UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS EN SEGUROS CONTRA SISMOS.

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

MÓNICA BELÉN CARVAJAL PINTO

PROFESOR GUÍA:
SERVET MARTÍNEZ AGUILERA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI
JOAQUÍN FONTBONA TORRES

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA
POR: MÓNICA CARVAJAL PINTO
FECHA: 09/01/2013
PROF. SERVET MARTÍNEZ

HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS EN SEGUROS CONTRA SISMOS.

Esta memoria se centra en el estudio de seguros contra terremotos, pretendiendo generar nuevas herramientas que permitan sentar las bases de primas calculadas con fundamentos científicos. Se utilizaron tanto, modelos de Sismología y Finanzas, como resultados de Teoría de Probabilidades y Procesos Estocásticos. Se subraya que este es un primer estudio sobre el tema, que describe las variables en juego y un modelo que las relaciona, pero que aún no refleja completamente la complejidad que se presenta en una situación real.

Primero se describen los modelos de finanzas convencionales para seguros. Además se utilizan conceptos de Sismología con el fin de estudiar la distribución de probabilidad de las reclamaciones para el caso de terremotos, acentuando los distintos niveles de aleatoriedad involucrados.

Se creó un modelo que describe el proceso de riesgo que enfrenta una compañía aseguradora cuando considera este tipo de fenómenos. Luego, mediante el uso de Procesos de Markov Deterministas por Pedazos y resultados de Teoría de Renovación, se logró calcular el valor de la prima neta en este modelo. Además, se determinó una prima tal que el balance de la aseguradora sea una martingala.

Para considerar en este estudio la presencia de compañías reaseguradoras se describe un Mercado de Reaseguros Proporcionales. Se dan las condiciones necesarias en la fijación de precios para que no existan posibilidades de arbitraje en el mercado. Tales condiciones traen consigo la búsqueda de una medida martingala equivalente de probabilidad, bajo la cual el proceso de riesgos de un seguro sea una martingala. Sujeto al contrato preexistente entre clientes y aseguradora se busca tal medida dentro de un conjunto de medidas martingalas equivalentes específico y, para dos ejemplos, se calcula el precio de un reaseguro de exceso de pérdida bajo estas condiciones.

Por último, como complemento a los cálculos anteriores, se consideran dos formas alternativas de cálculo de primas, diferenciándolas según el momento en que ingresa un cliente y toma el seguro en la compañía.

A mis padres por enseñarme lo que es la incondicionalidad. . . .

"Todo el mundo es un genio.
Pero si juzgas a un pez por su habilidad para escalar un árbol,
creerá toda su vida que es un estúpido"
Albert Einstein

Agradecimientos

A todas las personas que ayudaron a que esta memoria se concretara. En especial, a los integrantes de mi comisión examinadora por ser parte de este trabajo, mostrarse siempre disponibles ante cualquier consulta y por su paciencia. En particular agradecer a mi profesor guía, Servet Martínez, por su calidad como profesor y porque en el primer curso donde fui su alumna logró cambiar positivamente mi percepción sobre el mundo de las Probabilidades.

A la Universidad de Chile por el apoyo económico que me brindó durante toda la carrera y permitirme ser una orgullosa integrante de esta institución. Además, a los funcionarios del Departamento de Ingeniería Matemática que siempre facilitaron las tareas.

A los integrantes del *Grupo de Autoayuda para memorista* por las eternas conversaciones y el apoyo dado. A mis futuros colegas matemáticos Abelino, Johan, Valentina, Sebastián, Poly y Felipe como también a mis compañeros de Plan Común Karen, Camilo, Carlos y Natalia, por hacer de mi paso por la facultad no solo una experiencia académica.

Finalmente a mis padres y a toda mi familia no solo por el apoyo durante la realización de esta memoria, sino por todo lo que me han dado. Les doy las gracias por confiar y apoyar mis decisiones incondicionalmente. Este trabajo va dedicado a ellos, ya que sin su respaldo esto no sería posible.

Índice general

Introducción

La predicción de desastres naturales, como lo son huracanes, terremotos o inundaciones, ha sido siempre una aspiración del hombre. A pesar de que expertos han desarrollado numerosas técnicas en distintas áreas, aún no se ha logrado una buena estimación de estos eventos. Dada esta incertidumbre y los enormes daños que podrían causar estos eventos, el mercado financiero ha enfrentado este tema creando, mediante compañías de seguros, pólizas que cubren a sus clientes ante eventuales pérdidas económicas.

El cálculo de primas a pagar por los asegurados se vuelve complejo en estos escenarios, ya que debido a las características propias de la aleatoriedad en cada caso, no es directo aplicar técnicas o procedimientos de la teoría actuarial convencional utilizada en otro tipo de seguros.

Chile, a lo largo de su historia, ha sufrido variados terremotos, como el terremoto de Valdivia en el año 1960, el terremoto del año 1985 en la zona central y el sufrido en Concepción en el año 2010. Es en este último, donde se puso a prueba los sistemas de seguro en el país. A pesar de las grandes pérdidas, las compañías pudieron responder a sus asegurados (ver [34]). Sin embargo, si se analiza cómo se pagaron estos seguros, se encuentra que solo un bajo porcentaje del dinero pagado corresponde a capital de las aseguradoras nacionales y que la mayor parte fue pagada por compañías de reaseguro internacionales (ver [23]). Si bien, este sistema de seguro-reaseguro funcionó correctamente, las compañías reaseguradoras internacionales al verse afectadas por los terremotos de Chile y Japón han subido el valor de sus reaseguros.

Este trabajo se centra en los seguros contra sismos, pretendiendo generar nuevas herramientas para el cálculo de primas que permitan a las compañías aseguradoras tener un mejor sistema de predicción y, sobretodo, sentar las bases de primas calculadas con fundamentos científicos. Se subraya que este es un primer estudio sobre el tema, que describe las variables en juego y un modelo que las relaciona, pero que aún no refleja completamente la complejidad que se presenta en una situación real.

Esta memoria está estructurada en 6 capítulos. En el primer capítulo, “Riesgo y Seguros”, se describe el modelo general de seguros y se muestran resultados conocidos sobre el modelo clásico de Cramér-Lundberg. En el segundo capítulo, “Distribución de las Reclamaciones”, se muestran algunos modelos usados en Sismología y se describen los distintos niveles de aleatoriedad involucrados al momentos de estimar las eventuales pérdidas asociadas a un sismo. En el siguiente capítulo, “Seguros contra Sismos”, se mostrará lo particular de este tipo de seguros definiendo un modelo adecuado para abordarlo. Luego, en el capítulo 4 se presentarán los Procesos de Markov Deterministas por Pedazos, adaptando el modelo introducido en el capítulo anterior a este tipo de procesos, para luego hacer el cálculo del valor de la Prima Neta y de una prima que haga a las ganancias de la compañía una martingala. En el capítulo 5, "Mercado de Reaseguro Libre de Arbitraje", se describe un Mercado de Reaseguros, se construye una técnica para buscar una medida martingala equivalente dentro de un conjunto específico de medidas y, para dos ejemplos, se calcula el precio de un reaseguro de exceso de pérdida exigiendo que el mercado esté libre de arbitraje. En el capítulo final, "Otros cálculos de primas", se muestran posibles alternativas al cálculo de primas dependiendo del momento en que el asegurado contrata la póliza, como del tipo de contrato que tenga con la aseguradora.

Capítulo 1

Riesgo y Seguros

Detrás del concepto *riesgo* es posible encontrar variadas definiciones dependiendo del campo del saber desde el cual se realice su análisis. Entre las definiciones más utilizadas, está el uso de dicho término como la factibilidad de experimentar ciertos eventos de interés y las consecuencias derivadas de dichos eventos. Así, los riesgos podrían tener un sentido positivo o negativo, pero convencionalmente se hace referencia a ellos con una connotación de pérdida. En seguros, el riesgo puede definirse a través del monto de las reclamaciones totales de los asegurados cuando sucede un evento.

Las personas se encuentran cotidianamente sujetas a riesgos de las más variadas índoles y es a partir de la necesidad de aminorar las consecuencias negativas que potencialmente estos acarrean, que es posible enlazar los conceptos de riesgo y seguros. A grandes rasgos, la forma en la que opera un seguro es la siguiente: un grupo de personas aceptan que están expuestas a sufrir algún tipo de siniestro en sus bienes o en sus personas, y que dichos siniestros pueden causarles consecuencias irreparables como la pérdida de sus vidas, o bien pérdidas económicas considerables. Al contratar un seguro, es decir, firmar una póliza de seguro, estas personas pagan por adelantado una cantidad de dinero que recibe el nombre de *prima*. Una aseguradora es quien recibe el dinero de dicha personas y a cambio se compromete a compensar monetariamente a todos aquellos asegurados que podrían sufrir algún siniestro durante el tiempo de vigencia del seguro, según lo pactado en la póliza (ver [28]).

En el sistema de seguros es necesario precisar detalladamente las características de los eventos a asegurar y es primordial que el número de asegurados sea bastante grande como para que el capital obtenido por la compañía, por medio del cobro de primas, sea suficiente para enfrentar los gastos de los eventuales siniestro individuales que acontezcan. De esta forma las pérdidas económicas se distribuyen entre todos los clientes de la aseguradora y se garantiza la sobrevivencia financiera de cada uno de ellos.

Para modelar el sistema de seguros descrito es claro que tanto el número de eventos, como el tamaño y el momento de las reclamaciones son variables aleatorias.

1.1. Modelo General de Seguros

En general, lo que se busca modelar es el balance de la compañía aseguradora en un tiempo $t \geq 0$. Para esto se utilizan dos procesos: el Proceso de Riesgo y las Primas.

Los objetivos principales son modelar las reclamaciones y decidir el valor de las primas para evitar la ruina de la compañía de seguros.

1.1.1. Proceso de Riesgo

El riesgo corresponderá al tamaño total de las reclamaciones hasta el tiempo t, lo que se llamará S_t. Para describirlo se utilizarán dos subprocesos:

- Si las reclamaciones ocurren en la sucesión de tiempos aleatorios $(T_i, i \geq 1)$ con $0 < T_1 < T_2 < ...$, entonces el *Proceso de Conteo* $N \equiv (N_t : t \geq 0)$ se define como

  $$N_t \equiv \sup\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$$

  donde $N_t = 0$ si $T_1 > t$ y se asume que $N_t < \infty$ con probabilidad 1.

  En otras palabras, N_t representará el número total de reclamaciones hasta el tiempo t.
- Una sucesión infinita de variables aleatorias $S \equiv (Y_i, i \geq 1)$, donde Y_i representa el monto o tamaño de la reclamación i. Se asume $Y_i \geq 0$ y $\mathbb{E}[Y_i] < \infty \ \forall i$.

Por lo tanto, el tamaño total de las reclamaciones al tiempo t es

$$\boxed{S_t \equiv Y_1 + Y_2 + ... + Y_{N_t} = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i}$$

donde $S_t = 0$ si $N_t = 0$.

Se observa que $S_{T_j} = \sum_{i=1}^{j} Y_i$ es la suma de las reclamaciones de los primeros j eventos.

1.1.2. Prima

El proceso $\{P_t : t \geq 0\}$ representará los ingresos por primas de la compañía hasta el tiempo t.

Principios para el Cálculo de Primas

Existen variadas formas para determinar el monto a pagar por los asegurados. A continuación se muestra algunos principios matemáticos para el cálculo de la prima total sobre un período de tiempo $[0, R]$ (ver [19]):

1. **Prima Pura por Riesgo** La prima pura por riesgo se define como:

$$P_R \equiv \mathbb{E}[S_R].$$

Aunque esta fórmula podría parecer justa para el asegurado, es claro que no lo es para el asegurador, quien debe solventar los diversos gastos de administración del seguro, y quien en este caso, no tendría ningún margen de ganancia esperado por operar.

2. **Principio del Valor Esperado** La prima en este caso está dada por:

$$P_R = (1+\lambda)\mathbb{E}[S_R] \ , \ \lambda \geq 0$$

donde λ es el factor de carga. Si $\lambda = 0$ se obtiene la prima pura por riesgo. En general este factor se determina fijando ciertos márgenes de solvencia en un período de tiempo determinado, con el fin de evitar la ruina de la compañía.

3. **Principio de Utilidad Equivalente** Dada una función de utilidad $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real w la prima se fija buscando la igualdad:

$$\mathbb{E}[u(w + P_R - S_R)] = u(w).$$

4. **Principio del Valor Medio** Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente y no negativa el principio del valor medio busca la igualdad:

$$f(P_R) = \mathbb{E}[f(S_R)].$$

5. **Principio de la Varianza** El principio de la varianza está dado por:

$$P_R = \mathbb{E}[S_R] + \lambda \mathbb{V}ar[S_R] \ , \ \lambda > 0.$$

6. **Principio de la Desviación Estándar** El principio de la desviación estándar está dado por:

$$P_R = \mathbb{E}[S_R] + \lambda\sqrt{\mathbb{V}ar[S_R]} \ , \ \lambda > 0.$$

7. **Principio Exponencial** El principio exponencial está dado por:

$$P_R = \frac{1}{\alpha}\log \mathbb{E}[\exp(\alpha S_R)] \ , \ \alpha > 0.$$

8. **Principio de Esscher** El principio de Esscher está dado por:

$$P_R = \frac{\mathbb{E}[S_R e^{\alpha S_R}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha S_R}]} \ , \ \alpha > 0.$$

Este principio viene de utilizar $\frac{e^{\alpha S_R}}{\mathbb{E}[e^{\alpha S_R}]}$ como la derivada de Radon-Nikodym para establecer un cambio de medida (para más detalles ver [12] y [13]).

9. **Principio de Swiss** Para una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa y no decreciente y un parámetro $0 \leq p \leq 1$ el principio de Swiss busca la igualdad:

$$\mathbb{E}[u(S_R - pP_R)] = u((1-p)P_R).$$

   Este principio incluye tanto el principio de utilidad equivalente como el principio del valor medio.

10. **Principio de Dutch** El principio de Dutch está dado por:

$$P_R = \mathbb{E}[S_R] + \theta\mathbb{E}[(S_R - \alpha\mathbb{E}[S_R])_+] \ , \ \alpha \geq 1 \ , \ 0 < \theta \leq 1.$$

Observación En general no existe un mecanismo de cálculo para la prima que sea superior al resto, sino, más bien, el principio a utilizar dependerá de la situación, pues existen varias condiciones que afectan la forma de calcular primas, entre ellas, las restricciones legales y financieras, las condiciones del asegurado, las condiciones de la propia aseguradora y de las otras aseguradoras, así como las condiciones del mercado del seguro. Todos estos son factores que determinan, directa o indirectamente, el valor de una prima para cubrir un riesgo particular en una situación real.

1.1.3. Condición de Ganancia Neta

Para $k \in \mathbb{N}$ se define la variable aleatoria

$$\Gamma_k = (P_{T_k} - S_{T_k}) - (P_{T_{k-1}} - S_{T_{k-1}}).$$

Γ_k corresponde al balance de la compañía aseguradora entre dos siniestros sucesivos.

Como se desea que la ruina no ocurra, la *Condición de Ganancia Neta* exige que:

$$\mathbb{E}[\Gamma_k] > 0.$$

1.1.4. Balance de la Empresa

Finalmente el capital de la empresa se representará mediante el proceso $(z_t : t \geq 0)$, de modo tal que para cada tiempo t:

$$\boxed{z_t = u + P_t - S_t}$$

donde u es el capital inicial de la compañía.

1.1.5. La Ruina

Se denota τ el momento de ruina, es decir,

$$\tau = \text{ínf}\{t > 0 : z_t < 0\}.$$

Se tiene $\tau = \infty$, si $\forall t > 0, z_t \geq 0$.

Entonces, la probabilidad de ruina para un horizonte infinito, dependiendo del valor inicial de z_t es:

$$\psi(u) \equiv \mathbb{P}(\tau < \infty \mid z_0 = u)$$

y para un horizonte finito se escribirá

$$\psi(u,t) \equiv \mathbb{P}(\tau < t \mid z_0 = u).$$

1.2. Modelo Clásico de Cramér-Lundberg

El modelo de Cramér-Lundberg tiene sus orígenes en la tesis doctoral del sueco Filip Lundberg defendida en el año de 1903 (ver [21]). En este trabajo, Lundberg utilizó términos un tanto distintos a los actuales, pues en aquellos años aún no se había formalizado la teoría de los procesos estocásticos como se entiende hoy en día. En 1930 Harald Cramér retoma las ideas originales de Lundberg, y las pone en el contexto de los procesos estocásticos, en ese entonces de reciente creación (ver [7]).

Este modelo asume lo siguiente:

- $N = (N_t : t \geq 0)$ es un proceso de Poisson homogéneo con parámetro $\lambda > 0$. Por lo tanto, los tiempos entre reclamaciones siguen una distribución exponencial del mismo parámetro.
- $S = (Y_i : i \geq 1)$ son variables aleatorias i.i.d. con función de distribución G.
- P_t presenta un crecimiento lineal, es decir, $P_t = ct$, donde $c > 0$ es la tasa de ingresos.
- Los procesos S y N son independientes.

El modelo ha sido estudiado en extenso, diversas generalizaciones se han propuesto y analizado. Un ejemplo de estos resultados es el siguiente (extraído de [28]):

Proposición 1.1 *Bajo el Modelo Clásico de Cramér-Lundberg la probabilidad de ruina con horizonte infinito es:*

1. $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$ *, con* $\mu = \mathbb{E}[Y_1]$.

2. $\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\left[\int_u^\infty \bar{G}(y)dy + \int_0^u \psi(u-y)\bar{G}(y)dy\right]$ *para* $u > 0$

   donde $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$.

Demostración. Sea $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u) = \mathbb{P}(\tau = \infty \mid Z_0 = u)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(\tau = \infty \mid Z_0 = u, Y_1 = y, T_1 = t)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dG(y)dt \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \mathbb{P}(\tau = \infty \mid Z_0 = u, Y_1 = y, T_1 = t) dG(y)dt \\
&= \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \bar{\psi}(u + ct - y)dG(y)dt \\
&= \frac{\lambda}{c}\mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \bar{\psi}(s-y)dG(y)ds.
\end{aligned}$$

donde se utilizó el cambio de variable $s = u + ct$. Luego, derivando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\psi}}{du}(u) &= \frac{\lambda}{c}\left[\mathrm{e}^{\frac{\lambda u}{c}} \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\lambda s}{c}} \int_0^s \bar{\psi}(s-y)dG(y)ds - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)dG(y)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-y)dG(y)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(u) - \bar{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \bar{\psi}(x)dx - \int_0^u \int_0^x \bar{\psi}(x-y)dG(y)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \bar{\psi}(x)dx - \int_0^u \int_y^u \bar{\psi}(x-y)dxdG(y)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \bar{\psi}(x)dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \bar{\psi}(x)dxdG(y)\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^u \bar{\psi}(x)dx - \int_0^u \bar{\psi}(x) \int_0^{u-x} dG(y)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \bar{\psi}(x)\bar{G}(u-x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \bar{\psi}(u-x)\bar{G}(x)dx \qquad (1.1) \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{\psi}(u-x)\bar{G}(x)\mathbb{1}_{[0,u]}(x)dx. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Como $\bar{\psi}(u-x)\bar{G}(x)\mathbb{1}_{[0,u]}(x) \nearrow \bar{G}(x)$ cuando $u \nearrow \infty$ entonces, tomando límite cuando $u \nearrow \infty$ en la ecuación (1.2) se obtiene por Teorema de Convergencia Monótona (ver [30])

$$1 - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{G}(x)dx = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Por lo tanto,

$$\psi(0) = 1 - \bar{\psi}(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \qquad (1.3)$$

Finalmente, usando (1.3) en la igualdad que resulta de la línea (1.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \bar{\psi}(u-x)\bar{G}(x)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\mu - \int_0^u \bar{\psi}(u-x)\bar{G}(x)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^\infty \bar{G}(x)dx - \int_0^u \bar{G}(x)dx + \int_0^u \psi(u-x)\bar{G}(x)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{c}\left[\int_u^\infty \bar{G}(x)dx + \int_0^u \psi(u-x)\bar{G}(x)dx\right].
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Distribución de las Reclamaciones

Antes de realizar cualquier cálculo de primas, es necesario conocer el comportamiento de las reclamaciones de los clientes. Para encontrar tal distribución de probabilidad en un seguro contra terremotos, es necesario distinguir los distintos niveles de aleatoriedad involucrados que repercuten en la estimación final.

Además, para poder analizar cada nivel por separado, es importante entender los siguientes términos a utilizar, los que provienen de la Oficina del Coordinador de las Naciones Unidas para el Socorro en Caso de Desastre, UNDRO (ver [31]):

Amenaza o Peligro Sísmico: probabilidad de que se presente un evento potencialmente desastroso durante un cierto período de tiempo dado un lugar determinado. La evaluación de peligro sísmico requiere investigación en 4 áreas:

1. Fuentes u origen.
2. Medio por el cual se transmite la onda sísmica: la transmisión de la señal sísmica decrece con la distancia a una velocidad que depende del medio por donde pase.
3. El sitio a estudiar: incluye el tipo y geología del suelo.
4. La instalación de interés: para cada estructura de interés la respuesta dinámica y resistividad debe ser modelada.

Riesgo Sísmico: grado de pérdida, destrucción o daño esperado debido a la ocurrencia de un determinado evento. Esto está relacionado con la probabilidad que se presenten los eventos y provoquen ciertas consecuencias económicas o sociales. El riesgo sísmico está vinculado estrechamente con el grado de exposición, es decir, con la predisposición a ser afectado por el evento sísmico.

Vulnerabilidad Sísmica: característica intrínseca de las estructuras, dependiente de cómo hayan sido diseñadas, de la calidad de los materiales de construcción empleados, de la ejecución en obra, entre muchos otros factores, siendo independiente de la peligrosidad sísmica del sitio donde se encuentren emplazadas, es decir, una estructura puede ser vulnerable, pero no representar un riesgo para sus moradores cuando se encuentre en un sitio con bajo peligro sísmico.

Daño: grado de deterioro o destrucción causado por un evento sísmico sobre la propiedad, los sistemas de prestación de servicios y los sistemas naturales o sociales.

A continuación se describen 4 niveles de aleatoriedad involucrados en la estimación de las reclamaciones. En cada nivel, se asumen conocidas las variables aleatorias de los niveles anteriores. De esta forma, se genera un árbol de probabilidades que permite el cálculo de la distribución final de las reclamaciones $(Y_i : i \geq 1)$.

2.1. Primer Nivel: Fuentes

El primer nivel de análisis está relacionado con la ocurrencia de un sismo. La aleatoriedad de este evento proviene tanto de la ubicación, de la magnitud como del tiempo de ocurrencia del terremoto.

2.1.1. Ubicación de las Fuentes

Las fuentes sísmicas se modelan como puntos, líneas o áreas en el espacio. Dado un sismo proveniente de una línea o área, se asume una probabilidad uniforme sobre éstas para la ubicación del evento.

2.1.2. Magnitud

La distribución de probabilidad de la magnitud comúnmente está basada en estimaciones provenientes de los datos históricos disponibles.

Una de las leyes más conocidas es la Ley de Gutenberg-Richter (ver [15]):

$$\log_{10} N_M = a - bM$$

donde M es magnitud de Richter, N_M representa el promedio anual de sismos con magnitud mayor o igual a M. Los parámetros a y b son constantes específicas de cada fuente. Generalmente el modelo no se considera para magnitudes con valores menores a un mínimo m_0, que son sismos muy pequeños como para generar un daño en las estructuras.

Sea $\beta = b \ln 10$. A menudo se considera a M una variable aleatoria con distribución

$$\mathbb{P}(M \leq m) = 1 - \exp\left(-\beta(m - m_0)\right), \text{ para } m_0 \leq m$$

es decir, M se distribuye según una exponencial de parámetro β.

Como no tiene mucho sentido físico magnitudes arbitrariamente altas, en algunos casos se opta por truncar la distribución anterior con un límite m_1. En este caso, la distribución de las magnitudes corresponde a:

$$\mathbb{P}(M \leq m) = k_{m_1}[1 - \exp(-\beta(m - m_0))], \text{ para } m_0 \leq m \leq m_1$$

donde

$$k_{m_1} = [1 - \exp(\beta(m_0 - m_1))]^{-1}$$

es la constante de normalización.

2.1.3. Distribución Temporal

Los primeros modelos para riesgo sísmico asumen que los terremotos se pueden representar como eventos independientes en espacio y tiempo, y usan procesos de Poisson (Cornell,1968[4]). En estudios actuales , las correlaciones temporales y espaciales son tomadas en consideración. Una revisión detallada de estos modelos puede encontrarse en Akkaya and Yucemen,2002 (ver [2]).

Modelar el proceso de reclamaciones en un seguro contra terremotos como un proceso de renovación poissoniano, permitiría obtener resultados explícitos. Sin embargo, esta hipótesis no siempre es realista. Si bien es cierto que modelar la sismicidad como un sistema sin memoria es apropiado para evaluar la sismicidad mundial o para áreas afectadas por sismos originados por diversas fallas geológicas independientes(ver Apéndice B), definitivamente no es apropiado para estudiar una región que se ve afectada por una falla en particular.

El concepto de *brecha sísmica* dice que en aquellas zonas en que no ha habido actividad severa en un largo período de tiempo, es más probable que ocurra un sismo de gran magnitud, por lo tanto, la distribución de la magnitud de un evento debiera depender del tiempo transcurrido desde el último sismo de magnitud mayor o igual a m_0.

Distintos autores (ver [1],[18]) han propuesto que los tiempos interocurrencia siguen una distribución de Weibull, cuya función de distribución está dada por:

$$H(x; k, \alpha) = 1 - \exp\left(-\left[\frac{x}{\alpha}\right]^k\right), \text{ para } x \geq 0$$

donde k y α son parámetros de la distribución.

Esta hipótesis se basa principalmente en aspectos cualitativos de tal distribución como lo es la *tasa de riesgo*, que en general para una distribución $\tilde{H}$ con densidad $\tilde{h}$ se define como:

$$\tilde{\lambda}(x) = \frac{\tilde{h}(x)}{1 - \tilde{H}(x)}$$

y para la distribución Weibull(k, α) está dada por:

$$\lambda(x; k, \alpha) = \frac{k}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{k-1}, \ x \geq 0.$$

Cuando $k > 1$ la tasa de riesgo es creciente en el tiempo, lo que coincide con concepto de brecha sísmica. Además si se cuenta con datos para realizar un ajuste, esta distribución no excluye del análisis la hipótesis de un proceso de renovación poissoniano, ya que para $k = 1$

$$H(x; 1, \alpha) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\alpha}\right)$$

lo que corresponde a una distribución exponencial.

En Chile, E. Kausel V., et al (ver [18]) mostraron que para pequeñas regiones del territorio nacional la distribución Weibull tiene un buen ajuste obteniendo un parámetro k cercano a 2. Mientras que para zonas más amplias este parámetro disminuía acercándose a 1, lo que corresponde a una distribución exponencial.

Definición 2.1 *Se conoce como Modelo Poissoniano Clásico al modelo que asume una sola fuente, los tiempos se distribuyen como un proceso de Poisson y la distribución de probabilidad de las magnitudes es una exponencial.*

2.2. Segundo Nivel: Leyes de Atenuación

Dado un sismo de magnitud M el movimiento del sitio puede ser caracterizado por uno o más parámetros, como lo son:

Intensidad Modificada de Mercalli (I): La intensidad de Mercalli es una manera subjetiva de medir los movimientos del terreno, basándose en la información otorgada por observadores y/o el movimiento producido por un sismo. Esta subjetividad en ocasiones crea problemas, ya que, por ejemplo, no es directo comparar dos intensidades de sismos ocurridos en épocas distintas, o ciudades que no cuenten con la misma tecnología antisísmica.

Aceleración Máxima del Suelo (PGA): Como su nombre lo indica (PGA, por su sigla en inglés), este parámetro mide la aceleración máxima que se genera debido a un sismo. Usualmente se mide en unidades g, de aceleración de gravedad. A diferencia de la intensidad es una medición objetiva y su valor se obtiene de acelerómetros ubicados en diversas posiciones.

Existen leyes de atenuación(derivadas de correlaciones empíricas y habiendo pocos elementos teóricos) para relacionar los parámetros de un lugar a distancia focal r del epicentro con la medición de magnitudes (por ejemplo, magnitud Richter denotada por M).

Las dos formas más utilizadas son (ver [4]):

$$I = c_1 + c_2 M + c_3 log(r) \tag{2.1}$$

$$PGA = b_1 \mathrm{e}^{b_2 M} r^{-b_3} \tag{2.2}$$

donde b_1,b_2,c_1,c_2 y c_3 son parámetros regionales a estimar.

Observación Si bien, para un sismo de magnitud M, estas leyes de atenuación son deterministas, también existen leyes que agregan una componente aleatoria a la relación, como, por ejemplo, agregando un ruido a las fórmulas anteriores.

Para el Modelo Poissoniano Simple es posible demostrar que (ver [25]):

$$\mathbb{P}(I \geq i) = C_I G_I \exp(-\beta i/c_2) \tag{2.3}$$

$$F_{I_{\text{máx}}}(t) = \exp\left(-\mu t C_I G_I \exp\left(-\beta i/c_2\right)\right) \tag{2.4}$$

$$F_{PGA_{\text{máx}}}(t) = \exp\left(-\mu t G_Y \left(\frac{y}{b_1}\right)^{-\beta/b_2}\right) \tag{2.5}$$

donde $F_{I_{\text{máx}}}(t)$ y $F_{PGA_{\text{máx}}}(t)$ representan la Intensidad y Aceleración Máxima del Suelo en un período de tiempo de largo t, $C_I = \exp(\beta \frac{c_1}{c_2})$, $G_I = r^{-\beta \frac{c_3}{c_2}}$ y $G_Y = r^{-\beta \frac{b_3}{b_2}}$.

2.3. Tercer Nivel: Vulnerabilidad Sísmica

Dado un sismo de magnitud M y una medición de los efectos de éste en el sitio a considerar (I o PGA), se evalúa el daño que podrían sufrir una construcción.

En general, se establecen niveles cualitativos de daño estructural o no estructural (ND) que podría sufrir una construcción. Por ejemplo:

1. Ningún Daño.
2. Daño Leve.
3. Daño Moderado.
4. Daño Fuerte.
5. Colapso.

La cuantificación del daño se hace mediante la Tasa de Daño descrita a continuación.

Definición 2.2 *Tasa de Daño (DR, de su sigla en inglés)*

$$DR = \frac{\textit{Dinero para reparar el edificio}}{\textit{Dinero para reconstruir el edificio}}$$

donde el costo de reparación considera daños estructurales como no estructurales.

En ocasiones, para faciliar los cálculos, es conveniente utilizar solo una Tasa de Daño por cada Nivel de Daño. Este valor se le llama Tasa de Daño Central (CDR, por su sigla en inglés).

La relación entre el grado de daño sufrido por una construcción y la intensidad de un sismo, puede expresarse de las siguientes formas:

1. Matrices de probabilidad de daño: un elemento de estas matrices expresa la probabilidad de que una estructura sufra un Nivel de Daño(ND) igual a j, dado un sismo de intensidad igual a i (ver [35]).

2. Funciones de vulnerabilidad: expresan la misma relación que las matrices de probabilidad de daño, pero en forma continua.

Todas las generalizaciones o distribuciones de probabilidad de Nivel de Daño siempre dependerán del tipo de estructura que se esté analizando. Por ejemplo, dos construcciones vecinas sometidas a un mismo movimiento sísmico pueden presentar distintos niveles de daño dependiendo de la calidad de su construcción.

Un ejemplo nacional de análisis del daño esperado a un grupo de viviendas se encuentra en Silva, 2011 (ver [31]), donde se estudian distintos conjuntos habitacionales de la Región Metropolitana.

2.4. Cuarto Nivel: Reclamaciones

Si ya se conoce el nivel o tasa de daño que sufrirá una estructura producto de un sismo, el cálculo del valor de la reclamación a efectuar dependerá del tipo de póliza contratada.

Denotando VPA al valor de la propiedad asegurada, el valor de la reclamación será:

$$Y_i = (\text{mín}\{VPA \cdot DR, Y_{\text{máx}}\} - \overline{D})^+$$

donde $\overline{D}$ es el deducible asociado al seguro, es decir, la cantidad de dinero a pagar para poder realizar una reclamación (si el valor a reclamar es menor a $\overline{D}$, no tiene sentido presentar tal petición), $Y_{\text{máx}}$ corresponde a un valor máximo para cada reclamación que eventualmente podría estar estipulado en la póliza.

Ejemplo Asumiendo la existencia de un sismo y que el tiempo entre éste y el sismo anterior es v, se desea encontrar la distribución de probabilidad condicional de las reclamaciones, es decir,

$$\mathbb{P}(Y_i \leq y \mid \text{Tiempo transcurrido desde el sismo anterior} = v)$$

bajo las siguientes condiciones:

1. Primer Nivel: Se considera que solo existe una fuente sísmica puntual, a distancia r de la construcción, que podría general temblores. Considerando

   $$F_{M;v}(m) \equiv \mathbb{P}(M \leq m \mid \text{Tiempo transcurrido desde el sismo anterior} = v),$$

   con función de densidad $f_{M;v}(m)$ para $m \geq m_0$.

2. Segundo Nivel: Se trabajará con la Intensidad de Mercalli Modificada, I, y con la ley de atenuación descrita en (2.1).

3. Tercer Nivel: Se discretizará el problema usando una matriz de probabilidad de daño.

4. Cuarto Nivel: Se asume que para cada Nivel de Daño, $ND = l$ (ordenados de manera creciente), existe una Tasa de Daño Central, $CDR = j_l$, y que notando por ND_i y CDR_i, a nivel de daño y tasa central de daño de la reclamación i, entonces el valor de tal reclamación estará dado por:

$$Y_i = VPA \cdot CDR_i.$$

Notando por $l(y) \equiv \text{máx}\{l : j_l \leq \frac{y}{VPA}\}$, es decir, $l(y)$ es el último nivel de daño tal que CDR es menor o igual a $\frac{y}{VPA}$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i \leq y \mid M_i = m) = \mathbb{P}(VPA \cdot CDR_i \leq y \mid M_i = m) &= \sum_{l=0}^{l(y)} \mathbb{P}(ND_i = l \mid M_i = m) \\ &= \sum_{l=0}^{l(y)} \mathbb{P}(ND_i = l \mid I = \lfloor c_1 + c_2 M_i + c_3 \log(r) \rfloor)\end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y_n \leq y \mid \text{Tiempo transcurrido desde el sismo anterior} = v) = \\ &\sum_{l=0}^{l(y)} \int_{m_0}^{\infty} \mathbb{P}(ND_i = l \mid I = \lfloor c_1 + c_2 m + c_3 \log(r) \rfloor) f_{M;v}(m) dm.\end{aligned}$$

Además, la integral sobre m, se convierte en una sumatoria cuando la intensidad I se discretiza por nivel.

2.5. Teoría de Valores Extremos

En algunos estudios de seguros (ver [16]) no se realiza el análisis completo de los distintos niveles de aleatoriedad, sino que directamente se asume que la distribución de las reclamaciones pertenecerá a un grupo especial de distribuciones llamadas *Distribuciones de Valores Extremos*. Su definición se detalla a continuación.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}, ..., X_{mn}$ una secuencia de variables aleatorias i.i.d., $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$.

Se define

$$C_n \equiv \text{máx}(X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}, ..., X_{mn})$$

y

$$C_n^* \equiv \frac{C_n - b_n}{a_n}.$$

Teorema 2.3 *Si existe una secuencia de constantes* $\{a_n : a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ *y* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que*

$$\mathbb{P}(C_n^* \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{C_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} F^*(z)\ ,\ z \in \mathbb{R}$$

para una función de distribución no degenerada F^**, entonces* F^* *pertenece a la familia de distribuciones Generalizadas de Valores Extremos, cuya función de distribución corresponde a:*

$$F^*(z) = \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right)$$

y están definidas en el conjunto $\{z \in \mathbb{R} : 1 + \xi\frac{(z-\mu)}{\sigma} > 0\}$ *con* $\mu \in \mathbb{R}$*,* $\sigma > 0$ *y* $\xi \in \mathbb{R}$*.*

Distribuciones de Valores Extremos:

1. Gumbel ($\xi = 0$)

$$F^*(z) = \exp\left(-\exp\left[-\left(\frac{z-b}{a}\right)\right]\right), -\infty < z < \infty.$$

2. Fréchet($\xi > 0$)

$$F^*(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq b; \\ \exp\left(-\left[\frac{z-b}{a}\right]^{-\gamma}\right), & \text{si } z > b. \end{cases}$$

3. Weibull inversa ($\xi < 0$)

$$F^*(z) = \begin{cases} \exp\left(-\left[-(\frac{z-b}{a})\right]^{\gamma}\right), & \text{si } z < b. \\ 1 & \text{si } z \geq b. \end{cases}$$

Observación En el análisis anterior para el Modelo Poissoniano Clásico la distribución de la intensidad y la aceleración máxima en un periodo de largo t (ver (2.4) -(2.5)) también corresponden a distribuciones de Valores Extremos.

Capítulo 3

Seguros contra Sismos

Los Seguros contra desastres naturales y, en particular, contra terremotos, forman un aspecto de la Teoría de Seguros que no es fácil inscribir en el marco actuarial convencional. Las razones de tal situación y los rasgos más significativos de estos riesgos son los siguientes (ver [3]):

1. Los terremotos destructivos son poco frecuentes, pero se asocian a una pérdida potencial muy alta.

2. Los riesgos individuales de cada asegurado no son independientes. En la teoría tradicional de Seguros se asume un gran número de bienes asegurados independientes entre sí, de modo que la demanda total puede ser representada como la suma de un gran número de pequeños componentes independientes. La desviación estándar de las reclamaciones totales anuales, no es una proporción excesiva de los ingresos anuales de la empresa, por lo que resulta ser factible construir una reserva que con alta probabilidad cubra los riesgos.

   Para el caso de terremotos, como se vio en el árbol de probabilidades construido anteriormente, dado un sismo de gran magnitud es esperable que muchos clientes cobren sus seguros simultáneamente, y que si la aseguradora no está bien preparada para estos eventos, quede en situación de quiebra.

3. Exposición simultánea de varios tipos de seguros. Tratándose de un sismo, la aseguradora además de preocuparse por seguros contra terremotos que ofrece para proteger a las construcciones, debe poner atención a otros tipos de seguros que también serán cobrados en casos de un gran desastre. Por ejemplo, seguros automotrices por daños sufridos el día del sismo, seguros de vida cobrados por los familiares de las víctimas, etc.

4. La información estadística es poca y la significancia de tal información es limitada. En general, las compañías hacen uso de su experiencia con el mismo tipo de seguro para evaluar los posibles gastos. Sin embargo, para grandes sismos el número de datos disponibles es reducido, lo que dificulta realizar tales estadísticas de una forma correcta.

Además, características tales como el desarrollo económico o la creciente urbanización hacen que el proceso sea altamente no estacionario y que las estadísticas asociadas tenga una significancia muy baja.

Por lo anterior, y lo discutido en el Capítulo 2, no es posible modelar este tipo de seguros con el modelo clásico de Cramér-Lundberg (explicado en la Sección 1.2) y se hace necesario introducir un modelo que sea capaz de capturar este fenómeno.

3.1. Modelo para Seguros contra Sismos a Utilizar

El objetivo de esta memoria es dar herramientas matemáticas con base científica para poder realizar el cálculo de primas en seguros contra sismos. Por esto, se intentará abarcar distintos puntos de vista en el modelo con el cual se trabajará y, de esta forma, dar suficiente flexibilidad a un eventual usuario de los resultados.

- Si bien existen modelos que consideran el efecto de las réplicas, en esta memoria no se hará uso de estos. Se trabajará a macroescala y, de esta forma, un sismo y sus réplicas se agruparán en un solo evento para efectos de cálculos de la compañía aseguradora. Dado un catálogo sísmico, un algoritmo para agrupar cada sismo con sus réplicas puede ser encontrado en Zhuang et al., 2002 (ver [36]).
- Para hacer compatible el modelo con distintas teorías, no se trabajará con una distribución entre eventos específica y se dejará tal distribución como una variable del modelo, pudiéndose evaluar los resultados en distintos casos.
- Para poder admitir el concepto de brecha sísmica, la distribución de las magnitudes podrá depender del tiempo transcurrido desde el sismo anterior. Esta dependencia se heredará a los siguientes niveles del árbol de probabilidades, descrito en el capítulo anterior, hasta llegar al último nivel, es decir, la distribución de las reclamaciones también podrá depender del tiempo entre eventos sísmicos.

La situación descrita anteriormente se modelará matemáticamente a través de un proceso Proceso General de Renovación descrito a continuación:

1.- Componente Temporal.

La componente temporal del proceso se modela como un Proceso de Renovación con las definiciones habituales (ver [24]).

Sea H la distribución del tiempo entre dos eventos, que se supone con densidad h.

Existen $(W_k : k \geq 1)$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas no negativas, tal que

$$(\forall k \geq 1)\ \mathbb{P}(W_k \leq t) = H(t)\ ,\ t \in [0, \infty).$$

Además, H es creciente, continua por la derecha, $H(0^-) = 0$, $H(\infty) = 1$ y $H(0) < 1$.

Siguiendo con la notación utilizada en el Capítulo 1, los instantes de renovación $(T_i : i \geq 1)$ son:

$$T_i = \sum_{k=1}^{i} W_k$$

y corresponden a los instantes de tiempo cuando ocurren las reclamaciones.

El número de renovaciones hasta el tiempo t es:

$$N_t \equiv \sup\{T_i \leq t : i \geq 1\}$$

con $N_t = 0$ si $T_1 > t$.

N_t corresponde al total de reclamaciones hasta el tiempo t.

La familia de variables aleatorias $(N_t : t \geq 0)$ se llama *Proceso de Renovación*.

La Función de Renovación es:

$$m(t) = \mathbb{E}[N_t].$$

Se cumple que

$$m(t) = \sum_{n \geq 1} H^{n*}(t)$$

donde $H^{n*}(t)$ es la n-ésima convolución de H (ver [24]).

2.- Proceso de Reclamaciones

$\forall t \geq 0$ se define:

$$\boxed{v_t = t - T_{N_t}}$$

es decir, v_t representa el tiempo que ha transcurrido desde el último sismo. Esta variable en Teoría de Renovación se conoce como *la edad del proceso en el tiempo t*.

La distribución de Y_i dependerá del tiempo transcurrido desde el $(i-1)$-ésimo evento, es decir, dependerá de v_{T_i}. Si $v_{T_i} = v$, entonces la distribución condicional de Y_i se denotará $G(y, v)$ y está definida como:

$$\boxed{G(y, v) \equiv \mathbb{P}(Y_i \leq y \mid T_i - T_{i-1} = v) = \mathbb{P}(Y_i \leq y \mid v_{T_i} = v).}$$

Por lo tanto, las reclamaciones $S = (Y_i : i \geq 1)$ serán una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución condicional $G(y, v)$ dependiendo de la variable v_t.

Se define:

$$\boxed{E_G(v) \equiv \mathbb{E}[Y_i \mid T_i - T_{i-1} = v] = \mathbb{E}[Y_i \mid v_{T_i} = v] = \int_0^{\infty} y dG(y; v).}$$

Observación Las reclamaciones también se pueden definir a través del proceso $(\hat{Y}_t : t \geq 0)$, donde:

$$\hat{Y}_t = 0, \quad t \notin \{T_i : i \geq 1\}$$
$$\hat{Y}_t \sim G(y, T_i - T_{i-1}), \quad t \in \{T_i : i \geq 1\}.$$

Se tiene:

$$Y_i = \hat{Y}_{T_i}.$$

3.- Primas y Capital inicial de la compañía

El capital inicial de la compañía será igual a u, es decir,

$$z_0 = u.$$

Las distintas elecciones para primas se diferenciarán a través de su tasa, pudiendo ser:

- **Tasa Constante** P_t presentará un crecimiento lineal, es decir, $P_t = ct$, donde $c > 0$ es la tasa de ingresos.
- **Tasa Variable dependiendo del Tiempo** P_t tendrá una tasa variable, $c(s)$, tal que $P_t = \int_0^t c(s)ds$. Es posible fijar esta tasa en el momento inicial para todo el período a analizar.
- **Tasa Variable dependiendo de la Edad del Proceso** $P_t = \int_0^t c(v_s)ds$, donde v_s es la edad del proceso al tiempo s. En este caso no es posible fijar en el instante inicial el valor de P_t para cualquier tiempo t, sino más bien P_t será un proceso adaptado.

Observación Como se mostró en la sección 1.1.2 existen diversas fórmulas para el cálculo de primas. Sin embargo, el objetivo de esta memoria es generar herramientas matemáticas y no decidir cuál es el mejor método. Es por esto que a continuación se intentará encontrar dos condiciones que están involucrados en numerosos criterios para el cálculo de primas, éstas son: la Prima Pura por Riesgo (esperanza del Proceso de Riesgo) y, por otro lado, convertir el balance de la compañía en un *"juego justo"* haciendo de este proceso una martingala.

Capítulo 4

Uso de Procesos de Markov Deterministas por Pedazos para el Cálculo de Primas

4.1. Procesos de Markov Deterministas por Pedazos (PMDP)

Los Procesos de Markov Deterministas por Pedazos, en lo sucesivo PMDP, fueron introducidos en la tesis doctoral de Mark H. A. Davis y luego formalizados, por el mismo autor, en una publicación en el año 1984(ver [10]).

Un proceso PMDP $(X_t : t \geq 0)$ es un proceso estocástico cuya evolución está determinada por saltos aleatorios y un comportamiento determinista entre saltos gobernado por una ecuación diferencial. X_t tiene dos componentes (η_t, ξ_t), donde:

- η_t toma valores en un conjunto discreto $K \subseteq \mathbb{N}$. Esta componente, η_t, se usará para etiquetar la evolución del proceso en distintas etapas.
- El comportamiento de ξ_t dependerá de una función $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y del valor de η_t. Dado $\eta_t = n \in K$, entonces, ξ_t tomará valores en un conjunto abierto $M_n \subset \mathbb{R}^{d(n)}$.

Por lo tanto,$(\forall t \geq 0)$ $X_t \in E$, donde:

$$E \equiv \{(n, z) : n \in K \wedge z \in M_n\}.$$

A continuación, se detallará la evolución del proceso $(X_t : t \geq 0)$, con estado inicial $X_0 = (n_0, z_0)$.

4.1.1. Comportamiento entre Saltos

Entre saltos el proceso $(X_t, t \geq 0)$ sigue un camino determinista. Asumiendo que dos saltos consecutivos ocurren en los tiempos $0 < s < u$, entonces η_t permanece constante, $\eta_t = n \; \forall t \in [s, u)$. Por otro lado, ξ_t sigue una curva $\varphi_n(t, z)$ que, haciendo uso del teorema a continuación, queda determinada por el operador diferencial:

$$\mathcal{H}f(z) = \sum_{i=1}^{d(n)} g_i(z) \frac{\partial f(z)}{\partial x_i}.$$

Teorema 4.1 *Sea $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una función Lipschitz continuamente diferenciable. Se define para $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable:*

$$\mathcal{H}f(z) \equiv \sum_{i=1}^{d} g_i(z) \frac{\partial f}{\partial x_i}(z).$$

Entonces $\exists! \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que $\forall z \in \mathbb{R}^d$ y para toda $f \in C^1$ cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t, z)) = \mathcal{H}f(\varphi(z, t))$$

$$\varphi(0, z) = z$$

(ver Davis, 1984 [10]).

Definición 4.2 *Se definen los siguientes elementos asociados al proceso $(X_t : t \geq 0)$:*

1. *$\partial^* M_n$ describirá el conjunto de puntos alcanzables de la frontera de M_n siguiendo las curvas $\varphi_n(t, z)$, es decir,*

$$\partial^* M_n \equiv \{z \in \partial M_n : \exists (t, \bar{z}) \in \mathbb{R}^+ \times M_n, \; z = \varphi_n(t, \bar{z})\}.$$

2. *$t^*(n, z)$ el tiempo necesario para alcanzar la frontera de M_n partiendo desde el punto (n, z), es decir,*

$$t^*(n, z) \equiv \text{ínf}\{t > 0 : \varphi_n(t, z) \in \partial^* M_n\}.$$

3. *Se llamará frontera activa de E al conjunto*

$$\Gamma \equiv \{(n, z) \in \partial E : n \in K, z \in \partial^* M_n\}.$$

4.1.2. Los Saltos

Tal como el comportamiento entre saltos queda determinado por un operador diferencial, los saltos se definen de acuerdo a los siguientes elementos:

1. Una función medible $\lambda : E \to \mathbb{R}^+$ llamada Intensidad de Salto.

2. Un núcleo $Q : (E \cup \Gamma) \times \mathcal{B}(E) \to [0, 1]$:

   - $\forall x \in E \cup \Gamma$, $Q(x, \cdot)$ es una medida de probabilidad.
   - $\forall B \in \mathcal{B}(E)$, $Q(\cdot, B)$ es una función medible.

Si el estado inicial del proceso es $X_0 = (n_0, z_0)$, entonces el primer salto ocurrirá, en un tiempo σ_1, donde σ_1 es una variable aleatoria no negativa con función de distribución $F_1(t)$ dada por:

$$F_1(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(n_0, \varphi_{n_0}(u, z_0))du\right) \mathbb{1}_{\{t<t^*(n_0,z_0)\}}.$$

Se observa que $F_1(t^*(n_0, z_0)) = 1$, es decir, cuando la curva $\varphi_{n_0}(t, z_0)$ llega a la frontera se produce un salto en el proceso.

En el tiempo σ_1 el proceso saltará aleatoriamente a un punto $(n_1, z_1) \in E$ determinado por la distribución condicional

$$\mathbb{P}((n_1, z_1) \in \cdot \mid \sigma_1) = Q(\varphi_{n_0}(\sigma_1, z_0), \cdot).$$

Para la descripción de los siguientes saltos, se asume que el proceso $(X_t : t \geq 0)$ está definido hasta el tiempo σ_{k-1} y se construye σ_k, el tiempo del k-ésimo salto. Se define

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{X_s : s \leq t\right\}.$$

El tiempo de salto σ_k será una variable aleatoria, independiente de las anteriores, tal que $\mathbb{P}(\sigma_k \leq \sigma_{k-1} + t \mid \mathcal{F}^X_{\sigma_{k-1}}) = F_k(t)$, donde:

$$F_k(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(n_{k-1}, \varphi_{n_{k-1}}(u, z_{k-1}))du\right) \mathbb{1}_{\{t<t^*(n_{k-1},z_{k-1})\}}.$$

Una vez definido el tiempo del k-ésimo salto, el proceso se mueve en σ_k a un punto $(n_k, z_k) \in E$ con distribución condicional

$$\mathbb{P}((n_k, z_k) \in \cdot \mid \mathcal{F}^X_{\sigma_{k-1}}, \sigma_k) = Q(\varphi_{n_{k-1}}(\sigma_k - \sigma_{k-1}, z_{k-1}), \cdot).$$

Además, como se había descrito anteriormente, entre saltos $\sigma_{k-1} \leq t < \sigma_k$

$$X_t = (n_{k-1}, \varphi_{n_{k-1}}(t - \sigma_{k-1}, z_{k-1})).$$

Definición 4.3 *Se define* $\tilde{N}_t$ *como el número de saltos del proceso hasta el tiempo* t

$$\tilde{N}_t \equiv \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{\sigma_i \leq t\}}.$$

Se asume que para todo $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbb{E}[\tilde{N}_t] < \infty$.

Teorema 4.4 *El proceso* $(X_t : t \geq 0)$ *es un proceso de Markov fuerte con respecto a* $\mathcal{F}_t^X$ *(ver Davis,1984 [10]).*

4.2. Generador de un PMDP

Definición 4.5 *Si* $(\widetilde{X}_t : t \geq 0)$ *es un proceso de Markov, entonces su generador está dado por*

$$\mathcal{A}g(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\mathbb{E}[g(\widetilde{X}(h)) - g(x) \mid \widetilde{X}(0) = x]}{h}. \tag{4.1}$$

Se denotará $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *al conjunto de funciones medibles y acotadas tales que el límite anterior existe y también corresponde a una función medible y acotada.*

A lo largo de esta memoria se hará uso de los siguientes resultados con respecto al generador infinitesimal que fueron formalizadas por Davis, 1984 (ver [10]) para Procesos de Markov Deterministas por Pedazos (para definiciones consultar apéndice A).

Teorema 4.6 *Si* $(\widetilde{X}_t : t \geq 0)$ *es un proceso de Markov con generador* $\mathcal{A}$ *dado por la fórmula (4.1). Entonces,* $\forall g \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *el proceso* $\{M(t), t \geq 0\}$ *es un martingala, donde*

$$M(t) = g(\widetilde{X}(t)) - g(\tilde{X}(0)) - \int_0^t \mathcal{A}g(\widetilde{X}(u))du.$$

Teorema 4.7 *Sea* $(X_t : t \geq 0)$ *un PMDP y* $f : E \cup \Gamma \to \mathbb{R}$ *una función medible que satisface:*

- $\forall (n, z) \in E$ *la función* $t \mapsto f(n, \varphi_n(t, z))$ *es absolutamente continua en* $(0, t^*(n, z))$.
- $\forall x \in \Gamma, f(x) = \int_E f(y)Q(x, dy)$ *Condición de Frontera.*
- $\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}\left[\sum_{i:\sigma_i \leq t} \left|f(X(\sigma_i)) - f(X(\sigma_i^-))\right|\right] < \infty.$

Entonces, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *y* $\mathcal{A}f$ *está dado por:*

$$\boxed{\mathcal{A}f(x) = (\mathcal{H}f)(x) + \lambda(x) \int_E (f(y) - f(x))Q(x, dy) \qquad (4.2)}$$

Observación Cuando es importante tener el tiempo como una componente explícita del proceso, $\mathcal{A}$ se puede descomponer como $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}_t$ donde $\mathcal{A}_t$ está dado por la fórmula anterior aplicada a la función $f(x, t)$.

Las siguientes martingalas son con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t^X$.

Proposición 4.8 *Las siguientes propiedades serán fundamentales para el cálculo de primas.*

1. *Si* $\forall t > 0$
$$f(\cdot, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_t) \ \wedge \ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \mathcal{A}_t f(x,t) = 0$$
entonces el proceso $f(X_t, t)$ *es una martingala.*

2. *Si* $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{A}f(x) = 0$, *entonces, el proceso* $f(X_t)$ *es una martingala.*

4.3. Procedimiento para estudiar Modelos de Seguros usando PMDP.

Para estudiar el comportamiento de modelos de seguros se hará uso de los resultados mencionados en la sección anterior de la siguiente manera (ver [8]):

1. Formular el modelo de seguros como un PDMP $(X_t : t \geq 0)$.
2. Determinar el generador $\mathcal{A}$ de $(X_t : t \geq 0)$ y resolver $\mathcal{A}f(x) = 0$ para f en el dominio de $\mathcal{A}$.
3. Aplicar los resultados anteriores para decir que $f(X_t)$ es una martingala.
4. Usar resultados conocidos sobre martingalas para hacer inferencias sobre el modelo original.

4.4. Formulación del Modelo de Seguros contra Sismos como un PMDP

Es posible formular el Modelo de Seguros contra Sismos descrito en la Sección 3.1 como un proceso PMDP. Para conservar la propiedad markoviana del proceso, es necesario agregar, además de z_t (el balance de la compañía), una variable que represente la edad del proceso de renovación (técnica de Markovización, ver [14]), ya que en general el proceso no será un proceso Poissoniano y se hará necesario saber cuánto tiempo ha pasado desde el último evento.

Primero se formulará el proceso con una Prima a tasa constante c:

- El proceso η_t es constante, $\eta_t = 1$, $d(1) = 3$ y $M_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+2}$.
- $\xi_t = (z_t, v_t)$ donde z_t es el balance de la compañía y v_t es el tiempo transcurrido desde la última reclamación al tiempo t .

Entre saltos:

- Como entre saltos no se producen reclamaciones, el procesos solo variará según las primas que reciba, que en este caso corresponde a $z_t = z_0 + ct$.
- La edad del proceso crecerá linealmente, $v_t = v_0 + t$.

En los puntos de saltos:

- En cada salto la compañía pierde el valor de la reclamación efectuada, es decir, $z_{T_i} = z_{T_i^-} - Y_i$.
- Cuando el proceso salta, la edad se reinicia, es decir, $v_{T_i} = 0$.

En este caso, para pertenecer al dominio del generador se requiere que $f(z, v, t)$ sea absolutamente continua y que $\forall t, z, v > 0$, $\mathbb{E}[f(z - Y_v, 0, t) - f(z, v, t)] = \int_0^\infty [f(z - y, 0, t) - f(z, v, t)]dG(y, v) < \infty$. El generador (usando el resultado 4.2) está dado por:

$$\mathcal{A}f(z,v,t) = \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v} + \lambda(v)\left(\int_0^\infty f(z-y,0,t)dG(y,v) - f(z,v,t)\right) \tag{4.3}$$

donde

$$\lambda(v) = \frac{h(v)}{1 - H(v)}$$

es la tasa de riesgo de la función H.

Observación Para este modelo la esperanza de la variable aleatoria Γ_k es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Gamma_k] &= \mathbb{E}[c(T_k - T_{k-1})] - \mathbb{E}[Y_k] \\
&= c\int_0^\infty xh(x)dx - \int_0^\infty \mathbb{E}[Y_k \mid T_k - T_{k-1} = x]h(x)dx \\
&= c\int_0^\infty xh(x)dx - \int_0^\infty \int_0^\infty ydG(y;x)h(x)dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\phi(\kappa; x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\kappa x} dG(\kappa; x)$, la condición de ganancia neta se escribe

$$c\int_0^\infty xh(x)dx > \int_0^\infty \phi'(0;x)h(x)dx.$$

4.5. Cálculo de Esperanza para una tasa variable dependiente del tiempo

Para calcular la esperanza del proceso z_t y de esta forma encontrar la prima neta, se generalizará al caso donde la tasa de la prima es variable y depende del tiempo, es decir,

$$P_t = \int_0^t c(x)dx.$$

Al modelar este cambio como un PMDP, la diferencia con el caso anterior se encuentra en el comportamiento entre saltos de z_t. Ahora este comportamiento se escribirá:

$$z_t = z_0 + \int_0^t c(x)dx.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t,z)) = \frac{d}{dt}f(z_0 + \int_0^t c(x)dx, v_0 + t) = c(t)\frac{d}{dz}f(z,v) + \frac{d}{dv}f(z,v)$$

Es decir, el operador diferencial se escribe como

$$(\mathcal{H}f)(x,v,t) = \frac{d}{dt}f(z,v,t) + c(t)\frac{d}{dz}f(z,v,t) + \frac{d}{dv}f(z,v,t)$$

Finalmente, el generador del proceso $(X_t : t \geq 0)$, con $X_t = (z_t, v_t, t)$, está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(z,v,t) = {} & \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c(t)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v} \\ & + \lambda(v)\left(\int_0^\infty f(z-y,0,t)dG(y;v) - f(z,v,t)\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

Para funciones absolutamente continuas tales que $\forall t,z,v > 0$, $\mathbb{E}[f(z-Y_v,0,t) - f(z,v,t)] = \int_0^\infty [f(z-y,0,t) - f(z,v,t)]dG(y;v) < \infty$.

Usando (4.4) con $f(z,v,t) = z$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(z,v,t) &= c(t) + \lambda(v)\left(\int_0^\infty (z-y)dG(y;v) - z\right) \\ &= c(t) - \lambda(v)E_G(v)\end{aligned}$$

donde $E_G(v) = \int_0^\infty y dG(y;v)$.

Por fórmula de Dynkin

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid X_0 = x_0] - f(x_0) = \int_0^t \mathbb{E}[Af(X_s) \mid X_0 = x_0]ds$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[z_t \mid X_0 = (z_0, v_0, 0)] - z_0 = \int_0^t \mathbb{E}[c(s) - \lambda(v_s)E_G(v_s) \mid X_0 = (z_0, v_0, 0)]ds$$

Fijando $z_0 = u$ y $v_0 = 0$, se tiene

$$\mathbb{E}[z_t] = u_0 + \int_0^t c(s)ds - \int_0^t \mathbb{E}[\lambda(v_s)E_G(v_s)]ds$$

Igualando la esperanza a la cantidad de dinero inicial, es decir, $\mathbb{E}[z_t] = u$, $\forall t \geq 0$.

$$\int_0^t c(s)ds = \int_0^t \mathbb{E}[\lambda(v_s)E_G(v_s)]ds \ , \forall t \geq 0$$

Por lo tanto, para que en esperanza la compañía no pierda ni gane dinero se debe cumplir casi seguramente

$$\boxed{\forall s \geq 0, \ c(s) = \mathbb{E}[\lambda(v_s)E_G(s_s)]} \tag{4.5}$$

4.5.1. Función de Densidad de la Edad

Para completar el cálculo anterior y calcular la esperanza, es necesario conocer la distribución de v_t. Como entre saltos

$$v_t = t - T_{N_t},$$

característica que coincide con la definición del *Proceso de Edad* en Teoría de Renovación:

"Tiempo transcurrido desde la renovación más reciente hasta el instante t".

Por lo tanto, es posible utilizar la siguiente proposición, conocida en Teoría de Renovación, que determinala distribución de v_t.

Proposición 4.9 *La distribución del proceso v_t está dada por:*

$$\mathbb{P}(v_t \leq x) = \begin{cases} H(t) - \int_0^{t-x} [1 - H(t-y)]dm(y) & , x < t \\ 1 & , x \geq t \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{d}\mathbb{P}(v_t \leq x) = [1 - H(x)]\mathrm{d}m(t-x) \text{ para } x < t.$$

Además,

$$\begin{aligned}\int_0^t [1 - H(x)]\mathrm{d}m(t-x) &= \int_0^t [1 - H(t-y)]dm(y) \\ &= m(t) - m(0) - H * m(t) \\ &= \sum_{n\geq 1} H^{n*}(t) - 0 - \sum_{n \geq 2} H^{n*}(t) \quad = H(t).\end{aligned}$$

Como, por lo anterior, la integral de 0 a t de $\mathrm{d}\mathbb{P}(v_t \leq x)$ no es igual a uno, existe una discontinuidad y se tiene que:

$$\mathbb{P}(v_t \leq x) = \int_0^x [1 - H(y)]\mathrm{d}m(t-y) + \mathbb{1}_{x \geq t}(1 - H(t)).$$

Finalmente, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[g(v_t)] = \int_0^t [1 - H(x)]g(x)\mathrm{d}m(t-x) + [1 - H(t)]g(t). \tag{4.6}$$

Alternativa al Cálculo de la Esperanza

A continuación, se muestra un cálculo alternativo para encontrar $\mathbb{E}[g(v_t)]$ haciendo uso de una Ecuación Tipo Renovación y la siguiente proposición.

Proposición 4.10 *Sea $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada en compactos y $\tilde{F}$ una función de distribución de probabilidad , entonces $\exists! \tilde{A} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que es acotada en compactos y que verifica:*

$$\tilde{A} = a + \tilde{F} * \tilde{A}$$

esta única función está dada por:

$$\tilde{A}(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)d\tilde{m}(x) \ , \ \forall t \geq 0$$

donde $\tilde{m}(t) = \sum_{n \geq 1} \tilde{F}^{n*}(t)$ (ver [24]).

Para calcular la esperanza buscada se define $B(t) \equiv \mathbb{E}[g(v_t)]$.

Como es habitual, se condiciona con respecto al instante de la primera renovación del proceso, en este caso T_1 (definiciones en la Sección 3.1).

$$\mathbb{E}[g(v_t) \mid T_1 = x] = \begin{cases} g(t) & , x > t \\ B(t-x) & , x \leq t \end{cases}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_0^\infty \mathbb{E}(g(v_t) \mid T_1 = x)\mathrm{d}H(x) \\ &= \int_t^\infty g(t)\mathrm{d}H(x) + \int_0^t B(t-x)\mathrm{d}H(x) \\ &= g(t)[1 - H(t)] + B * H(t). \end{aligned}$$

De esta forma, usando la Proposición 4.10, si $g(\cdot)[1 - H(\cdot)]$ es medible y acotada en compactos, la Ecuación Tipo Renovación anterior tiene como solución:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(v_t)] &= g(t)[1 - H(t)] + \int_0^t g(t-y)[1 - H(t-y)]dm(y) \\ &= g(t)[1 - H(t)] + \int_0^t g(x)[1 - H(x)]dm(t-x). \end{aligned}$$

Resultado que coincide con el encontrado anteriormente en (4.6).

Finalmente, para determinar $c(s)$ en (4.5) basta tomar $g(v_t) = \lambda(v_t)E_G(v_t)$ en (4.6). De donde se obtiene:

$$\boxed{c(s) = \int_0^s h(x)E_G(x)\mathrm{d}m(s-x) + h(s)E_G(s)}$$

y, por lo tanto, la prima total recaudada al tiempo t es

$$\boxed{P_t = \int_0^t c(s)ds = \int_0^t \int_0^s [h(x)E_G(x)\mathrm{d}m(s-x) + h(s)E_G(s)]ds}$$

Observación Para el caso en que se busque una tasa constante en un intervalo de tiempo $[0,T]$, con T suficientemente grande como para que la probabilidad de un terremoto no sea despreciable, esta tasa se construye tomando:

$$c = \frac{\int_0^T \int_0^s [h(x)E_G(x)\mathrm{d}m(s-x) + h(s)E_G(s)]ds}{T}.$$

Ejemplo En el caso simple donde la distribución de las reclamaciones no depende de la variable v_t, su esperanza está dada por $E_G(V_s) = S_0$, y los eventos se distribuyen temporalmente siguiendo una distribución Poisson(λ), entonces,

$$\begin{aligned} c(s) &= \int_0^s \lambda \mathrm{e}^{-\lambda v} S_0 \lambda dv + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} S_0 \\ &= \lambda^2 S_0 \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda s}}{\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s} S_0 \\ &= \lambda S_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para este caso, la tasa es constante y el valor total de las primas hasta el tiempo t es

$$P_t = \lambda S_0 t.$$

4.6. Cálculo de Esperanza para una tasa variable dependiente de la edad

Se busca una tasa de prima que dependa del tiempo que ha transcurrido desde el último sismo, es decir,

$$P_t = \int_0^t c(v_s)ds$$

donde $v_s = s - T_{N_s}$. Por lo tanto,

$$z_t = u + \int_0^t c(v_s)ds - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Para calcular su generador infinitesimal se busca $\mathbb{E}[g(z_{t+h}, v_{t+h}) \mid (z_t, v_t) = (z, v)]$.

- $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0 \mid v_t = v) = \mathbb{P}(T_{N_t+1} - T_{N_t} > v + h \mid T_{N_t+1} - T_{N_t} > v) = \frac{1-H(v+h)}{1-H(v)}$.
  En este caso,
$$g(z_{t+h}, v_{t+h}) = g(z + \int_t^{t+h} c(v+s-t)ds, v+h).$$
- $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1 \mid v_t = v) = \mathbb{P}(T_{N_t+1} - T_{N_t} \leq v + h \mid T_{N_t+1} - T_{N_t} > v) = \frac{H(v+h)-H(v)}{1-H(v)}$.
$$g(z_{t+h}, v_{t+h}) = \int_0^\infty g(z + \int_t^{t+h} c(s-t+v)ds - y, 0)dG(y; v+h) + o(h).$$
- $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1 \mid v_t = v) = o(h)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}g(z,v) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}[g(z_{t+h}, v_{t+h}) \mid (z_t, v_t) = (z,v)] - g(z,v)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1-H(v+h)}{1-H(v)} g(z + \int_t^{t+h} c(v+s-t)ds, v+h)\right. \\
&\quad \left. + \frac{H(v+h)-H(v)}{1-H(v)} \int_0^\infty g(z + \int_t^{t+h} c(s-t+v)ds - y, 0)dG(y; v+h) + o(h) - g(z,v)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1-H(v+h)}{1-H(v)} \left\{g(z + \int_t^{t+h} c(v+s-t)ds, v+h) - g(z,v)\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{H(v+h)-H(v)}{1-H(v)} \int_0^\infty \left\{g(z + \int_t^{t+h} c(s-t+v)ds - y, 0) - g(z,v)\right\} dG(y; v+h) + o(h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-H(v+h)}{1-H(v)} \left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} c(v+s-t)ds \left\{\frac{g(z + \int_t^{t+h} c(v+s-t)ds, v+h) - g(z, v+h)}{\int_t^{t+h} c(v+s-t)ds}\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{g(z, v+h) - g(z,v)}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{H(v+h)-H(v)}{h(1-H(v))} \int_0^\infty \left\{g(z + \int_t^{t+h} c(s-t+v)ds - y, 0)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - g(z,v)\right\} dG(y; v+h)\right] \\
&= c(v)\frac{\delta g(z,v)}{\delta z} + \frac{\delta g(z,v)}{\delta v} + \frac{h(v)}{1-H(v)} \int_0^\infty \{g(z-y, 0) - g(z,v)\} dG(y; v).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{A}g(z,v,t) = \frac{\delta g(z,v,t)}{\delta t} + c(v)\frac{\delta g(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta g(z,v,t)}{\delta v} + \lambda(v) \int_0^\infty \{g(z-y, 0, t) - g(z,v,t)\} dG(y; v) \tag{4.7}$$

para funciones absolutamente continuas tales que

$$\forall t, z, v > 0,\ \mathbb{E}[f(z - Y_v, 0, t) - f(z,v,t)] = \int_0^\infty [f(z-y, 0, t) - f(z,v,t)]dG(y,v) < \infty. \tag{4.8}$$

Para que $(z_t : t \geq 0)$ sea una martingala es necesario que si $f(z,v,t) = z$, entonces $\mathcal{A}f(z,v,t) = 0$. Para esta elección de f reemplazando en (4.7)

$$\mathcal{A}f(z,v,t) = c(v) + \lambda(v)(z - \int_0^\infty y dG(y;v) - z) = c(v) - \lambda(v)E_G(v).$$

Por lo tanto, la condición para que el proceso sea martingala es

$$\boxed{c(v_t) = \lambda(v_t)E_G(v_t).}$$

Además se obtiene que el compensador de $-\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ es $\int_0^t \lambda(v_s)E_G(v_s)ds$, es decir,

$$-\sum_{i=1}^{N_t} Y_i + \int_0^t \lambda(v_s)E_G(v_s)ds \text{ es una martingala local.}$$

Capítulo 5

Mercado de Reaseguro Libre de Arbitraje

Actualmente las compañías de seguros, al igual que sus clientes, buscan cubrirse ante un eventual desastre natural, como lo son los terremotos, y así poder protegerse de una posible quiebra. Para esto existen compañías, por lo general de tipo internacional, que brindan a las aseguradoras tales contratos, llamados reaseguros.

Mediante el contrato de reaseguro, el asegurador y el o los reaseguradores acuerdan ceder y aceptar, respectivamente, una parte o la totalidad de uno o más riesgos, acordándose cómo será el reparto de las primas de la póliza del seguro y también el reparto de los pagos por las responsabilidades derivadas del riesgo (pagos de los siniestros cubiertos por la póliza). Se pueden diferenciar dos grandes grupos de criterios para repartir las primas y las responsabilidades:

- ***Reaseguro proporcional:*** La cuantía de la responsabilidad que corresponde al reasegurador en caso de siniestro se calcula con la proporción que resulta entre la prima recibida por él (prima cedida) y la prima total de la póliza. Por tanto el reasegurador participa de los siniestros y las primas en idéntica proporción.
- ***Reaseguro no proporcional***: La cuantía de la responsabilidad que corresponde el reasegurador en caso de siniestro es el exceso sobre un determinado límite, los importes inferiores a esta prioridad son siempre por cuenta del asegurador. Por tanto, el reasegurador solo responde ante los siniestros que superen un determinado valor.

5.1. Mercado de Reaseguros Proporcionales

A continuación se describe un Mercado de Reaseguros introducido por Sondermann en 1991 (ver [32]) y se formalizan matemáticamente algunas definiciones dadas en dicha publicación.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado.

Se define $r(t)$ como el retorno al tiempo t de una unidad monetaria invertida en $t_0 = 0$. Se asume $(\forall t \geq 0)\ r(t) > 0$.

Se define un mercado con n seguros, tal que para cada seguro k existen dos procesos asociados adaptados a la filtración $\mathcal{F}_t$:

- $P_k(t)$: valor total de las primas del seguro k recibidas hasta el tiempo t.
- $S_k(t)$: valor total de las reclamaciones del seguro k hasta el tiempo t.

Con estos procesos se define, para cada seguro k, un activo financiero transable en el mercado de reaseguro:

$$\widehat{D}_k(t) \equiv \hat{S}_k(t) - \hat{P}_k(t)$$

donde $\hat{P}_k(t) \equiv \frac{P_k(t)}{r(t)}$ y $\hat{S}_k(t) \equiv \frac{S_k(t)}{r(t)}$ representan los valores descontados de $P_k(t)$ y $S_k(t)$, respectivamente.

$\hat{D}_k$ se interpreta como el proceso de riesgo que enfrenta un agente que contrata el seguro k. Es por esto que las primas ahora se ven como pérdidas y las reclamaciones como ganancias.

Las reaseguradoras participan en el riesgo comprando o reasegurando fracciones de los activos $\{\hat{D}_k(t)\}$. Cuando reasegura, recibe las primas y debe pagar las reclamaciones. Cuando compra una fracción del activo, debe pagar las primas y eventualmente recibe un pago por las reclamaciones.

Definición 5.1 *Una Estrategia de Reaseguro se define como un proceso estocástico previsible y acotado definido hasta el tiempo R en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, ..., \phi_t^n) : 0 \leq t \leq R)$ donde para $k \geq 1$*

$$\phi_t^k\text{: Fracción del riesgo de seguro } k \text{ al tiempo } t \text{ en el portafolio}$$

y ϕ_t^0 representará el número de acciones invertidas en un activo libre de riesgo. Dado que el proceso es previsible, entonces

$$(\forall k \in 0, 1, ..., n)\ \phi_0^k \in \mathcal{F}_0\ ,\ \forall 0 < t \leq R,\ \phi_t^k \in \mathcal{F}_{t^-}$$

es decir, se decide el contenido del portafolio del tiempo t con la información disponible al tiempo t^-.

Para $0 \leq s \leq R$, $\hat{D}(s) \equiv (\hat{D}_0(s), \hat{D}_1(s), ..., \hat{D}_n(s)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $\phi(s) \cdot d\hat{D}(s) = \sum_{i=0}^n \phi_s^i d\hat{D}_i(s)$.

Definición 5.2 *El valor descontado del portafolio al tiempo t es:*

$$C_t(\phi) \equiv \int_0^t \phi(s) \cdot d\hat{D}(s) = \int_0^t \phi(s) \cdot d\hat{S}(s) - \int_0^t \phi(s) \cdot d\hat{P}(s)\ ,\ \forall 0 \leq t \leq R.$$

Definición 5.3 $\Phi = \{\phi : \phi$ *es una estrategia de reaseguro*$\}$ *denotará el espacio lineal de todas las estrategias de reaseguro.*

En lo siguiente se asume que:

- $\forall\ 0 \leq t < R$ existe un mercado de contratos de reaseguros proporcionales.
- El mercado de reaseguros es competitivo, es decir, hay muchas compañías aseguradoras que operan solo pequeñas fracciones del riesgo total.
- Se asume que la información y la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ son conocidas por todos los participantes, por lo tanto, no hay costo de información.

5.2. Concepto de Arbitraje

En economía y finanzas, arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados realizando una combinación de transacciones complementarias que capitalizan el desequilibrio de precios. La utilidad se logra debido a la diferencia de precios de los mercados. Por medio de arbitraje, los participantes en el mercado pueden lograr una utilidad instantánea libre de riesgo.

Definición 5.4 *Una oportunidad de arbitraje se genera cuando es posible, empleando ϕ, recibir una cantidad positiva de dinero al tiempo R sin exponerse a un riesgo y sin invertir dinero en $t = 0$, es decir, existe una estrategia de reaseguro $\phi \in \Phi$ tal que*

1. $C_R(\phi) \geq 0$.
2. $\mathbb{E}[C_R(\phi)] > 0$.

Ejemplo Sea $\Omega_1 = \{a, b, c\}$ representando los estados posibles al tiempo $R = 1$, que ocurren con probabilidad 0.05, 0.4 y 0.55, respectivamente.

La tasa de interés es de un 10 %.

Se considera un mercado con dos procesos de riesgo $\hat{D}_1$ y $\hat{D}_2$ que se transan al tiempo $t = 0$ con precios iguales a sus valores esperados aumentados en un factor de sobreprima β_i.

La siguiente tabla muestra las reclamaciones de los seguros, S_1 y S_2, en los posibles escenarios al tiempo $R = 1$, junto con sus factores de sobreprima.

	a	b	c	β
S_1	2640	220	880	0.5
S_2	1980	440	1100	0.35

Tabla 5.1: Posibles reclamaciones y sobreprimas de los riesgos

Una estrategia de arbitraje sería:

1. Reasegurar el 50 % del riesgo $\hat{D}_2$. Con esto al tiempo $t = 0$ se obtiene, por concepto de primas, $0{,}5\mathbb{E}[\hat{S}_2](1 + 0{,}35) = 540$

2. Comprar un 25 % de reaseguro del riesgo $\hat{D}_1$. Por este reaseguro se debe pagar al tiempo t=0, $0{,}25\mathbb{E}[\hat{S}_1](1+0{,}5)=240$

3. El dinero obtenido al realizar las operaciones anteriores (540-240=300) se invierte a una tasa libre de riesgo del 10 %.

Con estas operaciones al tiempo $R=1$ se obtiene:

	300	$0.5S_2$	$0.25S_3$	Total
a	330	-990	660	0
b	330	-220	55	165
c	330	-550	220	0

Tabla 5.2: Resultados en los distintos escenarios al tiempo $R=1$

De esta forma al tiempo $R=1$, en el primer escenario y tercer escenario, a y c, no se generan pérdidas ni ganancias. Sin embargo, en el escenario b, se obtiene una ganancia de 165 unidades monetarias. Es decir, sin invertir dinero en la partida es posible obtener una ganancia sin riesgo. Por lo tanto, la estrategia descrita representa una oportunidad de arbitraje.

Definición 5.5 *Un mercado es llamado **estable** si no existen oportunidades de arbitraje.*

Definición 5.6 *Una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$ se dice una Medida Martingala Equivalente si:*

1. $\mathbb{P}^*(A)=0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A)=0,\ \forall A\in\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$.

2. *La derivada de Radon-Nikodym* $\rho=\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\in L_2$.

3. *Para todo seguro k, el proceso $\hat{D}_k(t)=\hat{S}_k(t)-\hat{P}_k(t)$ es una martingala bajo $\mathbb{P}^*$, es decir,*
$$\mathbb{E}^*[\hat{D}_k(t)\mid\mathcal{F}_s]=\hat{D}_k(s),\forall\ 0\leq s\leq t\leq R$$
donde $\mathbb{E}^*$ es la esperanza con respecto a la medida $\mathbb{P}^*$.

Teorema 5.7 *El Mercado de Reaseguro es estable si y solo si existe una medida martingala equivalente $\mathbb{P}^*$ (ver Sondermann,1991 [32]).*

Ejemplo En el ejemplo anterior, si se intenta encontrar una medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$, entonces se debería cumplir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\hat{S}_i]&=P_i\\&=(1+\beta_i)\mathbb{E}[\hat{S}_i]\end{aligned}$$

Entonces $q_1=\mathbb{Q}(a)$, $q_2=\mathbb{Q}(b)$ y $q_3=\mathbb{Q}(c)$ deben satisfacer el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}1&=&q_1&+&q_2&+&q_3&\\960&=&2400q_1&+&200q_2&+&800q_3&q_1,q_2,q_3\geq 0\\1080&=&1800q_1&+&400q_2&+&1000q_3&\end{array}$$

Cuya única solución es $q_1 = 0,1$, $q_2 = 0$ y $q_3 = 0,9$. Sin embargo, esta nueva medida no es equivalente a $\mathbb{P}$, ya que $\mathbb{Q}$ es nula para el estado b, pero $\mathbb{P}$ no lo es.

Por lo tanto, tal medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$ no existe y, por ello, fue posible encontrar una estrategia de arbitraje en el ejemplo anterior.

Hasta ahora solo se ha tratado con reaseguros proporcionales, pero para abarcar la totalidad de los posibles contratos (proporcionales y no proporcionales) se trabajará con la siguiente definición.

Definición 5.8 *Un contrato de reaseguro es un activo contingente que depende de los eventos en $\mathcal{F}_R$, es decir, es una variable aleatoria que pertenece a $L_2 \equiv L_2(\Omega, \mathcal{F}_R, \mathbb{P})$.*

Ejemplo Un ejemplo de reaseguro es un reaseguro de exceso de pérdida, $U = (\alpha S_k(R) - d)^+$, donde $\alpha \in (0, 1]$ representa la fracción del riesgo total del seguro k al tiempo R que se compromete a pagar la reaseguradora, siempre y cuando este valor sobrepase el umbral d.

Definición 5.9 *Diremos que un contrato de reaseguro U es alcanzable si $\exists \phi \in \Phi$, $\exists c_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\hat{U} = c_0 + C_R(\phi)$$

donde $\hat{U}$ es el valor descontado del contrato de reaseguro U, es decir, $\hat{U} = \frac{U}{r(T)}$

Se busca una forma de fijar los precios de los contratos de reaseguro U en un mercado estable. Para esto se pide que los precios pertenezcan al siguiente conjunto de funcionales.

Definición 5.10 *Una función $L : L_2 \to \mathbb{R}$ se dice un Sistema de Precios si:*

1. $L(U_1 + U_2) = L(U_1) + L(U_2), \forall U_1, U_2 \in L_2$
2. $L(\alpha U) = \alpha L(U), \forall \alpha \geq 0$
3. $U \geq 0, U \neq 0 \Rightarrow L(U) > 0$
4. *L es continua*

Se extiende la noción de oportunidad de arbitraje de la siguiente manera:

Si un contrato de reaseguro U alcanzable con c_0 y ϕ , es decir, $\hat{U} = c_0 + C_R(\phi)$ y existe un sistema de precios L con $L(U) > c_0$, entonces invirtiendo c_0 al tiempo $t = 0$. empleando la estrategia ϕ y vendiendo el contrato de reaseguro U a un precio mayor que c_0, se genera una estrategia de arbitraje.

Definición 5.11 *Si ninguna oportunidad de arbitraje existe, se dice que L es un **sistema de precios estable**.*

Teorema 5.12 *Un sistema de precios L en L_2 es estable si y solo si existe una medida martingala equivalente $\mathbb{P}^*$, tal que*

$$\forall U \in L_2, L(U) = \mathbb{E}^*[\hat{U}]$$

(ver Sondermann,1991 [32]).

Con el resultado anterior Sondermann probó que para que no exista oportunidad de arbitraje en el mercado, se debe encontrar una medida martingala equivalente $\mathbb{P}^*$ y fijar el precio de los contratos de reaseguro como la esperanza bajo esta nueva medida de probabilidad.

5.2.1. Enfoque de Delbaen Haezendonck

Además del enfoque de Sondermann, existe otro famoso trabajo sobre reaseguros. Este trabajo corresponde a la publicación de Delbaen & Haezendonck en 1989 (ver [11]).

En este enfoque se asume que en cualquier tiempo t la compañía de seguros puede vender las reclamaciones restantes del período $(t, R]$, es decir, $S_R - S_t$, a una prima $\tilde{p}_t$ que debe ser previsible.

Por lo tanto el proceso de precios está dado por:

$$\Pi_t = \tilde{p}_t + S_t.$$

La liquidez del mercado implica que no hay oportunidades de arbitraje y que existe una medida neutra al riesgo $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$, tal que Π_t es una martingala bajo esta nueva medida.

Para fijar tal condición, como $\Pi_0 = \tilde{p}_0$ (que debe pertenecer a $\mathcal{F}_0$), $\Pi_R = S_R$ y se busca que Π_t sea martingala, entonces

$$\tilde{p}_0 = \mathbb{E}[S_R].$$

Si se pidiera que el proceso fuera martingala bajo $\mathbb{P}$ entonces como ya se conoce el compensador de S_t se tendría que:

$$\begin{aligned}
\Pi_t &= \tilde{p}_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \\
&= \text{cte} - \int_0^t \lambda(v_s) E_G(v_s) ds + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \\
&= \mathbb{E}[S_R] - \int_0^t \lambda(v_s) E_G(v_s) ds + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.
\end{aligned}$$

De esta forma la prima por el período $(t, R]$ será igual a $\tilde{p}_t = \mathbb{E}[S_R] - \int_0^t \lambda(v_s)E_G(v_s)ds$. Además,

$$P_t = \tilde{p}_0 - \tilde{p}_t = \mathbb{E}[S_R] - \mathbb{E}[S_R] + \int_0^t \lambda(v_s)E_G(v_s)ds.$$

Entonces se cumple que:

$$P_t = \int_0^t \lambda(v_s)E_G(v_s)ds$$

que corresponde al mismo valor de prima cuando se pide que z_t sea una martingala (ver Capítulo 4) y hace que en este sentido los enfoques sean equivalentes.

5.3. Medida de Probabilidad Equivalente para un Seguro contra Sismos

Como se vio en la Sección anterior, para lograr que un mercado de reaseguro esté libre de arbitraje es necesario encontrar una medida martingala equivalente y fijar los precios usando esta medida. No se habló de unicidad al encontrarla, de hecho, tal condición solo se tiene en mercados más exigentes llamados *mercados completos* (ver [32]). No es el objetivo de este trabajo dar las condiciones para la unicidad de tal medida en el contexto dado, sino más bien buscar una que permita fijar los precios. Para cumplir este propósito, se hará uso de los resultados asociados a los Procesos de Markov Deterministas por Pedazos (enunciadas en Capítulo 4).

Como una de las condiciones es que el proceso $\hat{D}_k(t) = \hat{S}_k(t) - \hat{P}_k(t)$ sea una martingala para la nueva medida, entonces tal medida dependerá de la elección de $\hat{P}_k(t)$, valor que se fija previamente en el contrato firmado entre clientes y aseguradora.

A continuación se muestra una Proposición que generaliza el resultado encontrado por Dassios (ver [8]) donde se trabajó con una tasa de prima constante.

Observación En lo sucesivo se asumirá que

$$\hat{G}(\alpha; v) \equiv \int_0^\infty e^{\alpha y} dG(y; v) \text{ existe.}$$

Proposición 5.13 *Para $\theta \in \mathbb{R}$ tal que existe α_θ que cumple*

$$\int_0^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w) \exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw = 1.$$

el siguiente proceso es martingala:

$$\boxed{\frac{e^{-\theta t} e^{-\alpha_\theta z_t} \exp\left(\theta v_t + \alpha_\theta \int_0^{v_t} c(s)ds\right)}{1 - H(v_t)} \int_{v_t}^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w) \exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw}$$

DEMOSTRACIÓN. Se busca una función $f(z,v,t) = g(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z}$ tal que $\mathcal{A}f(z,v,t) = 0$. Entonces, usando el generador encontrado en (4.7) se impone:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(z,v,t) &= -\theta g(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z} - c(v)\alpha g(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z} + g'(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z}\\ &\quad + \lambda(v)\left[g(0)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha y}dG(y;v) - g(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z}\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Simplificando se obtiene $-\theta g(v) - c(v)\alpha g(v) + g'(v) + \lambda(v)g(0)\hat{G}(\alpha;v) - \lambda(v)g(v) = 0$.

Tomando $g(0) = 1$, se tiene

$$g(v)[-\theta - c(v)\alpha - \lambda(v)] + g'(v) = -\lambda(v)\hat{G}(\alpha;v).$$

Multiplicando por $\exp\left\{\int_0^v[-\theta - c(s)\alpha - \lambda(s)]ds\right\} = \exp\left(-\theta v - \alpha\int_0^v c(s)ds\right)(1 - H(v))$

$$\frac{\delta}{\delta v}\left[g(v)\exp\left(-\theta v - \alpha\int_0^v c(s)ds\right)(1 - H(v))\right] = -\lambda(v)\hat{G}(\alpha;v)\exp\left(-\theta v - \alpha\int_0^v c(s)ds\right)(1-H(v)).$$

Entonces,

$$-g(v)\exp\left(-\theta v - \alpha\int_0^v c(s)ds\right)(1-H(v)) = -\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha;w)\exp\left(-\theta w - \alpha\int_0^w c(s)ds\right)dw.$$

Por lo tanto,

$$g(v) = \frac{\exp\left(\theta v + \alpha\int_0^v c(s)ds\right)}{(1 - H(v))}\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha;w)\exp\left(-\theta w - \alpha\int_0^w c(s)ds\right)dw.$$

Y como $g(0) = 1$, entonces para cada θ se debe elegir un α_θ tal que

$$1 = \int_0^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta;w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw.$$

Finalmente, para que

$$\frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_t}\exp\left(\theta v_t + \alpha_\theta\int_0^{v_t} c(s)ds\right)}{(1 - H(v_t))}\int_{v_t}^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta;w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw.$$

sea una martingala se debe tener que $g(v)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha z} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, lo que se tiene si se cumple la restricción (4.8), es decir,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v) - \frac{\exp\left(\theta v + \alpha_\theta\int_0^v c(s)ds\right)}{(1 - H(v))}\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta;w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw < \infty.$$

Lo que se cumple, ya que se asumió que $\hat{G}(\alpha;v)$ existe. $\square$

Definición 5.14

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta \textit{ cumple las condiciones de la Proposición } 5{,}13\}$$

Definición 5.15 *Se define un horizonte R y, usando la Proposición 5.13, para cada $\theta \in \Theta$ se define una nueva medida de probabilidad $\mathbb{P}^*_\theta$ como:*

$$\mathbb{P}^*_\theta(A) \equiv \frac{\mathbb{E}[F(z_R, v_R, R; \theta)\mathbb{1}_A]}{\mathbb{E}[F(z_R, v_R, R; \theta)]}, \qquad \forall A \in \mathcal{F}_R.$$

donde $F(z,v,t;\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\exp\left(\theta v + \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right)}{(1-H(v))} \int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right)dw$

Observación Como $F(z_t, v_t, t; \theta)$ es una martingala, entonces

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*_\theta}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{F(z_t, v_t, t; \theta)}{\mathbb{E}[F(z_t, v_t, t; \theta]}.$$

Esto último ya que $\forall A \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}^*_\theta(\mathbb{1}_A) = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A F(z_R,v_R,R;\theta)]}{\mathbb{E}[F(z_R,v_R,R;\theta)]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A F(z_R,v_R,R;\theta)|\mathcal{F}_t]]}{\mathbb{E}[F(z_R,v_R,R;\theta)]}$$

como $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_t$ y $F(z_t, v_t, t; \theta)$ es martingala, entonces

$$\mathbb{E}^*_\theta(\mathbb{1}_A) = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[F(z_R,v_R,R;\theta)|\mathcal{F}_t]]}{\mathbb{E}[F(z_R,v_R,R;\theta)]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A F(z_t,v_t,t;\theta)]}{\mathbb{E}[F(z_t,v_t,t;\theta)]}.$$

Para encontrar el generador infinitesimal con respecto a esta nueva medida de probabilidad se hará uso del siguiente Lema general que fue adaptado del resultado de Jang, 2003 (ver [9]) donde los autores trabajaron con Procesos de Cox y lo escribiero para $t = 0$.

Lema 5.16 *Sea $w \geq 0$ una constante, $\Xi_t = (\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t, t)$ un proceso adaptado y $\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_t}g(\tilde{Y}_t, t)$ una martingala. Si se define una nueva medida $\mathbb{P}^*$ de modo tal que $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathrm{e}^{-u\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)]}$. Entonces, el generador del proceso Ξ_t con respecto a la nueva medida $\mathbb{P}^*$ actuando sobre una función $f(x,y,t)$ está dado por:*

$$\boxed{\mathcal{A}^* f(x,y,t) = \frac{\mathcal{A}\hbar(x,y,t)}{\mathrm{e}^{-wx}g(y,t)}}$$

donde $\hbar(x,y,t) \equiv f(x,y,t)\mathrm{e}^{-wy}g(y,t)$.

Demostración. El generador del proceso $(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t, t)$ actuando sobre una función $f(x,y,t)$ con respecto a la medida martingala equivalente es, por definición,

$$\mathcal{A}^* f(x,y,t) = \lim_{dt \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^*[f(\Xi_{t+dt}) \mid \Xi_t = (x,y,t)] - f(x,y,t)}{dt}. \tag{5.1}$$

Además,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*[f(\Xi_{t+dt}) \mid \Xi_t = (x,y,t)] &= \frac{\mathbb{E}[f(\Xi_{t+dt})\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)/\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)] \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)/\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-u\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R)] \mid \Xi_t = (x,y,t)]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[f(\Xi_{t+dt})\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R) \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R,R) \mid \Xi_t = (x,y,t)]}.\end{aligned}$$

Como Ξ_t es una proceso adaptado, por lo tanto, $f(\Xi_{t+dt}) \in \mathcal{F}_{t+dt}$ y $\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_t}g(\tilde{Y}_t, t)$ es una martingala

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[f(\Xi_{t+dt}) \mid \Xi_t = (x,y,t)] &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Xi_{t+dt})\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R, R) \mid \mathcal{F}_{t+dt}] \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R, R) \mid \mathcal{F}_t] \mid \Xi_t = (x,y,t)]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[f(\Xi_{t+dt})\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_R}g(\tilde{Y}_R, R) \mid \mathcal{F}_{t+dt}] \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_t}g(\tilde{Y}_t, t) \mid \Xi_t = (x,y,t)]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[f(\Xi_{t+dt})\mathrm{e}^{-w\tilde{X}_{t+dt}}g(\tilde{Y}_{t+dt}, t+dt) \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathrm{e}^{-wx}g(y,t)} \\
&= \frac{f(x,y,t)\mathrm{e}^{-wx}g(y,t) + \int_t^{t+h}\mathbb{E}[\mathcal{A}\hbar(\Xi_s) \mid \Xi_t = (x,y,t)]}{\mathrm{e}^{-wx}g(y,t).} \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

donde $\hbar(\Xi_s) = \hbar(\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, s) = f(\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, s)\mathrm{e}^{-w\tilde{Y}_s}g(\tilde{Y}_s, s)$.

Reemplazando (5.2) en (5.1) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^*f(x,y,t) &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-wx}g(y,t)} \lim_{dt\searrow 0} \frac{1}{dt}\int_t^{t+dt} \mathbb{E}[\mathcal{A}\hbar(\Xi_s) \mid \Xi_t = (x,y,t)]ds \\
&= \frac{\mathcal{A}\hbar(x,y,t)}{\mathrm{e}^{-wx}g(y,t).}
\end{aligned}
$$

□

Finalmente en la siguiente proposición, usando los resultados anteriores, se obtiene el comportamiento del proceso bajo una medida $\mathbb{P}_\theta^*$.

Proposición 5.17 *Para cada medida de probabilidad $\mathbb{P}_\theta^*$ (definidas en 5.15) el generador infinitesimal del proceso $(z_t, v_t, t) = (u + \int_0^t c(v_s)ds - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t - T_{N_t}, t)$ está dado por:*

$$
\mathcal{A}_\theta^* f(z,v,t) = \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c(v)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v} + \lambda_\theta^*(v)\left(\int_0^\infty f(z-y,0,t)dG_\theta^*(y;v) - f(z,v,t)\right) \tag{5.3}
$$

donde

$$
\lambda_\theta^*(v) = \frac{h(v)\hat{G}(\alpha_\theta; v)\exp\left(-\theta v - \alpha_\theta\int_0^v c(s)ds\right)}{\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw}
$$

y

$$
dG_\theta^*(y;v) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v)}{\hat{G}(\alpha_\theta; v)},
$$

es decir, $\forall\theta \in \Theta$ el proceso sigue siendo un PDPM bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}_\theta^*$.

Demostración. De la Proposición 5.13 se tiene que:

$\frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_t}\exp\left(\theta v_t + \alpha_\theta\int_0^{v_t} c(s)ds\right)}{1-H(v_t)}\int_{v_t}^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw$ es una martingala. Identificando cada elemento es posible usar el Lema 5.16 para encontrar el generador del proceso con respecto a la medida $\mathbb{P}_\theta^*$.

Realizando tal identificación se tiene: $\Xi_t = (z_t, v_t, t)$, $w = \alpha_\theta$,

$$g(v,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta t} \exp\left(\theta v + \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right)}{1 - H(v)} \int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w) \exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw,$$

$\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_t} g(v_t, t)$ es una martingala y, por lo tanto, el generador para la nueva medida está dado por:

$$\mathcal{A}_\theta^* f(z,v,t) = \frac{\mathcal{A}\hbar(z,v,t)}{\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)} \tag{5.4}$$

donde $\hbar(z,v,t) = f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)$.

Además, usando la expresión para el generador cuando la tasa de las primas depende de la edad del proceso, encontrada en (4.7), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\hbar(z,v,t) &= \frac{\delta}{\delta t}\left\{f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\right\} + c(v)\frac{\delta}{\delta z}\left\{f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\right\} + \frac{\delta}{\delta v}\left\{f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\right. \\
&\quad + \lambda(v)\left[\int_0^\infty f(z-y,0,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta(z-y)} g(0,t)dG(y;v) - f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\right] \\
&= \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t) + f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\frac{\delta g(v,t)}{\delta t} + c(v)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} \\
&\quad - c(v) f(z,v,t) g(v,t)\alpha_\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t) + f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\frac{\delta g(z,v)}{\delta v} \\
&\quad + \lambda(v)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(0,t)\int_0^\infty f(z-y,0,t)\mathrm{e}^{\alpha_\theta y} dG(y;v) - \lambda(v) f(z,v,t)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t).
\end{aligned}$$

Como $g(0,t) = \mathrm{e}^{-\theta t}$ y

$$\begin{aligned}
\frac{\delta g(z,v)}{\delta v} &= \mathrm{e}^{-\theta t}\left[\frac{\exp\left(\theta v + \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right)(\theta + \alpha_\theta c(v))}{1 - H(v)} + \frac{\exp\left(\theta v + \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right)}{(1 - H(v))^2} h(v)\right] \\
&\quad \cdot \int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw \\
&\quad - \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\exp\left(\theta v + \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right)}{1 - H(v)} h(v)\hat{G}(\alpha_\theta; v)\exp\left(-\theta v - \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right) \\
&= g(v,t)\left[\theta + \alpha_\theta c(v)\right] + g(v,t)\lambda(v) - \mathrm{e}^{-\theta t}\hat{G}(\alpha_\theta; v)\lambda(v)
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta g(z,v)}{\delta t} = -\theta g(v,t).$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\hbar(z,v,t) &= \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} - \theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} f(z,v,t)g(v,t) + c(v)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} \\
&\quad - c(v)f(z,v,t)g(v,t)\alpha_\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} + \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v} + \theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} f(z,v,t)g(v,t) \\
&\quad + \alpha_\theta \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} c(v)f(z,v,t)g(v,t) + \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\lambda(v)f(z,v,t)g(v,t) - \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\mathrm{e}^{-\theta t}\hat{G}(\alpha_\theta;v)\lambda(v)f(z,v,t) \\
&\quad + \lambda(v)\mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\mathrm{e}^{-\theta t}\int_0^\infty f(z-y,0,t)\mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v) - \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z}\lambda(v)f(z,v,t)g(v,t) \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\left[\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c(v)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\hat{G}(\alpha_\theta;v)\lambda(v)f(z,v,t)}{g(v,t)} + \frac{\lambda(v)\mathrm{e}^{-\theta t}}{g(v,t)}\int_0^\infty f(z-y,0,t)\mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v)\right] \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z} g(v,t)\left[\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c(v)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathrm{e}^{-\theta t}\hat{G}(\alpha_\theta;v)\lambda(v)}{g(v,t)}\left(\int_0^\infty f(z-y,0,t)\frac{\mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v)}{\hat{G}(\alpha_\theta;v)} - f(z,v,t)\right)\right]. \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Finalmente, reemplazando (5.5) en (5.4) se tiene,

$$
\mathcal{A}^*_\theta f(z,v,t) = \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta t} + c(v)\frac{\delta f(z,v,t)}{\delta z} + \frac{\delta f(z,v,t)}{\delta v} + \lambda^*_\theta(v)\left(\int_0^\infty f(z-y,0,t)dG^*_\theta(y;v) - f(z,v,t)\right)
$$

donde

$$
\lambda^*_\theta(v) = \frac{h(v)\hat{G}(\alpha_\theta;v)\exp\left(-\theta v - \alpha_\theta\int_0^v c(s)ds\right)}{\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta;w)\exp\left(-\theta w - \alpha_\theta\int_0^w c(s)ds\right)dw}
$$

y

$$
dG^*_\theta(y;v) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_\theta y}dG(y;v)}{\hat{G}(\alpha_\theta;v)}.
$$

□

5.4. Cálculo del precio de un Reaseguro en un Mercado Estable

Se buscará el precio que no permita arbitraje para un reaseguro de exceso de pérdida de la forma:

$$
U = (S_R - K)^+
$$

donde K representa el umbral tal que a partir de este valor la reaseguradora comienza a cubrir las pérdidas.

Como se mencionó anteriormente la medida equivalente dependerá de la elección de las primas P_t que pagan los cliente a las compañías aseguradoras.

Por lo tanto, para una elección de la tasa $c(v)$ se debe buscar una medida que vuelva al proceso

$$z_t = u + \int_0^t c(v_s)ds - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

martingala. El objetivo será intentar encontrar tal medida en el conjunto de medidas $\{\mathbb{P}_\theta^* : \theta \in \Theta\}$. Como por la Proposición 5.17 se conoce el generador del proceso bajo este tipo de medidas, para intentar hacer de este proceso una martingala para una nueva medida, basta usar la función $f(z, v, t) = z$ en (5.3) e intentar encontrar un θ tal que el generador se anula.

Realizando el procedimiento anterior para una tasa de prima $c(v)$ se debe cumplir que:

$$\mathcal{A}_\theta^* f(z, v, t) = c(v) - \lambda_\theta^*(v) E_{G_\theta^*}(v) = 0,$$

es decir,

$$c(v) = \lambda_\theta^*(v) E_{G_\theta^*}(v). \tag{5.6}$$

5.4.1. Factor de Sobreprima

Del Capítulo 4 se sabe que una tasa de prima $c(v) = \lambda(v)E_G(v)$ hace al proceso z_t una martingala para la medida $\mathbb{P}$. Ahora se supondrá que el valor real fijado por la compañía de seguros es esta tasa más un valor de sobreprima β. Este factor puede corresponder a gastos administrativos, las ganancias esperadas por la aseguradora, entre otros.

Por lo tanto, la tasa de prima a cobrar en este escenario será:

$$c_{\text{SP}}(v) = (1 + \beta)\lambda(v)E_G(v).$$

Se busca $\theta \in \Theta$ tal que bajo $\mathbb{P}_\theta^*$ z_t sea martingala. Según (5.6) lo que se debe buscar es un θ tal que

$$c_{\text{SP}}(v) = (1 + \beta)\lambda(v_s)E_G(v_s) = \lambda_\theta^*(v) E_{G_\theta^*}(v).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= \frac{\lambda_\theta^*(v) E_{G_\theta^*}(v)}{\lambda(v)E_G(v)} \qquad (5.7) \\ &= \frac{h(v)\hat{G}(\alpha_\theta; v) \exp\left(-\theta v - \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right) \int_0^\infty y e^{\alpha_\theta y} dG(y; v)}{\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta; w) \exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw \hat{G}(\alpha_\theta; v)\lambda(v) \int_0^\infty y dG(y; v)} \end{aligned}$$

De esta forma, la expresión general corresponde a:

$$\boxed{1 + \beta = \frac{(1-H(v)) \exp\left(-\theta v - \alpha_\theta \int_0^v c(s)ds\right) \int_0^\infty y e^{\alpha_\theta y} dG(y;v)}{\int_v^\infty h(w)\hat{G}(\alpha_\theta;w) \exp\left(-\theta w - \alpha_\theta \int_0^w c(s)ds\right) dw \int_0^\infty y dG(y,v)}}$$

Ejemplo Trabajando en el segundo ejemplo de Sondermann, 1991 (ver [32]) donde se asume que el monto de las reclamaciones es constante igual a S_0 y que su distribución temporal corresponde a un Proceso de Poisson con parámetro λ, entonces α_θ está dado por (según las restricciones de la Proposición 5.13):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda w} \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0} \mathrm{e}^{-\theta w} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta w \lambda(1+\beta) S_0} dw &= 1 \\ \frac{\lambda \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0}}{\lambda+\theta+\alpha_\theta \lambda S_0(1+\beta)} &= 1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

para $\lambda+\theta+\alpha_\theta \lambda S_0(1+\beta) > 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\lambda_\theta^*(v) &= \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda v} \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0} \mathrm{e}^{-\theta v} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta(1+\beta)\lambda S_0 v}}{\int_v^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda w} \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0} \mathrm{e}^{-\theta w} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta(1+\beta)\lambda S_0 w} dw} \\ &= \lambda+\theta+\alpha_\theta(1+\beta)\lambda S_0.\end{aligned}$$

Reemplazando $\lambda_\theta^*(v)$ en (5.7) y usando (5.8) se obtiene

$$\begin{aligned}1+\beta &= \frac{(\lambda+\theta+\alpha_\theta(1+\beta)\lambda S_0)S_0}{\lambda S_0} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0}.\end{aligned}$$

Con lo que

$$\theta = \lambda\beta - \lambda(1+\beta)\ln(1+\beta) \text{ y } \alpha_\theta = \frac{\ln(1+\beta)}{S_0}.$$

De esta forma se iguala el resultado encontrado por Sonderman, es decir, la distribución temporal pasa a ser una exponencial de parámetro $\lambda(1+\beta)$ y los saltos se mantienen iguales, pero además este nuevo método permite encontrar explícitamente el cambio de medida utilizado para encontrar una martingala.

Para este caso siguiendo la Definición 5.15, se tiene que

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_\theta^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_R} = \frac{F(z_R, v_R, R; \theta)}{\mathbb{E}[F(z_0, v_0, 0; \theta]}.$$

Con

$$\begin{aligned}F(z_R, v_R, R) &= \frac{\mathrm{e}^{-\theta R} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_R} \mathrm{e}^{\theta v} \mathrm{e}^{v\alpha_\theta \lambda S_0(1+\beta)}}{\mathrm{e}^{-v\lambda}} \int_v^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda w} \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0} \mathrm{e}^{-\theta w} \mathrm{e}^{-w\alpha_\theta \lambda S_0(1+\beta)} dw \\ &= \mathrm{e}^{-\theta R} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_R} \mathrm{e}^{v(1+\beta)\lambda} \lambda \mathrm{e}^{\alpha_\theta S_0} \frac{\mathrm{e}^{-v\lambda(1+\beta)}}{\lambda(1+\beta)} \\ &= \mathrm{e}^{-\theta R} \mathrm{e}^{-\alpha_\theta z_R}\end{aligned}$$

Además, $\mathbb{E}[F(z_0, v_0, 0; \theta)] = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\beta)u}{S_0}}$ Por lo tanto

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_\theta^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_R} = \mathrm{e}^{-\lambda\beta R}\mathrm{e}^{N_R \ln(1+\beta)}$$

Finalmente como bajo $\mathbb{P}_\theta^*$ el tamaño de las reclamaciones se mantiene igual y la distribución entre saltos es una exponencial de parámetro $\lambda(1+\beta)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta^*[(S_R - K)^+] &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}_\theta^*[(S_R - K)^+ \mid N_R = l]\mathbb{P}_\theta^*(N_R = l) \\
&= \sum_{l=\lceil \frac{K}{S_0} \rceil}^{\infty} (lS_0 - K)\mathbb{P}_\theta^*(N_R = l) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda(1+\beta)R} S_0 \sum_{l=\lceil \frac{K}{S_0} \rceil}^{\infty} (lS_0 - K)\frac{[\lambda(1+\beta)R]^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Ejemplo Si ahora la distribución de cada reclamación es una exponencial de parámetro δ y el proceso de saltos sigue siendo Poisson(λ), entonces:

$$\begin{aligned}
1+\beta &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda v}\mathrm{e}^{-\theta v}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta(1+\beta)\lambda v/\delta}\delta(\delta-\alpha_\theta)\delta}{(\delta-\alpha_\theta)^2\lambda\int_v^\infty \mathrm{e}^{-\lambda w}\delta \mathrm{e}^{-\theta w}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta w(1+\beta)\lambda/\delta}dw} \\
&= \frac{\delta(\lambda+\theta+\alpha_\theta(1+\beta)\lambda/\delta)}{\lambda(\delta-\alpha_\theta)}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

para $\lambda + \theta + \lambda_\theta(1+\beta)\lambda/\delta > 0$ y $\alpha_\theta < \delta$.

Además,

$$\int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda w}\frac{\delta}{\delta-\alpha_\theta}\mathrm{e}^{-\theta w}\mathrm{e}^{-\alpha_\theta w(1+\beta)\lambda/\delta}dw = 1$$

$$\lambda\delta = (\delta-\alpha_\theta)(\lambda+\theta+\alpha_\theta(1+\beta)\lambda/\delta) \tag{5.10}$$

De esta forma usando (5.9) y (5.10) se obtiene

$$\alpha_\theta = \delta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\right) \text{ y } \theta = -\lambda(1-\sqrt{1+\beta})^2.$$

En este caso

$$\begin{aligned}
\lambda_\theta^*(v) &= \lambda\sqrt{1+\beta} \\
dG_\theta^*(v) &= \frac{\delta}{\sqrt{1+\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{\sqrt{1+\beta}}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo $\mathbb{P}_\theta^*$ el tamaño de las reclamaciones sigue una distribución exponencial de parámetro $\frac{\delta}{\sqrt{1+\beta}}$ y el proceso de saltos es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda\sqrt{1+\beta}$.

Finalmente el valor del reaseguro es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta^*[(S_R-K)^+] &= \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta^*[(S_R-K)^+ \mid S_R = x] f_{S_R}(x)dx \\
&= \int_K^\infty (x-K) f_{S_R}(x)dx
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
f_{S_R}(x) &= \frac{d}{dx}\mathbb{P}_\theta^*(S_R \leq x) \\
\mathbb{P}_\theta^*(S_R \leq x) &= \mathbb{P}_\theta^*\left(\sum_{i=1}^{N_R} Y_i \leq x\right) \\
&= \sum_{l=0}^\infty \mathbb{P}_\theta^*\left(\sum_{i=1}^{N_R} Y_i \leq x \mid N_R = l\right)\mathbb{P}_\theta^*(N_R = l) \\
&= \sum_{l=0}^\infty \mathbb{P}_\theta^*\left(\sum_{i=1}^{l} Y_i \leq x\right)\mathrm{e}^{-\lambda R\sqrt{1+\beta}}\frac{(\lambda R\sqrt{1+\beta})^l}{l!} \\
&= \sum_{l=0}^\infty \left(1 - \sum_{r=0}^{l-1}\frac{1}{r!}\mathrm{e}^{-\delta x}(\delta x)^r\right)\mathrm{e}^{-\lambda T\sqrt{1+\beta}}\frac{(\lambda R\sqrt{1+\beta})^l}{l!}.
\end{aligned}$$

Capítulo 6

Otros cálculos de primas

Los cálculos realizados en los capítulos anteriores brindan una adecuada estimación de la prima neta hay que hacer notar que tal expresión se encontró asumiendo que los individuos contratan una póliza en el mismo instante que un evento sísmico de proporciones acontece, es decir, $v_0 = 0$. Sin embargo, en la realidad este supuesto no siempre se cumple, sino más bien los individuos firman sus contratos en momento aleatorios.

6.1. Prima Condicional

Se llamará Prima Condicional a la prima neta en el siguiente contexto:

- Un contrato de seguro, tal que cada vez que ocurre un evento, $M_i \geq m_0$, éste se termina y se renegocia con la compañía aseguradora.
- El individuo ingresa al sistema cuando ya ha pasado un tiempo Δ desde el último terremoto.
- Se fija $t = 0$ en el tiempo actual.

Por lo tanto, el nuevo proceso corresponderá a un Proceso de Renovación Retardado (ver [24]) donde desde la segunda renovación todas comparten una distribución común y la primera tiene una distribución especial.

Se define:

$$\overline{T}_1 : \text{Instante, medido desde } t = 0 \text{ , de la primera renovación del proceso.}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(\overline{T}_1 \leq t) = \mathbb{P}(T_1 \leq \Delta + t \mid T_1 > \Delta) = \frac{H(\Delta + t) - H(\Delta)}{1 - H(\Delta)}.$$

Para el cálculo de prima se igualará el valor esperado del balance de la compañía a la cantidad de dinero inicial, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z_t] &= u \\ u_0 + P_t - \mathbb{E}[Y_t] &= u \\ P_t = \mathbb{E}[Y_t] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right]. \end{aligned}$$

Entonces, como en este caso particular no puede existir más de una reclamación, el valor de la Prima está dado por:

$$P_t = \mathbb{E}[Y_1 \mathbb{1}_{\overline{T}_1 \leq t}]. \tag{6.1}$$

El valor de esta esperanza puede ser encontrada condicionando con respecto a $\overline{T}_1$:

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{E}[Y_1 \mathbb{1}_{\overline{T}_1 \leq t}] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}[Y_1 \mathbb{1}_{\overline{T}_1 \leq t} \mid \overline{T}_1 = x] h_{\overline{T}_1}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \mathbb{E}[Y_1 \mid \overline{T}_1 = x] h_{\overline{T}_1}(x)\mathrm{d}x \qquad (6.2) \\ &= \int_0^t E_G(\Delta + x)\frac{h(\Delta + x)}{\overline{H}(\Delta)}dx \\ &= \int_\Delta^{\Delta+t} E_G(x)\frac{h(x)}{\overline{H}(\Delta)}dx. \end{aligned}$$

De la línea (6.2) se deduce la igualdad

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}t} = \mathbb{E}[Y_1 \mid \overline{T}_1 = t] h_{\overline{T}_1}(t).$$

Por lo tanto, la tasa de la prima es similar a los casos anteriores, es decir, corresponde al producto entra la probabilidad de que el proceso salte en el tiempo t y el valor esperado del salto si es que ocurre en ese momento.

Observación P_t es creciente y está acotado por $\mathbb{E}[Y_1]$ que a la vez está acotada por el valor total de la propiedad asegurada.

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \mathbb{E}[Y_1] \leq \mathrm{VPA}.$$

6.1.1. Ejemplos

Se tienen dos individuos que contratan un seguro contra el mismo riesgo. El individuo 1 contrata el seguro en el tiempo 0 y el individuo 2 lo contrata en un tiempo $r > 0$. Se asume que hasta un tiempo t $(t > r)$, ningún evento sísmico relevante ha sucedido y que ambas pólizas se encuentran vigentes.

1. Asumiendo $E_G(x) = S_0$ $\forall x$, y $T_1 \sim$exp(λ), entonces

   $$P_t = \int_0^t S_0 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x+\Delta)} \frac{1}{\mathrm{e}^{-\lambda\Delta}} \mathrm{d}x = S_0[1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}].$$

   Al tratarse de un proceso de Poisson, P_t no dependerá de la variable Δ.

   Hasta el tiempo t, el individuo 1 pagará

   $$P_t^1 = S_0[1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}]$$

   y el individuo 2

   $$P_t^2 = S_0[1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t-r)}].$$

   El individuo 1 paga más que el individuo 2, ya que permanece asegurado por un período de tiempo mayor.

2. Asumiendo $E_G(x) = x$ y $T_1 \sim$ Weibull(λ, k), entonces

   $$P_t^1 = \frac{k}{\lambda^k} \mathrm{e}^{\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^k} \int_{\Delta}^{\Delta+t} s^k \mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\lambda}\right)^k} ds.$$

   Al tiempo t el individuo 2 habrá pagado

   $$P_t^2 = \frac{k}{\lambda^k} \mathrm{e}^{\left(\frac{\Delta+r}{\lambda}\right)^k} \int_{\Delta+r}^{\Delta+t} s^k \mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\lambda}\right)^k} ds.$$

   Comparando las tasas que pagará cada individuo en el período $[r, t]$ se cumple que

   $$\frac{\text{Tasa 2}}{\text{Tasa 1}} = \exp\left[\left(\frac{\Delta + r}{\lambda}\right)^k - \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^k\right] > 1.$$

   Por lo tanto, en el período en que ambas pólizas están vigente, el individuo 2 pagará una tasa más alta que el individuo 1 y tal diferencia dependerá del valor de r.

   Este resultado es esperable, ya que ambos están expuestos al mismo riesgo y el individuo 1 paga a lo largo de un intervalo de tiempo mayor.

6.2. Cálculo de Prima para un Proceso de Renovación en Equilibrio

El siguiente cálculo de prima considera una póliza de seguro descrita como en el caso anterior, es decir, se vuelve a negociar una vez que ha ocurrido un sismo importante, y se puede ajustar a dos posibles escenarios.

(a) Por alguna razón, se desconoce el tiempo que ha pasado desde el último terremoto importante en el sitio a considerar.

(b) A la aseguradora le parece muy engorroso o simplemente no está interesada en diferenciar a sus clientes según el tiempo en que contratan sus pólizas y prefiere tratarlos a todos por igual.

En cualquiera de los dos casos anteriores, se asume que el proceso es un Proceso de Renovación en Equilibrio, es decir,

$$\mathbb{P}(T_1^E \leq x) \equiv F_{\text{eq}}(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - H(s)]ds$$

donde $\mu = \int_0^\infty [1 - H(s)]ds$.

Por lo tanto, siguiendo el mismo procedimiento que en la Sección 6.1 la Prima está dada por:

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{E}[Y_1 \mathbb{1}_{T_1^E \leq t}] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}[Y_1 \mathbb{1}_{T_1^E \leq t} \mid T_1^E = x] h_{T_1^E}(x)dx \\ &= \int_0^t \mathbb{E}[Y_1 \mid T_1^E = x]\frac{1}{\mu}[1 - H(x)]dx \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^t E_G(x)[1 - H(x)]dx. \end{aligned}$$

6.2.1. Ejemplos

1. Asumiendo $E_G(x) = S_0\ \forall x$, y $X_1 \sim$exp(λ), entonces

$$P_t = \frac{S_0}{\mu}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda x}dx = S_0[1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}].$$

   Esta prima es igual al caso anterior, lo que se debe a que su tasa de fallos es constante, $F_{\text{eq}}(x)$ no es más que la misma distribución exponencial.

2. Asumiendo $E_G(x) = x$ y $X_1 \sim$ Weibull$(1, 2)$, entonces

$$c_2(s) = \frac{1}{2\Gamma(1{,}5)} s\mathrm{e}^{-s^2}.$$

Comparándola con la tasa anterior, para esta distribución

$$c_1(s) = \frac{2}{\overline{H}(\Delta)}(\Delta + s)^2 \mathrm{e}^{-(s+\Delta)^2}.$$

Se cumple que ambas tasas son decrecientes, lo que tiene sentido, ya que están acotadas por el valor total asegurado de la vivienda. En un comienzo la tasa $c_1(0) = \frac{2}{\overline{H}(\Delta)}(\Delta)^2\mathrm{e}^{-\Delta^2}$ es mayor a $c_2(0) = 0$, y la diferencia depende del valor de Δ. Esto viene del hecho que en el caso 1 se asume que el proceso comenzó hace un tiempo Δ y, por lo tanto, mientras mayor sea Δ, mayor es el riesgo. Mientras en el segundo caso, se tomó la distribución en equilibro. Por lo tanto, si Δ es grande la diferencia entre c_1 y c_2 debería aumentar. Si se analiza el comportamiento asintótico de la razón entre las tasas, se tiene que:

$$\frac{c_1(s)}{c_2(s)} = \mathrm{cte}\frac{(\Delta + s)^2 s\mathrm{e}^{s^2}}{s\mathrm{e}^{(\Delta+s)^2}} \to 0.$$

Es decir, en el primer caso se comienza cobrando una tasa más alta, pero con el paso del tiempo, como ambos están acotados por el mismo valor, la tasa $c_1(s)$ se vuelve menor que $c_2(s)$.

Conclusiones y Problemas Pendientes

A lo largo de esta memoria, se ha descrito el problema de estimar el valor de las primas a pagar por los clientes en un seguro contra terremotos. Luego de haber estudiado el problema es posible afirmar que no es correcto aplicar la teoría convencional de seguros y que es necesario crear resultados especiales para este tipo de desastres naturales.

Además al analizar las estadísticas nacionales disponibles sobre seguros contra terremotos, se obtiene que el 76 % de la población no cuenta con uno. A diferencia de otros países sísmicos donde la legislación exige contratar una póliza y el Estado presta ayuda para que dicha regla se pueda mantener.

Se logró crear un modelo que matemáticamente representa un primer acercamiento al fenómeno estudiado y aplicando resultados de Teoría de Renovación y Procesos de Markov Deterministas por Pedazos, fue posible encontrar el valor de la prima pura por riesgo y la prima que convierte el proceso en un *juego justo*, haciendo del balance de la compañía una martingala.

Luego, se utilizó Cálculo Estocástico aplicado a la Teoría de Finanzas, definiendo un Mercado de Reaseguros Proporcionales. Además, utilizando las condiciones para el cálculo de precios tal que el mercado no permita oportunidades de arbitraje, se creó un procedimiento para encontrar una medida martingala equivalente dentro de un conjunto de medidas.

El mercado chileno no cuenta con alternativas que absorban las pérdidas en caso de un gran evento sísmico, la incorporación de derivados como lo son los bonos asociados a catástrofes naturales podría fortalecer el mercado.

En el último capítulo, se consideró como variable a analizar el tiempo en que un cliente contrata su póliza de seguro y se obtuvieron algunos resultados en un contexto determinado. Se espera que en estudios futuros se profundice este tema logrando extender los resultados generales a este caso.

En los cálculos realizados solo se consideró una prima pura o una tal que el proceso fuera martingala. El objetivo de esto es dar a las compañías aseguradoras las herramientas para efectuar el cálculo de una prima real, que puede incluir una función de utilidades o algún factor de recargo, como se asumió en los ejemplos de reaseguro.

Como trabajo pendiente queda la aplicación de este modelo a un caso real, con el fin de comparar la prima dada con los valores actuales que pagan los clientes a las compañías. Además del estudio de una cartera de seguros contra terremotos, es decir, cómo trabajar con varios clientes a la vez, considerando factores como la distancia entre sus viviendas y las distintas exposiciones al riesgo.

Bibliografía

[1] S. Abaimov, D. Turcotte, R. Shcherbakov, J. Rundle, G. Yakovlev, C. Goltz, and W. Newman. Earthquakes: Recurrence and interoccurrence times. *Pure and Applied Geophysics*, 165:777–795, 2008.

[2] A. Akkaya and M. Yucemen. Stochastic modeling of earthquake occurrences and estimation of seismic hazard: a random field approach. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(1):1 – 13, 2002.

[3] D. R. Brillinger. Earthquake risk and insurance. *Environmetrics*, 4(1):1–21, 1993.

[4] C. A. Cornell. Engineering seismic risk analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(5):1583–1606, 1968.

[5] C. A. Cornell. Probabilistic analysis of damage to structures under seismic loads. *Dynamic Waves in Civil Engineering*, 1971.

[6] C. A. Cornell and E. H. Vanmarcke. The major influence on seismic risk. In *4th World Conference on Earthquake Engineering*, Santiago, Chile, 1969.

[7] H. Cramér. On the mathematical theory of risk. *Skandia Jubilee Volumen,Stockholm*, 1930.

[8] A. Dassios and P. Embrechts. Martingales and insurance risk. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 5(2):181–217, 1989.

[9] A. Dassios and J.-W. Jang. Pricing of catastrophe reinsurance & derivatives using the cox process with shot noise intensity. *Finance and Stochastics*, 7:73–95, 2003.

[10] M. H. A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes: a general class of nondiffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3):353–388, 1984. With discussion.

[11] F. Delbaen and J. Haezendonck. A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(4): 269–277, 1989.

[12] F. Esscher. On the probability function in the collective theory of risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1932(3):175–195, 1932.

[13] H. U. Gerber and E. S. W. Shiu. Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, 18(3):183–218, 1996.

[14] J. Grandell. *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[15] B. Gutenberg and C. F. Richter. *Seismicity of the earth and associated phenomena*. Princeton University Press, Princeton, N. J. :, 2nd ed. edition, 1954. ix, 310 p. : pp.

[16] J.-W. Jang and Y. Krvavych. Arbitrage-free premium calculation for extreme losses using the shot noise process and the esscher transform. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35(1):97 – 111, 2004.

[17] S. Karlin and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York, 1975.

[18] E. Kausel V., S. Martínez A., V. Salinas, J. San Martín A., and E. Scheihing G. On the interoccurrence time distribution of large earthquakes: A stochastic time-predictable model on the basis of simple physical considerations. *Revista Geofísica, Instituto Panamericano de Geografía e Historia*, 41:59–86, 1994.

[19] R. J. Laeven and M. J. Goovaerts. *Premium Calculation and Insurance Pricing*. John Wiley & Sons, Ltd, 2008. ISBN 9780470061596.

[20] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall/CRC, London, New York, Washington D.C., 1996.

[21] F. Lundberg. i. approximerad framstallning av sannolikhetsfunktionen. ii. aterforsakring av kollektivrisker. *Almqvist and Wiksell, Uppsala*, 1903.

[22] T. Lv, J. Guo, and X. Zhang. Ruin probabilities for a risk model with two classes of claims. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26:1749–1760, 2010.

[23] O. Macías. *Catástrofes: Lecciones aprendidas. Terremoto 27 Febrero 2010, Chile.* Asamblea ASSAL XXII - Puerto Rico.

[24] S. Martínez. *Apunte para el curso Procesos de Markov*. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile.

[25] R. K. McGuire. Probabilistic seismic hazard analysis: Early history. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(3):329–338, 2008.

[26] F. A. Nava, C. Herrera, J. Frez, and E. Glowacka. Seismic hazard evaluation using markov chains: Application to the japan area. *Pure and Applied Geophysics*, 162:1347–1366, 2005.

[27] Y. Ogata. Space-time point-process models for earthquake occurrences. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 50:379–402, 1998. 10.1023/A:1003403601725.

[28] L. Rincón. *Introducción a la teoría del riesgo*. Departamento de Matemáticas, Facultad

de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2012.

[29] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance & Finance*, pages 437–482. John Wiley & Sons, Inc., 2008. ISBN 9780470317044.

[30] J. San Martín. *Teoría de la medida.* Departamento de Ingenería Matemática, Universidad de Chile, 2007.

[31] N. Silva. Vulnerabilidad sísmica estructural en viviendas sociales, y evaluacion preliminar de riesgo sismico en la región metropolitana. 2011.

[32] D. Sondermann. Reinsurance in arbitrage-free markets. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10(3):191 – 202, 1991.

[33] E. Straub. Earthquakes and statistics from the insurance point of view. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 45(3):462–472, 1973.

[34] S. V.S. Superintendecia Valores y Seguros. *Información Actualizada del Proceso de Liquidación de Siniestros de Viviendas y Distintos de viviendas afectadas por el Terremoto.* Actualizado al 31 de Octubre 2010.

[35] R. Whitman. Damage probability matrices for prototype buildigs. 1973.

[36] J. Zhuang, Y. Ogata, and D. Vere-Jones. Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences. *Journal of the American Statistical Association*, 97:369–380, 2002.

Apéndice A

Generador Infinitesimal

A.1. Procesos de Markov

Se asume que el proceso $(X_t : t \geq 0)$ es càdlàg, es decir, es continuo por la derecha y tiene límite por la izquierda.

Sea $E = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}(E)$ los borelianos de E, $\mathcal{M}(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es medible}\}$, $\mathcal{M}_b(E) = \{f \in \mathcal{M}(E) : \sup_{x \in E} |g(x)| < \infty\}$ y $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(E, \mathcal{B}(E))$.

Definición A.1 (Kernel de Transición) *Una función $P : \mathbb{R}^+ \times E \times \mathcal{B}(E) \to [0,1]$ es Kernel de Transición si $\forall h, h_1, h_2 \geq 0, x \in E, B \in \mathcal{B}(E)$:*

- $P(h, x, \cdot) \in \mathcal{P}(E)$.
- $P(0, x, \{x\}) = 1$.
- $P(\cdot, \cdot, B) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+ \times E)$.
- $P(h_1 + h_2, x, B) = \int_E P(h_2, y, B) P(h_1, x, dy)$.

Definición A.2 (Proceso de Markov) $(X_t : t \geq 0)$ *es un Proceso de Markov si existe un kernel de transición P y una medida de probabilidad $\alpha \in \mathcal{P}(E)$ tal que*

$$\mathbb{P}(X(0) \in B_0, X(t_1) \in B_1, \ldots, X(t_n) \in B_n) =$$
$$\int_{B_0} \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n) \ldots P(t_{1.} x_0, dx_1) \alpha(dx_0)$$

$\forall n \in \mathbb{N}, B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(E), t_0 = 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$

Observación α corresponde a la distribución inicial y $P(h,x,B)$ se interpreta como la probabilidad de que en un tiempo h, el proceso se mueva del estado x a un estado en B.

Teorema A.3 *Sea $(X_t : t \geq 0)$ un proceso estocástico en E. Entonces, $(X_t : t \geq 0)$ es un Proceso de Markov si y sólo si existe un kernel de transición $P = \{P(h,x,B)\}$ tal que $\forall t, h \geq 0, B \in \mathcal{B}(E)$*

$$\mathbb{P}(X(t+h) \in B \mid \mathcal{F}_t^X) = P(h, X(t), B)$$

o equivalentemente $\forall t, h \geq 0, g \in \mathcal{M}_b(E)$

$$\mathbb{E}(g(X(t+h)) \mid \mathcal{F}_t^X) = \int_E g(y) P(h, X(t), dy).$$

A.2. Generador Infinitesimal

Definición A.4 (Semigrupo de Contracción) *Una familia de transformaciones $(T(h) : h \geq 0)$ de $\mathcal{M}_b(E)$ en sí mismo es un Semigrupo de Contracción si $\forall h, h_1, h_2 \geq 0$ y $g \in \mathcal{M}_b(E)$:*

- $T(0) = Id$.
- $T(h_1 + h_2) = T(h_1)T(h_2)$.
- $\|T(h)g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Lema A.5 *Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Markov con kernel de transición $P = \{P(h,x,B)\}$. Entonces,*

$$T(h)g(x) \equiv \int_E g(y)P(h,x,dy) = \mathbb{E}[g(X(h)) \mid X(0) = x] \text{ para } g \in \mathcal{M}_b(E) \tag{A.1}$$

es un semigrupo de contracción en $\mathcal{M}_b(E)$.

Definición A.6 (Generador Infinitesimal) *Sea $\{T(h)\}$ un semigrupo de contracción y $g \in \mathcal{M}_b(E)$. Se define:*

$$\mathcal{A}g \equiv \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)g - g}{h}.$$

Sea $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_b(E)$ que denota el conjunto de funciones g tales que el límite anterior existe y pertenece a $\mathcal{M}_b(E)$.

Entonces el mapeo $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}_b(E)$ es el generador infinitesimal de $\{T(h)\}$ y $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es llamado el dominio de $\mathcal{A}$.

Por lo tanto, para el semigrupo dado en A.1

$$\boxed{\mathcal{A}g(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\mathbb{E}[g(X(h)) - g(x) \mid X(0) = x]}{h}}$$

Teorema A.7 *Si $(X(t) : t \geq 0)$ es un proceso de Markov con generador $\mathcal{A}$ dado por la fórmula anterior. Entonces, $\forall g \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ el proceso $(M(t) : t \geq 0)$ definido por*

$$M(t) = g(X(t)) - g(X(0)) - \int_0^t \mathcal{A}g(X(u))du$$

es una martingala.

Apéndice B

Superposición de Procesos de Renovación

Dados m procesos de renovación mutuamente independientes $\{W^1(n), W^2(n), ..., W^m(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sus correspondientes procesos de conteo $(N^1(t), N^2(t), ..., N^m(t) : t \geq 0)$ inducidos por las distribuciones $F^1(t), F^2(t), ..., F^m(t)$ (con esperanzas $\mu^1(m), \mu^2(m), ..., \mu^m(m)$, respectivamente) . Se construye un proceso que corresponde a la superposición de estos m procesos, cuyo proceso de conteo es:

$$M^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{m} N^i(t).$$

En general, este nuevo proceso no es un proceso de renovación.

Se define:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu_i(m)} = \frac{1}{\alpha}$$

Si se considera que el proceso ha estado realizándose desde un tiempo suficientemente grande y se fija un $t = 0$, entonces si T_1^i representa el tiempo de la primera renovación del proceso i.

$$\mathbb{P}(T_1^i \leq t) \approx \frac{1}{\mu_i(m)} \int_0^t (1 - F^i(t))dy \approx \frac{t}{\mu_i(m)}$$

donde en la segunda aproximación se asumió que para todo k, $F_k(y)$ es suficientemente pequeño.

Se define $T_1^{(M)}$ como el tiempo de la primera renovación del proceso de superposiciones, entonces asumiendo que para todo i, μ_i es suficientemente grande

$$\mathbb{P}(T_1^{(M)} > t) \approx \left(1 - \frac{t}{\mu_1(m)}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{t}{\mu_m(m)}\right) \approx \mathrm{e}^{-t\alpha}.$$

Por lo tanto, cuando m tiende a infinito, el nuevo proceso se puede aproximar a un proceso de Poisson.