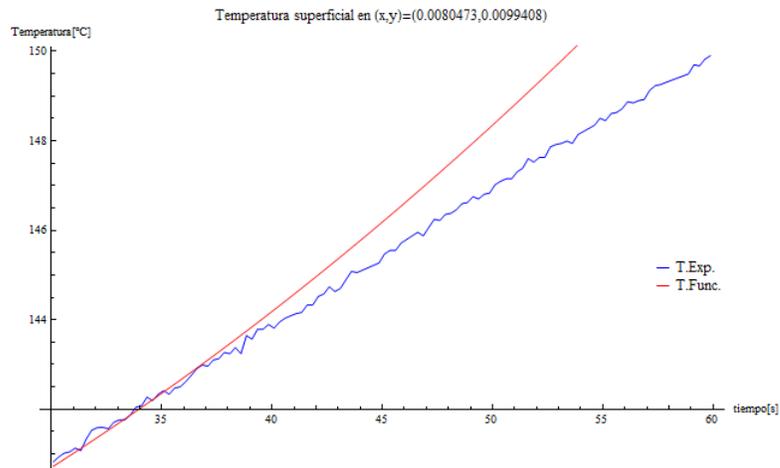


Figura 5.17: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

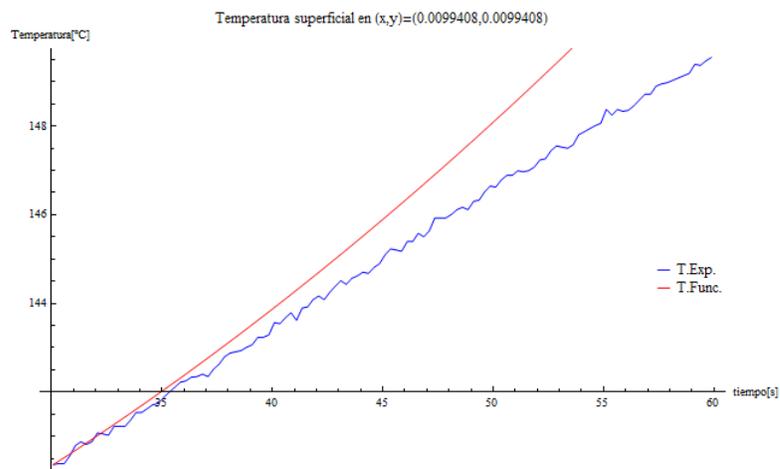


Figura 5.18: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

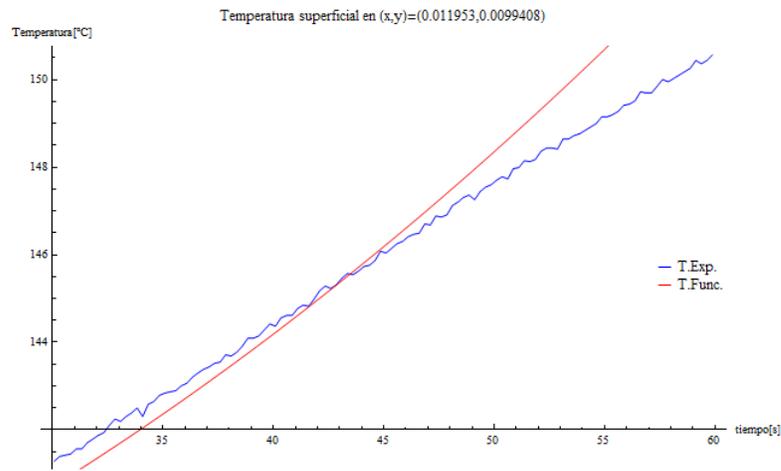


Figura 5.19: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

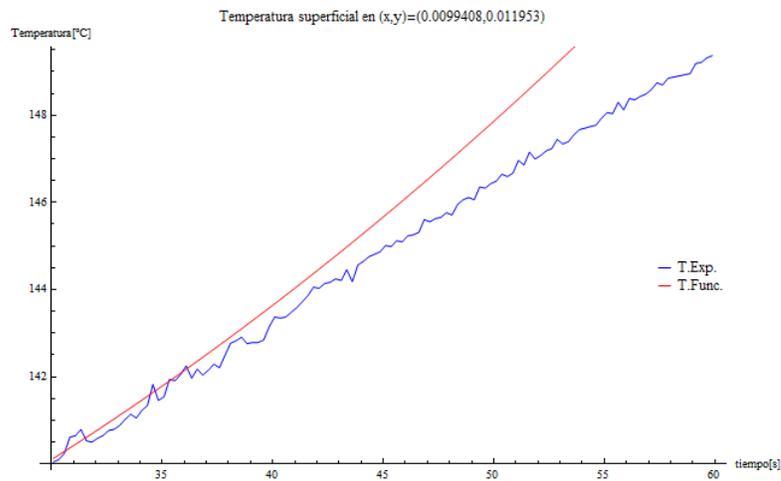


Figura 5.20: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

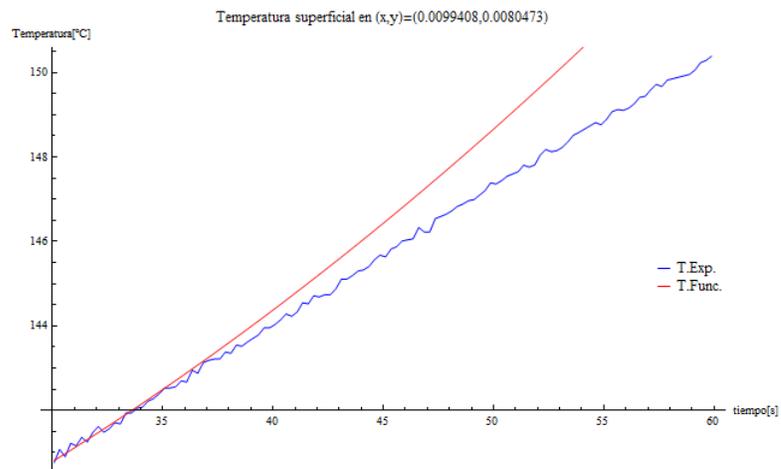


Figura 5.21: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

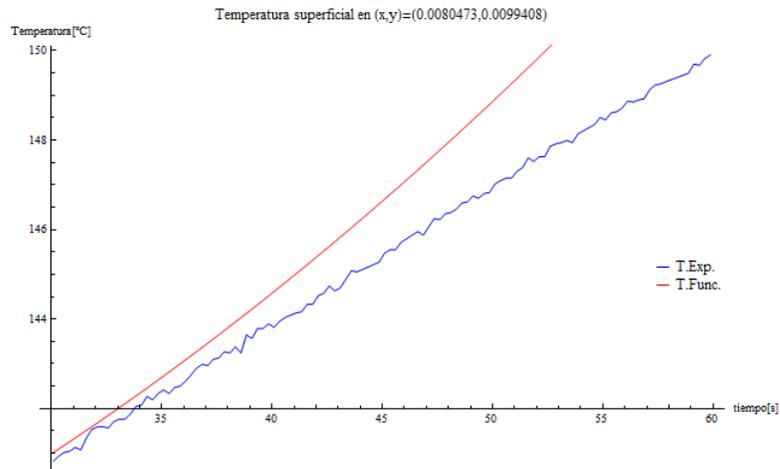


Figura 5.22: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

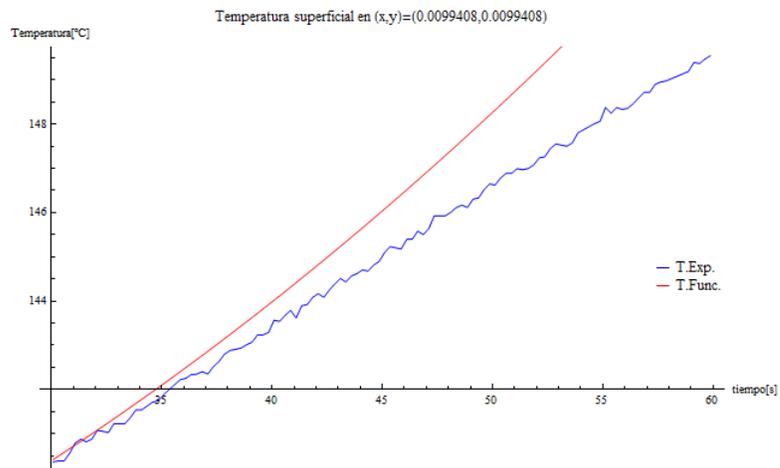


Figura 5.23: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

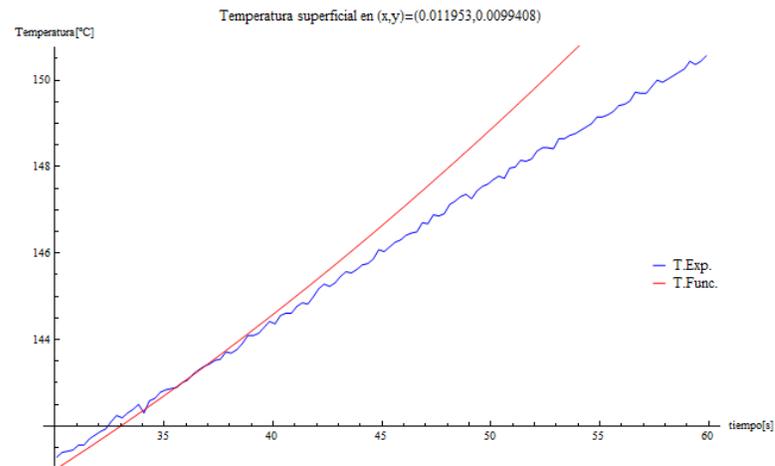


Figura 5.24: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

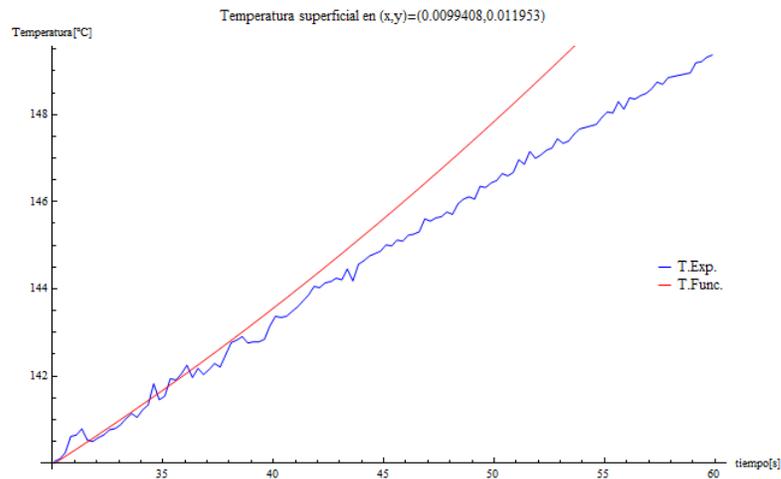


Figura 5.25: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del segundo tramo de tiempo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

Se observa que la tendencia de ambas funciones es a que la temperatura evaluada con ellas sea mayor a la temperatura experimental, diferencia que además parece acrecentarse con el paso del tiempo. En general, entre el segundo 40 y 45 es cuando la curva que representa a la función se despega más notoriamente de la curva de temperatura experimental, para ambas funciones.

A partir de lo que se observa en los gráficos de las figuras 5.26 y 5.28, las temperaturas según las funciones 5.3 y 5.17 (en rojo) son mayores a las experimentales (en azul) en toda la superficie analizada. El error a través de la superficie es relativamente constante, ubicándose bajo el 4% de error con respecto a los datos experimentales.

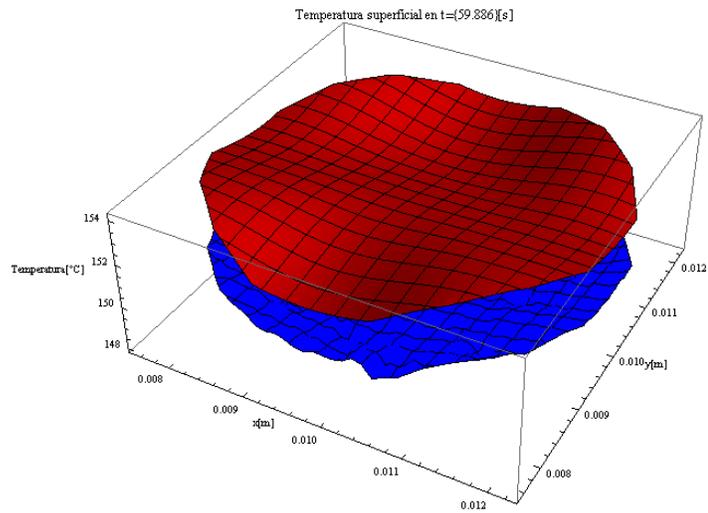


Figura 5.26: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 para  $t=59.886[s]$ .

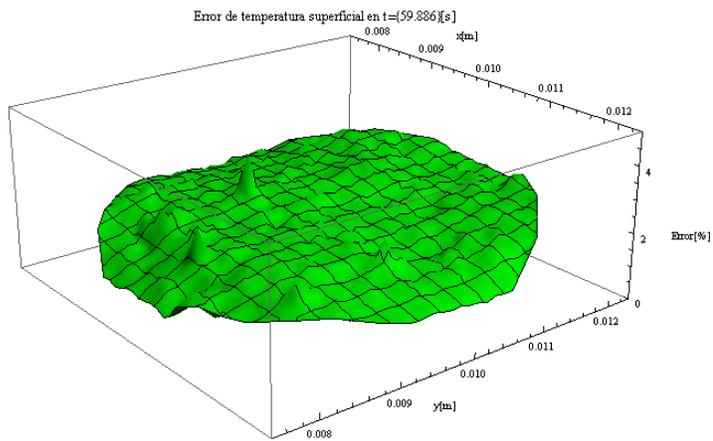


Figura 5.27: Gráfico superficial de error de función 5.3 para  $t=59.886[s]$ .

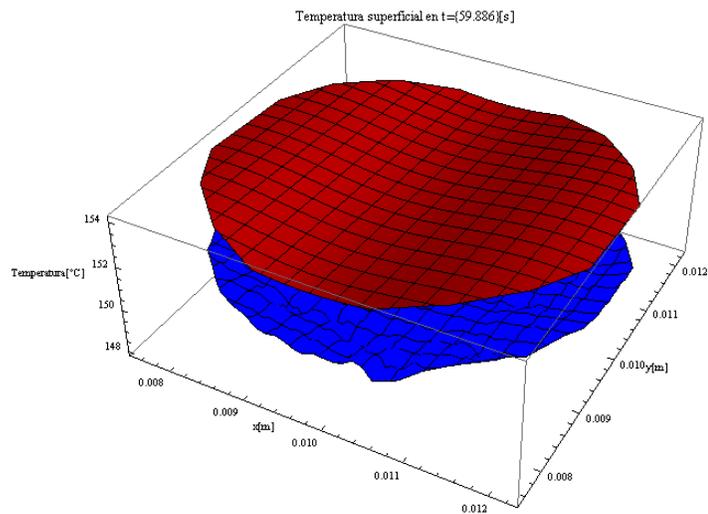


Figura 5.28: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 para  $t=59.886[s]$ .

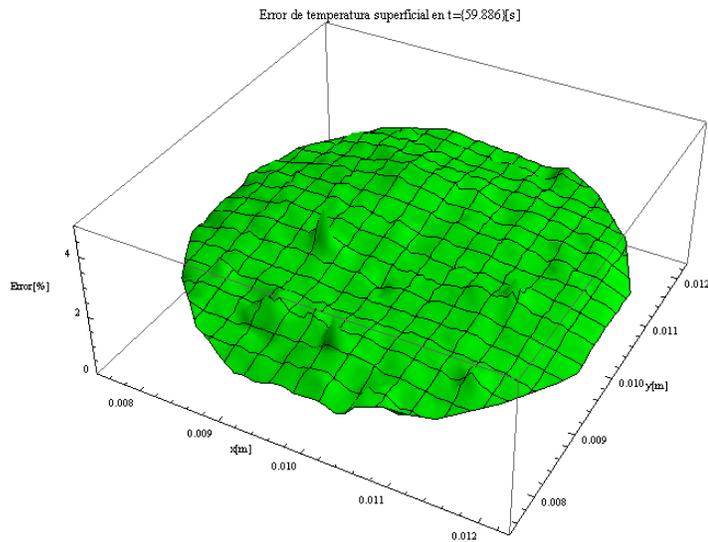


Figura 5.29: Gráfico superficial de error de función 5.17 para  $t=59.886[s]$ .

### ***c. Verificación en zona superficial 2 y tramo de tiempo completo***

Ahora las funciones 5.3 y 5.17 son analizadas en una mayor superficie de la pastilla, 24% aproximadamente (zona superficial 2), y en un tramo de tiempo que comprende el primer minuto de video aproximadamente. Este análisis se lleva a cabo con datos en bruto, sin suavizado.

En los gráficos que se presentan desde la figura 5.30, hasta la figura 5.39, se muestra la evolución temporal de la temperatura en los mismos cinco puntos definidos previamente en la superficie y utilizados en el análisis en la zona superficial 1. Estos gráficos entonces sirven para ver de mejor forma el comportamiento de las funciones 5.3 y 5.17 en el tramo de tiempo completo, donde no influye el aumento de la superficie a analizar.

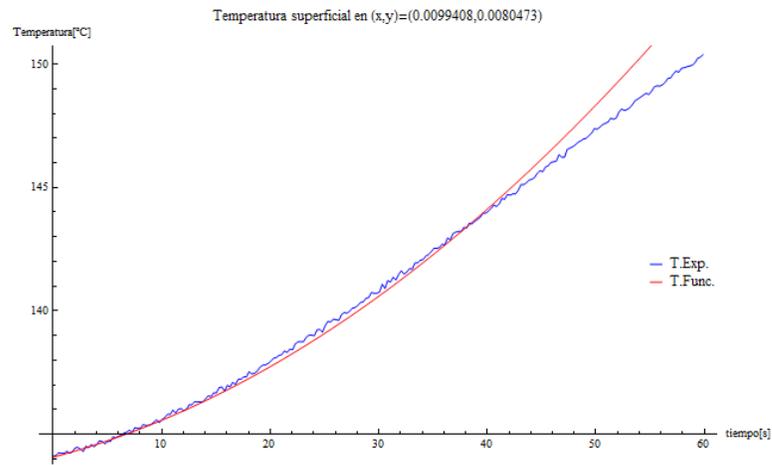


Figura 5.30: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

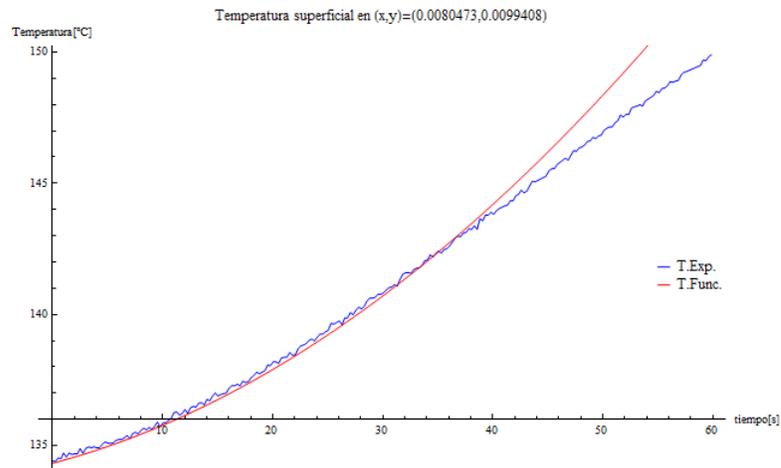


Figura 5.31: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

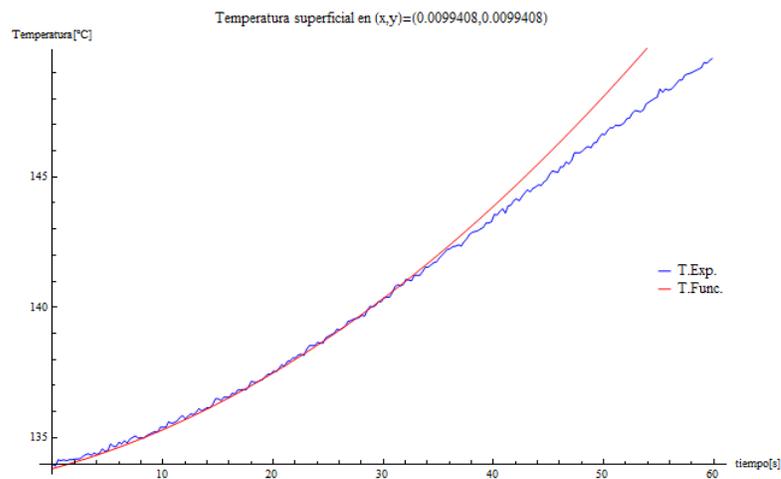


Figura 5.32: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

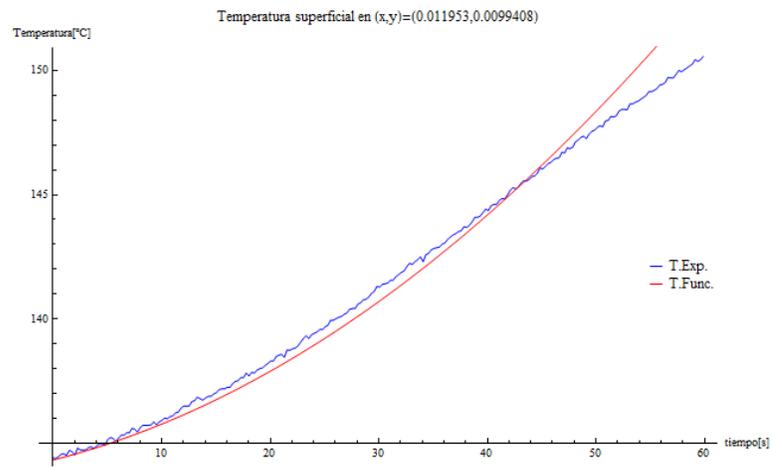


Figura 5.33: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

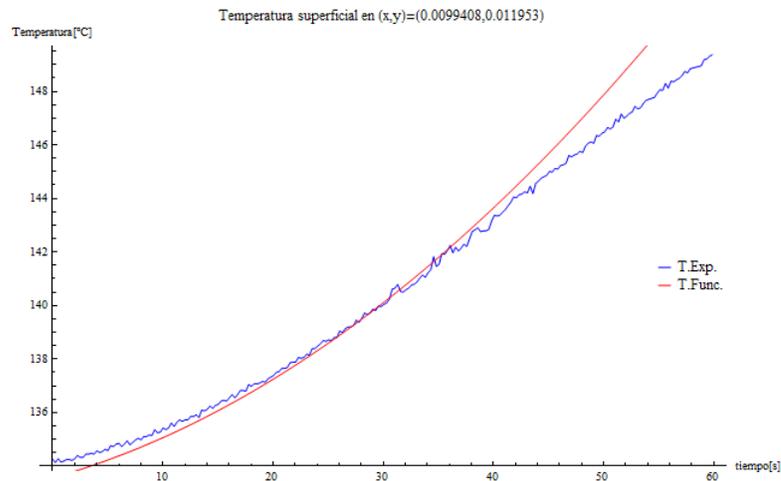


Figura 5.34: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

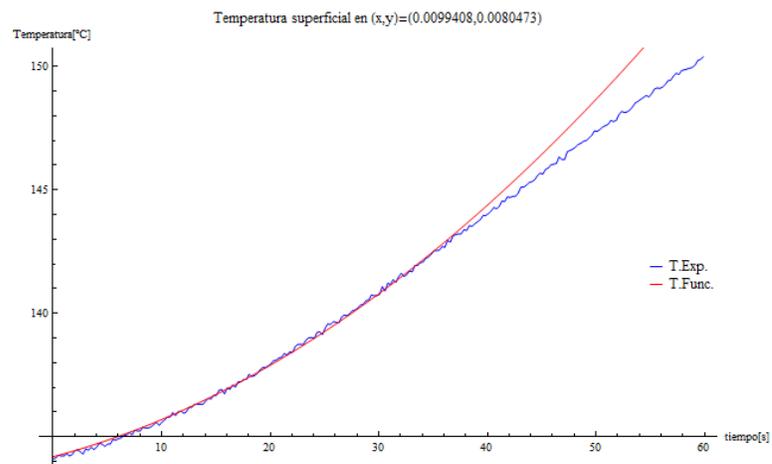


Figura 5.35: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.008)$ .

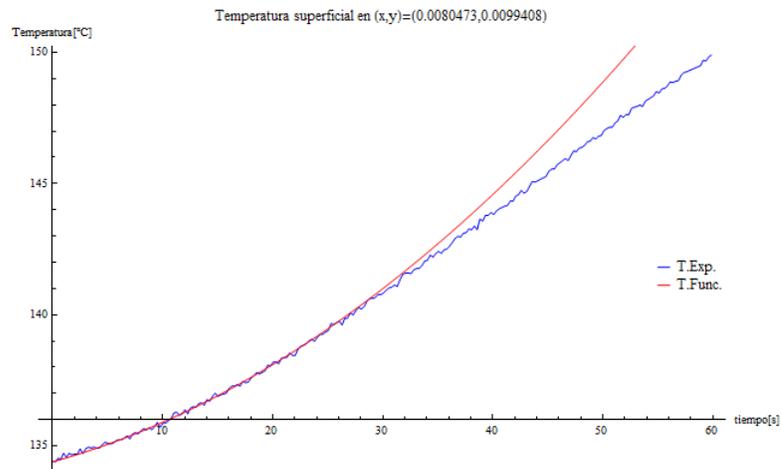


Figura 5.36: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.008,0.0099)$ .

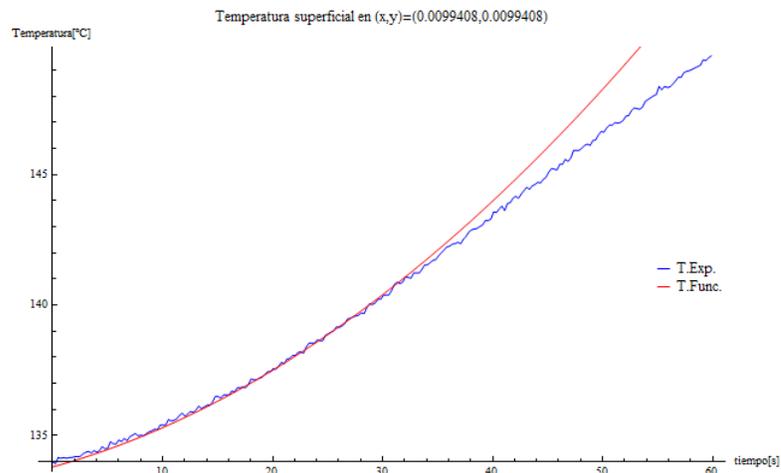


Figura 5.37: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099,0.0099)$ .

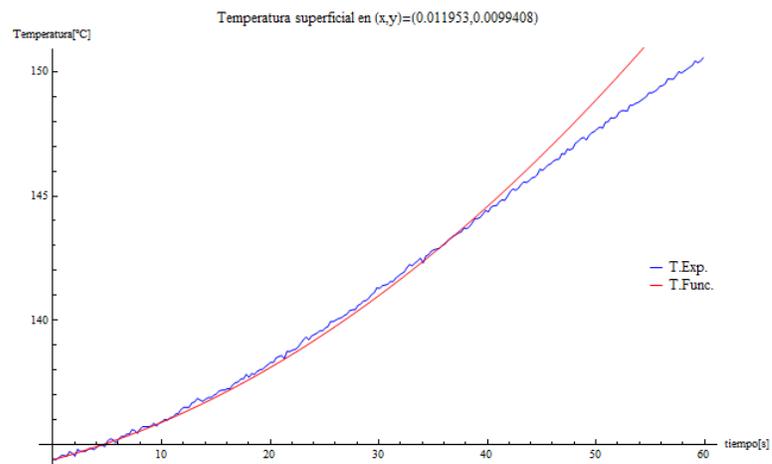


Figura 5.38: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0119,0.0099)$ .

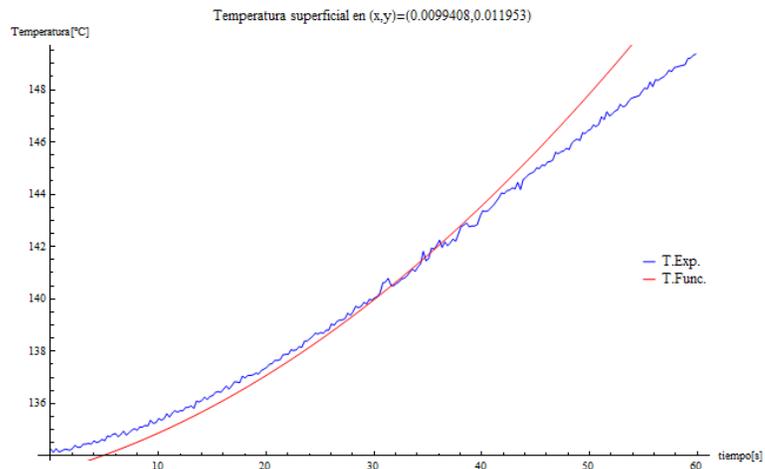


Figura 5.39: Evolución de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 a lo largo del tramo de tiempo completo para la posición  $(x,y)=(0.0099, 0.0119)$ .

En las figuras 5.40 y 5.42, se ve un gráfico superficial de las temperaturas experimentales (azul) y evaluadas (rojo), mientras que el error para el tiempo especificado, correspondiente al frame donde se encuentra el error máximo para la función, se muestra en la figura 5.41 y 5.43. Se puede observar que los mayores errores se encuentran en los extremos del rango en el eje  $x$ .

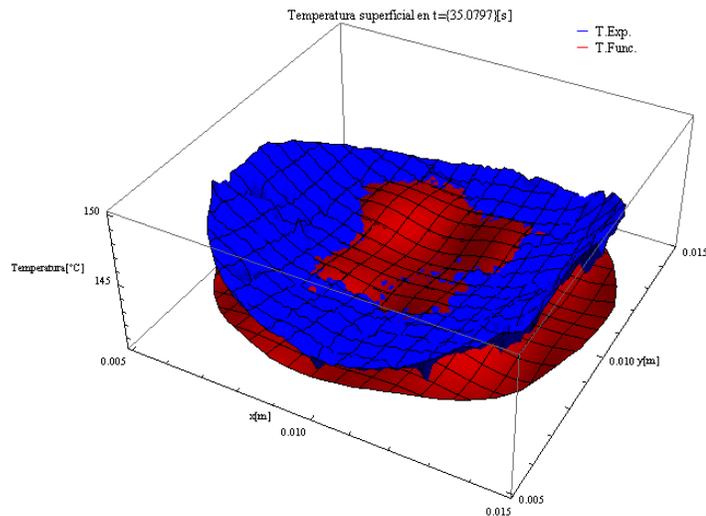


Figura 5.40: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.3 para  $t=35.0797[s]$ .

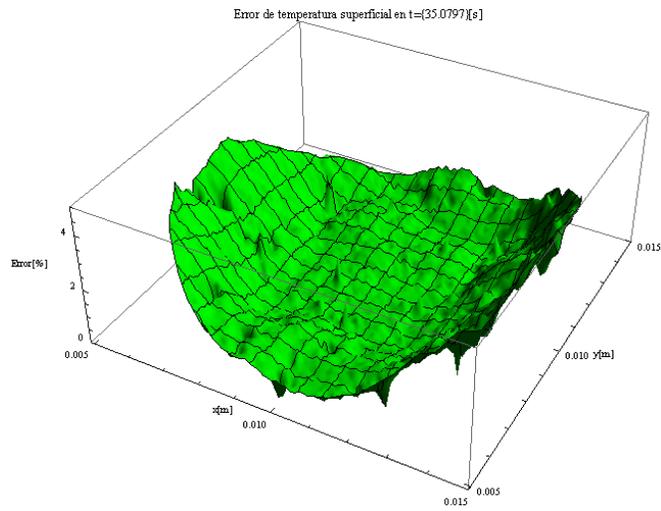


Figura 5.41: Gráfico superficial de error de función 5.3 para  $t=35.0797[s]$ .

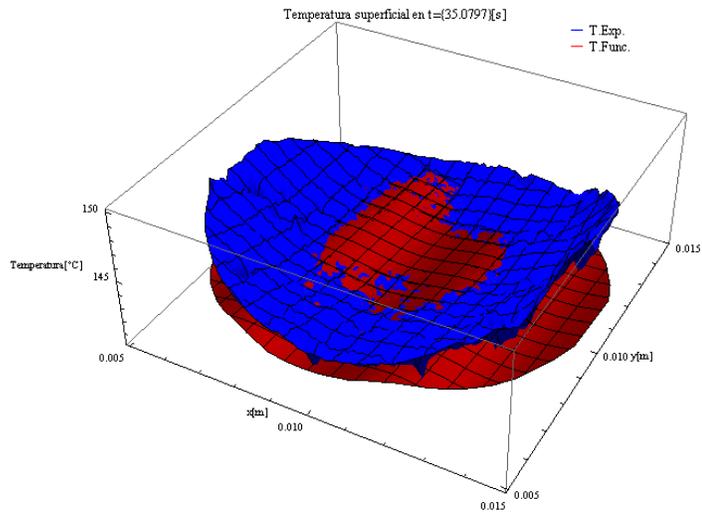


Figura 5.42: Gráfico superficial de temperatura experimental y temperatura según función 5.17 para  $t=35.0797[s]$ .

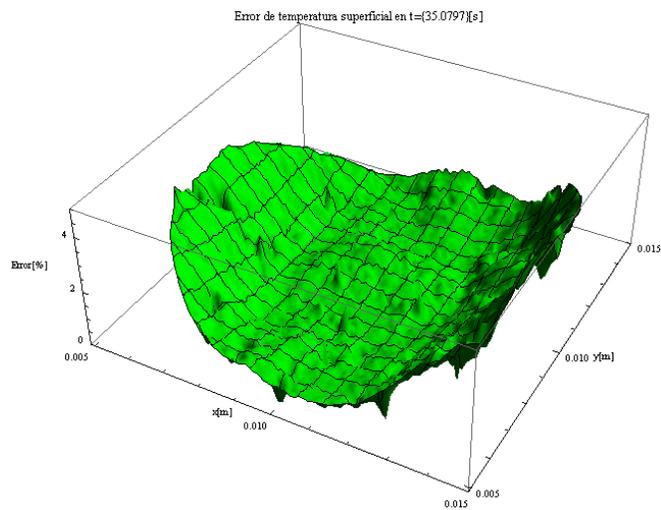


Figura 5.43: Gráfico superficial de error de función 5.17 para  $t=35.0797[s]$ .

### 5.1.2. **Discusión de resultados de funciones $T(x, y, t)$**

Tal como ocurre en el caso espacial, las funciones resultantes de temperatura tras la búsqueda por regresión simbólica se ajustan muy bien a los datos experimentales. Los errores en la zona superficial 1 fueron muy bajos, con errores máximos y errores promedio bajo el 1%.

Al llevar el análisis a una superficie mayor, se notan mayores diferencias entre las funciones escogidas y los datos experimentales. Esto se da por la curvatura de la función, que copia mucho mejor a los datos a lo largo del eje  $y$ , que del eje  $x$ . Esta tendencia se observa en el borde de la superficie, diferenciándose de lo que ocurre en el centro (zona superficial 1). Esto sucede porque las funciones  $T(x, y, t)$  son relativamente planas, no pudiendo copiar de buena forma la curvatura que presentan los datos experimentales en la nueva superficie. Esta característica de las funciones se atribuye a errores provocados por el suavizado de los datos de temperatura que se le entregaron a Eureka. Al suavizar una superficie, tienden a haber mayores errores en los bordes de ésta. En el caso de este proceso, esto se tomó en cuenta eliminando datos de los bordes de la superficie, pero es probable que esta remoción de datos no haya sido suficiente, lo que generó que la forma de la distribución de temperatura experimental suavizada no representara de buena manera a la distribución de los datos en bruto. Por lo tanto, en caso de una reedición de este trabajo, se sugiere considerar efectuar la búsqueda de funciones  $T(x, y, t)$  a partir de datos de temperatura sin suavizar, en desmedro de un menor tiempo de cómputo.

Considerando los resultados del caso puramente espacial y éste, que además considera el tiempo, se puede afirmar que el programa Eureka, y más generalmente, el método de regresión simbólica, han dado muy buenos resultados encontrando funciones que se ajusten a los datos experimentales de temperatura superficial.

También es importante notar que la distribución de temperaturas experimentales no tiene cambios drásticos a través del tiempo, por lo que las funciones encontradas mantienen errores bajos en todo el intervalo temporal.

## 5.2. Conductividad térmica $k(x, y, t)$

### 5.2.1. Método analítico

Se toman las funciones  $T(x, y, t)$  5.3 y 5.17, con las cuáles se intenta resolver la ecuación diferencial 5.22.

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial y} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} + k(x, y, t) \left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (5.22)$$

Con la ecuación 5.3 resulta imposible resolver la ecuación diferencial, no obteniendo una expresión para la conductividad térmica. Esto se explica por la complejidad de esta función de temperatura.

Para la función 5.17, primero se hace una simplificación, y se transforma la función dejándola en unidades de temperatura Kelvin, como se observa en la ecuación 5.23.

$$T(x, y, t) = 409.328 + (0.115812 + 0.003473 t)t - 209.411 y + 0.311 \cos(1601.93 x) \quad (5.23)$$

Se procede entonces a buscar la resolución de la ecuación diferencial, con lo que se obtiene una expresión de conductividad térmica  $k(x, y, t)$  representada en la ecuación 5.24, donde  $F$  es la función de distribución hipergeométrica.

$$k(x, y, t) = \frac{1}{\sin[1601.93 x]^{1.5} (\sin[1601.93 x]^2)^{0.5}} \left( (0.0350 + 0.0021 t) \cos[1601.93 x] F[0.5, 0.5, 1.5, \cos[1601.93 x]^2] \sin[1601.93 x]^{1.5} + t (y - 0.00026 \log[\tan[800.967 x]]) (\sin[1601.93 x]^2)^{0.5} \right) \quad (5.24)$$

Para analizar de mejor manera este resultado, se grafica la función obtenida, en la zona superficial 1, como se ve en la figura 5.44.

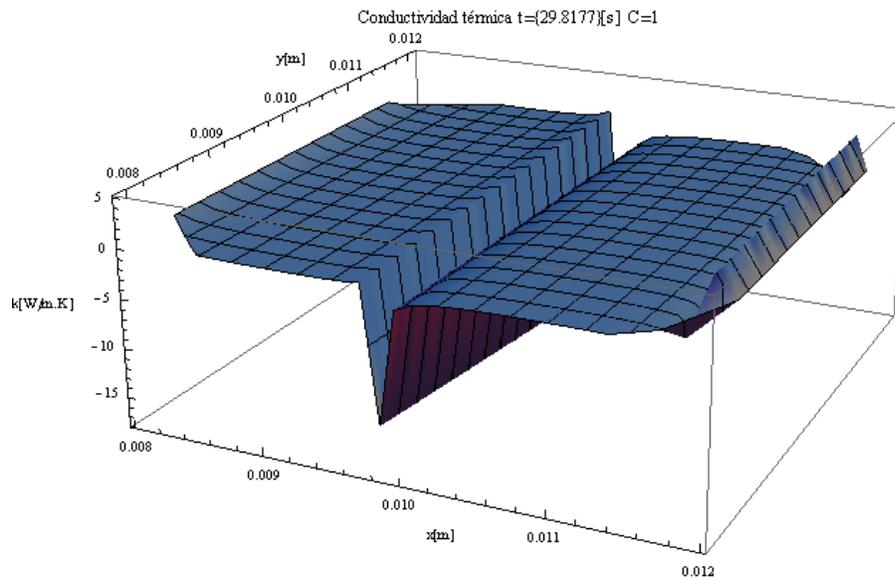


Figura 5.44: Gráfico superficial de conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $t=29.8177[s]$ .

Se observa que la superficie obtenida es relativamente constante, y presenta una discontinuidad cerca del medio del eje  $x$ . También se ve un aumento abrupto de la conductividad térmica en el borde de la superficie correspondiente a  $x \approx 0.012 [m]$ .

Además, se grafica la evolución de la conductividad térmica, en los primeros 30 segundos, para los puntos:

- $(x, y) = (0.0099408, 0.008047)$
- $(x, y) = (0.0080473, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.0099408, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.011953, 0.0099408)$
- $(x, y) = (0.0099408, 0.011953)$

Los resultados se entregan en las figuras 5.45, 5.46, 5.47, 5.48, y 5.49.

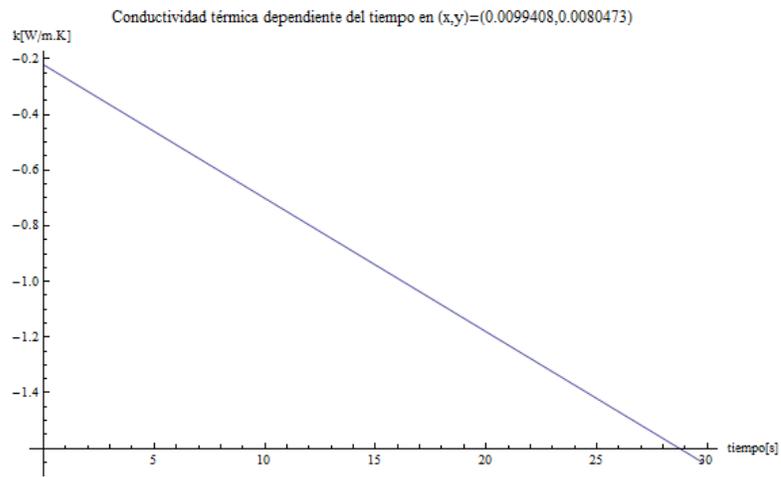


Figura 5.45: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $(x,y)=(0.0099408, 0.008047)$ .

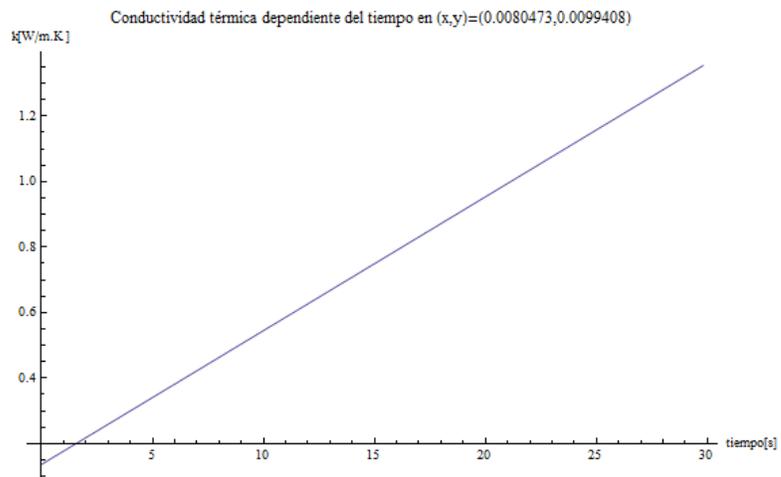


Figura 5.46: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $(x,y)=(0.0080473,0.0099408)$ .

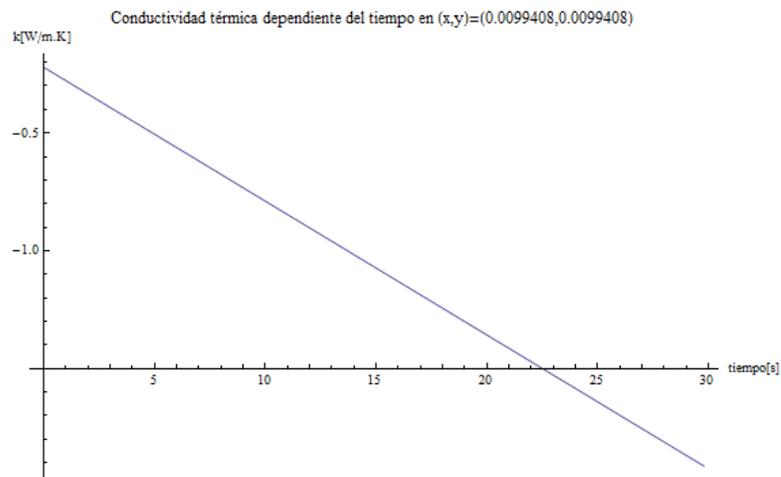


Figura 5.47: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $(x,y)=(0.0099408, 0.0099408)$ .

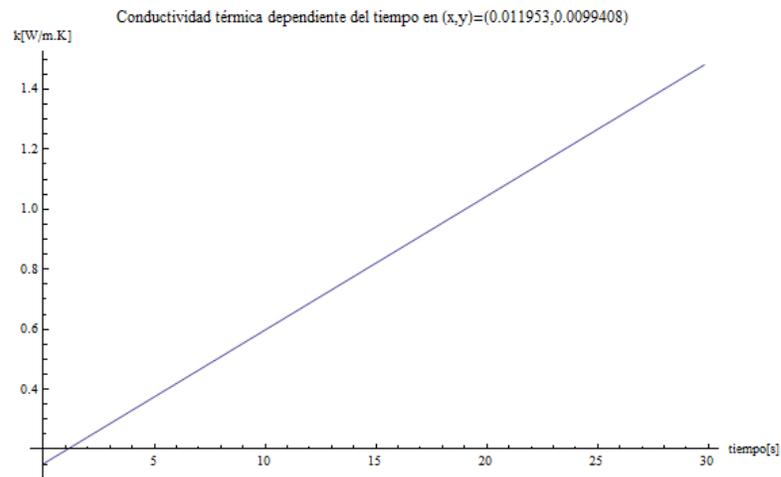


Figura 5.48: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $(x,y)=(0.011953, 0.0099408)$ .

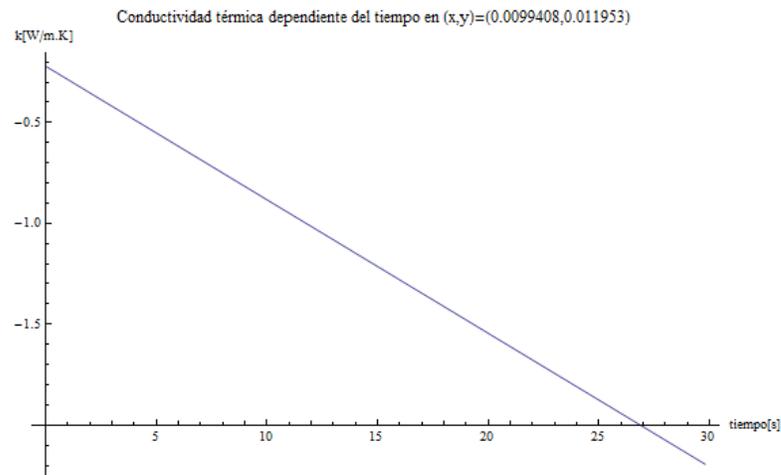


Figura 5.49: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  para  $(x,y)=(0.0099408, 0.011953)$ .

Los resultados de estos gráficos muestran que la conductividad térmica en los puntos  $(x,y) = (0.008047, 0.0099408)$ , y  $(x,y) = (0.011953, 0.0099408)$  crece con el paso del tiempo. En cambio, para  $(x,y) = (0.0099408, 0.008047)$ ,  $(x,y) = (0.0099408, 0.0099408)$ , y  $(x,y) = (0.0099408, 0.011953)$ , la conductividad térmica disminuye con el transcurso del tiempo. Es decir, para los puntos que están más cerca de los extremos del eje  $x$ , la conductividad aumenta, y para los puntos que están en el centro del eje esta disminuye, llegando inclusive a valores negativos.

## 5.2.2. Método numérico

Siguiendo el procedimiento detallado en la parte *g* de la sección 3.2.2., se obtienen las matrices  $T$ , de temperatura calculada, y  $k$  de conductividad térmica, para cada una de las 20 imágenes.

Los resultados de las temperaturas calculadas para cada imagen se resumen, en la tabla 5.4, donde se entregan los valores de temperatura promedio según la función  $T(x, y, t)$  o  $\overline{T}_{exp}$ , y de la temperatura calculada ( $\bar{T}$ ), así como el error máximo y error promedio en cada imagen.

Tabla 5.4: Resumen de resultados de cálculo numérico para temperatura.

Imagen (tiempo [s])	$\overline{T}_{exp}$ [K]	$\bar{T}$ [K]	Error promedio [%]	Error Máximo [%]
2 (0.250569)	407.37	406.544	0.91	3.39
3 (0.501138)	407.4	407.686	1.05	3.74
4 (0.751707)	407.43	407.011	1.07	3.48
5 (1.002276)	407.461	407.506	0.80	2.64
6 (1.252845)	407.492	407.339	1.08	3.66
7 (1.503414)	407.523	407.157	1.01	3.53
8 (1.753983)	407.555	407.766	1.00	3.50
9 (2.004552)	407.587	407.864	0.95	3.09
10 (2.255121)	407.62	407.012	1.03	3.30
11 (2.50569)	407.653	408.027	0.99	3.05
12 (2.756259)	407.686	407.512	1.06	3.53
13 (3.006828)	407.72	407.152	1.10	3.37
14 (3.257397)	407.755	408.19	1.03	3.48
15 (3.507966)	407.789	407.611	1.06	3.69
16 (3.758535)	407.825	407.629	1.12	3.46
17 (4.009104)	407.86	407.746	1.03	3.64
18 (4.259673)	407.896	407.709	1.08	3.73
19 (4.510242)	407.933	407.654	1.09	3.78
20 (4.760811)	407.97	408.345	1.05	3.37
21 (5.01138)	407.007	408.259	1.02	3.50

Los resultados expuestos en la tabla 5.4 demuestran que las iteraciones generaron matriz de temperatura calculada, con un error bastante bajo, respecto a la temperatura según la función 5.17, siendo el error puntual máximo de 3.78% en la imagen 19, el mayor error en todos los cálculos de temperatura.

En la tabla 5.5 se tienen los resultados del cálculo de conductividad térmica mediante la iteración, antes de la reducción de la matriz  $k$ . Los resultados luego de reducir la matriz, se muestran en la tabla 5.6

Tabla 5.5: Resumen de resultados de cálculo numérico para conductividad térmica.

Imagen (tiempo [s])	$\bar{k}$ [W/m.K]	$0 < k < 0.1$ [%]	$0.1 \leq k < 1$ [%]	$1 \leq k < 5$ [%]	$5 \leq k < 10$ [%]	$10 \leq k < 31$ [%]
2 (0.250569)	1.88	77.66	10.72	1.87	4.25	5.5
3 (0.501138)	2.35	72.28	13.04	1.92	5.79	6.97
4 (0.751707)	2.30	70.81	14.79	1.7	5.56	7.14
5 (1.002276)	2.35	70.01	14.85	2.56	5.72	6.86
6 (1.252845)	2.33	72	13.6	1.93	5.55	6.92
7 (1.503414)	2.09	72.68	14.39	1.65	5.16	6.12
8 (1.753983)	1.74	73.98	15.31	1.3	4.59	4.82
9 (2.004552)	1.79	74.72	14.11	1.14	5.27	4.76
10 (2.255121)	2.17	73.58	12.64	1.82	6.01	5.95
11 (2.50569)	1.99	72.34	15.19	1.76	5.04	5.67
12 (2.756259)	2.51	71.54	12.93	1.81	6.52	7.2
13 (3.006828)	2.66	71.54	11.91	2.09	5.96	8.5
14 (3.257397)	2.13	72.34	14.34	2.04	4.87	6.41
15 (3.507966)	2.17	72.11	14.23	2.1	5.38	6.18
16 (3.758535)	2.81	69.05	13.21	2.15	7.48	8.11
17 (4.009104)	2.29	71.32	14.39	2.1	5.33	6.86
18 (4.259673)	2.58	71.09	13.04	1.75	6.58	7.54
19 (4.510242)	2.48	72.05	12.36	1.93	6.35	7.31
20 (4.760811)	2.21	72.62	13.43	1.88	5.83	6.24
21 (5.01138)	2.20	71.94	14.68	1.36	5.61	6.41

Se observa en la tabla 5.5, que los valores de conductividad térmica se concentran en el intervalo  $0 < k < 1$  [W/m.K], con cerca del 90% del total de datos. Luego para el segundo intervalo, con conductividad térmica menor a  $5$  [W/m.K], no se observa una variación notoria, como sucede con el tercer intervalo. Se comprueba además que todos los valores están acotados superiormente por  $31$  [W/m.K].

Una vez reducida la matriz  $k$  se ve, en la tabla 5.6, como los valores se distribuyen de mejor forma en los distintos intervalos de conductividad térmica. Casi la totalidad de los valores se encuentra bajo los  $10$  [W/(m.K)]. Siguen siendo los valores del primer rango los preponderantes, pero la dispersión de los valores se ha disminuido considerablemente.

Tabla 5.6: Resumen de conductividad térmica luego de reducción de matriz k.

Imagen (tiempo [s])	$\bar{k}$ [W/m.K]	$0 < k < 0.1$ [%]	$0.1 \leq k < 1$ [%]	$1 \leq k < 5$ [%]	$5 \leq k < 10$ [%]	$10 \leq k < 31$ [%]
2 (0.250569)	1.88	56.12	11.74	13.77	16.33	2.04
3 (0.501138)	2.35	44.9	12.75	21.43	20.41	0.51
4 (0.751707)	2.30	44.9	12.24	21.43	20.41	1.02
5 (1.002276)	2.35	39.29	15.3	23.47	21.94	0
6 (1.252845)	2.33	45.41	12.24	20.41	21.43	0.51
7 (1.503414)	2.09	47.96	13.77	20.41	16.84	1.02
8 (1.753983)	1.74	57.65	10.72	14.28	16.84	0.51
9 (2.004552)	1.79	55.61	11.74	15.3	17.35	0
10 (2.255121)	2.17	47.45	12.75	20.92	18.37	0.51
11 (2.50569)	1.99	51.53	14.8	14.28	18.37	1.02
12 (2.756259)	2.51	48.47	10.2	13.27	26.02	2.04
13 (3.006828)	2.66	41.84	8.67	23.98	25	0.51
14 (3.257397)	2.13	46.94	12.24	22.45	17.35	1.02
15 (3.507966)	2.17	51.02	10.2	17.35	20.92	0.51
16 (3.758535)	2.81	33.67	17.86	19.9	27.55	1.02
17 (4.009104)	2.29	46.94	11.22	19.39	22.45	0
18 (4.259673)	2.58	42.86	11.22	20.41	24.49	1.02
19 (4.510242)	2.48	41.33	10.2	26.53	21.94	0
20 (4.760811)	2.21	53.57	9.7	12.75	22.45	1.53
21 (5.01138)	2.20	46.94	11.22	20.92	20.92	0

Tras llevar los valores obtenidos de conductividad térmica al programa Eureka, se obtienen 18 expresiones de conductividad térmica  $k(x, y, t)$ , que se muestran desde la ecuación 5.25, hasta la ecuación 5.42.

$$k(x, y, t) = 0.0791 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) - 2.94 * x \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) \quad (5.25)$$

$$k(x, y, t) = 0.0786 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) - 0.0222 \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) \quad (5.26)$$

$$k(x, y, t) = 7.7 y + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.27)$$

$$k(x, y, t) = 0.698 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t*\tan(-2.63*10^3*x))}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.28)$$

$$k(x, y, t) = 0.677 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(0.022 \tan(-2.63*10^3*x))}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.29)$$

$$k(x, y, t) = 7.58y + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(y*t)}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.30)$$

$$k(x, y, t) = 0.065 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11 \cos\left(\frac{0.016}{t}\right)}{y}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.31)$$

$$k(x, y, t) = 0.0654 + \tan(3.51 * 10^4 * x) \sin\left(\frac{-2.11}{y \cos(yt)}\right) - \tan(3.51 * 10^4 * x) \quad (5.32)$$

$$k(x, y, t) = y\left(0.0044t + 1.74 * 10^4 xy + 0.336 \sin\left(\frac{0.128}{y}\right) + 1.9y \tan(3.43 * 10^4 x)\right)^{7.15} \quad (5.33)$$

$$k(x, y, t) = y\left(0.0173 + 1.74 * 10^4 xy + \frac{0.0133}{t-1.85} + 0.382 \sin\left(\frac{0.127}{y}\right)\right)^{7.34} \quad (5.34)$$

$$k(x, y, t) = y\left(1.74 * 10^4 xy + \frac{0.0132}{t-1.85} + 0.379 \sin\left(\frac{0.127}{y}\right)\right)^{7.414} \quad (5.35)$$

$$k(x, y, t) = 30.1x + (177x + 0.0259t)^{7.79} \sin(6.27 + 2.01y) - t \sin(6.27 + 2.01y) - 24y \quad (5.36)$$

$$k(x, y, t) = 31.7x + (176x + 0.0238t)^{7.87} \sin(6.27 + 2.01y) - 25.9 \tan(y) \quad (5.37)$$

$$k(x, y, t) = 31.7x + (176x + 0.0238t)^{7.87} \sin(6.27 + 2.01y) - 25.9y \quad (5.38)$$

$$k(x, y, t) = 0.318 + (178x + 0.0235t)^{7.76} \sin(6.27 + 2.06y) - 33.8y \quad (5.39)$$

$$k(x, y, t) = 0.303 + (192x + 0.0262t)^{7.91} \sin(6.28 + y) - 31.8y \quad (5.40)$$

$$k(x, y, t) = 5.5x + (169x + 0.0218t)^{9.19} \sin(6.28 + y) \quad (5.41)$$

$$k(x, y, t) = 0.0426 + (171x + 0.0221t)^{9.09} \sin(6.28 + y) \quad (5.42)$$

Las funciones se analizan considerando su complejidad, su forma y su rango de valores. Los errores son muy altos producto de la dispersión de los datos, y como la mayoría de los datos de conductividad térmica son pequeños, Eureka encuentra funciones que se ajusten en ese rango de valores. Por lo tanto no se hace un análisis de errores para elegir una función por sobre otra.

Desde la ecuación 5.25 hasta la 5.32, las funciones tienen una forma muy similar pero en ciertas zonas en las que se evaluaron, presentaron valores negativos de conductividad térmica. De las restantes funciones, la de la ecuación 5.33 es la que muestra un comportamiento más acorde con el esperado. Se nota claramente que depende de la posición  $(x, y)$  como se ve en la figura 5.50, mostrando valores mayores mientras más se avanza en los ejes  $x$  e  $y$ . También se observa la evolución a través del tiempo, donde la

forma se mantiene similar a la de la figura 5.50, pero aumentando gradualmente los valores de conductividad térmica a medida que se avanza en el tiempo.

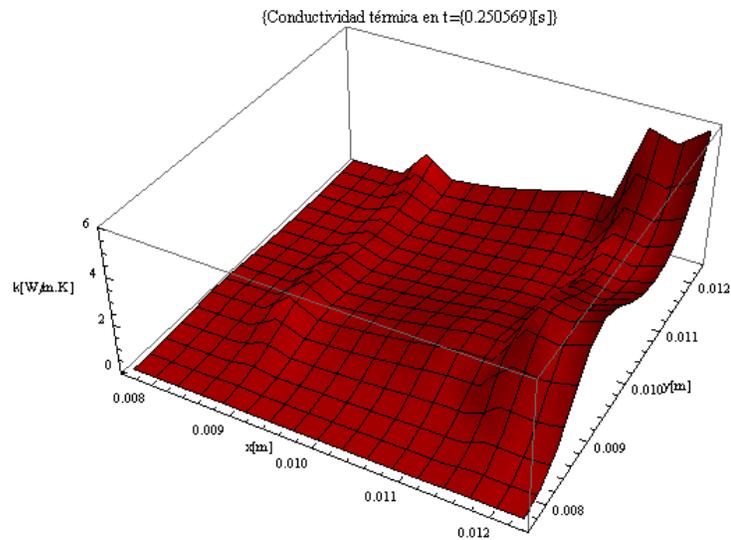


Figura 5.50: Conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $t=0.250569[s]$ .

Para complementar lo visto en la figura 5.50, se muestra la comparación de la función (azul) con los valores de la matriz  $k$  (rojo), mediante gráfico de superficie en la figura 5.51, y gráficos de puntos en las figuras 5.52 y 5.53.

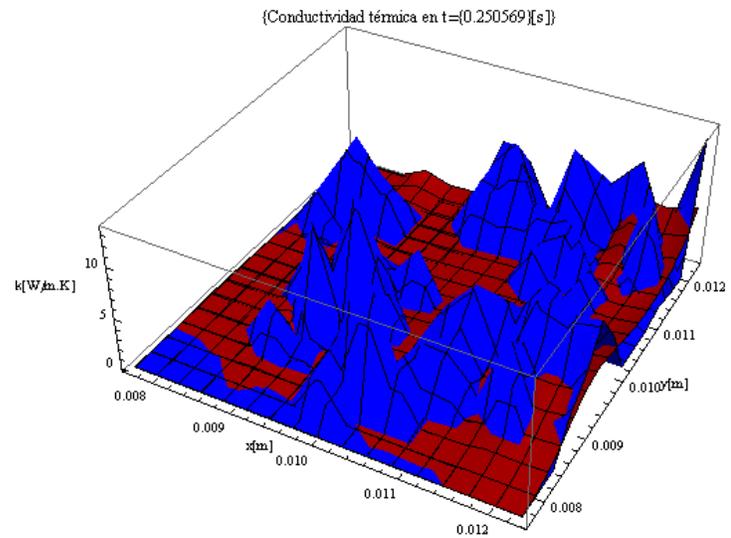


Figura 5.51: Conductividad térmica de matriz  $k$  y según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $t=0.250569[s]$ .

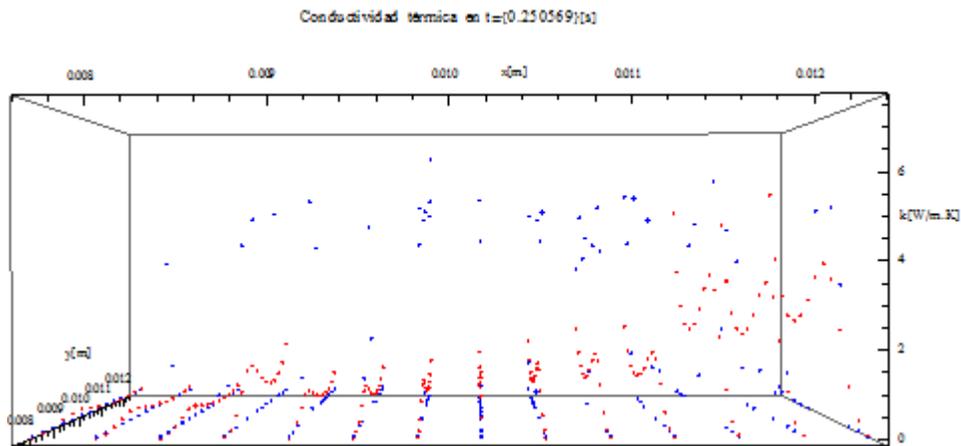


Figura 5.52: Gráfico de puntos de conductividad térmica de matriz  $k$  y según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $t=0.250569[s]$  en vista de eje  $x$ .

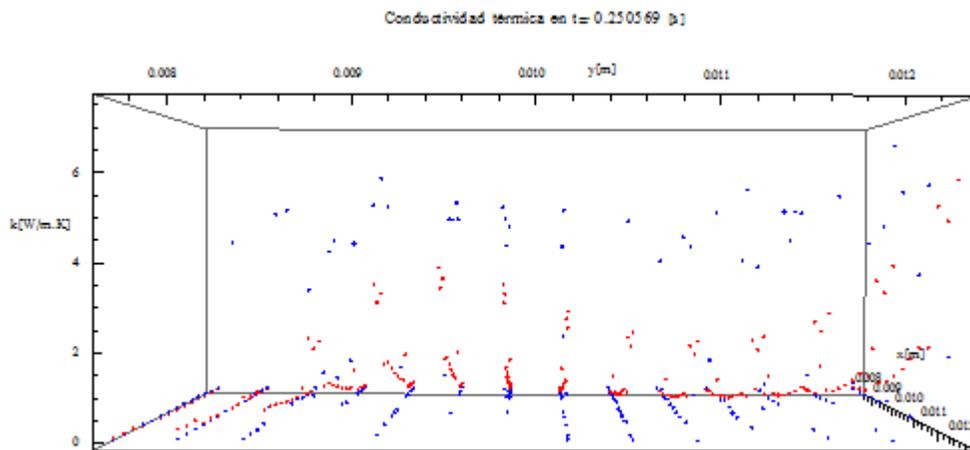


Figura 5.53: Gráfico de puntos de conductividad térmica de matriz  $k$  y según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $t=0.250569[s]$  en vista de eje  $y$ .

La evolución de la conductividad térmica a través del tiempo, se analiza graficando, como se ve desde la figura 5.54, hasta la figura 5.58, la evolución para cinco puntos que son los siguientes:

- $(x, y) = (0.00840214, 0.00840214)$
- $(x, y) = (0.00840214, 0.01159732)$
- $(x, y) = (0.009822, 0.009822)$
- $(x, y) = (0.01159732, 0.00840214)$
- $(x, y) = (0.01159732, 0.01159732)$

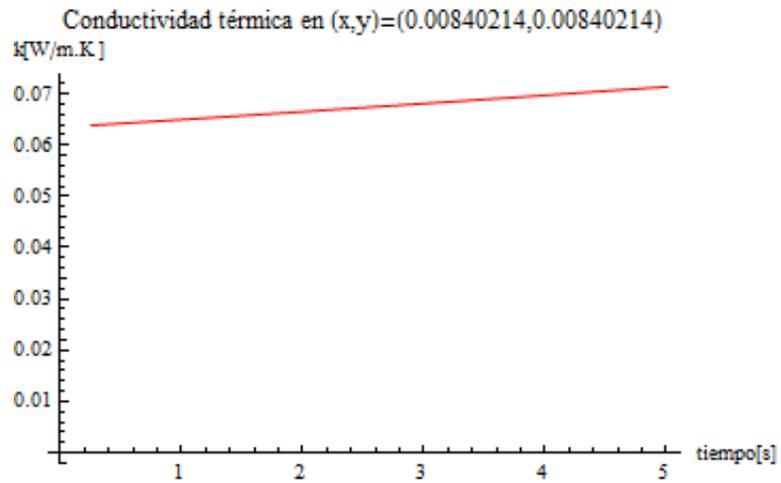


Figura 5.54: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $(x,y)=(0.00840214,0.00840214)$ .

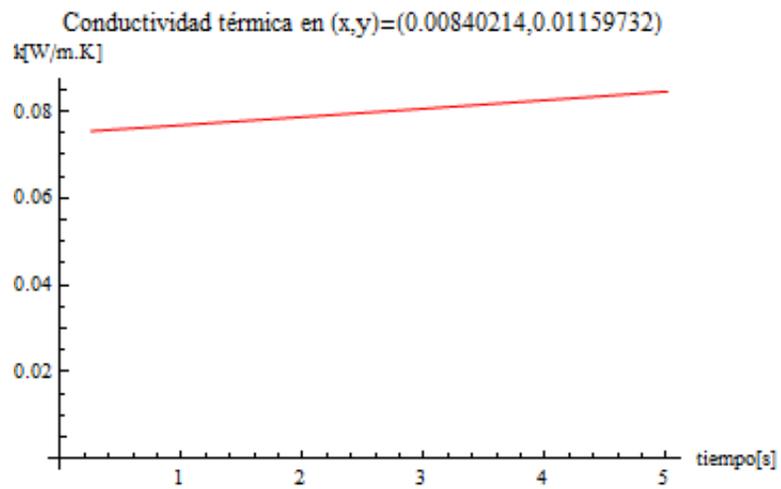


Figura 5.55: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $(x,y)=(0.00840214,0.01159732)$ .

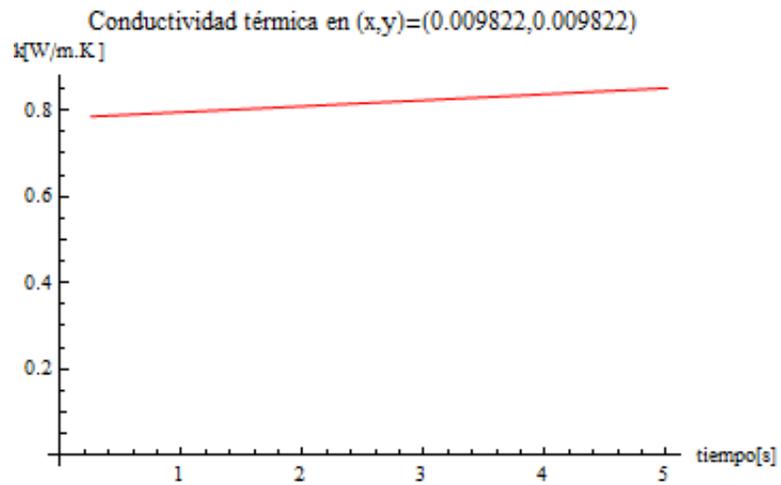


Figura 5.56: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $(x,y)=(0.009822,0.009822)$ .

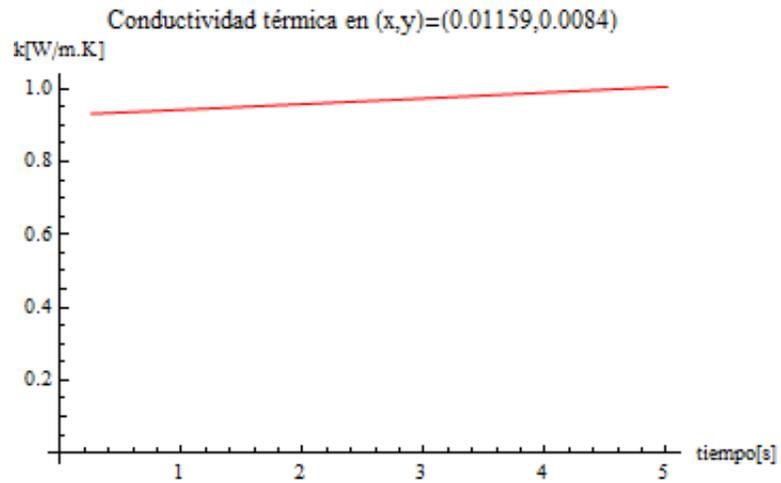


Figura 5.57: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $(x,y)=(0.01159,0.0084)$ .

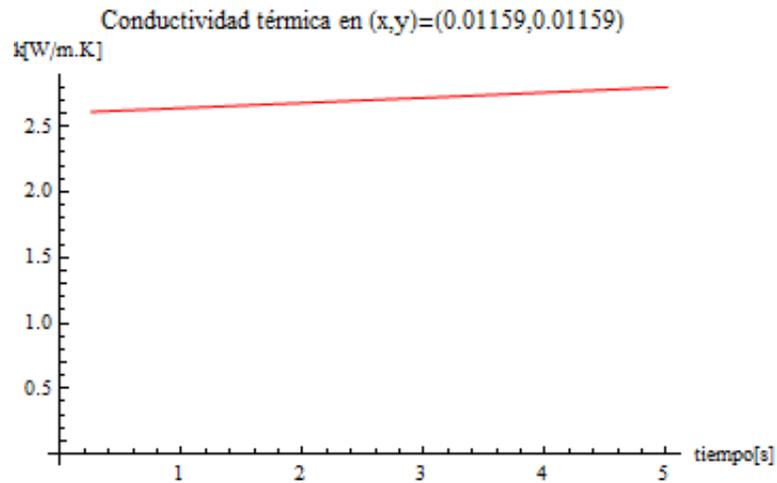


Figura 5.58: Evolución de la conductividad térmica según función  $k(x,y,t)$  5.33 para  $(x,y)=(0.01159,0.01159)$ .

A partir de las figuras de evolución de conductividad térmica, se ve en los cinco puntos analizados como la conductividad aumenta paulatinamente en los 5 segundos que transcurren.

### **5.2.3. Discusión de resultados de conductividad térmica $k(x, y, t)$**

A partir de los resultados del método analítico y el análisis de la función  $k(x, y, t)$ , se puede determinar que esta no es apropiada como modelo para este problema. En algunas zonas la conductividad decrece a valores negativos de conductividad térmica, lo cual no es deseable pues la interpretación de estos valores es difícil. Estos valores se atribuyen, a los mismos factores de discontinuidad del material comentados en la sección 4.2.3.

Se presentan problemas similares a los observados en el método analítico del caso espacial, con valores fuera del rango esperado, y con la función siendo indefinida para un determinado valor de  $x$ , en el sector medio del eje. Si bien, en dos de los puntos analizados, la evolución de la conductividad térmica con el paso del tiempo aumentó, y en un rango de valores aceptables, esto no puede extrapolarse hacia otros sectores de la superficie.

Por otra parte, la complejidad de la función  $k(x, y, t)$  encontrada es bastante alta, lo cual no es deseable, lo que junto con las razones anteriores llevan a no recomendar su uso.

La resolución de la ecuación de calor utilizando funciones de temperatura de complejidad media o alta, es muy difícil, lo que se comprueba ya que con sólo 5 de las 21 funciones  $T(x, y, t)$  encontradas puedo resolverse esta ecuación. Las cuatro restantes expresiones de conductividad térmica dieron resultados muy similares, y que se invalidaban por las mismas razones que el caso expuesto. Esta dificultad de encontrar soluciones satisfactorias, puede explicar el nulo éxito al buscar trabajos científicos de referencia que abordaran este método.

En el método numérico los resultados luego de las iteraciones son bastante buenos para el caso del cálculo de temperaturas, donde se mantienen errores puntuales bajo el 4%. Para el cálculo de conductividad térmica, los resultados se asemejan a los obtenidos en el caso espacial, obteniendo una dispersión considerable en la distribución de los valores a lo largo de las matrices.

La reducción de las matrices de conductividad térmica demostró ser una buena opción para poder obtener funciones  $k(x,y,t)$  desde Eureka, ya que sin esta reducción el grado de dispersión era mucho mayor y las funciones encontradas no dependían del tiempo, probablemente porque el tiempo de trabajo del programa para lograr esto excedía los plazos con los que se contaban.

Analizando la forma de la función  $k(x,y,t)$  elegida, se esperaba una forma con algo de simetría pero no es lo que se alcanza. Es importante señalar, que otras de las funciones tenían una forma que parecía mejor, pero que en muchos puntos podía representar valores negativos de conductividad térmica, por lo que no se escogieron.

A partir de las figuras de evolución de conductividad térmica se ve, en los cinco puntos analizados, como la conductividad aumenta paulatinamente en los 5 segundos que transcurren. En este sentido, la función se comporta como se espera, pues junto con el aumento de temperatura, la conductividad térmica también debe aumentar. El rango de los valores de conductividad térmica que se obtiene se condice con las referencias, pues en la mayoría de la zona analizada estos valores se mueven en el rango  $0 < k < 1$  [W/m.K], mientras la referencia para la conductividad térmica de pellets de alúmina con alta porosidad rondaba desde los 0.07 [W/m.K], hasta los 0.242 [W/m.K]. En los sectores donde estos valores se sobre pasan, se deduce que hay menor presencia de porosidad, y mayor concentración de platino o alúmina sólida pura.

## 6. Conclusiones

Se obtuvieron grupos de funciones de temperatura dependientes de la posición en la superficie, desde datos de temperatura experimental de la pastilla. Tras realizar los análisis y verificaciones detalladas en este informe, se puede asegurar que la mayoría de las funciones encontradas se comportaron bien en los diferentes casos estudiados, generalmente manteniéndose bajo el 5% de error máximo que se definió como límite aceptable. Para el caso donde se incorpora la evolución temporal, las funciones de temperatura superficial encontradas también tienen un comportamiento muy bueno en los análisis que se les efectuaron, por lo que se puede concluir que el método de regresión simbólica es lo suficientemente confiable para realizar la búsqueda de funciones que se ajusten a los datos experimentales. Por lo tanto el análisis de temperatura, considerando posición en la superficie y el transcurso del tiempo, tuvo resultados satisfactorios.

El método analítico que se utilizó para encontrar una función de conductividad térmica no tuvo los resultados que se esperaban. Las funciones que se obtuvieron no cumplían con el comportamiento esperado para la conductividad térmica, mostrando valores no aceptables en algunas zonas de la superficie analizada. Esto se repitió tanto para el análisis espacial, como para el espacial y temporal. Se atribuyen estos resultados principalmente, a la forma de las funciones de temperatura que se seleccionaron, por lo que se podrían esperar mejores resultados si en la obtención de estas funciones de temperatura se utilizaran otros bloques de construcción que dieran paso a la obtención de funciones menos complejas.

Los resultados del método numérico para la obtención de un modelo de conductividad térmica, resultaron de mejor forma que los del método analítico. Para el caso espacial y para el caso que incorpora el tiempo, se obtuvieron modelos de conductividad térmica  $k(x,y)$  y  $k(x,y,t)$  respectivamente. Si bien las estructuras de estas funciones no pueden interpretarse de muy buena forma, el hecho de obtener estos resultados permite pensar que realizando algunas modificaciones al método los resultados podrían mejorar.

El principal problema en el método numérico fue el de la dispersión de valores para la conductividad térmica, lo que dificulta mucho la búsqueda de una función que se ajuste a esos datos mediante la regresión simbólica. Sin

embargo, el que esté presente esta dispersión tiene explicación en las características del material, que es poroso y formado por compactación de polvos. Esto produce que se encuentre una gran porosidad en la superficie lo que afecta la medición de temperatura superficial, y por ende el resultado de la conductividad térmica en esa zona, y también provoca una distribución irregular de los componentes, en este caso la alúmina y el platino, lo que genera que en algunos puntos se pueda tener mucho más platino que en otros y, por ende, tener una conductividad térmica mayor.

Los modelos de conductividad térmica encontrados mediante el método analítico son teóricamente válidos por el proceso en que se encontraron, pero no son aplicables por los valores fuera del rango aceptable que entregan (valores negativos o positivos de orden de magnitud mucho menor que el esperado por las referencias). Por otra parte, los modelos encontrados mediante el método numérico son válidos al basarse en una metodología probada, y son aplicables a problemas donde se utilice el mismo material que en este trabajo, o similares con una mayoritaria y alta presencia de óxido de aluminio (alúmina).

## Referencias

- [1] Francisco J. Gracia, Eduardo E. Wolf: Non-isothermal dynamic Monte Carlo simulations of CO oxidation on Pt supported catalyst, Chemical Engineering Science, 2004, Vol.59, pp. 4723-4729.
- [2] Frank P. Incropera, David P. DeWitt: "Fundamentos de Transferencia de Calor", 4a edición, PRENTICE HALL, México, 1999.
- [3] M.Necati Özisik, Helcio R.B. Orlande: "Inverse Heat Transfer Fundamentals and Applications", Taylor & Francis, New York, 2000.
- [4] K. Ishizaki, S. Komarneni, M. Nanko: "Porous Materials: Process technology and Applications", vol.4 de "Materials Technology Series", Kluwer Academic Publishers, Gran Bretaña, 1998.
- [5] J.F. Izquierdo: "Cinética de las Reacciones Químicas", Edicions Universitat Barcelona, 2004.
- [6] J.E. Torres, J.J. Martínez: Tutorial de Programación Genética, Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- [7] R.A. Moreno Parra: Programación Genética: La regresión Simbólica, Unilibre Cali, 2007.
- [8] Práctica 2ª. Reducción del ruido en una imagen digital, Departamento de Ingeniería electrónica, Telecomunicación y Automática, Área de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Jaén.
- [9] Yolanda González Cid, Filtrado de imágenes, Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears.
- [10] Y. Jaluria, K. E. Torrance: "Computational Heat Transfer", Second Edition, Taylor & Francis, New York – Londres, 2003.
- [11] Alumina (99), Software CES Edupack 2009, Granta Design.
- [12] R. A. Mischke, J. M. Smith: Thermal conductivity of alumina catalyst pellets, I&EC Fundamentals, 1962, Vol.1, No.4, pp. 288-292.

- [13] Hod Lipson, Michael Schmidt. Página web de Nutonian, tutoriales sobre el software Eureka Formulize, <http://creativemachines.cornell.edu/eureka>
- [14] V. An, C. de Izarra: Measurements of thermal conductivity of Aluminum nanopowders by photoacoustic Spectroscopy, EDA Publishing/ENS 2007, 2007, pp.49-52.

# Anexos

## A. Discusión de conductividad térmica constante

En esta sección se desarrolla una pequeña discusión para justificar el hecho de que la conductividad térmica no es constante, y como afectaría en el caso de considerarla así para efectos de este trabajo.

Para el caso espacial, la ecuación de calor que se tiene cuando la conductividad térmica no es constante es

$$0 = \frac{\partial k(x, y)}{\partial x} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + k(x, y) \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial k(x, y)}{\partial y} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} + k(x, y) \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}$$

Si se considera  $k = cte$ , se tiene entonces

$$0 = k \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right)$$

Para que esta ecuación se cumpla se tienen dos opciones:

- $k = 0$
- $\left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0$

La conductividad térmica no es nula para ningún material, por lo que la única opción viable es la segunda. Es decir, que se cumpla

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2}$$

Ninguna de las funciones  $T(x, y)$  encontradas en este trabajo cumple esta condición, por lo que puede concluirse que el modelo de conductividad térmica  $k(x, y)$  no puede ser constante. Además, la única forma de que se cumpla esta condición es que la función de temperatura sea totalmente simétrica.

Para el caso que incorpora el tiempo, se tiene que la ecuación está determinada, para una conductividad térmica variable, como

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial y} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} + k(x, y, t) \left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right)$$

Si se considera la conductividad térmica como una constante se tiene la ecuación

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right)$$

Esto es equivalente a

$$k = \rho c_p \frac{\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}}{\left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right)}$$

Definiendo  $A$  como

$$A = \frac{\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}}{\left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right)}$$

Entonces la única opción de que la conductividad térmica fuera constante es que  $A$  también lo sea. De todas las funciones  $T(x, y, t)$  que se obtuvieron, ninguna tiene las características que permitan que  $A$  sea constante.

Por ejemplo, para la función escogida, ecuación 5.17,  $A$  queda dado por

$$A = \frac{0.115812 + 0.00694516 t}{-798523 \cos(1601.93 x)}$$

Por lo tanto se demuestra que la conductividad térmica para este problema no debe ser constante.

## B. Influencia de valores de densidad en método numérico

Para determinar la influencia que tiene la densidad en las iteraciones que se realizan al aplicar el método numérico se itera a partir de matrices de temperatura y conductividad térmica iniciales idénticas.

Los valores de densidad que se utilizan son el menor y mayor respecto a las referencias que se indican en la sección 2.7, estos son  $\rho_1 = 365 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  y  $\rho_2 = 1121 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ .

Los resultados obtenidos para ambos casos, se ven en la tabla B.1, donde se entregan los errores de la temperatura calculada con respecto a los valores de temperatura según la función  $T(x, y, t)$ .

Tabla B.1: Influencia de densidad en el cálculo de temperatura del método numérico.

Densidad	Error máximo [%]	Error promedio [%]
$\rho_1$	3.363	1.011
$\rho_2$	3.189	0.916

Se puede apreciar como los errores son ligeramente mayores cuando se utiliza la densidad menor. De todas formas, la diferencia es muy pequeña.

También se analiza el cambio que se produce en la matriz final de conductividad térmica que se obtiene. Mediante la tabla B.2 se ven las concentraciones de los valores de conductividad térmica que se obtienen para cada caso.

Tabla B.2: Influencia de densidad en el cálculo de conductividad térmica del método numérico.

Densidad	$\bar{k}$ [W/m.K]	$0 < k < 0.1$ [%]	$0 < k < 1$ [%]	$0 < k < 5$ [%]	$0 < k < 10$ [%]	$0 < k < 31$ [%]
$\rho_1$	2.08	76.08	86.96	88.49	94.27	100
$\rho_2$	2.01	75.17	87.07	89.11	93.99	100

Por lo que se ve en los resultados expuestos en la tabla B.2, tanto la conductividad promedio, como la distribución de valores, son bastante similares entre ambos casos.

Calculando el error de la matriz de conductividad térmica según la densidad  $\rho_1$  con respecto a la obtenida con  $\rho_2$ , se tiene que el error promedio es de 3739%, lo que es excesivamente alto. Sin embargo, en el 63.4% de los elementos de la matriz se tiene un error de 0%. Esto indica que la mayoría de la matriz de conductividad térmica resulta igual, y en parte del resto de los elementos se producen errores muy grandes que elevan el valor del error promedio considerablemente.

Por todo esto puede concluirse que el valor de la densidad que se tome, si varía los resultados, pero no de forma significativa, por lo que los resultados que se obtengan en el trabajo no deben perder validez por este concepto.

## C. Algoritmo de cálculo numérico de conductividad térmica en Mathematica

Para el caso espacial el algoritmo queda como se observa en el siguiente código escrito en el programa Mathematica.

```
Texp0 = Import[
  "C:\\Conductividad termica\\matrizTcuadrocentral_Tbruto19_K.txt", "Table"];
T10 = Table[0, {i0, 74}, {j0, 74}];
For[i0 = 1, i0 < 75, i0++,
  For[j0 = 1, j0 < 75, j0++,
    T10[[i0, j0]] = Texp0[[i0, j0]];
  ]
]
PromedioT10 = Mean[Mean[T10]]
T20 = T10;
For[i0 = 3, i0 < 75, i0++,
  For[j0 = 3, j0 < 75, j0++,
    T20[[i0, j0]] = 0;
  ]
]
k10 = Table[0, {i0, 74}, {j0, 74}];
k20 = Table[RandomReal[{0, 0.1}], {i0, 74}, {j0, 74}];
error0 = (PromedioT10 * 0.01) ^ 2 * 74 ^ 2
suma0 = error0 + 1
i00 = 3;
```

```

DateList[]
While[i00 ≠ 75,
{suma0 = 0}
&&
{
For[i0 = 3, i0 < 75, i0++,
For[j0 = 3, j0 < 75, j0++,
{If[(4 k20[[i0, j0]] - k20[[i0, j0 - 1]] - k20[[i0 - 1, j0]]) = 0,
k20[[i0, j0]] = k20[[i0, j0]] + 0.1}
&& {T20[[i0, j0]] = (k20[[i0, j0]] (3 * T20[[i0 - 1, j0]] +
3 * T20[[i0, j0 - 1]] - T20[[i0 - 2, j0]] - T20[[i0, j0 - 2]]) - k20[[
i0 - 1, j0]] T20[[i0 - 1, j0]] - k20[[i0, j0 - 1]] T20[[i0, j0 - 1]]) /
(4 k20[[i0, j0]] - k20[[i0, j0 - 1]] - k20[[i0 - 1, j0]])}
&& {suma0 = suma0 + (T10[[i0, j0]] - T20[[i0, j0]]) ^ 2}
}
}

k10 = k20

For[i00 = 3, i00 < 75, i00++,
For[j00 = 3, j00 < 75, j00++,

If[(T10[[i00, j00]] - T20[[i00, j00]]) ^ 2 > 1 && k20[[i00, j00]] < 30,
{k20[[i00, j00]] = k20[[i00, j00]] + 0.1} && {j00 = 76} && {i00 = 76}]
}

]}

Print[suma0]
}
DateList[]

```

Para el caso temporal se tiene un algoritmo que se repite para cada imagen que conforma el intervalo de tiempo escogido. Este algoritmo es muy similar al del caso espacial, variando solo las condiciones de error que se encuentran en el último *If* del código. El algoritmo se presenta mediante el código que se ve a continuación, el que muestra la iteración realizada para los dos primeros instantes de tiempo.

```

Do[
  Evaluate[Symbol[
    "Tt" <> ToString[i]
  ]]
  = Import[
    "C:\\Conductividad termica\\temporal\\matrizTcuadrocentraltemporal_T3_K_" <>
    ToString[i] <> ".txt", "Table"]
  , {i, 1, 120}]
(*kt1=Table[RandomReal[{0,0.1}],{a,42},{b,42}];*)
Do[
  Evaluate[Symbol[
    "kt" <> ToString[i]
  ]]
  = kt1;
  , {i, 15, 120}]
Tc1 = Tt1;
Tc2 = Tt2;
Tc3 = Tt3;

For[i = 3, i < 43, i++, For[j = 3, j < 43, j++, Tc1[[i, j]] = 0]];
For[i = 3, i < 43, i++, For[j = 3, j < 43, j++, Tc2[[i, j]] = 0]];
For[i = 3, i < 43, i++, For[j = 3, j < 43, j++, Tc3[[i, j]] = 0]];

densidad = 672;
cp = 662;
deltax = 1.1834 * 10^(-4);
deltat = 0.250569;

PromedioTt2 = Mean[Mean[Tt2]]
error2 = (PromedioTt2 * 0.01)^2 * deltat * 42^2
suma2 = error2 + 1
i3 = 0

DateList[]
While[
  i3 ≠ 43,
    {suma2 = 0;}

    {For[i2 = 3, i2 < 43, i2++,
      For[j2 = 3, j2 < 43, j2++,

Tc2[[i2, j2]] =
  (densidad * cp * Tt1[[i2, j2]] * deltax^2 + deltat * (kt2[[i2, j2]] *
    (-3 * Tc2[[i2 - 1, j2]] + Tc2[[i2 - 2, j2]] - 3 * Tc2[[i2, j2 - 1]] +
    Tc2[[i2, j2 - 2]]) + Tc2[[i2 - 1, j2]] * kt2[[i2 - 1, j2]] +
    Tc2[[i2, j2 - 1]] * kt2[[i2, j2 - 1]])) / (densidad * cp * deltax^2 +
    deltat * (-4 * kt2[[i2, j2]] + kt2[[i2 - 1, j2]] + kt2[[i2, j2 - 1]]));

    {suma2 = suma2 + deltat * (Tt2[[i2, j2]] - Tc2[[i2, j2]])^2;}

```

```

    ]
  }}

  {For[i3 = 3, i3 < 43, i3++,
    For[j3 = 3, j3 < 43, j3++,
      If[(Tt2[[i3, j3]] - Tc2[[i3, j3]])^2 >
        (PromedioTt2 * 0.02)^2 && kt2[[i3, j3]] < 30,
        {kt2[[i3, j3]] = kt2[[i3, j3]] + 0.1;} && {i3 = 44} && {j3 = 44} ]
      ]
    ]}

  Print[suma2 " suma2"]

]
DateList[]

PromedioTt3 = Mean[Mean[Tt3]]
error3 = (PromedioTt3 * 0.01)^2 * deltat * 42^2
suma3 = error3 + 1
i3 = 0

DateList[]
While[
  i3 ≠ 43,
    {suma3 = 0}

    {For[i2 = 3, i2 < 43, i2++,
      For[j2 = 3, j2 < 43, j2++,

        Tc3[[i2, j2]] =
          (densidad * cp * Tc2[[i2, j2]] * deltax^2 + deltat * (kt3[[i2, j2]] *
            (-3 * Tc3[[i2 - 1, j2]] + Tc3[[i2 - 2, j2]] - 3 * Tc3[[i2, j2 - 1]] +
              Tc3[[i2, j2 - 2]]) + Tc3[[i2 - 1, j2]] * kt3[[i2 - 1, j2]] +
                Tc3[[i2, j2 - 1]] * kt3[[i2, j2 - 1]])) / (densidad * cp * deltax^2 +
                  deltat * (-4 * kt3[[i2, j2]] + kt3[[i2 - 1, j2]] + kt3[[i2, j2 - 1]]));

          {suma3 = suma3 + deltat * (Tt3[[i2, j2]] - Tc3[[i2, j2]])^2;}

        ]
      ]}

  {For[i3 = 3, i3 < 43, i3++,
    For[j3 = 3, j3 < 43, j3++,
      If[(Tt3[[i3, j3]] - Tc3[[i3, j3]])^2 >
        (PromedioTt3 * 0.02)^2 && kt3[[i3, j3]] < 30,
        {kt3[[i3, j3]] = kt3[[i3, j3]] + 0.1;} && {i3 = 44} && {j3 = 44} ]
      ]
    ]}
  ]}

```