



UNIVERSIDAD DE CHILE

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**ESTIMACIÓN DE RECURSOS RECUPERABLES POR CONDICIONAMIENTO
UNIFORME**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

MARIO SERGIO ORTIZ ABARCIA

**PROFESOR GUÍA:
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN
JULIÁN M. ORTIZ CABRERA
MARIO SOLARI MARTINI**

**SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2012**

RESUMEN

Las técnicas geoestadísticas permiten cuantificar las leyes de especies de interés, subproductos y contaminantes dentro de depósitos minerales. Comúnmente estas técnicas se basan en una hipótesis de estacionaridad (homogeneidad espacial), la cual puede no ser pertinente al depósito considerado. Una técnica poco usada es el condicionamiento uniforme, la cual condiciona la estimación de leyes a la ley del panel, supuestamente conocida, y entrega la distribución de probabilidad de la ley de un bloque elegido aleatoriamente dentro de dicho panel. En el presente trabajo se busca aplicar el método del condicionamiento uniforme, validarlo contra resultados de simulaciones condicionales y extenderlo al caso bivariable.

La base de datos del estudio corresponde a testigos de sondajes en yacimiento cuprífero, con información de coordenadas y leyes de cobre y arsénico en los puntos muestreados.

En el trabajo son considerados cuatro casos de estudio: condicionamiento uniforme con leyes de panel calculadas por kriging o co-kriging y condicionamiento uniforme con leyes de panel calculadas al promediar un conjunto de simulaciones o co-simulaciones. Estos dos últimos casos se utilizan para hacer una comparación más robusta entre la simulación y el condicionamiento uniforme.

La aplicación del condicionamiento uniforme al caso univariable (ley de cobre) da resultados coherentes con la simulación, ya que las curvas tonelaje-ley obtenidas de ambas técnicas se asemejan.

En cambio, al aplicar el condicionamiento uniforme al caso bivariable y contrastar los resultados con los de la co-simulación, se aprecia una diferencia significativa en las curvas tonelaje-ley cuando se considera una restricción sobre la ley de arsénico baja (arsénico menor a 100, 200 ó 300 ppm). Sin embargo, al aliviar la restricción sobre la ley de arsénico, las curvas obtenidas por condicionamiento uniforme se asemejan más a aquellas obtenidas por co-simulación, pero la restricción de ley de arsénico debe ser tan holgada que resulta ser prácticamente un caso univariable en paneles de baja a mediana ley de arsénico.

En base a estos resultados, se recomienda usar el condicionamiento uniforme univariable en etapas tempranas de estimación, cuando la malla de muestreo es amplia, puesto que es ilusorio buscar el detalle bloque a bloque. Por esta razón el condicionamiento uniforme surge como una alternativa de estimación mucho más rápida que la simulación y adecuada cuando existen problemas de estacionaridad. Por otro lado para el caso bivariable, no se recomienda el uso del condicionamiento uniforme, ya que no entrega resultados comparables con aquellos obtenidos por co-simulación, probablemente debido a que modela la dependencia entre las variables en estudio de una forma diferente.

ABSTRACT

Geostatistical techniques allow quantifying grades of species of interest, subproducts and contaminants into mineral deposits. Commonly these techniques are based on a hypothesis of stationary (spatial homogeneity), which might not be appropriate for the deposit in study. A seldom used estimation technique is uniform conditioning; this technique conditions the grade estimation of the grade of a panel, and provides the probability distribution of grade of a random selected block within that panel. This paper seeks to implement the conditioning uniform method, validate against conditional simulations and extend to the bivariate case.

The database of the study comes from drilling samples in a copper deposit, with information about the location and grades of copper and arsenic in sampled points.

For this paper there are four cases: conditioning uniform where the grades of a panel are calculated by kriging or cokriging, and conditioning uniform where the grades of a panel are calculated by averaging the values of a set of simulations or cosimulations. These last two cases are used to make a more robust comparison between the results of the simulation and the conditioning uniform.

The application of uniform conditioning in a univariate case (copper grade) gives consistent results with the simulation, since the grade-tonnage curves obtained from uniform conditioning are similar to those obtained from the simulation techniques.

When the uniform conditioning is applied to the bivariate case, there is a significant difference compares to the results from co-simulation when there is a condition on the grade of arsenic is low (less than 100, 200 or 300 ppm). However, when the condition on the grade is not considered, the bivariate uniform conditioning tonnage curve are closer to those of co-simulation, but the arsenic condition grade is so loose that turns out to be practically a univariate case in some low to medium grade panels arsenic.

Based on these results, we recommend using uniform conditioning univariate estimation in early stages, when the sampling grid is wide, because it is illusory to seek the detail block by block. For this reason uniform conditioning is an alternative estimation method faster than simulation and adequately when there are problems of stationarity. In addition for the bivariate case, it is not recommended to use uniform conditioning, this does not provide results comparable to those obtained by co-simulation, probably due to model the dependence between the study variables differently.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia por darme la oportunidad de estudiar en una gran universidad, por el apoyo y la preocupación brindados durante estos años. En especial a mis padres, Sergio y María, que desde siempre se han preocupado de darme lo mejor. A mi hermana y mi primo, con quienes conviví durante mi estadía en Santiago. A mi mascota Linda, que a pesar del tiempo siempre me recibió con alegría.

A mi polola Camila, que me supo comprender y acompañar en todo momento durante estos últimos años. Gracias por todo el apoyo y cariño entregado.

A mis amigos de toda la vida y los de universidad que han hecho que este periodo sea más entretenido y llevadero. En especial a mis amigos de minería, con los que he tenido que trabajar, estudiar y celebrar en más de una ocasión, espero que la amistad perdure por mucho tiempo más.

A los profesores de la comisión, especialmente al profesor Xavier Emery que siempre demostró preocupación, paciencia y buena disposición a resolver dudas de forma muy pedagógica. Sin duda una de los mejores docentes que he conocido.

A Innova Corfo Chile por el proyecto Innova-Corfo 09CN14-5838 y Fondecyt 1090013 con los cuales se financio este trabajo de memoria. Finalmente se agradece a Codelco por patrocinar la Cátedra de Evaluación de Yacimientos.

A todos ustedes muchas gracias.

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN	1
1.1.	Motivación del trabajo	3
1.2.	Objetivos	4
1.2.1.	Objetivo general	4
1.2.2.	Objetivos específicos	4
1.3.	Alcances	5
2.	ANTECEDENTES.....	6
2.1.	Función aleatoria	6
2.2.	Noción de soporte	7
2.3.	Estudio exploratorio de datos	8
2.4.	Análisis variográfico.....	9
2.4.1.	Variograma experimental.....	9
2.4.2.	Variograma Modelado	11
2.5.	Métodos de estimación local	13
2.5.1.	Kriging	13
2.5.2.	Métodos de estimación multivariable	14
2.5.3.	Vecindad de búsqueda	14
2.5.4.	Validación cruzada	15
2.6.	Simulaciones.....	15
2.6.1.	Modelo multi-Gaussiano.....	16
2.6.1.1.	Hipótesis	16
2.6.1.2.	Validación.....	16
2.6.1.3.	Propiedades del modelo multi-Gaussiano	17
2.6.2.	Transformación Gaussiana (anamorfosis).....	18
2.6.3.	Simulación condicional.....	18
2.7.	Modelos de cambio de soporte.....	20
2.7.1.	Modelo Gaussiano discreto global.....	20
2.8.	Condicionamiento uniforme.....	25
2.8.1.	Caso hipotético donde se conoce el valor del panel	26
2.8.2.	Caso efectivo donde el valor del panel es desconocido	28
3.	METODOLOGÍA	29
3.1.	Selección de soportes.....	29
3.2.	Condicionamiento uniforme en base a kriging y co-kriging.....	30

3.2.1.	Cálculo de leyes de paneles.....	30
3.2.2.	Transformación de datos a valores Gaussianos.....	33
3.2.3.	Obtención de coeficiente de cambio de soporte.....	34
3.2.4.	Aplicación del condicionamiento uniforme.....	35
3.2.4.1.	Condicionamiento uniforme univariable.....	36
3.2.4.2.	Condicionamiento uniforme bivariable.....	37
3.2.5.	Simulación condicional por bandas rotantes.....	37
3.3.	Condicionamiento uniforme en base a simulación y co-simulación.....	39
3.4.	Resultados y validación.....	39
4.	CASO DE ESTUDIO.....	40
4.1.	Estudio exploratorio.....	40
4.1.1.	Histogramas.....	44
4.1.2.	Estadísticas básicas.....	45
4.1.3.	Nubes de correlación.....	45
4.1.4.	Matriz de correlación.....	46
4.1.5.	Selección de zona de estudio.....	47
4.2.	Kriging y co-kriging de paneles.....	51
4.2.1.	Definición de soporte panel.....	51
4.2.2.	Análisis variográfico de las leyes de arsénico y cobre.....	51
4.2.3.	Vecindad de búsqueda.....	56
4.2.4.	Resultados de leyes de paneles.....	56
4.2.4.1.	Resultados kriging de paneles.....	57
4.2.4.2.	Resultados co-kriging paneles.....	59
4.3.	Varianzas y co-varianzas de datos.....	61
4.4.	Transformación Gaussiana de los datos.....	61
4.5.	Análisis variográfico de las variables Gaussianas.....	63
4.6.	Coeficientes de cambio de soporte.....	66
4.6.1.	Coeficientes para caso univariable.....	66
4.6.2.	Coeficientes para caso bivariable.....	66
4.7.	Parámetros para simulación.....	67
4.7.1.	Definición de soporte bloque.....	67
4.7.2.	Vecindad de búsqueda.....	67
4.7.3.	Resultados.....	68
4.7.3.1.	Bloques simulados.....	68
4.7.3.2.	Resultados rebloqueo a paneles.....	68

5.	RESULTADOS.....	70
5.1.	Condicionamiento uniforme en base a kriging y co-kriging.....	71
5.1.1.	Caso univariable	71
5.1.1.1.	Panel 4	72
5.1.1.2.	Panel 91	72
5.1.1.3.	Panel 119	73
5.1.1.4.	Panel 224	73
5.1.1.5.	Panel 387	74
5.1.2.	Caso bivariable	75
5.1.2.1.	Panel 4	76
5.1.2.2.	Panel 91	77
5.1.2.3.	Panel 119	78
5.1.2.4.	Panel 224	79
5.1.2.5.	Panel 387	80
5.2.	Condicionamiento uniforme en base a simulación.....	81
5.2.1.	Caso univariable	81
5.2.1.1.	Panel 4	82
5.2.1.2.	Panel 91	82
5.2.1.3.	Panel 119	83
5.2.1.4.	Panel 224	83
5.2.1.5.	Panel 387	84
5.2.2.	Caso bivariable	84
5.2.2.1.	Panel 4	85
5.2.2.2.	Panel 91	86
5.2.2.3.	Panel 119	87
5.2.2.4.	Panel 224	88
5.2.2.5.	Panel 387	89
5.3.	Análisis de resultados	90
5.3.1.	Análisis de resultados caso univariable	90
5.3.2.	Análisis de resultados caso bivariable	90
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	91
7.	REFERENCIAS.....	93
8.	ANEXOS	94
8.1.	Anexo 1: Nubes de dispersión de datos contra las coordenadas	94
8.2.	Anexo 2: Variogramas de búsqueda de direcciones de anisotropía	95

8.3.	Anexo 3: Variogramas experimentales As, Ag y Cu.....	97
8.4.	Anexo 4: resultados de kriging y co-kriging de paneles.....	98
8.5.	Anexo 5: Validación cruzada kriging y co-kriging	102
8.6.	Anexo 6: Verificación de hipótesis de bigaussianidad.....	103

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Efecto soporte en la distribución de ley de cobre	8
Figura 2: Ejemplos de herramientas de análisis de datos (Mapa, nube de correlación, grafico cuantil contra cuantil, histograma).....	9
Figura 3: Variograma experimental para datos de ley de Molibdeno, calculado en dos direcciones del espacio.	11
Figura 4: Variograma modelado para datos de ley de Cobre, modelado en dos direcciones del espacio.....	12
Figura 5: Vecindad de búsqueda (2D) para tres datos por cuadrante.	15
Figura 6: Nubes de correlación diferida para h pequeño y grande.....	17
Figura 7: Construcción grafica de anamorfosis Gaussiana	18
Figura 8: Sesgo en la reproducción del variograma producido por el algoritmo secuencial	19
Figura 9: Reproducción del variograma con el algoritmo de bandas rotantes	19
Figura 10: Esquema explicativo de hipótesis de modelo Gaussiano discreto	22
Figura 11: Determinación de coeficiente de cambio de soporte	24
Figura 12: Esquema de soportes utilizados	30
Figura 13: Esquema de etapas para leyes de paneles caso univariable.....	31
Figura 14: Esquema de etapas para leyes de paneles caso bivariable.....	32
Figura 15: Transformación de datos a valores Gaussianos	33
Figura 16: Obtención de coeficiente de cambio de soporte	34
Figura 17: Condicionamiento uniforme univariable.....	36
Figura 18: Condicionamiento uniforme bivariable.....	37
Figura 19: Simulación condicional por bandas rotantes	38
Figura 20: Sondajes de base de datos completa As	40
Figura 21: Sondajes de base de datos completa Cu	41
Figura 22: Sondajes de base de datos cargados a Isatis As.....	41
Figura 23: Sondajes de base de datos cargados a Isatis Cu.....	42
Figura 24: Grafico de desagrupamiento para distintos tamaños de celda.....	42
Figura 25: Sección en cota 1790 metros	43
Figura 26: Histogramas para cada variable de base de datos	44
Figura 27: Nubes de correlación entre variables de base de datos	46
Figura 28: Grilla de paneles sobre la zona de estudio	47
Figura 29: Datos de sondajes seleccionados As	48
Figura 30: Datos de sondajes seleccionados Cu.....	48
Figura 31: Histograma de ley de cobre (Cu) para zona de estudio.....	49
Figura 32: Histograma de ley de arsénico (As) para zona de estudio.....	50
Figura 33: Nube de correlación Cu-As para zona de estudio.....	50
Figura 34: Mapa variográfico para Arsénico.....	52
Figura 35: Mapa variográfico para Cobre	53
Figura 36: Direcciones de anisotropías seleccionadas.....	53
Figura 37: Variogramas experimentales simples y cruzados, a lo largo de las direcciones principales de anisotropía.....	54
Figura 38: Variogramas modelados simples y cruzados.....	55
Figura 39: Vista de secciones de Kriging As	57
Figura 40: Histograma de estimaciones de As (kriging).....	57
Figura 41: Vista de secciones de Kriging Cu	58

Figura 42: Histograma de estimaciones de Cu (kriging)	58
Figura 43: Vista de secciones de Co-Kriging As.....	59
Figura 44: Histograma de estimaciones de As (Co-kriging).....	59
Figura 45: Vista de secciones de Co-Kriging Cu	60
Figura 46: Histograma de estimaciones de Cu (Co-kriging).....	60
Figura 47: Histograma de datos Gaussianos As	62
Figura 48: Histograma de datos Gaussianos Cu.....	62
Figura 49: Variogramas experimentales variables Gaussianas, a lo largo de las direcciones principales de anisotropía.....	64
Figura 50: Variogramas modelados variables Gaussianas	65
Figura 51: Histograma de leyes de paneles, promedio de las realizaciones de arsénico.	68
Figura 52: Histograma leyes de paneles, promedio de las realizaciones de cobre.....	69
Figura 53: Estadísticas leyes de paneles, promedio de las realizaciones.....	69
Figura 54: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.....	72
Figura 55: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.....	72
Figura 56: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación....	73
Figura 57: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación....	73
Figura 58: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación....	74
Figura 59: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.....	76
Figura 60: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.....	77
Figura 61: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.....	78
Figura 62: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.....	79
Figura 63: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.....	80
Figura 64: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación. 82	
Figura 65: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.....	82
Figura 66: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.....	83
Figura 67: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.....	83
Figura 68: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.....	84
Figura 69: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.....	85
Figura 70: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.....	86
Figura 71: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.....	87
Figura 72: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.....	88
Figura 73: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.....	89
Figura 74: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Cu).....	94

Figura 75: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Ag).....	94
Figura 76: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Mo).....	94
Figura 77: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Sb)	95
Figura 78: Gráficos de dispersión en las coordenadas (As)	95
Figura 79: Variogramas experimentales arsénico.....	95
Figura 80: Variogramas experimentales cobre.....	96
Figura 81: Variogramas experimentales As, Ag, Cu	97
Figura 82: Resultado Kriging As paneles	98
Figura 83: Resultado Kriging Cu paneles	99
Figura84: Resultado Co-Kriging As paneles.....	100
Figura 85: Resultado Co-Kriging Cu paneles	101
Figura 86: Validación cruzada kriging.....	102
Figura 87: Nube de correlación variables Gaussianas	103
Figura 88: Histograma Gaussiano As	103
Figura 89: Histograma Gaussiano Cu.....	103
Figura 90: Nubes de dispersión diferidas para pequeñas y grandes distancias	104

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estadísticas básicas de las variables de la base de datos.....	45
Tabla 2: Matriz de correlación entre las variables presentes en la base de datos.....	46
Tabla 3: Datos de grilla de paneles.....	48
Tabla 4: Datos de grilla de bloques.....	49
Tabla 5: Tabla de estadísticas para leyes de Cobre y Arsénico.....	49
Tabla 6: Soporte de panel definido.....	51
Tabla 7: Parámetros para construcción de variogramas.....	54
Tabla 8: Parámetros de la vecindad de búsqueda.....	56
Tabla 9: Resumen de estimaciones obtenidas.....	56
Tabla 10: Estadísticas de datos Gaussianos.....	62
Tabla 11: Parámetros para variogramas experimentales variables Gaussianas.....	63
Tabla 12: Coeficientes cambio de soporte univariable.....	66
Tabla 13: Varianza de gaussianas de bloque y panel.....	66
Tabla 14: Coeficientes cambio de soporte Bivariable.....	67
Tabla 15: Covarianza de gaussianas de bloque y panel.....	67
Tabla 16: Soporte bloque definido.....	67
Tabla 17: Parámetros vecindad de búsqueda para simulación.....	67
Tabla 18: Estadísticas para simulación.....	68
Tabla 19: Resultados kriging y Co-kriging por paneles.....	71
Tabla 20: Resultados C.U univariable As (Kriging).....	71
Tabla 21: Resultados C.U univariable Cu (Kriging).....	71
Tabla 22: Resultados C.U bivariable As (Co-Kriging).....	75
Tabla 23: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Kriging).....	75
Tabla 24: Resultados C.U univariable As (Simulación).....	81
Tabla 25: Resultados C.U univariable Cu (Simulación).....	81
Tabla 26: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Simulación).....	84
Tabla 27: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Simulación).....	84
Tabla 28: Parámetros para variograma experimental As.....	96
Tabla 29: Parámetros para variograma experimental Cu.....	96

1. INTRODUCCIÓN

La Geoestadística es una herramienta utilizada para el estudio de variables regionalizadas, es decir, fenómenos que se extienden en el espacio y que pueden presentar cierto grado de organización. En particular, se utiliza para estimar la ley de elementos de interés presentes en un yacimiento, y de esta forma poder cuantificar la presencia de los elementos de interés, subproductos y contaminantes en dicho depósito. Esta información es clave para la evaluación económica, diseño, planificación y operación de un proyecto minero.

Para el desarrollo del presente trabajo se cuenta con la información recopilada en el muestreo de testigos de sondajes de exploración de un yacimiento cuprífero, lo que genera una base de datos con las leyes y coordenadas de los puntos muestreados. Las variables regionalizadas presentes y que se estudian de la base de datos son las leyes de cobre, plata, molibdeno, arsénico y antimonio.

Por lo general la estimación de alguna variable de interés se realiza mediante técnicas que incorporan sólo información de la misma variable (caso univariable). Ahora bien, considerando que en la mayoría de los yacimientos existen diferentes variables que se correlacionan entre sí, es razonable pensar en la aplicación de métodos de estimación multivariable. Por esta razón, a la hora de hacer la estimación de cierto yacimiento puede ser conveniente y necesaria hacer una estimación bivariable en vez de una univariable o viceversa, dependiendo del caso en estudio.

Para realizar estimaciones de una o más variables, existen diversas técnicas en geoestadística que se pueden usar, como lo son:

- Kriging o Co-Kriging.
- Kriging de indicadores.
- Kriging disyuntivo.
- Simulación condicional y no condicional.
- Condicionamiento uniforme (C.U).

En estos dos últimos métodos se basa el trabajo, con el que se pretende aplicar, validar y extender al caso bivariable el método del condicionamiento uniforme. Este método recibe la ley estimada del panel y entrega la distribución de probabilidad de la ley de un bloque elegido aleatoriamente dentro de dicho panel. Este método es útil para cuando existen problemas de estacionaridad, ya que en su estimación no distingue entre los bloques de un mismo panel.

Para lograr el objetivo del presente trabajo, se abarca el cambio de soporte utilizando el modelo Gaussiano discreto y se trabaja con tres soportes: punto, bloque y panel. Primero se hacen pruebas del condicionamiento uniforme univariable, para entender su funcionamiento y metodología antes de pasar al caso multivariable.

El trabajo se basa en cuatro casos de estudio donde se consideran dos formas de obtener la ley del panel: mediante kriging o simulación para el C.U univariable y mediante co-kriging o co-simulación para el C.U bivariable.

Los resultados obtenidos por el condicionamiento uniforme para el caso univariable y multivariable, son validados contra una simulación o co-simulación condicional por bandas rotantes respectivamente. La comparación se hace en base a curvas tonelaje-ley obtenidas por cada uno de los métodos.

1.1. Motivación del trabajo

Hoy en día comúnmente la estimación de recursos y reservas son a través de técnicas de estimación univariadas, como lo es el kriging ordinario. Otras técnicas también usadas, pero poco conocidas en la industria minera, son los métodos multivariados, como co-kriging, debido principalmente a la dificultad de determinar el modelo de correogionalización de las variables por medio del variograma modelado multivariable.

Dependiendo del caso en ocasiones surge la necesidad de estimar conjuntamente dos o más variables en un determinado yacimiento. Como es el caso de la base de datos estudiada, donde no basta con saber la presencia de las especies de interés económico, sino que también es relevante a la hora de evaluar el proyecto saber el nivel de contaminación de arsénico existente, ya que concentrados que sobrepasan cierto nivel de contaminante no son comercializables.

Por otra parte cuando existen problemas de estacionaridad, y la malla de muestreo es amplia, los métodos estacionarios corren el riesgo de no ser pertinentes. Pero, es posible aliviar la hipótesis de estacionaridad si se renuncia a distinguir entre las estimaciones de los bloques de un mismo panel.

Frente a esta carencia y desconocimiento de otras técnicas de estimación, surge el interés de evaluar una técnica poco usual llamada condicionamiento uniforme. Por ende en este trabajo se busca estudiar el comportamiento de este método de estimación en los casos univariable y multivariable. También se espera validar los resultados de esta técnica contra una simulación o co-simulación según sea el caso. Si los resultados son positivos y concuerdan con los resultados de las simulaciones, se pretende dar una técnica de estimación alternativa rápida en tiempo de cálculo, sin el detalle bloque a bloque innecesario y ficticio para etapas tempranas de exploración (malladas de exploración poco densas).

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es programar y posteriormente aplicar un método de estimación univariable y multivariable (condicionamiento uniforme), con el cual se espera predecir la cantidad de recursos recuperables de un yacimiento: leyes, tonelajes, finos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Aplicación y familiarización con el condicionamiento uniforme univariable.
- Extensión del condicionamiento uniforme al caso multivariable y aplicación a una base de datos de cobre y arsénico.
- Programación del caso multivariable, en base al caso univariable del método.
- Comparación del condicionamiento uniforme univariable y bivariable, con simulación o co-simulación respectivamente.
- Comparación de resultados mediante curvas tonelaje-ley de cada variable, como también curvas tonelaje-ley condicionando una variable con respecto a otra.

1.3. Alcances

El método de estimación se aplica sobre una base de datos de testigos de sondajes de variadas profundidades, desde la cota 860 m.s.n.m hasta la cota 2000 m.s.n.m. En la dirección NS se extiende por 2 km y en EW 1 km. Dicha base de datos contiene las leyes muestreadas de cobre, arsénico, plata, molibdeno y antimonio. Para la realización de este trabajo se usan tres soportes:

- Punto: representa la muestra de sondaje.
- Bloque: representa la unidad de selección minera.
- Panel: representa un volumen cuya ley se supone conocida.

Con el presente trabajo se busca estudiar el condicionamiento uniforme univariable en un principio, ya que es un método poco usual. Luego, se extiende al caso multivariable para predecir los recursos recuperables dentro de un panel o para el yacimiento en general para una o más variables al mismo tiempo. El número de variables a estimar en el caso multivariable es de dos (cobre y arsénico) luego del análisis de la base de datos.

La validación del condicionamiento uniforme univariable y multivariable se hace contra una simulación o co-simulación de los bloques respectivamente. Se pretende poner en comparación principalmente los tiempos de cálculo de los dos métodos y los resultados entregados por cada técnica mediante curvas tonelaje-ley.

La estimación de la ley de los paneles se hace con kriging o co-kriging ordinario según corresponda el caso univariable o bivariable. Para el cambio de soporte se usa el modelo Gaussiano discreto.

Los análisis, estimaciones y modelos, se realizan con la ayuda de los programas EXCEL, UMIN, MATLAB e ISATIS.

Este trabajo, llamado “Modelamiento multivariable para evaluación de yacimientos”, se enmarca dentro del proyecto INNOVA CORFO 09CN14-5838 y Fondecyt 1090013 “Multivariate Geostatistics and applications to the characterization of mineral resources”.

2. ANTECEDENTES

En el presente capítulo se pretende describir los modelos y técnicas usados para el desarrollo de este trabajo, para así dar un respaldo teórico a las herramientas utilizadas.

La geoestadística es una rama de la estadística cuyo enfoque es el estudio de variables regionalizadas. Su interés principal es la estimación o predicción de estas variables. Las variables regionalizadas son variables numéricas, que se utilizan para medir alguna propiedad de un fenómeno regionalizado, dentro de un campo determinado. Un ejemplo importante de variable regionalizada es la ley de elementos de interés en un yacimiento minero.

La estimación es uno de los principales objetivos de la geoestadística y consiste en evaluar de la manera más precisa un valor del cual no se tiene información a partir de los datos disponibles. Dentro de esto, se distinguen dos tipos de estimaciones: la estimación global, que tiene como objetivo caracterizar por completo el campo por un valor único (como la media de la variable regionalizada) o por una distribución estadística (histograma), y la estimación local cuya función es la evaluación de un sitio que no ha sido muestreado.

Para poder describir una variable regionalizada es necesario elaborar un modelo. Debido a la complejidad de las variables en estudio, la elaboración de un modelo determinístico no es posible, por lo que es necesario usar modelos probabilísticos para la descripción de dichas variables. Esto permite formalizar tanto los conocimientos como la incertidumbre del fenómeno en estudio. Además, no se puede hacer uso de la estadística clásica, ya que considera que los datos medidos son variables aleatorias independientes, lo cual no constituye un supuesto válido en este campo.

2.1. Función aleatoria

Se interpreta cada valor de la variable regionalizada en estudio como una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. El conjunto de variables aleatorias constituye una función aleatoria que está dado por:

$$Z = \{Z(x), x \in D\}$$

Dónde:

- $Z = \{Z(x), x \in D\}$ es la variable regionalizada, que corresponde a una realización de la función aleatoria Z en el sitio x , en el dominio D .

Las funciones aleatorias se caracterizan por tener una distribución espacial. Es el conjunto de funciones de distribución para todos los enteros k , y todas las elecciones posibles $\{x_1, \dots, x_k\}$ en D , y queda expresada como:

$$F_{x_1, \dots, x_k}(z_1, \dots, z_k) = Prob\{Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k\} \quad \forall z_1, \dots, z_k \in R$$

2.2. Noción de soporte

Una variable regionalizada puede definirse en una superficie (2D) o en un volumen (3D). Esta superficie o volumen se denomina soporte. En general, el soporte que se utiliza en las mediciones es muy pequeño (asimilado a un “punto”), en comparación con el que interesa en la práctica que puede ser de mayor volumen (unidades de explotación). La dependencia que existe entre el soporte y la distribución estadística de los valores es conocida como “efecto de soporte”. Los soportes voluminosos presentan menor cantidad de valores extremos y mayor cantidad de valores intermedios que los soportes puntuales. Por esto, la distribución de valores (en especial la varianza) depende del soporte que se esté utilizando (Figura 1).

Para los problemas que involucran un cambio de soporte, es deseable que la variable regionalizada sea aditiva, es decir, su valor en un soporte grande sea igual a la media de sus valores puntuales que están dentro del soporte. Así, el cálculo de un valor promedio sobre un soporte más grande que el soporte de las mediciones tendrá un sentido físico.

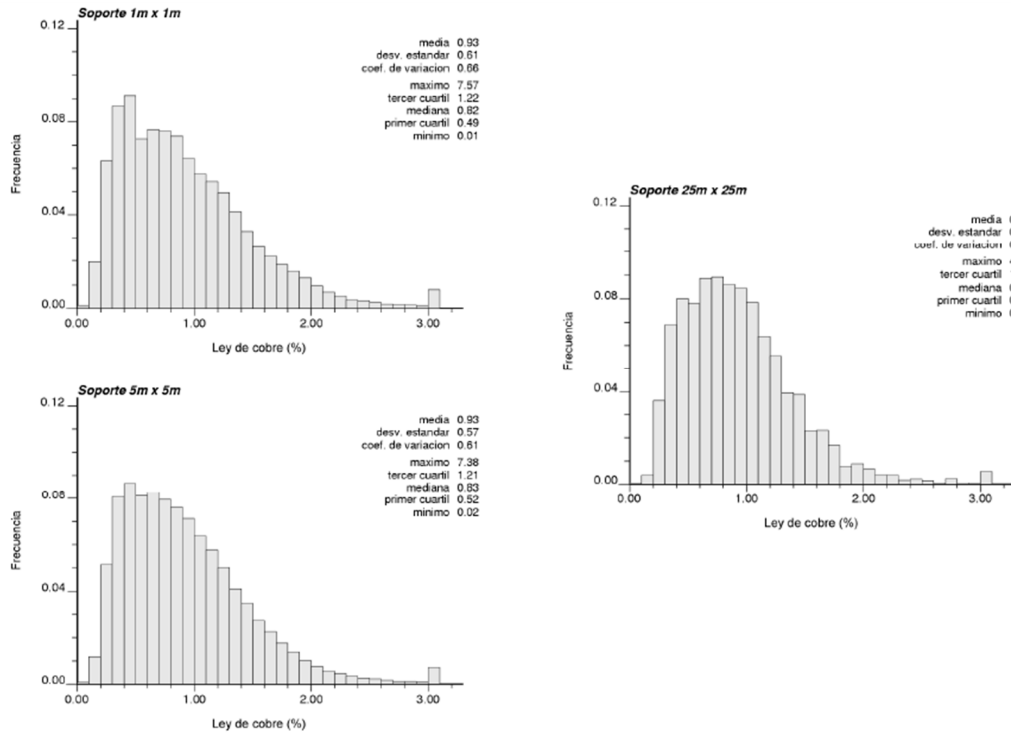


Figura 1: Efecto soporte en la distribución de ley de cobre

2.3. Estudio exploratorio de datos

El objetivo es estudiar las variables regionalizadas para conocer de manera general su distribución, analizar la cantidad y calidad de los datos, definir zonas de estudio y anticipar dificultades o problemas que puedan surgir durante el proceso de estimación. Para llevar a cabo el análisis exploratorio de datos se dispone de distintas herramientas (univariabes y multivariabes), entre las cuales se destacan:

- Despliegue de datos a través de mapas: se utilizan para visualizar la ubicación espacial de los datos
- Histogramas: representan de manera gráfica la distribución estadística de los valores, a través de la frecuencia de ocurrencia de un valor.
- Estadísticas elementales: mediciones de los datos como la media, varianza, mínimo, máximo, etc.
- Desagrupamiento: define una variable de ponderación que se utiliza para calcular el histograma y las estadísticas elementales.
- Diagramas de caja: permiten resumir características de la distribución, como su simetría y dispersión.
- Histograma acumulado: permite visualizar la frecuencia acumulativa de los valores.

- Gráficos de probabilidad: permite comparar una distribución experimental con una referencial.
- Grafico cuantil contra cuantil: permite comparar dos distribuciones entre sí.
- Nube de correlación: permite visualizar una variable en función de otra.

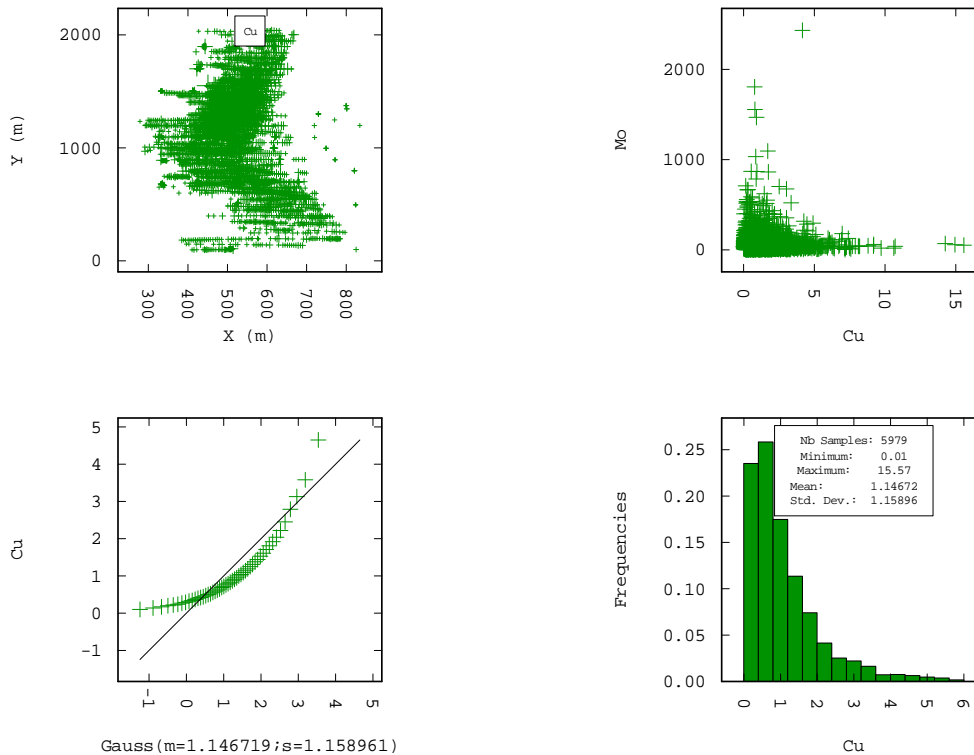


Figura 2: Ejemplos de herramientas de análisis de datos (Mapa, nube de correlación, grafico cuantil contra cuantil, histograma)

2.4. Análisis variográfico

Su objetivo es modelar la correlación espacial de las variables regionalizadas en estudio, sabiendo que los valores de éstas no son independientes entre sí, pues el valor observado en un sitio proporciona información sobre los valores en sitios vecinos.

2.4.1. Variograma experimental

Este variograma consiste en la primera etapa del análisis variográfico, y su objetivo es medir la variabilidad espacial de los datos. Considera la diferencia entre pares de datos que se encuentran separados por un cierto vector h .

A continuación se presenta el caso del variograma discreto o simple, es decir, el univariable.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [Z(x_\alpha) - z(x_\alpha + h)]^2$$

Donde, $z(x)$ representa a la variable regionalizada, $|N(h)|$ es el número de pares de datos para una separación dada por un vector h , $[(x_\alpha, x_\alpha + h), \alpha = 1, \dots, N(h)]$ son las posiciones de los pares de datos.

Para el caso multivariable, el variograma cruzado se utiliza para analizar la continuidad espacial que hay entre dos variables (z_i y z_j), y se define de la siguiente forma:

$$\hat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{2|N_{ij}(h)|} \sum_{N_{ij}(h)} [z_i(x_\alpha) - z_i(x_\alpha + h)] \cdot [z_j(x_\alpha) - z_j(x_\alpha + h)]$$

Dónde:

- $N_{ij}(h)$ es el número de pares de datos separados por un vector h .

El variograma simple corresponde al caso donde $i = j$, a partir de esto, se define la matriz de variograma de la siguiente forma:

$$\hat{\Gamma}(h) = [\hat{\gamma}_{ij}(h)]_{i,j=1 \dots N}$$

Algunas de las partes importantes del variograma son:

- Meseta: es el valor donde se estabiliza el variograma experimental. Esta debe ser igual a la varianza de la variable (en el caso univariable), o a la covarianza (para el variograma cruzado).
- Alcance: es la distancia que alcanza la meseta.
- Efecto pepita: es la discontinuidad que presenta el variograma en el origen. A medida que aumenta el efecto pepita, aumenta la variabilidad de la variable en estudio a pequeña escala.

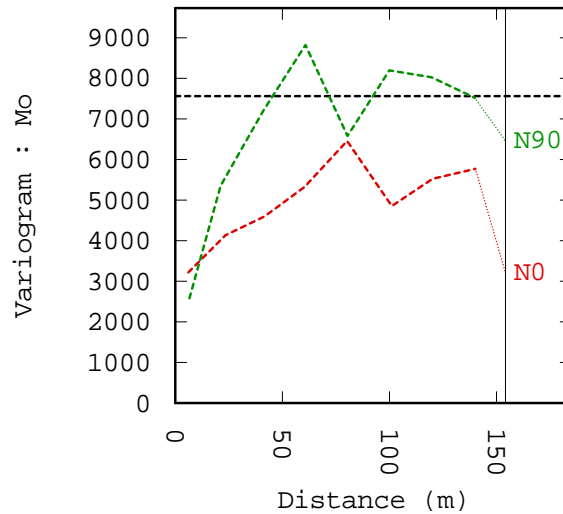


Figura 3: Variograma experimental para datos de ley de Molibdeno, calculado en dos direcciones del espacio.

2.4.2. Variograma Modelado

El variograma experimental presenta dos problemas principales: es incompleto ya que solo se calcula para ciertas direcciones y distancias, y está sujeto a aproximaciones porque el número de datos es limitado.

Por esto, es necesario generar un variograma modelado que se ajuste de la mejor forma al variograma experimental y a partir del cual se puede interpretar la correlación espacial de la variable. A continuación se presentan los modelos elementales que se utilizan según la forma que presente el variograma experimental:

- Efecto pepita: Discontinuidad en el origen
- Modelo Gaussiano: Parabólico en el origen
- Modelo esférico y exponencial: lineales en el origen

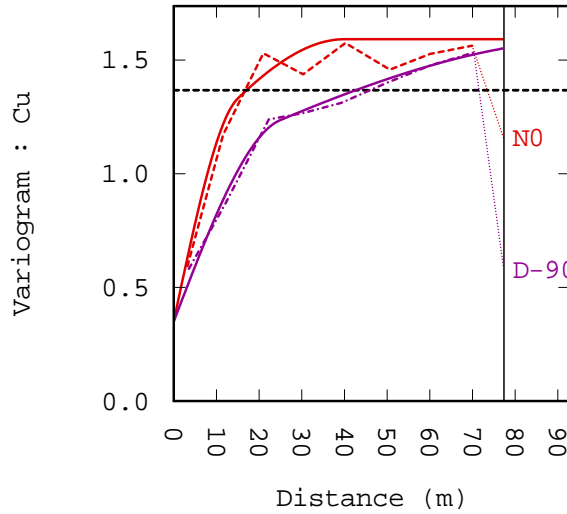


Figura 4: Variograma modelado para datos de ley de Cobre, modelado en dos direcciones del espacio

El variograma modelado multivariable es la combinación de los variogramas modelados elementales, y se construye considerando los mismos modelos básicos mencionados para el caso univariable. En este caso, la meseta queda definida a través de una matriz, en cuya diagonal se encuentran las mesetas de los variogramas simples, y en el resto de la matriz están las mesetas de los variogramas cruzados.

La ecuación para un modelo de N variables es la siguiente:

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{u=1}^s b_{ij}^u g_u(h), \forall i, j \in [1, N]$$

Y de forma matricial,

$$\Gamma(h) = \sum_{u=1}^s B_u g_u(h)$$

Dónde:

- $\Gamma(h) = [\gamma_{ij}(h)]_{i,j=1\dots N}$ es la matriz de variogramas simples y cruzados.
- $g_u(h)$ es un modelo básico de variograma.

- $B_u = [b_{ij}^u]_{i,j=1\dots N}$ es una matriz de correogionalización y para que el modelo sea válido, cada matriz de correogionalización $\{B_u, u = 1 \dots S\}$ debe ser simétrica y de tipo positivo.

2.5. Métodos de estimación local

Se busca estimar el valor de la variable regionalizada en un sector, a partir de los datos disponibles (problema de “interpolación” espacial). La mayoría de los métodos de estimación local se basa en información de naturaleza geométrica, como distancias entre los sitios de los datos, pero ignoran la continuidad espacial de la variable en estudio, la cual se resume en el modelo de variograma.

2.5.1. Kriging

Consiste en un método de estimación que pretende mejorar la interpolación de los datos, tomando en cuenta lo siguiente:

- Distancias entre sitios con datos y sitio a estimar.
- Redundancia de datos que se puede deber a agrupamientos espaciales.
- Continuidad espacial de la variable regionalizada (variograma).

Este método estima haciendo una combinación lineal de los datos conocidos, sin sesgo y con varianza del error mínima. Se puede distinguir entre dos tipos de kriging que son simple y ordinario. Donde el kriging simple es de media conocida, mientras que en el kriging ordinario la media es desconocida.

Algunas propiedades importantes del kriging en general son:

- Interpolación exacta: la interpolación de un sitio con dato entrega como valor ese mismo dato, y la varianza de kriging en ese sitio es nula.
- Insesgo: la media de los errores cometidos en una región de gran tamaño se acerca a cero.
- Precisión: la varianza de los errores cometidos en una región.
- Suavizamiento: el mapa de los valores estimados por el kriging es más suave que el mapa de los valores reales, es decir, fluctúa menos.

- Aditividad: el kriging y co-kriging conmutan con operadores lineales (promedio en un bloque, convolución, gradiente, deriva), pero pueden dar una respuesta sesgada al aplicar un operador no lineal.

2.5.2. *Métodos de estimación multivariable*

Los métodos de estimación que usan más de una variable son los llamados multivariables. Dentro de éstos destaca el co-kriging que corresponde a la extensión multivariable del kriging.

El objetivo del co-kriging es estimar el valor de una variable en un sitio, a partir de las mediciones de ésta y de variables correlacionadas con ella. La estimación corresponde a una combinación lineal ponderada de los datos, sin sesgo, y con una varianza del error mínima.

Cuando existe más de una variable regionalizada es preferible la utilización de co-kriging en vez de kriging para cada una de ellas por las siguientes razones:

- Para estimar una variable se aprovecha la información que aportan las demás. En general, la varianza del error obtenida por el co-kriging es menor que la que entrega el kriging.
- Mejora la coherencia de los resultados de estimación, ya que toma en cuenta las relaciones lineales entre las variables en estudio.

La utilización del co-kriging mejora los resultados cuando las variables presentan buena correlación espacial y diferentes sitios con datos, pero en el caso de que la correlación sea mala, se corre el riesgo de no mejorar la precisión y aumentar mucho los tiempos de cálculo con respecto al kriging.

El co-kriging posee las mismas propiedades que el kriging simple, ordinario (interpolación exacta, suavizamiento). La diferencia radica en que esta técnica es multivariable, es decir, estima más de una variable al mismo tiempo.

2.5.3. *Vecindad de búsqueda*

Para utilizar estos métodos de estimación se debe elegir la vecindad de búsqueda que puede ser única, es decir, se utilizan todos los datos disponibles o una vecindad móvil donde solo se toma una parte de ellos. En general, se suele tomar una vecindad móvil en forma de elipse (2D) o elipsoide (3D), eventualmente dividida en sectores angulares.

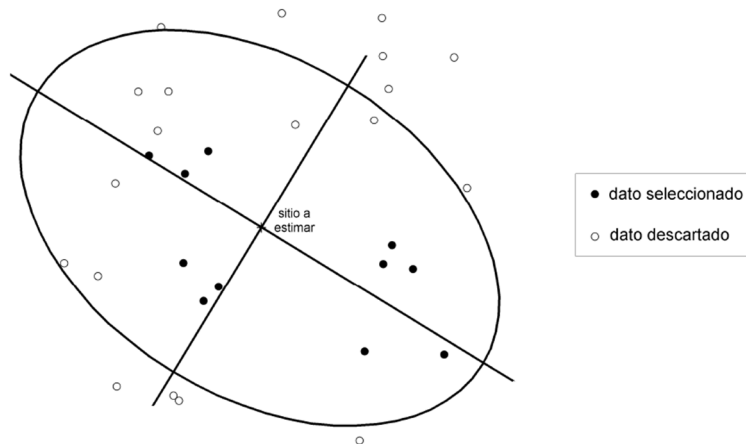


Figura 5: Vecindad de búsqueda (2D) para tres datos por cuadrante.

2.5.4. Validación cruzada

Esta técnica permite poner a prueba los parámetros (variograma, vecindad) utilizados en el kriging o co-kriging. Consiste en estimar sucesivamente cada dato, considerando solamente los datos restantes, luego se estudian la calidad de los errores de estimación:

- Medias de errores y errores estandarizados debe ser cercana a 0.
- Varianza de errores deber ser la más baja posible.
- Varianza de errores estandarizados debe ser cercana a 1.
- Nube de dispersión entre valores reales y estimados debe tener una regresión cercana a la diagonal.

2.6. Simulaciones

Esta metodología cuantifica la incertidumbre asociada a los valores desconocidos de una variable regionalizada. Busca reproducir la variabilidad real de una variable mediante la construcción de varias realizaciones que presentan escenarios posibles.

Existen los simuladores condicionales y no condicionales. La simulación no condicional busca construir realizaciones de la función aleatoria que representa la variable regionalizada, pero sin tomar en cuenta los valores de los datos. Aunque reproduce la variabilidad de la variable regionalizada, no interpola los datos.

La simulación condicional reconstruye los valores medidos en los sitios con datos. Describe la incertidumbre que se tiene localmente sobre los valores de la variable regionalizada, tomando en cuenta los valores de los datos circundantes.

2.6.1. Modelo multi-Gaussiano

Este es un modelo de simulación de variables continuas, el cual se describe a continuación.

2.6.1.1. Hipótesis

Se supone una distribución multi-Gaussiana, es decir, la densidad de probabilidad de los valores ubicados en los sitios $\{x_1, \dots, x_n\}$ es

$$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det(C)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}yC^{-1}y^t\right\}$$

Dónde:

- y es el vector (y_1, \dots, y_n)
- C es la matriz varianza-covarianza de los datos Gaussianos

2.6.1.2. Validación

Se tiene que el histograma de datos transformados es Gaussiano, por ende es consistente con el modelo. También se debe validar que la hipótesis multi-Gaussiana se cumple a nivel de las distribuciones bivariadas.

- Primer test: nubes de correlación diferida. Se consideran dos valores Gaussianos $(Y(x), Y(x + h))$ separados por un vector h . La densidad de probabilidad conjunta de estos valores $g(y_1, y_2)$ son curvas de isodensidad que forman elipses concéntricas. Por esta razón la nube de correlación diferida calculada con los datos Gaussianos para el vector h , debe ser elíptica. Además, para el módulo de h grande, la nube se vuelve circular (se pierde la correlación de los datos) y para módulo de h pequeño, la nube se restringe a la bisectriz (existe cada vez más correlación entre los datos).

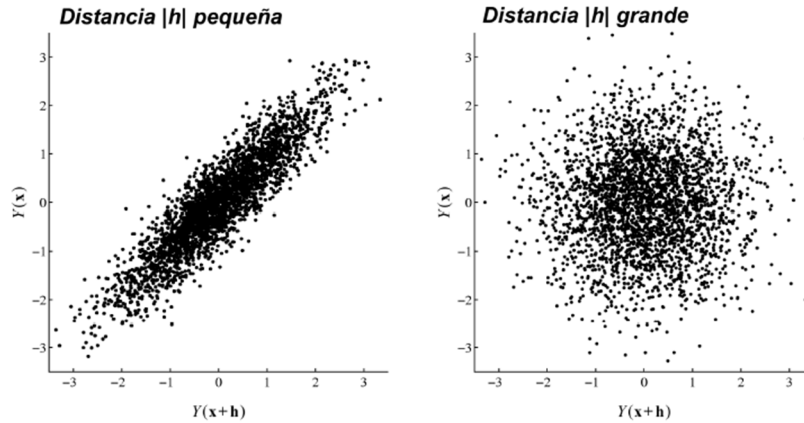


Figura 6: Nubes de correlación diferida para $|h|$ pequeño y grande

- Segundo test: comparación entre variograma y madograma. La raíz del variograma, sobre el madograma (variograma de orden 1) debe tender a $\sqrt{\pi}$, independientemente de h :

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\sqrt{\gamma_1(h)}} = \sqrt{\pi} \approx 1.77$$

- Tercer test: variogramas de indicadores. Consiste en comparar el variograma modelado de los datos Gaussianos ($\gamma(h)$) y el variograma experimental de los datos Gaussianos codificados en indicador ($\gamma_{I,y}(h)$). Posterior a la comparación se debe concluir si los variogramas teóricos de indicador se ajustan razonablemente bien a los variogramas experimentales.

Se debe considerar que un indicador es una función binaria definida por referencia a un umbral y :

$$I_y(x; y) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) < y \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2.6.1.3. Propiedades del modelo multi-Gaussiano

- Es inapropiado cuando los valores extremos están espacialmente correlacionados, en especial cuando están agrupados en ciertas zonas del campo.
- La expresión del variograma de indicador ($\gamma_{I,y}(h)$) es invariante cuando se cambia y en $-y$: la continuidad espacial de los indicadores es simétrica con respecto al umbral mediano (0).

2.6.2. Transformación Gaussiana (anamorfosis)

Por lo general la distribución de una variable es asimétrica, por lo que no es compatible con el modelo Gaussiano. Una transformación (anamorfosis) es capaz de deformar el histograma de los datos a una distribución Gaussiana, de media 0 y varianza 1 (Figura 5).

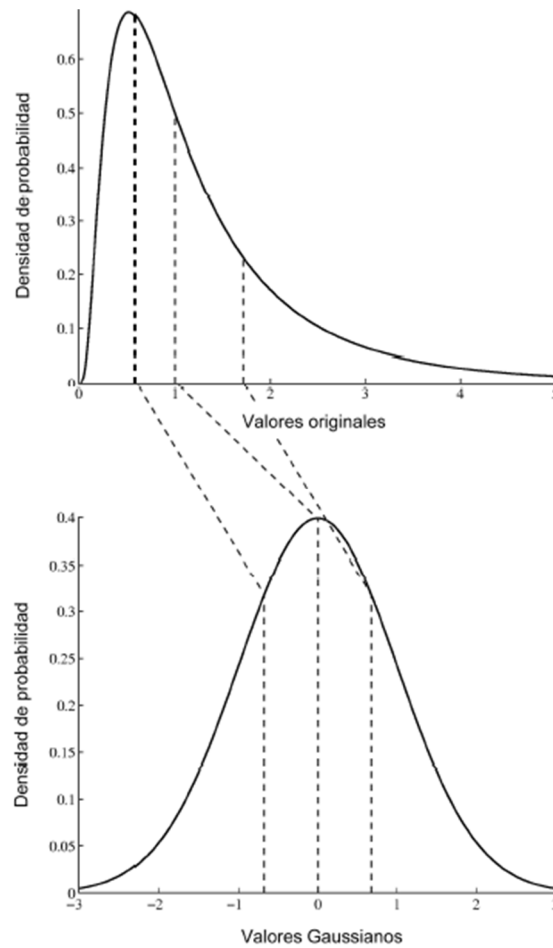


Figura 7: Construcción gráfica de anamorfosis Gaussiana

2.6.3. Simulación condicional

Una vez que se ha comprobado la hipótesis multi-Gaussiana, el modelo queda enteramente caracterizado por la función de anamorfosis y por el variograma de los datos Gaussianos. Falta ahora definir un algoritmo para poder construir realizaciones de este modelo y condicionarlas a los datos disponibles. Entre los algoritmos existentes está el llamado “método secuencial Gaussiano” (algoritmo secuencial) que es el más simple, pero también existen alternativas a este algoritmo secuencial que son los siguientes:

- Modelo de descomposición matricial
- Métodos de convolución (medias móviles, método auto-regresivo)
- Método espectral discreto
- Método espectral continuo
- Método de bandas rotantes

Los cuatro últimos algoritmos generan realizaciones no condicionales. El condicionamiento de las realizaciones requiere de una etapa adicional basada en un kriging simple. Si bien son matemáticamente más complejos, estos algoritmos son más rápidos que el algoritmo secuencial.

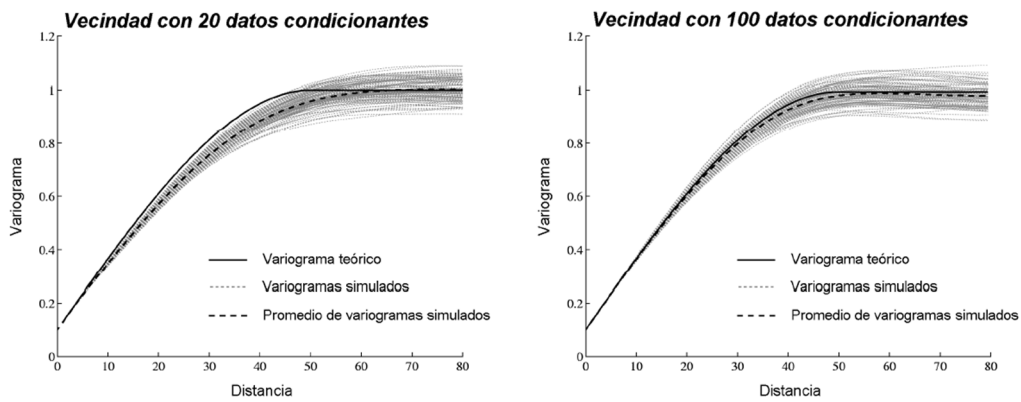


Figura 8: Sesgo en la reproducción del variograma producido por el algoritmo secuencial

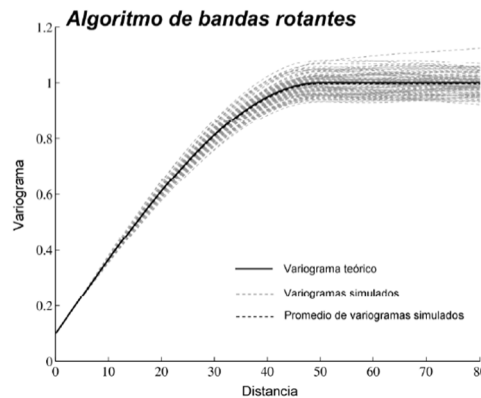


Figura 9: Reproducción del variograma con el algoritmo de bandas rotantes

Al observar las figuras anteriores se logra apreciar que el sesgo en la reproducción del variograma ha desaparecido por completo cuando usamos el algoritmo de bandas rotantes en vez del algoritmo secuencial, ya que en promedio, el variograma experimental de las realizaciones es igual al modelo teórico de variograma.

2.7. Modelos de cambio de soporte

Como se planteó en el ítem 2.2 la distribución estadísticas que siguen los valores que toma la variable regionalizada depende del volumen o soporte sobre el cual se miden. Los efectos producidos por el cambio de soporte son los siguientes:

- La media no cambia con el soporte.
- La varianza disminuye al aumentar el soporte.
- El histograma se hace más simétrico al aumentar el soporte.

Por lo tanto sabemos que la distribución cambia al pasar de puntos a bloques. Luego para determinar la distribución global o local a soporte de bloques se debe recurrir a modelos de cambio de soporte, entre los que destaca el modelo Gaussiano discreto para estimación global y local.

2.7.1. Modelo Gaussiano discreto global

Este es un modelo de cambio de cambio de soporte, para pasar de la distribución en un soporte puntual (x) a la distribución en un soporte de bloque (v).

La variable regularizada es el promedio de los valores puntuales que entran en el soporte regularizado (bloque). Matemáticamente el valor regularizado sobre el bloque v queda expresado por lo siguiente:

$$Z(v) = \frac{1}{|v|} \cdot \int_v Z(x) dx$$

Dónde:

- $Z(v)$ es el valor regularizado.
- $Z(x)$ el valor puntual.
- $|v|$ el volumen del bloque v .

Las hipótesis generales del modelo son las siguientes:

- El espacio se considera como una reunión de bloques que no traslapan y que son idénticos.

- La posición de cada dato puntual es considerada como aleatoria y uniforme dentro del bloque al cual pertenece.

Las hipótesis específicas del modelo son las siguientes:

- La variable puntual $Z(x)$ se puede transformar en una variable Gaussiana $Y(x)$:

$$Z(x) = \Phi(Y(x))$$

Donde Φ es la función de transformación (anamorfosis) puntual.

- La variable regularizada $Z(v)$ también se puede transformar en una variable Gaussiana Y_v :

$$Z(v) = \Phi_v(Y_v)$$

Donde Φ_v es una función de transformación de bloques.

- Si se considera un punto x distribuido aleatoriamente en el bloque v , el par $\{Y(x), Y_v\}$ es bi-Gaussiano, con coeficiente de correlación r . Esto implica:

$$\forall x \in v, Y(x) = r Y_v + \sqrt{1 - r^2} T$$

Donde T es una variable aleatoria Gaussiana independiente de Y_v . El coeficiente de cambio de soporte r está relacionado con la disminución de varianza al pasar del soporte puntual al soporte de bloques:

- Bloque muy pequeño: $r \approx 1$
- Bloque muy grande: $r \approx 0$

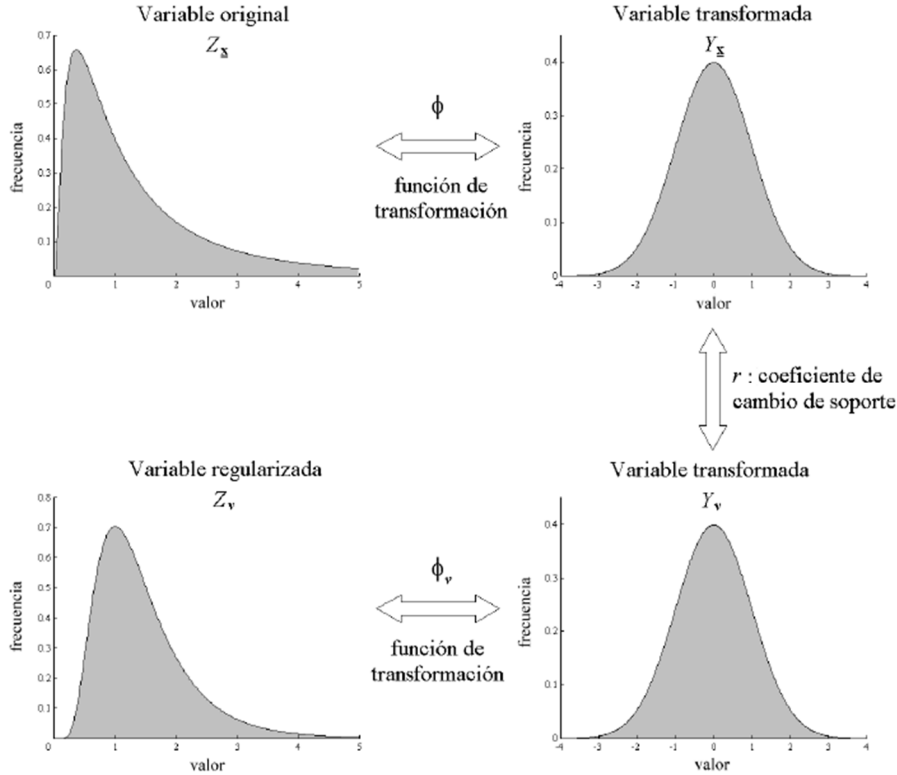


Figura 10: Esquema explicativo de hipótesis de modelo Gaussiano discreto

En el esquema anterior se muestran todas las relaciones establecidas entre los tipos de variables, donde la variable gaussiana Y_v no es la regularizada de $Y(x)$. Con la distribución de los datos puntuales podemos determinar la función de transformación puntual Φ . Finalmente para definir completamente este modelo falta determinar a función de transformación a soporte de bloques Φ_v y el coeficiente de cambio de soporte r .

Para solucionar el problema anterior se utiliza la relación de Cartier, la cual dice que el valor esperado de un dato tomado al azar dentro un bloque cuyo valor se conocido, es igual al valor del bloque. A partir de esta relación se obtiene una expresión bastante compleja para relacionar las funciones de transformación (puntual y de bloques), por lo que se recurre a la familia de polinomios de Hermite. Luego, utilizando desarrollos en polinomios de Hermite las expresiones son las siguientes:

$$Z(x) = \Phi[Y(x)] = \sum_{p=0}^{+\infty} \phi_p H_p[Y(x)]$$

$$Z(v) = \Phi_v[Y_v] = \sum_{p=0}^{+\infty} \Phi_p r^p H_p[Y_v]$$

Dónde:

- $H_p(Y)$ corresponde al polinomio de Hermite de grado p .
- $Z(x)$ y $Z(v)$ representan los valores de puntos y bloques respectivamente.
- $Y(x)$ e $Y(v)$ representan a las transformadas Gaussianas de los valores anteriores.
- $\{\Phi_p, p \in \mathbb{N}\}$ son los coeficientes de la anamorfosis puntual.
- $\{\Phi_p r^p, p \in \mathbb{N}\}$ son los coeficientes de la anamorfosis de bloque.
- r es el coeficiente de correlación entre Y_v e $Y(x)$ con x aleatorio en v .

Para determinar el coeficiente r se aprovecha la posibilidad de expresar la varianza del soporte de bloque, mediante dos expresiones una de las cuales usa el coeficiente de cambio de soporte.

- Varianza de $Z(v)$ en función del coeficiente de cambio de soporte.

$$Var[Z(v)] = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p^2 r^{2p}$$

- Varianza de $Z(v)$ en función del variograma de la variable original.

$$Var[Z(v)] = \gamma(\infty) - \bar{\gamma}(v, v)$$

Dónde el variograma en el soporte de bloques está dado por:

$$\bar{\gamma}(v, v) = \frac{1}{|V|^2} \int_v \int_v \gamma(x - y) dx dy$$

Luego, ocupando el siguiente grafico que relaciona la varianza a soporte de bloques con el coeficiente de cambio de soporte r , se puede despejar el valor de r :

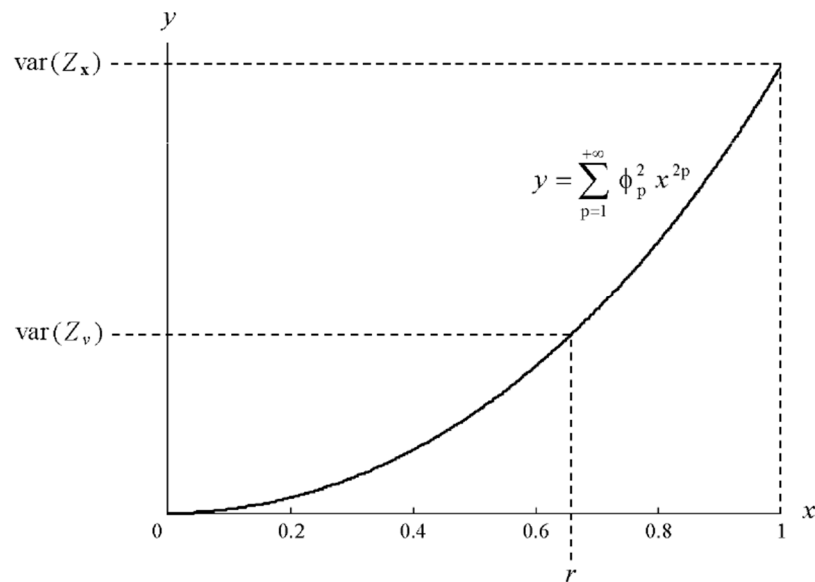


Figura 11: Determinación de coeficiente de cambio de soporte

Del grafico se logra apreciar que para r igual a uno se obtiene la varianza de los datos puntuales, es decir, a menor r se tiene bloques más grandes y por lo tanto menor varianza de las leyes.

Algunas características del modelo Gaussiano discreto son:

- Distribución se simetriza al aumentar el soporte.
- Selectividad disminuye al aumentar el soporte.
- Coherente con el teorema del límite central.
- Adecuado para numerosos tipos de distribución puntual: las hipótesis en las cuales se basa son poco restrictivas.

2.8. Condicionamiento uniforme

La técnica del condicionamiento uniforme es capaz de entregar la distribución de probabilidad de las leyes de los bloques en un panel sin el detalle de bloque a bloque, lo que la hace una técnica bastante rápida en tiempos de cálculo. Este método se basa en el uso del modelo Gaussiano discreto para el cambio de soporte. Los inputs necesarios para este método son:

- La ley del panel.
- La varianza-covarianza de los datos Gaussianos.
- Los coeficientes de cambio de soporte.
- Los coeficientes de Hermite de las transformaciones Gaussianas de los datos.

El modelo Gaussiano discreto trabaja con variables Gaussianas estacionarias, de media cero constante en el espacio. Sin embargo se puede aliviar esta hipótesis de estacionaridad si se renuncia a distinguir las estimaciones locales de los bloques (soporte v) de un mismo panel (soporte V).

La idea del condicionamiento uniforme es introducir el kriging ordinario de $Z(V)$ como valor conocido del panel, es decir, buscar un estimador tal que la estimación de $Z(V)$ coincide con su kriging ordinario. La motivación es que se prefiere para estimar $Z(V)$ realizar un kriging ordinario en lugar de un kriging simple, debido a que el kriging ordinario supone que la media es desconocida, permitiendo que varíe en el espacio, siempre que quede aproximadamente constante a la escala de la vecindad de kriging. Con esto se evita que la media influya en la estimación local y se puede calcular los tonelajes, leyes y finos que están por sobre una determina ley de corte.

Se considera tres soportes anidados:

- Punto x , aleatorio en el bloque.
- Bloque v , aleatorio en el panel
- Panel V

Para la función aleatoria Z y sus respectivas transformadas Gaussianas, se tiene soporte puntual:

$$Z(x) = \Phi[Y(x)] = \sum_{p=0}^{+\infty} \Phi_p H_p[Y(x)]$$

Soporte del bloque:

$$Z(v) = \Phi_v[Y_v] = \sum_{p=0}^{+\infty} \Phi_p r^p H_p[Y_v]$$

Donde el coeficiente r no es otra cosa que el coeficiente de correlación entre Y_v e $Y(x)$, con x aleatorio en v .

Se puede extender el modelo a nivel de un soporte de panel:

$$Z(V) = \Phi_v[Y_V] = \sum_{p=0}^{+\infty} \Phi_p r'^p H_p[Y_V]$$

Donde el coeficiente de cambio de soporte punto-panel, r' , que representa e coeficiente de correlación entre Y_V e $Y(x)$, con x aleatorio en V , esta dado por:

$$Var[Z(V)] = \sum_{p=1}^{+\infty} \Phi_p^2 r'^{2p}$$

Se obtienen los coeficientes de la anamorfosis de panel al multiplicar aquellos de la anamorfosis puntual por r'^p o, lo que es lo mismo, aquellos de la anamorfosis de bloque por R^p , donde $R = \frac{r'}{r}$ es el coeficiente de correlación entre Y_V e Y_v (con v aleatorio en V). Al fin y al cabo, el modelo de cambio de soporte entre bloques y paneles es idéntico al modelo entre puntos y bloques. Para esto se recurre a hipótesis relativamente exigentes, pues se admite que la fórmula de cambio de soporte punto-bloque permanece valida a nivel de paneles.

2.8.1. Caso hipotético donde se conoce el valor del panel

Si se conociera el valor de $Z(V)$ del panel, o el de su transformada Gaussiana Y_V se podría estimar toda función φ de la Gaussiana de bloque Y_v . En efecto, suponiendo que el par (Y_V, Y_v) es bigaussiano, se sabe que, condicionalmente a $Y_V = y_V$, Y_v es una variable Gaussiana de media Ry_V , y de varianza $1 - R^2$.

Se tiene entonces:

$$E[\varphi(Y_v) | Z(V) = z(V)] = E[\varphi(Y_v) | Y_v = y_v] = \int \varphi(R y_v + \sqrt{1 - R^2} u) g(u) du$$

A modo de ejemplo, consideremos la estimación local de las “funciones de recuperación”, que intervienen en la evaluación de las reservas mineras:

➤ El tonelaje asociado a la ley de corte $z = \phi_V(y)$:

$$[T_v(z)]^{CU} = E[1_{Z(v) \geq z} | Z(V)] = E[1_{Y_v \geq y} | Y_v] = 1 - G\left(\frac{y - R Y_v}{\sqrt{1 - R^2}}\right)$$

➤ La cantidad de metal correspondiente

$$\begin{aligned} [Q_v(z)]^{CU} &= E[Z(v) 1_{Z(v) \geq z} | Z(V)] = E[\phi_V(Y_v) 1_{Y_v \geq y} | Y_v] \\ &= E\left[\sum_{p=0}^{\infty} q_p(z) H_p(Y_v) | Y_v\right] = \sum_{p=0}^{\infty} q_p(z) R^p H_p(Y_v) \end{aligned}$$

Donde $\{q_p(z), p \in \mathbb{N}\}$ son los coeficientes del desarrollo en polinomios de Hermite de $Z(V) 1_{Z(V) \geq z}$ (estos coeficientes se pueden calcular con ayuda de relaciones de recurrencia):

$$Z(v) 1_{Z(v) \geq z} = \phi_V(Y_v) 1_{Y_v \geq y} = \sum_{p=0}^{\infty} q_p(z) H_p(Y_v)$$

Si se considera una ley de corte igual al valor mínimo de $Z(v)$ (por ejemplo, 0), la cantidad de metal coincide con el valor de un bloque aleatorio en V :

$$Z(v) 1_{Z(v) \geq 0} = Z(v) \quad (\text{El indicador de la ley de corte 0 siempre vale 1})$$

Esta cantidad se desarrolla de la siguiente manera:

$$Z(v) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p r^p H_p(Y_v)$$

De modo que su estimación se escribe:

$$E(Z(v)|Z(V)) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p r^p E[H_p(Y_v)|Y_V] = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p r^p (r'/r)^p H_p(Y_V) = Z(V)$$

La estimación respeta así la relación de Cartier entre bloques y panel: conociendo el valor del panel, el valor promedio de un bloque aleatorio en este panel es igual al valor del panel:

$$E[Z(v)|Z(V)] = Z(V)$$

2.8.2. Caso efectivo donde el valor del panel es desconocido

En la práctica no se conoce $Z(V)$ y la idea es remplazarlo por su kriging ordinario $Z(V)^{KO}$. En la expresión de los estimadores anteriores, se utiliza como valor de Y_V aquel asociado a $Z(V)^{KO}$: dicho de otra forma, se toma Y_V tal que:

$$Z(V)^{KO} = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_p (r')^p H_p(Y_V)$$

Esta relación garantiza que la estimación de $Z(v)$ está “condicionada” por el valor deseado para el panel V (de donde viene el nombre de *condicionamiento uniforme*). Este método, aunque no es perfectamente riguroso, puede resultar muy ventajoso cuando se presentan problemas de estacionaridad.

Luego, para un valor de panel dado Y_V , Y_v es una variable Gaussiana, cuya media está dada por su kriging simple y cuya varianza está dada por la varianza del kriging simple. Esto queda expresado así:

$$Y_v = R \cdot Y_V + \sqrt{1 - R^2} \cdot U$$

Donde,

- R es el coeficiente de cambio de soporte de bloque a panel dado por la siguiente ecuación:

$$R = \frac{r'}{r}$$

- U es una variable Gaussiana estándar independiente de Y_V .

3. METODOLOGÍA

A continuación se presenta la metodología que se utiliza para desarrollar este trabajo. Con la aplicación secuencial de los pasos descritos se pretende lograr el objetivo principal que es la extensión y validación de la técnica del condicionamiento uniforme multivariable.

Para ello se usa el modelo Gaussiano discreto, kriging, co-kriging, simulación y condicionamiento uniforme, dando paso a cuatro casos. Las pruebas anteriores se describen a continuación:

- Caso 1: Aplicación del condicionamiento uniforme univariable, usando como ley de panel el valor entregado por el kriging ordinario.
- Caso 2: Aplicación del condicionamiento uniforme bivariable, usando como leyes de paneles los valores entregados por el co-kriging ordinario.
- Caso 3: Aplicación del condicionamiento uniforme univariable, usando como ley del panel los valores promedios entregados por la simulación condicional por bandas rotantes.
- Caso 4: Aplicación del condicionamiento uniforme bivariable, usando como leyes de paneles los valores promedios entregados por la co-simulación condicional por bandas rotantes.

Finalmente para poder hacer una comparación más robusta entre el condicionamiento uniforme y la simulación, en la cual ambas técnicas tengan las mismas leyes de paneles de entrada, se hacen los casos tres y cuatro.

En el siguiente punto se describe y esquematiza detalladamente la metodología aplicada en cada prueba.

3.1. Selección de soportes

Previo a la presentación de la metodología desarrollada, se definirá los soportes usados en el presente trabajo:

- Soporte puntual: corresponde a los datos de la base de datos entregada, que son compósitos de 12 m de largo.
- Soporte bloque: corresponde a un soporte de dimensiones $10\text{ m} \times 10\text{ m} \times 10\text{ m}$, el cual posee un volumen de 1.000 m^3 . Si tomamos densidad de roca promedio de 2.7 t/m^3 , se tiene un tonelaje de 27.000 toneladas.

- Soporte panel: corresponde a un soporte de dimensiones $100\text{ m} \times 100\text{ m} \times 100\text{ m}$. El cual posee un volumen de 100.000 m^3 y un tonelaje de 2.700.000 toneladas.

Luego, cada panel consta de 100 bloques. En la siguiente figura se muestra un esquema de lo descrito anteriormente:

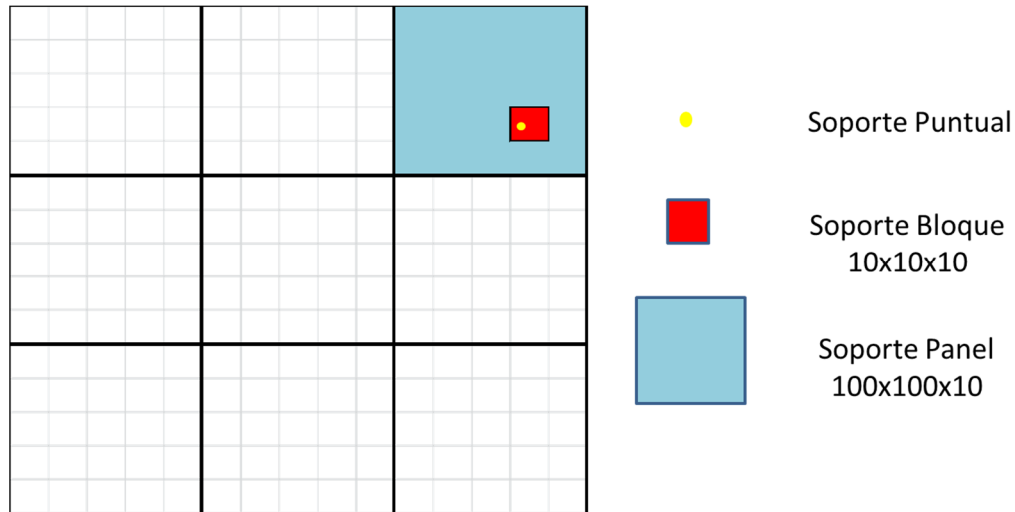


Figura 12: Esquema de soportes utilizados

3.2. Condicionamiento uniforme en base a kriging y co-kriging

Las dos primeras pruebas presentan variadas etapas en común, siendo la principal diferencia que una es univariable y la otra bivariable. Se puede dividir la metodología en cinco secciones principales para lograr la aplicación y validación del condicionamiento uniforme. Las secciones son: el cálculo de las leyes de los paneles, transformación de datos a valores Gaussianos, obtención de coeficientes de cambio de soporte, aplicación del condicionamiento uniforme usando parámetros calculados anteriormente y finalmente, simulación de leyes de bloques en cada panel. Las secciones a desarrollar se presentan a continuación.

3.2.1. Cálculo de leyes de paneles

En esta sección se describen las etapas necesarias para la obtención de las leyes de los paneles, los cuales se articulan conforme a los esquemas siguientes para los casos univariable y bivariable.

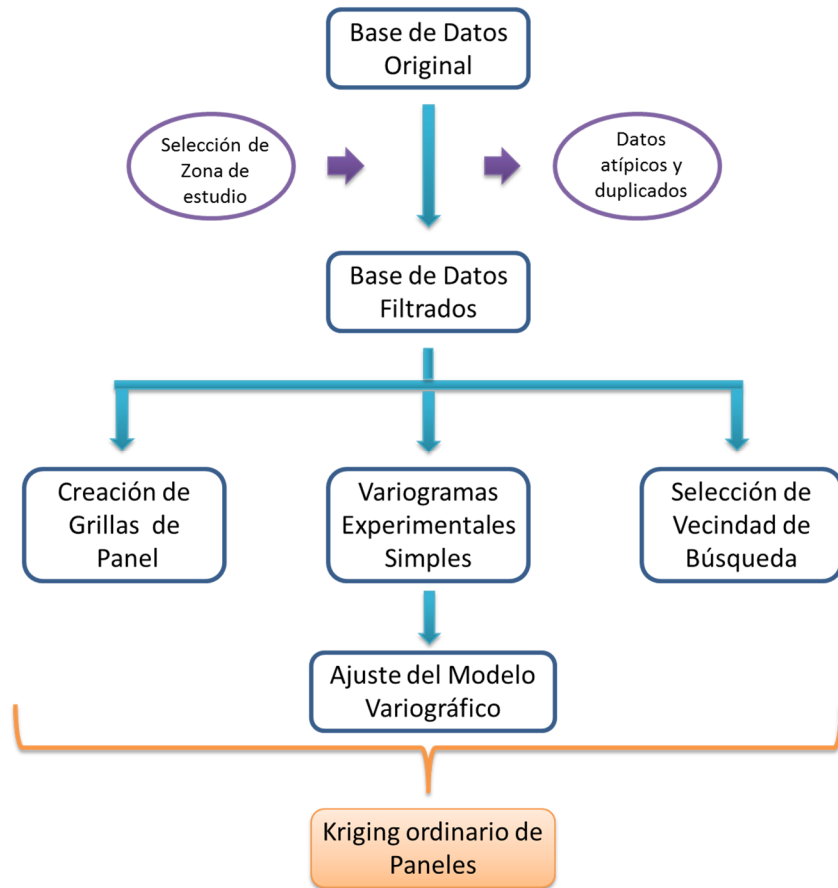


Figura 13: Esquema de etapas para leyes de paneles caso univariable

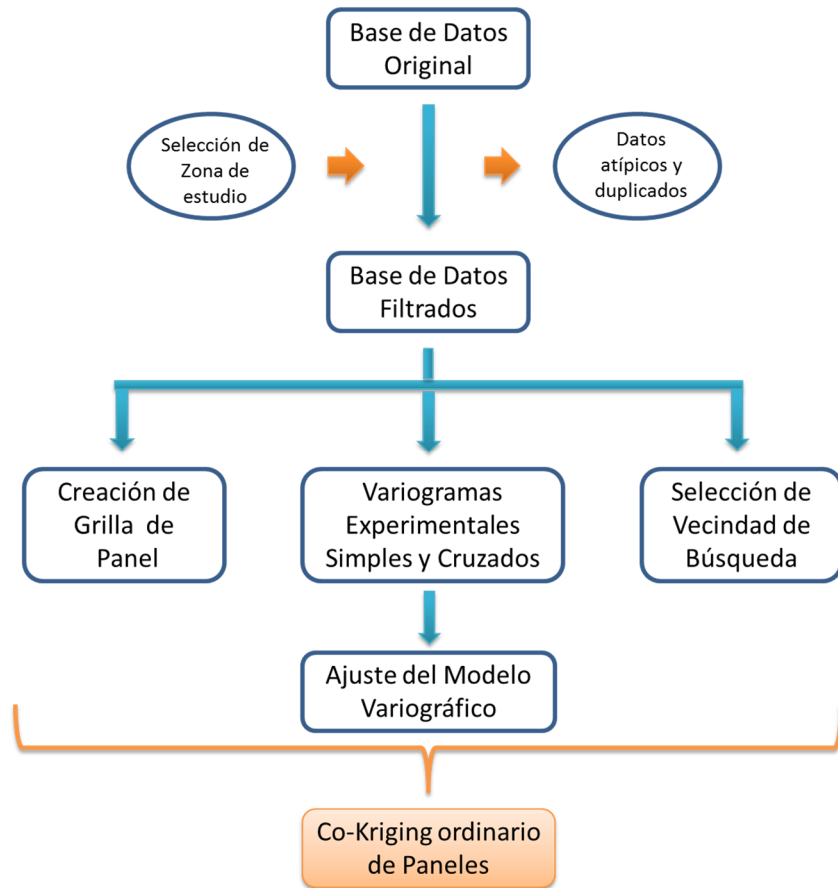


Figura 14: Esquema de etapas para leyes de paneles caso bivariable

Ahora se da una descripción de las etapas de los esquemas anteriores (Figura 13 y Figura 14).

- Estudio exploratorio de datos: a partir de los datos originales, se procede a estudiar la presencia de datos atípicos (muy altos) y duplicados, con el fin de poder trabajar en una base de datos filtrada lo más fidedigna posible. Luego, se selecciona la zona con mayor densidad de datos para ser estudiada. Finalmente se trabaja con dos variables, leyes de cobre y arsénico.
- Creación de grilla de panel: se crea la grilla del soporte panel en la zona de estudio seleccionada. El total de paneles presentes en la grilla es de 390.
- Variogramas experimentales: se eligen las direcciones de anisotropía y se crean los respectivos variogramas en dichas direcciones. Para el caso univariable se hacen variogramas simples solamente, mientras que para el caso bivariable se hacen variogramas simples y cruzados.
- Ajuste de modelo variográfico: se ajusta un modelo variográfico a los variogramas experimentales simples y cruzados, usando modelos básicos anidados.

- Selección de vecindad de búsqueda: en base a la extensión de la zona estudiada y las direcciones de anisotropía, se define la vecindad móvil de estimación. La vecindad queda definida por los radios de la esfera de búsqueda, número de octantes en la esfera y número de datos por octante.
- Estimación de leyes de paneles: se hace el kriging o co-kriging ordinario en base a los inputs mostrados en el esquema como la grilla, modelo variográfico y vecindad de búsqueda.

3.2.2. Transformación de datos a valores Gaussianos

En esta sección se describen las etapas y parámetros necesarios para poder hacer la transformación de los datos a valores Gaussianos. A continuación se muestra el esquema común para el caso univariable y bivariable, para posteriormente dar una descripción de cada sub etapa.

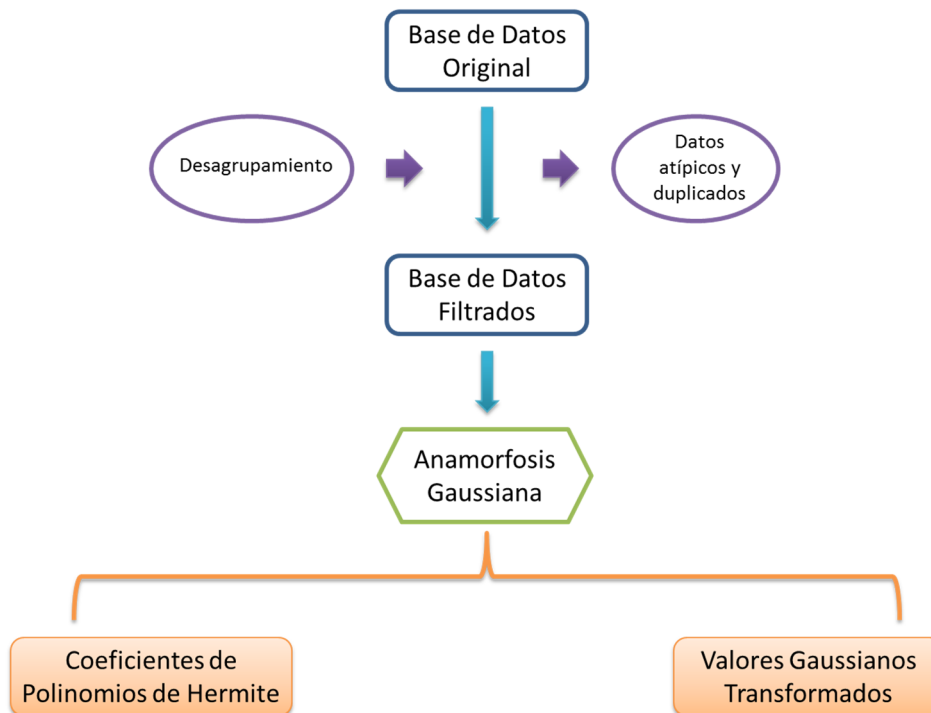


Figura 15: Transformación de datos a valores Gaussianos

Ahora se da una descripción de las etapas del esquema anterior:

- Desagrupamiento: usando el software ISATIS se obtienen los ponderadores de desagrupamiento.
- Anamorfosis Gaussiana: se aplica la función de anamorfosis a los datos ya filtrados de cada variable por separado, con el fin de obtener los outputs que son necesarios para las secciones posteriores.
- Coeficientes de polinomios de Hermite: son los coeficientes correspondientes a la anamorfosis Gaussiana.
- Valores Gaussianos: corresponden a los valores transformados, después de hacer la anamorfosis respectiva.

3.2.3. Obtención de coeficiente de cambio de soporte

A continuación se presenta el esquema en conjunto para el caso univariable y bivariable:

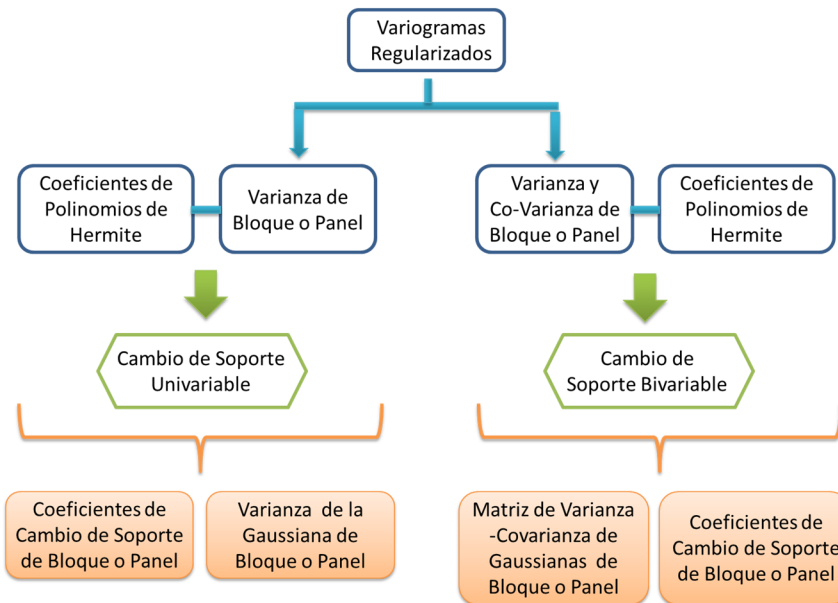


Figura 16: Obtención de coeficiente de cambio de soporte

Ahora se da una descripción de las etapas del esquema anterior:

- Variogramas regularizados: se hacen para obtener los valores de varianza y covarianza de los soportes bloque y panel, respectivamente.
- Coeficientes de polinomios de Hermite: corresponden a los coeficientes obtenidos de la transformación de datos a valores Gaussianos.

- Coeficientes de cambio de soporte de bloque o panel: son los valores de cambio de soporte que se obtienen para cada variable y soporte respectivo.
- Varianza-covarianza de las Gaussianas de bloque o panel: son las varianzas de las variables transformadas, que para el caso univariable (Cu o As) es uno para bloque y panel.
- Matriz de varianza-covarianza de las Gaussianas de bloque y panel: corresponden a las varianzas y covarianzas de las variables Gaussianas (Cu, As) para cada soporte (bloque y panel). Las varianzas son igual a uno y las covarianzas menores a uno.

Los coeficientes de cambio de soporte se determinan de manera de reproducir las varianzas de cada variable (Cu, As) en cada soporte (bloque, panel), dando en total cuatro coeficientes

Las covarianzas entre variables Gaussianas (Cu, As) para un soporte dado (bloque o panel) se calculan de manera de reproducir las covarianzas de las variables originales (leyes) en dicho soporte.

3.2.4. Aplicación del condicionamiento uniforme

En esta sección se procede a usar todos los inputs generados en las secciones anteriores, a fin de obtener los resultados del condicionamiento uniforme para los casos univariable y bivariable. A continuación se presentan dos esquemas correspondientes a ambos casos.

3.2.4.1. Condicionamiento uniforme univariable

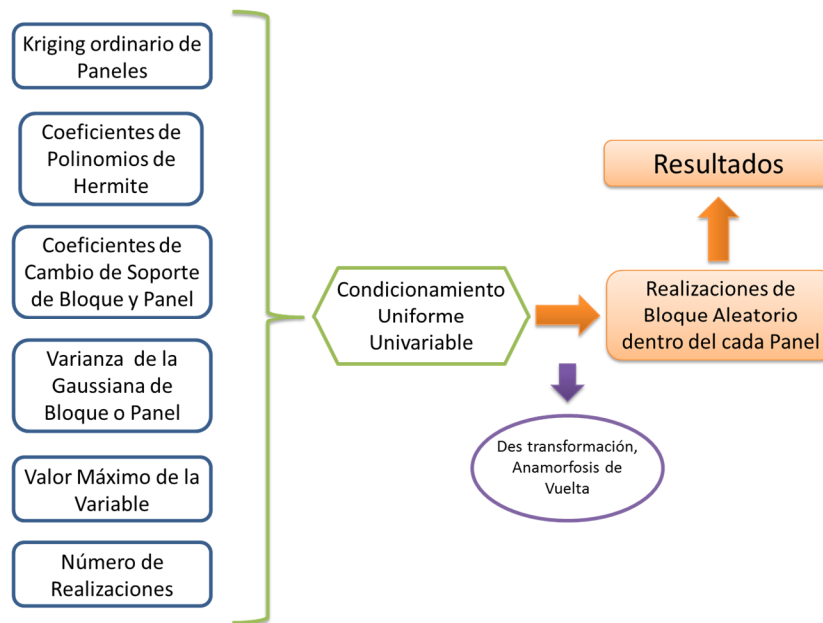


Figura 17: Condicionamiento uniforme univariable

Ahora se da una descripción de las etapas del esquema anterior, donde se especifican los parámetros no descritos en secciones anteriores:

- Inputs del condicionamiento uniforme: corresponden a los recuadros en azul en el esquema, parámetros que provienen de las secciones anteriores y que, por ende, ya están descritos.
- Valor máximo de la variable: necesario para modelar la cola de la distribución de la variable en estudio. Para el caso univariable solo se necesita uno (valor máximo ley de Cu o valor máximo ley de As), mientras que para el bivariado se necesita un par de datos (valor máximo ley de Cu, valor máximo ley de As).
- Número de realizaciones: corresponde al número de simuladas de bloque que se desea hacer por panel. El total de realizaciones hechas por panel es de 1.000.
- Condicionamiento uniforme univariable: corresponde a la aplicación de la técnica del condicionamiento uniforme, utilizando los inputs mostrados en el esquema. Donde el resultado corresponde a una distribución de la variable al soporte de bloques dentro de cada panel.
- Realizaciones de bloque aleatorio: corresponden a realizaciones independientes de la distribución definida por el condicionamiento uniforme, asociada a bloques de posición aleatoria en el panel.
- Resultados: curvas tonelaje-ley para cada variable por separado calculadas a partir de las realizaciones de ley construidas.

3.2.4.2. Condicionamiento uniforme bivariable

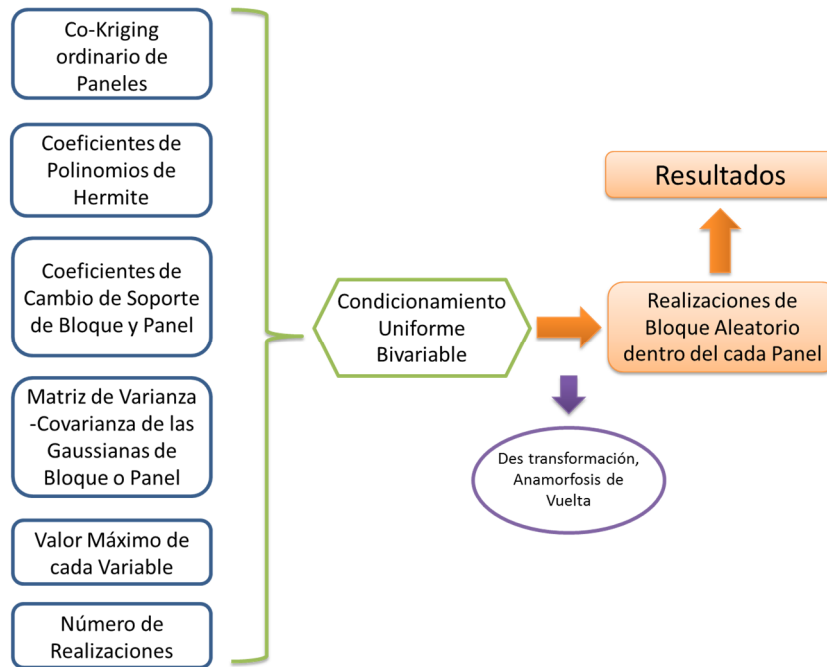


Figura 18: Condicionamiento uniforme bivariable

A diferencia del caso univariable, el condicionamiento uniforme bivariable produce una distribución conjunta para las leyes de cobre y arsénico al soporte de bloque, para cada panel. A partir de estas distribuciones conjuntas, se puede calcular curvas tonelaje-ley para cada variable, así como también curvas de una variable condicionada por otra.

3.2.5. Simulación condicional por bandas rotantes

En esta sección final se procede a hacer la comparación y validación del condicionamiento uniforme univariable y bivariable. Las etapas de estudio exploratorio y vecindad de búsqueda corresponden a los mismos hechos en las secciones anteriores, para así dar la posibilidad de comparar ambas técnicas. A continuación se presenta un esquema conjunto del caso univariable y bivariable.

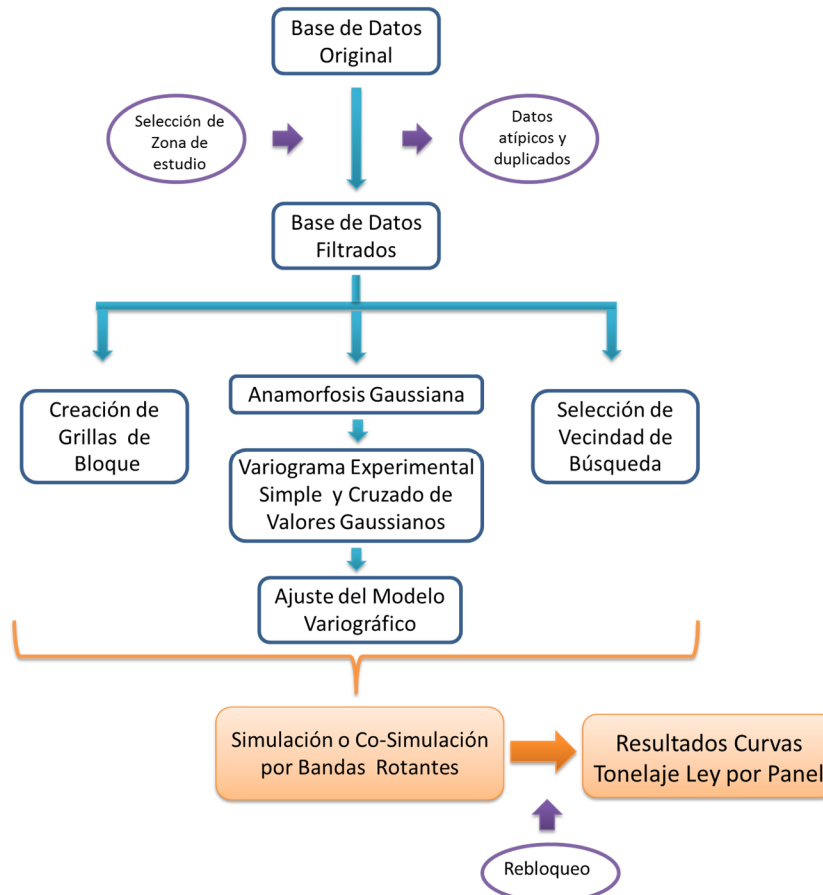


Figura 19: Simulación condicional por bandas rotantes

Ahora se da una descripción de las etapas del esquema anterior:

- Creación de grilla de bloques: se crea la grilla de bloques en la misma zona donde está la grilla de paneles, para así poder hacer la comparación de las dos técnicas usadas. El total de bloques creados en la grilla es de 39.000.
- Variograma experimental: se hacen los variogramas simples y cruzados de los valores Gaussianos en las mismas direcciones de anisotropía usadas para los datos sin transformar. Los variogramas simples y cruzados se usan en el caso bivariable, y sólo los variogramas simples en el caso univariable.
- Modelo variográfico: se ajusta un modelo a los variogramas experimentales calculados, que consiste en estructuras básicas anidadas.
- Simulación o co-simulación condicional por bandas rotantes: se simula o co-simula, según sea el caso (univariable o bivariable, respectivamente). Se hacen 100 simulaciones o co-simulaciones por cada bloque de la grilla.
- Resultados: curvas tonelaje-ley para cada variable por separado en el caso univariable y curvas tonelaje-ley condicionando una variable con respecto a otra en el caso bivariable.

Finalmente se procede a comparar las curvas obtenidas del condicionamiento uniforme univariable y bivariable, donde la ley del panel es dada por el kriging o co-kriging ordinario, con las curvas obtenidas de simulaciones o co-simulaciones respectivamente.

3.3. Condicionamiento uniforme en base a simulación y co-simulación

Para esta comparación se ocupa el mismo procedimiento descrito en las etapas anteriores, con la diferencia de que en la primera etapa (cálculo de leyes de paneles) se reemplaza las leyes obtenidas por kriging o co-kriging por las leyes medias obtenidas de las simulaciones o co-simulaciones por bandas rotantes (etapa 3.2.5). De esta forma, se utilizan inputs coherentes entre una técnica y otra, permitiendo una comparación más directa entre condicionamiento uniforme y simulación.

3.4. Resultados y validación

Una vez concluidas las cuatro pruebas, se procede a validar los resultados obtenidos en cada caso contra los resultados que se obtienen de la simulación. Para ello se debe hacer la siguiente serie de pasos:

- Calcular curvas tonelaje-ley con las mil simulaciones de bloque hechas por panel (resultados de condicionamiento uniforme).
- Calcular las curvas tonelaje-ley condicionadas a la ley de arsénico con las mil simulaciones de bloque que se tiene por panel (resultados de condicionamiento uniforme).
- Calcular las curvas tonelaje-ley para ciertas leyes de corte sobre las 100 simulaciones hechas por bloque; rebloquear estas curvas por panel.
- Calcular las curvas tonelaje-ley para ciertas leyes de corte y condicionando la ley de arsénico sobre las 100 simulaciones hechas por bloque; rebloquear estas curvas por panel.
- Superponer las curvas tonelaje-ley obtenidas para cada panel con los dos métodos en cuestión (condicionamiento uniforme y simulación)

Para validar los modelos se considera que la simulación es el valor o aproximación a lograr, por ende, se evalúa la similitud de las curvas para distintos paneles.

4. CASO DE ESTUDIO

El caso de estudio es una base de datos provenientes de testigos de sondajes a distintas profundidades de una malla irregular. La información entregada de los puntos son sus coordenadas (Este, Norte y Cota) y la ley de algunos elementos de interés (arsénico, cobre, plata, antimonio, molibdeno). No se cuenta con la ley de todas las especies muestreadas para todos los puntos.

Las dimensiones de la base de datos es de aproximadamente 1.1 km EW, 2.1 km NS y 1.1 km vertical. El tamaño de compósito es de aproximadamente 12 m. No se dispone de información geológica de los datos o zona en estudio.

4.1. Estudio exploratorio

El objetivo del estudio exploratorio de datos es analizar los datos disponibles dentro de la base de datos, con el fin de determinar sus estadísticas básicas y tomar decisiones para determinar qué variables y qué datos serían los más adecuados de utilizar.

La malla de muestreo es más bien irregular y presenta sondajes de distinta profundidad, la cual abarca una extensión de 1.1 km EW, 2.1 km NS y 1.1 km Cota. En las siguientes figuras se muestra la base de datos, para leyes de arsénico y cobre respectivamente:

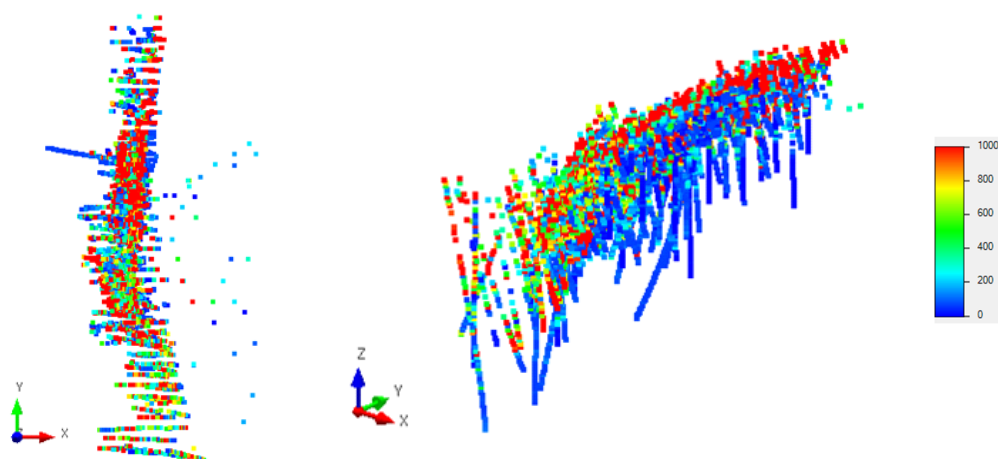


Figura 20: Sondajes de base de datos completa As

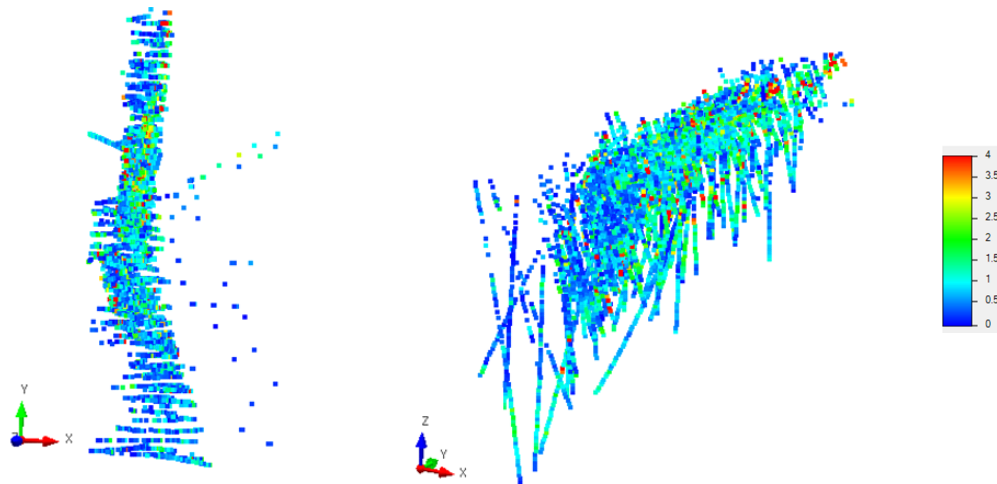


Figura 21: Sondajes de base de datos completa Cu

Para hacer el estudio exploratorio de la base de datos en el software ISATIS, se reduce el número de datos a 5999 sacando los puntos que se encuentran aislados y concentrándose en una zona con mayor densidad de datos. La extensión de la zona seleccionada es de 0.5 km EW, 1.9 km NS y 0.7 km Cota. Finalmente, los datos cargados son los que se muestran en las siguientes figuras:

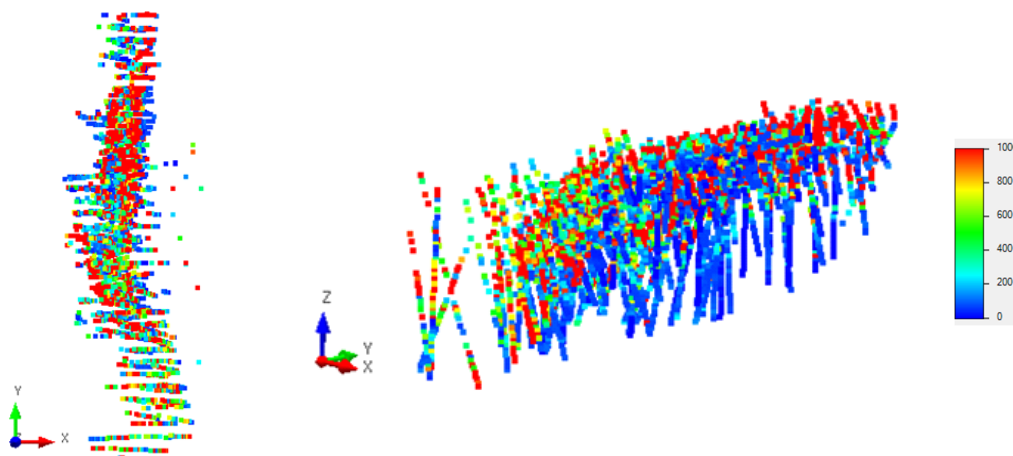


Figura 22: Sondajes de base de datos cargados a Isatis As

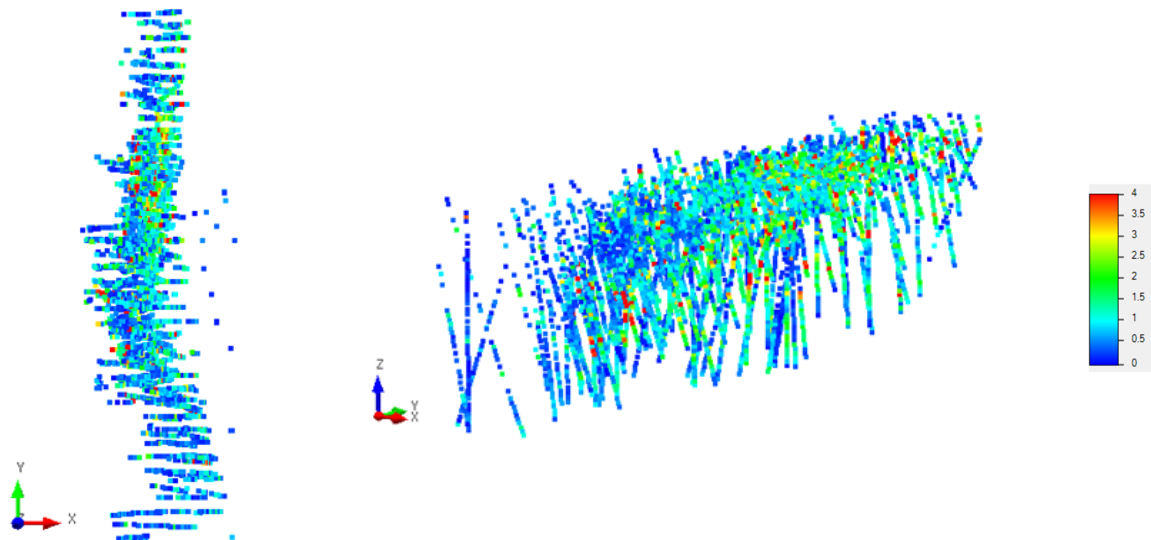


Figura 23: Sondajes de base de datos cargados a Isatis Cu

Antes de proceder con el análisis exploratorio se buscan datos duplicados para un radio de búsqueda de 0.5 metros, la cual nos da un total de 10 datos duplicados, para todos los elementos. No se encuentran valores atípicos dentro de la base de datos, ya que todas las leyes presentes son posibles.

Al analizar la media desagrupada de los datos en el software UMINÉ, se obtiene el siguiente gráfico para distintos tamaños de celda y ley media de cobre:

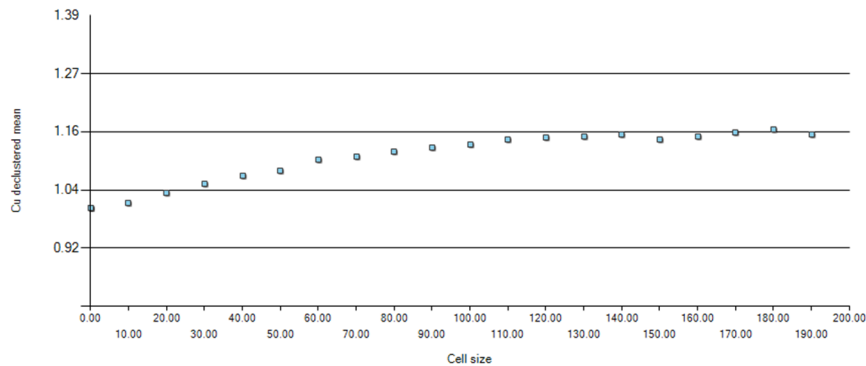


Figura 24: Grafico de desagrupamiento para distintos tamaños de celda

La ley media de cobre desagrupada para una celda de $60\text{ m} \times 60\text{ m} \times 3\text{ m}$ es de 1.08%. Se toma este tamaño de celda ya que la malla de muestreo, si bien es irregular, es cercana a los 60 metros en el plano horizontal, como se aprecia en la siguiente planta:

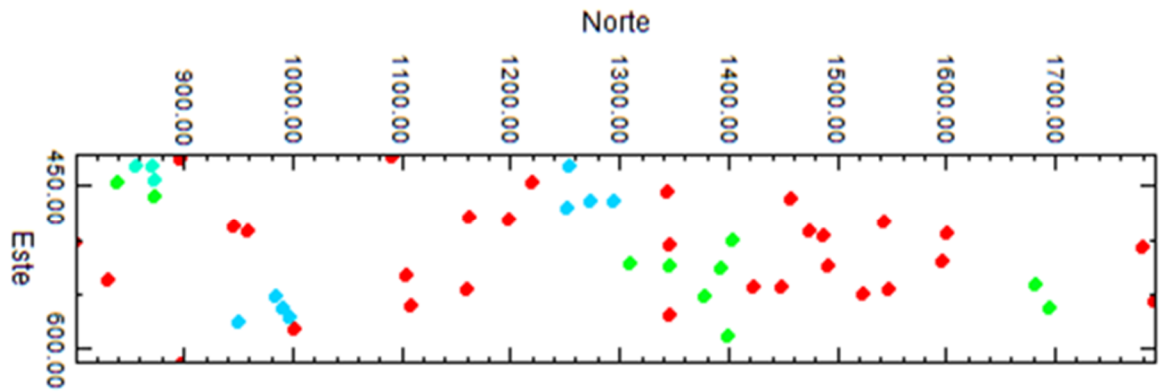
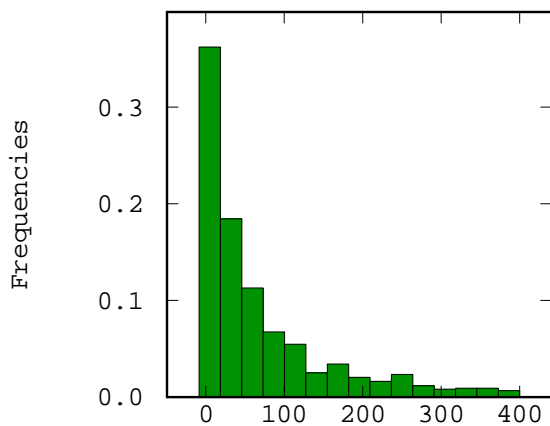


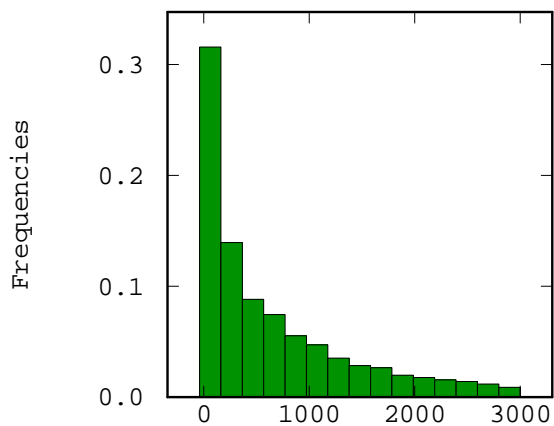
Figura 25: Sección en cota 1790 metros

Ahora con estos datos se comienza el estudio exploratorio, analizando las distribuciones, estadísticas y correlaciones entre las variables presentes en la base de datos en estudio.

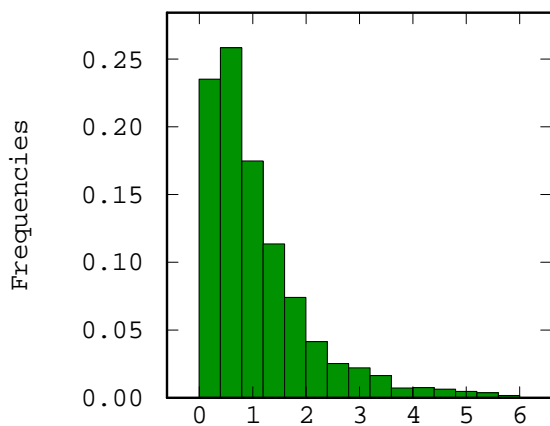
4.1.1. Histogramas



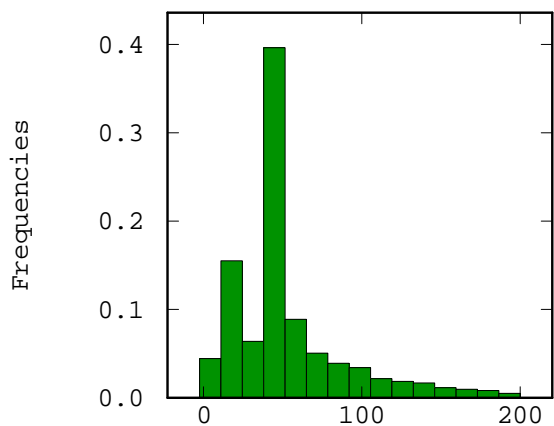
Ley de Antimonio g/t



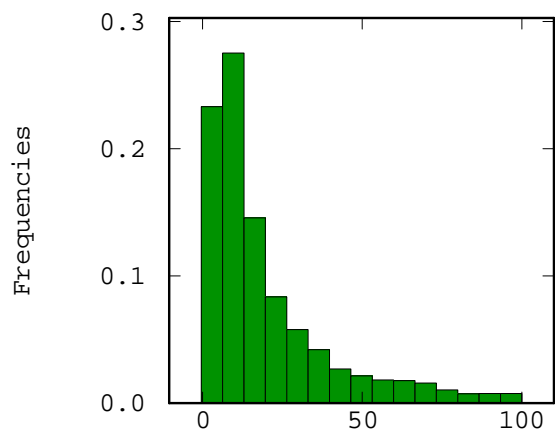
Ley de Arsenico g/t



Ley de Cobre %



Ley de Molibdeno g/t



Ley de Plata g/t

Figura 26: Histogramas para cada variable de base de datos

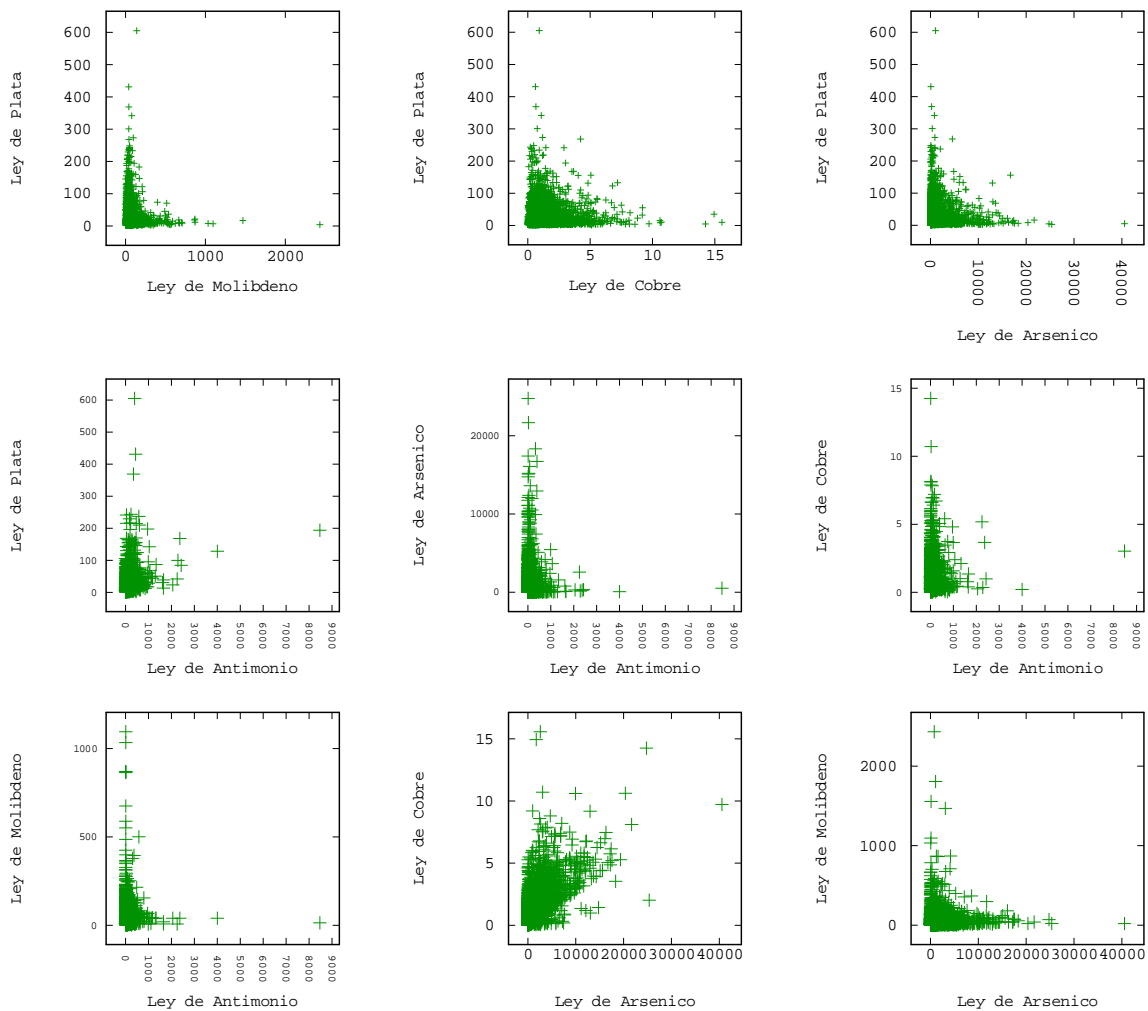
4.1.2. Estadísticas básicas

	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>
Antimonio	1908	0	8472.50	111.05	85237.30
Arsénico	5778	1.13	40557.25	1164.72	4097343.86
Cobre	5773	0.01	15.57	1.16	1.37
Molibdeno	4875	0	2432.63	63.82	7685.87
Plata	5204	0.43	605.13	23.72	1016.57

Tabla 1: Estadísticas básicas de las variables de la base de datos

La media desagrupada de cobre para los 5999 datos, según el tamaño de celda seleccionada, es de 1.08% de Cu.

4.1.3. Nubes de correlación



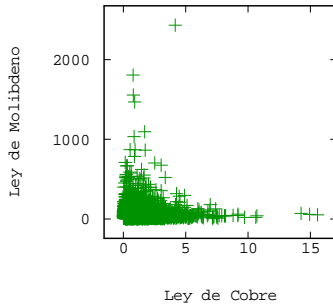


Figura 27: Nubes de correlación entre variables de base de datos

4.1.4. Matriz de correlación

VARIABLE	Ag	As	Cu	Mo	Sb
Ag	1	-0.03	0	-0.06	0.3
As	-0.03	1	0.63	0.03	-0.03
Cu	0	0.63	1	0	0.02
Mo	-0.06	0.03	0	1	-0.07
Sb	0.3	-0.03	0.02	-0.07	1

Tabla 2: Matriz de correlación entre las variables presentes en la base de datos

De los histogramas, particularmente para el caso del molibdeno, se observa una concentración preferencial de un rango de leyes, las cuales llegan a representar el 40% del total de los datos de molibdeno. Por lo anterior, se sospecha de la posibilidad de algún error en la toma o medición de estas leyes de molibdeno y descarta el molibdeno para ser una de las variables a ser estimada.

De la misma forma al analizar la tabla de estadísticas básicas, se aprecia que la cantidad de datos conocidos por cada variable es mayor a 5.000, excepto para el antimonio del cual solo se conocen cerca de 2.000 datos. Por esta razón, se descarta esta variable para ser una de las variables a ser estimada.

La variable plata es descartada también, pues al hacer el estudio variográfico se observa que no presenta una buena continuidad espacial (los variogramas experimentales de estas variables se encuentran en Anexos).

En consecuencia de lo anterior, se trabajará con las leyes de cobre (elemento de interés) y arsénico (contaminante), las cuales presentan una alta correlación (0.83). Dicha correlación se puede explicar por la presencia de minerales portadores de ambas especies, tales como enargita y tenantita.

4.1.5. Selección de zona de estudio

La zona a ser estudiada, donde se hace la estimación y prueba del condicionamiento uniforme, está restringida en parte por el software Isatis, ya que no es posible tener más de 41.000 nodos en la grilla y como este trabajo consta de dos soporte no puntuales (bloque y panel), se restringe la grilla a un máximo de 41.000 bloques y por ende a un máximo de 410 paneles, esto de acuerdo a la relación de las dimensiones entre ambos soportes.

De los mapas de distribución de los datos, que se muestran a continuación se procede a seleccionar la zona a ser estudiada. Se selecciona la zona que tenga mayor densidad de datos, a fin de poder lograr buenas estimaciones.

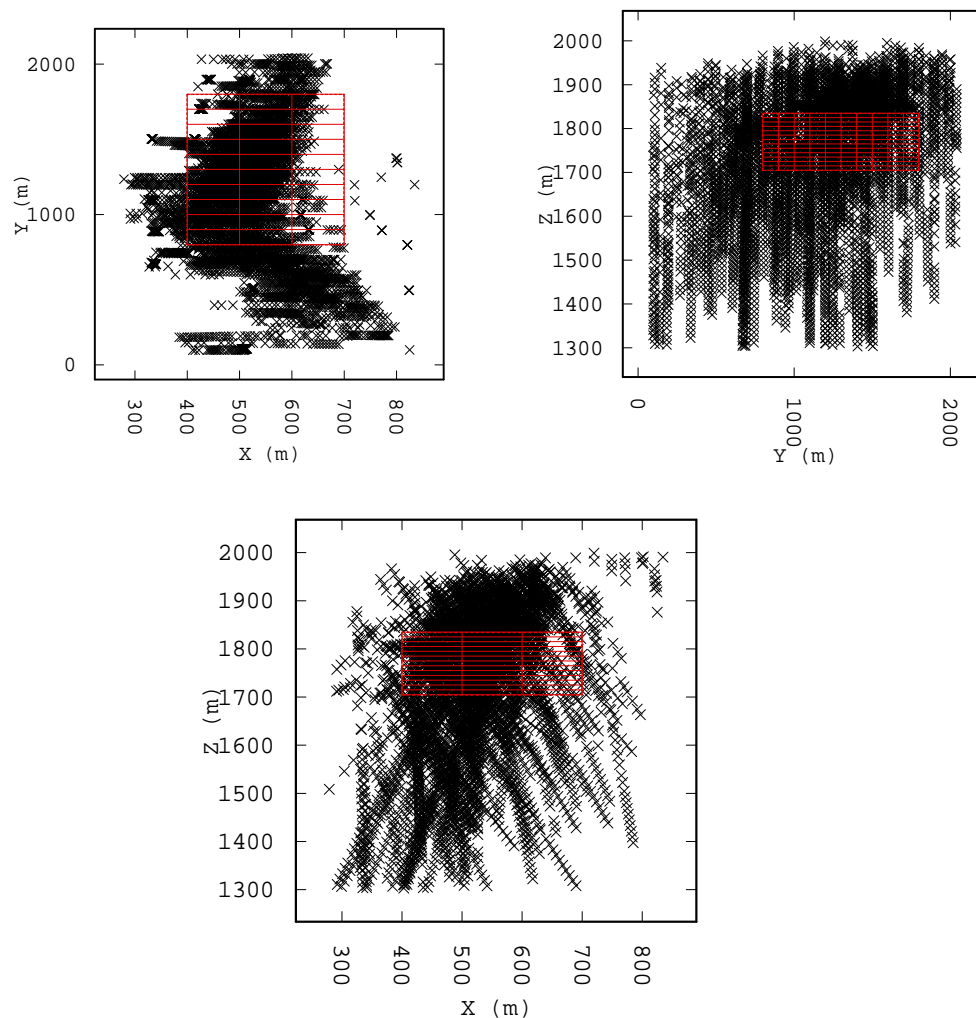


Figura 28: Grilla de paneles sobre la zona de estudio

La extensión de la zona de estudio es de 0.23 km EW, 1 km NS y 0.13 km Cota.

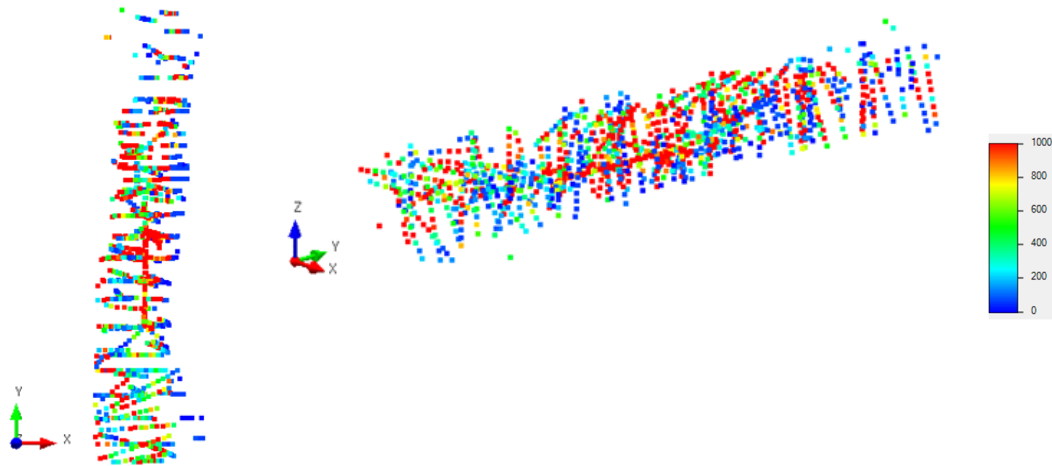


Figura 29: Datos de sondajes seleccionados As

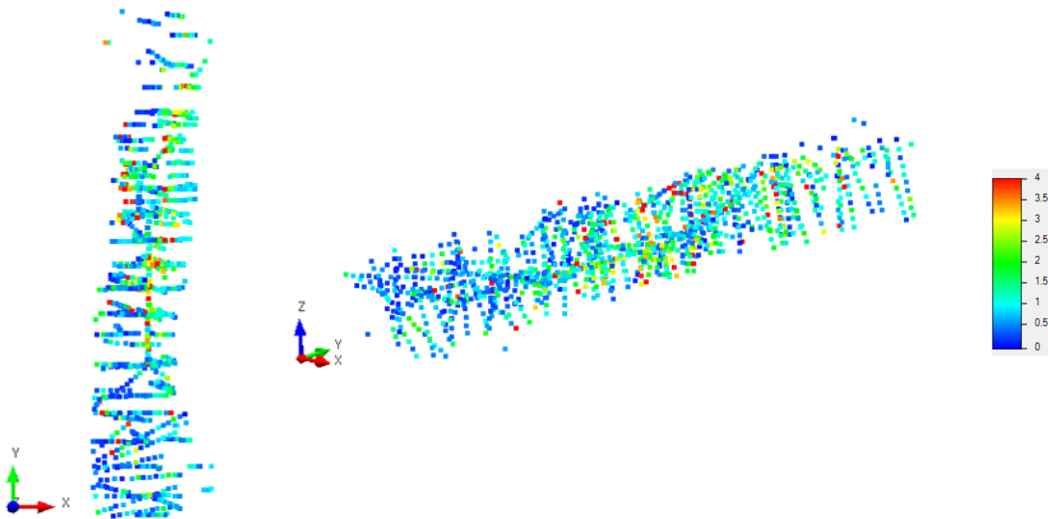


Figura 30: Datos de sondajes seleccionados Cu

Se elige finalmente una zona relativamente central de los datos, zona en la cual se crean las grillas de bloque y panel. En la siguiente tabla se muestra las dimensiones y datos principales de la grilla y zona a ser estudiada:

<i>Datos Grilla Paneles</i>			
	X	Y	Z
Origen Nodos	450	850	1710
N° de Nodos	3	10	13
Dimensiones Panel	100	100	10
N° Total de Paneles	390		

Tabla 3: Datos de grilla de paneles

<i>Datos Grilla Bloques</i>			
	X	Y	Z
Origen Nodos	405	805	1710
N° de Nodos	30	100	13
Dimensiones Panel	10	10	10
N° Total de Bloques	39000		

Tabla 4: Datos de grilla de bloques

Ahora se presentan las estadísticas básicas de las variables a ser estudiadas, en la zona de estudio:

	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>
Arsénico	1301	2.25	24774	894	3756450
Cobre	1301	0.02	14.25	1.13	1.47

Tabla 5: Tabla de estadísticas para leyes de Cobre y Arsénico

La media desagrupada para la zona de estudio seleccionada, según el tamaño de celda seleccionada anteriormente $60 \times 60 \times 3 \text{ m}$ es de 1.1% de Cu.

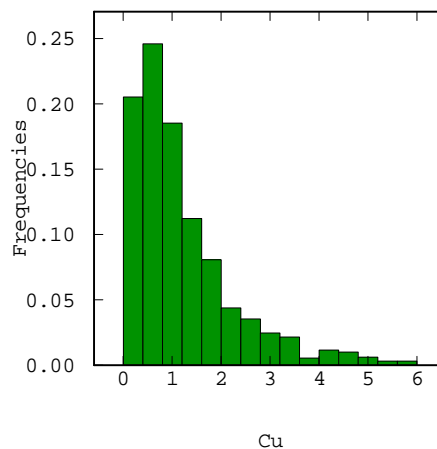


Figura 31: Histograma de ley de cobre (Cu) para zona de estudio

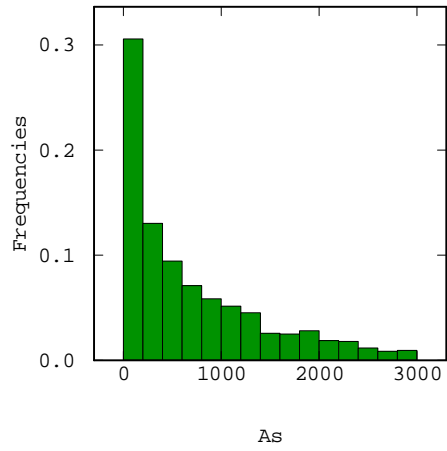


Figura 32: Histograma de ley de arsénico (As) para zona de estudio

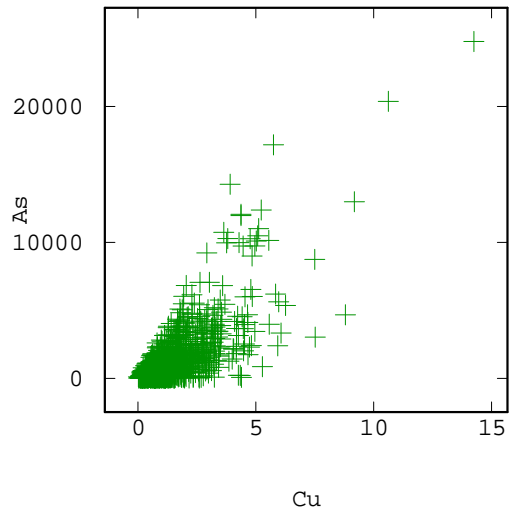


Figura 33: Nube de correlación Cu-As para zona de estudio

Donde el coeficiente de correlación para estas variables en la zona de estudio es de 0.78.

4.2. Kriging y co-kriging de paneles

A continuación se muestran los parámetros usados para el cálculo de la ley de los paneles por kriging o co-kriging. Se enumeran los pasos previos para lograr hacer la estimación de la ley de paneles.

4.2.1. Definición de soporte panel

El soporte panel definido para este trabajo es de las siguientes dimensiones:

	X	Y	Z
Dimensiones Panel [m]	100	100	10
Discretización	21	21	7

Tabla 6: Soporte de panel definido

4.2.2. Análisis variográfico de las leyes de arsénico y cobre

Una vez seleccionadas las variables a estudiar, se procede a hacer el estudio variográfico de ellas, análisis necesario para hacer el kriging y co-kriging de paneles. Primero, se identifica las direcciones de anisotropía de la zona de estudio, mediante mapas variográficos. De los mapas se determina que las direcciones principales son las mismas de los ejes coordenados sin rotar.

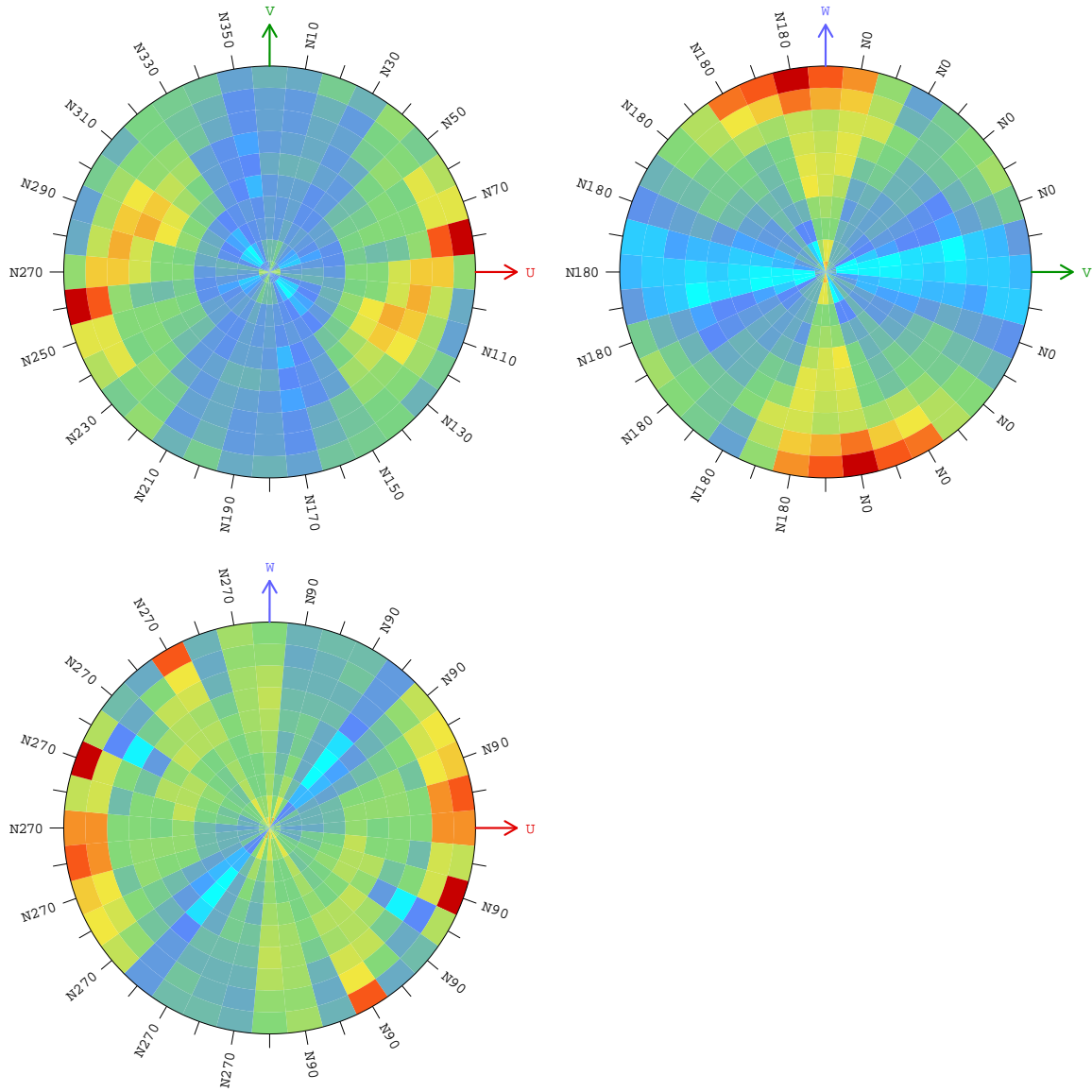


Figura 35: Mapa variográfico para Cobre

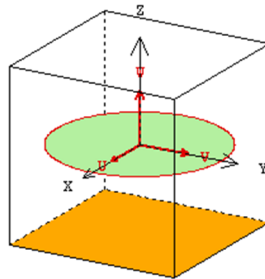


Figura 36: Direcciones de anisotropías seleccionadas

Los parámetros de cálculo usados para construir los variogramas experimentales (simples y cruzados), se muestran en la tabla siguiente:

Parámetro	Y	X	Z
Dip	0°	0°	90°
Azimut	0°	90°	0°
Tolerancia azimut	45°	45°	90°
Ancho banda (m)	0	0	0
Alto banda (m)	0	0	0
Número de pasos	8	8	8
Tamaño paso (m)	10	10	10
Tolerancia paso (m)	5	5	5

Tabla 7: Parámetros para construcción de variogramas

Luego, los variogramas experimentales resultantes se muestran a continuación:

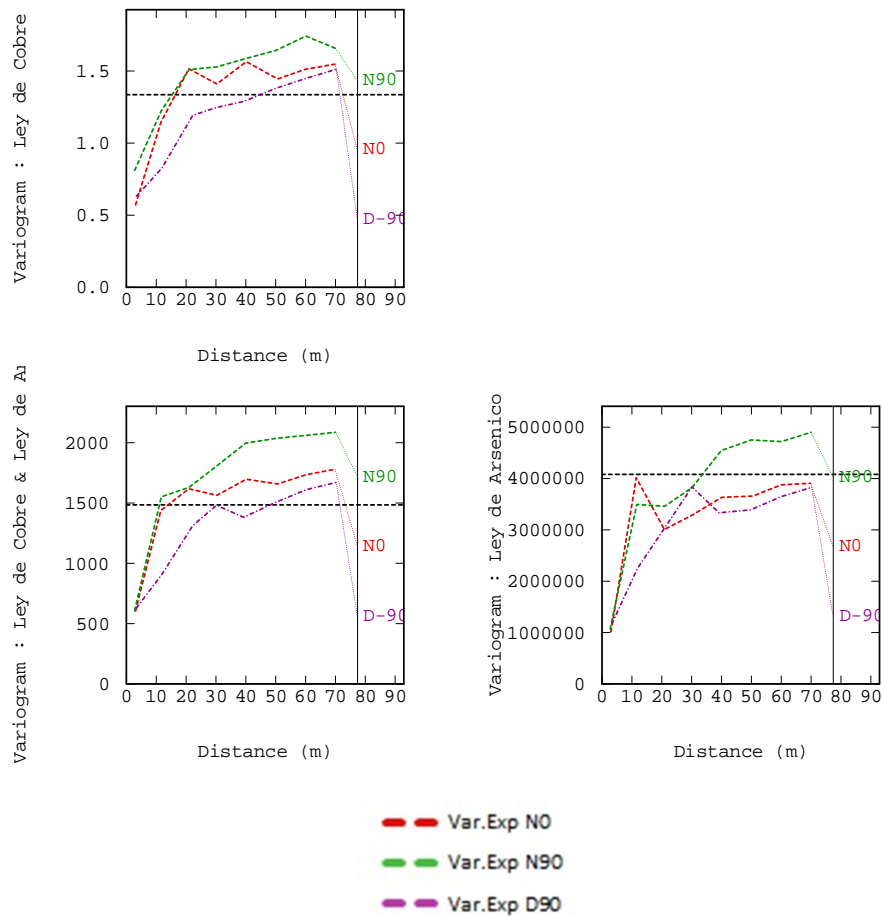


Figura 37: Variogramas experimentales simples y cruzados, a lo largo de las direcciones principales de anisotropía.

A continuación se entrega el modelo propuesto y su ajuste a los variogramas experimentales. Los modelos consisten en un efecto pepita y modelos esféricos anidados.

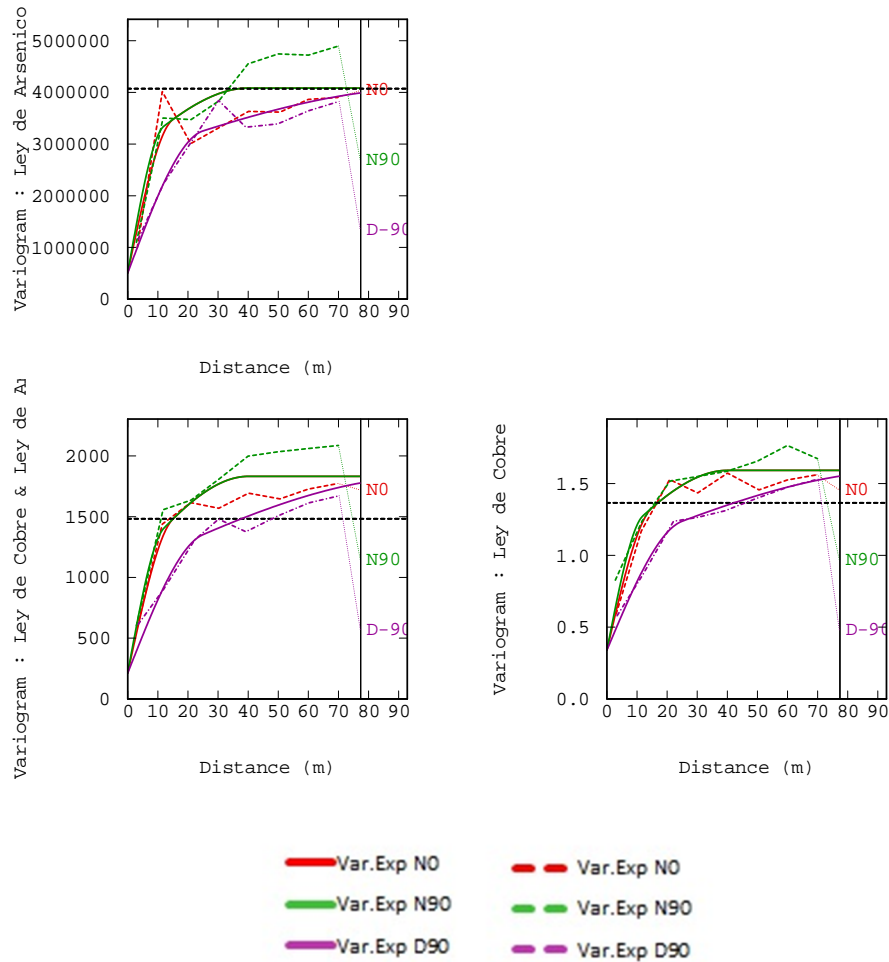


Figura 38: Variogramas modelados simples y cruzados

A continuación se detallan los modelos variográficos:

$$\gamma(h)_{As} = 5.17 * 10^5 \textit{pepa} + 2.24 * 10^5 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 25 \end{matrix} \right) + 1.32 * 10^5 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 40 \\ 40 \\ 100 \end{matrix} \right)$$

$$\gamma(h)_{Cu} = 0.303 \textit{pepa} + 0.69 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 25 \end{matrix} \right) + 0.58 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 40 \\ 40 \\ 100 \end{matrix} \right)$$

$$\gamma(h)_{Cu-As} = 216.12 \textit{pepa} + 855.2 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 12 \\ 15 \\ 25 \end{matrix} \right) + 761.29 \textit{esf} \left(\begin{matrix} 40 \\ 40 \\ 100 \end{matrix} \right)$$

4.2.3. Vecindad de búsqueda

La vecindad de búsqueda usada para el kriging y co-kriging de los paneles se define a continuación:

<i>Parámetro</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>W</i>
Dimensiones elipse (m)	200	200	200
N° sectores angulares		8	
N° mínimo de datos		1	
N° óptimo de datos por sector		5	

Tabla 8: Parámetros de la vecindad de búsqueda

4.2.4. Resultados de leyes de paneles

En esta sección se muestran algunas secciones del resultado de la estimación de paneles por kriging y co-kriging. La siguiente tabla da un resumen de las estimaciones obtenidas:

	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>
Kriging As	390	44.03	4252.32	891	549937
Kriging Cu	390	0.52	2.54	1.11	0.13
Co-Kriging As	390	44.19	4216.44	876	547116
Co-Kriging Cu	390	0.52	2.54	1.11	0.13

Tabla 9: Resumen de estimaciones obtenidas

4.2.4.1. Resultados kriging de paneles

Se muestran algunas secciones del kriging de leyes de arsénico y cobre (más vistas en Anexos), como también histogramas de las estimaciones:

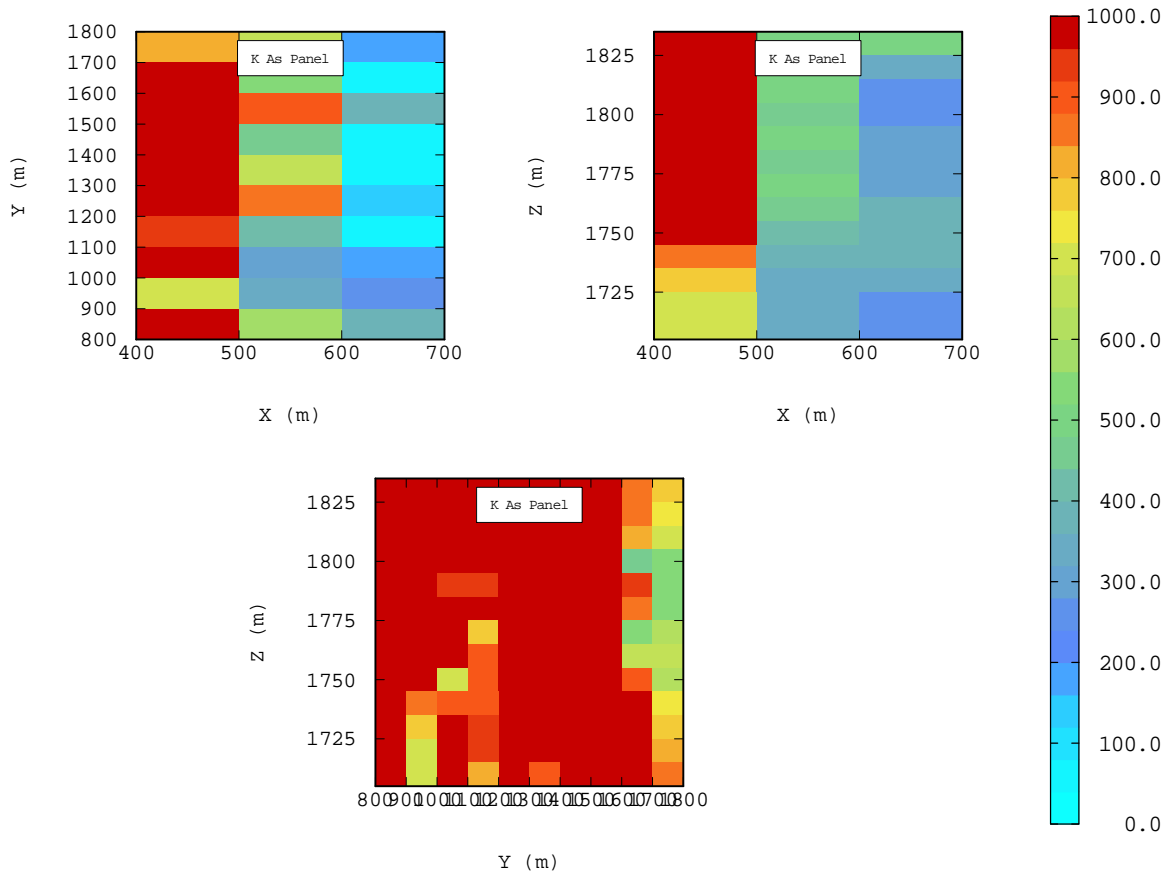


Figura 39: Vista de secciones de Kriging As

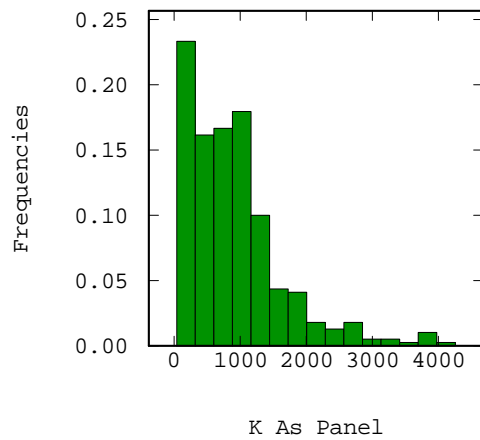


Figura 40: Histograma de estimaciones de As (kriging)

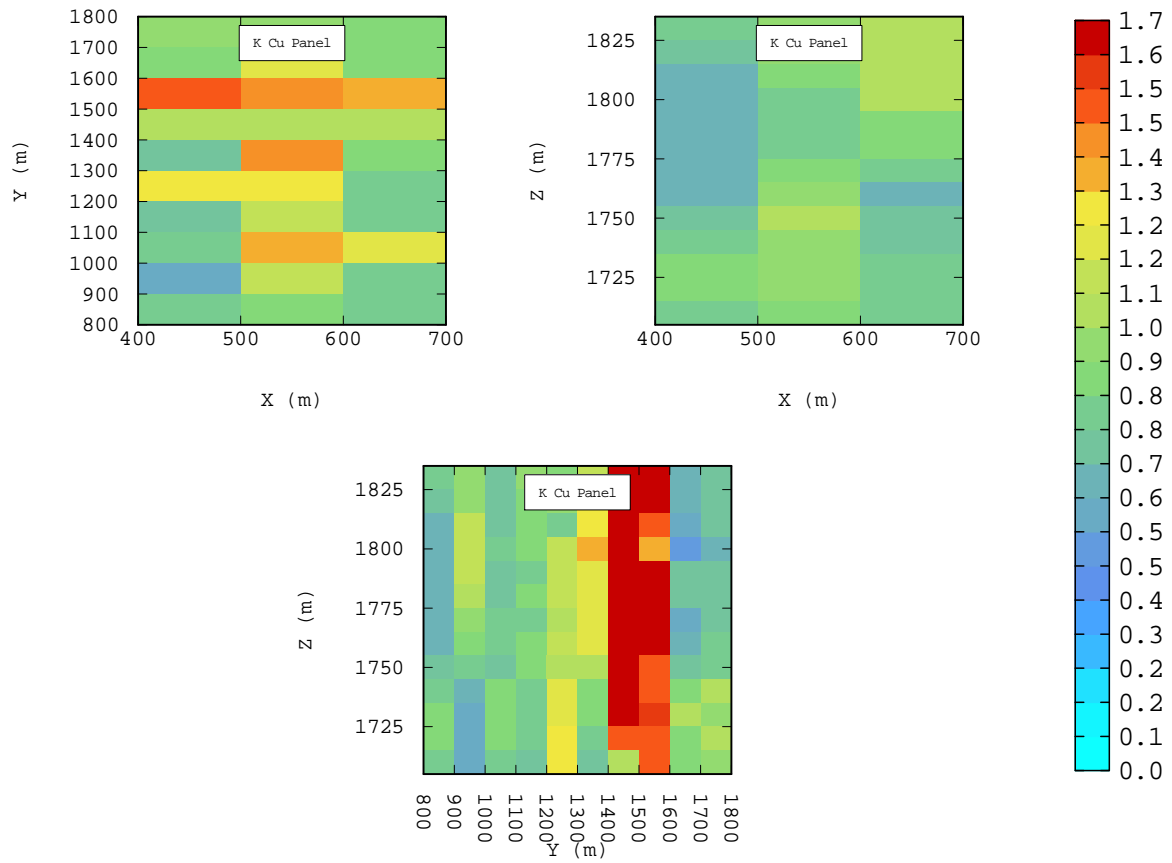


Figura 41: Vista de secciones de Kriging Cu

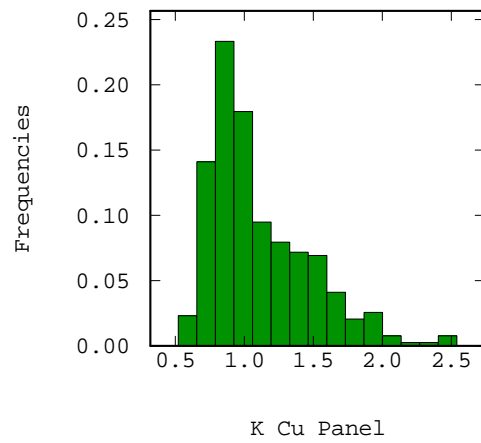


Figura 42: Histograma de estimaciones de Cu (kriging)

4.2.4.2. Resultados co-kriging paneles

Se muestran algunas secciones del co-kriging de leyes de arsénico y cobre (más vistas en Anexos), como también histogramas de las estimaciones:

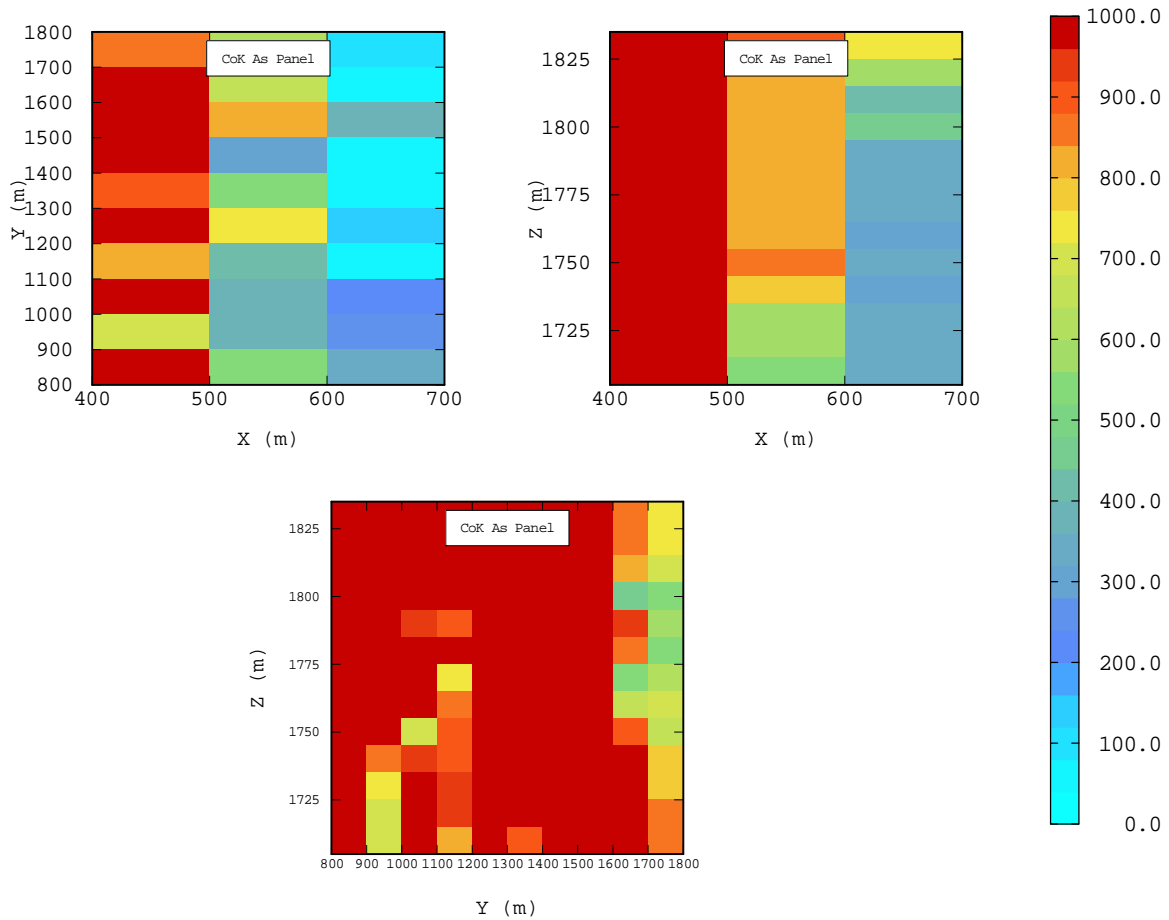


Figura 43: Vista de secciones de Co-Kriging As

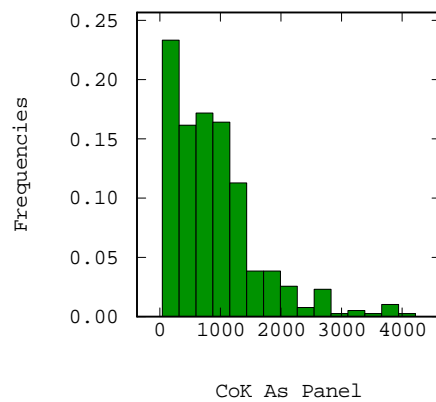


Figura 44: Histograma de estimaciones de As (Co-kriging)

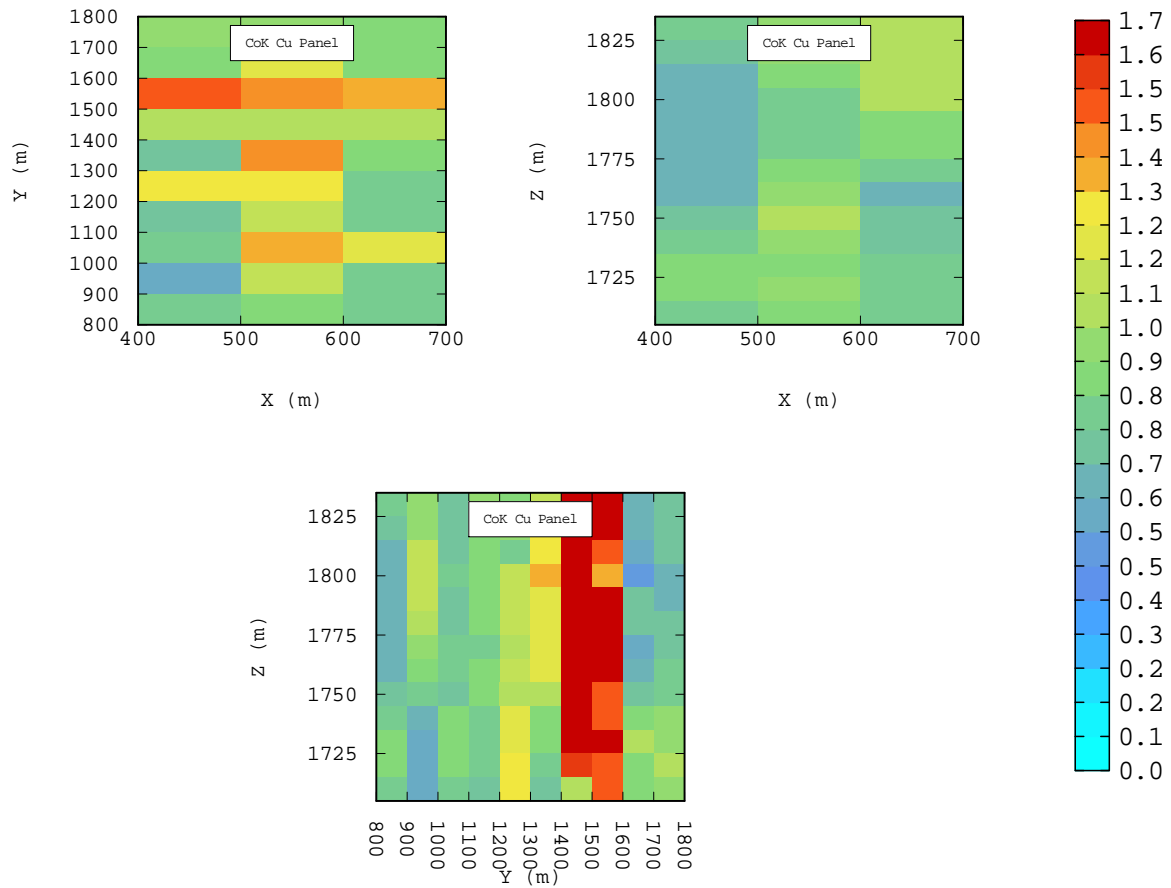


Figura 45: Vista de secciones de Co-Kriging Cu

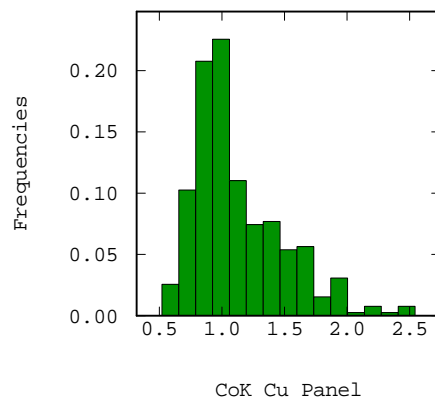


Figura 46: Histograma de estimaciones de Cu (Co-kriging)

De las estimaciones por kriging y co-kriging de los paneles se observa que las leyes de arsénico son bastante altas en la mayoría de los paneles.

4.3. Varianzas y co-varianzas de datos

Las varianzas y covarianzas de soporte puntual se obtienen a partir de las mesetas de los variogramas modelados, mientras que para los soportes voluminosos (bloque y panel) se obtienen de calcular variogramas regularizados. Los resultados obtenidos se muestran en matrices para cada uno de los tres soportes.

Los coeficientes de cada matriz quedan definidos por el siguiente ejemplo:

$$\begin{pmatrix} Var(As) & Cov(As, Cu) \\ Cov(As, Cu) & Var(Cu) \end{pmatrix}$$

Luego, bajo esta convención se definen las matrices de varianza-covarianza para los tres soportes correspondientes:

$$Matriz_{Var-Cov}(Puntual) = \begin{pmatrix} 4,09x10^6 & 1,83x10^3 \\ 1,83x10^3 & 1,58 \end{pmatrix}$$

$$Matriz_{Var-Cov}(Bloque) = \begin{pmatrix} 2,04x10^6 & 968,59 \\ 968,59 & 0,75 \end{pmatrix}$$

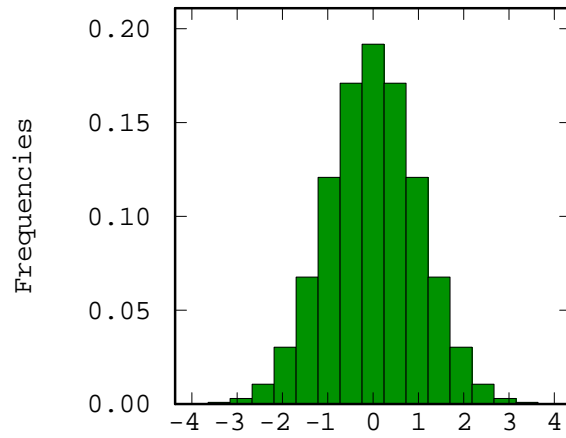
$$Matriz_{Var-Cov}(Panel) = \begin{pmatrix} 1,26x10^5 & 68,87 \\ 68,87 & 1,58 \end{pmatrix}$$

Como es de esperarse las varianzas y covarianzas van disminuyendo a medida que aumentamos el tamaño del soporte (efecto de soporte).

4.4. Transformación Gaussiana de los datos

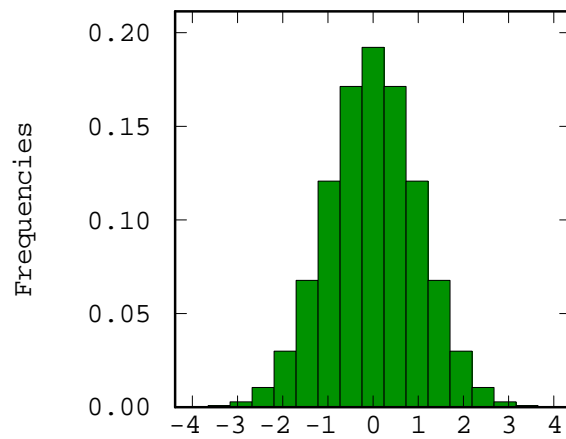
Una vez que se tiene la base de datos filtrada y desagrupada, se procede a transformar las variables a valores Gaussianos, donde se analiza qué tan bien se logra la transformación verificando el comportamiento bigaussiano (el detalle se encuentra en Anexos).

A continuación se presentan gráficamente las transformaciones Gaussianas de las leyes de cobre y arsénico. También se entregan las estadísticas básicas de los valores transformados de las leyes.



Gauss As

Figura 47: Histograma de datos Gaussianos As



Gauss Cu

Figura 48: Histograma de datos Gaussianos Cu

<i>Variables Gaussianas</i>	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>
Ley Arsénico	5773	-3.69	3.87	0	1
Ley Cobre	5773	-3.69	3.87	0	1

Tabla 10: Estadísticas de datos Gaussianos

4.5. Análisis variográfico de las variables Gaussianas

Una vez comprobado el comportamiento bigaussiano de las variables transformadas, se procede a realizar el análisis variográfico, construyendo primero el variograma experimental en las direcciones principales de anisotropía y luego ajustando un modelo variográfico. Este análisis se realiza con la finalidad de modelar la continuidad espacial de las variables, que es un input necesario para la simulación.

Al igual que en el variograma experimental de variables sin transformar, las direcciones de anisotropía se mantienen, las cuales corresponden a las direcciones de los ejes coordenados sin rotar. A continuación se muestran los parámetros usados para la construcción de los variogramas experimentales y sus respectivos gráficos.

<i>Parámetro</i>	<i>Y</i>	<i>X</i>	<i>Z</i>
Dip	0°	0°	90°
Azimet	0°	90°	0°
Tolerancia azimet	45°	45°	90°
Ancho banda (m)	0	0	0
Alto banda (m)	0	0	0
Número de pasos	8	8	8
Tamaño paso (m)	10	10	10
Tolerancia paso (m)	5	5	5

Tabla 11: Parámetros para variogramas experimentales variables Gaussianas

A continuación se presentan los variogramas resultantes:

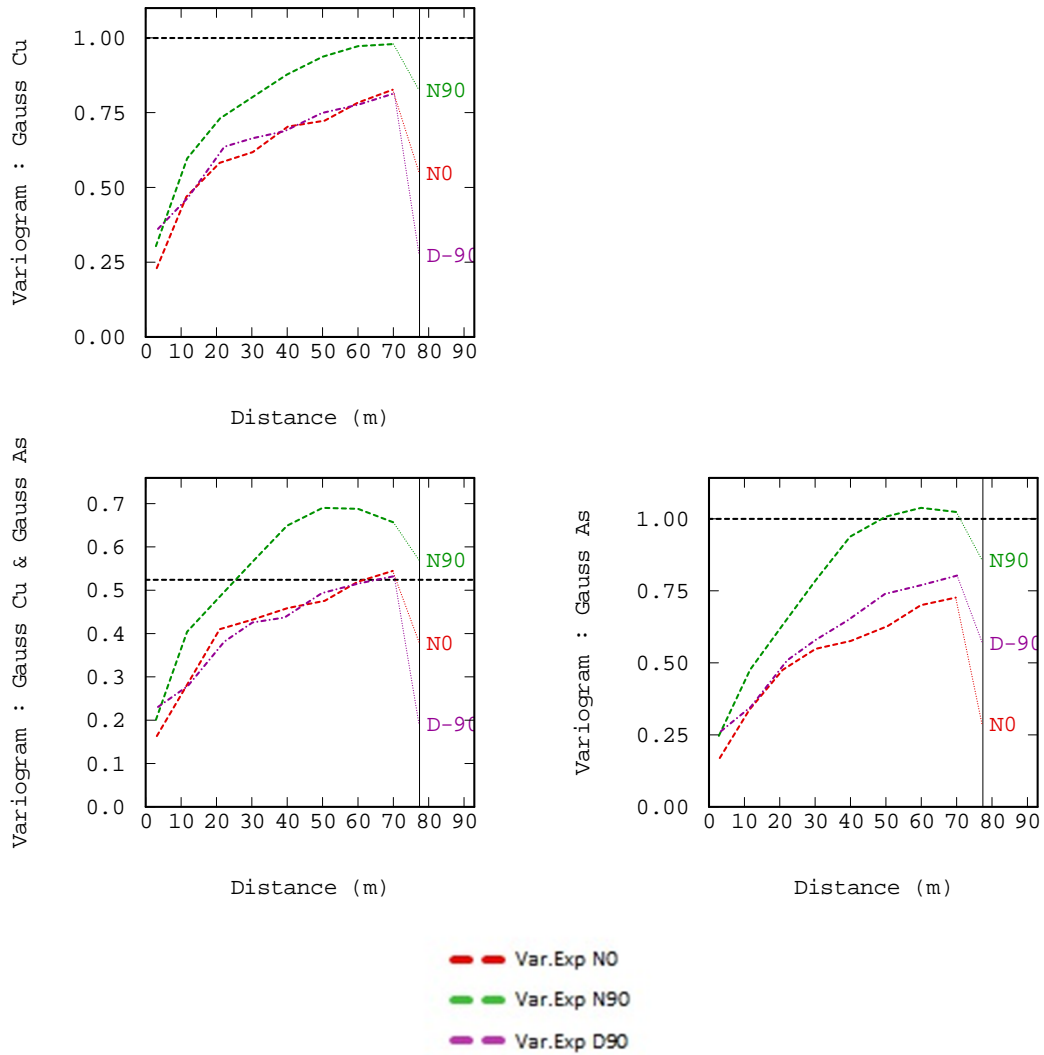


Figura 49: Variogramas experimentales variables Gaussianas, a lo largo de las direcciones principales de anisotropía.

A continuación se entrega el modelo propuesto y su ajuste a los variogramas experimentales. Los modelos consisten en un efecto pepita y modelos esféricos anidados.

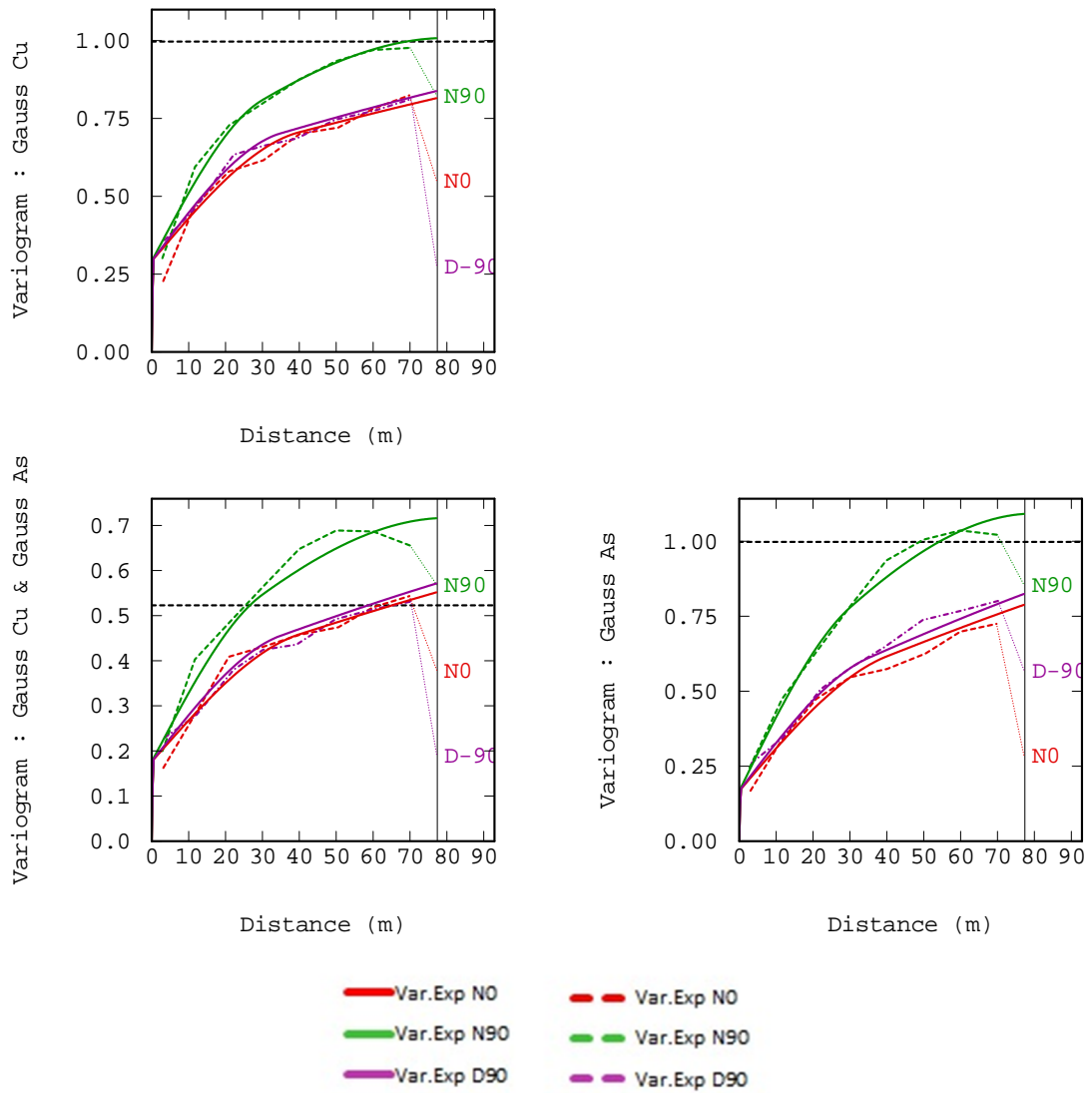


Figura 50: Variogramas modelados variables Gaussianas

A continuación se detallan los modelos variográficos:

$$\gamma(h)_{Gaussiana\ As} = 0.17\ pepa + 0.25\ esf \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} + 0.68\ esf \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(h)_{Gaussiana\ Cu} = 0.29\ pepa + 0.29\ esf \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} + 0.43\ esf \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\gamma(h)_{Gaussiana\ AsCu} = 0.18\ pepa + 0.17\ esf \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 35 \end{pmatrix} + 0.37\ esf \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 180 \end{pmatrix}$$

4.6. Coeficientes de cambio de soporte

Se deben obtener los coeficientes de cambio de soporte para el caso univariable y el bivariable.

4.6.1. Coeficientes para caso univariable

Para el caso univariable se tiene que los coeficientes de cambio de soporte punto-bloque y punto-panel (calculados para reducir las varianzas de las leyes en ambos soportes) son:

<i>Punto-Bloque</i>	<i>Punto-Panel</i>
$r_{vAs} = 0.8109$	$r_{vAs} = 0.2427$
$r_{vCu} = 0.8222$	$r_{vCu} = 0.2410$

Tabla 12: Coeficientes cambio de soporte univariable

Las varianzas de las Gaussianas de bloque y panel, son las siguientes:

<i>Bloque</i>	<i>Panel</i>
$var(Y_v)_{As} = 1$	$var(Y_v)_{As} = 1$
$var(Y_v)_{Cu} = 1$	$var(Y_v)_{Cu} = 1$

Tabla 13: Varianza de gaussianas de bloque y panel

4.6.2. Coeficientes para caso bivariable

Para el caso bivariable, los coeficientes de cambio de soporte punto-bloque y punto-panel son:

<i>Punto-Bloque</i>	<i>Punto-Panel</i>
$r_v = \begin{pmatrix} 0.8109 \\ 0.8222 \end{pmatrix}$	$r_v = \begin{pmatrix} 0.2427 \\ 0.2410 \end{pmatrix}$

Tabla 14: Coeficientes cambio de soporte Bivariable

Las matrices de varianza-covarianza de las Gaussianas de soporte bloque y panel, son las siguientes:

<i>Bloque</i>	<i>Panel</i>
$cov(Y_v)_{(As,Cu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8323 \\ 0.8323 & 1 \end{pmatrix}$	$cov(Y_v)_{(As,Cu)} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8482 \\ 0.8282 & 1 \end{pmatrix}$

Tabla 15: Covarianza de gaussianas de bloque y panel

Los términos no diagonales de las matrices de varianza-covarianza fueron determinados de manera de reproducir las covarianzas entre leyes de cobre y arsénico en los soportes de bloques y panel.

4.7. Parámetros para simulación

Para lograr hacer la simulación se necesita los modelos variográficos de los valores transformados a Gaussianos.

4.7.1. Definición de soporte bloque

El soporte bloque definido para este trabajo tiene las siguientes dimensiones:

	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
Dimensiones Panel [m]	10	10	10
Discretización	7	7	3

Tabla 16: Soporte bloque definido

4.7.2. Vecindad de búsqueda

La vecindad de búsqueda usada para la simulación de los bloques es la misma que aquella usada para el kriging. Sus parámetros se muestran a continuación:

<i>Parámetro</i>	<i>U</i>	<i>V</i>	<i>W</i>
Dimensiones elipse (m)	200	200	200
N° sectores angulares		8	
N° mínimo de datos por sector		1	
N° óptimo de datos		5	

Tabla 17: Parámetros vecindad de búsqueda para simulación

4.7.3. Resultados

Los resultados de las leyes simuladas y rebloqueo a bloques y paneles se muestran a continuación.

4.7.3.1. Bloques simulados

Cabe destacar que se hicieron 100 simulaciones por cada uno de los 39.000 bloques. Algunas estadísticas de estas simulaciones se muestran en la siguiente tabla:

	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>
Arsénico	100	0.00	40195.44	829.55
Cobre	100	0.00	14.16	6.99

Tabla 18: Estadísticas para simulación

4.7.3.2. Resultados rebloqueo a paneles

El rebloqueo de la simulación a panel da como resultante una ley de panel que, posteriormente, se usa como input para el condicionamiento uniforme. La distribución de leyes simuladas de leyes de los paneles se muestra a continuación:

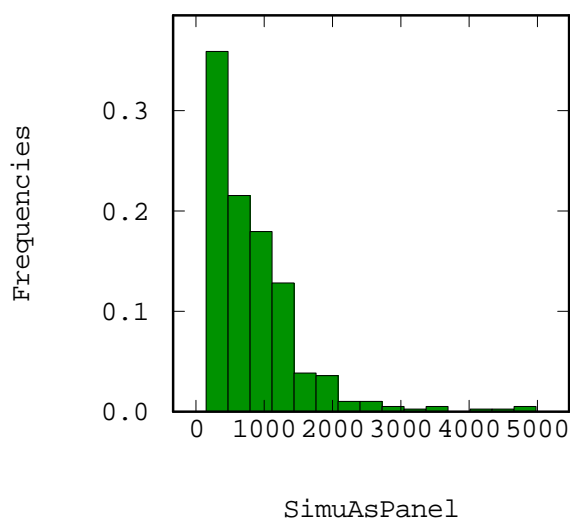
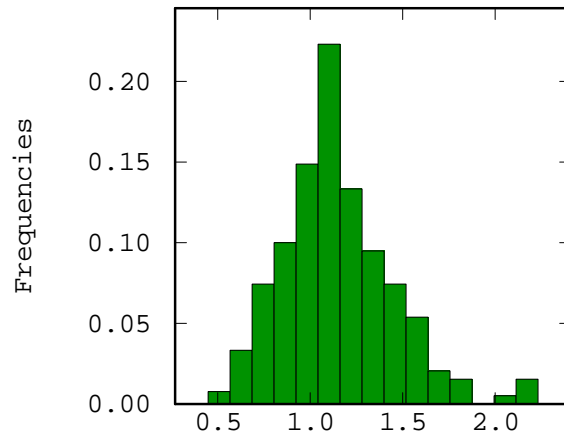


Figura 51: Histograma de leyes de paneles, promedio de las realizaciones de arsénico.



SimuCuPanel

Figura 52: Histograma leyes de paneles, promedio de las realizaciones de cobre.

	<i>Cantidad</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Media</i>	<i>Varianza</i>
Panel Arsénico	390	154	4975	829.57	495524.93
Panel Cobre	390	0.45	2.23	1.15	0.09

Figura 53: Estadísticas leyes de paneles, promedio de las realizaciones.

5. RESULTADOS

En este capítulo, se presentan los principales resultados obtenidos de aplicar las metodologías descritas en el capítulo 3. También se procede a validar y analizar los resultados obtenidos del condicionamiento uniforme contra una simulación condicional.

Los resultados se presentan en curvas tonelaje-ley, debido a que no se puede hacer una comparación bloque a bloque entre los dos métodos utilizados, ya que el C.U no distingue entre las estimaciones de los bloques para un mismo panel. Por lo tanto una forma fácil de realizar la comparación es sobre el tonelaje acumulado bajo cierta ley de corte, donde no se requiere saber de qué parte del panel proviene el bloque.

Los resultados para el caso bivariable se hacen para diferentes restricciones de arsénico, para mostrar la ventaja de ocupar un método de estimación bivariable, donde se puede cuantificar que cantidad de mineral de cobre es comercializable (concentración de arsénico menor a 200 ppm). También se espera ver el comportamiento de la curva del C.U a medida que se va aliviando la restricción sobre la concentración de arsénico.

Se muestran las curvas tonelaje-ley obtenidas de la aplicación del condicionamiento uniforme según los cuatro casos de estudio descritos en la metodología (capítulo 3), junto con de las curvas obtenidas mediante simulación o co-simulación. Estas curvas obtenidas mediante estas dos técnicas se presentan en el mismo gráfico, a fin de poder detectar las semejanzas o discrepancias fácilmente. Los resultados obtenidos de la simulación (o co-simulación) se toman como base para validar los obtenidos de hacer el condicionamiento uniforme univariable y bivariable.

Es necesario aclarar previamente que para poder sobreponer y así poder comparar fácilmente las curvas obtenidas por condicionamiento uniforme y simulación, a los tonelajes de mineral que superan cierta ley de corte se les divide por el tonelaje total de los bloques con los que se está fabricando la curva. Dado que para el condicionamiento uniforme se evalúan 1.000 realizaciones de bloques, mientras que para simulación se cuenta con 100 realizaciones, el tonelaje de mineral que está por sobre cierta ley de corte en los gráficos, se expresa en porcentaje del total de mineral que se está evaluando.

Para la presentación de los resultados se elige cinco paneles de características diferentes, los cuales son los mismos para todos los casos para así poder comparar los resultados entre métodos.

5.1. Condicionamiento uniforme en base a kriging y co-kriging

En esta sección se muestran los resultados de aplicar el condicionamiento uniforme usando como inputs los parámetros mostrados en el capítulo 3. En este ítem en particular, la ley de los paneles se obtiene de hacer un kriging o co-kriging según sea el caso, también se presentan las medias de las estimaciones hechas por cada caso y variable.

	<i>Kriging As</i>	<i>Kriging Cu</i>	<i>Co-Kriging As</i>	<i>Co-Kriging Cu</i>
Panel 4	707.24	0.55	702.38	0.56
Panel 91	1568.91	0.78	1562.76	0.78
Panel 119	856.44	0.95	853.4	1.01
Panel 224	853.2	1.39	861.14	1.37
Panel 387	959.61	1.77	955.33	1.77

Tabla 19: Resultados kriging y Co-kriging por paneles

5.1.1. Caso univariable

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley obtenidas a partir del condicionamiento uniforme univariable, donde la ley del panel se calculó por kriging a partir de los datos de cobre y arsénico, así como las curvas tonelaje ley obtenidas mediante simulación. También se presentan las estadísticas básicas de las estimaciones hechas para cada caso, variable (ley de cobre, ley de arsénico) y panel.

<i>C.U Univariable As (Kriging)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	17.112	9957.6	720	879901
Panel 91	1000	36.097	20221	1649	3506777
Panel 119	1000	9.5754	9916.8	785	922640
Panel 224	1000	18.665	14290	881	1259339
Panel 387	1000	13.159	33455	942	1321642

Tabla 20: Resultados C.U univariable As (Kriging)

<i>C.U Univariable Cu (Kriging)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	0.01	4.30	0.53	0.19
Panel 91	1000	0.05	6.40	0.78	0.37
Panel 119	1000	0.07	7.35	0.94	0.53
Panel 224	1000	0.07	6.95	1.39	0.99
Panel 387	1000	0.07	14.48	1.79	1.76

Tabla 21: Resultados C.U univariable Cu (Kriging)

5.1.1.1. *Panel 4*

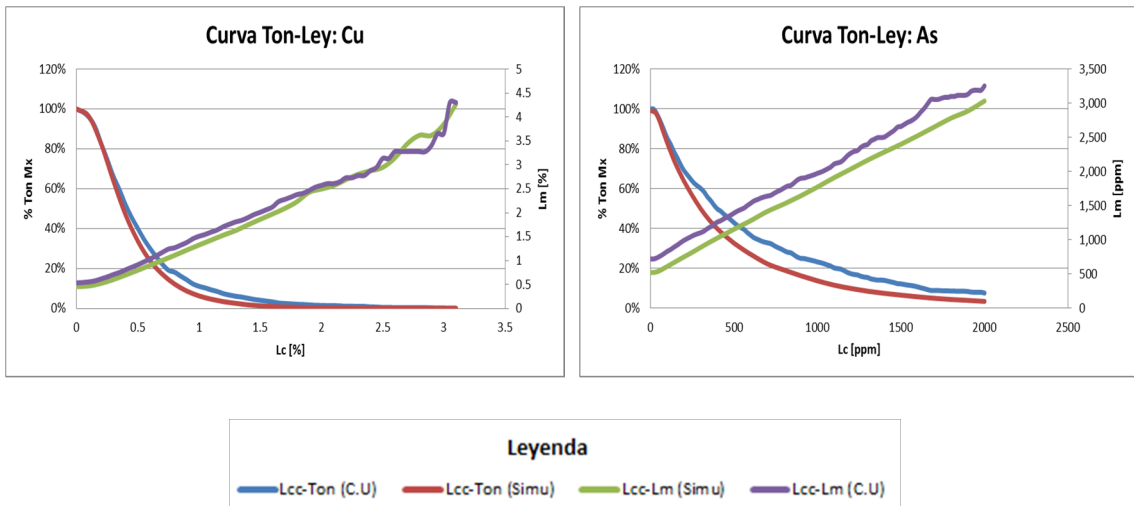


Figura 54: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.

5.1.1.2. *Panel 91*

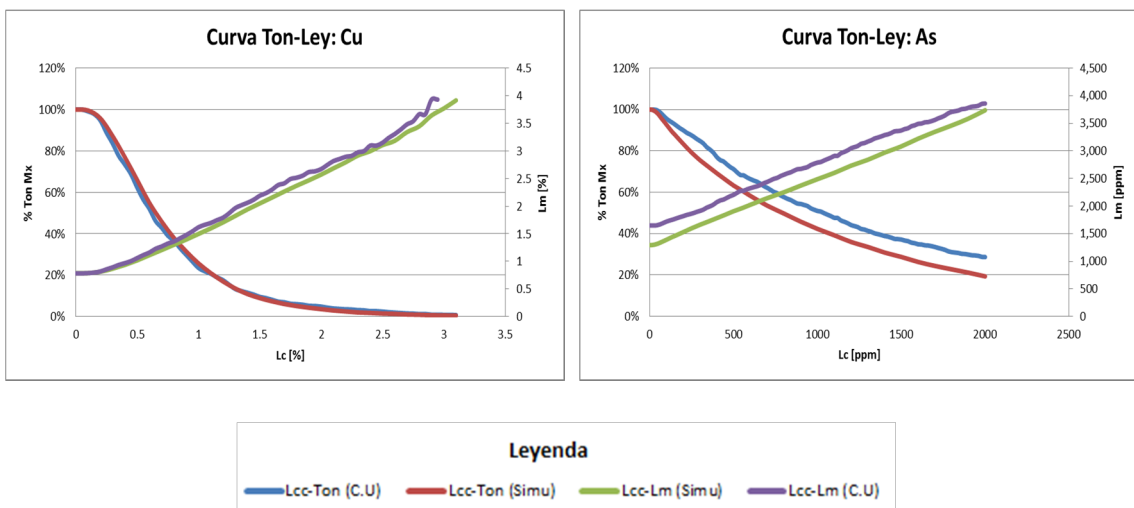


Figura 55: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.

5.1.1.3. *Panel 119*

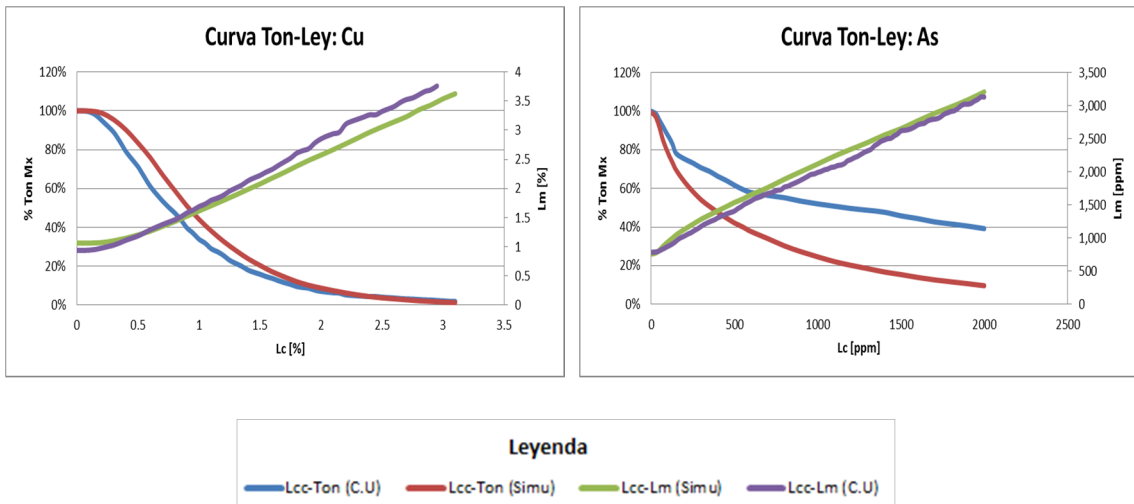


Figura 56: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.

5.1.1.4. *Panel 224*

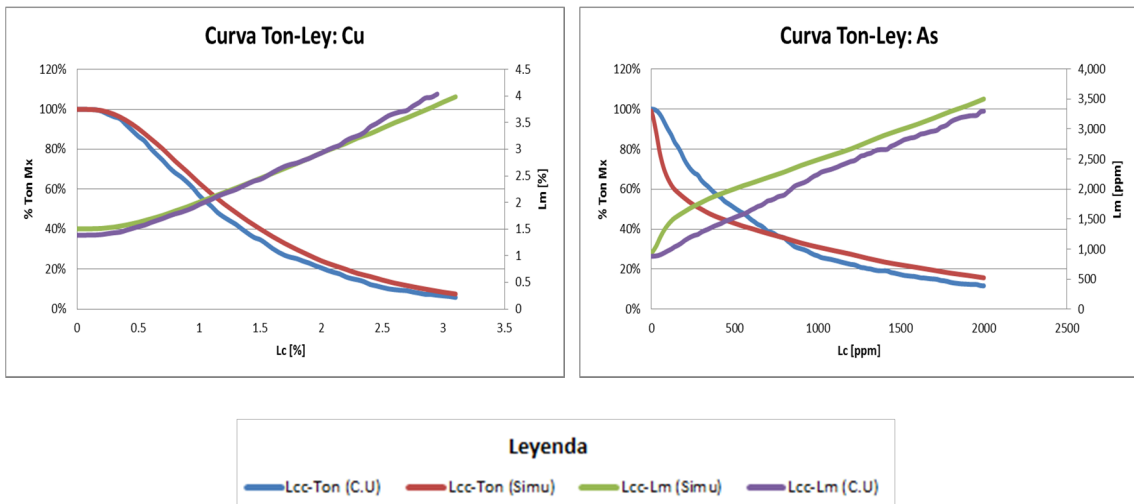


Figura 57: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.

5.1.1.5. Panel 387

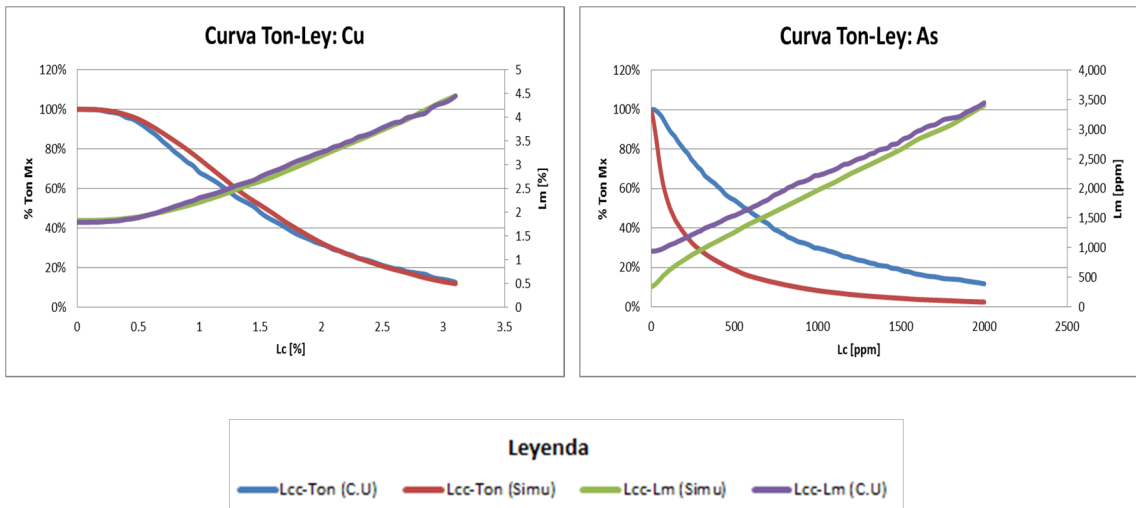


Figura 58: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 univariable, C.U basado en kriging v/s simulación.

5.1.2. Caso bivariable

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley obtenidas a partir del condicionamiento uniforme bivariable, donde la ley del panel se calculó por co-kriging a partir de los datos de cobre y arsénico, así como las curvas tonelaje ley obtenidas mediante co-simulación. También se presentan las estadísticas básicas de las estimaciones hechas para cada caso, variable (ley de cobre, ley de arsénico) y panel.

<i>C.U Bivariable As (Co-Kriging)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	12.99	7568.4	688	762687
Panel 91	1000	13.50	18099	1486	3082120
Panel 119	1000	12.27	9378.9	871	1129992
Panel 224	1000	14.84	17252	841	1487974
Panel 387	1000	10.77	33461	977	1562676

Tabla 22: Resultados C.U bivariable As (Co-Kriging)

<i>C.U Bivariable Cu (Co-Kriging)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	0.01	3.60	0.56	0.19
Panel 91	1000	0.03	7.30	0.78	0.40
Panel 119	1000	0.04	7.03	1.05	0.65
Panel 224	1000	0.06	8.53	1.37	1.08
Panel 387	1000	0.17	15.42	1.87	1.80

Tabla 23: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Kriging)

5.1.2.1. Panel 4

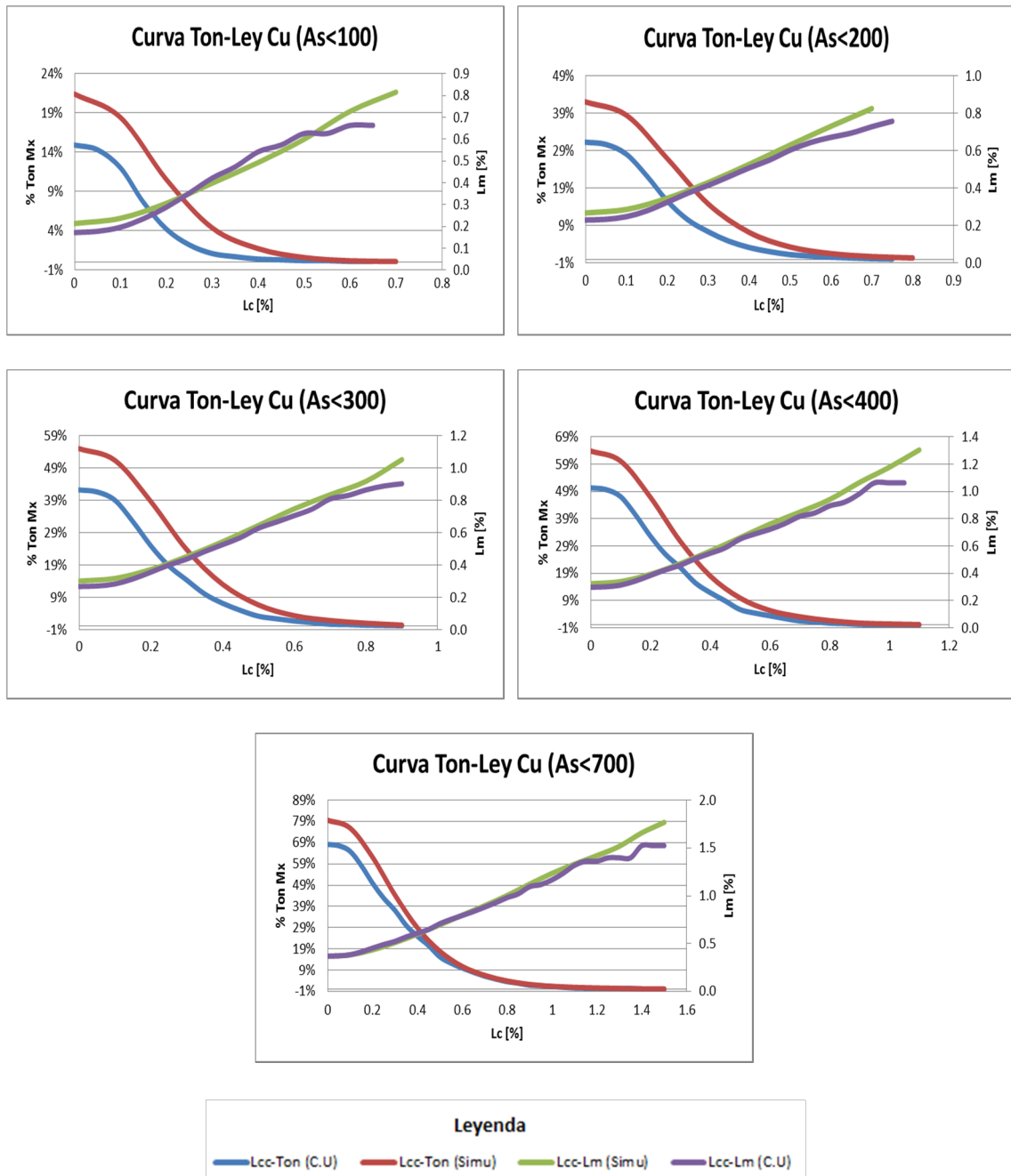


Figura 59: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.

5.1.2.2. Panel 91

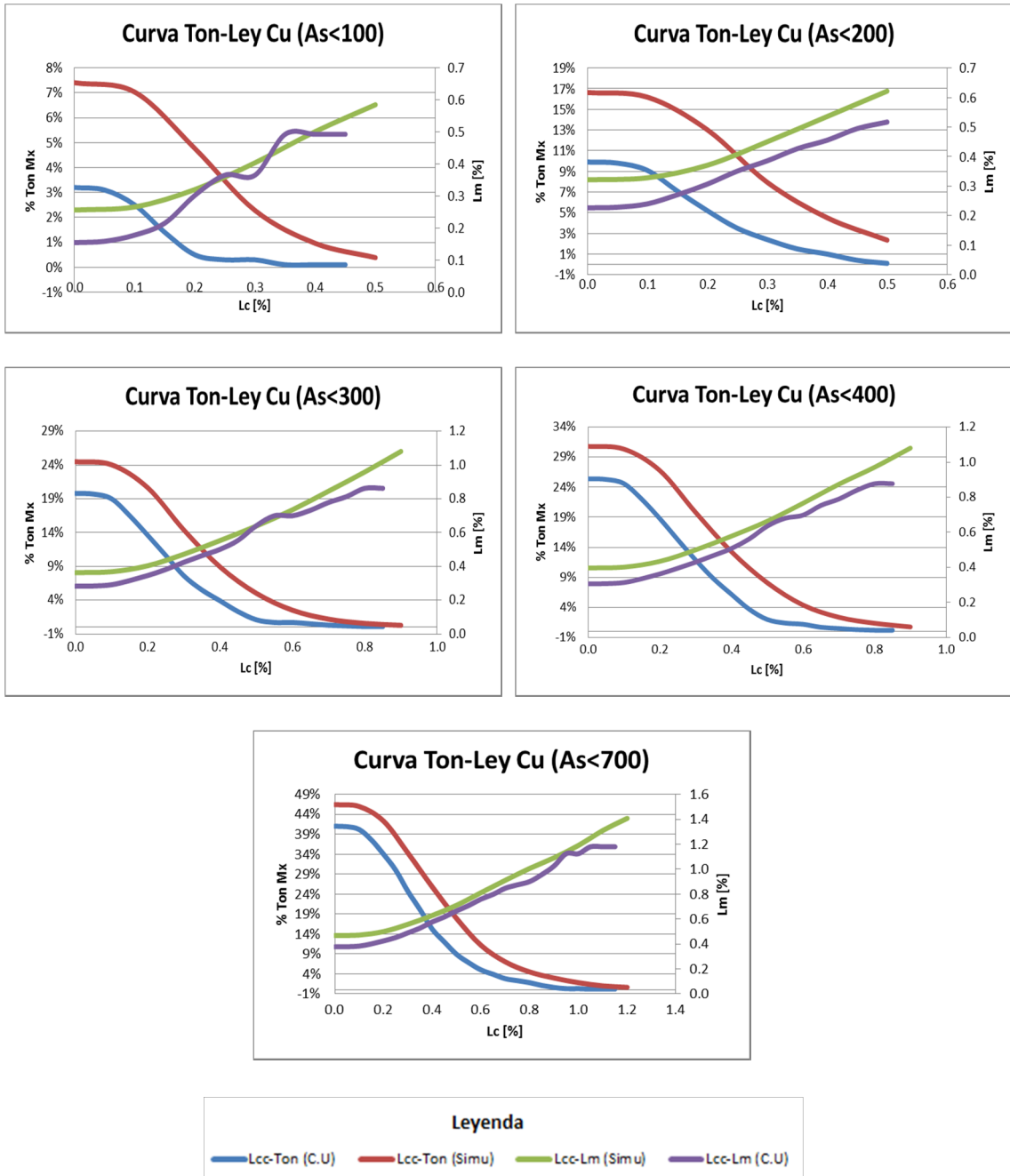


Figura 60: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.

5.1.2.3. Panel 119

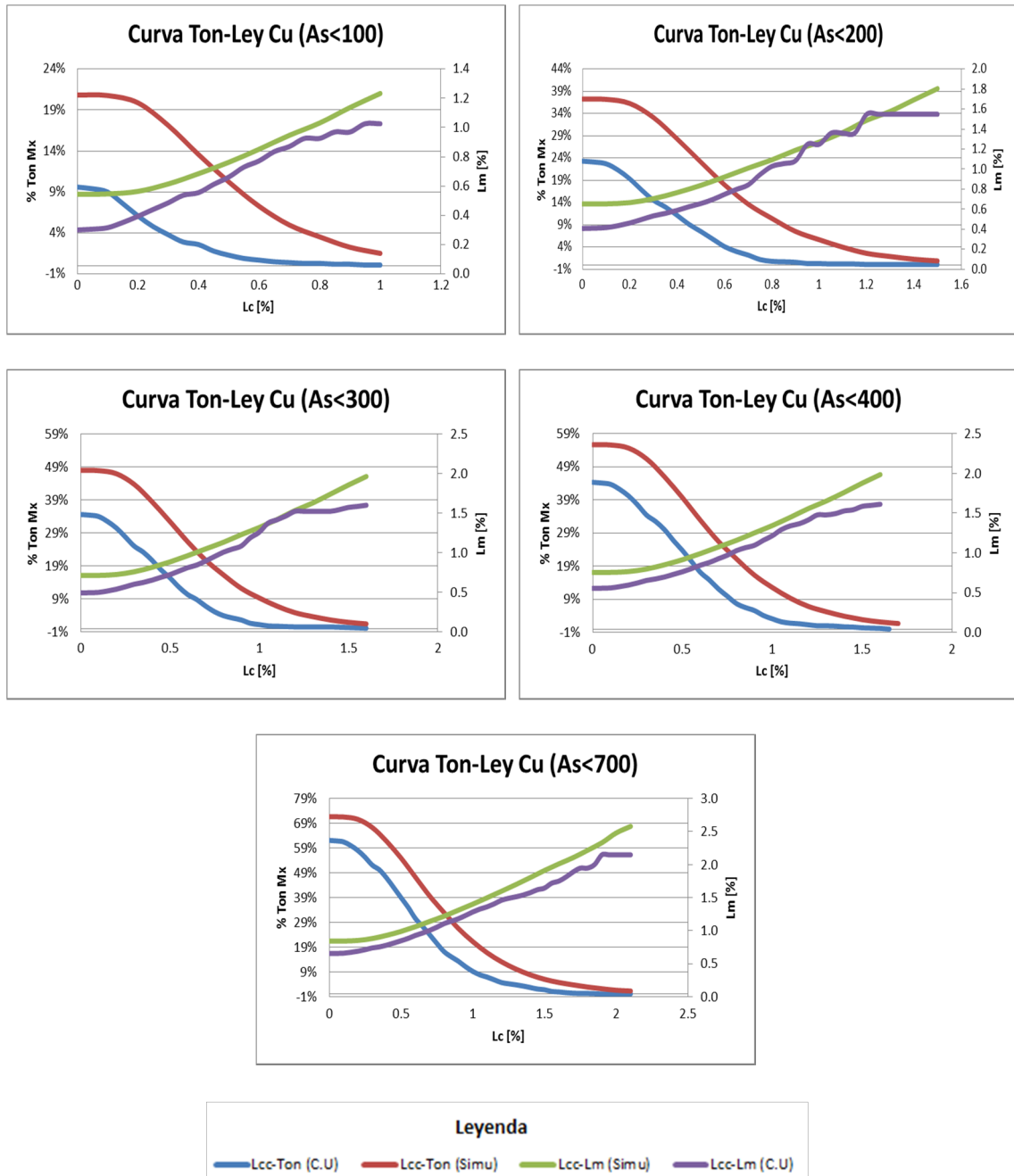


Figura 61: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.

5.1.2.4. Panel 224

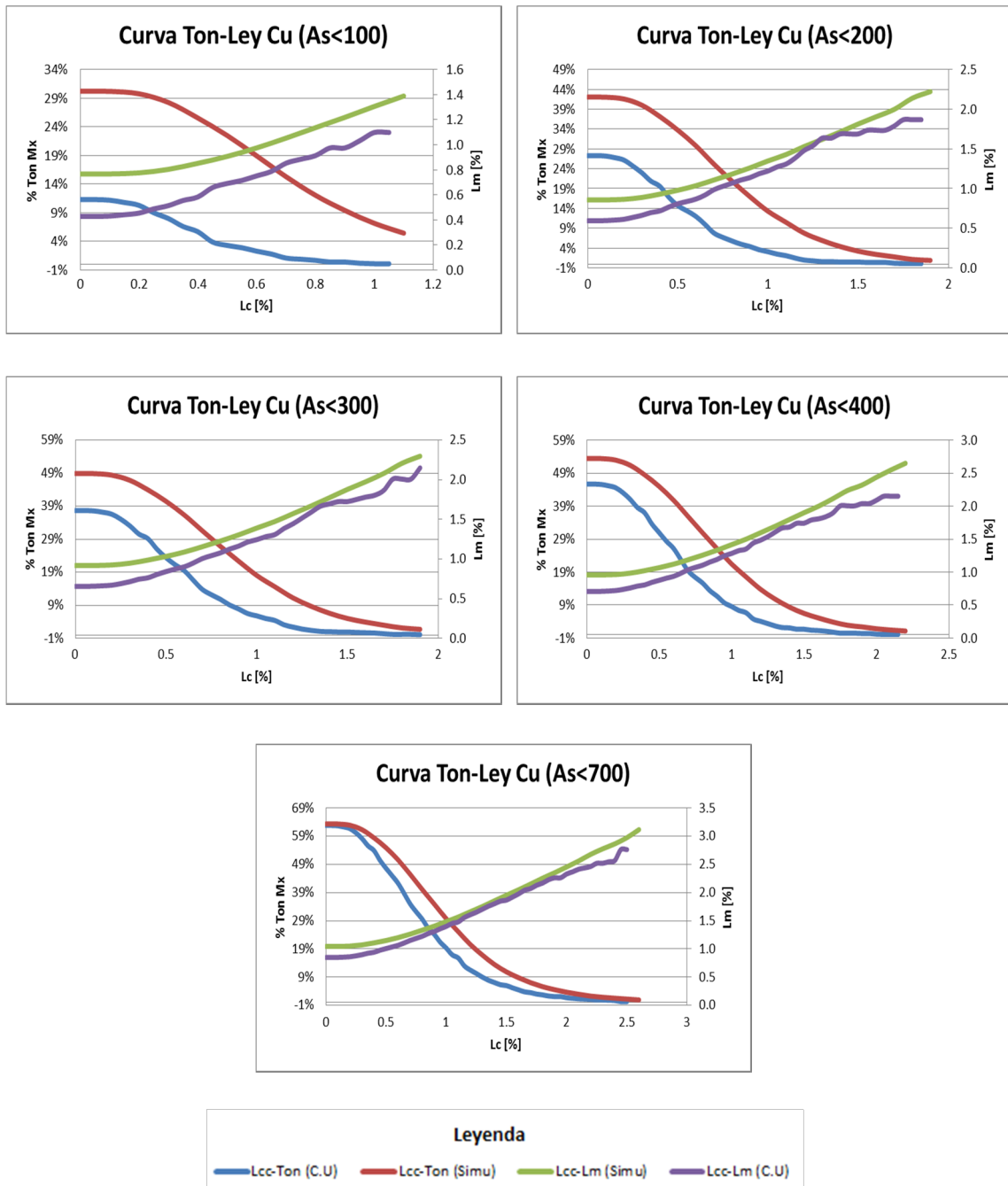


Figura 62: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.

5.1.2.5. Panel 387

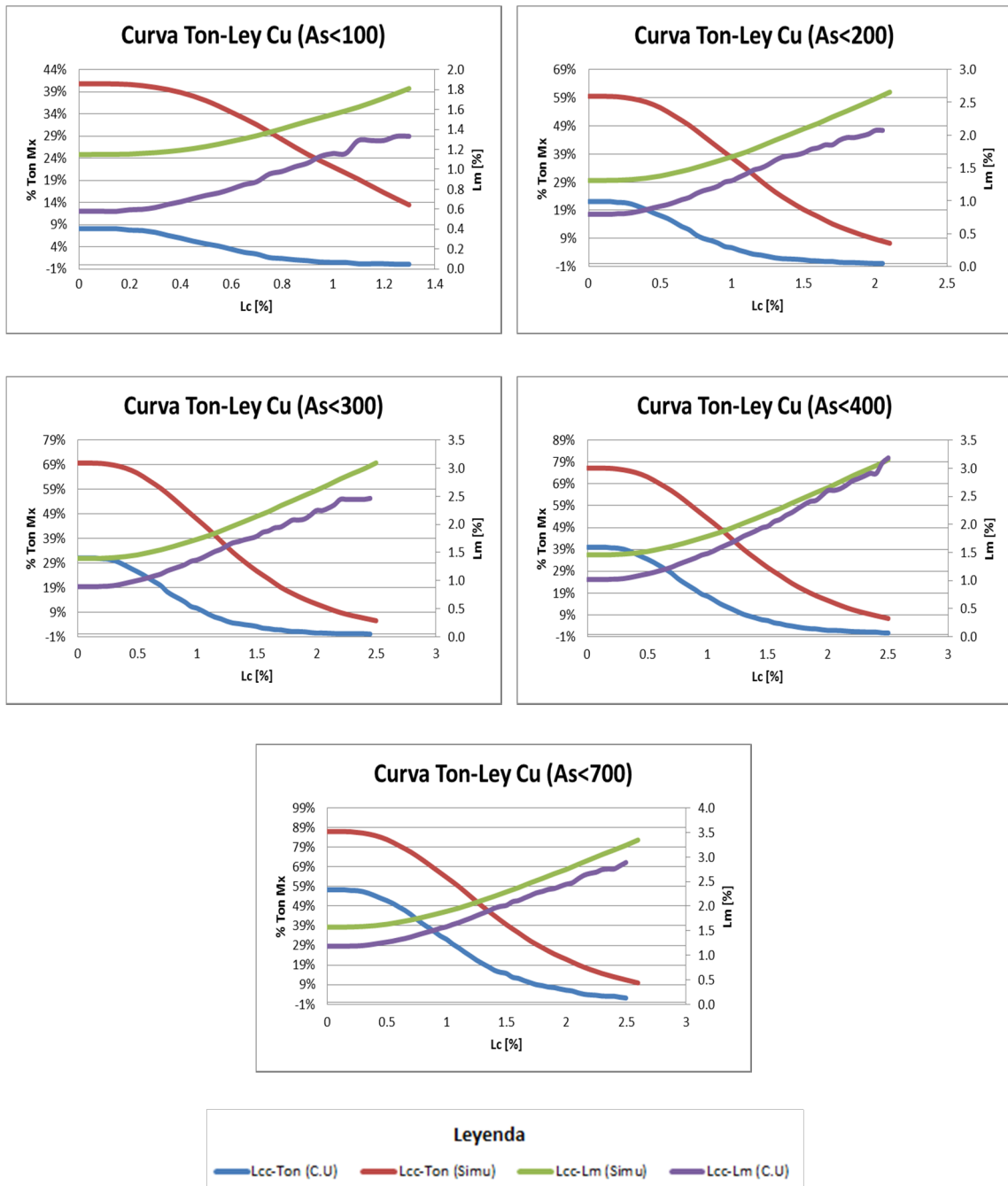


Figura 63: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 bivariable, C.U basado en co-kriging v/s co-simulación.

5.2. Condicionamiento uniforme en base a simulación

En esta sección se muestran los resultados de aplicar el condicionamiento uniforme usando como inputs los parámetros mostrados en el capítulo 3. En este ítem en particular la ley de los paneles se obtiene del y promedio sobre las realizaciones los resultados de la simulación o co-simulación, según sea el caso.

El motivo para realizar este segundo análisis es que la discrepancia entre condicionamiento uniforme y simulación puede deberse a diferencias entre las leyes de paneles obtenidas de (co) kriging y (co) simulación. En este ejercicio, la ley estimada de los paneles es idéntica en los dos métodos que están siendo comparados.

5.2.1. Caso univariable

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley obtenidas a partir del condicionamiento uniforme univariable, donde la ley del panel se calculó por rebloqueo de los resultados de la simulación, así como las curvas tonelaje ley obtenidas mediante simulación. También se presentan las estadísticas básicas de las estimaciones hechas para cada caso, variable (ley de cobre, ley de arsénico) y panel.

<i>C.U Univariable As (Simulación)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	11.94	7667.7	491	465654
Panel 91	1000	29.98	18159	1361	2596807
Panel 119	1000	7.25	7925.3	566	534274
Panel 224	1000	20.65	15187	978	1489464
Panel 387	1000	5.61	34620	328	220540

Tabla 24: Resultados C.U univariable As (Simulación)

<i>C.U Univariable Cu (Simulación)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	0.01	3.63	0.44	0.14
Panel 91	1000	0.05	6.40	0.78	0.37
Panel 119	1000	0.08	7.97	1.04	0.63
Panel 224	1000	0.09	7.75	1.58	1.25
Panel 387	1000	0.07	14.60	1.84	1.84

Tabla 25: Resultados C.U univariable Cu (Simulación)

5.2.1.1. *Panel 4*

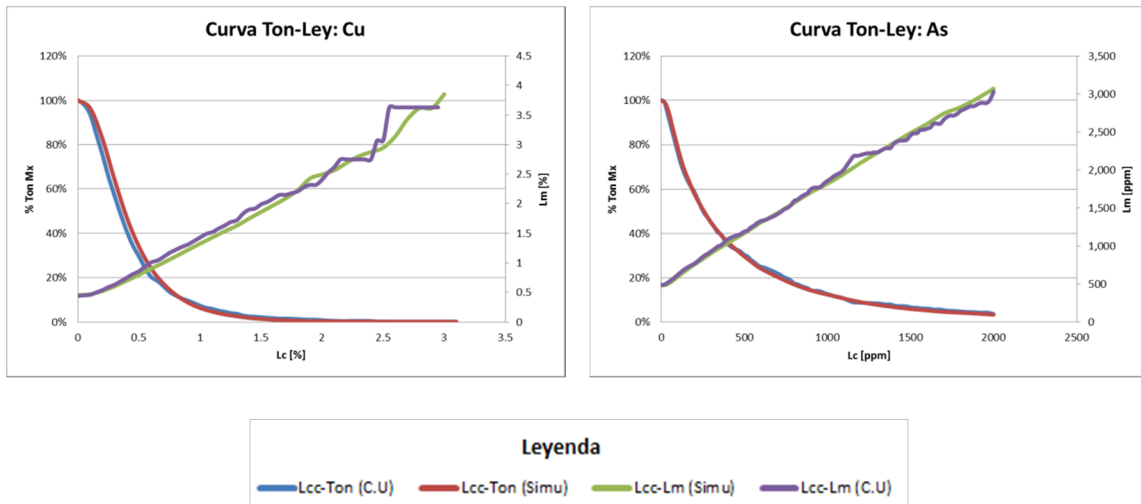


Figura 64: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.

5.2.1.2. *Panel 91*

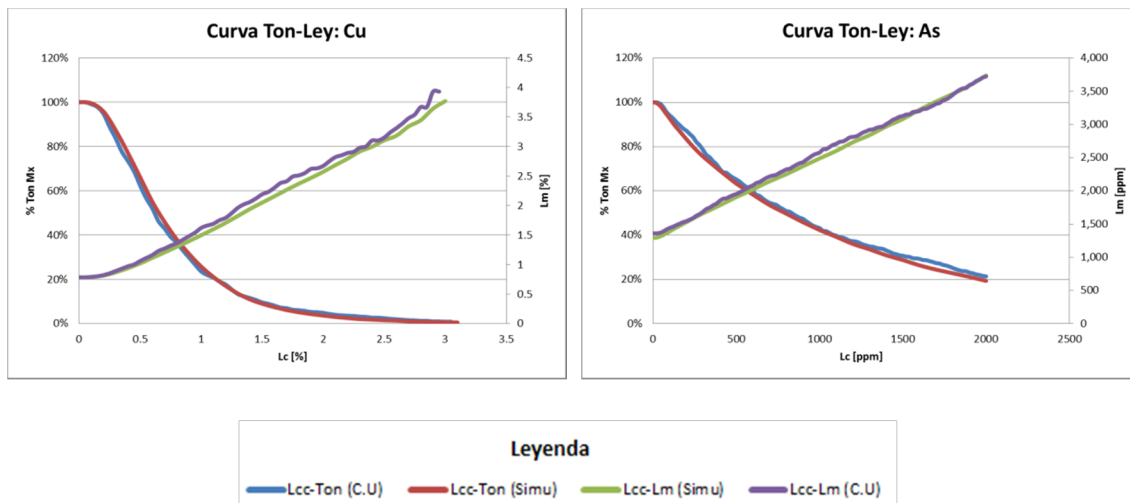


Figura 65: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.

5.2.1.3. *Panel 119*

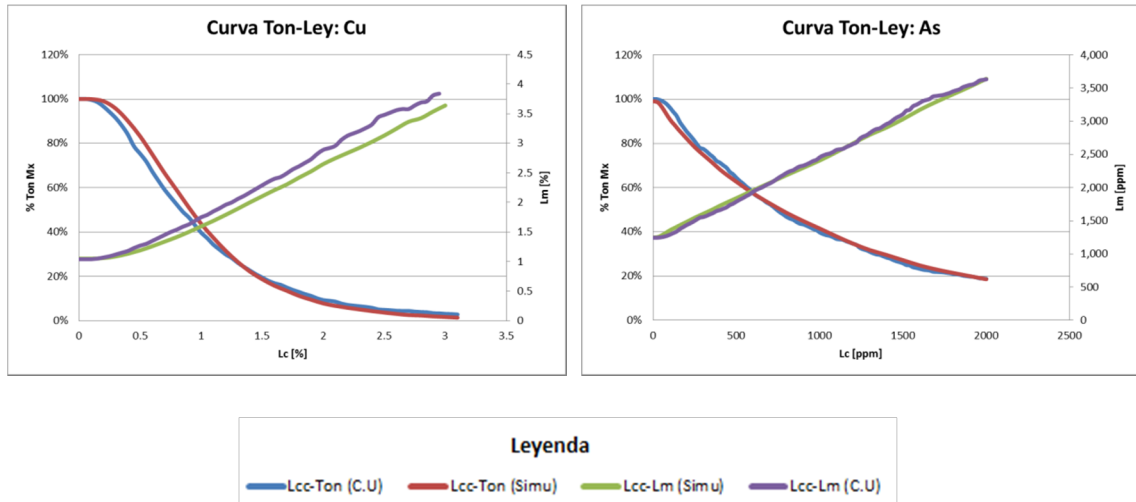


Figura 66: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.

5.2.1.4. *Panel 224*

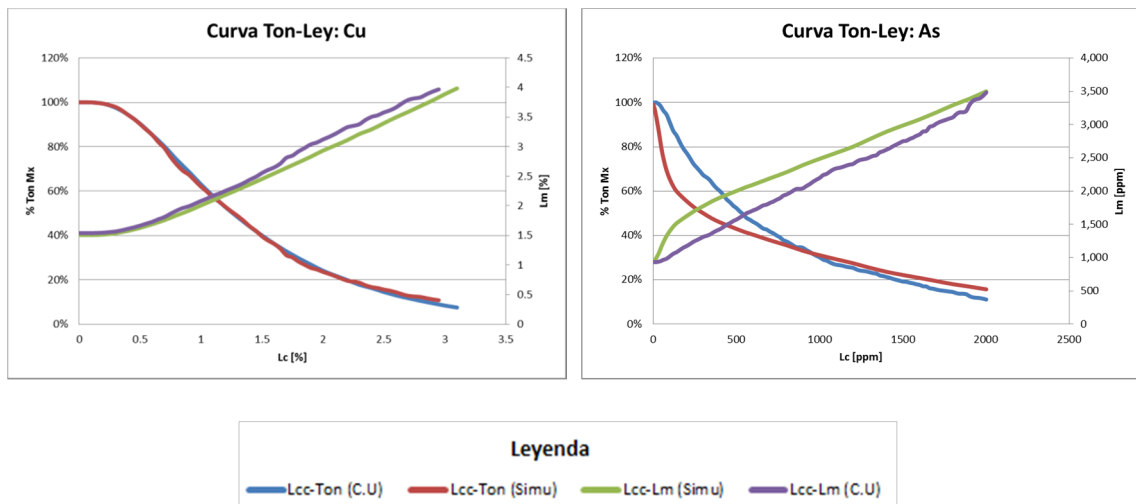


Figura 67: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.

5.2.1.5. *Panel 387*

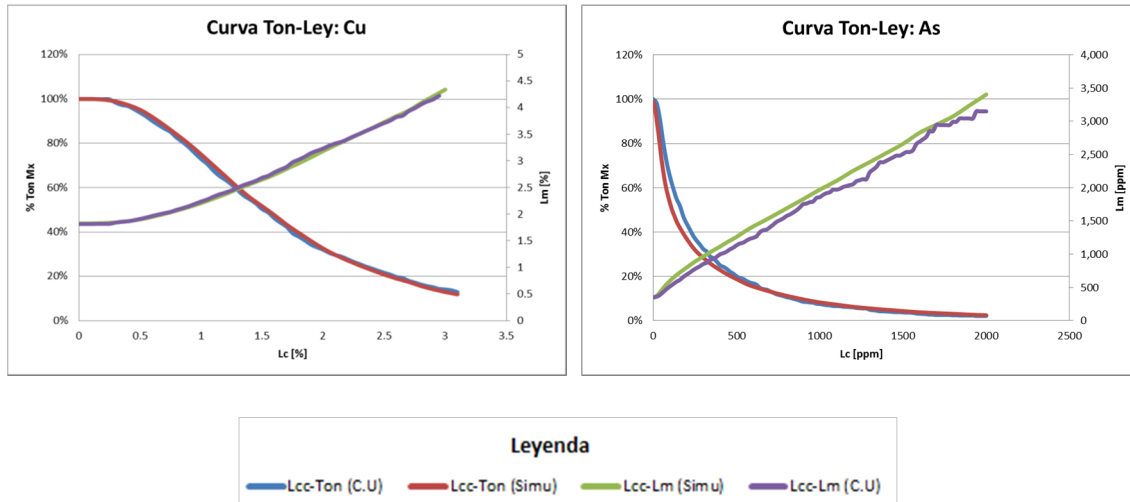


Figura 68: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 univariable, C.U basado en simulación v/s simulación.

5.2.2. *Caso bivariable*

A continuación se muestran las curvas tonelaje-ley obtenidas a partir del condicionamiento uniforme bivariable, donde la ley del panel se calculó por rebloqueo de los resultados de la co-simulación, así como las curvas tonelaje ley obtenidas mediante co-simulación. También se presentan las estadísticas básicas de las estimaciones hechas para cada caso, variable (ley de cobre, ley de arsénico) y panel.

<i>C.U Bivariable As (Co-Simulación)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	9	5720	472	400822
Panel 91	1000	11	16212	1229	2289930
Panel 119	1000	9	7482	633	661219
Panel 224	1000	16	18166	924	1716586
Panel 387	1000	5	33354	346	280682

Tabla 26: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Simulación)

<i>CU Bivariable Cu (Simulación)</i>					
	Cantidad	Mínimo	Máximo	Media	Varianza
Panel 4	1000	0.01	2.98	0.45	0.13
Panel 91	1000	0.03	7.30	0.78	0.40
Panel 119	1000	0.05	7.26	1.09	0.70
Panel 224	1000	0.08	9.54	1.58	1.40
Panel 387	1000	0.17	15.30	1.92	1.88

Tabla 27: Resultados C.U bivariable Cu (Co-Simulación)

5.2.2.1. Panel 4

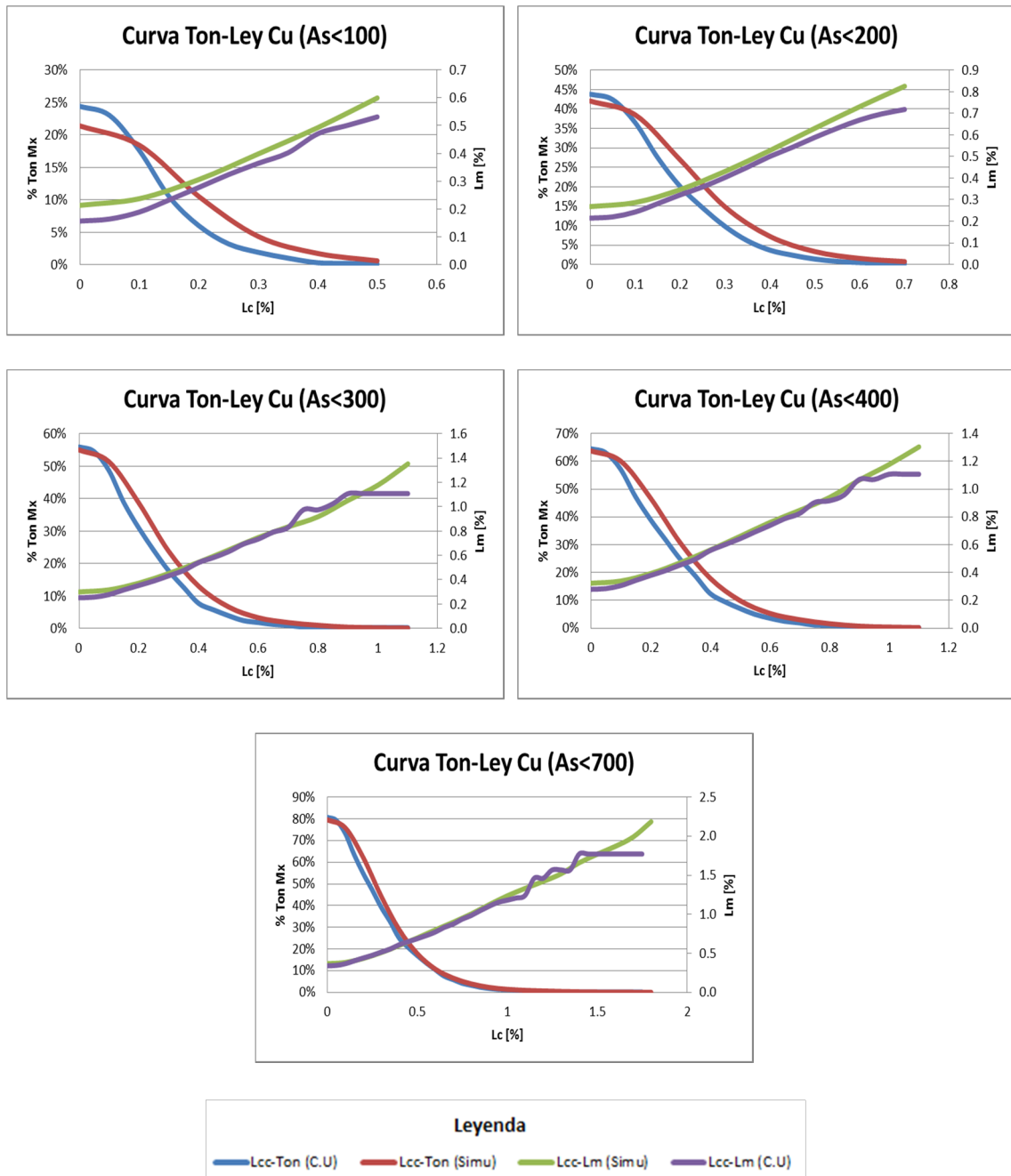


Figura 69: Curvas tonelaje-Ley Panel 4 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.

5.2.2.2. Panel 91

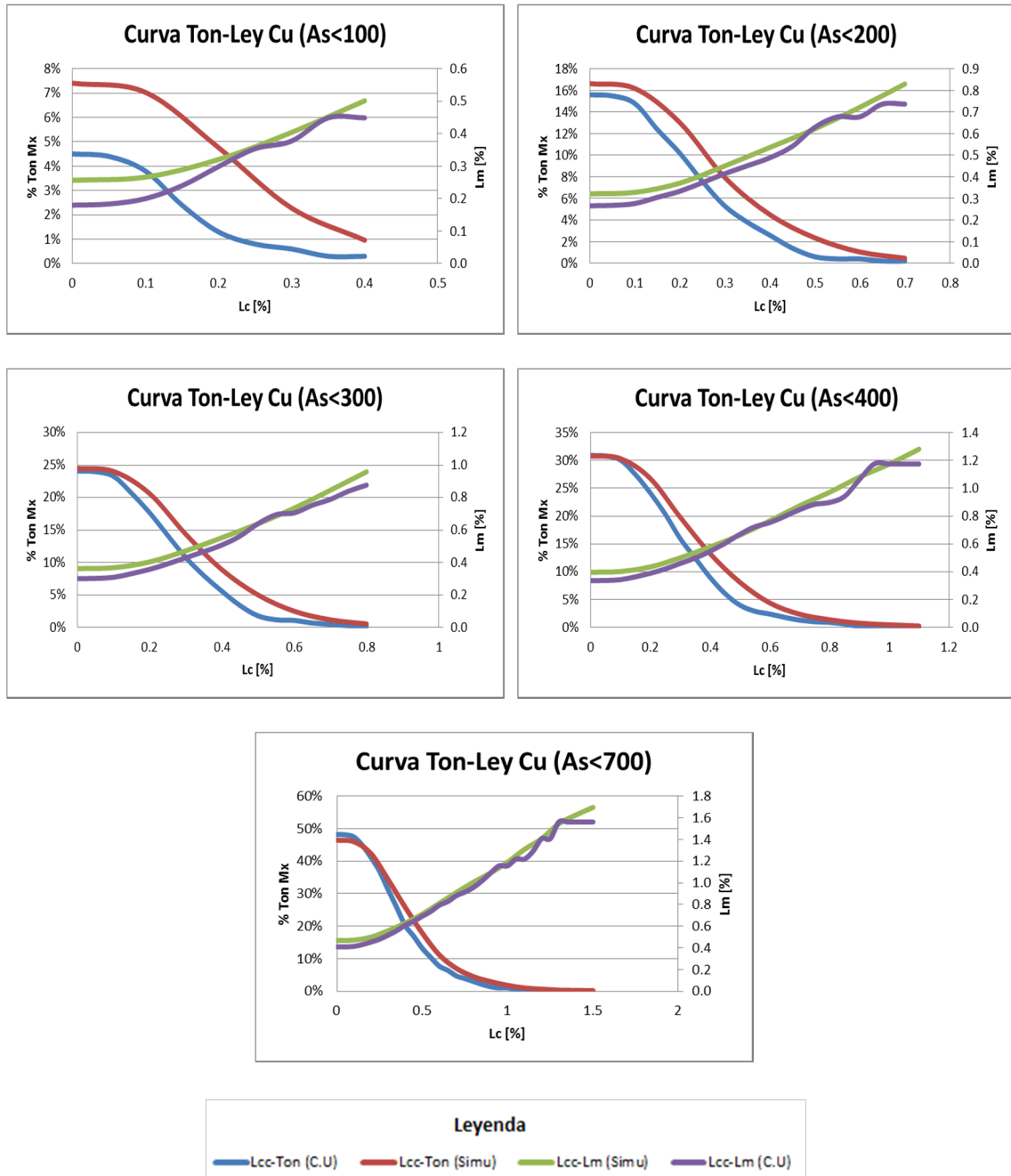


Figura 70: Curvas tonelaje-Ley Panel 91 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.

5.2.2.3. Panel 119

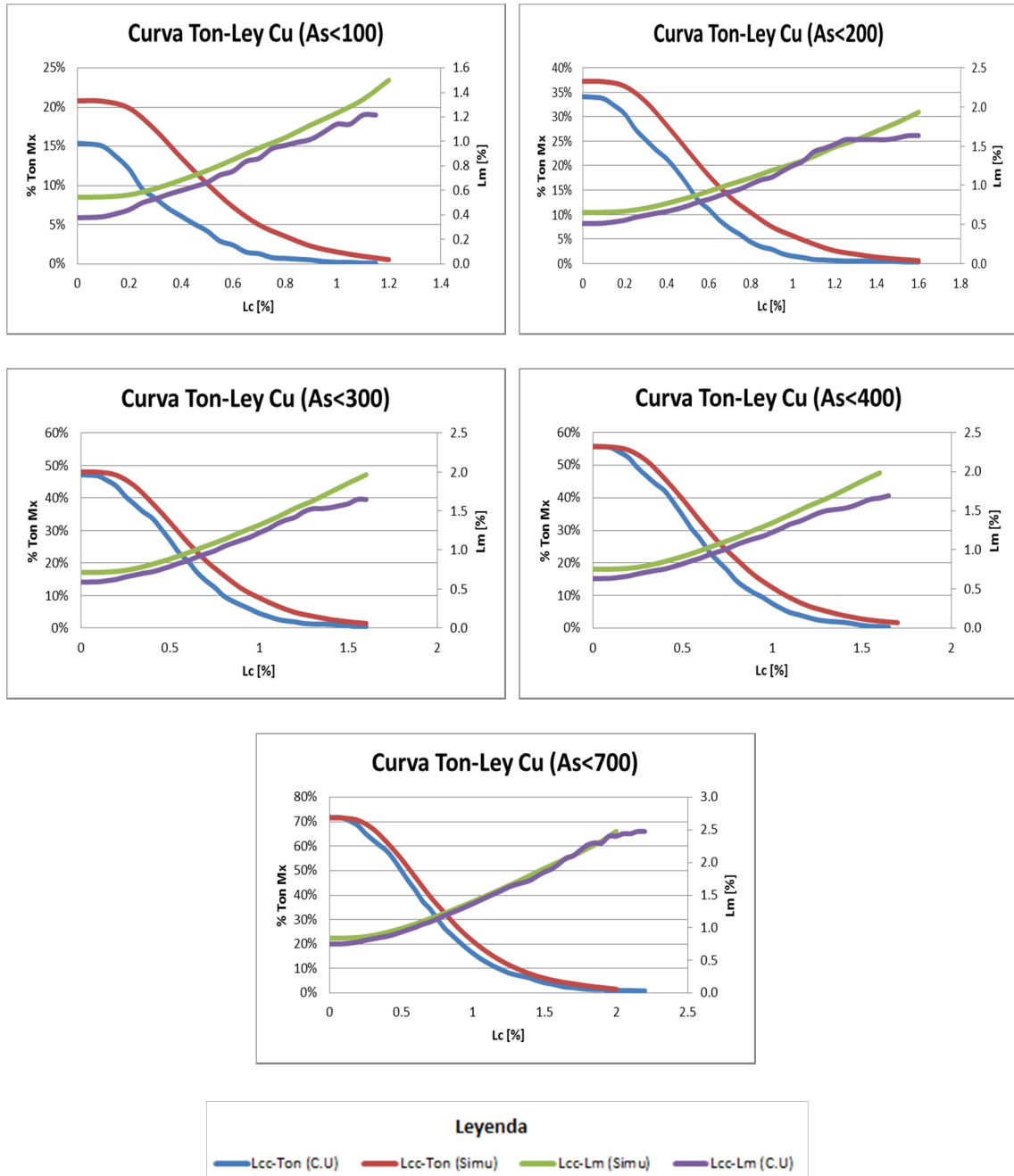


Figura 71: Curvas tonelaje-Ley Panel 119 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.

5.2.2.4. Panel 224

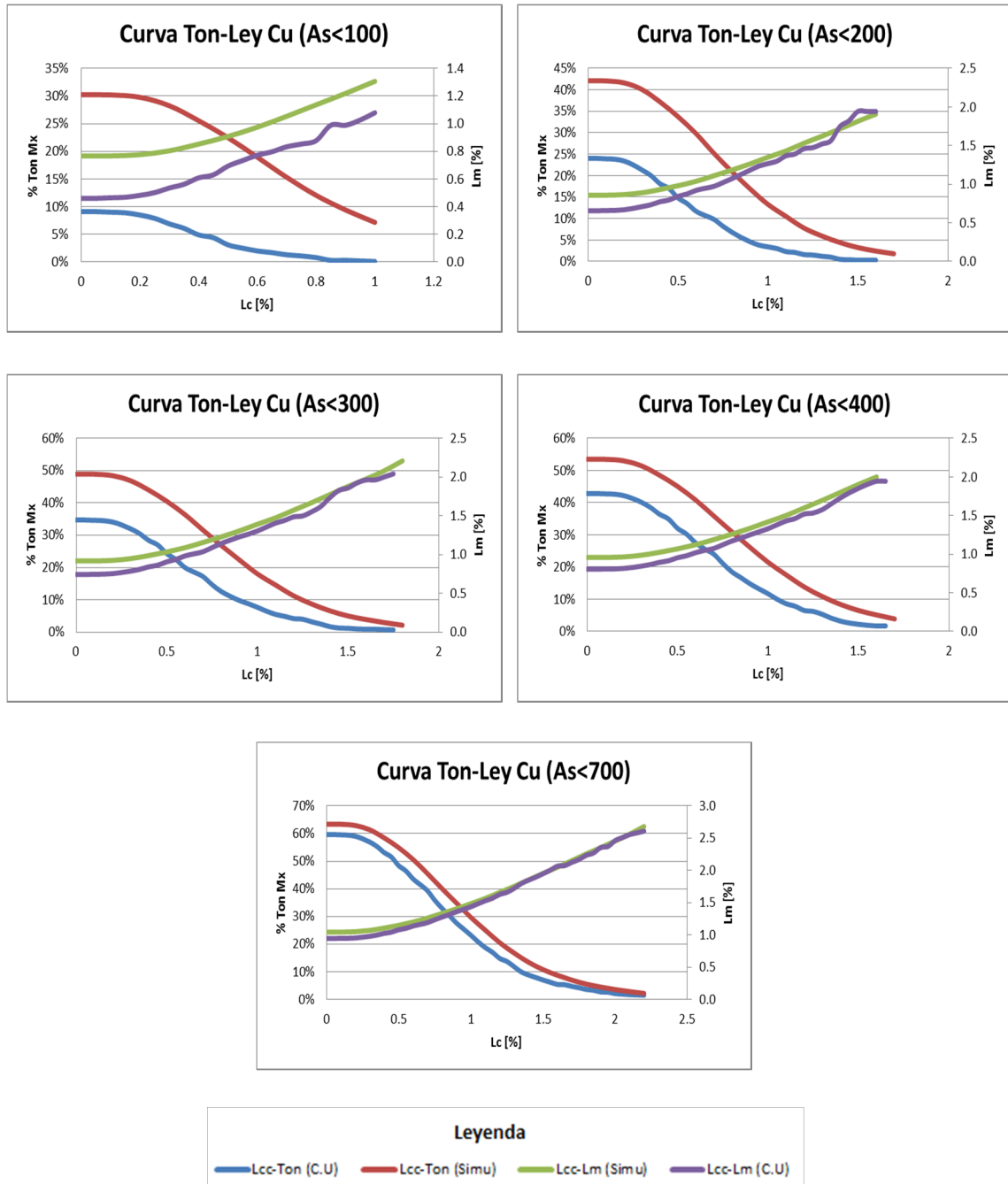


Figura 72: Curvas tonelaje-Ley Panel 224 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.

5.2.2.5. Panel 387

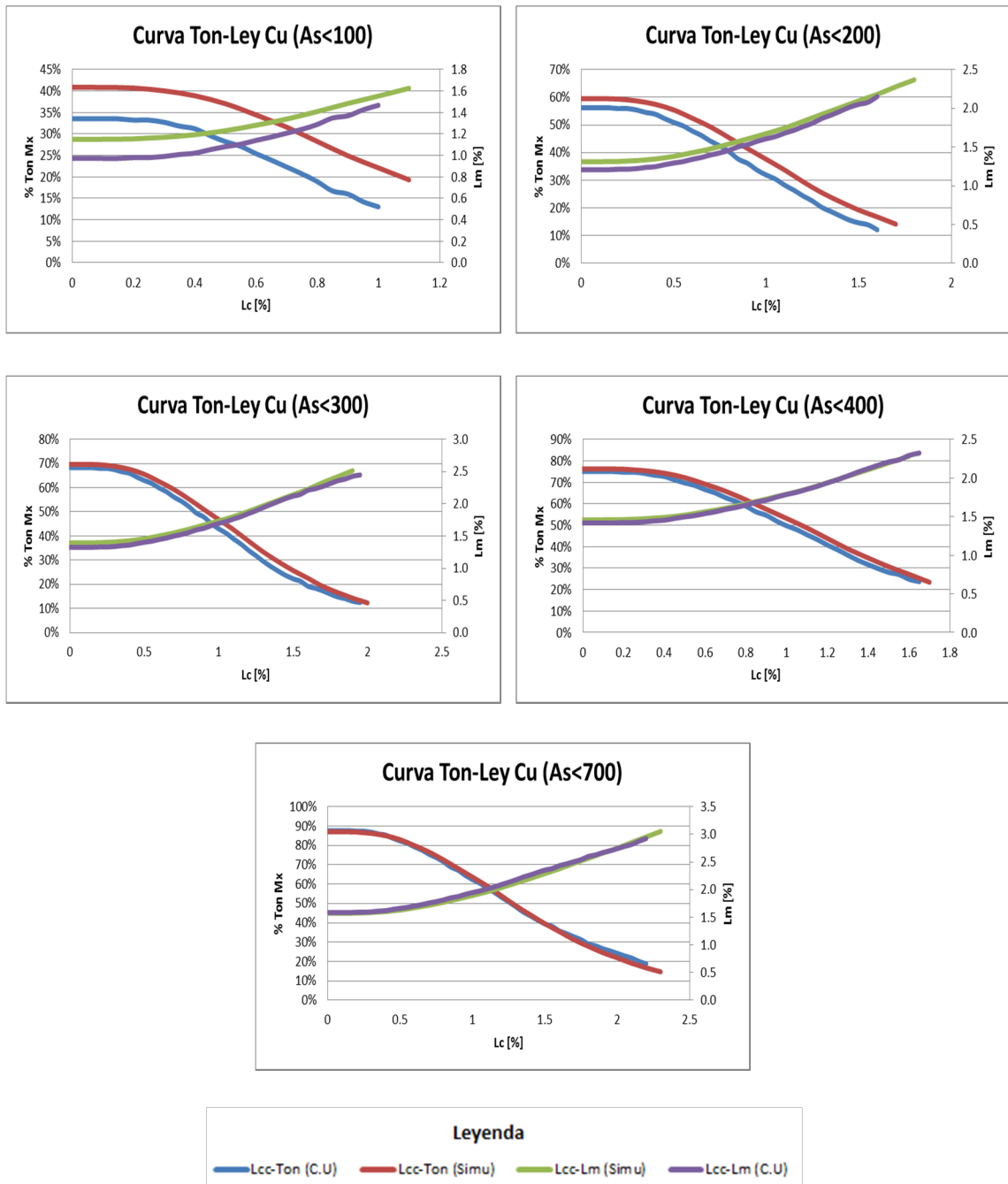


Figura 73: Curvas tonelaje-Ley Panel 387 bivariable, C.U basado en co-simulación v/s co-simulación.

5.3. Análisis de resultados

A partir de los resultados obtenidos de los cuatro casos donde se compara el condicionamiento uniforme y de la simulación, se pueden hacer varias observaciones tanto para los casos univariados y bivariados.

5.3.1. Análisis de resultados caso univariable

Del análisis de las curvas tonelaje-ley obtenidas para el caso univariable se observan discrepancias entre el condicionamiento uniforme basado en kriging y simulación que se explican por las diferencias en leyes estimadas de los paneles para cada una de las técnicas. En efecto, estas discrepancias se vuelven muy pequeñas al usar como ley del panel el promedio de las simulaciones, ya que así le estamos dando el mismo input a ambas técnicas. A partir de estos resultados poder desprender lo siguiente:

- Condicionamiento uniforme se ve como alternativa a la simulación puesto que ahorra tiempos de cálculo. Ya que mientras el condicionamiento uniforme tarda poco menos de quince segundos en hacer mil realizaciones, la simulación por bandas rotantes tarda alrededor de cuatro horas en hacer cien realizaciones.
- Condicionamiento uniforme debería aplicarse a paneles más grandes, para los cuales el kriging no difiere mucho de la media obtenida de las simulaciones.
- Condicionamiento uniforme puede aplicarse para etapas tempranas de estimación, cuando no es necesario tener el detalle bloque a bloque.

5.3.2. Análisis de resultados caso bivariable

Del análisis de las curvas tonelaje-ley obtenidas para el caso bivariable se observan claras discrepancias entre el condicionamiento uniforme en base a co-kriging y co-simulación. Sin embargo, estas discrepancias persisten aun cuando se utiliza la media de las cosimulaciones como estimación de las leyes de paneles. Esto significa que el condicionamiento uniforme bivariable no logra reproducir los resultados de la co-simulación, esto se explica por la manera diferente en que se modelan las dependencias entre cobre y arsénico. Dado que la co-simulación se basa en hipótesis menos restrictivas (en especial no usa el modelo Gaussiano discreto para el cambio de soporte), por lo que se recomienda esta técnica por sobre el condicionamiento uniforme para evaluar recursos.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los objetivos principales trazados al inicio del trabajo se cumplen al poder validar el condicionamiento uniforme univariable contra los resultados de la simulación condicional. Otro objetivo muy importante es el haber logrado extender, aplicar y tener resultados coherentes del condicionamiento uniforme bivariable, aunque no se ha podido validarlos al hacer la comparación con los resultados de co-simulación.

Del caso univariable se aprecian discrepancias entre las curvas tonelaje-ley del condicionamiento uniforme en base a kriging y las de simulación. Sin embargo, al utilizar como ley del panel el promedio de las simulaciones se logra un acoplamiento de las curvas de las dos técnicas utilizadas, validando de esta forma el condicionamiento uniforme univariable. También se aprecia que las curvas para cobre se ajustan mejor que las de arsénico cuando se toma como ley de panel el kriging ordinario. Esto se debe a que el kriging de paneles difiere más de la simulación para leyes de arsénico que para el cobre, ya que el rango de leyes que puede tomar el arsénico es mucho mayor al rango que tiene el cobre.

En cuanto a la extensión del condicionamiento uniforme al caso bivariable se aprecian claras discrepancias entre este método y la co-simulación. La diferencia entre las curvas se acentúa cuando la restricción a ley de arsénico es baja (baja respecto a la cantidad de arsénico presente en este yacimiento) o también si la ley de arsénico en el panel es alta. Pero a medida que se alivia la restricción a la concentración de arsénico se observa como paulatinamente la curva del condicionamiento uniforme se acerca a la curva obtenida de la simulación, hasta el punto de acoplarse en algunos paneles cuando la condición de arsénico es que sea menor a 700 ppm, valor que es casi un análisis univariable en algunos paneles de baja ley de arsénico.

Esta clara discrepancia entre el condicionamiento uniforme bivariable y la co-simulación, y la semejanza entre condicionamiento uniforme univariable y simulación, se podría explicar por una diferencia significativa entre las dos técnicas a la hora de modelar la correlación o dependencia entre las dos o más variables en estudio. Ya que la simulación se basa en hipótesis menos restrictivas, en particular no usa el modelo Gaussiano discreto para el cambio de soporte.

Se puede concluir que el condicionamiento uniforme funciona bien para el caso univariable, cuando la ley del panel está bien estimada. Para obtener una mejor estimación de la ley del panel por parte kriging ordinario, se puede elegir un soporte panel más grande. Por otro lado el condicionamiento uniforme bivariable no da resultados de ser una buena estimación para esta base de datos en particular, ya que sólo se logra asemejar a la simulación cuando la restricción sobre el arsénico es casi inexistente (tiende al caso

univariable). Ante lo anterior no se recomienda el uso del condicionamiento uniforme bivariante, ya que los resultados no son concluyentes ni satisfactorios. En cuanto al uso del condicionamiento uniforme univariable, funciona bien y es mucho más rápido que la simulación, por lo que sería recomendable su utilización para etapas tempranas de exploración y estimación cuando no existen muchos sondeos, y es una ilusión tener el detalle bloque a bloque que nos entrega una simulación. Por esta razón es recomendable el uso de este método cuando existen problemas de estacionariedad, ya que se renuncia a distinguir las estimaciones locales de un mismo panel.

Finalmente, en casos de estudio como el usado en el presente trabajo, donde la presencia de una variable es crítica a la hora de la evaluación económica del yacimiento (como en este caso lo es el arsénico, debido a que no es posible comercializar concentrado de cobre con más de 200 ppm de arsénico), es de vital importancia contar con un método o técnica de estimación bivariante que sea confiable. Y de esta forma poder conocer la cuantificación de la variable de interés económico y contaminante al mismo tiempo, variable crítica que podría ser determinante al momento de hacer la evaluación de dicho yacimiento.

7. REFERENCIAS

- [1] CHILES J. P. AND DELFINER P. (2012): *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*: Wiley, New York, p. 699.
- [2] DERAISME J, RIVOIRARD J, CARRASCO P (2008): Multivariate uniform conditioning and block simulations with discrete Gaussian model: application to Chuquicamata deposit. In: Ortiz J.M, Emery X. (eds.) Proceedings of the Eighth International Geostatistics Congress: Gecamin, Santiago, p. 69-78.
- [3] EMERY, X. (2010): *Apuntes del curso MI75D, Tópicos Avanzados en Evaluación de Yacimientos*, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería de Minas, Santiago.
- [4] GUIBAL D. AND REMACRE A. Z. (1984): *Local estimation of the recoverable reserves: comparing various methods with the reality on porphyry copper deposit*. In: Verly G., David M., Journel A. G. Maréchal A. (eds.), *Geostatistics for Natural Resources Characterization*: Ridell, Dordrecht, The Netherlands, pp. 435-448.
- [5] JOURNEL A. AND HUIJBREGTS C. J. (1978): *Mining Geostatistics: Academic Press*, London, p. 600.
- [6] REMACRE A. Z. (1989): *Uniform conditioning versus indicator kriging: a comparative study with the actual data*. In: Armstrong M. (ed.), *Geostatistics: Kluwer Academic*, Dordrecht, The Netherlands, Vol. 2, pp. 947-960.
- [7] RIVOIRARD J. (1994): *Introduction to disjunctive kriging and non linear Geostatistics*: Oxford University Press, Oxford, p. 181.
- [8] ROTH C. AND DERAISME J. (2001): *The information effect and estimating recoverable reserves*. In: Kleingeld W. J. and Krige D. G. (eds.), *Geostatistics 2000 Cape Town*.

8. ANEXOS

8.1. Anexo 1: Nubes de dispersión de datos contra las coordenadas

Se presenta la dispersión de las variables de la base de datos, en las distintas coordenadas:

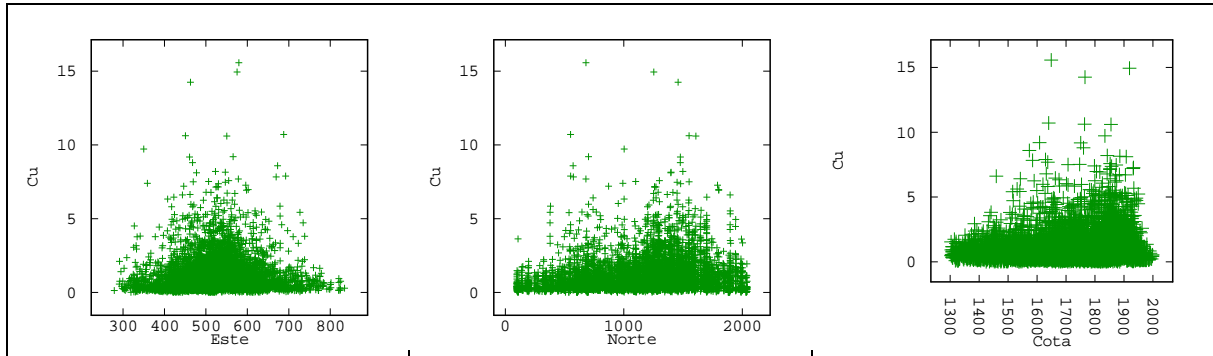


Figura 74: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Cu)

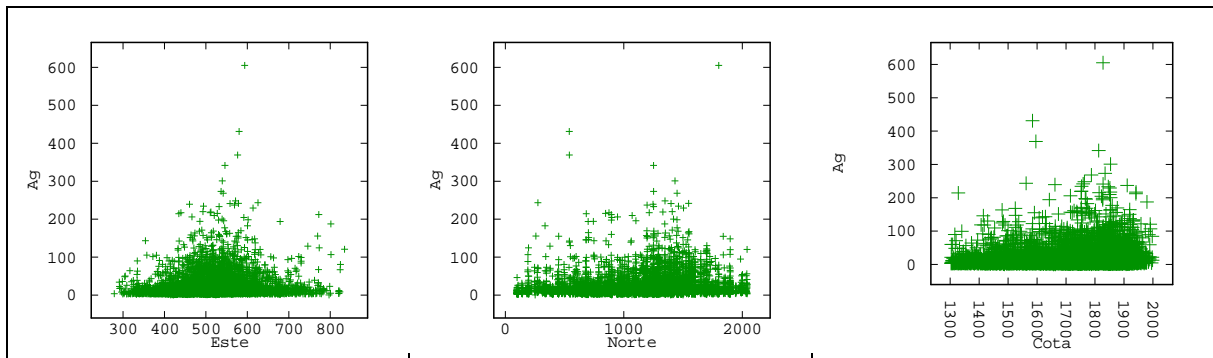


Figura 75: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Ag)

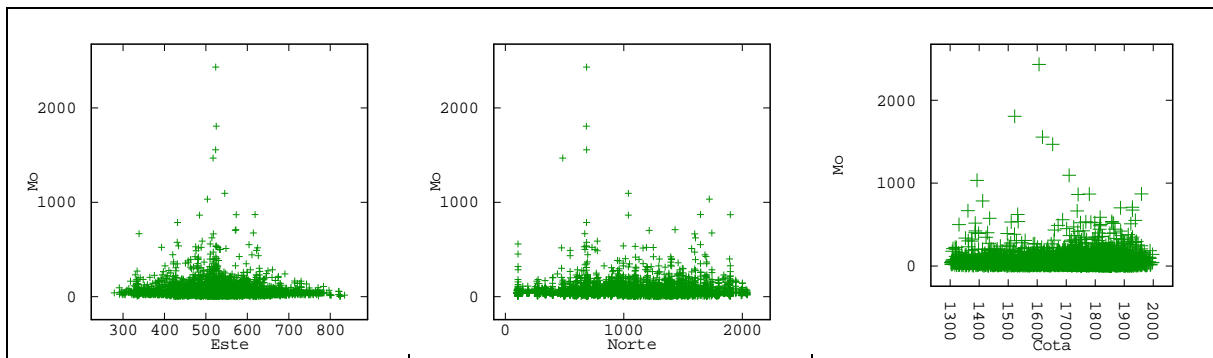


Figura 76: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Mo)

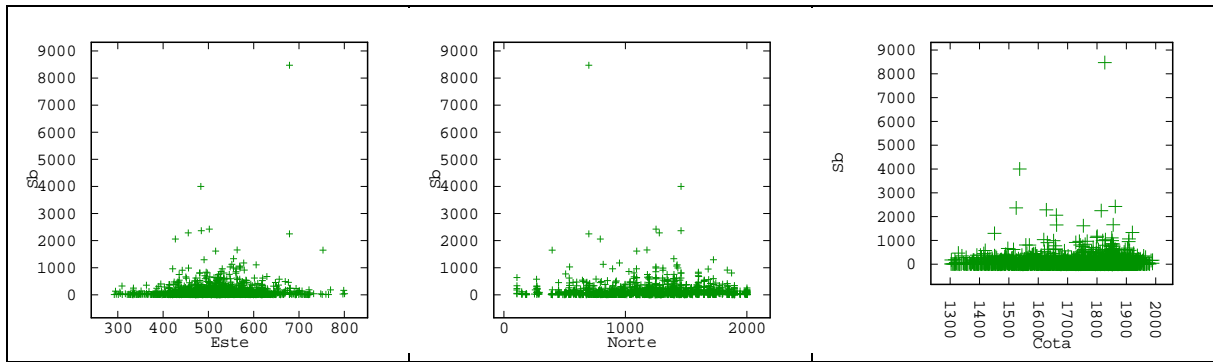


Figura 77: Gráficos de dispersión en las coordenadas (Sb)

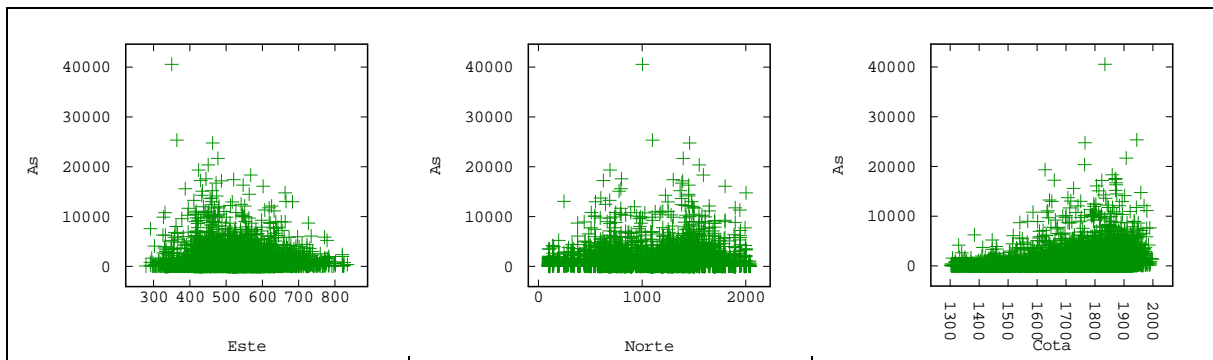


Figura 78: Gráficos de dispersión en las coordenadas (As)

8.2. Anexo 2: Variogramas de búsqueda de direcciones de anisotropía

A continuación se muestra un variograma hecho en varias direcciones, para complementar el análisis de los mapas variográficos:

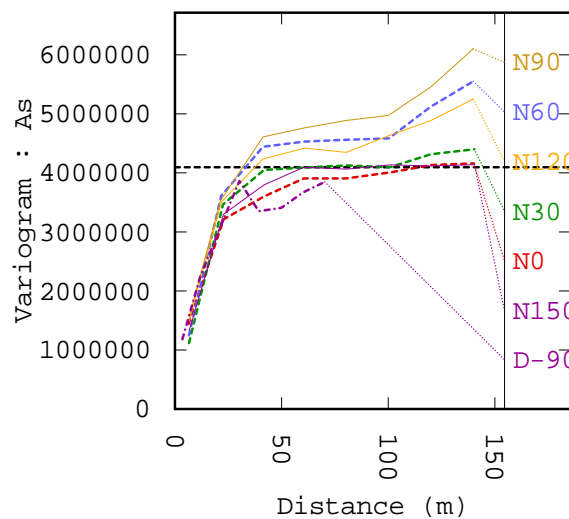


Figura 79: Variogramas experimentales arsénico

<i>Parámetro entrada Variograma As</i>		
Ancho de Banda	-	[m]
Alto de Banda	-	[m]
N° Direcciones	6	
Separación entre Direcciones	30	°
Tolerancia al Ángulo	15	°
Largo Paso	20	[m]
N° Pasos	8	
Tolerancia al Paso	0.5	N° Pasos

Tabla 28: Parámetros para variograma experimental As

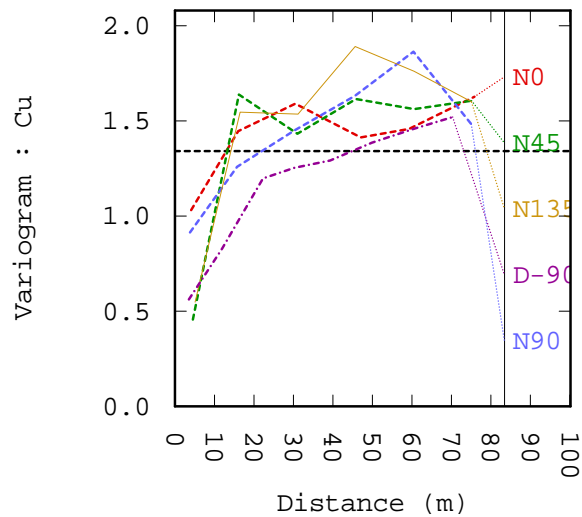


Figura 80: Variogramas experimentales cobre

<i>Parámetro entrada Variograma As</i>		
Ancho de Banda	-	[m]
Alto de Banda	-	[m]
N° Direcciones	4	
Separación entre Direcciones	45	°
Tolerancia al Ángulo	22	°
Largo Paso	15	[m]
N° Pasos	8	
Tolerancia al Paso	0.5	N° Pasos

Tabla 29: Parámetros para variograma experimental Cu

De los variogramas el análisis de los mapas variográficos, se determina finalmente que las direcciones de anisotropía elegida son: N0, N90 y D-90.

8.3. Anexo 3: Variogramas experimentales As, Ag y Cu

De este variograma modelado, se logra apreciar que la ley de plata (Ag) no presenta una continuidad clara en el espacio, por lo que se descarta para el estudio.

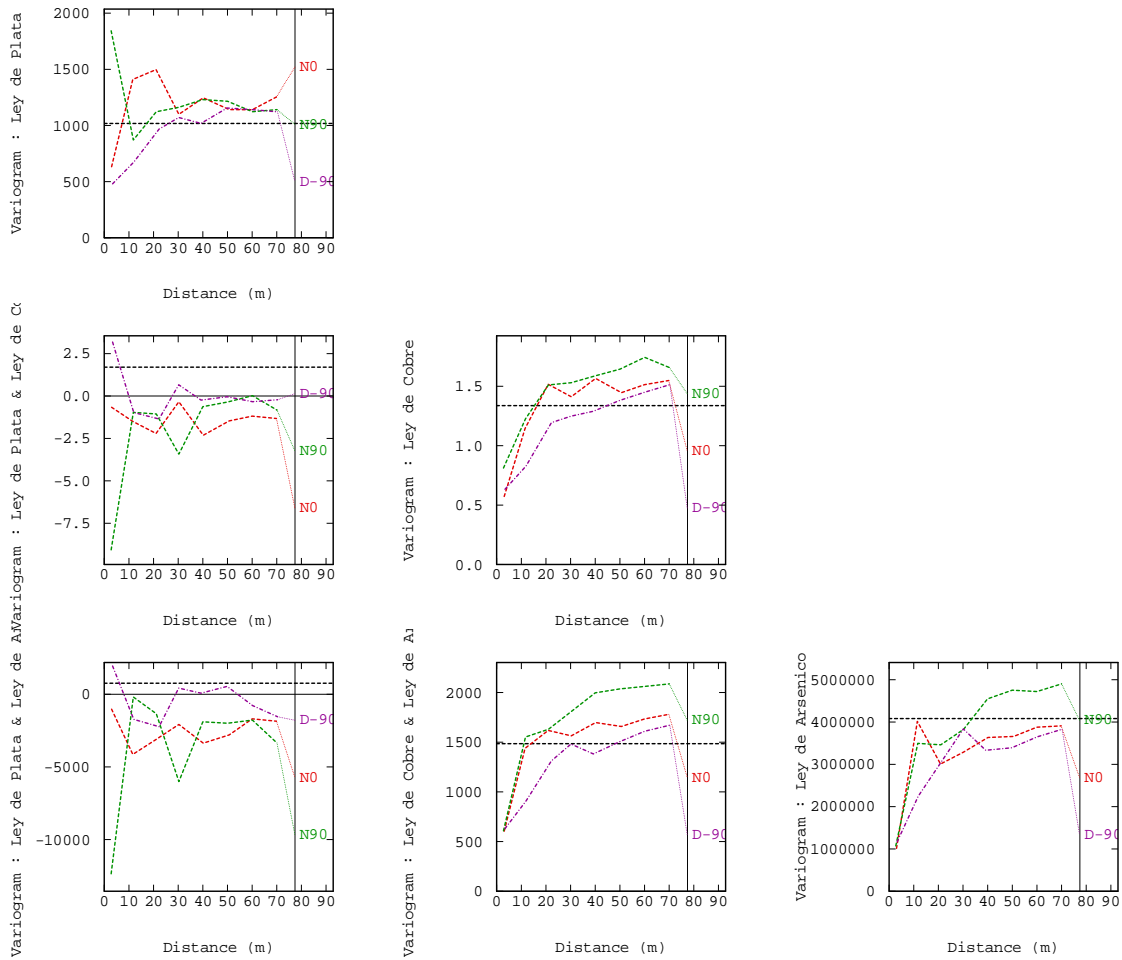


Figura 81: Variogramas experimentales As, Ag, Cu

8.4. Anexo 4: resultados de kriging y co-kriging de paneles

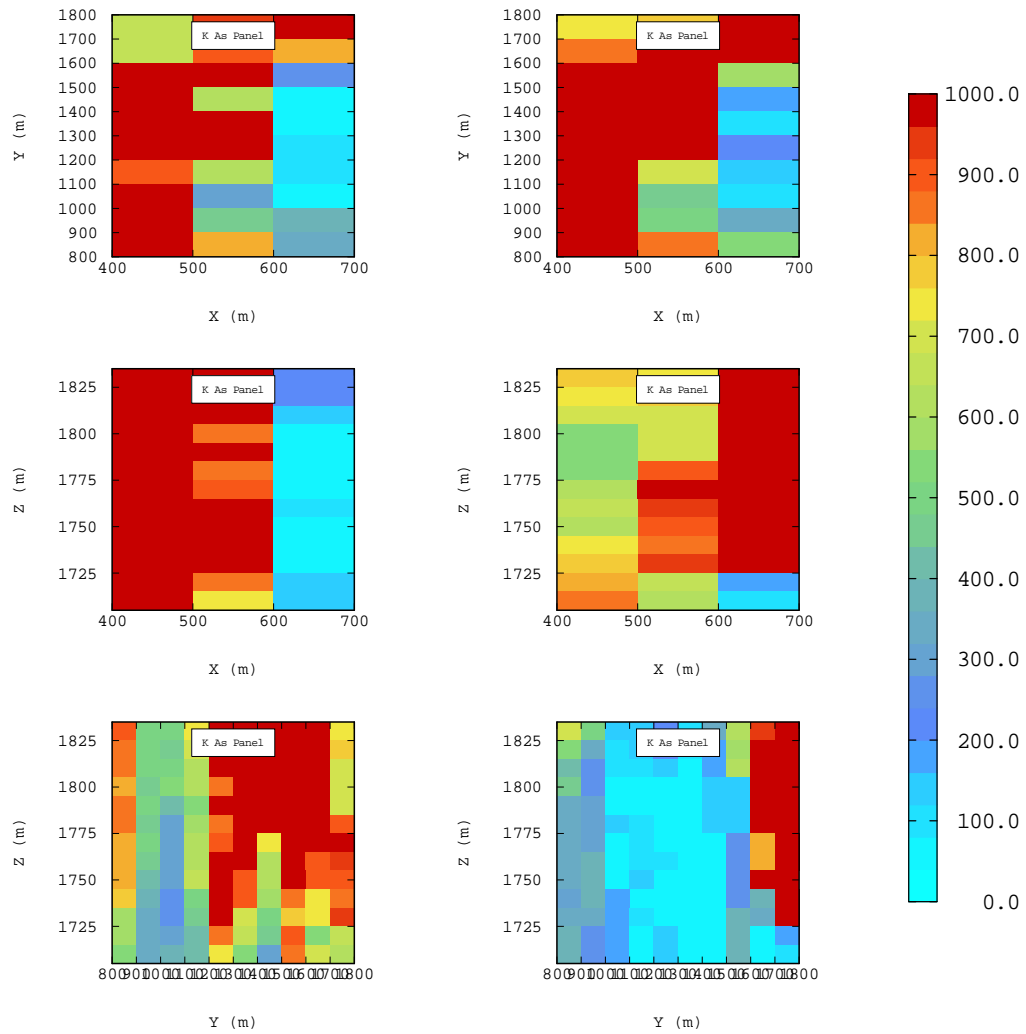


Figura 82: Resultado Kriging As paneles

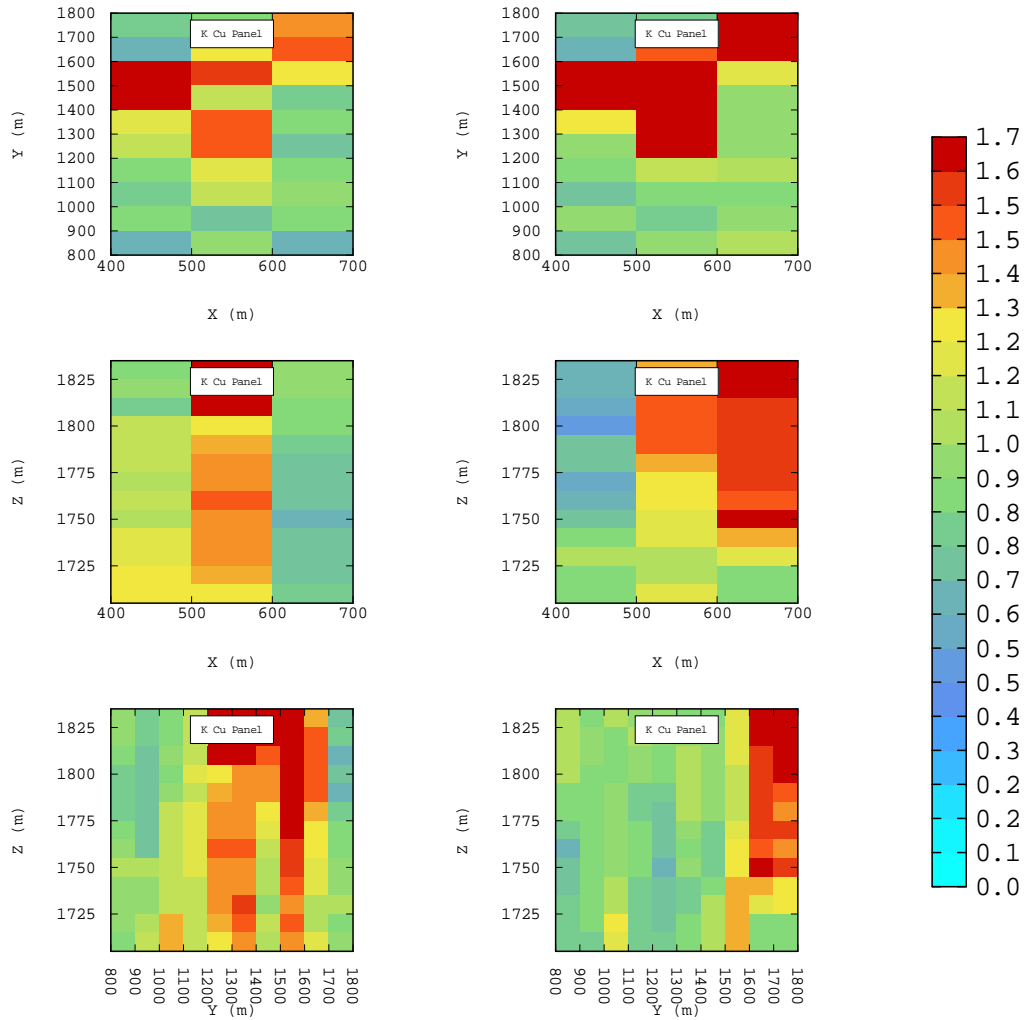


Figura 83: Resultado Kriging Cu paneles

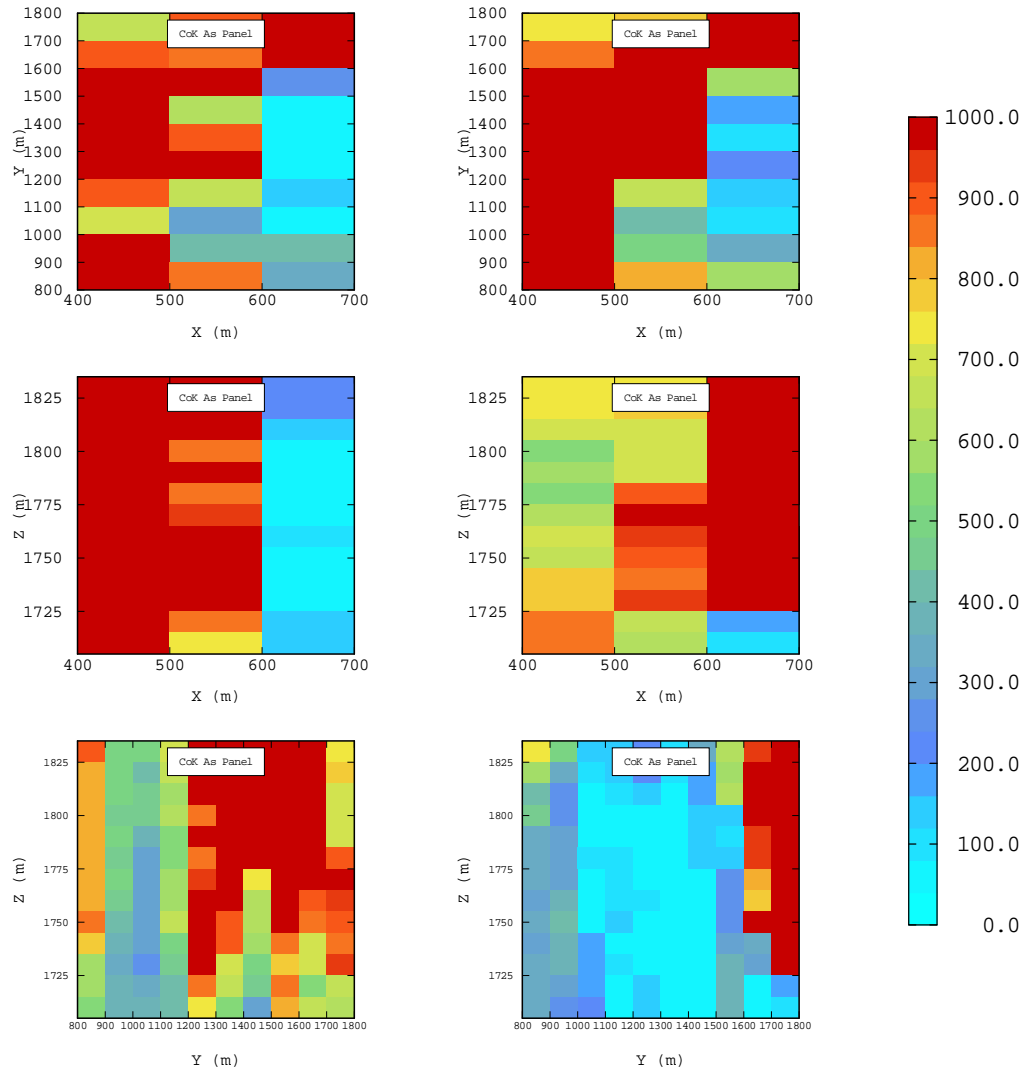


Figura84: Resultado Co-Kriging As paneles

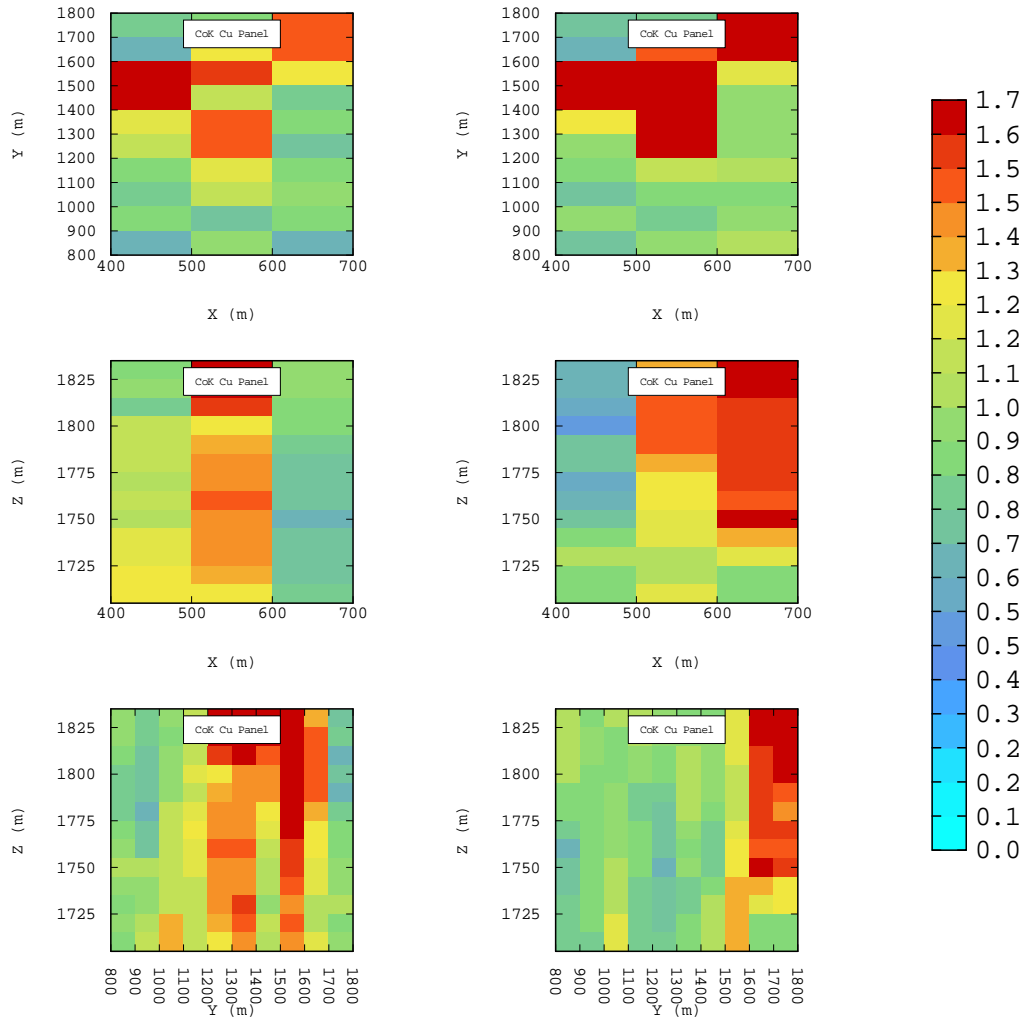


Figura 85: Resultado Co-Kriging Cu paneles

8.5. Anexo 5: Validación cruzada kriging y co-kriging

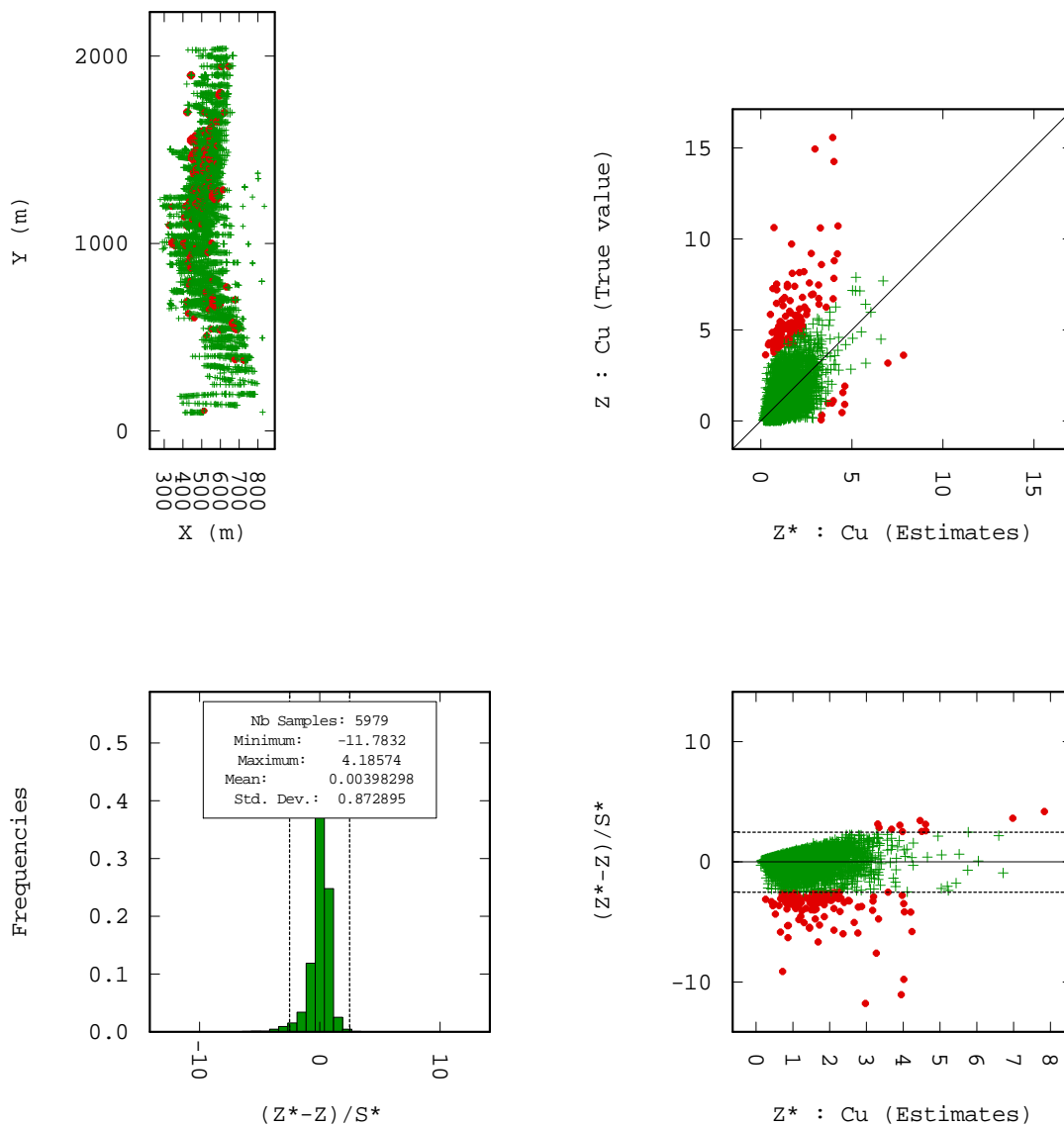


Figura 86: Validación cruzada kriging

De los gráficos se aprecia que la estimación es satisfactoria:

- Mapa de ubicación de datos: los datos mal estimados no se concentran en una zona preferencial.
- Histograma de errores estandarizados es poco disperso y centrado en cero.
- La nube de correlación entre los datos estimados y los reales, es poco dispersa con respecto a la diagonal y con pendiente de 0.97.
- La nube de correlación entre error estandarizados es poco dispersa con respecto a la horizontal y la pendiente es cercana 0.

8.6. Anexo 6: Verificación de hipótesis de bigaussianidad

A continuación se procede a verificar la bigaussianidad de los datos Gaussianos de la zona de estudio. En este caso se entrega la verificación para el par de variables Gaussianas arsénico y cobre.

- Verificamos la dispersión elíptica de las variables Gaussianas.

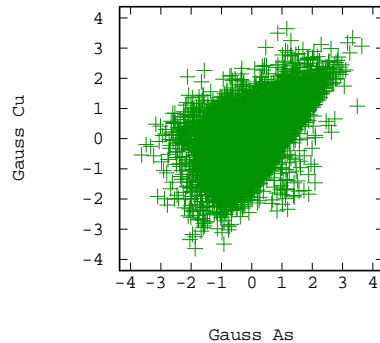


Figura 87: Nube de correlación variables Gaussianas

- Verificación de comportamiento Gaussiano: se verifica que los histogramas se asemejen a una campana simétrica.

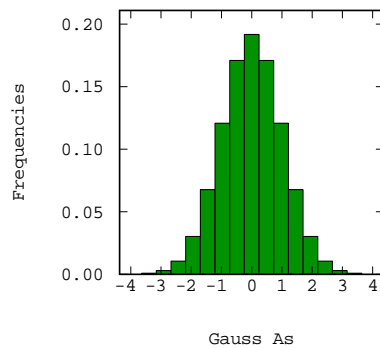


Figura 88: Histograma Gaussiano As

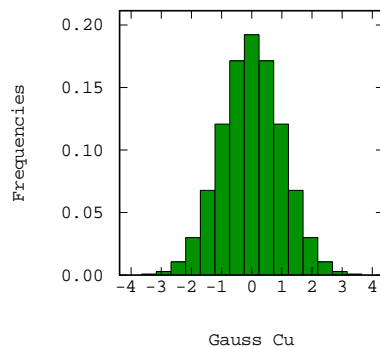


Figura 89: Histograma Gaussiano Cu

- Nubes de dispersión diferidas de las Gaussianas de arsénico y cobre: se verifica que las nubes de correlación a pequeña distancia se asemejan a elipses y a larga distancia se asemejan a círculos.

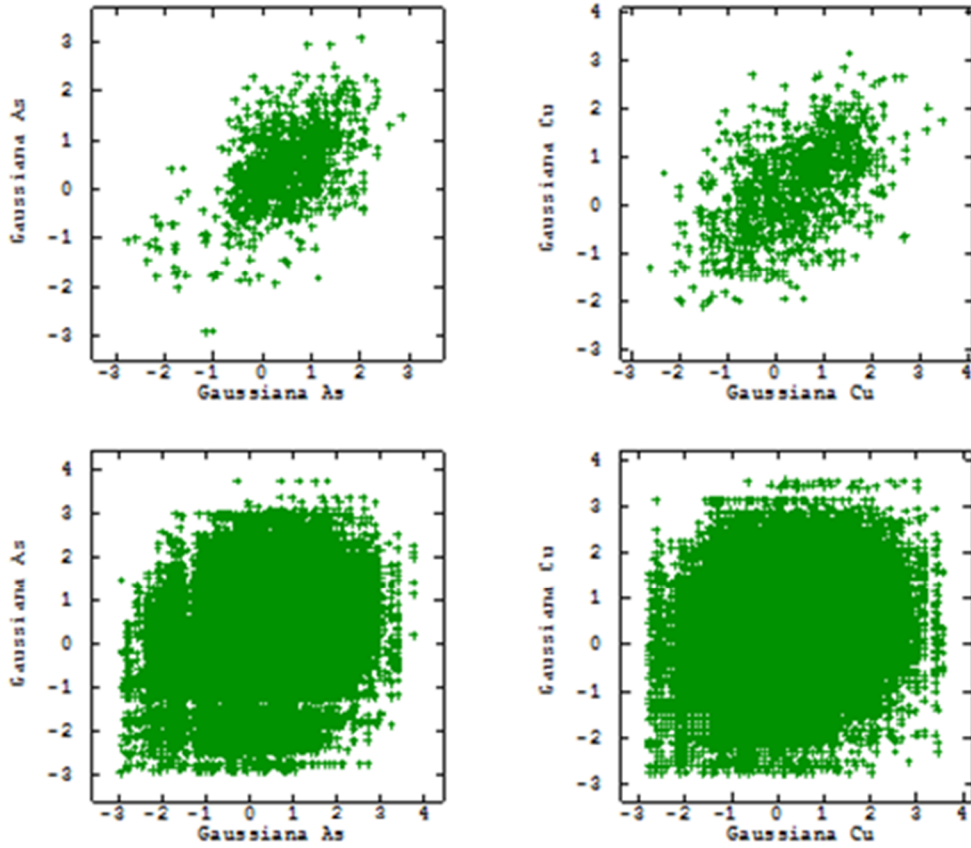


Figura 90: Nubes de dispersión diferidas para pequeñas y grandes distancias