

**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**MODELOS BIVARIABLES DE CAMBIO DE SOPORTE**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS**

**JOSÉ ROBERTO LEÓN ORTIZ**

**PROFESOR GUÍA:  
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN  
JULIÁN ORTIZ CABRERA  
MANUEL REYES JARA**

**SANTIAGO DE CHILE  
NOVIEMBRE 2012**

## RESUMEN

El cambio de soporte es esencial para la estimación de recursos recuperables, diseño y planificación minera, dado que la cantidad de recursos recuperables depende del tamaño de las unidades selectivas de explotación con las que se trabaja.

Uno de los modelos de cambio de soporte global más utilizados es el Gaussiano discreto, el cual suele entregar buenas estimaciones en yacimientos donde se tienen distribuciones de leyes no muy asimétricas y sin una gran proporción de valores nulos o cercanos a cero (efecto cero).

Las dos excepciones presentadas en el párrafo anterior son tratadas en este trabajo, buscando, mediante un modelo gamma discreto, entregar una alternativa que permita desarrollar una familia más amplia de distribuciones, al introducir un parámetro adicional que controla la forma de dichas distribuciones. Asimismo, se diseña y aplica un modelo bivariable, de manera de modelar también la dependencia entre dos variables de interés.

La metodología, tanto para un modelamiento univariable como bivariable, es aplicada en dos bases de datos: una de leyes de oro y plata que presenta un efecto cero, al tener una gran cantidad de valores nulos o casi nulos, otra que corresponde a leyes de nitrato y yodo con distribuciones fuertemente asimétricas. Para validar dicha metodología, las estimaciones son realizadas sobre soportes múltiples del soporte de los datos originales y comparadas con las distribuciones reales calculadas sobre los datos compositados.

En el primer caso (leyes de oro y plata), los resultados obtenidos indican que el modelo gamma uni- y bivariable entrega una buena estimación para compósitos de tamaños medianos a grandes (2 o más metros). Además, el modelo muestra robustez, obteniéndose resultados similares para diferentes valores del parámetro de forma. Finalmente, el modelo Gaussiano discreto entrega resultados menos certeros que el modelo gamma en todos los casos analizados.

En el segundo caso (leyes de nitrato y yodo), se tiene que el modelo gamma univariable presenta una casi nula dependencia del factor de forma, pero no así el un modelo bivariable, pues se aprecian pequeñas diferencias en las distribuciones conjuntas modeladas al cambiar los factores de forma, sobre todo para leyes de corte mas bajas, las que pueden ser consideradas despreciables y llevan a concluir que en este caso, el modelo gamma resulta ser robusto y efectivo en el cambio de soporte global.

## ABSTRACT

Change of support is essential for estimation of recoverable resources, design and mine planning, since the amount of resources depends on the size of the selective mining units.

One of the most used change of support model is the discrete Gaussian, which gives very good estimates in deposits where the distributions aren't very asymmetric and without a large proportion of null values or close to zero (zero effect).

The two exceptions presented in the preceding paragraph are discussed in this paper, looking through the Gamma model provide an alternative for developing the full range of distributions. It also designs and implements a bivariate model, modeling also the relationship between the variables of interest.

The methodology is applied to two databases: one with gold and silver grades representing the zero effect, having a large number of null values or close to zero. The other database corresponds a nitrate and iodine grades, which represent the case were the data distributions have a strong asymmetry.

In the first case (gold and silver grades), the results obtained indicates the uni and bivariate gamma model gives a good estimation for medium and large composites (2 or more meters). Furthermore, the model shows robustness with similar results for different values of the shape parameter. Finally, the discrete Gaussian model delivers less accurate results than the gamma model in all analyzed cases.

In the second case (nitrate and iodine grade), finds that the gamma univariate model presents a independence of the form factor, but not the bivariate model, because there are differences in the joint distributions modeled by changing the factors form, especially in the low cut grades, but that difference is negligible, so is possible to conclude that the gamma model shows robustness and effectiveness in the global change of support.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quisiera agradecer a mi familia por el apoyo de todos estos años, los valores entregados, la educación y el apoyo a pesar de la distancia. Y a mí polola Carolina, que ha sido un gran apoyo durante la realización de mi trabajo de título y un gran apoyo emocional en este periodo.

A mis tíos que me ofrecieron su apoyo durante toda mi carrera, en especial en mis primeros años en Santiago. Hicieron que la transición Antofagasta-Santiago casi ni la sintiera.

A los amigos de toda la vida, con los que a pesar de la distancia y/o distintos rumbos en la vida, jamás hemos perdido contacto. En especial agradezco a Carlos, que a pesar de la distancia, hablamos siempre y nunca ha dejado que el contacto se pierda. A Jorge, que en los años que vivimos juntos, con problemas y alegrías maduro la amistad en lugar de marchitarse.

A los amigos de la universidad, estos años que compartimos han sido de los mejores, han hecho que los años en Beauchef fuesen entretenidos y dieran ganas de ir a la universidad, incluso cuando no habían ganas. A la gente que he conocido en Santiago: mis compañeros de biotecnología, los integrantes de “la familia”, etc.

A los profesores de la comisión, en especial al profesor Emery por tener siempre una buena disposición a responder dudas, por más obvias que éstas fueran.

A Juanita, Luchito y Carlitos, sin ellos difícilmente lograríamos egresar. Su preocupación y dedicación hacen que el Departamento de Minas ande como reloj.

A Corfo por el proyecto Innova-Corfo 09CN14-5838 y a Conicyt por el proyecto Fondecyt 1090013, con los se financió este trabajo de memoria.

A todos ustedes muchas gracias.

## ÍNDICE

RESUMEN .....	i
ABSTRACT .....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
ÍNDICE .....	iv
ÍNDICE DE FIGURAS .....	vi
ÍNDICE DE ECUACIONES .....	xi
1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1. Motivación del trabajo .....	1
1.2. Objetivos .....	2
1.2.1. Objetivo General .....	2
1.2.2. Objetivos Específicos .....	2
1.3. Alcances .....	2
2. ANTECEDENTES .....	3
2.1. Antecedentes generales .....	3
2.1.1. Estudio exploratorio de datos .....	4
2.1.2. Noción de soporte .....	5
2.1.3. Aditividad .....	6
2.1.4. Simulaciones .....	6
2.2. Modelos de cambio de soporte .....	7
2.2.1. Modelo Gaussiano discreto para estimación global .....	7
2.2.2. Modelo Gaussiano discreto para la estimación local .....	10
2.2.3. Modelo Gamma para estimación global .....	11
3. METODOLOGÍA .....	14
3.1. Análisis exploratorio .....	14
3.2. Composición de datos .....	14
3.3. Modelamiento univariable .....	15
3.3.1. Determinación del parámetro de forma óptimo .....	15
3.4. Modelamiento bivariable .....	15
3.5. Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación .....	15
4. CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE ORO-PLATA .....	16
4.1. Estudio exploratorio .....	16
4.2. Composición de los datos .....	18
4.3. Modelamiento Gamma Univariable .....	20
4.3.1. Modelamiento para oro .....	20
4.3.2. Modelamiento Gamma para plata .....	24
4.4. Modelo bivariable para oro - plata .....	27
4.5. Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación .....	36
5. CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE NITRATO-YODO .....	41
5.1. Estudio exploratorio .....	41

5.2.	Composición de los datos .....	42
5.3.	Modelamiento Gamma Univariable.....	44
5.3.1.	Modelamiento para Nitrato.....	44
5.3.2.	Modelamiento para Yodo .....	45
5.4.	Modelo bivariable para Nitrato – Yodo.....	47
5.5.	Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación .....	54
6.	CONCLUSIONES .....	59
	REFERENCIAS .....	60
	ANEXO A .....	61
1.	Análisis exploratorio Oro - plata.....	61
2.	Q-Q Plot Oro y plata .....	63
3.	Curvas tonelaje – ley para caso bivariable .....	75
	ANEXO B .....	78
1.	Análisis exploratorio .....	78
2.	Q-Q Plot Nitrato - Yodo.....	80
3.	Curvas Mineral - Tonelaje.....	92
4.	Curvas Tonelaje – Ley para caso bivariable .....	96

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Herramientas de análisis exploratorio (q-q plot, histograma y nube de correlación) .....	5
Figura 2: Esquema explicativo de hipótesis de modelo de cambio de soporte en particular, Gaussiano discreto .....	8
Figura 3: Determinación del coeficiente de cambio de soporte .....	10
Figura 4: Esquema explicativo del modelo gamma (caso univariable).....	12
Figura 5: Esquema explicativo del modelo gamma (caso bivariable).....	13
Figura 6: Metodología general para determinación modelo Gamma de cambio de soporte bivariable .....	14
Figura 7: Histograma de leyes de oro y plata .....	16
Figura 8: Histograma de leyes de oro y plata para vetas .....	17
Figura 9: Histograma Ley de Oro para los distintos compósitos. ....	19
Figura 10: Histograma Ley de Plata para los distintos compósitos.....	19
Figura 11: Histograma de leyes de oro y plata corregidas .....	20
Figura 12: Curvas Ley media – Ley de corte para oro, compósitos 1 [m] .....	21
Figura 13: Curvas Ley media – Ley de corte para oro, compósitos 2 [m] .....	22
Figura 14: Curvas Ley media – Ley de corte para oro, compósitos 4 [m] .....	22
Figura 15: Curvas Ley media – Ley de corte para plata, compósitos 1 [m].....	24
Figura 16: Curvas Ley media – Ley de corte para plata, compósitos 2 [m].....	25
Figura 17: Curvas Ley media – Ley de corte para plata, compósitos 4 [m].....	25
Figura 18: Nubes de correlación oro – plata tamaño de bloque 1 [m] .....	27
Figura 19: Nubes de correlación oro – plata tamaño de bloque 2 [m] .....	28
Figura 20: Nubes de correlación oro –plata tamaño de bloque 4 [m] .....	29
Figura 21: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 1 [m] .....	30
Figura 22: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 2 [m] .....	31
Figura 23: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 4 [m] .....	31
Figura 24: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 1 [m] .....	32
Figura 25: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 2 [m] .....	32
Figura 26: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 4 [m] .....	33
Figura 27: Curvas Metal tonelaje para oro, compósitos de 1, 2 y 4 [m] .....	34
Figura 28: Curvas Metal tonelaje para Plata, compósitos de 1, 2 y 4 [m].....	35
Figura 29: Variogramas modelados para oro y plata.....	36
Figura 30: Curva tonelaje ley para el oro .....	37
Figura 31: Curva tonelaje ley para la plata.....	38
Figura 32: Curva tonelaje ley para oro equivalente.....	39

Figura 33: Histograma leyes de nitrato y yodo .....	41
Figura 34: Histograma Ley de nitrato para los distintos compósitos. ....	43
Figura 35: Histograma Ley de yodo para los distintos compósitos.....	43
Figura 36: Histograma leyes de nitrato y yodo corregidas .....	44
Figura 37: Nubes de correlación Nitrato - yodo tamaño de bloque 1 [m].....	47
Figura 38: Nubes de correlación Nitrato - yodo tamaño de bloque 2 [m].....	48
Figura 39: Nubes de correlación Nitrato - yodo tamaño de bloque 4 [m].....	49
Figura 40: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 6%. tamaño de bloque 1[m] .....	50
Figura 41: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 6%. tamaño de bloque 2[m] .....	50
Figura 42: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 6%. tamaño de bloque 4[m] .....	51
Figura 43: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 8%. tamaño de bloque 1[m] .....	51
Figura 44: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 8%. tamaño de bloque 2[m] .....	52
Figura 45: Gráfico tonelaje – ley para yodo, condicional a nitrato > 8%. tamaño de bloque 4[m] .....	52
Figura 46: Variogramas modelados para Nitrato y yodo .....	54
Figura 47: Curva tonelaje ley para yodo condicionado a Nitrato < 6[%].....	55
Figura 48: Curva tonelaje ley para yodo .....	56
Figura 49: Curva tonelaje ley para Nitrato .....	57
Figura 50: Mapa de ley de oro en función de la cota .....	61
Figura 51: Mapa de ley de plata en función de la cota.....	62
Figura 52: Mapa de correlación oro – plata.....	62
Figura 53: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	63
Figura 54: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	64
Figura 55: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	65
figura 56: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	66
Figura 57: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	67
figura 58: Q-Q plot entre datos de oro compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	68
Figura 59: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	69

Figura 60: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	70
Figura 61: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	71
Figura 62: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	72
Figura 63: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	73
Figura 64: Q-Q plot entre datos de Plata compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	74
Figura 65: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 1 [m] .....	75
Figura 66: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 2 [m] .....	75
Figura 67: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de aproximación económica, compósitos de 4 [m] .....	76
Figura 68: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 1 [m] .....	76
Figura 69: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 2 [m] .....	77
Figura 70: Curva tonelaje ley para ley de oro equivalente con factor de prueba, compósitos de 4 [m] .....	77
Figura 71: Mapa de ley de Nitrato en función de la cota .....	78
Figura 66: Mapa de ley de Yodo en función de la cota.....	78
Figura 67: Mapa de correlación Nitrato – Yodo.....	79
Figura 68: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	80
Figura 69: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	81
Figura 70: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	82
Figura 71: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	83
Figura 72: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	84
Figura 73: Q-Q plot entre datos de Nitrato compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	85
Figura 74: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	86
Figura 75: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 1 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto.....	87

Figura 76: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	88
Figura 77: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 2 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto .....	89
Figura 78: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 0.1 a 1 .....	90
Figura 79: Q-Q plot entre datos de Yodo compositados a 4 [m] y datos modelados con factor de forma de 1.5 a 10 y el modelo Gaussiano discreto .....	91
Figura 80: Curva mineral - tonelaje para ley de nitrato. Compósitos de 1 [m] .....	92
Figura 81: Curva mineral - tonelaje para ley de nitrato. Compósitos de 2 [m] .....	93
Figura 82: Curva mineral - tonelaje para ley de nitrato. Compósitos de 4 [m] .....	93
Figura 83: Curva mineral - tonelaje para ley de Yodo. Compósitos de 1 [m] .....	94
Figura 84: Curva mineral - tonelaje para ley de Yodo. Compósitos de 2 [m] .....	94
Figura 85: Curva mineral - tonelaje para ley de Yodo. Compósitos de 4 [m] .....	95

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estadísticas básicas de leyes de oro y plata.....	16
Tabla 2: Estadísticas básicas de leyes de oro y plata para vetas.....	17
Tabla 3: Estadísticas básicas compósitos 1 [m] .....	18
Tabla 4: Estadísticas básicas compósitos 2 [m] .....	18
Tabla 5: Estadísticas básicas compósitos 4 [m] .....	18
Tabla 6: Estadísticas básicas de oro y plata corregidas .....	20
Tabla 7: suma de los cuadrados de las diferencias de cada cuantil modelado vs cuantil compósitos reales de oro.....	21
Tabla 8: Suma de los cuadrados de las diferencias de cada cuantil modelado vs cuantil compósitos reales de plata .....	24
Tabla 9: Modelos a utilizar en estudio bivariable.....	26
Tabla 10: Matriz covarianza para oro plata .....	36
Tabla 11: Ley media y proporción del tonelaje total para el oro.....	37
Tabla 12: Ley media y proporción del tonelaje total para el Plata.....	38
Tabla 13: Ley media y proporción del tonelaje total para oro equivalente .....	39
Tabla 14: Parámetros de forma modelo para bloque de 10 m x 10 m x 10 m.....	40
Tabla 15: Estadísticas básicas yacimiento Nitrato - Yodo .....	41
Tabla 16: Estadísticas básicas compósitos 1 [m].....	42
Tabla 17: Estadísticas básicas compósitos 2 [m].....	42
Tabla 18: Estadísticas básicas compósitos 4 [m].....	42
Tabla 19: Estadísticas básicas para leyes de nitrato y yodo corregidas.....	44
Tabla 20: Suma de los cuadrados de las diferencias de cada cuantil modelado vs cuantil compósitos reales de Nitrato.....	45
Tabla 21: Suma de los cuadrados de las diferencias de cada cuantil modelado vs cuantil compósitos reales de Yodo .....	45
Tabla 22: Modelos a utilizar en estudio bivariable Nitrato - Yodo.....	46
Tabla 23: Matriz covarianza para Nitrato y yodo.....	54
Tabla 24: Ley media y proporción del tonelaje total para yodo condicionado a Nitrato < 6[%] ..	55
Tabla 25: Ley media y proporción del tonelaje total para yodo.....	56
Tabla 26: Ley media y proporción del tonelaje total para Nitrato.....	57
Tabla 27: Estadísticas básicas ley de oro y plata.....	61
Tabla 28: Estadísticas básicas ley de nitrato y yodo .....	78

## ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1: Funcion de distribución de una variable aleatoria .....	3
Ecuación 2: Densidad de probabilidad de una variable aleatoria .....	3
Ecuación 3: Valor regularizado sobre un bloque ( $Z(v)$ ).....	7
Ecuación 4: Función anamorfosis puntual.....	8
Ecuación 5: Función de anamorfosis de bloques.....	8
Ecuación 6: Función de anamorfosis puntual (Con desarrollo en polinomios de Hermite).....	9
Ecuación 7: Función de anamorfosis de bloques (Con desarrollo en polinomios de Hermite).....	9
Ecuación 8: Varianza de $Z(v)$ en función del coeficiente de cambio de soporte .....	9
Ecuación 9: Varianza de $Z(v)$ en función del variograma de la variable original.....	9
Ecuación 10: Variograma en el soporte de bloques .....	9
Ecuación 11: Varianza de $Z(v)$ en función del coeficiente de cambio de soporte Gamma.....	11
Ecuación 12: Anamorfosis puntual Gamma.....	12
Ecuación 13: Varianza de $Z(v)$ en función de la transformación de bloque .....	12
Ecuación 14: Realizaciones de la distribución de bloque.....	12
Ecuación 15: Formula para calculo de oro equivalente, aproximación economica .....	29
Ecuación 16: Formula para calculo de oro equivalente con factor de prueba.....	30

# 1. INTRODUCCIÓN

En minería, los recursos recuperables de un depósito son analizados por curvas de selectividad, donde el tonelaje disminuye en función de la ley de corte, la ley media aumenta en función de la ley de corte y el tonelaje del metal es decreciente en función de la ley de corte.

Estas curvas dependen del volumen del soporte en el que se trabaje. La mayor parte de muestras que se tienen corresponden a testigos, sondajes o a compósitos, que constituyen casi un soporte puntual, en cambio, las unidades de selección minera o bloques tienen un volumen mucho más grande y por lo mismo, presentan una distribución con menor variabilidad y la misma media. Es importante la forma en la que se realiza entonces el cambio de soporte, pues un error en esta operación traería consecuencias en todos los procesos que se llevan a cabo en la minería.

El presente trabajo pretende entregar un modelo de cambio de soporte bivariable basado en un modelamiento gamma, el cual resulta más general que el modelo Gaussiano discreto.

Para lograr este objetivo, se validarán primero los modelos para el caso univariable, para posteriormente extender estos al caso bivariable.

Adicionalmente, se pretende estimar los recursos recuperables entregados por el modelo gamma y compararlos con el modelo gaussiano discreto y validarlos con compósitos de las bases originales a distintos tamaños.

## 1.1. Motivación del trabajo

Actualmente el método más utilizado para estimación global de recursos a soporte de bloques es el modelo gaussiano discreto, el cual presenta grandes ventajas en cuanto a tiempo de cálculo y se puede adaptar a la estimación local vía simulación directa de los valores de bloques. Como desventajas tiene principalmente el efecto cero en la variable, que es cuando se tienen histogramas con una gran proporción de valores nulos y cuando la distribución se aleja demasiado de lo que sería una Gaussiana.

Los casos en el cual el modelo Gaussiano discreto fallan no son menores, pues en muchos yacimientos se da este fenómeno, sobre todo en yacimientos de oro, por lo que extender su utilización a estos casos resulta satisfactorio para la industria.

Por lo anteriormente expuesto, surge la motivación de desarrollar un modelo más general, que englobe al modelo Gaussiano discreto y que además considere el caso donde se tiene efecto cero.

## **1.2. Objetivos**

### *1.2.1. Objetivo General*

El objetivo general de este trabajo consiste en el diseño y aplicación de modelos gamma de cambio de soporte. Por medio de estos modelos se pretende cuantificar el cambio de soporte en bases de datos complejas, en las que no se puede aplicar el modelo Gaussiano discreto, así generando un modelo más general y que abarque todos los casos.

### *1.2.2. Objetivos Específicos*

- Comparar el modelamiento entre el modelo Gamma y el modelo Gaussiano discreto.
- Extender la aplicación del modelo gamma al ámbito bivariable
- Validar los modelos propuestos aplicándolos en bases de datos reales.

## **1.3. Alcances**

El trabajo se realizará sobre dos bases de datos, compuestas por sondeos de exploración. En la primera base de datos se encuentran muestreadas leyes de oro y plata, mientras que en la segunda se muestrean nitrato y yodo.

A través de este trabajo se busca definir un modelo de cambio de soporte bivariable que permita predecir los recursos recuperables del depósito, incorporando relaciones entre variables, abordando el desafío del cambio de soporte en bases de datos que incorporen muchos datos donde la ley de la especie de interés es muy cercana a cero, teniendo una distribución poco compatible con el modelo Gaussiano discreto.

La validación se realiza sobre los datos originales compositados a los distintos tamaños de estudio.

Se construyen realizaciones de las leyes de bloques usando el modelo gamma, además de la aplicación del modelo Gaussiano discreto. Dichas realizaciones y su respectivo post procesamiento se realizarán principalmente con ayuda de los softwares como MATLAB, GEMS, U-Mine, ISATIS y Microsoft Excel.

Este trabajo se enmarca en el proyecto Innova-Corfo 09CN14-5838, titulado: "Modelamiento multivariable para evaluación de yacimientos" y el proyecto Fondecyt 1090013 "Multivariate geostatistics and its applications to the characterization of mineral resources".

## 2. ANTECEDENTES

### 2.1. Antecedentes generales

La geoestadística es una rama de la estadística, aplicada en un contexto espacial. Busca estudiar variables regionalizadas, las que corresponden a variables numéricas que se distribuyen en el espacio y presentan cierta continuidad espacial, aunque varían irregularmente a escala local. Ejemplo de una variable regionalizada es la ley de un elemento en un yacimiento minero. Una variable regionalizada queda caracterizada por:

- Su naturaleza: que puede ser continua, discreta (ordinal) o categórica.
- El dominio en estudio, que corresponde a las dimensiones espaciales en que la variable está definida.
- El volumen sobre el cual se mide (soporte), dado que no es lo mismo medirla en puntos del espacio o en soportes mayores (bloques).

Si bien los fenómenos naturales son determinísticos, pueden ser muy complejos. Es por esto que en el estudio de una variable regionalizada se puede considerar la aplicación de probabilidades, como por ejemplo en la ley de un metal presente en la mineralización de un macizo rocoso. En un modelo probabilístico una variable regionalizada  $z(x)$  en un sitio  $x$  del dominio  $D$  en estudio, se interpreta como una realización de una variable aleatoria  $Z(x)$ . El conjunto de estas variables en distintos puntos del espacio constituye una función aleatoria que se expresa como  $Z = \{Z(x), x \in D\}$

Una variable aleatoria  $Z$  se caracteriza por una distribución de probabilidad:

- Función de distribución:

$$\forall z \in R, F(z) = Prob(Z \leq z)$$

**ECUACIÓN 1: FUNCION DE DISTRIBUCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA**

- Densidad de probabilidad: (si la variable es continua) corresponde a la derivada de la función de distribución. Se trata de una función positiva  $f$  tal que:

$$\forall z \in R, F(z) = \int_{-\infty}^z f(x)dx$$

**ECUACIÓN 2: DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA**

Una función aleatoria se caracteriza por una distribución espacial, que consta de todas las distribuciones de probabilidad de sus componentes, en particular:

- Distribución univariable:  $F(z_1; \mathbf{x}_1) = Prob(Z(\mathbf{x}_1) \leq z_1)$
  - Distribución bivariante:  $F(z_1, z_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = Prob(Z(\mathbf{x}_1) \leq z_1, Z(\mathbf{x}_2) \leq z_2)$
- Donde,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  representan distintos sitios en el espacio.

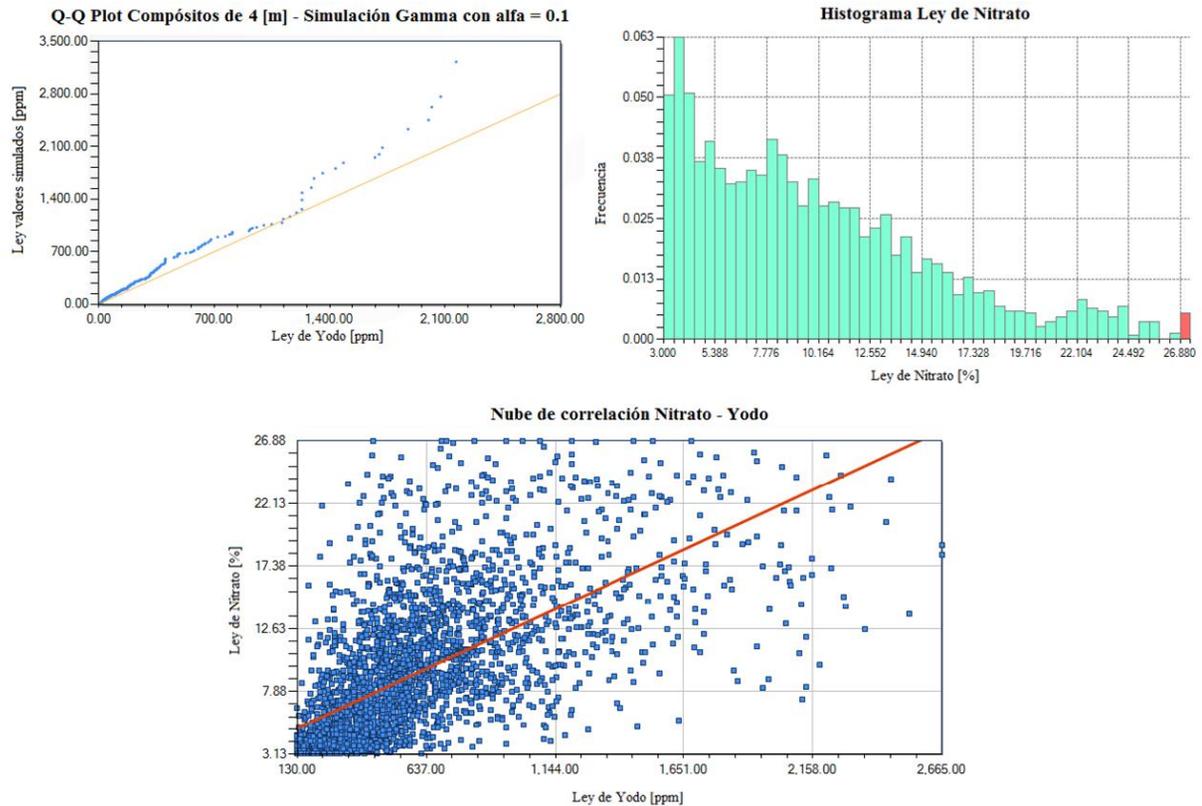
En los estudios geoestadísticos se asumen generalmente algunas hipótesis simplificatorias, como la hipótesis de estacionaridad que establece que la distribución espacial es invariante por traslación en el espacio. En particular, independiente de la ubicación en el espacio, presenta las mismas medias y varianzas.

En un estudio geoestadístico previamente se desarrolla la etapa de estudio exploratorio y variográfico. El estudio exploratorio se describe brevemente a continuación.

### 2.1.1. Estudio exploratorio de datos

El objetivo de esta etapa es conocer la distribución de la o las variables regionalizadas en el estudio, definir zonas particulares de estudio, detectar errores o datos anómalos y anticipar posibles dificultades que se pudiesen tener en las bases de datos disponibles. Algunas de las herramientas de análisis exploratorio de datos utilizadas son las siguientes:

- Mapas para visualizar la ubicación espacial de los datos.
- Histogramas para conocer la distribución estadística de los datos
- Estadísticas básicas, medidas de posición, dispersión, forma de la distribución, etc.
- Gráficos de probabilidad para comparar distribuciones empíricas con teóricas.
- Gráficos q-q plot para comparar dos distribuciones empíricas
- Nubes de correlación para visualizar valores de una variable en función de otra.



**FIGURA 1: HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS EXPLORATORIO (Q-Q PLOT, HISTOGRAMA Y NUBE DE CORRELACIÓN)**

### 2.1.2. *Noción de soporte*

Una variable regionalizada puede definirse no sólo en cada punto del espacio, sino que también en una superficie (2D) o en un volumen (3D). La superficie o el volumen sobre el cual se considera la variable regionalizada se denomina soporte. En general, el soporte de las mediciones es muy pequeño (asimilado a un “punto”), mientras que el que interesa en la práctica puede ser más voluminoso (por ejemplo, las unidades selectivas de explotación minera). Esta noción es esencial debido a la dependencia que existe entre el soporte y la distribución estadística de los valores conocida como efecto de soporte: los soportes voluminosos presentan una menor cantidad de valores extremos y una mayor cantidad de valores intermedios que los soportes puntuales. Así, la distribución de los valores depende del soporte sobre el cual está definida la variable regionalizada. En particular, la varianza disminuye a medida que se aumenta el tamaño del soporte, mientras que el valor promedio permanece constante [3].

En los problemas que involucran un cambio de soporte, es deseable que la variable regionalizada sea aditiva, es decir, que su valor en la unión de varios dominios sea igual a la media de sus valores sobre cada uno de ellos. Esta restricción es necesaria para que el cálculo del valor promedio sobre un soporte más grande que el soporte de las mediciones, tenga un sentido físico.

### *2.1.3. Aditividad*

Se dice que una variable regionalizada es aditiva cuando el valor de un soporte grande (“bloque”) es el promedio aritmético o la suma de los valores “puntuales” dentro del bloque. Esta propiedad permite que se realice un cambio de soporte.

Algunos ejemplos de variables aditivas son potencia (acumulación de una veta) y ley de cabeza (suponiendo que la roca tiene una densidad constante). Algunos contra-ejemplos (variables no aditivas) son razón de solubilidad, recuperación metalúrgica, razón Si-Mg, y código de tipo de roca.

Las variables no aditivas pueden ser estimadas mediante kriging, pero esta estimación no permite cambio de soporte ya que se incurre en un sesgo [4]. Una correcta predicción de la distribución de variables no aditivas, que se definan por el cociente entre dos variables aditivas, se puede realizar mediante simulaciones condicionales conjuntas de las variables aditivas y, al realizar la división de las simulaciones, se logra predecir sin sesgo la variable no aditiva [1,4].

### *2.1.4. Simulaciones*

Se propone la simulación como metodología para cuantificar la incertidumbre asociada al desconocimiento de los valores reales de una variable regionalizada. Una simulación es un modelo numérico que busca reproducir la variabilidad real de la variable en estudio mediante la construcción de varias realizaciones que representan escenarios posibles.

Se puede diferenciar dos tipos de simulaciones: las no condicionales y las condicionales.

Las simulaciones no condicionales buscan reproducir la distribución de la variable regionalizada, sin reproducir los valores de los datos en sitios ya conocidos. En cambio las simulaciones condicionales buscan reproducir las distribuciones locales, que dependen de los datos conocidos.

Así como el kriging tradicional sólo permite resolver el problema de estimación, es decir, de predecir valores en sitios no conocidos, las simulaciones además entregan mediciones de la incertidumbre y permiten desarrollar análisis de riesgo, debido a la disposición de varios escenarios posibles. Adicionalmente se puede incorporar información de otras variables, dando origen a las denominadas co-simulaciones.

Para aplicar simulaciones es necesario definir un modelo adecuado de función aleatoria. Además, estas simulaciones pueden realizarse a distintos soportes, es decir, a soporte de puntos o a soporte de bloques, dado que en minería resulta de interés desarrollar un modelo de leyes a soporte de bloques (unidades selectivas de explotación).

## 2.2. Modelos de cambio de soporte

Cuando se trabaja con variables regionalizadas, la distribución estadística que siguen los valores que toma la variable depende del volumen o soporte sobre el cual se miden. Los efectos que tiene el cambio de soporte son los siguientes:

- La media no depende del soporte.
- La varianza disminuye al aumentar el soporte.
- El histograma cambia de forma (se simetriza).

De este modo la forma de la distribución cambia al pasar de valores puntuales a valores de bloques o entre distintos tamaños de bloque. Así, para determinar ya sea la distribución global o local a soporte de bloques (que es de interés en la industria minera debido a temas operacionales en una mina, pues la extracción no puede ser realizada puntualmente) se debe recurrir a un modelo de cambio de soporte.

Uno de los modelos para cambio de soporte más utilizados es el modelo Gaussiano discreto tanto para estimación global como local. Dado esto, resulta interesante describirlo y notar las diferencias con el modelo Gamma, el cual en este trabajo se busca demostrar que es más general.

### 2.2.1. Modelo Gaussiano discreto para estimación global

La variable regionalizada regularizada no es más que el promedio de los valores puntuales que entran en el soporte regularizado (por ejemplo un bloque). O sea, visto de forma continua, el valor regularizado sobre un bloque  $v$  se define como:

$$Z(v) = \frac{1}{|v|} \int_v Z(x) dx$$

**ECUACIÓN 3: VALOR REGULARIZADO SOBRE UN BLOQUE ( $Z(v)$ )**

Donde  $Z(v)$  representa el valor regularizado,  $Z(x)$  el valor puntual y  $|v|$  el volumen de  $v$ .

Las hipótesis generales que considera el modelo son las siguientes:

- El espacio se considera como una reunión de bloques que no traslapan y que son idénticos.
- La posición de cada dato puntual se considera como aleatoria y uniforme dentro del bloque al cual pertenece, para evitar inconsistencias matemáticas asociadas a la teoría.

El detalle del modelo se puede describir a partir de sus hipótesis específicas:

1. La variable puntual  $Z(x)$  se puede transformar en una variable Gaussiana estándar  $Y(x)$  mediante una función de transformación o anamorfosis  $\phi$ .

$$Z(x) = \Phi[Y(x)]$$

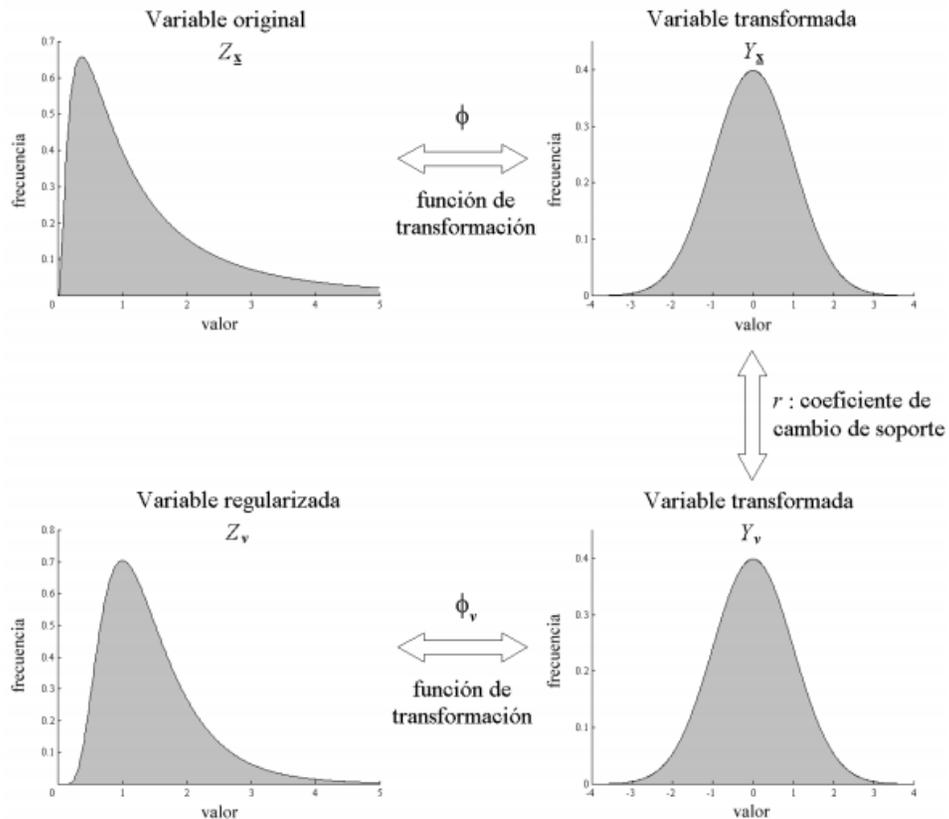
**ECUACIÓN 4: FUNCIÓN ANAMORFOSIS PUNTUAL**

2. La variable regularizada  $Z(v)$  se puede transformar en una variable Gaussiana estándar  $Y_v$  mediante una función de transformación (anamorfosis) a soporte de bloque que se denomina  $\phi_v$ :

$$Z(v) = \Phi_v[Y_v]$$

**ECUACIÓN 5: FUNCIÓN DE ANAMORFOSIS DE BLOQUES**

3. Si el punto  $x$  pertenece al bloque  $v$ , el par  $\{Y(x), Y_v\}$  es bigaussiano, con coeficiente de correlación  $r$  (coeficiente de cambio de soporte).



**FIGURA 2: ESQUEMA EXPLICATIVO DE HIPÓTESIS DE MODELO DE CAMBIO DE SOPORTE EN PARTICULAR, GAUSSIANO DISCRETO**

En el esquema se indican las relaciones establecidas entre las variables y los parámetros de los que dependen. Como se aprecia, la variable Gaussiana  $Y_v$  no es regularizada de  $Y(x)$ , por

lo que es necesario determinar la función  $\phi_v$  y el coeficiente de cambio de soporte, r, para definir completamente el modelo.

Para resolver el problema anterior, se utiliza la relación de Cartier [2] la que enuncia que el valor esperado de un dato tomado al azar dentro de un bloque cuyo valor es conocido es igual al valor del bloque.

A partir de esto, se puede obtener una expresión que relacione ambas funciones de transformación y el valor de r. Sin embargo, la expresión es compleja, por lo que se acude a una aproximación por una familia de polinomios, llamada polinomios de Hermite  $\{H_p, p \in \mathbb{N}\}$ . Las expresiones son las siguientes:

$$\Phi(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p H_p(y)$$

**ECUACIÓN 6: FUNCIÓN DE ANAMORFOSIS PUNTUAL (CON DESARROLLO EN POLINOMIOS DE HERMITE)**

$$\Phi_v(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p r^p H_p(y)$$

**ECUACIÓN 7: FUNCIÓN DE ANAMORFOSIS DE BLOQUES (CON DESARROLLO EN POLINOMIOS DE HERMITE)**

Donde  $H_p(y)$  corresponde al polinomio de Hermite de grado p, y  $\phi_p$  corresponde al coeficiente del desarrollo en polinomios de la anamorfosis puntual.

Para determinar el coeficiente r se aprovecha la posibilidad de expresar la varianza a soporte de bloques mediante dos expresiones distintas, donde en una de ellas aparece el coeficiente r:

$$Var[Z(v)] = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p^2 r^{2p}$$

**ECUACIÓN 8: VARIANZA DE Z(v) EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE CAMBIO DE SOPORTE**

$$Var[Z(v)] = \gamma(\infty) - \bar{\gamma}(v, v)$$

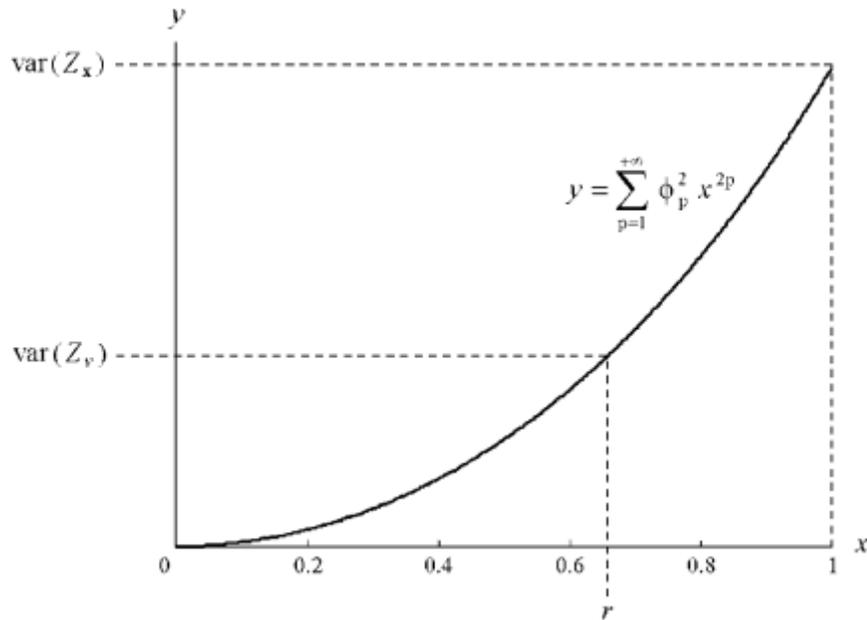
**ECUACIÓN 9: VARIANZA DE Z(v) EN FUNCIÓN DEL VARIOGRAMA DE LA VARIABLE ORIGINAL**

$\bar{\gamma}(v, v)$  corresponde a:

$$\bar{\gamma}(v, v) = \frac{1}{|V|^2} \int_v \int_v \gamma(x - y) dx dy$$

**ECUACIÓN 10: VARIOGRAMA EN EL SOPORTE DE BLOQUES**

Así, del siguiente gráfico que relaciona la varianza a soporte de bloques con el coeficiente  $r$ , se puede despejar el valor de  $r$ :



**FIGURA 3: DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE CAMBIO DE SOPORTE**

Del gráfico se deduce que al tener  $r = 1$ , se tiene que la varianza corresponde a la de los datos puntuales, con lo que se deduce que a menor  $r$ , se tiene mayor tamaño de bloque y por lo tanto, menor varianza de las leyes.

### 2.2.2. Modelo Gaussiano discreto para la estimación local

El modelo Gaussiano discreto se puede extender para resolver problemas de estimación local [8]. Para esto, se hace más fuerte la hipótesis general del modelo y ahora todo conjunto de valores de  $Y(x)$  e  $Y_v$  tiene una distribución multigaussiana, independiente si el punto  $x$  pertenece o no al bloque  $v$ . Esto constituye una aproximación, pues en teoría se establece que las variables gaussianas puntual  $Y(x)$  y de bloque  $Y_v$  serán multigaussianas sólo si la función de transformación es lineal.

En la práctica, además de disponer de las funciones de transformación y del coeficiente de cambio de soporte  $r$  (para el caso global), es necesario conocer las funciones de covarianza o, equivalentemente los variogramas de la variables Gaussianas  $Y_v$ . Así el modelo queda caracterizado por:

- La función de transformación puntual  $\phi$ .
- El coeficiente de cambio de soporte  $r$ .

- Las covarianzas (punto-punto y bloque-bloque) y cruzadas (punto-bloque) de las variables Gaussianas  $Y(x)$  e  $Y_v$ .

La notación es la siguiente:

- $\rho(x, x') =$  covarianza punto-punto
- $\rho(x, v') =$  covarianza punto-bloque
- $\rho(v, v') =$  covarianza bloque-bloque

Para resolver el último punto, se tienen expresiones que relacionan las covarianzas punto-punto y punto bloque con la covarianza bloque-bloque [8]. Es decir, determinando la covarianza bloque-bloque (en la práctica, se suele utilizar el variograma bloque-bloque) el modelo queda definido.

### 2.2.3. Modelo Gamma para estimación global

El modelo Gamma constituye un modelo más general que el Gaussiano. A diferencia del Gaussiano, incorpora un parámetro de forma (en el Gaussiano discreto, la forma siempre es la misma, una normal). Este parámetro denominado  $\alpha$  describe la distribución, cambiando la ecuación 8 del modelo Gaussiano discreto por esta (el desarrollo formal de los pasos previos es análogo para todos los modelos de cambio de soporte).

$$var[Z(v)] = \sum_{p=1}^{+\infty} \left[ r^p \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + p)\Gamma(\alpha_v)}{\Gamma(\alpha_v + p)\Gamma(\alpha)}} \phi_p \right]^2$$

#### ECUACIÓN 11: VARIANZA DE $Z(v)$ EN FUNCIÓN DEL COEFICIENTE DE CAMBIO DE SOPORTE GAMMA

La idea de los modelos gamma de cambio de soporte es atribuir un parámetro de forma distinto para describir las distribuciones puntual y de bloque: esto hace el modelo más flexible y permite tomar en cuenta la simetrización de los valores que acompaña el cambio de soporte; se elige entonces un parámetro puntual  $\alpha$  inferior al parámetro de bloque  $\alpha_v$ . Asimismo, para que las distribuciones puntuales y de bloques tengan el mismo valor mínimo, se elige un coeficiente  $r=1$  (el cambio de soporte quedara modelado por los parámetros de forma  $\alpha$  y  $\alpha_v$ ).

A continuación se presentan los pasos a seguir para realizar la estimación con el modelo gamma.

1. Se elige el parámetro puntual  $\alpha$ .
2. Se transforma la variable original en una variable gamma, por lo que se determinan los coeficientes de la anamorfosis puntual, acorde a:

$$Z(x) = \phi_\alpha[Y(x)] = \sum_{p=0}^{+\infty} \phi_p L_p^\alpha[Y(x)]$$

**ECUACIÓN 12: ANAMORFOSIS PUNTUAL GAMMA**

Donde  $L_p^\alpha$  representa al polinomio de Laguerre de grado p y parámetro  $\alpha$  (reemplaza al polinomio de Hermite del modelo Gaussiano discreto)

3. Se determinan el parámetro de bloque  $\alpha_v$  gracias a:

$$var[Z(v)] = \sum_{p=1}^{+\infty} \phi_p^2 \frac{\Gamma(\alpha + p)\Gamma(\alpha_v)}{\Gamma(\alpha_v + p)\Gamma(\alpha)}$$

**ECUACIÓN 13: VARIANZA DE Z(v) EN FUNCIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DE BLOQUE**

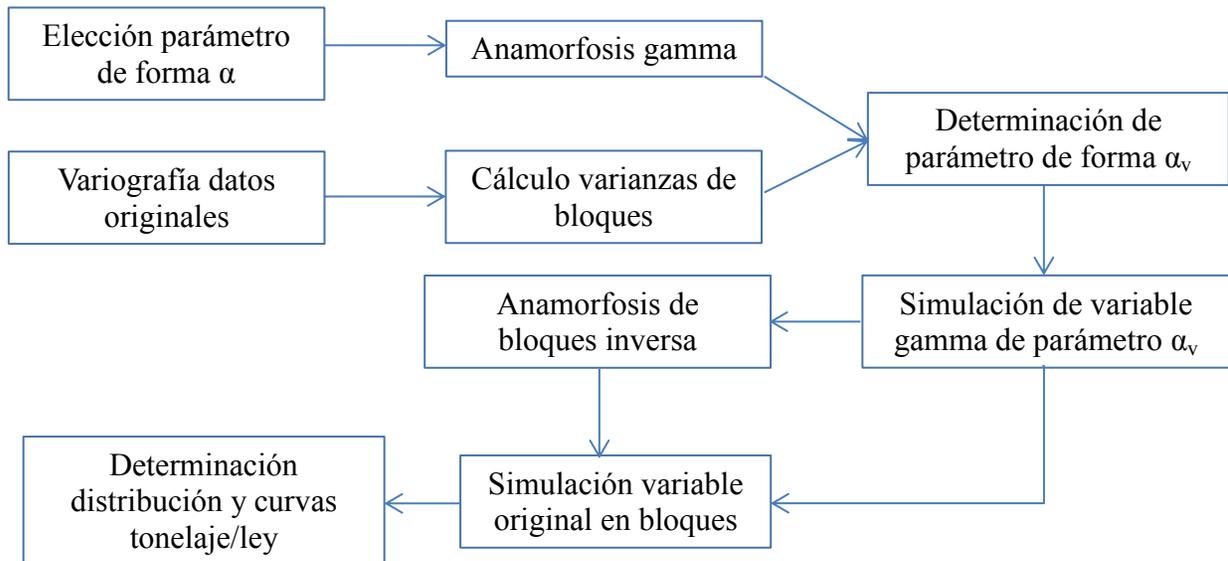
4. Se simulan realizaciones de la variable gamma de bloques  $Y_v$  (con parámetro de forma  $\alpha_v$ ).
5. Se deduce realizaciones de  $Z(v)$  aplicando:

$$Z(v) = \phi_{\alpha_v} Y_v = \sum_{p=0}^{+\infty} \phi_p \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + p)\Gamma(\alpha_v)}{\Gamma(\alpha_v + p)\Gamma(\alpha)}} L_p^{\alpha_v}[Y_v]$$

**ECUACIÓN 14: REALIZACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN DE BLOQUE**

6. Se determina la distribución marginal de estas realizaciones.

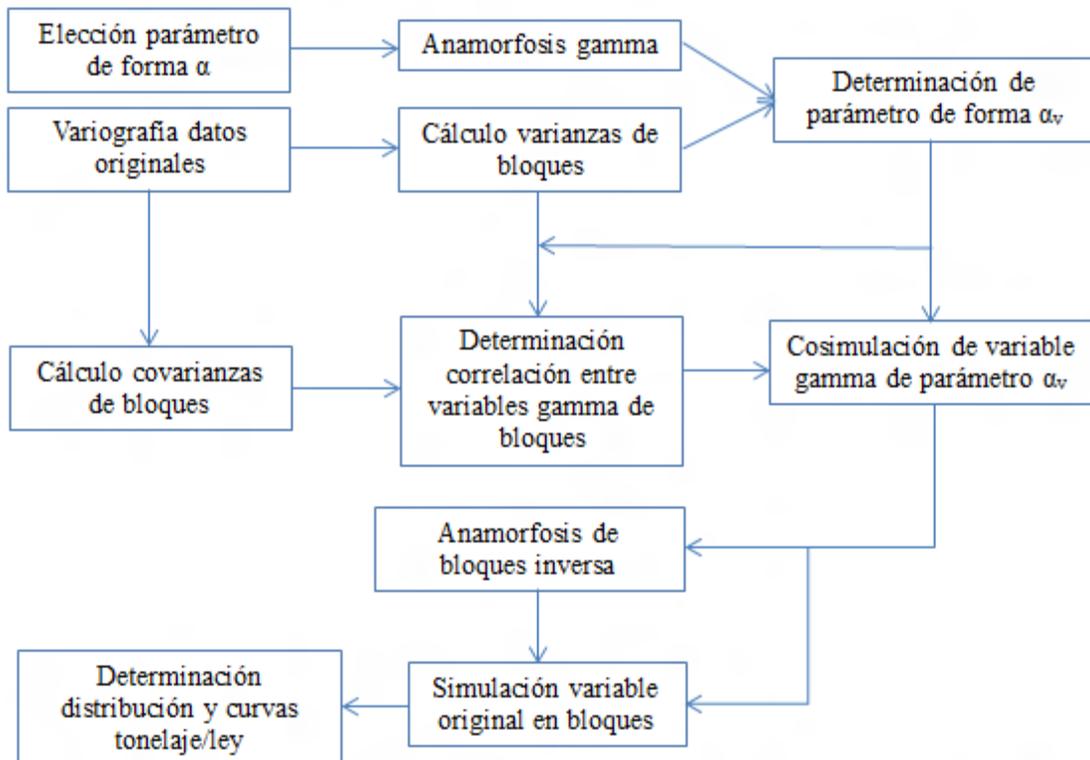
A continuación, se presenta el esquema que resume lo presentado.



**FIGURA 4: ESQUEMA EXPLICATIVO DEL MODELO GAMMA (CASO UNIVARIABLE)**

En el caso bivariado, se trabaja con dos variables originales  $Z_1$  y  $Z_2$  a soportes puntuales y de bloques, y dos variables gamma  $Y_1$  y  $Y_2$ , también a soportes puntuales y de bloques.

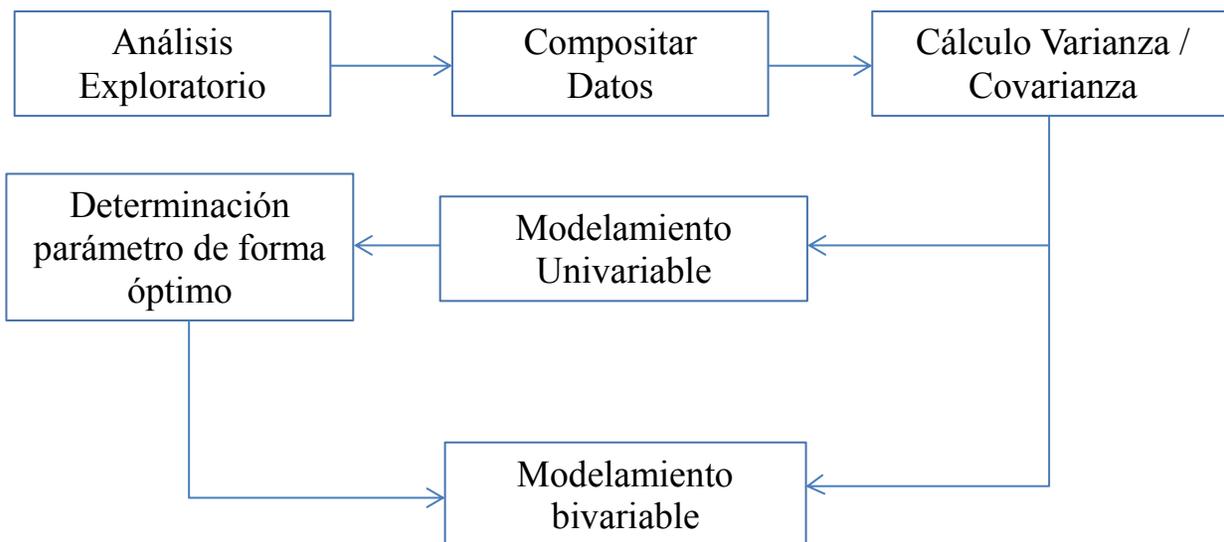
Se introduce un parámetro adicional que corresponde a la correlación entre variables gamma de bloques, la cual se calibra de manera de reproducir la correlación entre las variables originales de bloques. Esta última correlación se puede calcular una vez que se ha ajustado un modelo variográfico (variogramas directos y variogramas cruzados) a los datos de las variables  $Z_1$  y  $Z_2$ .



**FIGURA 5: ESQUEMA EXPLICATIVO DEL MODELO GAMMA (CASO BIVARIABLE)**

### 3. METODOLOGÍA

El principal objetivo de este trabajo es entregar un modelo de cambio de soporte bivariable que permita estimar los recursos recuperables de un depósito mineral. Para obtener este modelo, se aplica el siguiente esquema general:



**FIGURA 6: METODOLOGÍA GENERAL PARA DETERMINACIÓN MODELO GAMMA DE CAMBIO DE SOPORTE BIVARIABLE**

La validación se realiza sobre los compósitos al realizar la comparación. Además para evitar errores en el cálculo de varianzas, no se recurre al estudio variográfico, si no que se calculan las varianzas a partir de los datos compositados, eliminando de esta manera el error que trae la estimación mediante los variogramas.

#### 3.1. Análisis exploratorio

Se estudiarán los datos buscando datos aberrantes o coordenadas erróneas y presentaran las estadísticas básicas e histogramas de las variables, para así definir si las bases de datos efectivamente presentan distribuciones conflictivas con el modelo Gaussiano discreto.

#### 3.2. Composición de datos

En esta etapa se analiza que las leyes de los datos compositados cumplan con la condición de tener la misma media y que la varianza disminuya a medida que se utilizan compósitos de mayor tamaño. De esta etapa también se obtienen las varianzas y covarianzas a utilizar para las etapas de modelamiento y validación a soportes de compósitos mayores.

### 3.3. Modelamiento univariable

Se definen distintos valores del parámetro de forma puntual  $\alpha$ : 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 5, 10. El modelo Gaussiano discreto corresponde a un valor de  $\alpha$  muy grande (se utiliza 20 en los casos de estudio).

#### 3.3.1. Determinación del parámetro de forma óptimo

Para esta etapa se analiza la distribución de los datos simulados con cambio de soporte de dos maneras:

1. **Análisis de suma cuadrado de las diferencias para cuantiles:** como se espera que el valor simulado sea igual al valor real en los distintos cuantiles, se calcula el cuadrado de diferencia de entre ambos valores, la cual se espera sea igual a cero. Se escogen los parámetros de forma donde esta diferencia sea la menor.
2. **Curva metal (mineral) – tonelaje:** en caso que la suma del cuadrado de las diferencias no entregue un modelo satisfactorio, se discriminan los modelos a partir de un análisis gráfico, el que consiste en comparar gráficamente la cantidad de mineral que hay en cada yacimiento con respecto al tonelaje. El o los modelos más parecidos a los datos compositados es el que se escoge.

### 3.4. Modelamiento bivariable

Para los valores de  $\alpha$  escogidos en la etapa univariable (para cada variable por separado) se realiza un modelamiento bivariable. Los resultados comparados con los que se obtienen mediante el modelo Gaussiano discreto, con los datos originales compositados a distintos tamaños (validación de los datos) y con los resultados del modelamiento univariable. Las herramientas a utilizar son nubes de correlación, curvas Metal (Mineral) tonelaje relacionando las variables, ya sea estableciendo una ley de corte fija y viendo como varia la otra variable o fijando una variable equivalente.

A partir de esos análisis se concluye si el modelo es aceptable o no, junto con las recomendaciones que se puedan realizar.

### 3.5. Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación

Realizado el modelamiento, se estiman los recursos como se realizaría en un caso real, esto es, se determina mediante el variograma la matriz covarianza que tendría el yacimiento a determinado tamaño de bloque. Una vez calculadas las covarianzas, se realiza el cambio de soporte global bivariable obteniendo así un modelo sobre el que se analiza la selectividad que se tendrá en explotación.

## 4. CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE ORO-PLATA

### 4.1. Estudio exploratorio

La base de datos consiste en 14 740 puntos, provenientes de sondajes de exploración. El muestreo es homotópico y considera la ley de oro y plata, además del tipo de roca (codificados en número para veta y roca caja).

Los sondajes no presentan una malla típica, tienen distintos largos y direcciones, además de no presentar compósitos uniformes, todos menores a 0.5 [m]. La zona cubierta por el muestreo es aproximadamente 110 [m] en la dirección este, 285 [m] en la dirección norte y 295 [m] en la vertical (En anexos A se encuentra una presentación global del yacimiento).

A continuación, se presenta el estudio exploratorio, analizando estadísticas, distribuciones y relaciones entre las variables presentes.

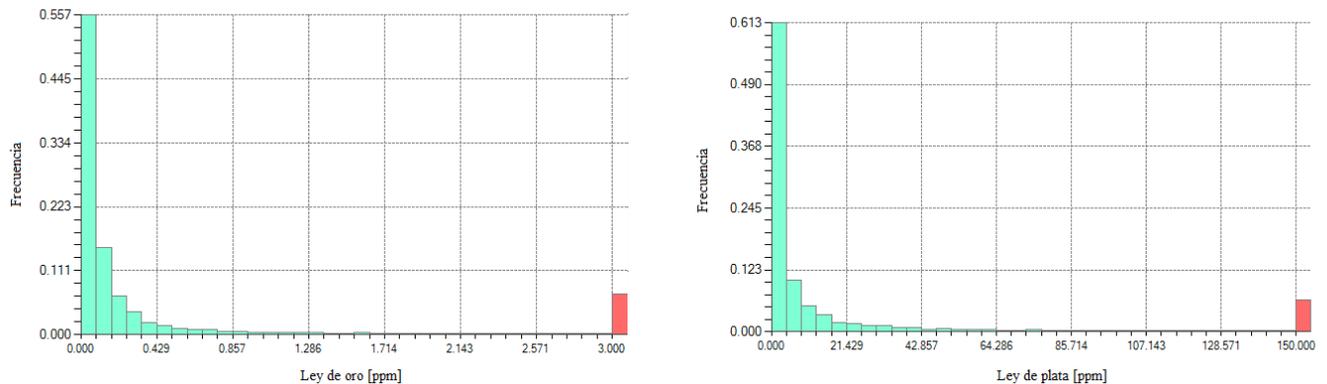


FIGURA 7: HISTOGRAMA DE LEYES DE ORO Y PLATA

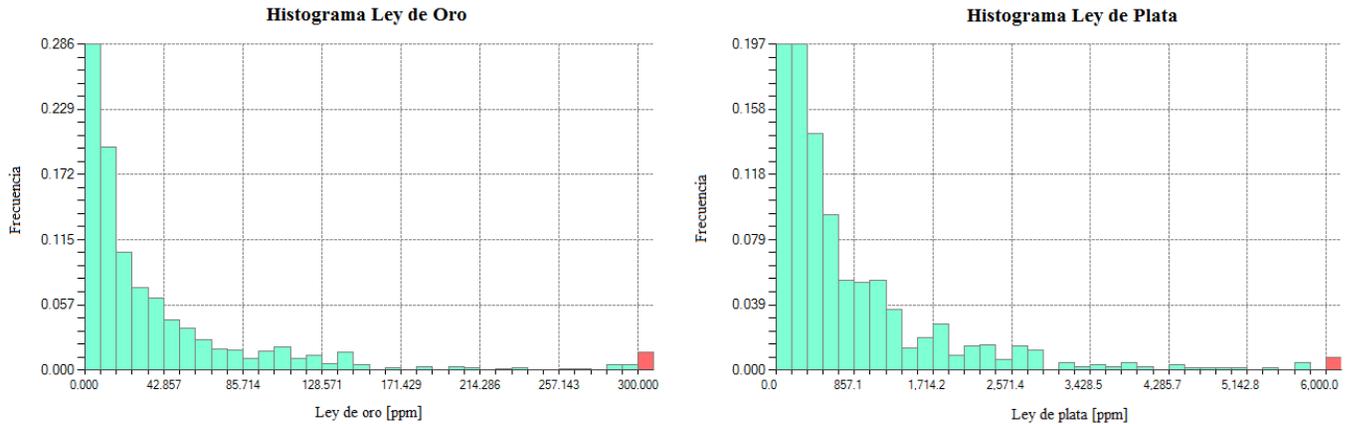
	Ley de Oro [ppm]	Ley de Plata [ppm]
<b>Media</b>	3.17	65.36
<b>Varianza</b>	676.13	119 527.56
<b>Curtosis</b>	803.02	199.40
<b>Coefficiente de asimetría</b>	24.03	11.87
<b>Mínimo</b>	0	0
<b>Máximo</b>	1 202.04	8 701
<b>Cuenta</b>	14 739	14 734

TABLA 1: ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LEYES DE ORO Y PLATA

Se puede apreciar tanto en los histogramas como en las estadísticas básicas que las variables presentan una gran cantidad de valores cero o cercanos a cero. Los coeficientes de

asimetría indican distribuciones con tendencia hacia la izquierda de la media. Los valores de curtosis indican una distribución leptocúrtica, es decir, de forma más apuntada que la normal.

Al realizar el análisis filtrando por dominios geológicos, se obtienen los siguientes histogramas y estadísticas:



**FIGURA 8: HISTOGRAMA DE LEYES DE ORO Y PLATA PARA VETAS**

	<b>Ley de oro [ppm]</b>	<b>Ley de plata [ppm]</b>
<b>Media</b>	45.82	848.60
<b>Varianza</b>	8 850.00	1 228 573.90
<b>Curtosis</b>	60.18	15.46
<b>Coefficiente de asimetría</b>	6.76	3.34
<b>Mínimo</b>	0.14	3.16
<b>Máximo</b>	1 202.04	8 701
<b>Cuenta</b>	908	908

**TABLA 2: ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE LEYES DE ORO Y PLATA PARA VETAS**

Al filtrar el dominio geológico, se puede notar que la veta es donde principalmente están los datos distintos de cero y por lo tanto, es el área de interés para la actividad minera. El histograma muestra que la distribución de datos es similar a la de todos los datos, aunque un poco más suavizada al tener menor cantidad de valores cero.

A pesar de lo anteriormente expuesto, se decide trabajar con la totalidad de los datos, pues la cantidad de datos presentes en la veta es muy bajo, lo cual indica que, al compositar a tamaños mayores, la cantidad de observaciones a analizar resulta ser muy baja y las conclusiones son poco robustas.

#### 4.2. Composición de los datos

El objetivo de compositar los datos es determinar las varianzas de manera precisa y así eliminar el error de estimación que se tendría en el caso de usar el variograma para calcular la varianza y covarianza de bloques. Se determinan tres tamaños de compuesto (bloque): 1 [m], 2 [m] y 4 [m].

Las estadísticas importantes a considerar en esta etapa son:

- La media, pues hay que recordar que esta no debe variar con respecto a la base de datos original.
- Las varianzas y covarianzas para cada soporte, pues son los parámetros a utilizar al realizar cambio de soporte uni y bivariable.

Con lo dicho anteriormente, se presentan las estadísticas e histogramas de los compósitos.

<b>Tamaño de bloque 1 [m]</b>	<b>Ley de Oro [ppm]</b>	<b>Ley de Plata [ppm]</b>
<b>Datos</b>	6 424	6 424
<b>Media</b>	3.07	63.26
<b>Varianza</b>	567.41	111 045.97
<b>Covarianza</b>	5 072.96	

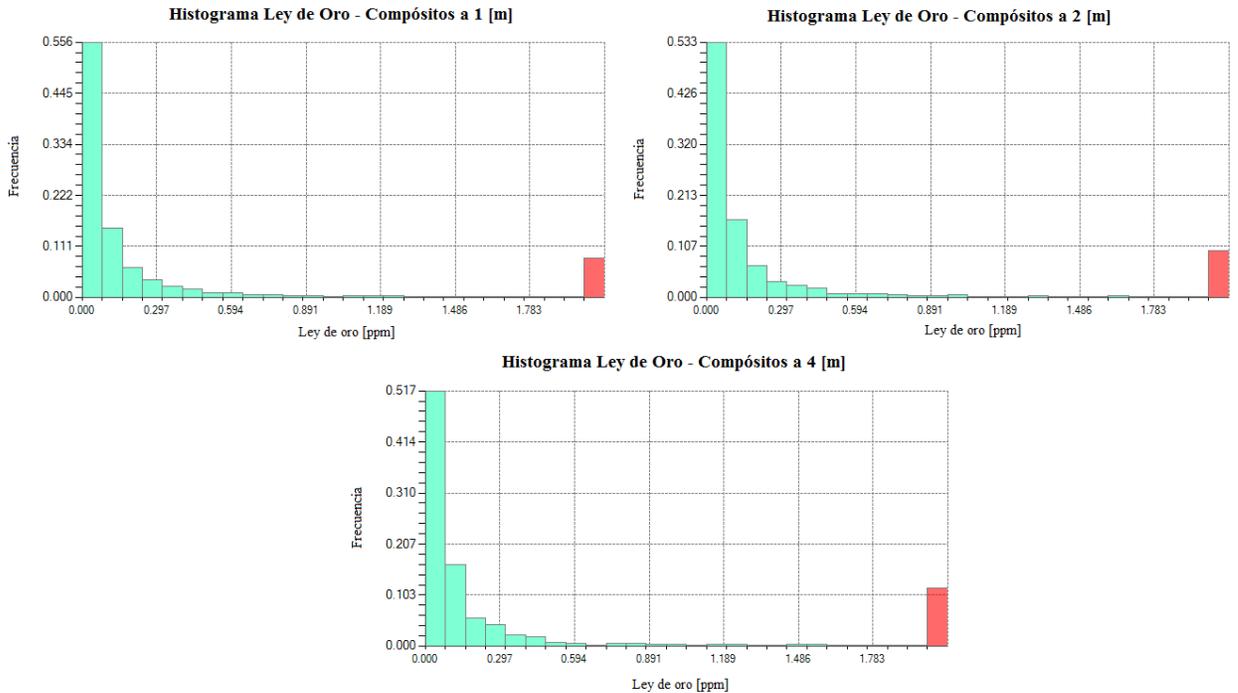
**TABLA 3: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 1 [m]**

<b>Tamaño de bloque 2 [m]</b>	<b>Ley de Oro [ppm]</b>	<b>Ley de Plata [ppm]</b>
<b>Datos</b>	3 212	3 212
<b>Media</b>	3.07	63.26
<b>Varianza</b>	440.51	84 356.2
<b>Covarianza</b>	3 989.07	

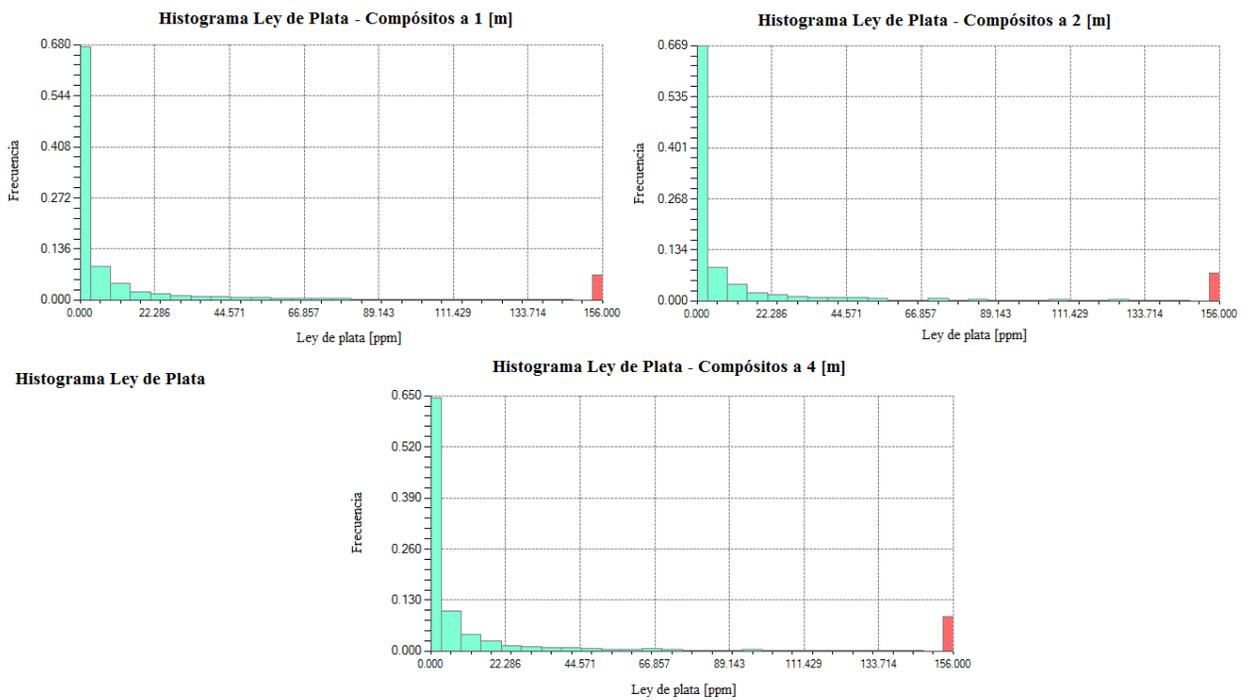
**TABLA 4: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 2 [m]**

<b>Tamaño de bloque 4 [m]</b>	<b>Ley de Oro [ppm]</b>	<b>Ley de Plata [ppm]</b>
<b>Datos</b>	1 606	1 606
<b>Media</b>	3.07	63.26
<b>Varianza</b>	318.59	68 783.79
<b>Covarianza</b>	3 239.16	

**TABLA 5: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 4 [m]**



**FIGURA 9: HISTOGRAMA LEY DE ORO PARA LOS DISTINTOS COMPÓSITOS.**



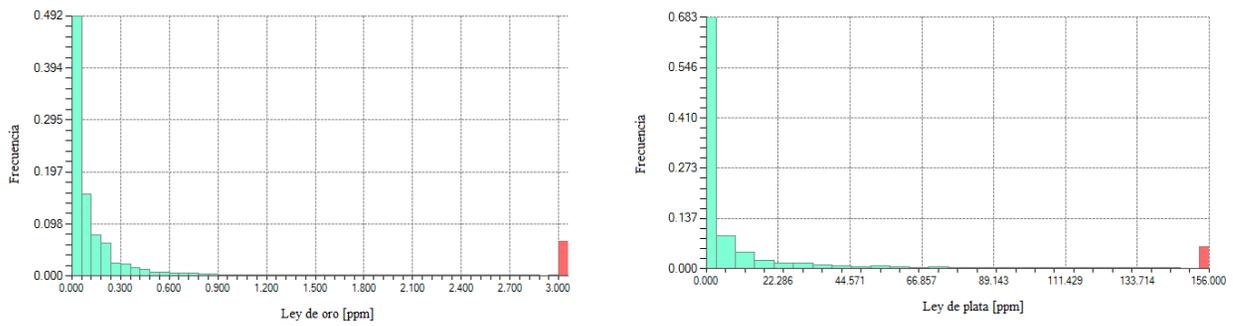
**FIGURA 10: HISTOGRAMA LEY DE PLATA PARA LOS DISTINTOS COMPÓSITOS.**

Se puede apreciar en las estadísticas que el cambio de soporte cumple las dos características típicas, que la media sea la misma y, además, a soporte mayor la varianza sea menor, pero se presenta el problema que la media de los datos compositados no es igual a la media de los datos originales, esto pues los datos compositados no consideran las colas (compósitos de menor tamaño que el tamaño de bloque). Para solucionar esto, se eliminan los

datos que no considera la composición, quedando finalmente la base de datos original con las siguientes estadísticas e histograma.

	Ley de oro [ppm]	Ley de plata [ppm]
<b>Media</b>	3.07	63.25
<b>Varianza de la muestra</b>	684.23	121 042.69
<b>Curtosis</b>	839.5	215.4
<b>Coefficiente de asimetría</b>	24.7	12.44
<b>Mínimo</b>	0	0
<b>Máximo</b>	1 202.04	8 701
<b>Cuenta</b>	12 848	12 848

**TABLA 6: ESTADÍSTICAS BÁSICAS DE ORO Y PLATA CORREGIDAS**



**FIGURA 11: HISTOGRAMA DE LEYES DE ORO Y PLATA CORREGIDAS**

### 4.3. Modelamiento Gamma Univariable

Una vez filtrada la base de datos y determinadas las varianzas de los distintos soportes, se procede a estimar las leyes para cada uno de los distintos parámetros de forma  $\alpha$ .

#### 4.3.1. Modelamiento para oro

A continuación se presentan los gráficos Q-Q plot y curvas metal - tonelaje para los valores de  $\alpha$  que mejor ajustan y la tabla de los cuadrados de las diferencias para los valores de  $\alpha$  indicados en la sección 3.3 para cada soporte de ley de oro.

	Valores de $\alpha$	Tamaño de compuesto		
		1 [m]	2 [m]	4 [m]
Suma de los cuadrados de las diferencias cuantil-cuantil	0.1	66.58	374.67	180.01
	0.25	174.39	233.20	315.90
	0.5	141.37	268.06	601.09
	0.75	77.33	226.78	23.44
	1	23.05	69.76	191.37
	1.5	77.86	136.91	356.89
	2	47.65	137.22	352.87
	5	208.76	206.00	37.12
	10	118.56	387.11	303.80
	20	94.91	98.19	860.85

TABLA 7: SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS DE CADA CUANTIL MODELADO VS CUANTIL COMPÓSITOS REALES DE ORO

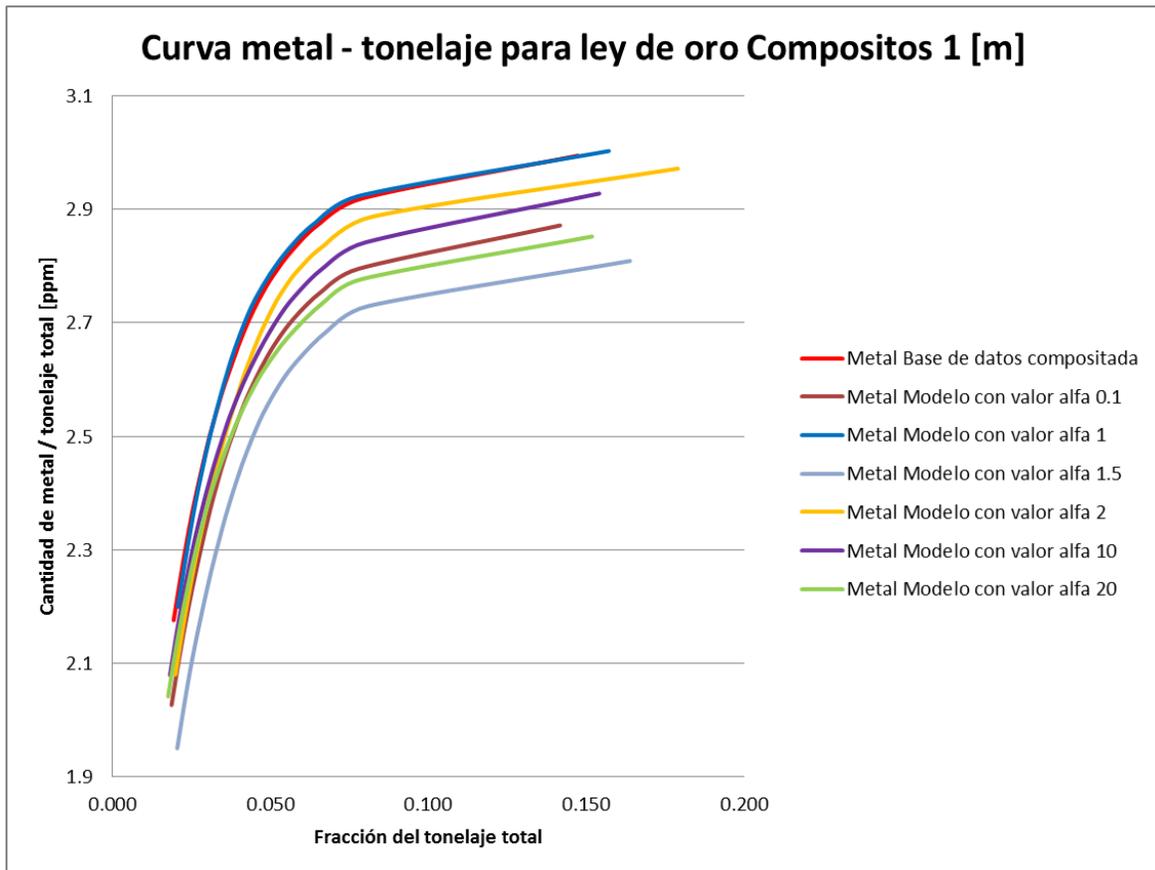
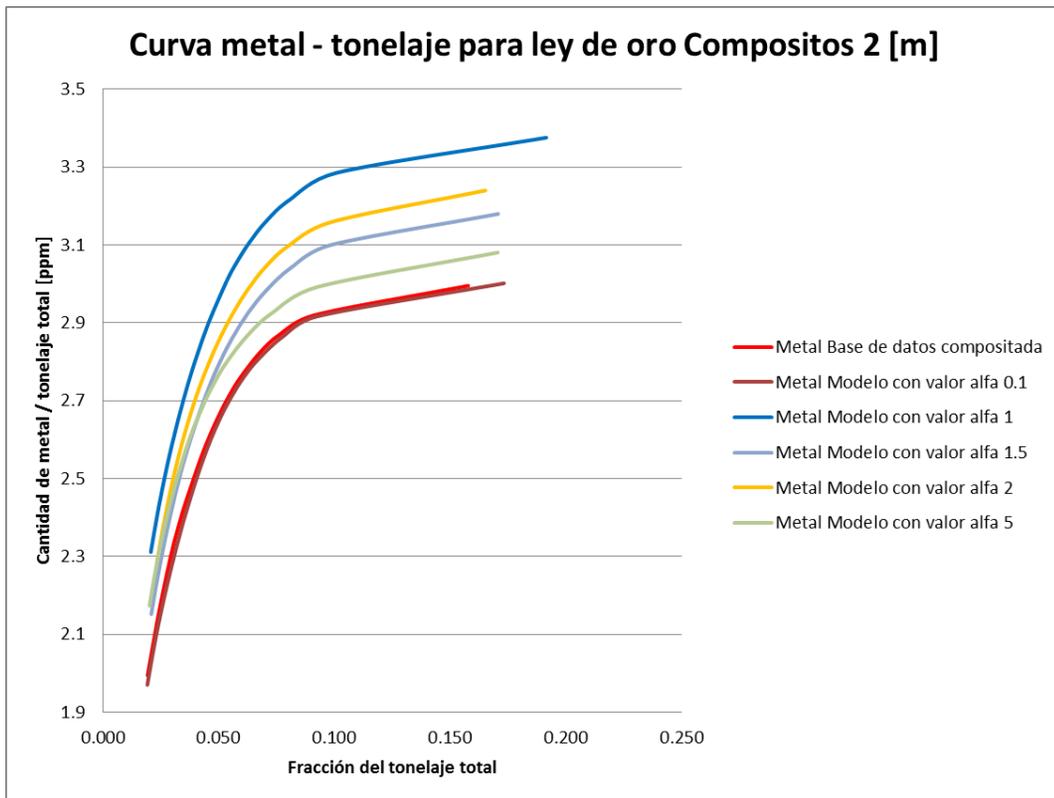
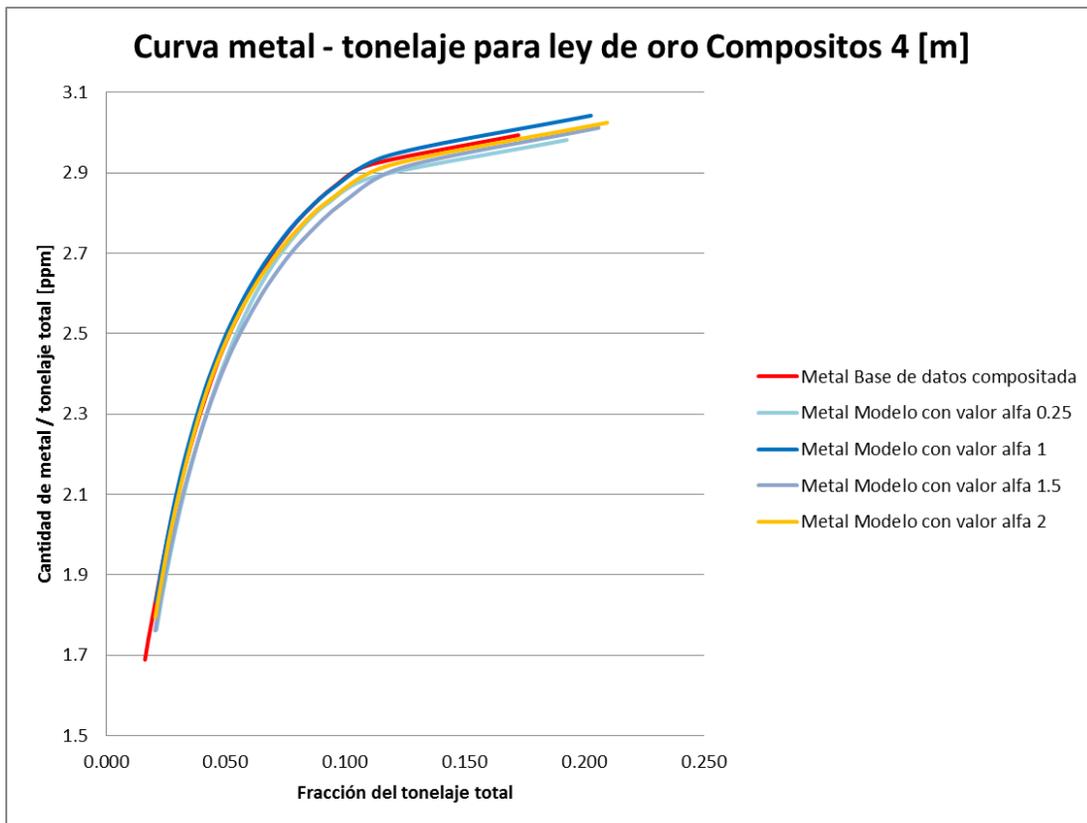


FIGURA 12: CURVAS METAL - TONELAJE PARA ORO, COMPÓSITOS 1 [m]



**FIGURA 13: CURVAS METAL - TONELAJE PARA ORO, COMPÓSITOS 2 [m]**



**FIGURA 14: CURVAS METAL - TONELAJE PARA ORO, COMPÓSITOS 4 [m]**

De la tabla de la suma de los cuadrados de diferencias y las curvas de metal - tonelaje, se determina que los mejores parámetros de forma  $\alpha$  corresponden a los valores 1 y 2. Esto pues tanto en cuanto a distribución como relación metal - tonelaje se encuentran entre los modelos que estiman mejor. Se aprecia además, que para tamaños pequeños, cercanos a los datos originales, los factores de forma puntual parecidos al modelo Gaussiano discreto estiman bien, incluso mejor que muchos valores bajos, pero al modelar tamaño de compósitos más grandes, los mejores modelamientos tienden a agruparse en una zona intermedia (en este caso, entre 1 y 2)

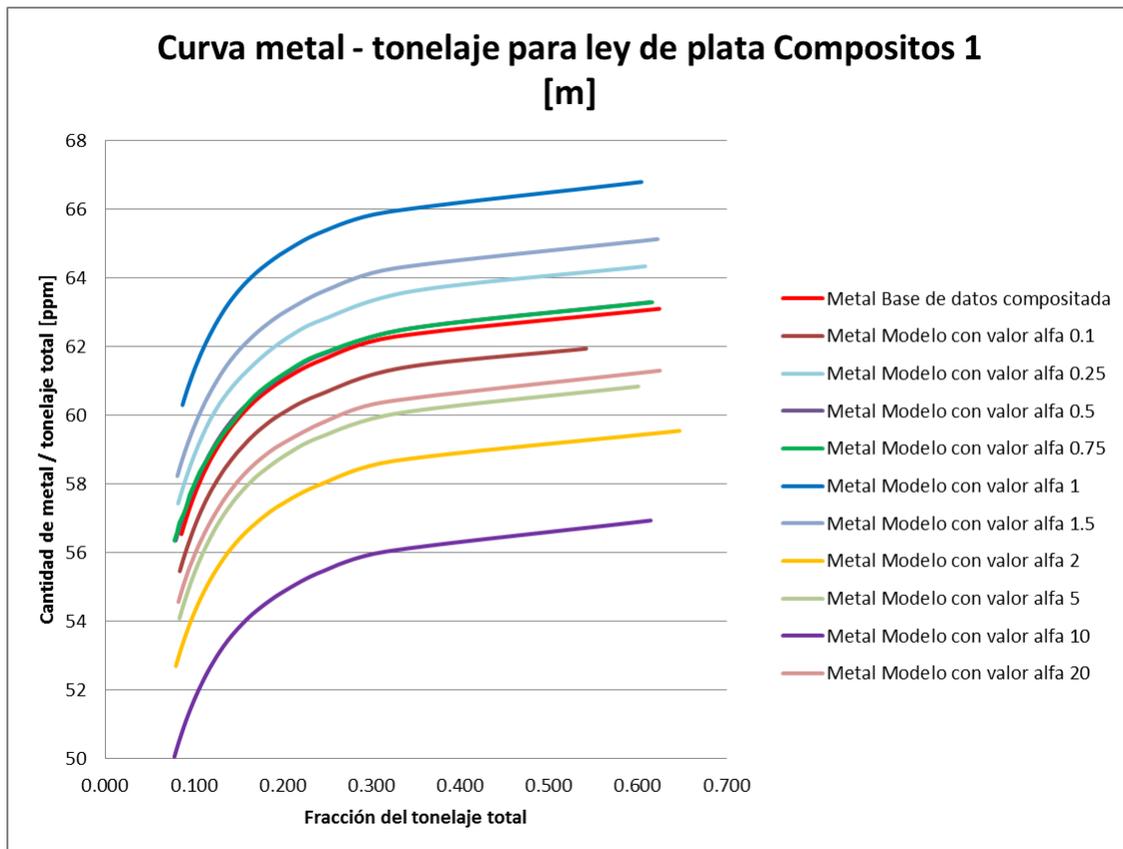
Ahora se procede a realizar el modelamiento Gamma para la plata y una vez finalizado este se presentan los resultados al trabajar con curvas de ley media – ley de corte, con el fin de tener un valor de alfa para el oro.

### 4.3.2. Modelamiento Gamma para plata

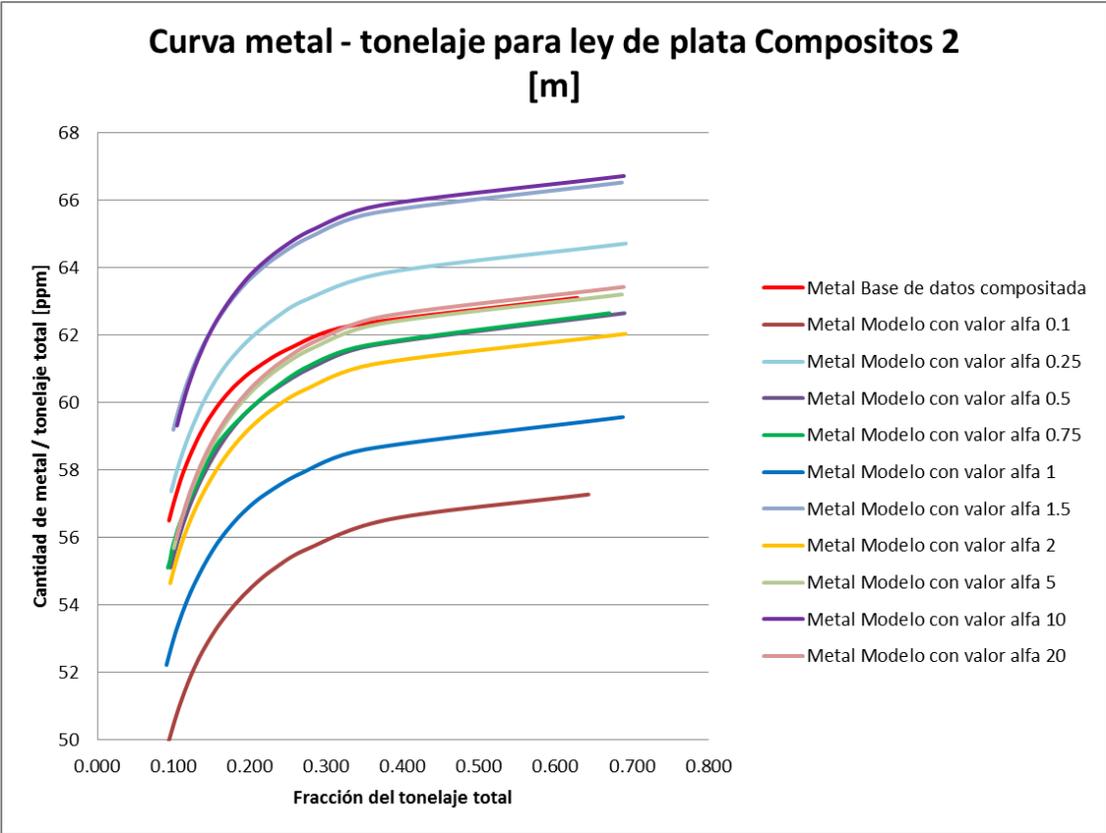
A continuación se presentan los gráficos Q-Q plot y curvas tonelaje-ley para los valores de  $\alpha$  que mejor ajustan y la tabla de los cuadrados de las diferencias para los valores de  $\alpha$  indicados en la sección 3.3 para cada soporte de ley de plata, además de las curvas metal - tonelaje.

	Valores de $\alpha$	Tamaño de compósito		
		1 [m]	2 [m]	4 [m]
Suma de los cuadrados de las diferencias cuantil-cuantil	0.1	3 060.38	135 956.76	69 110.18
	0.25	68 415.10	23 520.66	92 338.49
	0.5	28 721.83	81 753.21	4 567.52
	0.75	39 055.53	38 391.98	28 852.85
	1	65 455.05	76 345.67	29 368.38
	1.5	18 728.20	23 763.69	49 619.32
	2	17 290.72	107 638.40	65 294.29
	5	21 426.83	105 075.43	6 515.87
	10	33 046.18	11 662.05	16 443.22
	20	10 616.25	26 564.11	40 525.75

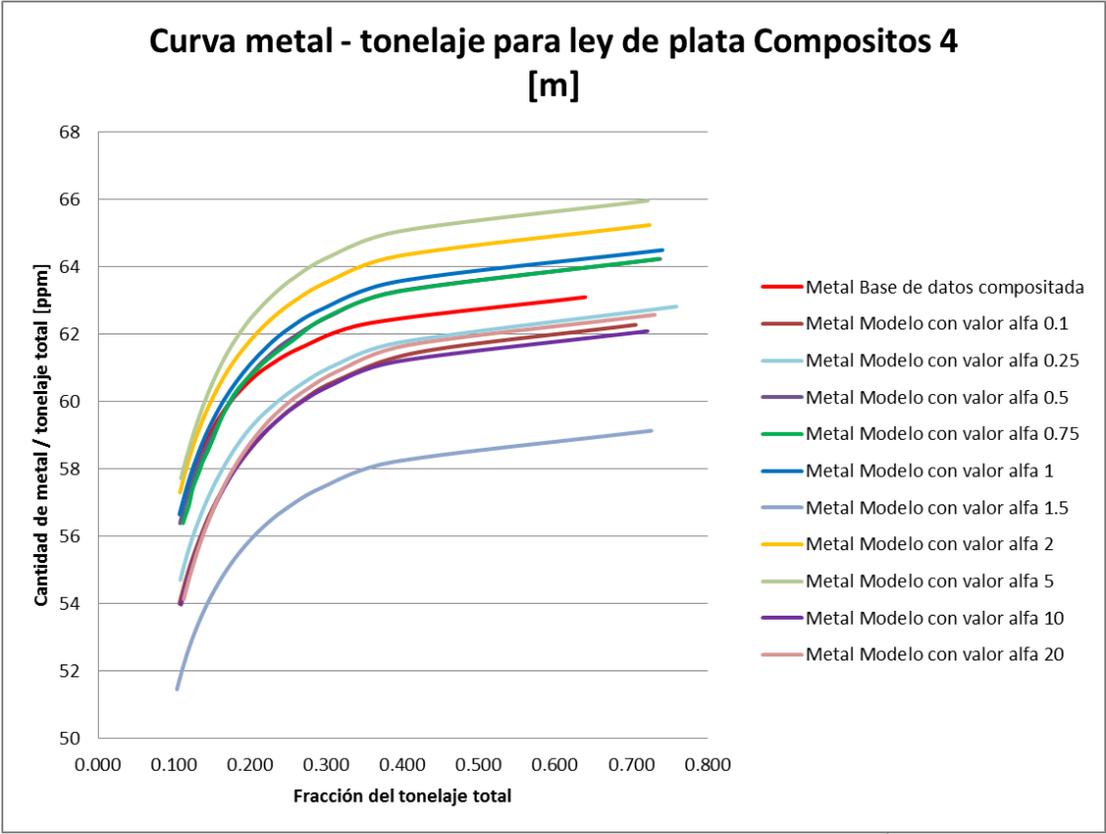
**TABLA 8: SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS DE CADA CUANTIL MODELADO VS CUANTIL COMPÓSITOS REALES DE PLATA**



**FIGURA 15: CURVAS METAL - TONELAJE PARA PLATA, COMPÓSITOS 1 [m]**



**FIGURA 16: CURVAS METAL - TONELAJE PARA PLATA, COMPÓSITOS 2 [m]**



**FIGURA 17: CURVAS METAL - TONELAJE PARA PLATA, COMPÓSITOS 4 [m]**

En base a lo presentado, se determina que el mejor parámetro de forma es 0.75. No se encuentra un segundo valor que cumpla con ambos criterios. Se fija el valor de 1, como valor de prueba, a fin de generar tres modelos y ver cuánto influye la elección de los parámetros de forma en el estudio bivariable y además, al escoger el parámetro de forma 1, se generan 2 modelos interesantes, el modelo en que ambos tienen el mismo parámetro de forma y otro donde tienen un parámetro de forma muy distinto.

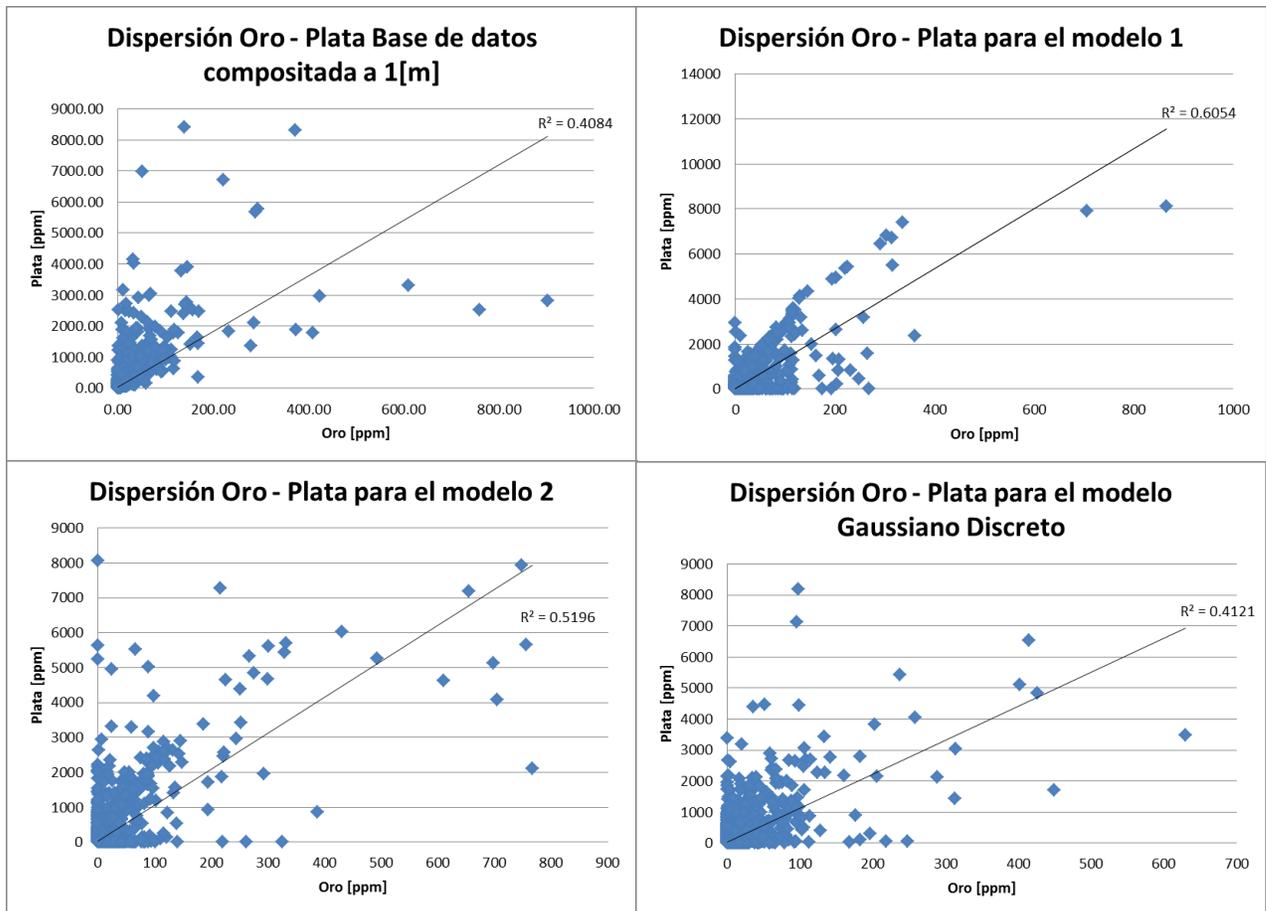
Finalmente, los modelos a utilizar corresponden a los siguientes:

<b>Especie</b>	<b>Modelo 1</b>	<b>Modelo 2</b>	<b>Modelo 3</b>
<b>Oro</b>	1	1	2
<b>Plata</b>	0.75	1	1

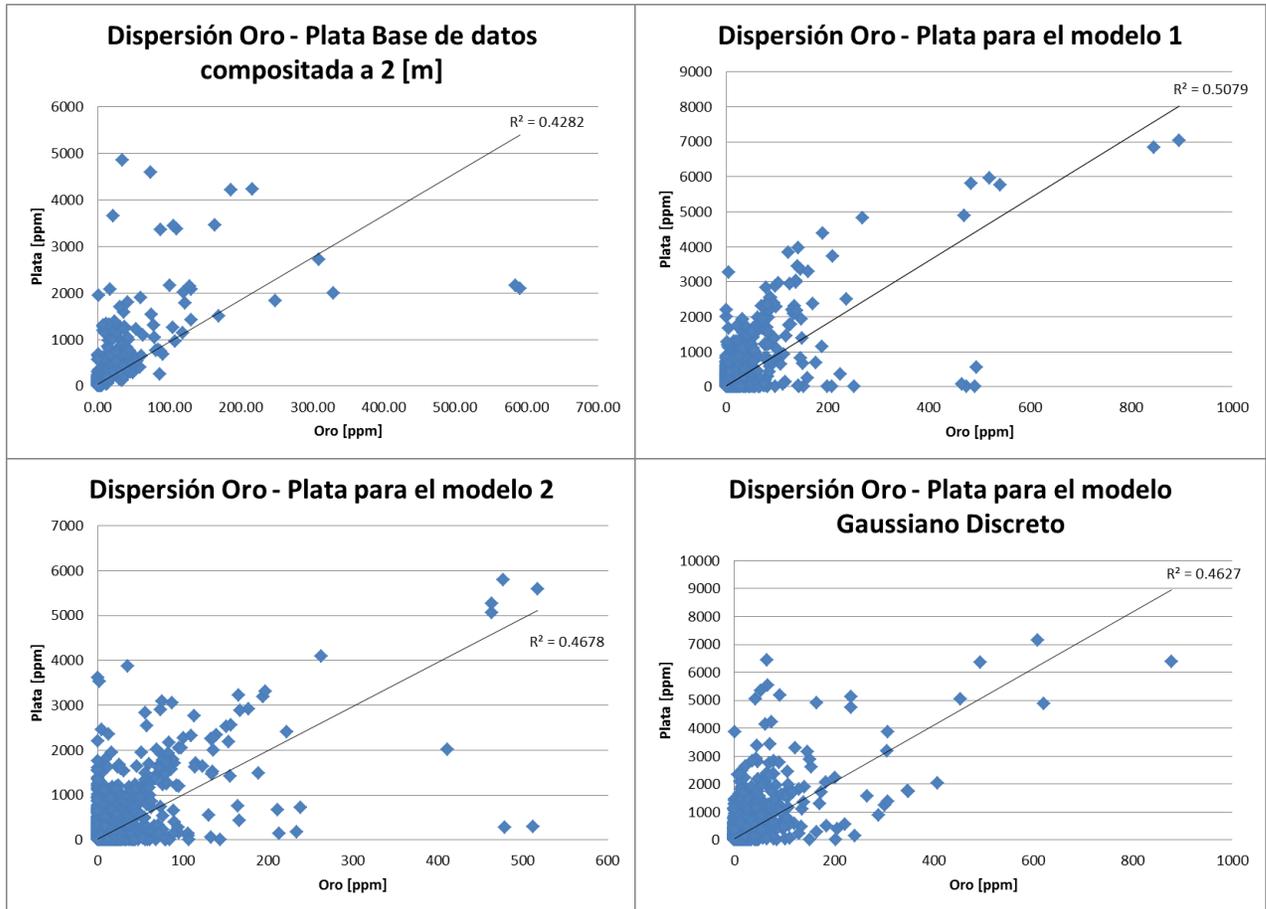
**TABLA 9: MODELOS A UTILIZAR EN ESTUDIO BIVARIABLE**

#### 4.4. Modelo bivariable para oro - plata

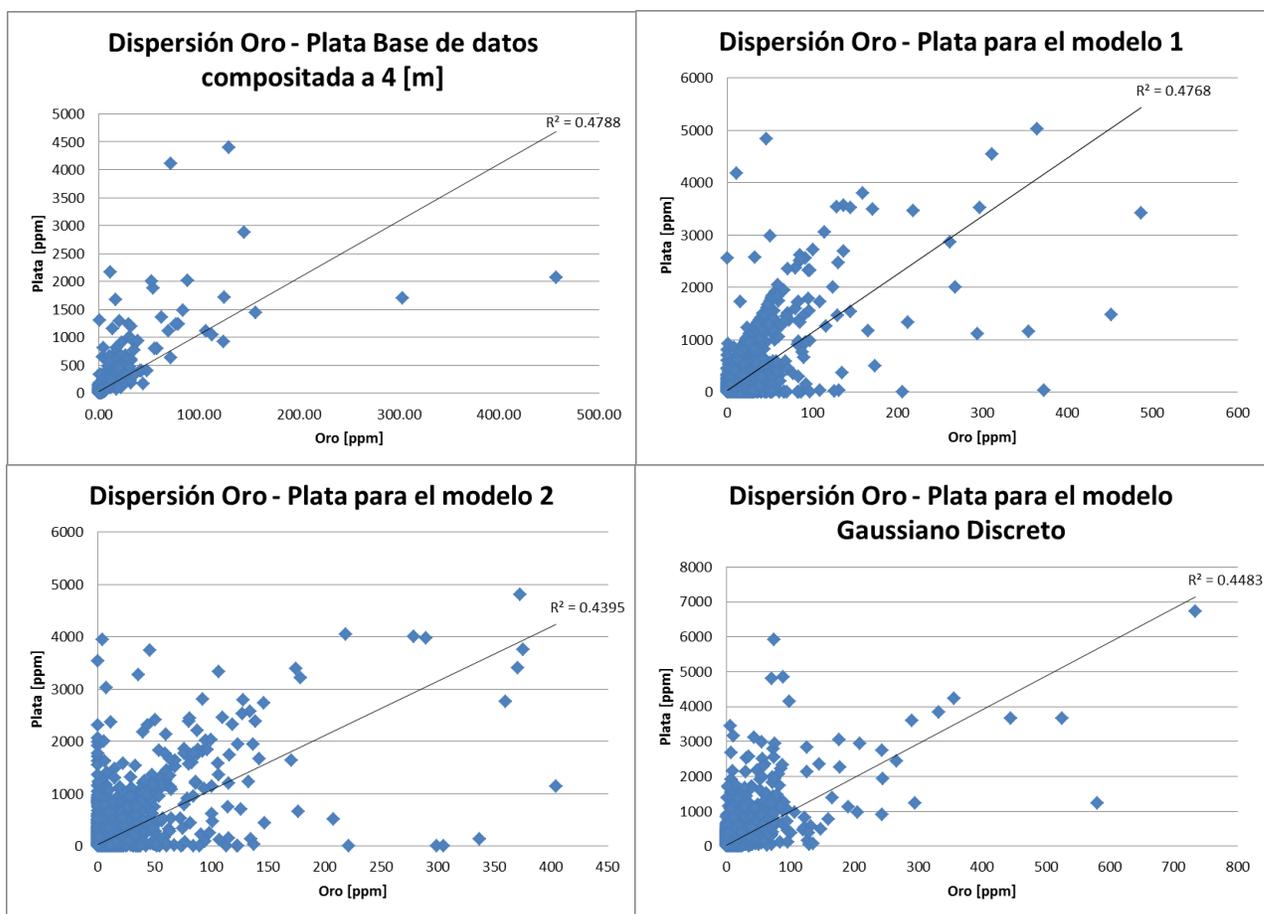
Realizado el modelamiento bivariable, se presentan los resultados obtenidos para los modelos elegidos anteriormente. Cabe señalar que al estar los datos correlacionados, el modelo donde el factor de forma del oro era dos y el de la plata uno, no es posible de modelar, pues sobrepasa la diferencia posible en función de la covarianza. En su reemplazo se utiliza el modelo Gaussiano discreto.



**FIGURA 18: NUBES DE CORRELACIÓN ORO – PLATA TAMAÑO DE BLOQUE 1 [m]**



**FIGURA 19: NUBES DE CORRELACIÓN ORO – PLATA TAMAÑO DE BLOQUE 2 [m]**



**FIGURA 20: NUBES DE CORRELACIÓN ORO –PLATA TAMAÑO DE BLOQUE 4 [m]**

En las nubes de correlación se aprecia que los modelos en general presentan dispersiones similares a los datos reales. En cuanto a los coeficientes de correlación, el modelo 1 es el que tiene los valores mas parecidos al real, excepto en el tamaño de compósito igual a 1 [m], pero en ese caso no presenta ninguno de los modelos un coeficiente similar. El que presenta la peor correlación es el modelo 2. Esto se puede atribuir a que presenta valores distintos de los parámetros de forma, lo que conlleva a correlaciones distintas a la original.

Se continua ahora presentando las curvas tonelaje – ley. En la construcción de estas se trabaja con una ley de oro equivalente, de manera de cruzar las variables en una sola. Se definen 2 formulas para expresar el oro equivalente, la primera utilizando una aproximación entorno a la relación entre precios del oro y plata y otra con un factor distinto, a fin de ver que efectivamente el modelamiento es correcto y no asociarlo al factor de la primera ecuación.

$$AuEq = Au + \frac{Ag}{70}$$

**ECUACIÓN 15: FORMULA PARA CALCULO DE ORO EQUIVALENTE, APROXIMACIÓN ECONOMICA**

$$AuEq = Au + \frac{Ag}{50}$$

ECUACIÓN 16: FORMULA PARA CALCULO DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA

Explicado esto, se presentan las curvas tonelaje ley para los tres tamaños de compósito.

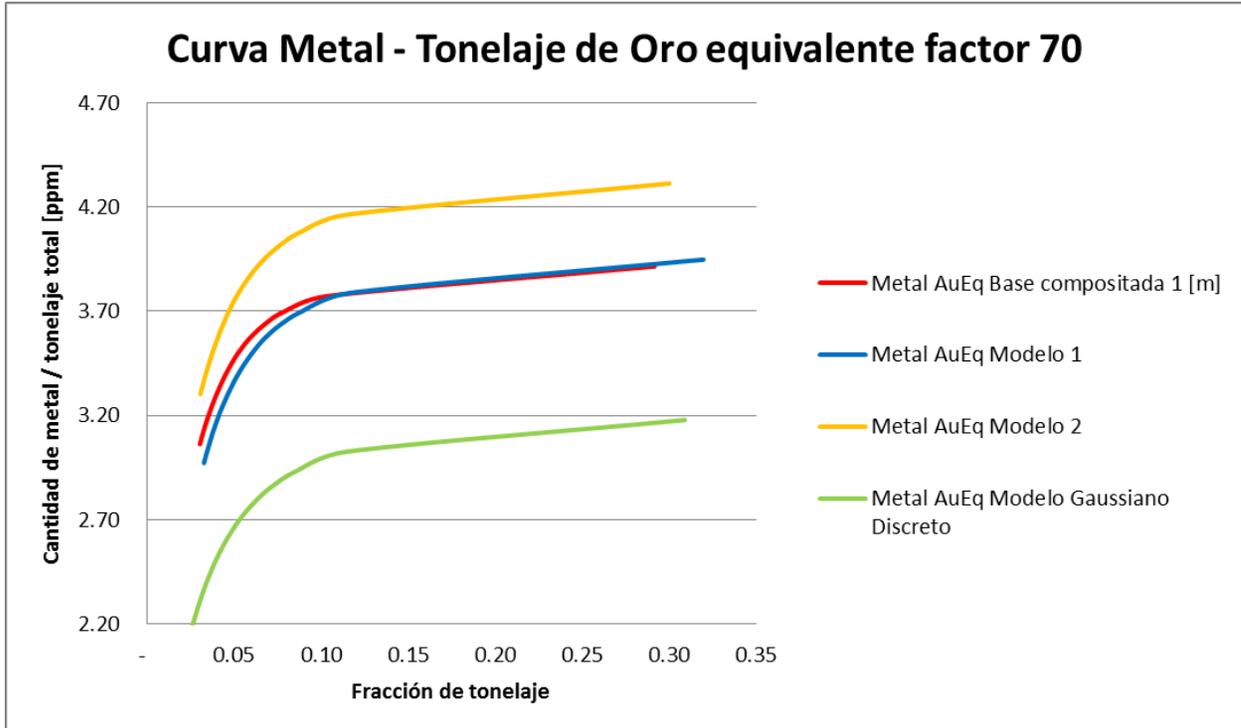
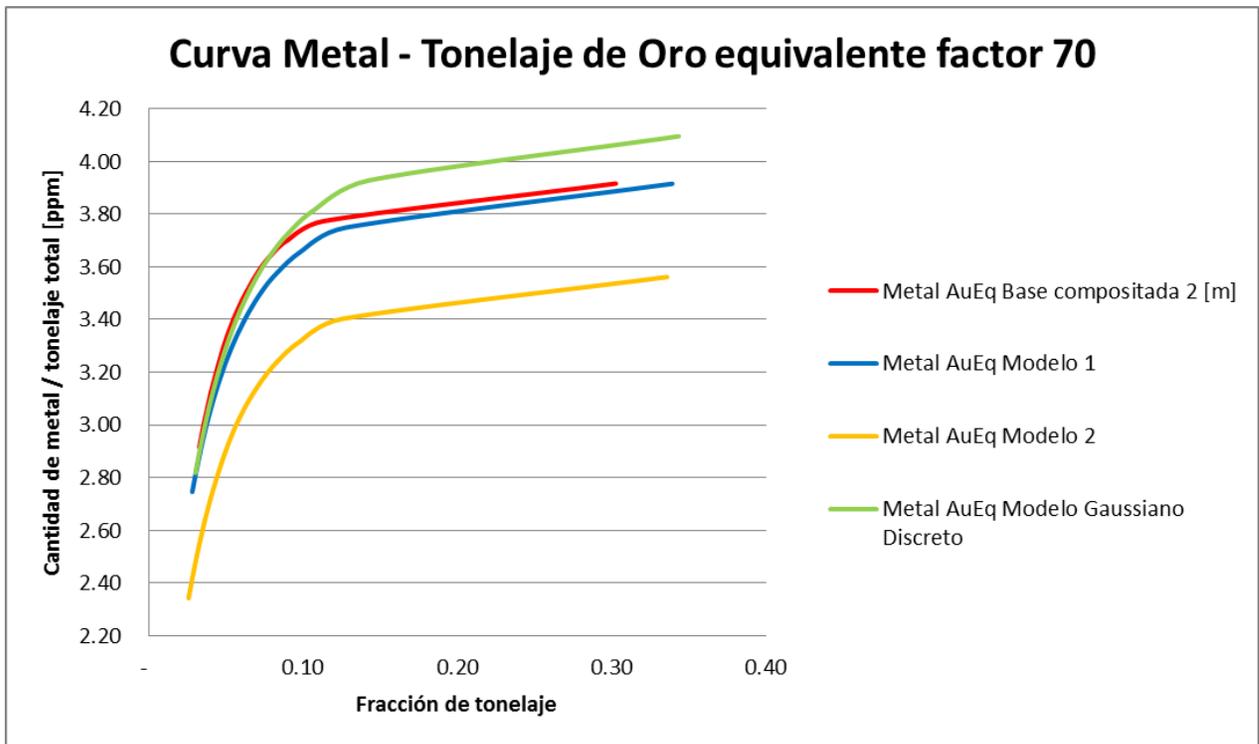
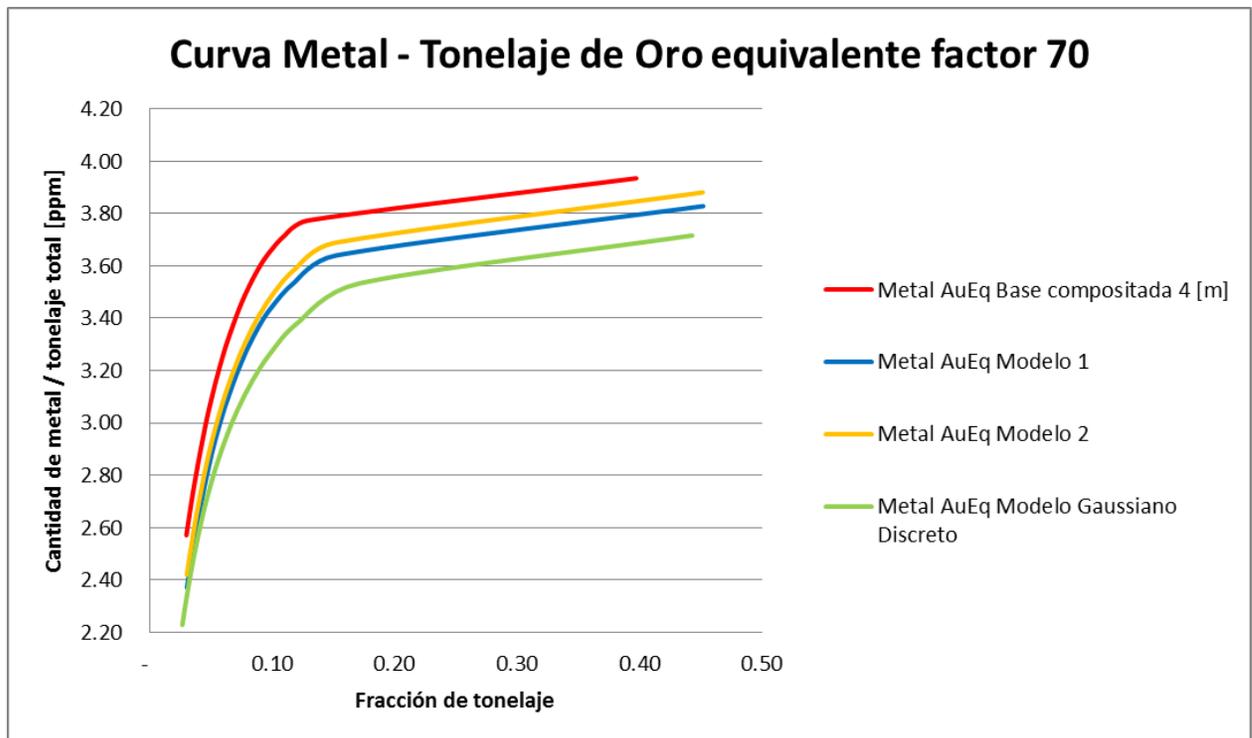


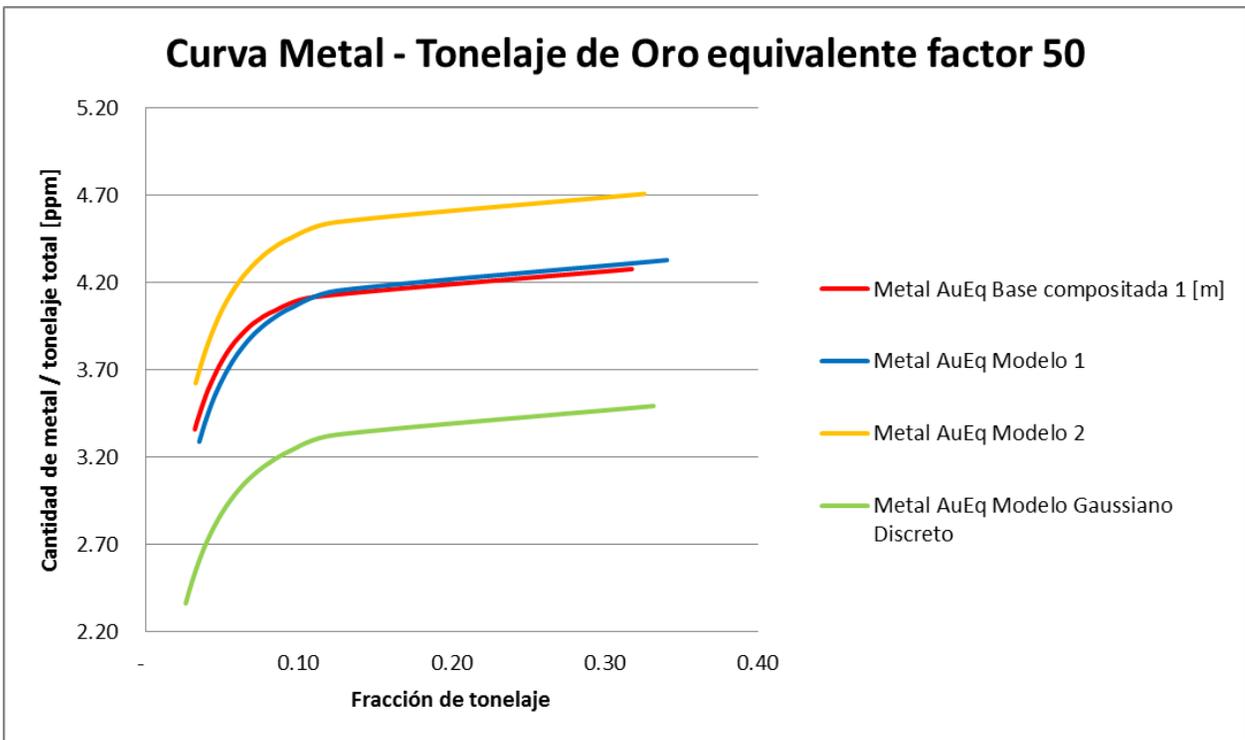
FIGURA 21: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 1 [m]



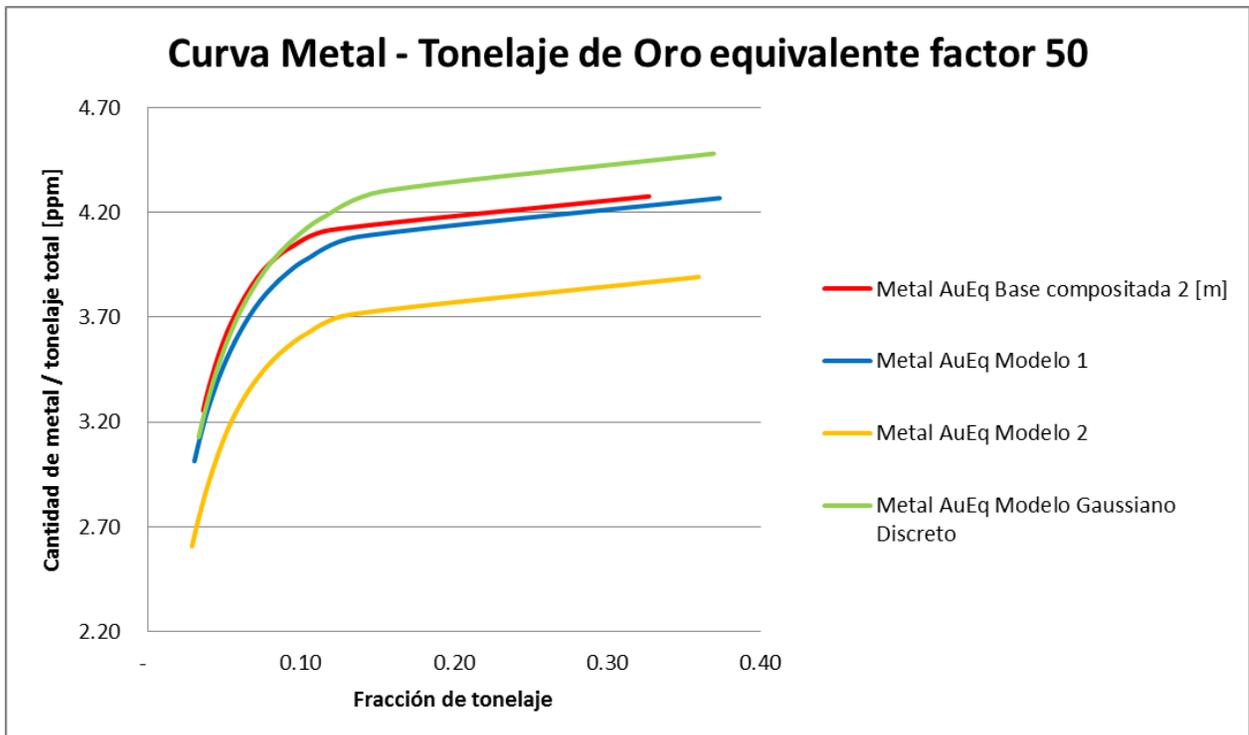
**FIGURA 22: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 2 [m]**



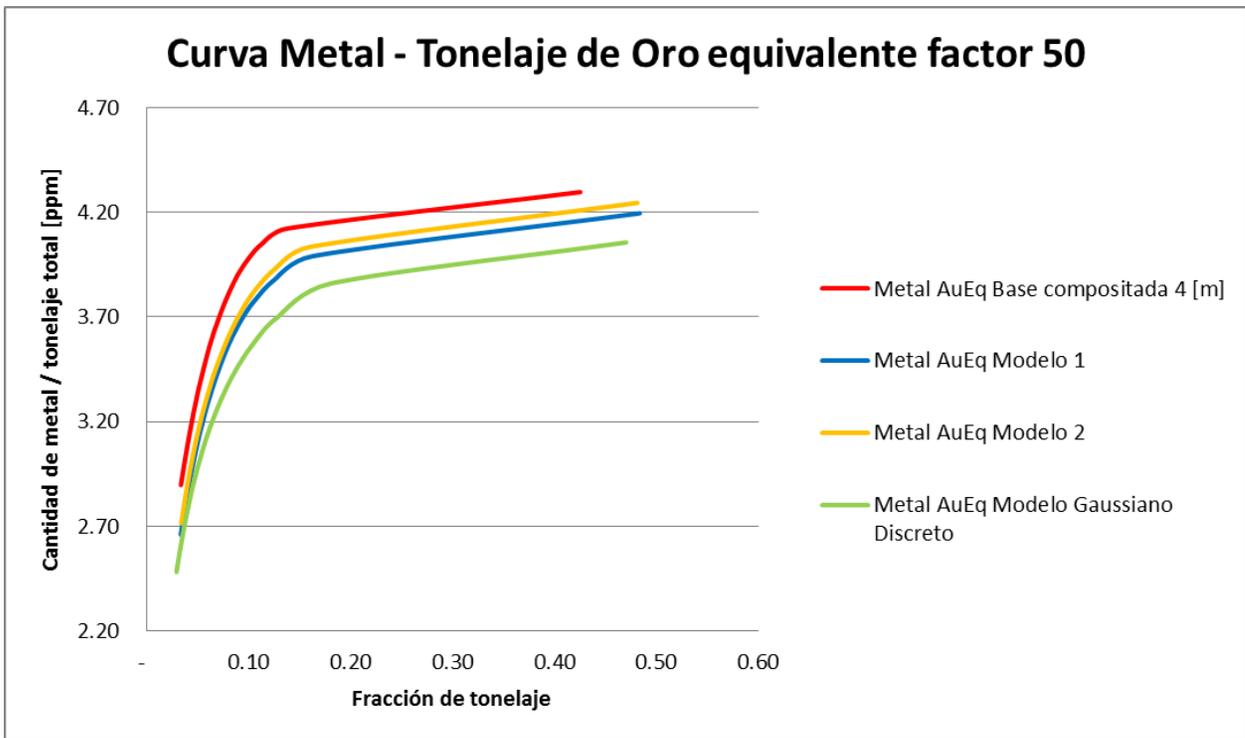
**FIGURA 23: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 4 [m]**



**FIGURA 24: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 1 [m]**



**FIGURA 25: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 2 [m]**



**FIGURA 26: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 4 [m]**

Se aprecia que para todos los tamaños de compósito, el modelo uno (parámetros de forma  $\alpha$  1 para oro y 0.75 para la plata) es el que presenta la curva más parecida a lo esperado. Salvo el caso del compósito de 2 [m] el modelo Gaussiano discreto entrega resultados muy alejados de lo esperado. Se aprecia el mismo fenómeno que en el estudio univariable, al aumentar el tamaño de compósito, el modelamiento se vuelve menos dependiente del factor de forma observándose que se encuentran casi iguales las curvas de los modelos que tienen valores cercanos para el compósito de 4 [m]. Se determina que el modelo uno es el que presenta la mejor estimación de datos en la modelación bivariable. Se procede a comparar la estimación con la del oro y plata univariable

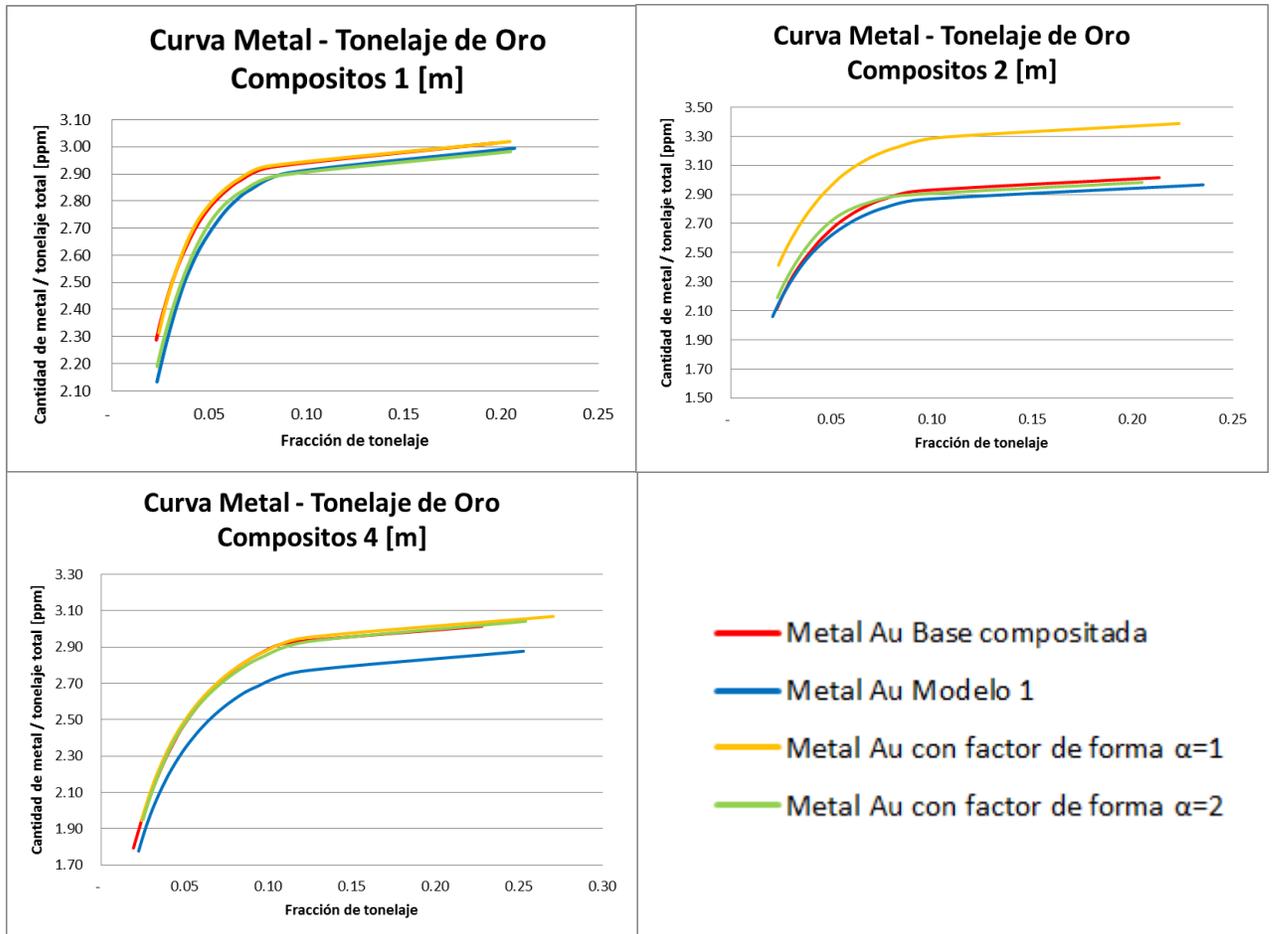
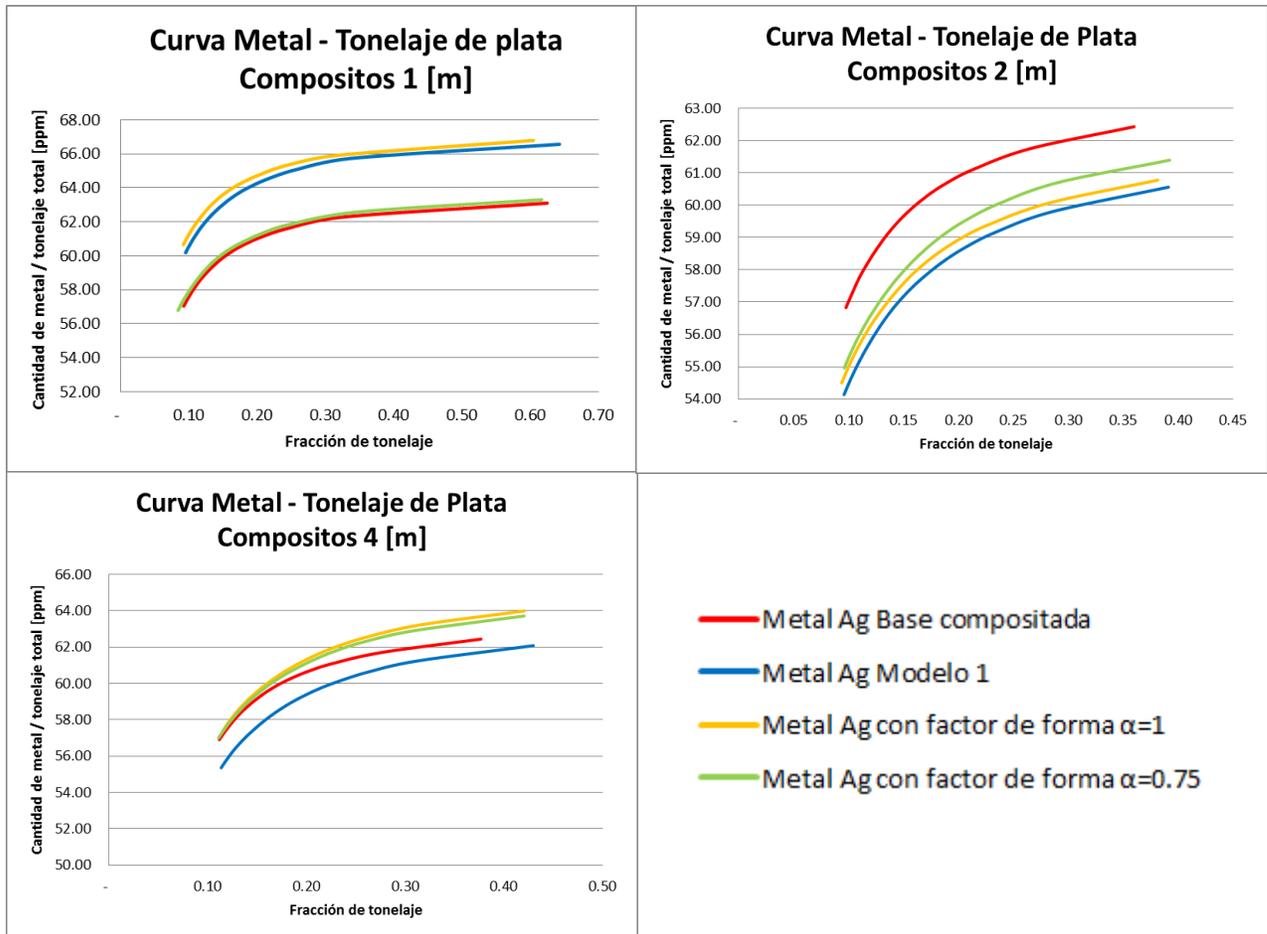


FIGURA 27: CURVAS METAL TONELAJE PARA ORO, COMPÓSITOS DE 1, 2 Y 4 [m]



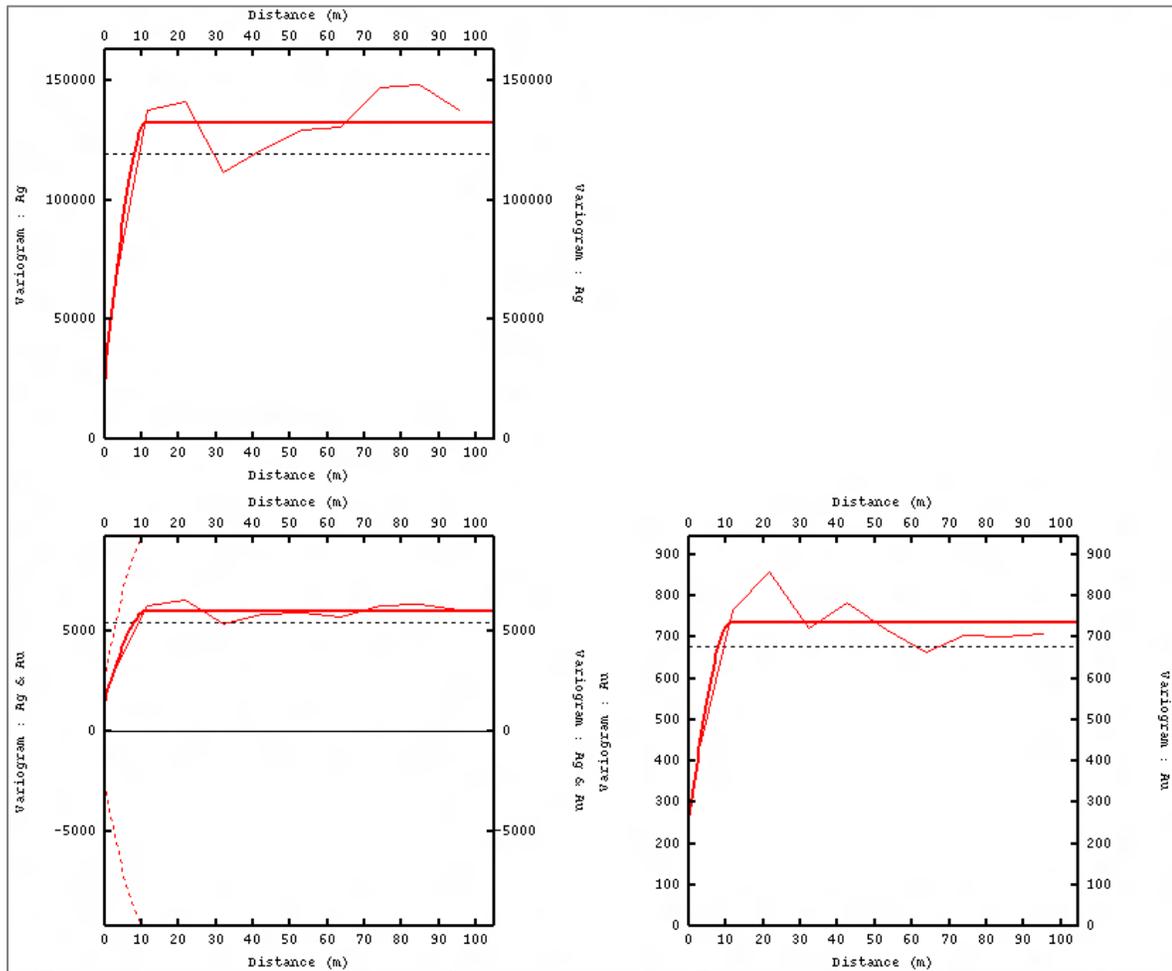
**FIGURA 28: CURVAS METAL TONELAJE PARA PLATA, COMPÓSITOS DE 1, 2 Y 4 [m]**

Se aprecia que en general no hay mayor diferencia entre los casos univariados y bivariados, y además, en el tramo inferior a 20 % de los datos, estima bien los datos, tramo de leyes mayores a 0.5 [ppm] (observar en los anexos las curvas tonelaje – ley). El modelo 2 es el que peor estima, lo cual se entiende al observar las nubes de dispersión, donde es el que presenta los valores de correlación más distintos. Al realizar la comparación con los factores de forma univariados, se puede concluir que los modelos bivariados entregan en general peores resultados que los modelos univariados en el caso del oro. Solo en el caso de la plata, en los compósitos de 2 y 4 [m] los modelos univariados son mejores que los bivariados.

Se concluye que el mejor modelo para estimación de recursos corresponde al modelo 1 (con parámetro de forma  $\alpha$  1 para el oro y 0.75 para la plata), pues presenta buena estimación de ley media – ley de corte y presenta la mejor dispersión para todos los tamaños de compósito.

#### 4.5. Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación

Ya calibrado el modelo se aplica para estimar recursos en soporte de bloques de 10 x 10 x 10 m, para analizar la selectividad que se tendrá en la explotación, para esto, se modela el variograma experimental y a partir de este se calculan las varianzas y covarianza.



**FIGURA 29: VARIOGRAMAS MODELADOS PARA ORO Y PLATA**

En los variogramas, se aprecia que la meseta es mayor a la varianza, por lo que se ajustan de manera que estos 2 valores calcen. Realizado eso, se procede a la regularización a bloque del variograma y se obtiene la siguiente matriz covarianza:

	<b>Au</b>	<b>Ag</b>
<b>Au</b>	116.10	
<b>Ag</b>	1081.10	26 001.17

**TABLA 10: MATRIZ COVARIANZA PARA ORO PLATA**

Con estos valores mas los parámetros de distribución puntual  $\alpha$  elegidos anteriormente (1 para el oro y 0.75 para la plata), se realiza el modelamiento, del que se obtienen los siguientes resultados.

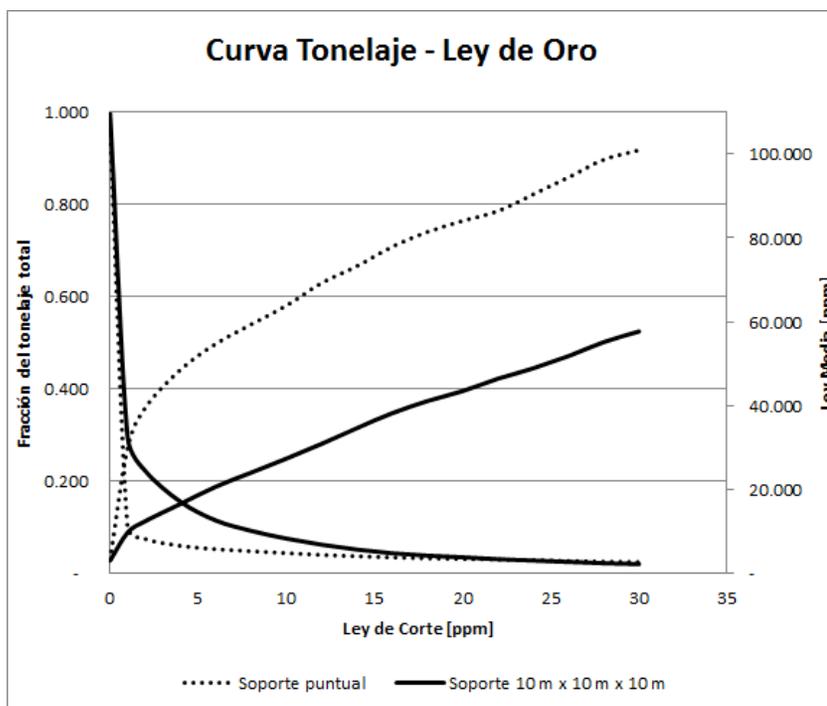
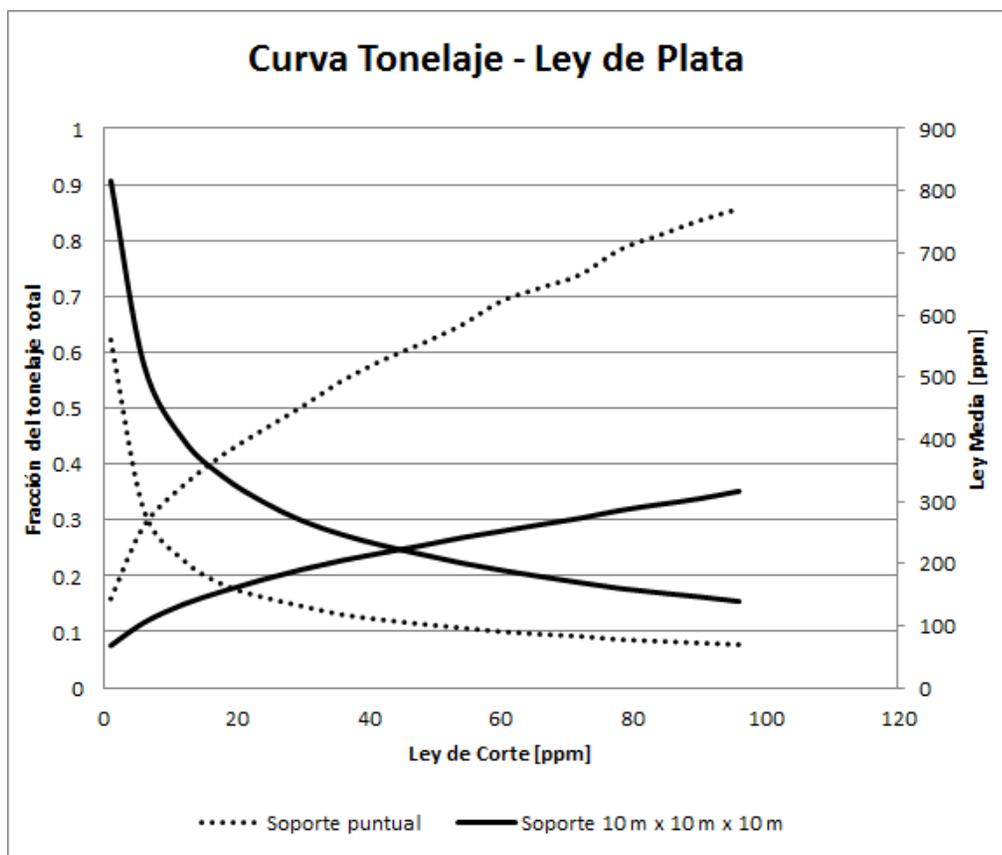


FIGURA 30: CURVA TONELAJE LEY PARA EL ORO

Ley de corte	Ley Au puntual [ppm]	Ley Au Soporte 10 m x10 m x10 m [ppm]	Tonelaje Au puntual	Tonelaje Au Soporte 10 m x10 m x10 m
2	43.33	12.77	0.074	0.222
4	53.55	16.93	0.059	0.155
6	60.70	21.08	0.052	0.115
8	65.23	24.50	0.047	0.092
10	70.40	28.15	0.044	0.075
12	76.40	31.44	0.040	0.062
14	81.30	35.52	0.037	0.051
16	83.66	39.26	0.034	0.043
18	87.20	41.85	0.032	0.038
20	91.02	44.45	0.031	0.034
22	93.42	47.35	0.030	0.030
24	97.47	49.82	0.028	0.028
26	102.22	52.49	0.026	0.025
28	106.50	55.58	0.025	0.022
30	109.78	58.61	0.024	0.020
32	115.54	61.23	0.023	0.018
34	119.87	64.46	0.022	0.016

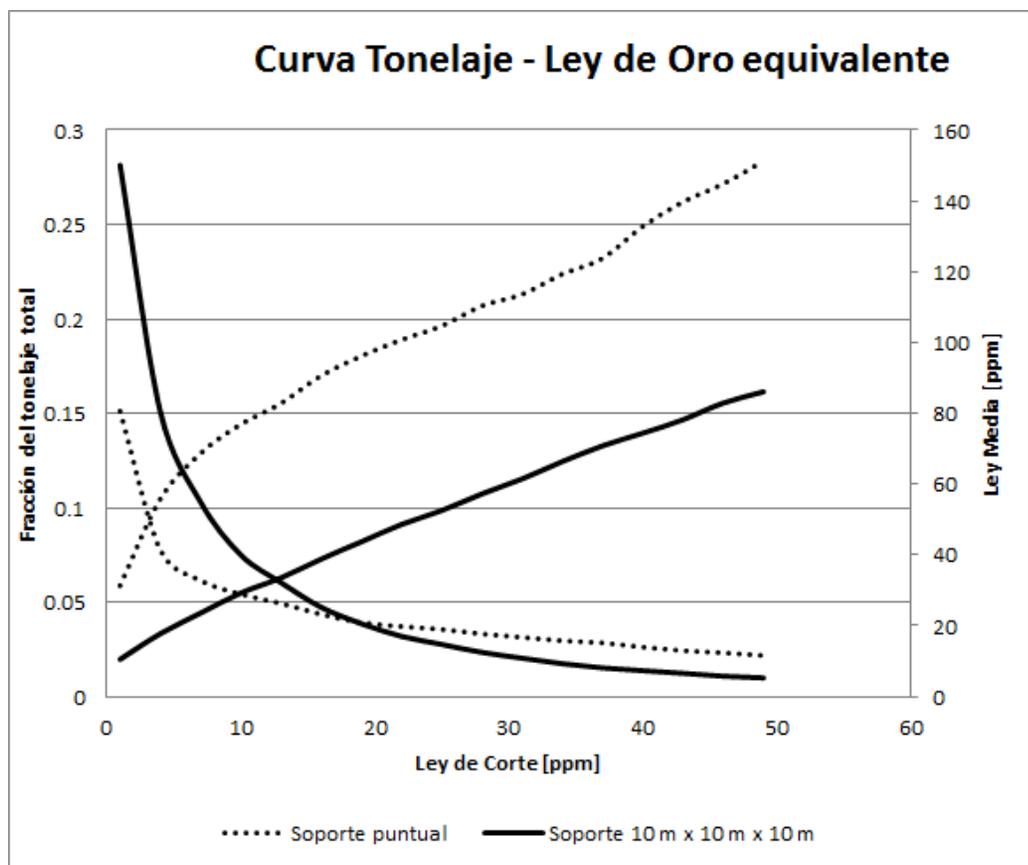
TABLA 11: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA EL ORO



**FIGURA 31: CURVA TONELAJE LEY PARA LA PLATA**

Ley de corte	Ley Ag puntual [ppm]	Ley Ag Soporte 10 m x10 m x10 m [ppm]	Tonelaje Ag puntual	Tonelaje Ag Soporte 10 m x10 m x10 m
1	143.49	67.91	0.622	0.906
6	260.72	105.00	0.317	0.577
12	326.01	134.51	0.228	0.443
18	375.51	155.78	0.184	0.377
24	415.10	174.29	0.162	0.333
30	453.24	190.77	0.146	0.298
36	494.49	205.06	0.131	0.274
42	526.87	217.21	0.122	0.255
48	553.84	228.97	0.114	0.239
54	583.67	241.54	0.107	0.223
60	622.10	252.02	0.100	0.211
66	643.89	262.70	0.096	0.199
72	665.19	273.09	0.092	0.188
78	705.48	285.61	0.086	0.178
84	728.77	295.17	0.083	0.170
90	751.93	304.41	0.080	0.163
96	771.15	316.43	0.077	0.155

**TABLA 12: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA EL PLATA**



**FIGURA 32: CURVA TONELAJE LEY PARA ORO EQUIVALENTE**

<b>Ley de corte</b>	<b>Ley Au-eq puntual [ppm]</b>	<b>Ley Au-eq Soporte 10 m x10 m x10 m [ppm]</b>	<b>Tonelaje Au-eq puntual</b>	<b>Tonelaje Au-eq Soporte 10 m x10 m x10 m</b>
1	31.33	10.50	0.151	0.282
4	55.76	17.77	0.078	0.151
7	68.68	23.57	0.061	0.103
10	76.89	29.23	0.054	0.075
13	82.81	33.55	0.049	0.060
16	90.66	38.84	0.044	0.047
19	96.18	43.73	0.039	0.039
22	100.82	48.63	0.037	0.032
25	104.73	52.57	0.036	0.028
28	110.38	57.27	0.033	0.023
31	113.67	61.50	0.031	0.020
34	119.37	66.38	0.030	0.017
37	123.82	70.85	0.028	0.015
40	132.84	74.42	0.026	0.014
43	139.77	78.21	0.024	0.012
46	144.84	82.93	0.023	0.011
49	151.28	86.11	0.022	0.010

**TABLA 13: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA ORO EQUIVALENTE**

Los parámetros distribución de forma de bloque que se obtuvieron son los siguientes.

	Parámetro de forma puntual $\alpha$	Parámetro de forma de bloque $\alpha_v$
Au	1	2.60
Ag	0.75	2.51

**TABLA 14: PARÁMETROS DE FORMA MODELO PARA BLOQUE DE 10 m x 10 m x 10 m**

Se aprecia consistencia con la realidad, pues es esperable que para leyes de corte bajas el soporte puntual tenga mayor ley y menor tonelaje, tendencia que se mantiene siempre para las leyes, pero se invierte en el tonelaje para leyes de corte muy altas. La incongruencia ocurre al analizar leyes de corte muy bajas (cerca al cero) donde si hay diferencia entre la teoría y lo visto. En cualquier caso, es esperable considerando la naturaleza de la base de datos, pues el modelamiento no genera tantos valores nulos como la realidad

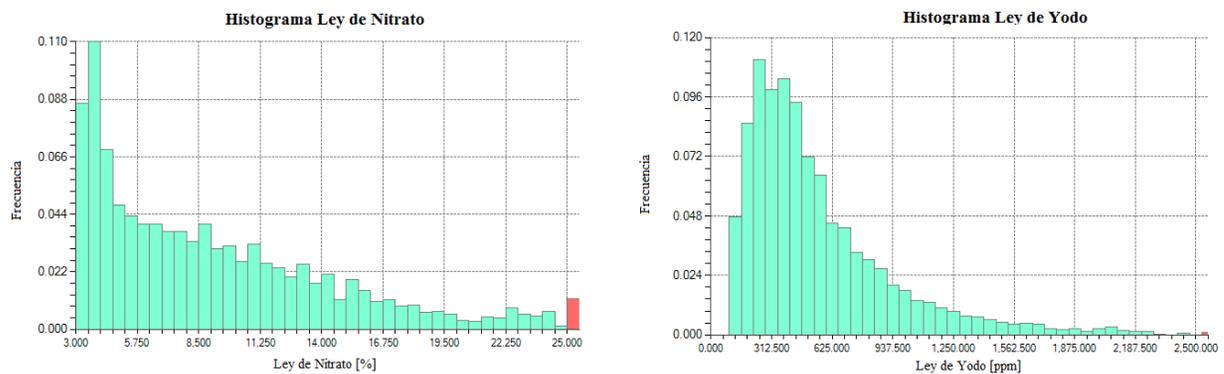
## 5. CASO DE ESTUDIO: YACIMIENTO DE NITRATO-YODO

### 5.1. Estudio exploratorio

La base de datos consiste en 2 916 datos, provenientes de sondajes de exploración. El muestreo es homotópico y considera la ley de nitrato y yodo. No incluye el tipo de roca, pero al tratarse de un yacimiento tipo manto, además de la baja cantidad de datos un filtro a los datos más preciso es innecesario.

Los sondajes presentan una malla regular, donde los datos están todos compositados a 0.5 [m]. La zona cubierta por el muestreo es aproximadamente 1010 [m] en la dirección este, 1750 [m] en la dirección norte y 36 [m] en la vertical.

A continuación, se presenta el estudio exploratorio, analizando estadísticas, distribuciones y relaciones entre las variables presentes.



**FIGURA 33: HISTOGRAMA LEYES DE NITRATO Y YODO**

	<b>Ley de Nitrato [%]</b>	<b>Ley de Yodo [ppm]</b>
<b>Media</b>	9.14	585.35
<b>Varianza</b>	29.79	150 461.96
<b>Curtosis</b>	0.61	3.86
<b>Coefficiente de asimetría</b>	1.08	1.79
<b>Mínimo</b>	3.13	130
<b>Máximo</b>	26.88	2 665.00
<b>Cuenta</b>	2 916	2 916

**TABLA 15: ESTADÍSTICAS BÁSICAS YACIMIENTO NITRATO - YODO**

Se aprecia en los histogramas y tablas que el yacimiento corresponde a un caso donde el modelo Gaussiano discreto tiene problemas, que es cuando las distribuciones son altamente asimétricas, en el caso del nitrato está más acentuada esta característica.

## 5.2. Composición de los datos

Un objetivo de compositar los datos es determinar las varianzas de manera precisa y así eliminar el error de estimación que se tendría en el caso de usar el variograma para calcular la varianza y covarianza de bloques. Se utilizan también tres tamaños de compósito: 1 [m], 2 [m] y 4 [m].

Las estadísticas importantes a considerar en esta etapa son la media (ésta no debe variar con respecto a la base de datos original), las varianzas y covarianza de bloque, pues son los parámetros a utilizar al realizar el cambio de soporte uni y bivariable.

Con lo dicho anteriormente, se presentan las estadísticas e histogramas de los compósitos.

Tamaño de bloque 1 [m]	Ley de Nitrato [%]	Ley de Yodo [ppm]
Datos	1 080	1 080
Media	9.99	646.50
Varianza	24.45	131 641.5
Covarianza	1 164.97	

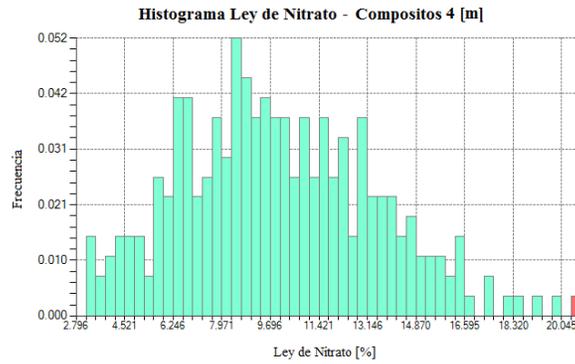
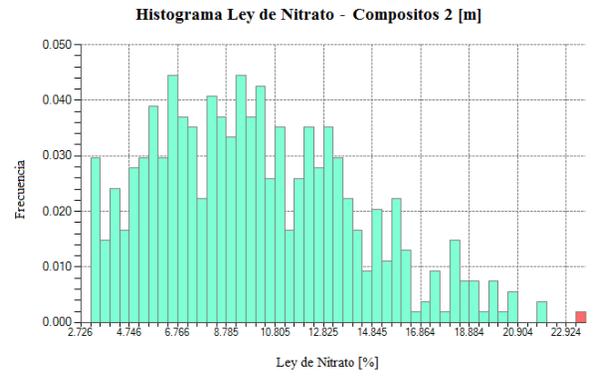
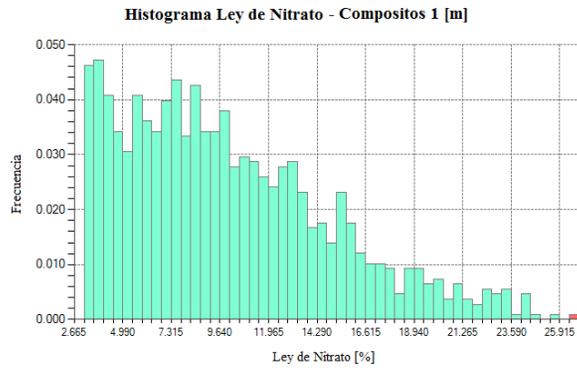
TABLA 16: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 1 [m]

Tamaño de bloque 2 [m]	Ley de Nitrato [%]	Ley de Yodo [ppm]
Datos	540	540
Media	9.99	646.5
Varianza	17.01	91 990.4
Covarianza	868.48	

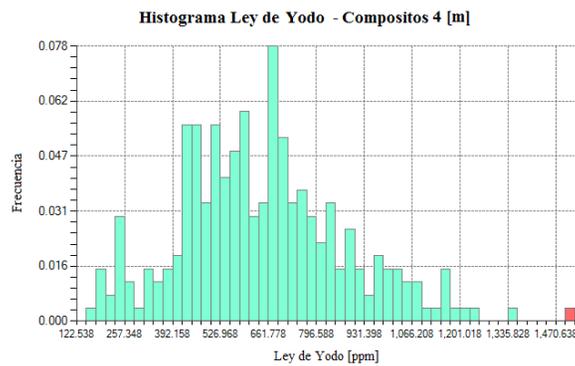
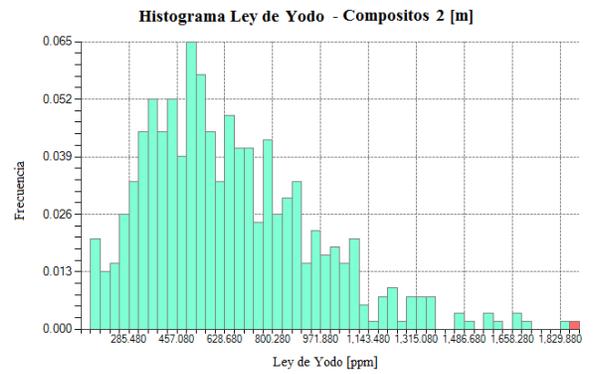
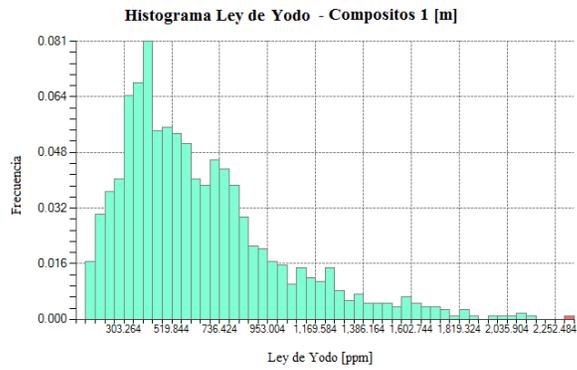
TABLA 17: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 2 [m]

Tamaño de bloque 4 [m]	Ley de Nitrato [%]	Ley de Yodo [ppm]
Datos	270	270
Media	9.99	646.5
Varianza	11.92	55 390.3
Covarianza	622.73	

TABLA 18: ESTADÍSTICAS BÁSICAS COMPÓSITOS 4 [m]

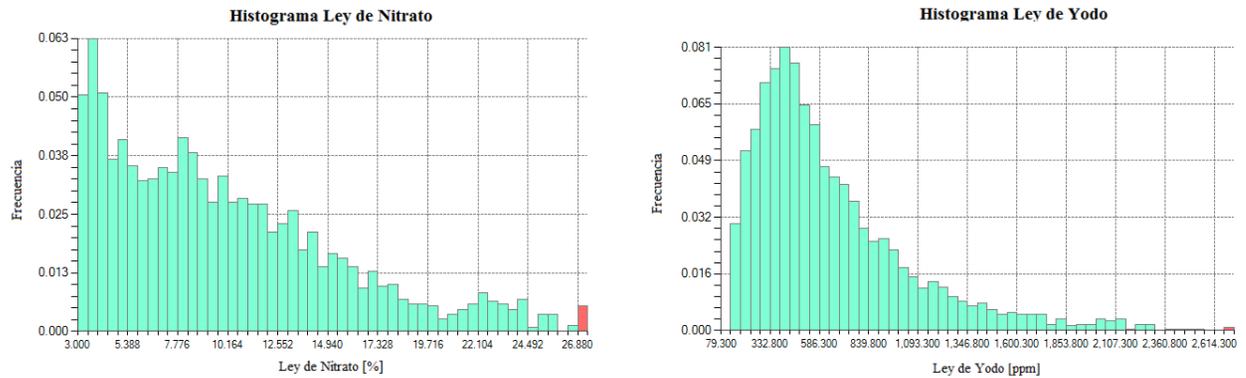


**FIGURA 34: HISTOGRAMA LEY DE NITRATO PARA LOS DISTINTOS COMPÓSITOS.**



**FIGURA 35: HISTOGRAMA LEY DE YODO PARA LOS DISTINTOS COMPÓSITOS.**

Se tiene el mismo problema que con la base de datos Oro-Plata: las medias son diferentes entre los datos compositados y la base de datos original, por lo que se eliminan los datos que son considerados cola y se dejan sólo los que utilizan los compósitos de manera que calcen ambos.



**FIGURA 36: HISTOGRAMA LEYES DE NITRATO Y YODO CORREGIDAS**

	<b>Ley de Nitrato [%]</b>	<b>Ley de Yodo [ppm]</b>
<b>Media</b>	9.99	646.5
<b>Varianza</b>	30.29	169 926.42
<b>Curtosis</b>	0.33	2.90
<b>Coefficiente de asimetría</b>	0.93	1.58
<b>Mínimo</b>	3.13	130
<b>Máximo</b>	26.88	2 665
<b>Cuenta</b>	2 160	2 160

**TABLA 19: ESTADÍSTICAS BÁSICAS PARA LEYES DE NITRATO Y YODO CORREGIDAS**

### 5.3. Modelamiento Gamma Univariable

Una vez filtrada la base de datos y determinadas las varianzas de los distintos soportes, se procede a estimar las leyes para cada uno de los parámetros de forma  $\alpha$ .

#### 5.3.1. Modelamiento para Nitrato

A continuación se presentan los gráficos Q-Q plot y curvas tonelaje-ley para los valores de  $\alpha$  que mejor ajustan y la tabla de los cuadrados de las diferencias para los valores de  $\alpha$  indicados en la sección 3.3 para cada soporte de ley de nitrato.

	Valores de $\alpha$	Tamaño de compuesto		
		1 [m]	2 [m]	4 [m]
Suma de los cuadrados de las diferencias cuantil-cuantil	0.1	176.67	95.66	55.34
	0.25	9.97	6.75	7.04
	0.5	3.34	3.31	5.03
	0.75	3.04	4.80	4.26
	1	2.17	4.17	3.88
	1.5	1.73	5.98	4.53
	2	1.43	4.48	4.03
	5	2.14	4.92	5.12
	10	2.44	4.79	5.91
	20	2.41	5.46	8.04

**TABLA 20: SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS DE CADA CUANTIL MODELADO VS CUANTIL COMPÓSITOS REALES DE NITRATO.**

De los datos presentados en la tabla, se desprende que el valor de  $\alpha$  igual a 2 es el mejor, para contraste también se considera el parámetro de forma  $\alpha$  igual a 1. No se incluye en esta sección las curvas ley de corte – ley media pues los valores resultaban ser cercanos a los datos reales en casi todo el tramo. Esos gráficos se incluyen en el anexo B, al igual que los Q-Q Plot.

### 5.3.2. Modelamiento para Yodo

A continuación se presentan los gráficos percentil-percentil para los valores de  $\alpha$  indicados en la sección 3.3 para cada soporte de ley de yodo.

	Valores de $\alpha$	Tamaño de compuesto		
		1 [m]	2 [m]	4 [m]
Suma de los cuadrados de las diferencias cuantil-cuantil	0.1	560 435.41	370 117.92	234 298.14
	0.25	65 659.57	65 352.38	94 102.54
	0.5	17 648.10	63 345.27	86 062.32
	0.75	14 528.81	47 613.23	71 689.38
	1	22 184.88	52 227.30	83 944.75
	1.5	20 634.81	36 226.06	73 737.23
	2	14 494.01	34 223.79	74 326.92
	5	12 381.33	52 618.26	76 111.02
	10	20 846.58	32 348.47	76 970.44
	20	15 757.73	25 500.00	80 218.08

**TABLA 21: SUMA DE LOS CUADRADOS DE LAS DIFERENCIAS DE CADA CUANTIL MODELADO VS CUANTIL COMPÓSITOS REALES DE YODO.**

Se aprecia que principalmente el parámetro de forma igual a 2 es el mejor. Respecto al segundo mejor valor, se tiene que el valor de 0.75 y 1.5 están parejos, se elige el parámetro 1.5, al estar más cercano a los parámetros de forma del nitrato y así generar 3 modelos para comparar. Los gráficos ley media – ley de corte se pueden apreciar en la sección Anexos B, pues no aportaban en la elección del parámetro de forma.

<b>Especie</b>	<b>Modelo 1</b>	<b>Modelo 2</b>	<b>Modelo 3</b>
<b>Nitrato</b>	1	2	2
<b>Yodo</b>	1.5	1.5	2

**TABLA 22: MODELOS A UTILIZAR EN ESTUDIO BIVARIABLE NITRATO - YODO**

#### 5.4. Modelo bivariable para Nitrato – Yodo

Realizado el modelamiento bivariable, se presentan los resultados obtenidos para los respectivos factores de forma  $\alpha$ .

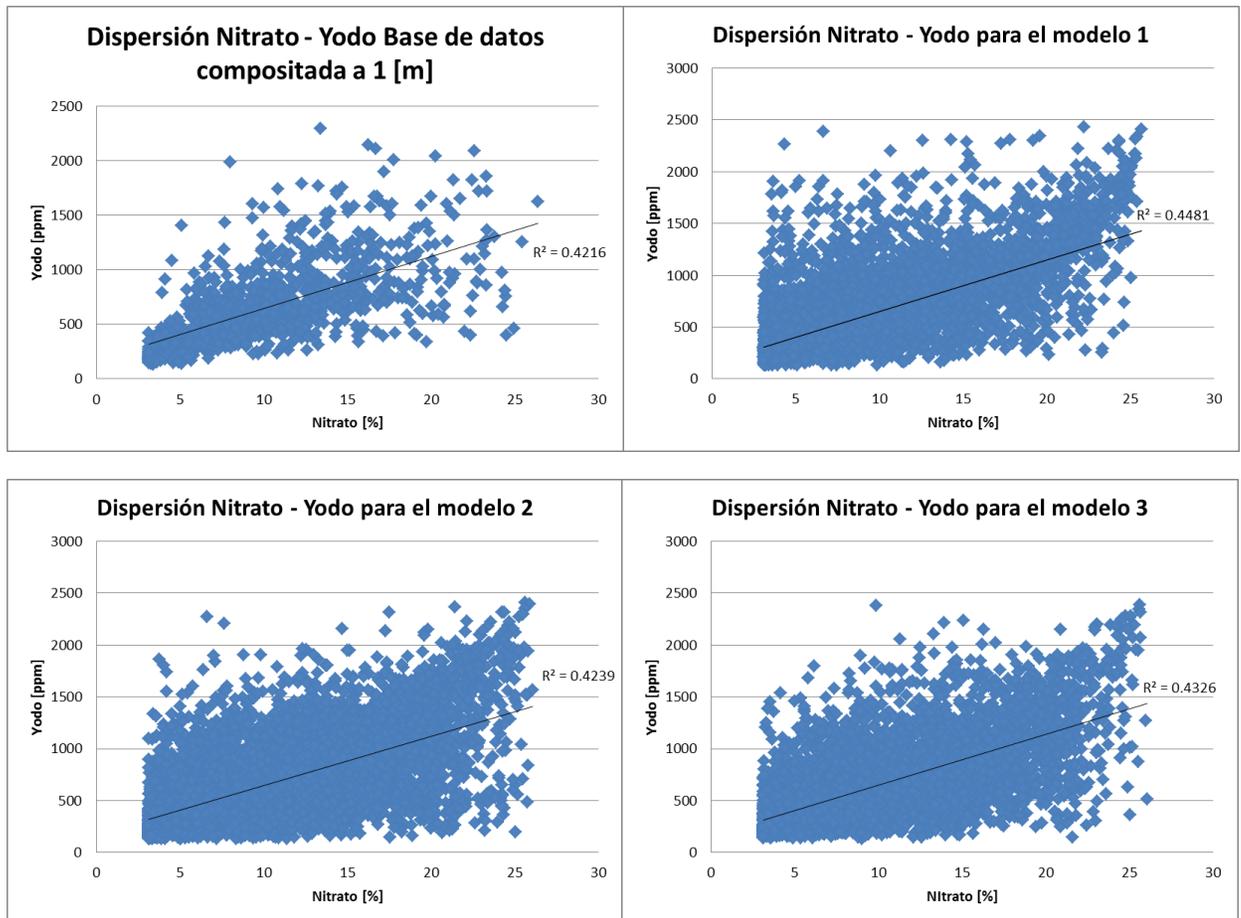
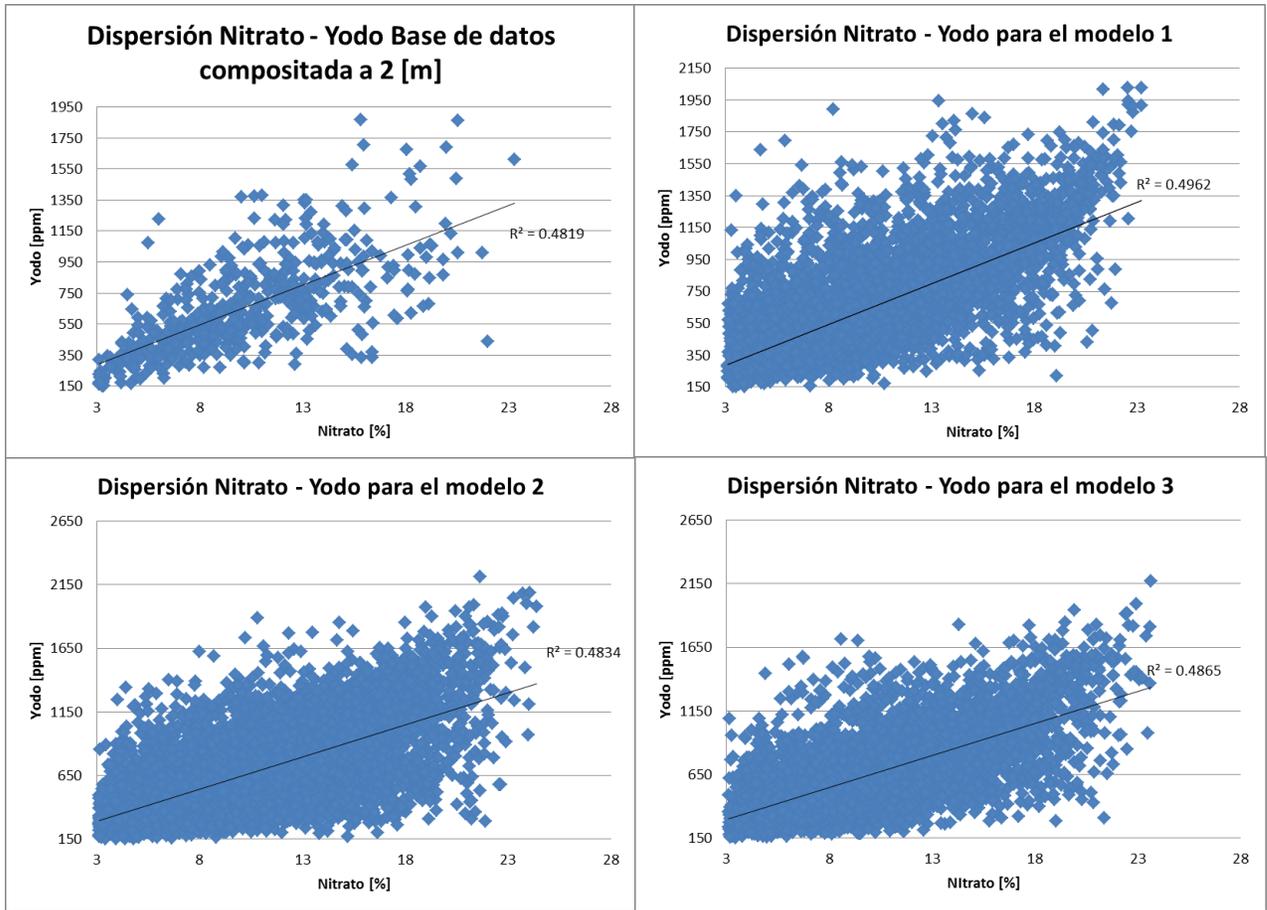
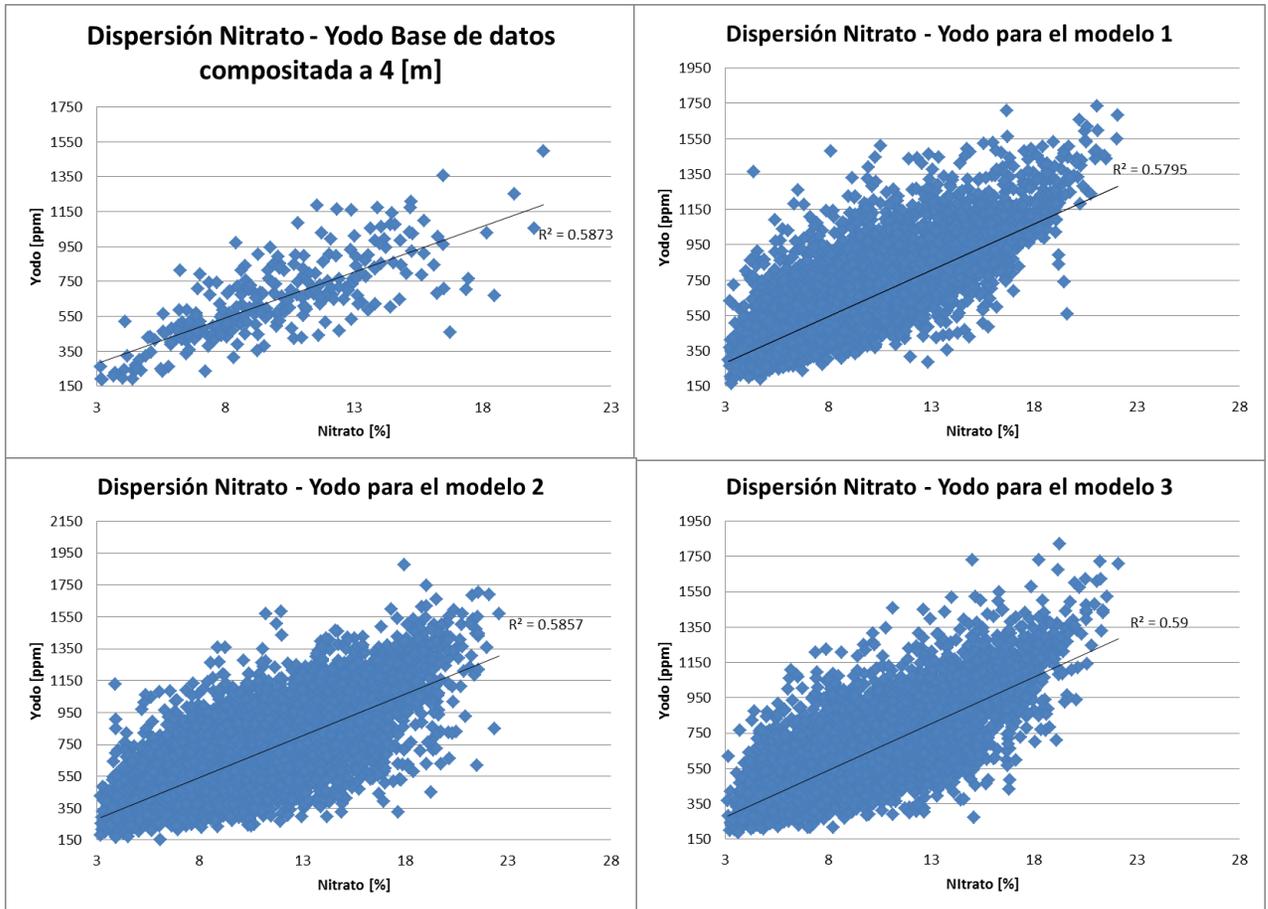


FIGURA 37: NUBES DE CORRELACIÓN NITRATO - YODO TAMAÑO DE BLOQUE 1 [m]



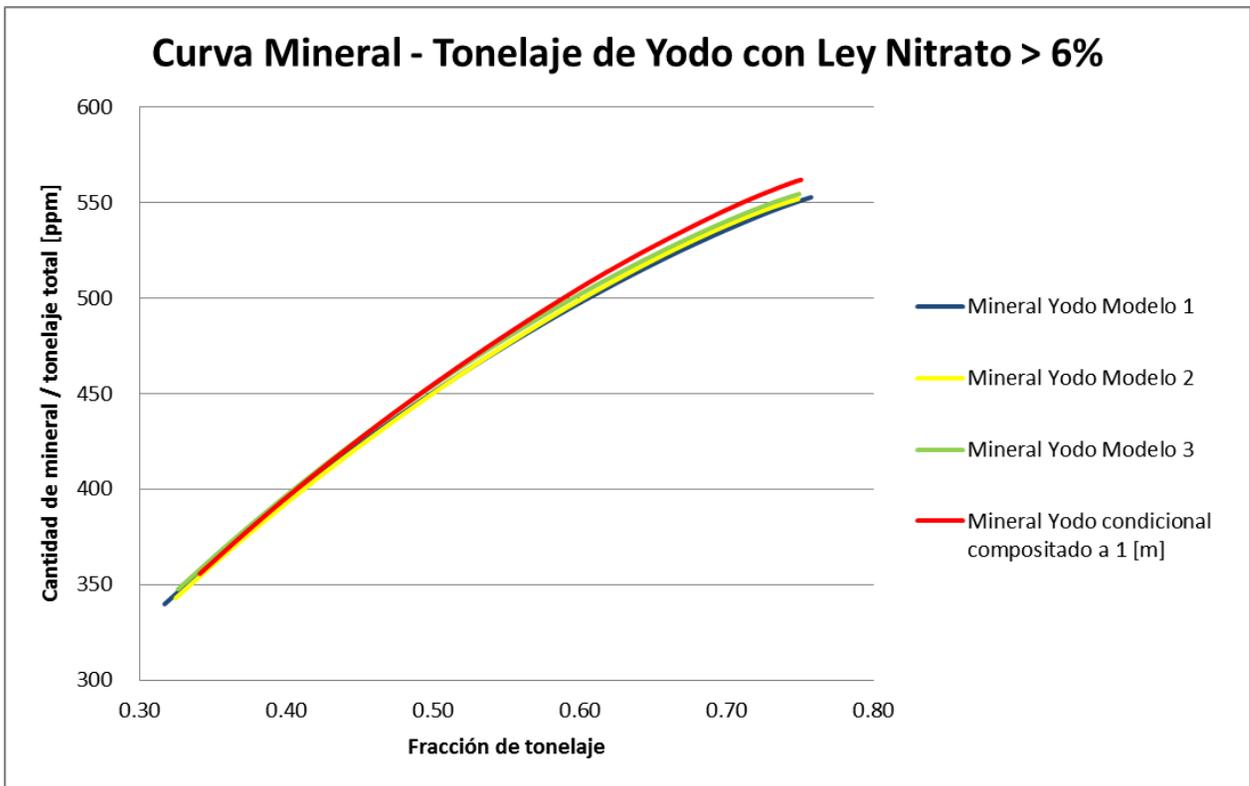
**FIGURA 38: NUBES DE CORRELACIÓN NITRATO - YODO TAMAÑO DE BLOQUE 2 [m]**



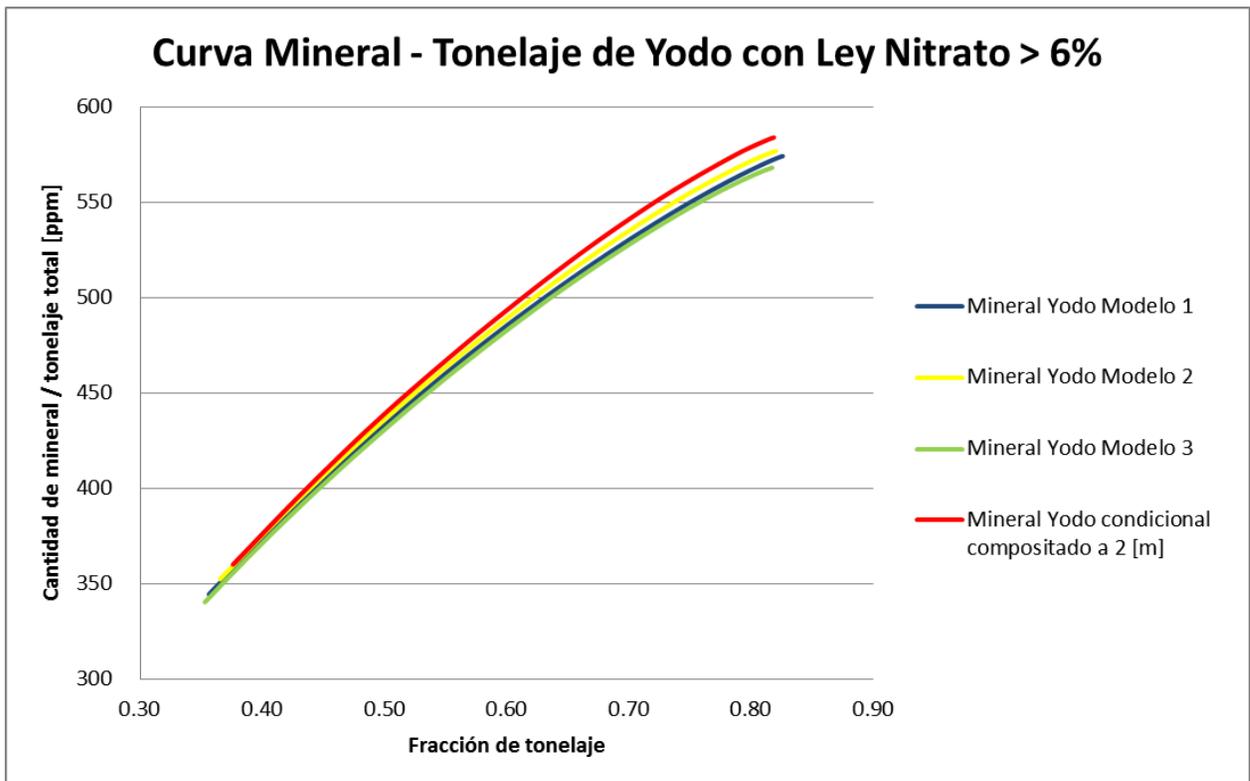
**FIGURA 39: NUBES DE CORRELACIÓN NITRATO - YODO TAMAÑO DE BLOQUE 4 [m]**

De las nubes de correlación, se puede ver que los valores simulados presentan la misma forma que los valores reales, además de tener coeficientes de correlación parecidos. A partir de las nubes, se puede interpretar que el modelo 2 es el que entrega la distribución de datos más parecida a los datos reales.

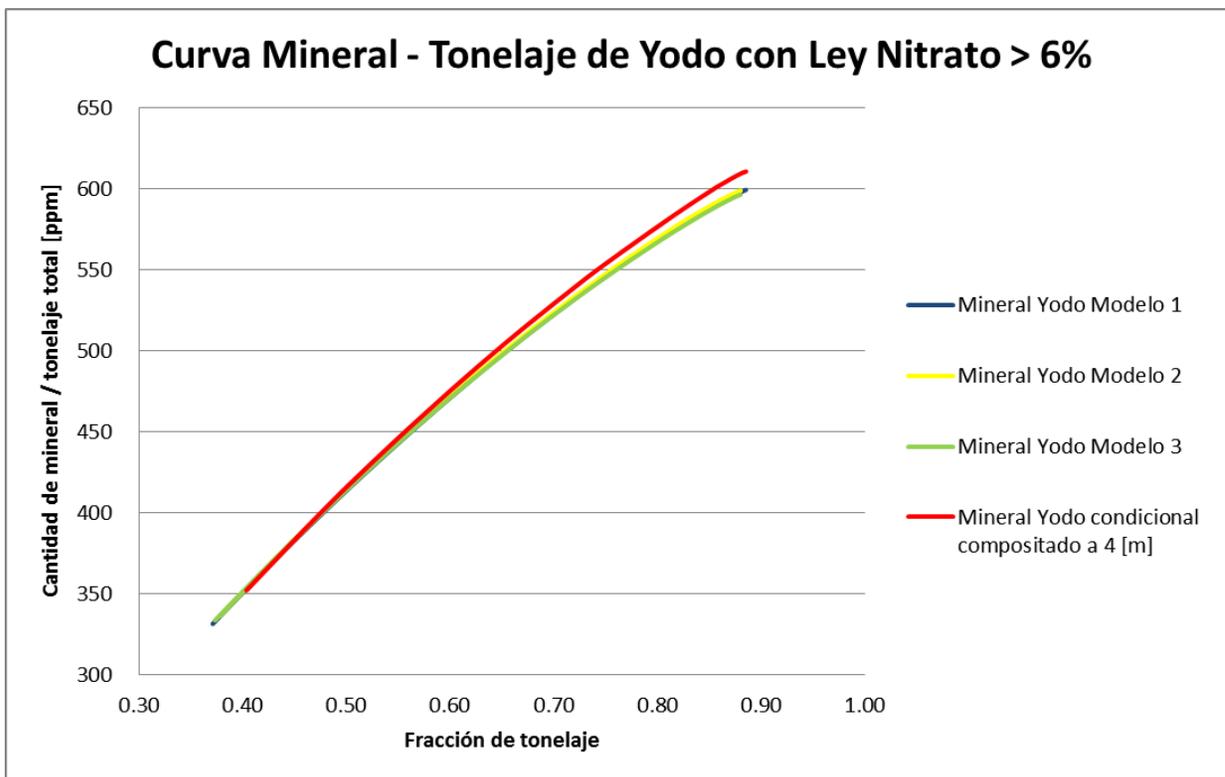
A continuación, se presentan las curvas tonelaje – ley para los distintos tamaños de bloques. En la construcción de estas curvas se toma en cuenta el carácter bivariable, por lo que se presentan curvas condicionales, donde las curvas de Yodo están condicionadas por leyes de corte de Nitrato. Para esto, se fijan 2 leyes de corte de 6% y 8%, de esta manera cómo influye una variable en la otra.



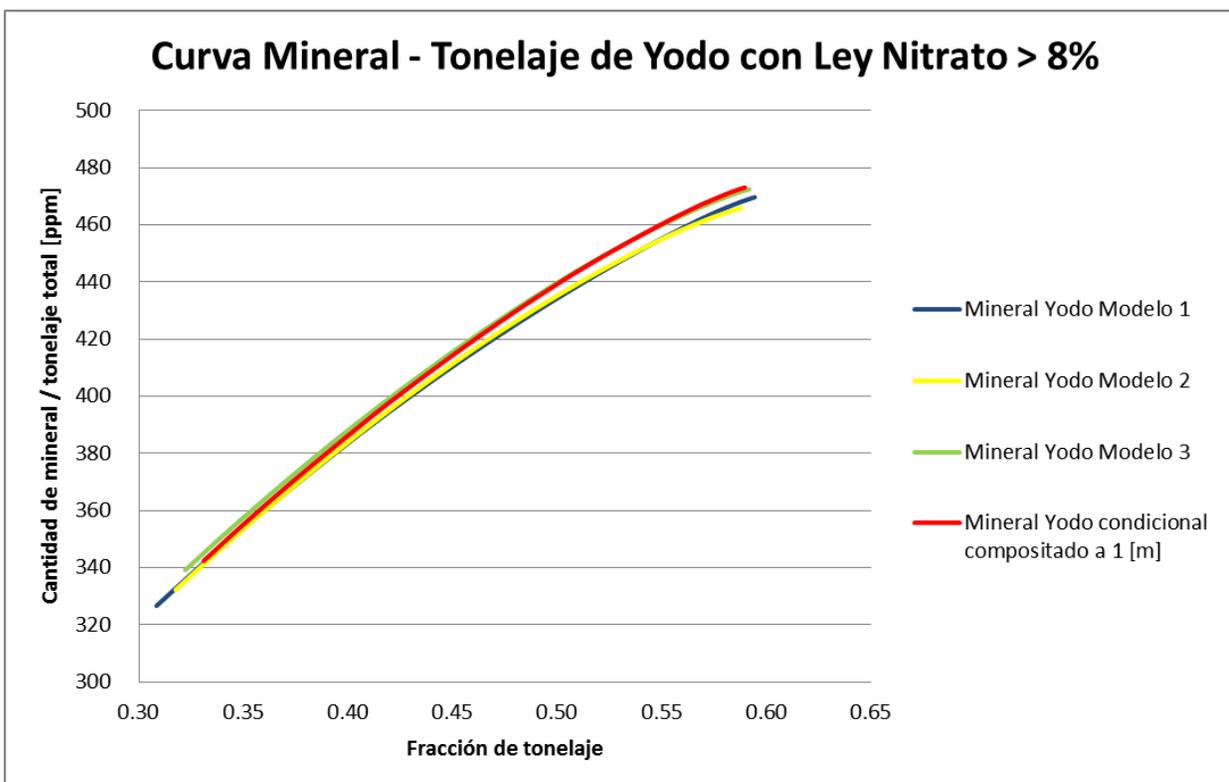
**FIGURA 40: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 1[m]**



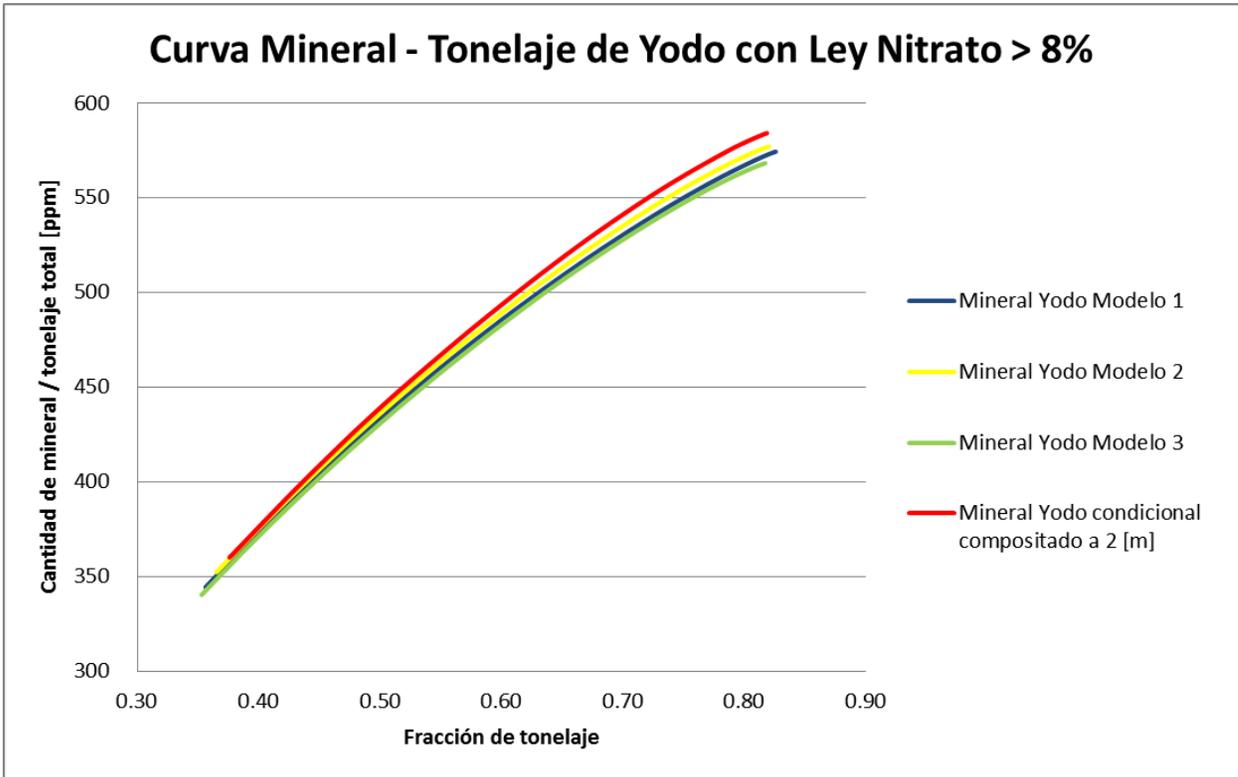
**FIGURA 41: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 2[m]**



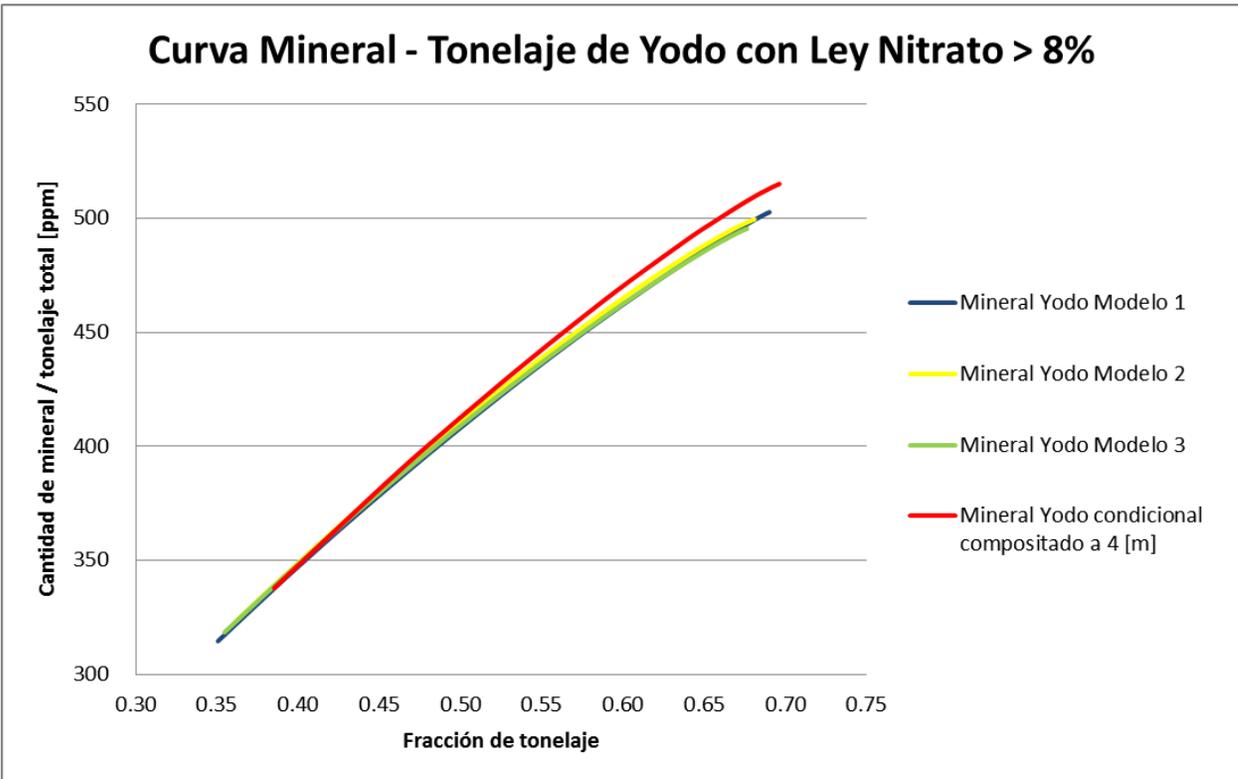
**FIGURA 42: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 4[m]**



**FIGURA 43: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 1[m]**



**FIGURA 44: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%. TAMAÑO DE BLOQUE 2[m]**

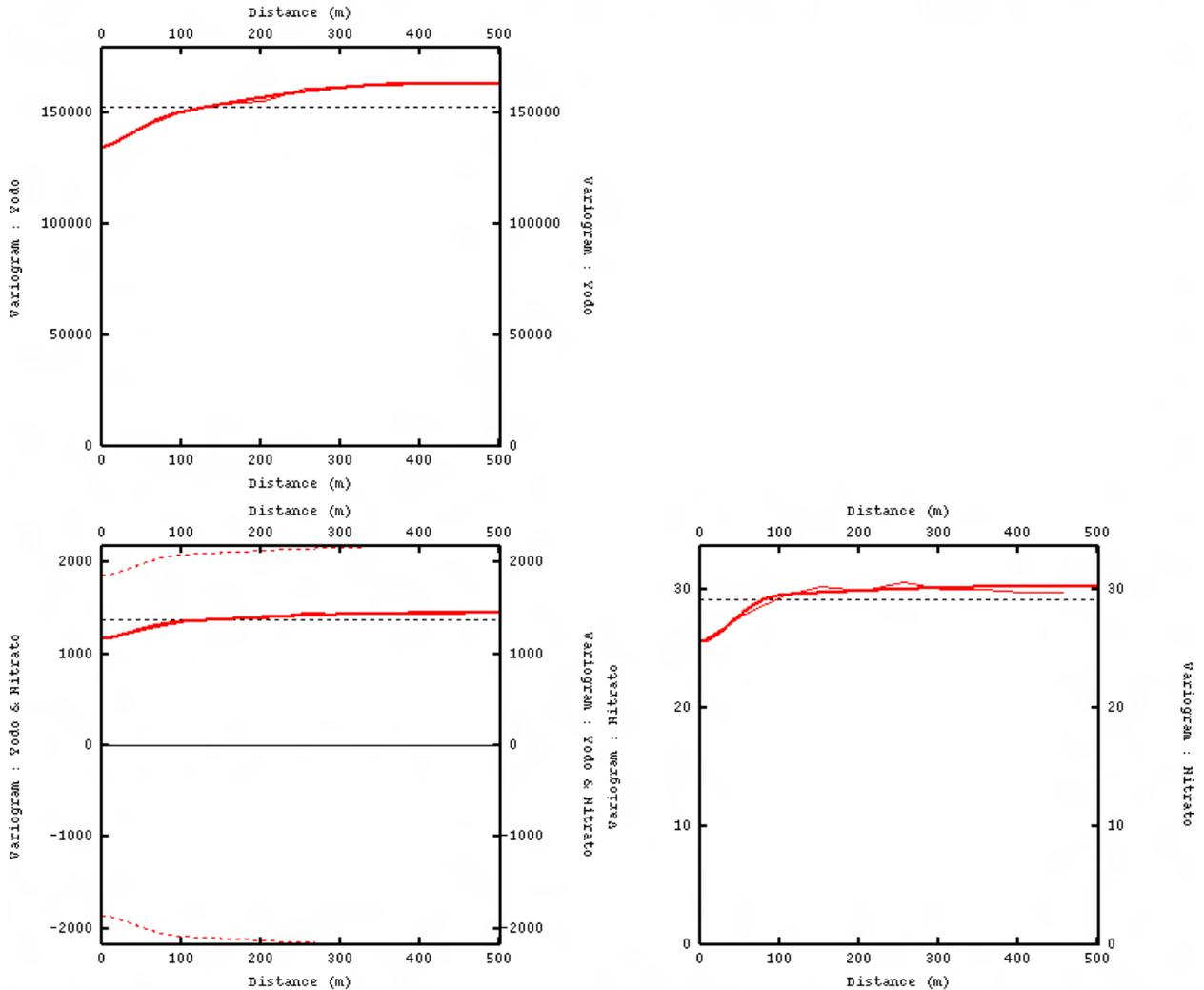


**FIGURA 45: GRÁFICO MINERAL - TONELAJE PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%. TAMAÑO DE BLOQUE 4[m]**

De los datos presentados en el gráfico tonelaje – ley, se aprecia que lo visto en las nubes de correlación. Se hace patente al realizar una estimación de recursos, el modelo 2 es el que tiene la ley media más cercana a la realidad, aunque realmente todos estiman de manera aceptable, por lo que se puede concluir que en este caso el modelo no es sensible al parámetro de forma, lo que significa que el modelo es robusto. Por lo que es el modelo a utilizar en la etapa estimación en unidades selectivas de explotación.

## 5.5. Estimación de recursos en unidades selectivas de explotación

Ya calibrado el modelo se aplica para estimar recursos en soporte de bloques de 25 x 25 x 0.5 m, para analizar la selectividad que se tendrá en la explotación, para esto, se modela el variograma experimental y a partir de este se calculan las varianzas y covarianza.



**FIGURA 46: VARIOGRAMAS MODELADOS PARA NITRATO Y YODO**

Se aprecia que los variogramas tienen meseta mayor que la varianza del Nitrato y Yodo, por lo que se ajusta a esos valores. Con los variogramas ya ajustados se realiza la regularización a bloque y se obtiene la siguiente matriz covarianza:

	Nitrato	Yodo
Nitrato	4.18	
Yodo	257.26	25 427.1

**TABLA 23: MATRIZ COVARIANZA PARA NITRATO Y YODO**

Con estos valores mas los parámetros de distribución puntual  $\alpha$  elegidos anteriormente (2 para el Nitrato y 1.5 para el Yodo), se realiza el modelamiento, del que se obtienen los siguientes resultados.

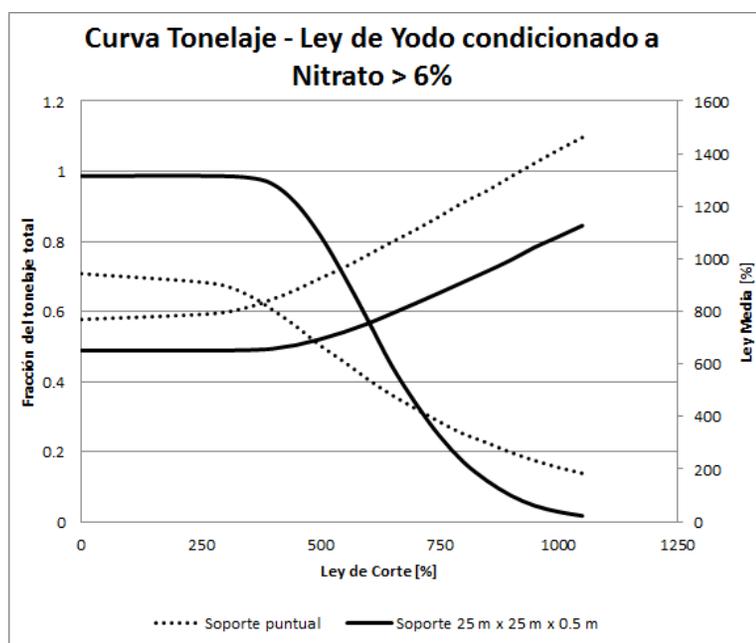
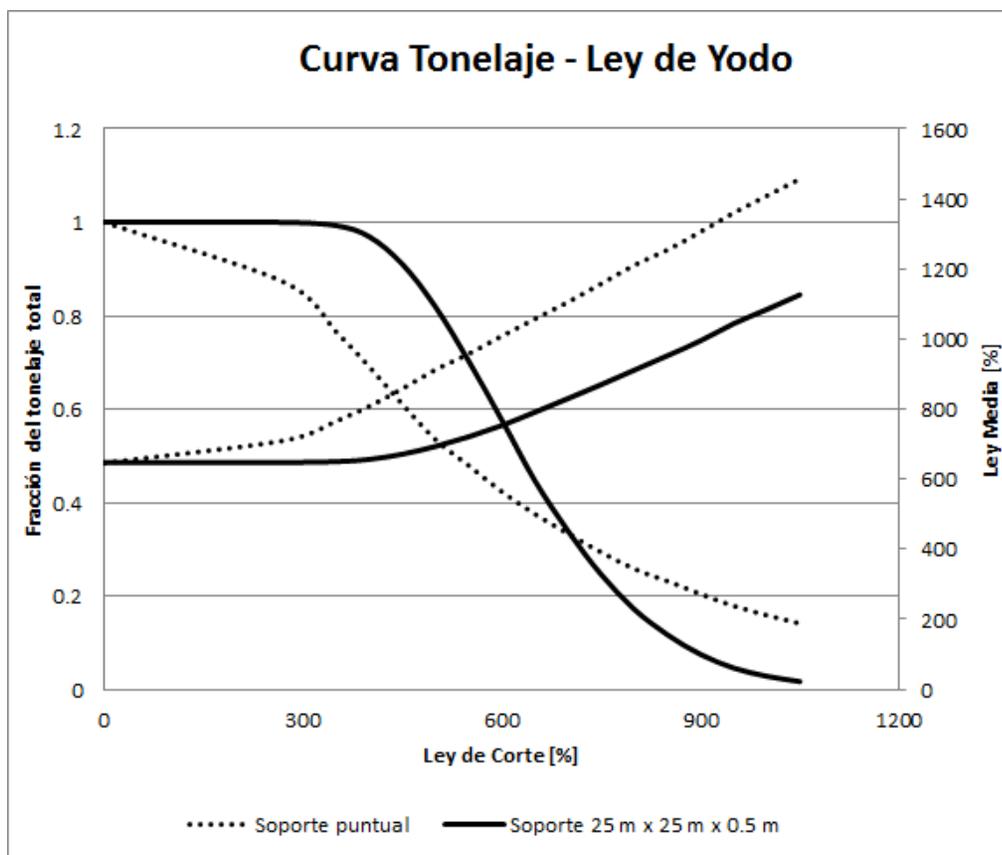


FIGURA 47: CURVA TONELAJE LEY PARA YODO CONDICIONADO A NITRATO < 6[%]

Ley de corte	Ley Yodo' puntual [ppm]	Ley Yodo' Soporte 25 m x25 m x0.5 m [ppm]	Tonelaje Yodo' Puntual	Tonelaje Yodo' Soporte 25 m x25 m x0.5 m
300	800.40	651.70	0.669	0.986
350	816.66	653.15	0.646	0.982
400	846.55	658.15	0.605	0.964
450	882.25	672.17	0.558	0.909
500	926.30	694.03	0.503	0.818
550	966.84	721.30	0.457	0.703
600	1 015.02	753.63	0.407	0.577
650	1 063.57	791.60	0.362	0.447
700	1 110.17	830.41	0.323	0.339
750	1 161.05	870.29	0.286	0.246
800	1 214.80	911.62	0.251	0.171
850	1 258.74	952.53	0.225	0.117
900	1 312.99	995.67	0.198	0.075
950	1 364.37	1 044.16	0.175	0.046
1 000	1 414.64	1 084.69	0.155	0.028
1 050	1 461.89	1 126.81	0.138	0.017
1 100	1 510.21	1 169.36	0.123	0.009

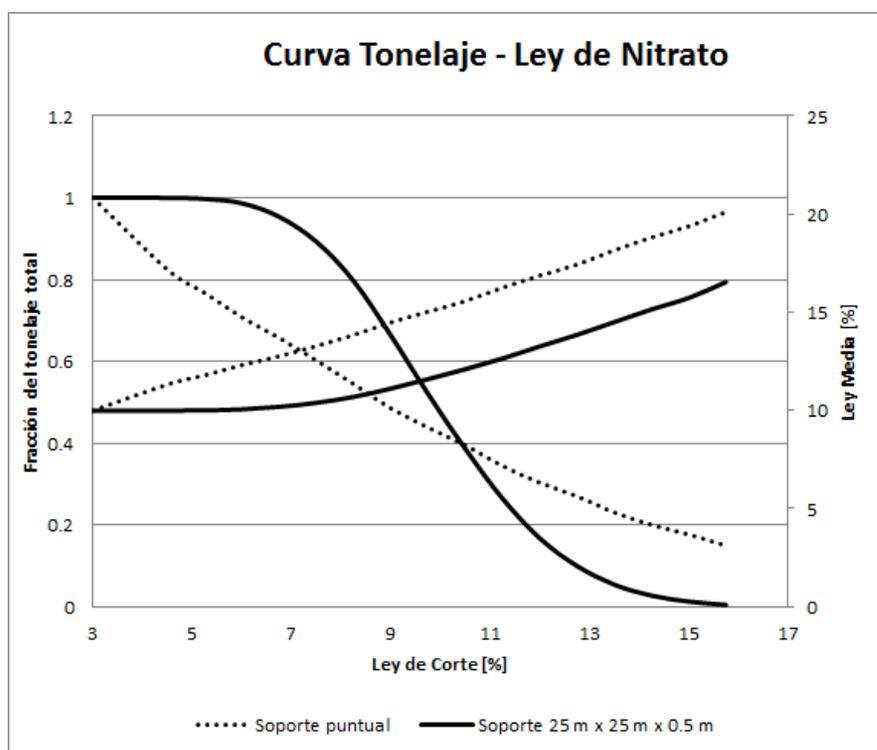
TABLA 24: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA YODO CONDICIONADO A NITRATO < 6[%]



**FIGURA 48: CURVA TONELAJE LEY PARA YODO**

Ley de corte	Ley Yodo puntual [ppm]	Ley Yodo Soporte 25 m x25 m x0.5 m [ppm]	Tonelaje Yodo Puntual	Tonelaje Yodo Soporte 25 m x25 m x0.5 m
300	732.93	648.29	0.828	0.999
350	766.07	653.15	0.765	0.993
400	808.22	658.15	0.691	0.969
450	859.04	672.17	0.610	0.910
500	913.14	694.03	0.535	0.819
550	958.05	721.30	0.479	0.703
600	1 008.88	753.63	0.423	0.577
650	1 057.73	791.60	0.375	0.447
700	1 105.96	830.41	0.333	0.339
750	1 158.00	870.29	0.294	0.246
800	1 211.25	911.62	0.258	0.171
850	1 254.33	952.53	0.232	0.117
900	1 306.26	995.67	0.204	0.075
950	1 360.43	1 044.16	0.179	0.046
1 000	1 408.89	1 084.69	0.159	0.028
1 050	1 456.99	1 126.81	0.141	0.017
1 100	1 506.48	1 169.36	0.125	0.009

**TABLA 25: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA YODO**



**FIGURA 49: CURVA TONELAJE LEY PARA NITRATO**

Ley de corte	Ley Nitrato puntual [ppm]	Ley Nitrato Soporte 25 m x25 m x0.5 m [ppm]	Tonelaje Nitrato Puntual	Tonelaje Nitrato Soporte 25 m x25 m x0.5 m
3	9.99	9.99	1.000	1.000
4.5	11.32	9.99	0.825	1.000
5.25	11.79	10.00	0.768	0.997
6	12.31	10.05	0.708	0.987
6.75	12.76	10.18	0.657	0.954
7.5	13.28	10.39	0.602	0.893
8.25	13.85	10.69	0.544	0.797
9	14.48	11.11	0.485	0.663
9.75	15.03	11.60	0.438	0.520
10.5	15.57	12.10	0.394	0.386
11.25	16.26	12.65	0.344	0.264
12	16.88	13.27	0.303	0.167
12.75	17.43	13.85	0.270	0.099
13.5	18.16	14.50	0.231	0.054
14.25	18.81	15.15	0.200	0.027
15	19.38	15.73	0.176	0.013
15.75	20.11	16.54	0.149	0.004

**TABLA 26: LEY MEDIA Y PROPORCIÓN DEL TONELAJE TOTAL PARA NITRATO**

Los resultados son consistentes en todo sentido con lo esperado, a la ley de corte mínima, tanto el modelo como la base puntual tienen la misma ley y tonelaje de corte. Para leyes bajas el tonelaje del bloque es más alto y la ley más baja, lo que es consistente con la teoría. De igual manera, al analizar leyes de corte altas, el tonelaje de bloque es más bajo que el puntual, lo cual es consistente también a la teoría.

## 6. CONCLUSIONES

Una buena estimación del cambio de soporte es extremadamente importante en el negocio minero, por lo que la búsqueda de modelos que lo reproduzcan de manera eficiente y correcta es vital para cuantificar los recursos recuperables y beneficio de un proyecto minero.

Como resultado de la aplicación de las metodologías, se valida el cambio de soporte bivariable por parte del modelo Gamma. Este representa una mejor opción que el modelo Gaussiano, lo cual queda patente en ambos casos de estudio, donde el modelo gamma, ya sea bivariable o univariable, resultaba ser una mejor opción para estimar.

En el caso de bases de datos con efecto cero, el modelo Gamma bivariable se comporto mejor que el caso univariable en los tamaños de compósito mayores a 1 [m], presentando resultados aceptables en la estimación, además de permitir correlacionar las variables, por lo que se considera un gran avance en la estimación global de este caso. Se aprecia que al aumentar el tamaño de bloque, el parámetro de forma pasa a segundo plano, notándose que para valores entorno al factor de forma optimo, se tienen estimaciones muy parecidas, inclusive en el caso bivariable.

En el caso de bases de datos que tienen asimetría, la elección de los parámetros de forma parece ser un factor no tan primordial, pues la mayoría de parámetros ajustan de manera más que aceptable. El único descarte que se puede hacer es de los valores limites. Se deja a criterio de quien modela que parámetros elegir, pues en el caso bivariable si se aprecian pequeñas variaciones, las cuales dependiendo del nivel de profundidad que se quiera analizar, puede ser significativo.

Sobre el modelo gamma bivariable, se puede concluir que resulta ser altamente sensible a la elección de los parámetros de forma para un caso, base de datos con valores nulos, por lo que es un factor crucial realizar un modelamiento apropiado, con el fin de obtener el mejor parámetro. Esto es muy importante de destacar, pues en aplicaciones, la estimación de varianzas se realiza mediante variogramas, los que aportan error, lo cual puede llevar a estimaciones deficientes.

Como conclusión final, el modelo gamma cumple a cabalidad el objetivo de modelar el cambio de soporte global para yacimientos que tienen asimetría, no así en los yacimientos que presentan efecto cero, donde presenta una mejora respecto al modelo Gaussiano discreto, pero presenta ciertas desventajas que no permiten concluir que el modelamiento es siempre satisfactorio.

## REFERENCIAS

- [1] Carrasco, P., Chilès, J.P. and Séguret, S., 2008. *Additivity, metallurgical recovery, and copper grade*. In: Proceedings of the 8th International Geostatistics Congress GEOSTATS 2008, Gecamin Ltda, Santiago, Chile, p. 465-476.
- [2] Chilès J., Delfiner P., 2012 *Geoestatística: Modeling Spatial Uncertainty (2<sup>nd</sup> edition)*, Wiley, New York
- [3] Emery X., 2011. *Geoestadística*. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 149 p.
- [4] Emery, X., Carrasco, P. and Ortiz, J.M., 2004. *Geostatistical modelling of solubility ratio in an oxide copper deposit*. In: 1st International Conference on Mining Innovation MININ 2004, E. Magri et al. (eds.), Gecamin Ltda, Santiago, Chile, p. 226-236.
- [5] Emery, X. and Soto Torres, J. F., 2005. *Models for support and information effects: A case study*. *Mathematical Geology*, Vol. 37, no. 1, p. 49-68.
- [6] Emery, X., 2007. *On Some Consistency Conditions for Geostatistical Change –of- Support Models*. *Mathematical Geology*, Vol 39, no. 2, p. 205-223.
- [7] Lantuéjoul, C., 1988. *On the importance of choosing a change of support model for global reserves estimation*. *Mathematical Geology*, Vol. 20, no. 8, p. 1001-1019.
- [8] Rivoirard, J., 1994. *Introduction to Disjunctive Kriging and Nonlinear Geostatistics*. Oxford University Press, Oxford, 181 p.
- [9] Verly G (1983) *The multigaussian approach and its application to the estimation of local reserves*. *Mathematical Geology*, vol. 15, no. 2
- [10] Wackernagel, H 2003 *Multivariate Geostatistics: an Introduction with application*. Springer, Berlin

## ANEXO A

### 1. Análisis exploratorio Oro - plata

En esta sección, se presentan la etapa de búsqueda de datos aberrantes o erróneos y comprobación de correlaciones. Para realizar la comprobación de datos se utilizan 2 métodos, uno estadístico y otro gráfico. El primero consiste en analizar los mínimos y máximos con el fin de buscar si hay algún dato que sea anómalo para lo esperado en la muestra. El segundo consiste en graficar los datos en función de las coordenadas, a fin de ver si hay algún dato que escape y distorsione las futuras etapas.

Para comprobar si hay correlación entre las variables (importante para el estudio bivariable), se usa el mapa de correlación.

	Ley de oro [ppm]	Ley de plata [ppm]
<b>Mínimo</b>	0	-99
<b>Máximo</b>	1,202.04	8,701
<b>Cuenta</b>	14,739	14,739

TABLA 27: ESTADÍSTICAS BÁSICAS LEY DE ORO Y PLATA

Se observa que para la plata, hay al menos un dato inexistente, marcado con -99. En el caso. Se encuentran 4 datos con este valor, los que son removidos.

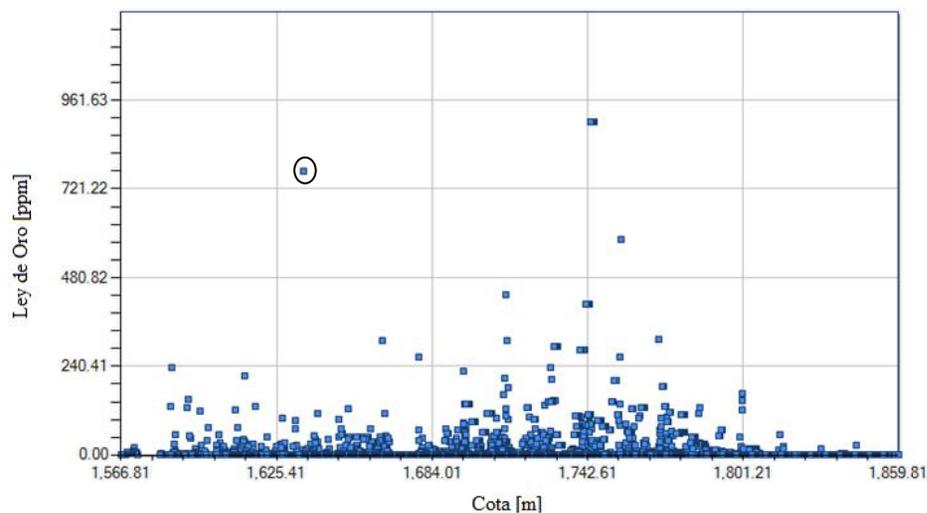
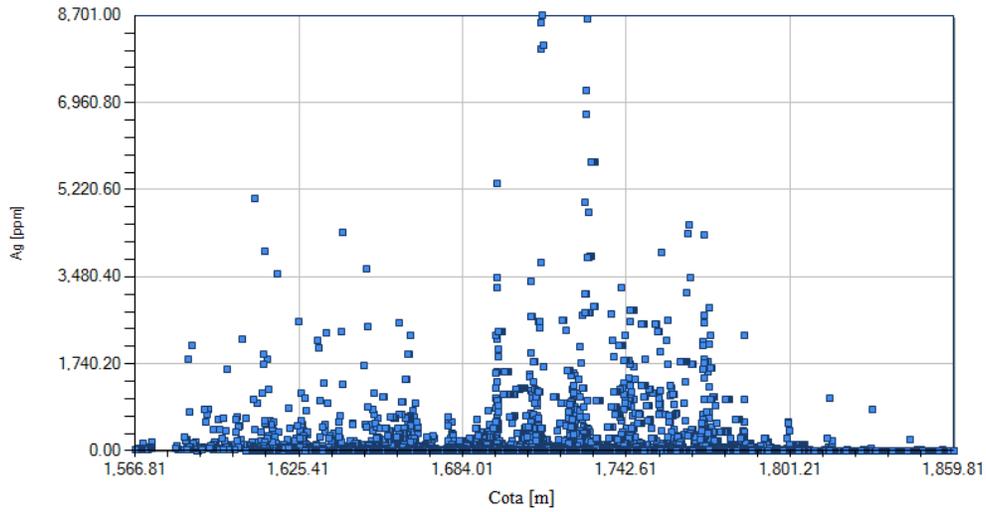


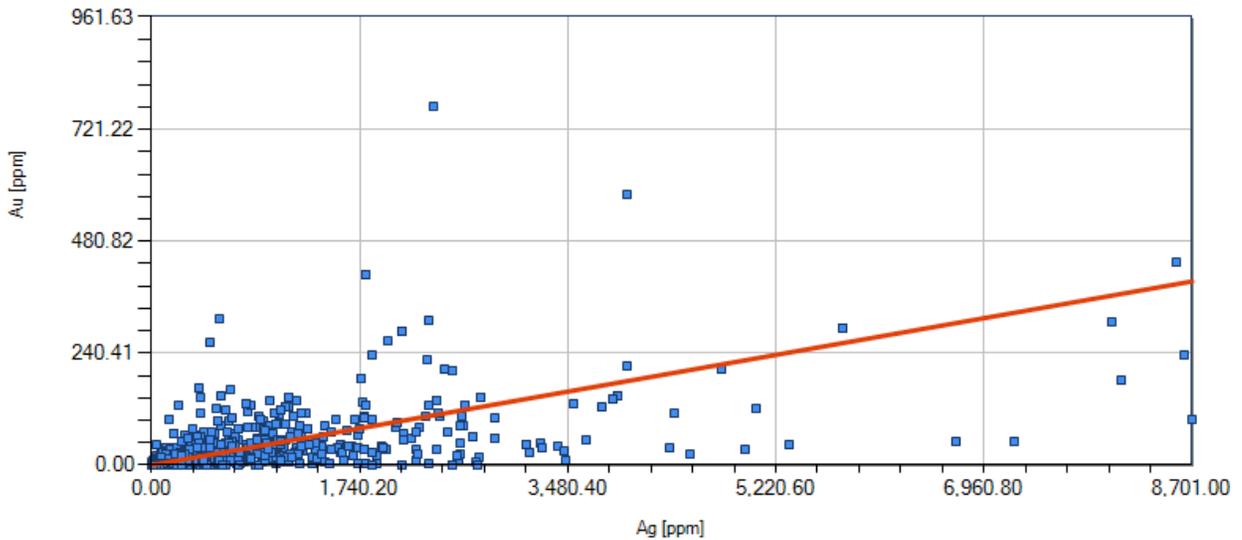
FIGURA 50: MAPA DE LEY DE ORO EN FUNCIÓN DE LA COTA

Del mapa del oro en función de la cota, se notan 4 datos anómalos, de los que se descarta uno, encerrado en un círculo, pues a pesar de posiblemente ser un dato valido, distorsiona solamente el análisis. Los otros 3 se dejan, pues están contiguos en la zona.



**FIGURA 51: MAPA DE LEY DE PLATA EN FUNCIÓN DE LA COTA**

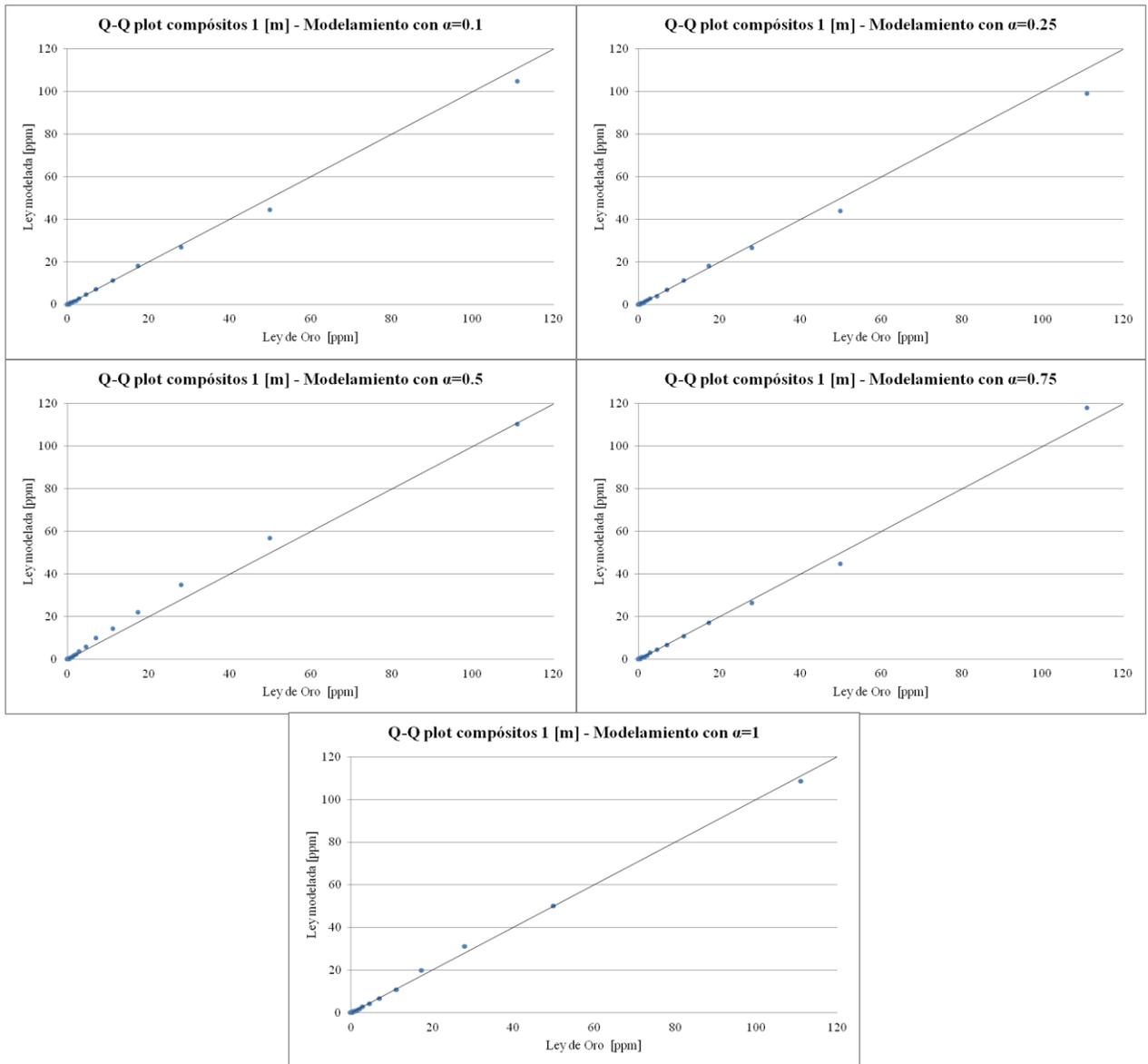
En el caso de la plata, no se descarta ningún dato pues se observa que todos están correctos.



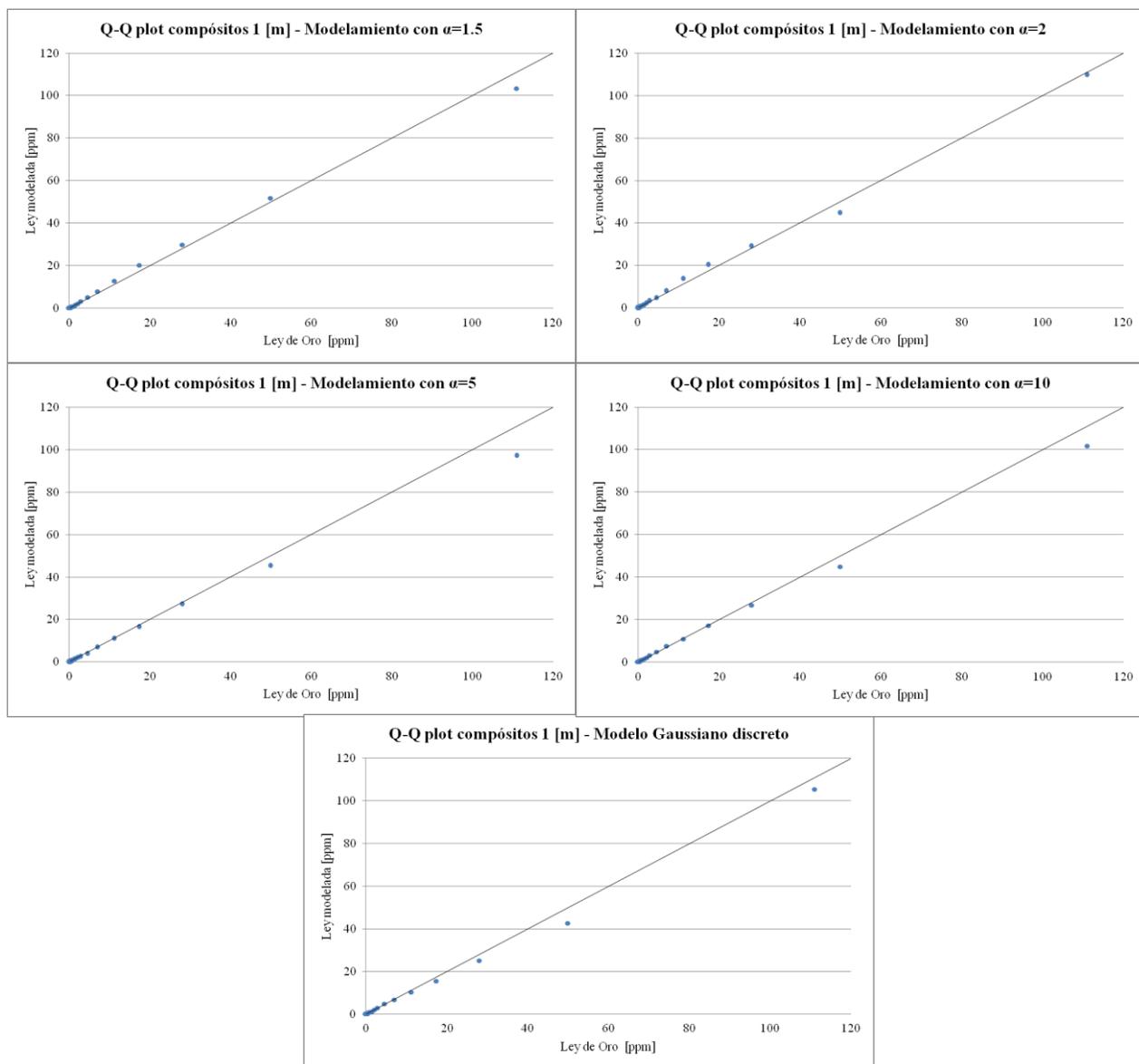
**FIGURA 52: MAPA DE CORRELACIÓN ORO – PLATA**

Al analizar el grafico, se ve que producto la gran cantidad de valores nulos que presenta el oro, se podría pensar que no hay correlación entre las variables, pero cuando si se aprecian los valores no nulos del oro, se ve que hay una tendencia a que valores altos de oro se encuentran con valores altos de plata, obviando los casos extremos.

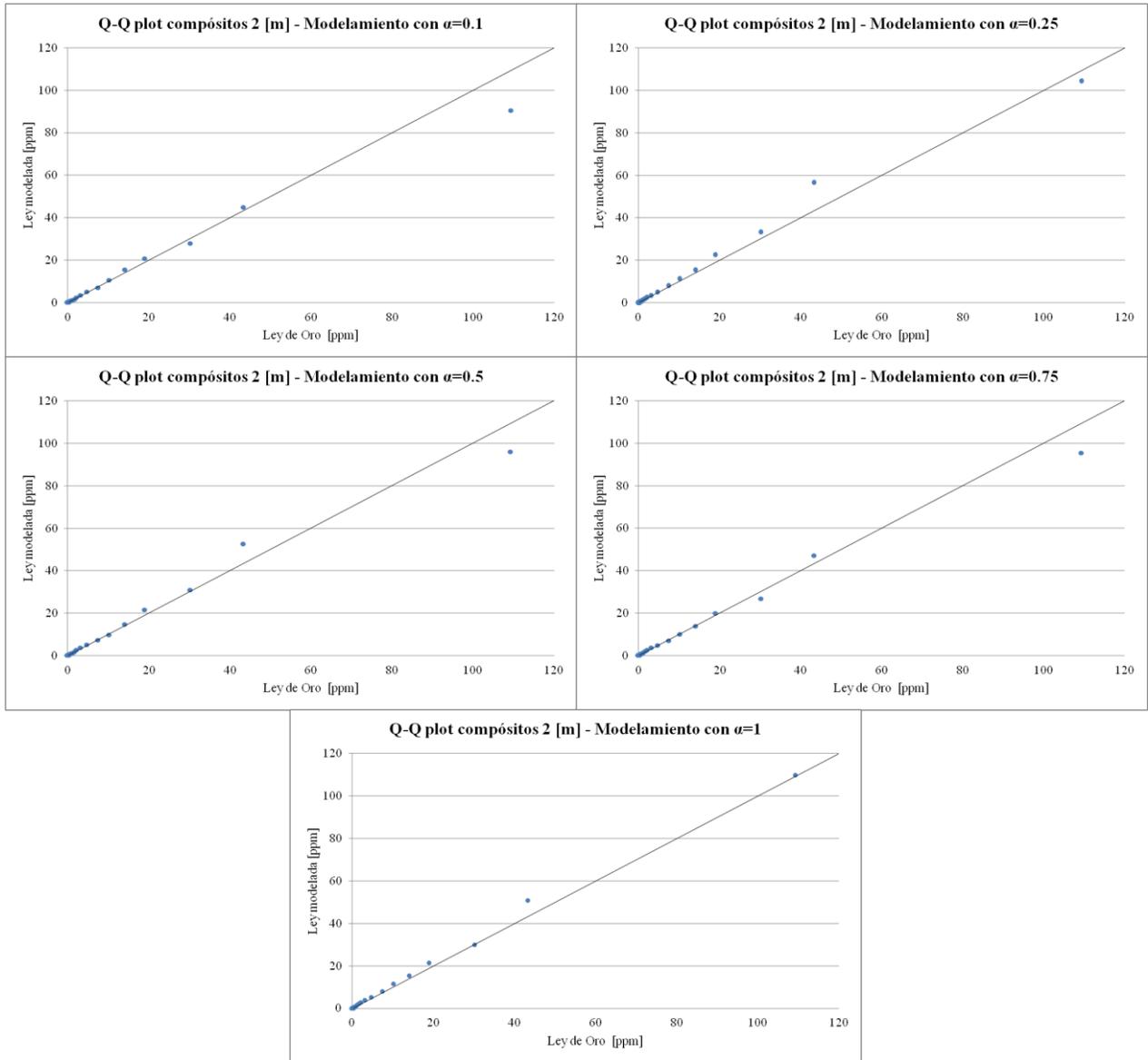
## 2. Q-Q Plot Oro y plata



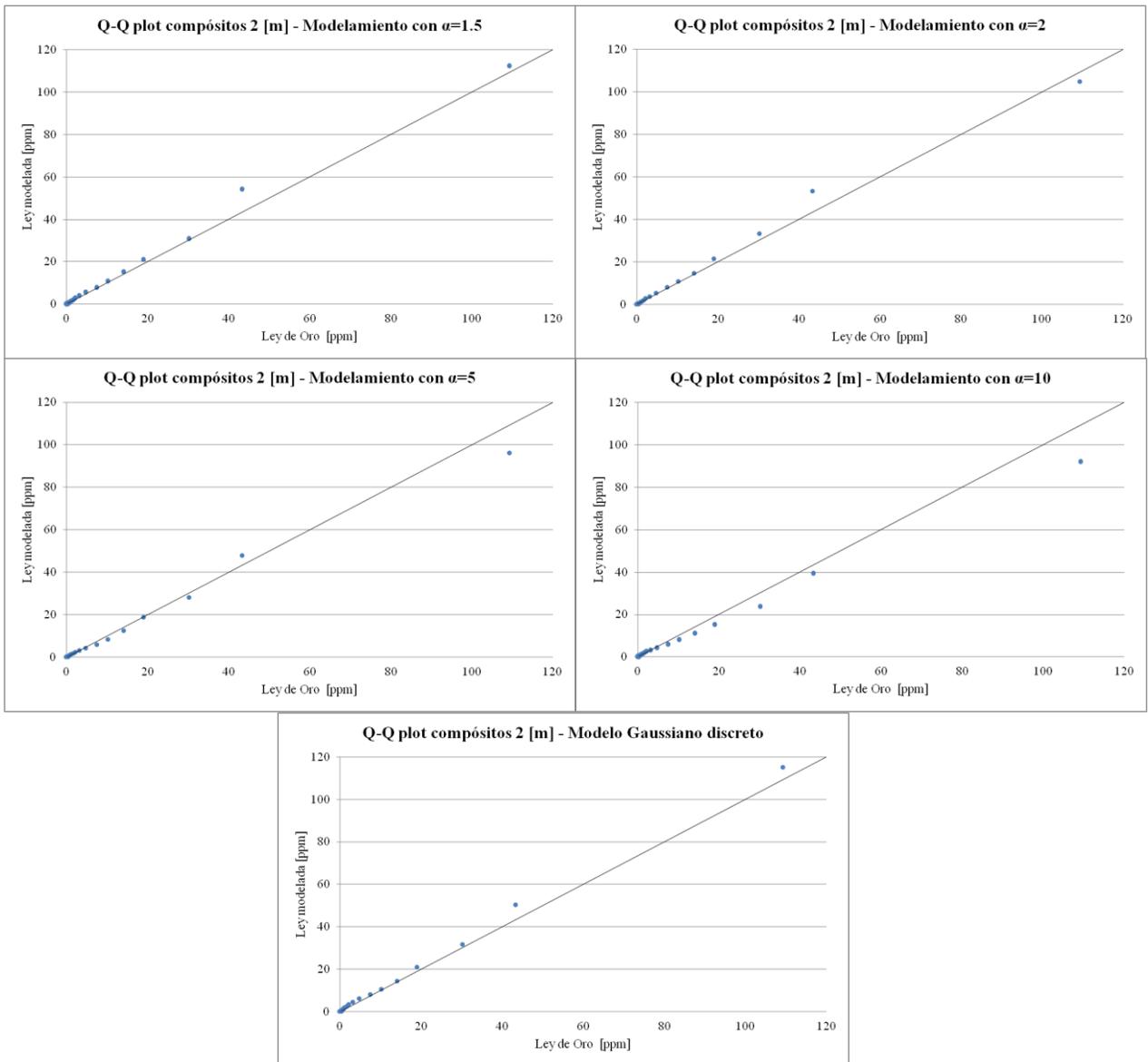
**FIGURA 53: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



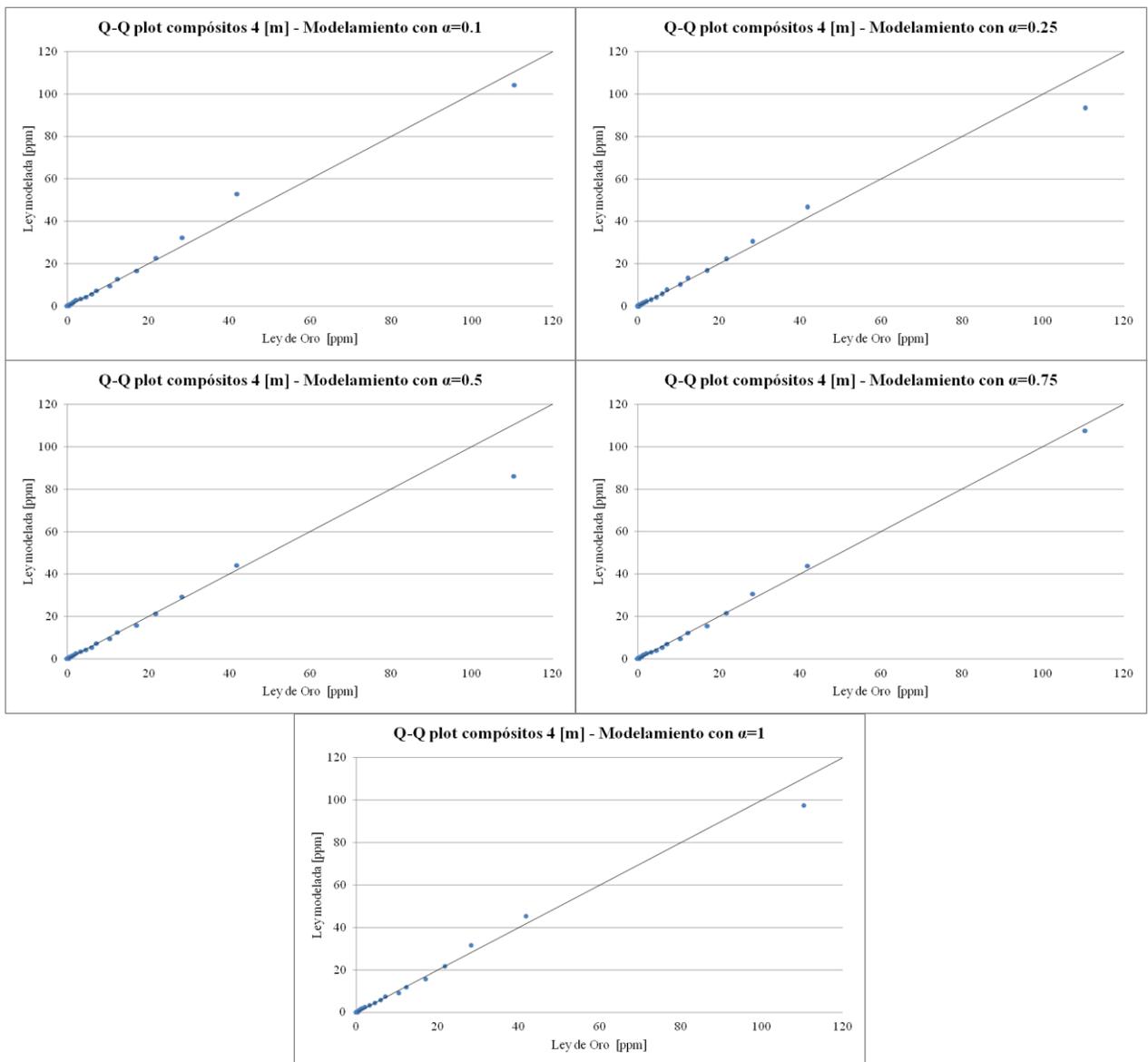
**FIGURA 54: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



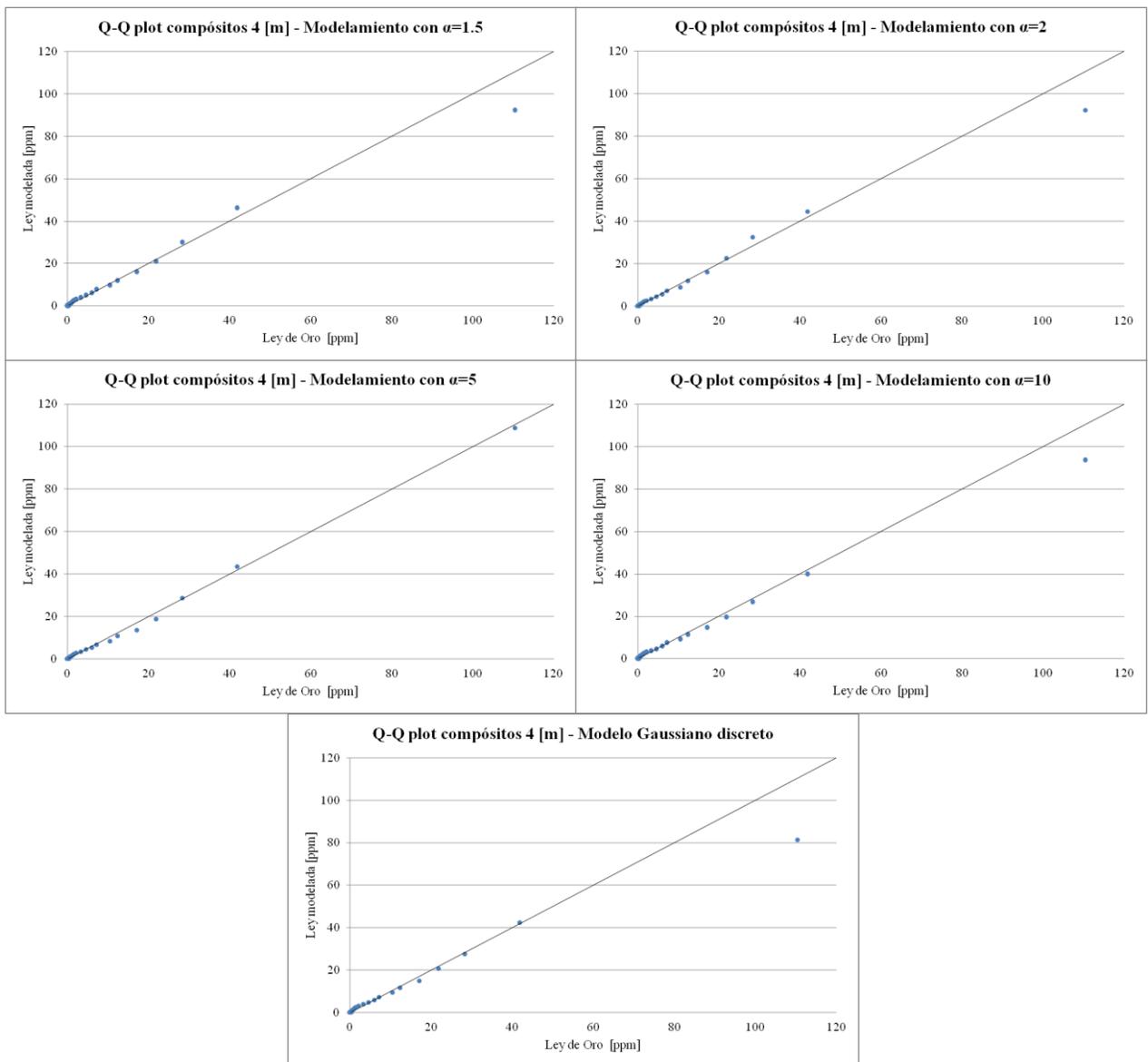
**FIGURA 55: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



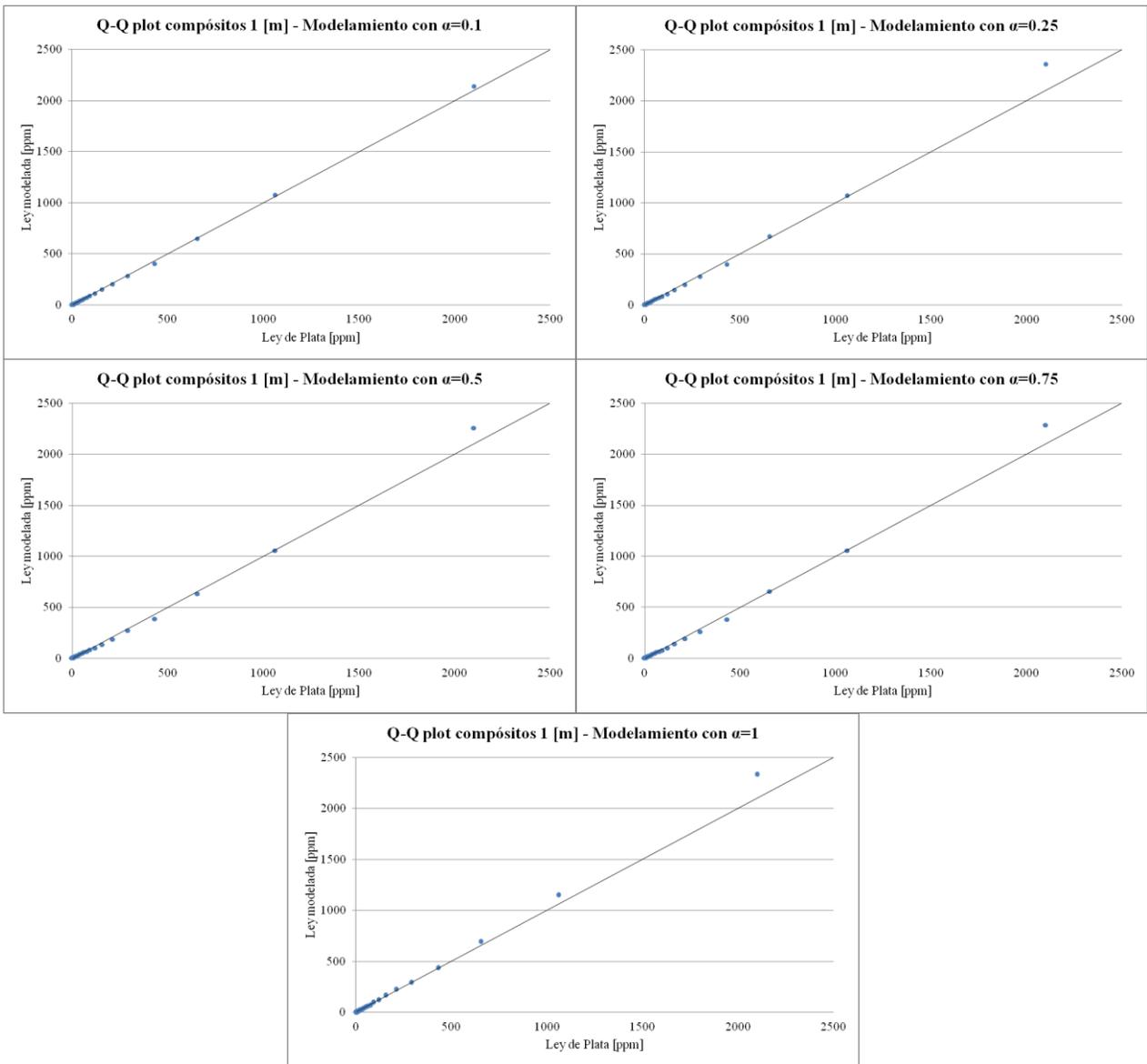
**FIGURA 56: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



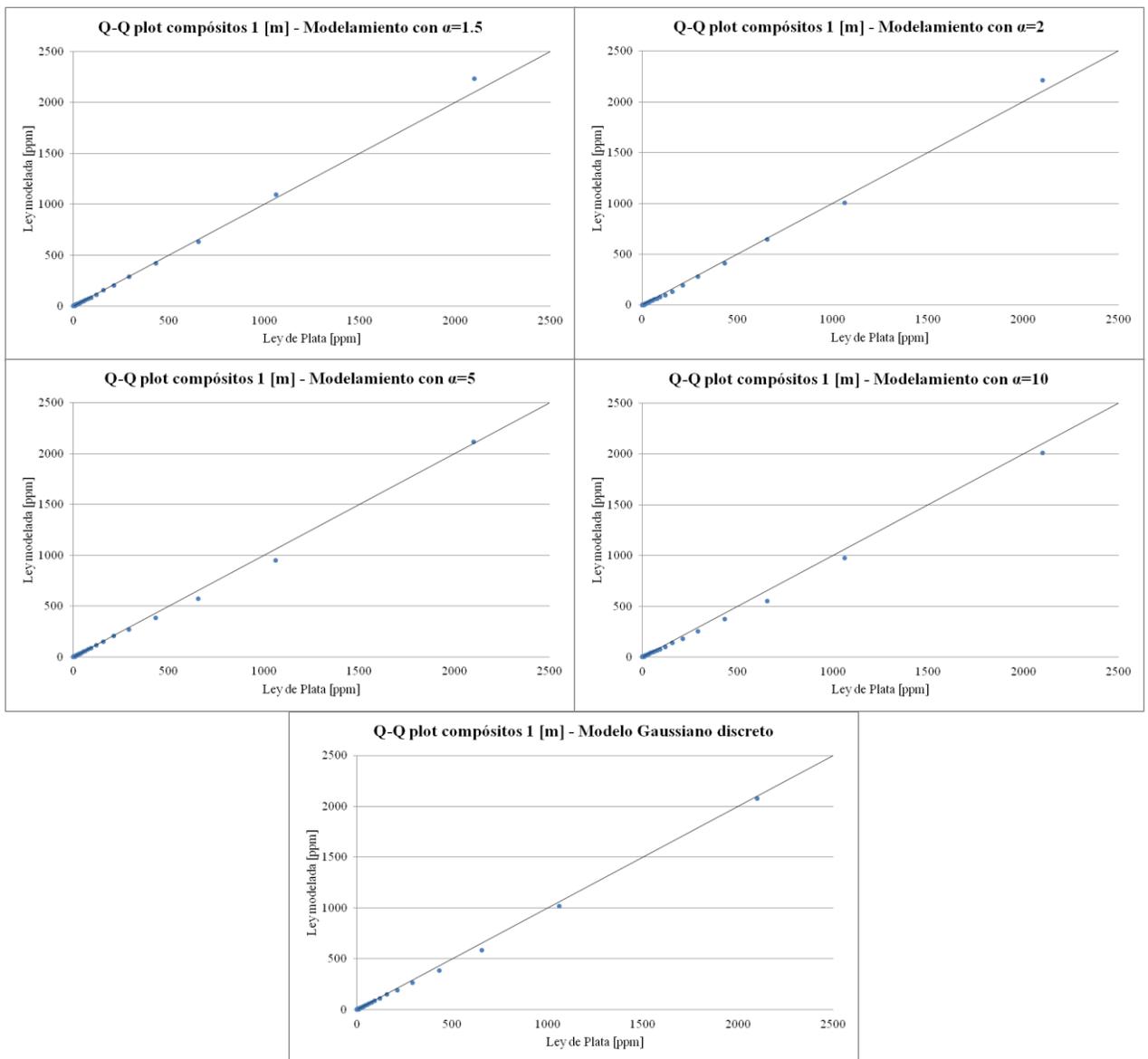
**FIGURA 57: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



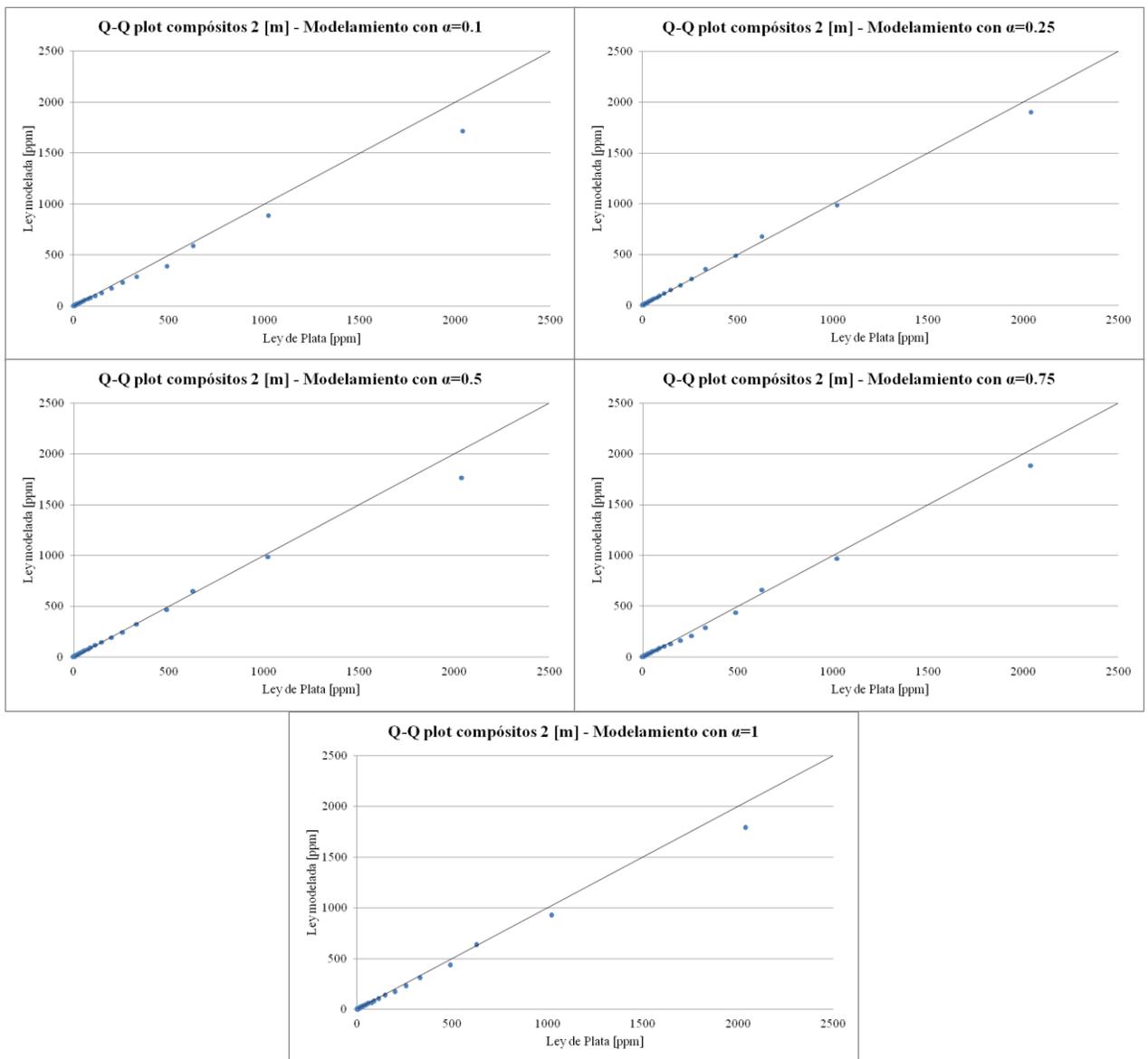
**FIGURA 58: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE ORO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



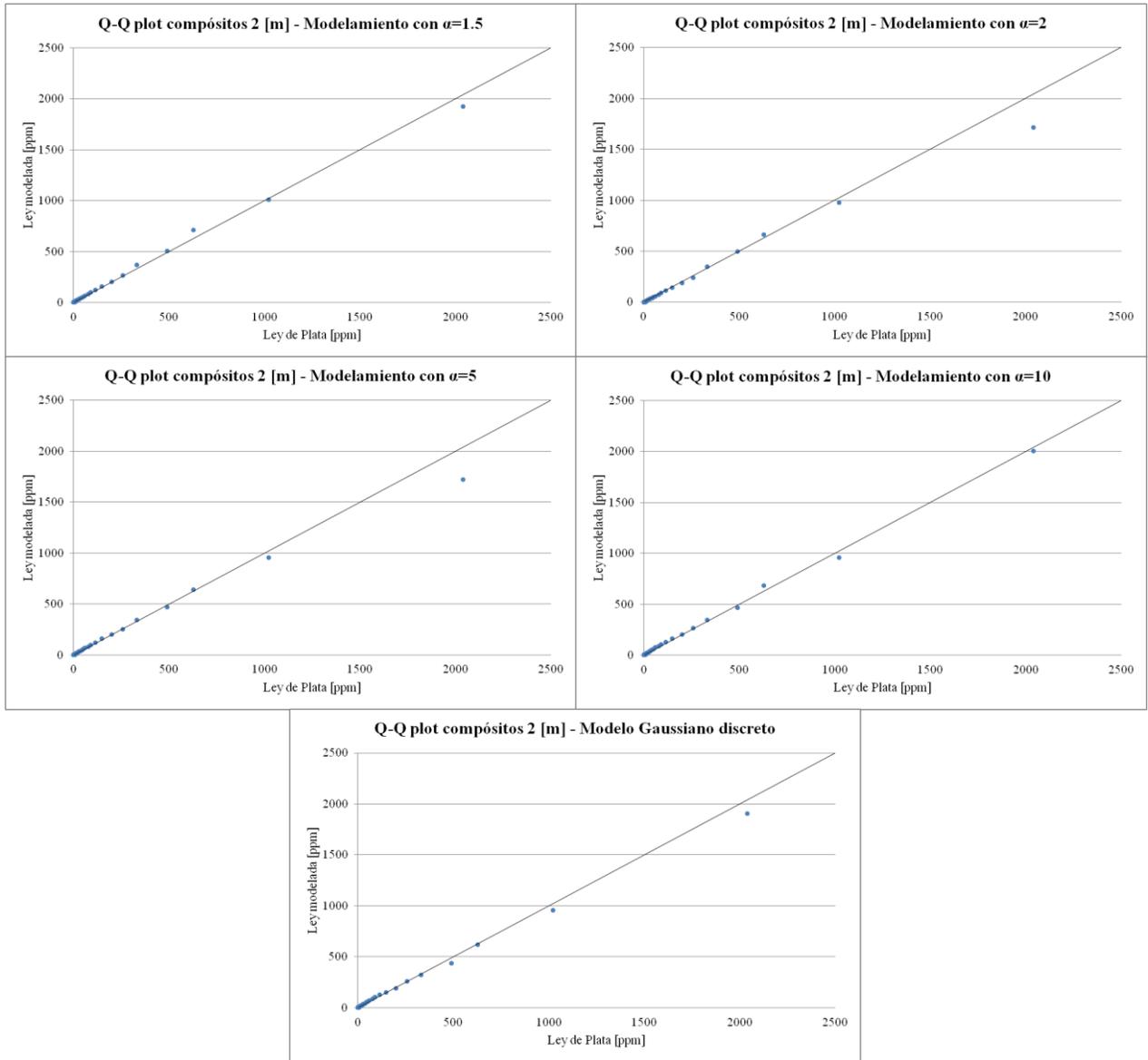
**FIGURA 59: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



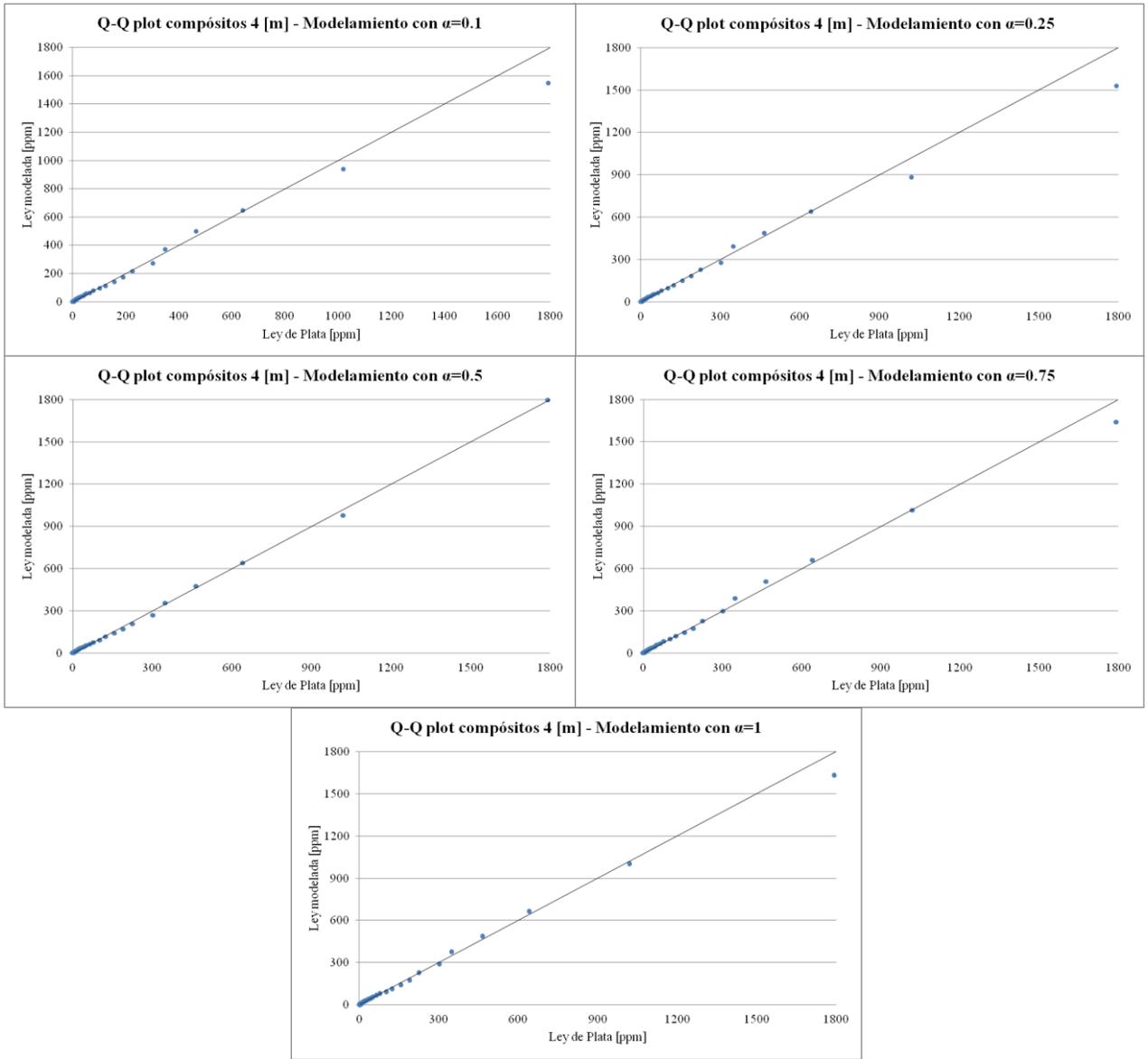
**FIGURA 60: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



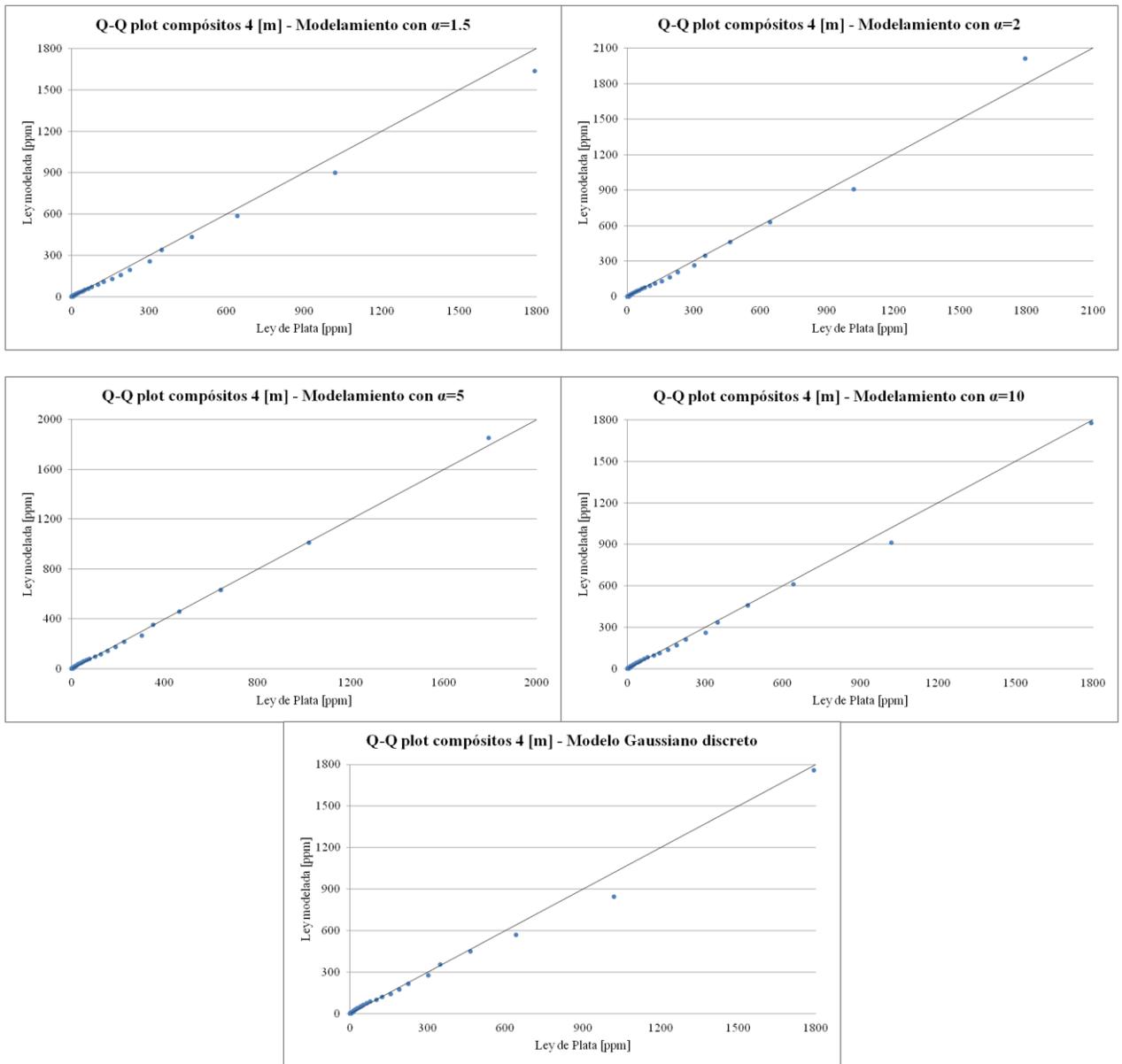
**FIGURA 61: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



**FIGURA 62: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**

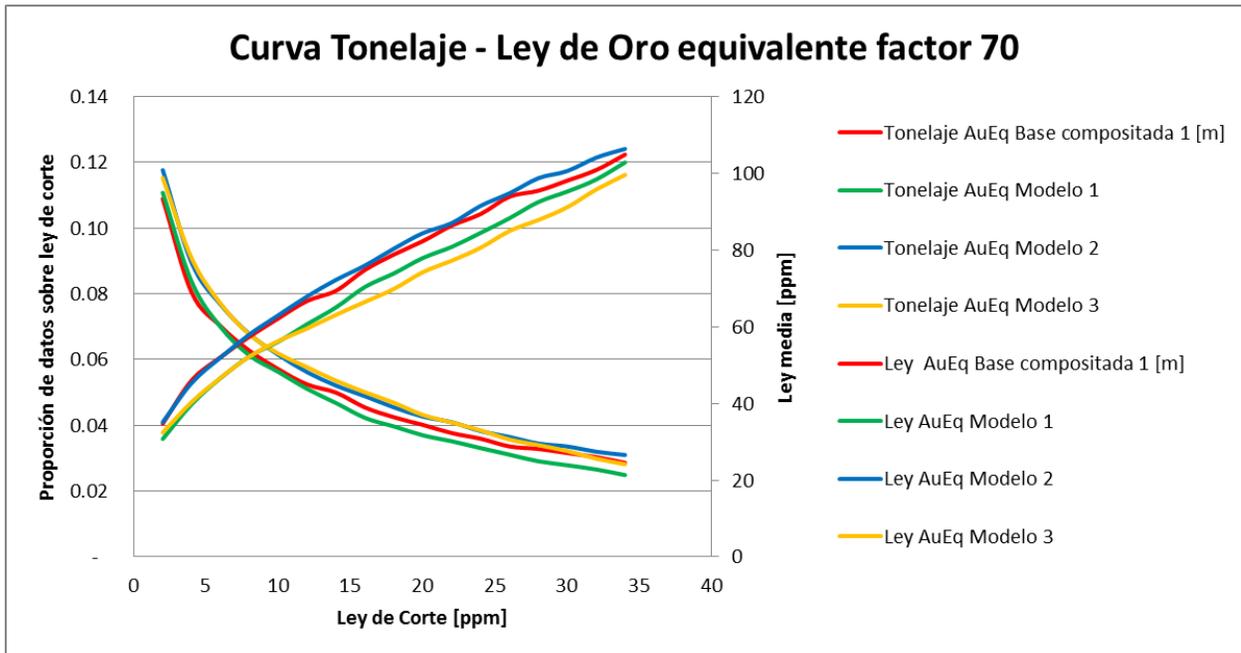


**FIGURA 63: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**

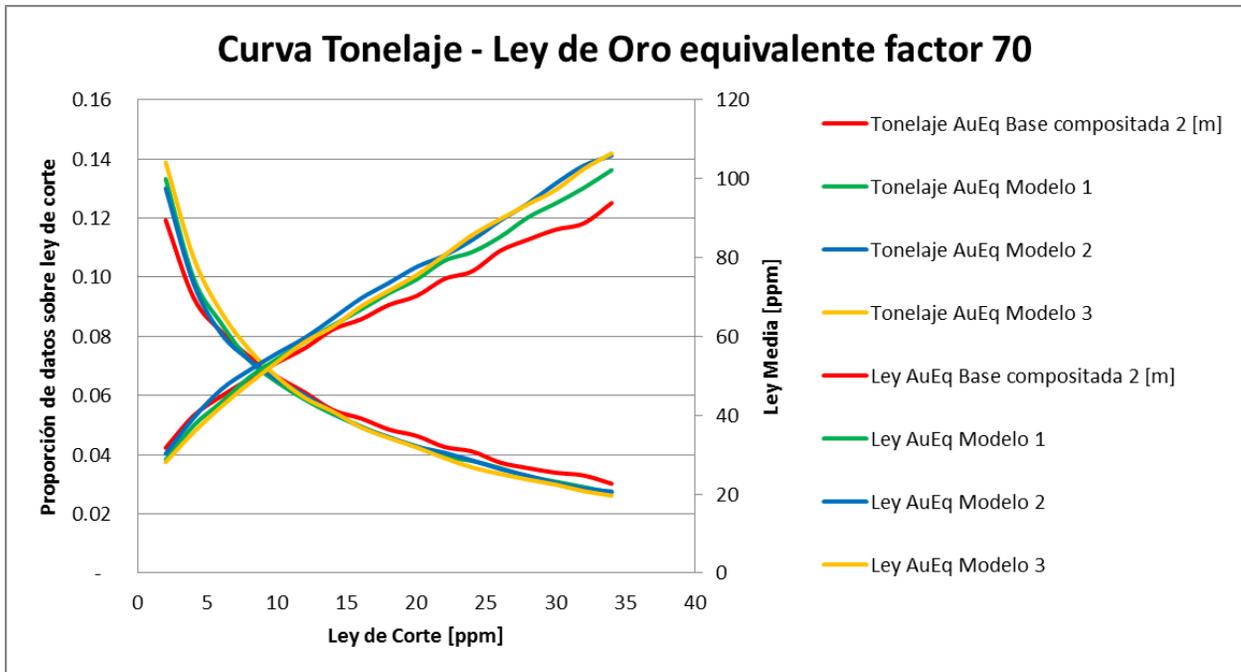


**FIGURA 64: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE PLATA COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**

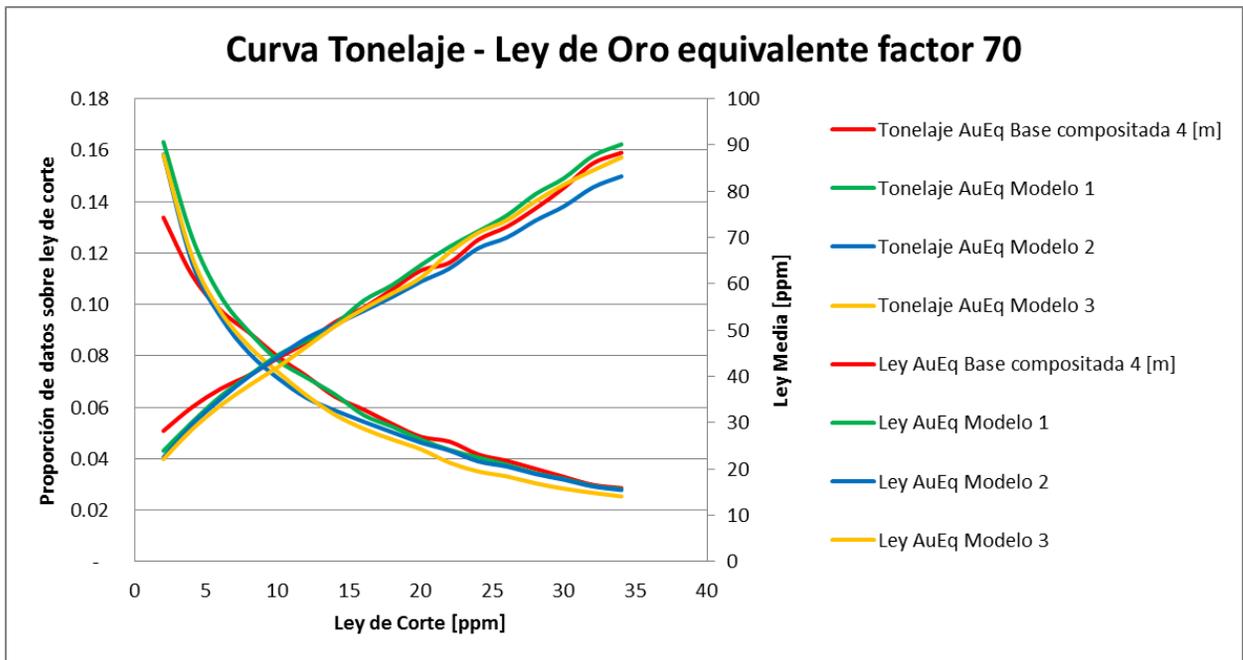
### 3. Curvas tonelaje – ley para caso bivariable



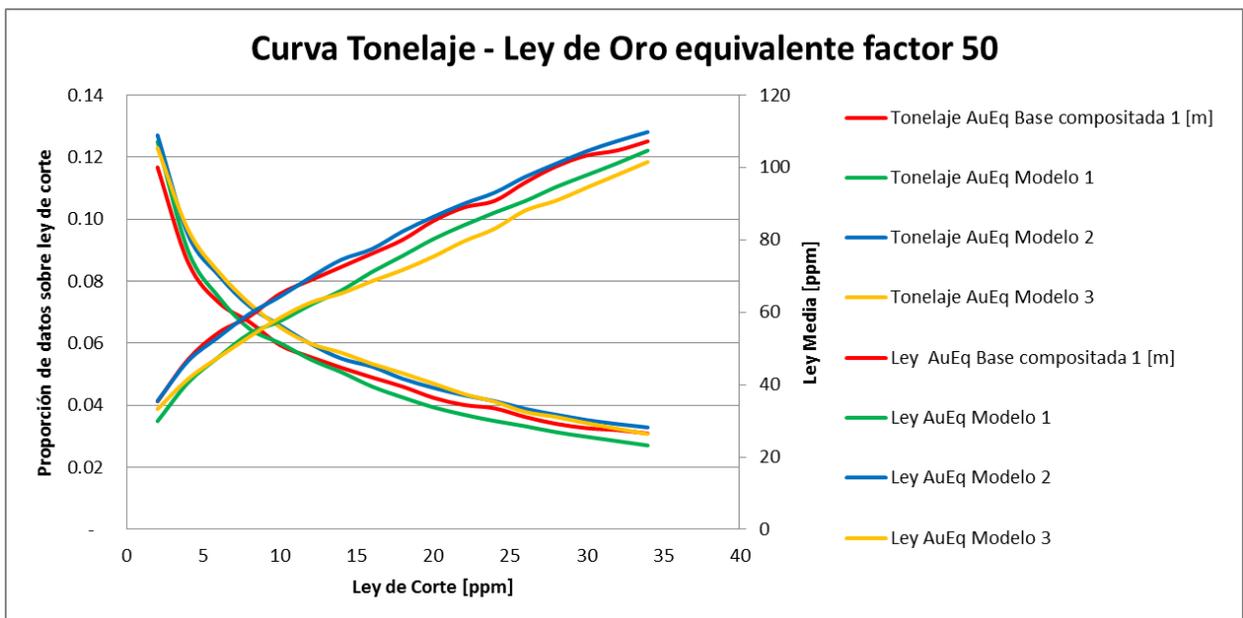
**FIGURA 65: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 1 [m]**



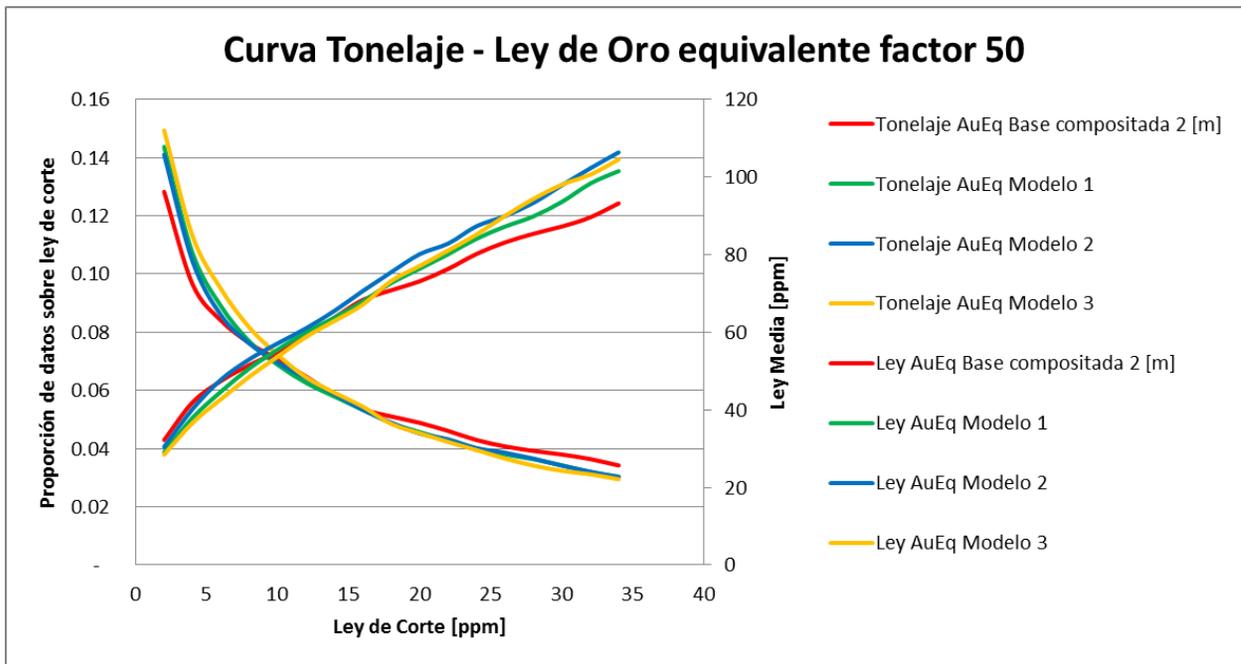
**FIGURA 66: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 2 [m]**



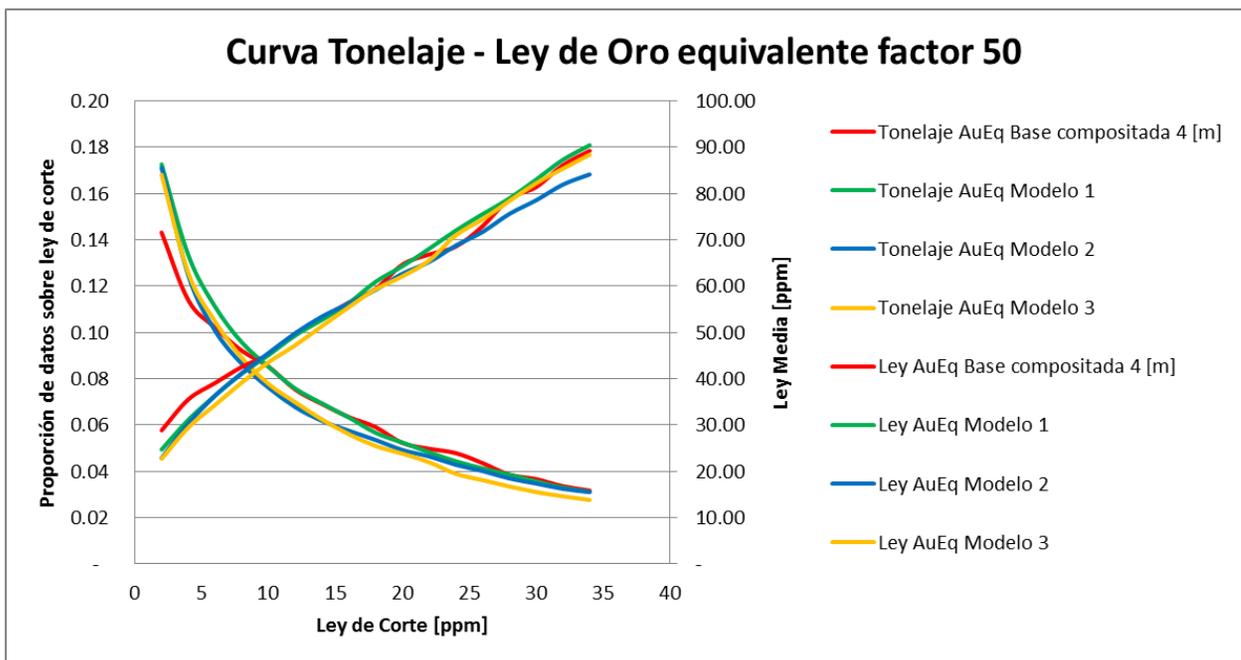
**FIGURA 67: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE APROXIMACIÓN ECONÓMICA, COMPÓSITOS DE 4 [m]**



**FIGURA 68: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 1 [m]**



**FIGURA 69: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 2 [m]**



**FIGURA 70: CURVA TONELAJE LEY PARA LEY DE ORO EQUIVALENTE CON FACTOR DE PRUEBA, COMPÓSITOS DE 4 [m]**

## ANEXO B

### 1. Análisis exploratorio

Al igual que en la base de datos anterior, se realiza una comprobación de los valores extremos con el fin de ver si hay algún dato erróneo o aberrante.

	Ley de Nitrato [%]	Ley de Yodo [ppm]
Mínimo	3.13	130
Máximo	26.88	2,665.00
Cuenta	2,916	2,916

TABLA 28: ESTADÍSTICAS BÁSICAS LEY DE NITRATO Y YODO

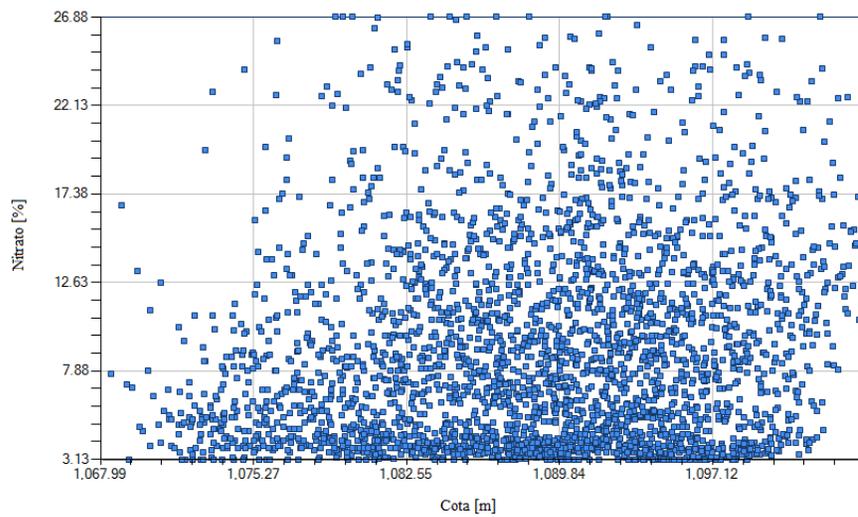


FIGURA 71: MAPA DE LEY DE NITRATO EN FUNCIÓN DE LA COTA

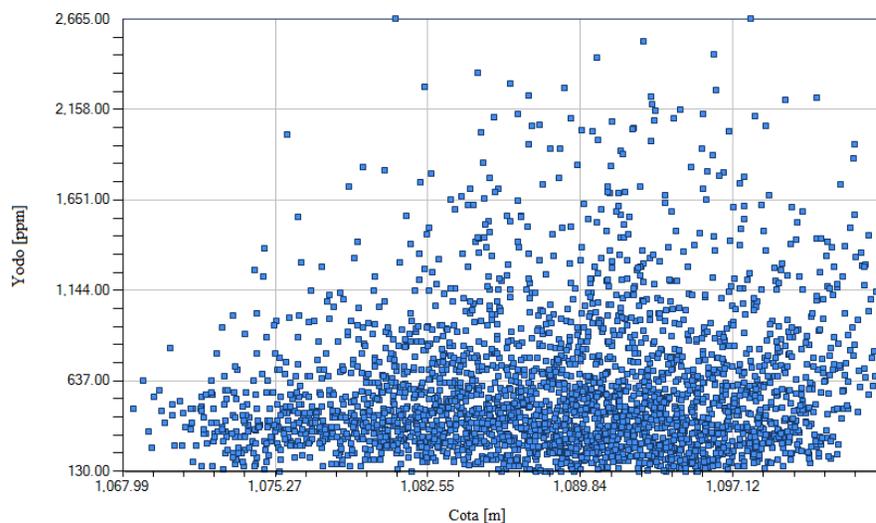
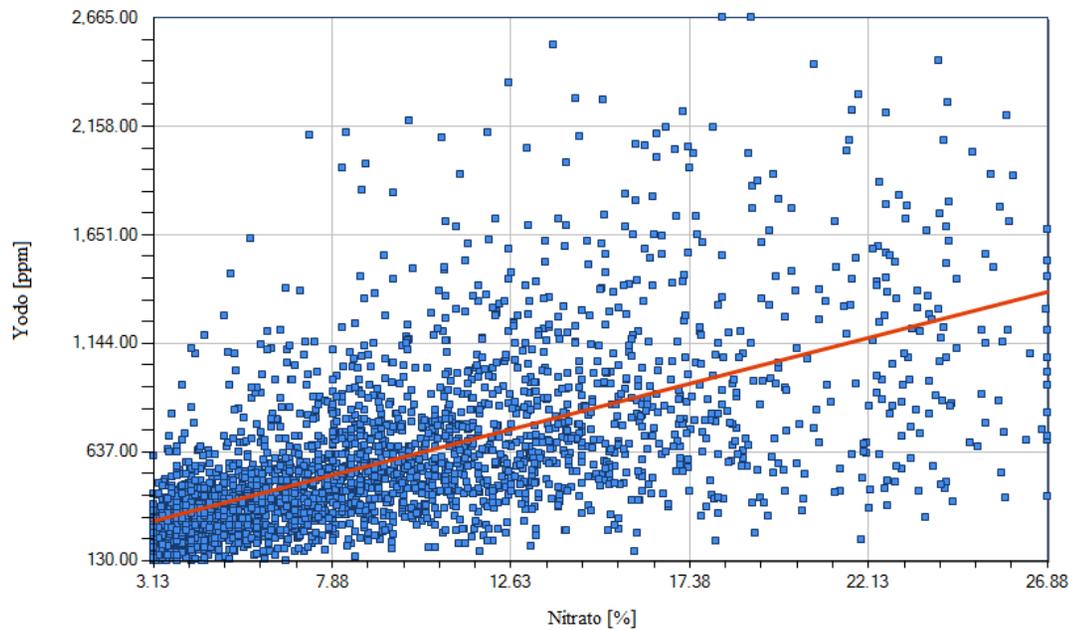


FIGURA 72: MAPA DE LEY DE YODO EN FUNCIÓN DE LA COTA

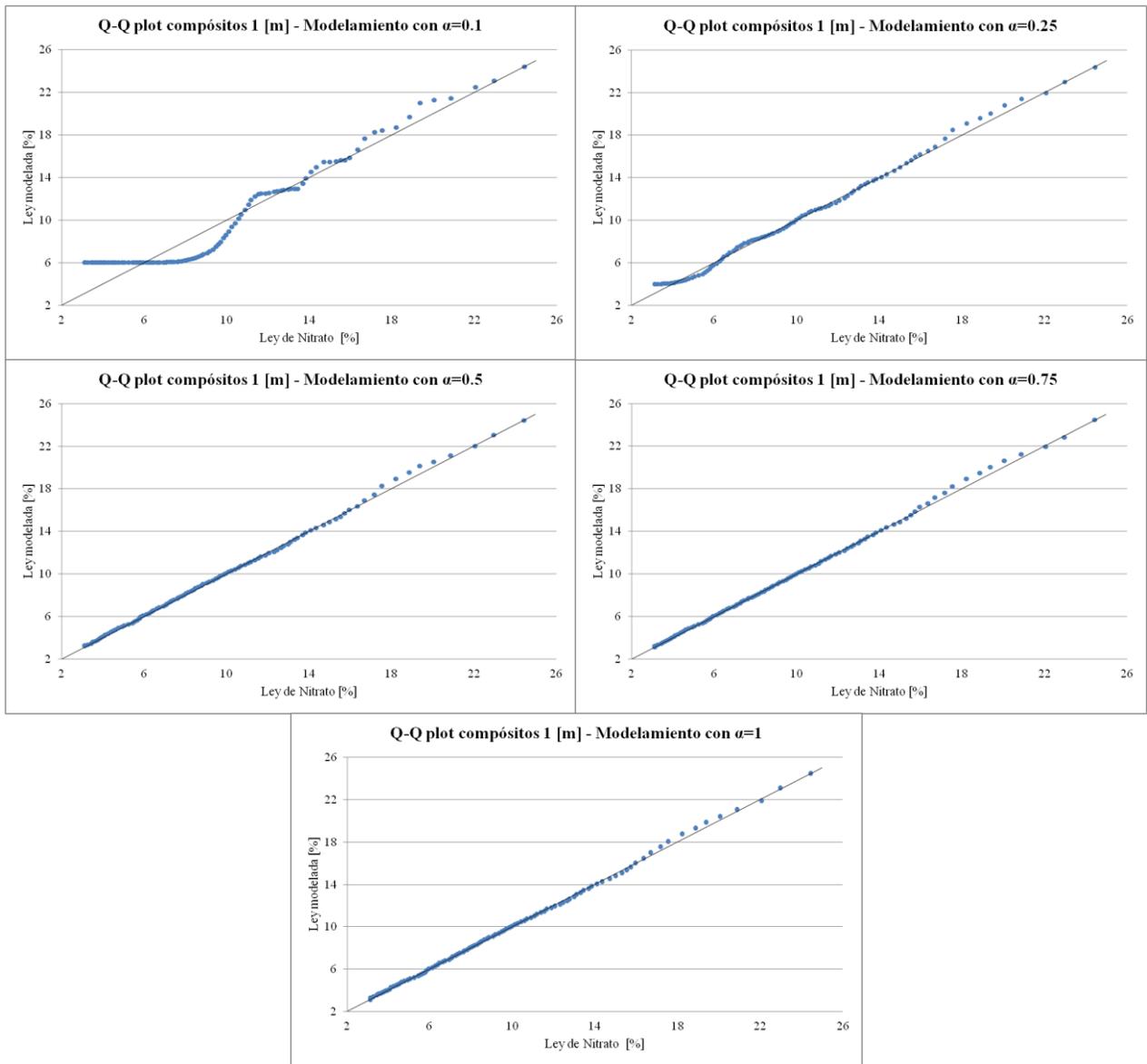
No se aprecian datos aberrantes en ninguna de las variables, por lo que se deja intacta la base de datos para continuar con el proceso.



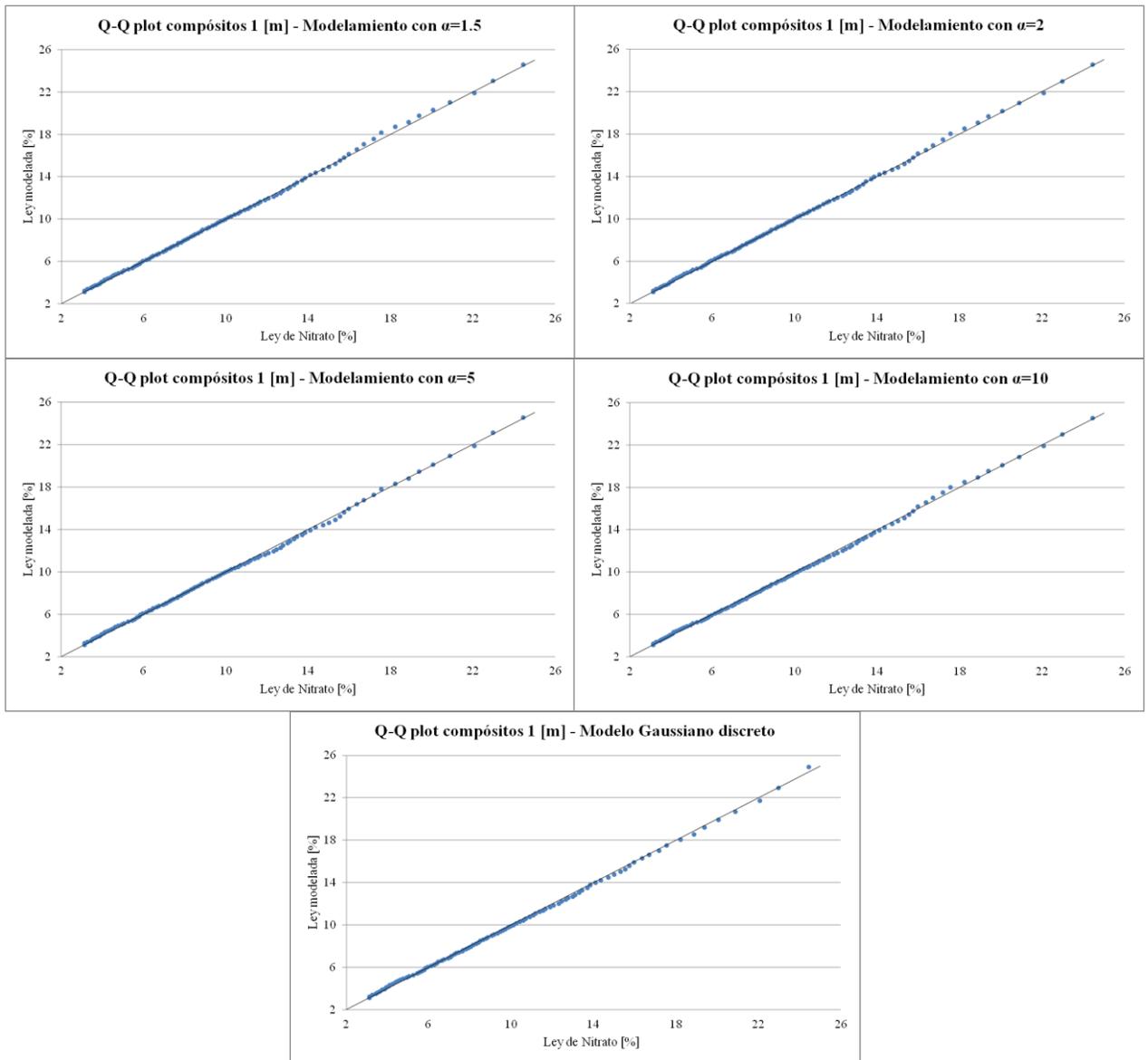
**FIGURA 73: MAPA DE CORRELACIÓN NITRATO – YODO**

Se aprecia una correlación entre ambas variables, vemos que los datos se encuentran en la cercanía de la línea de regresión, por lo que se puede establecer una correlación entre ambas y considerar los datos apropiados para fijar un modelo bivariable.

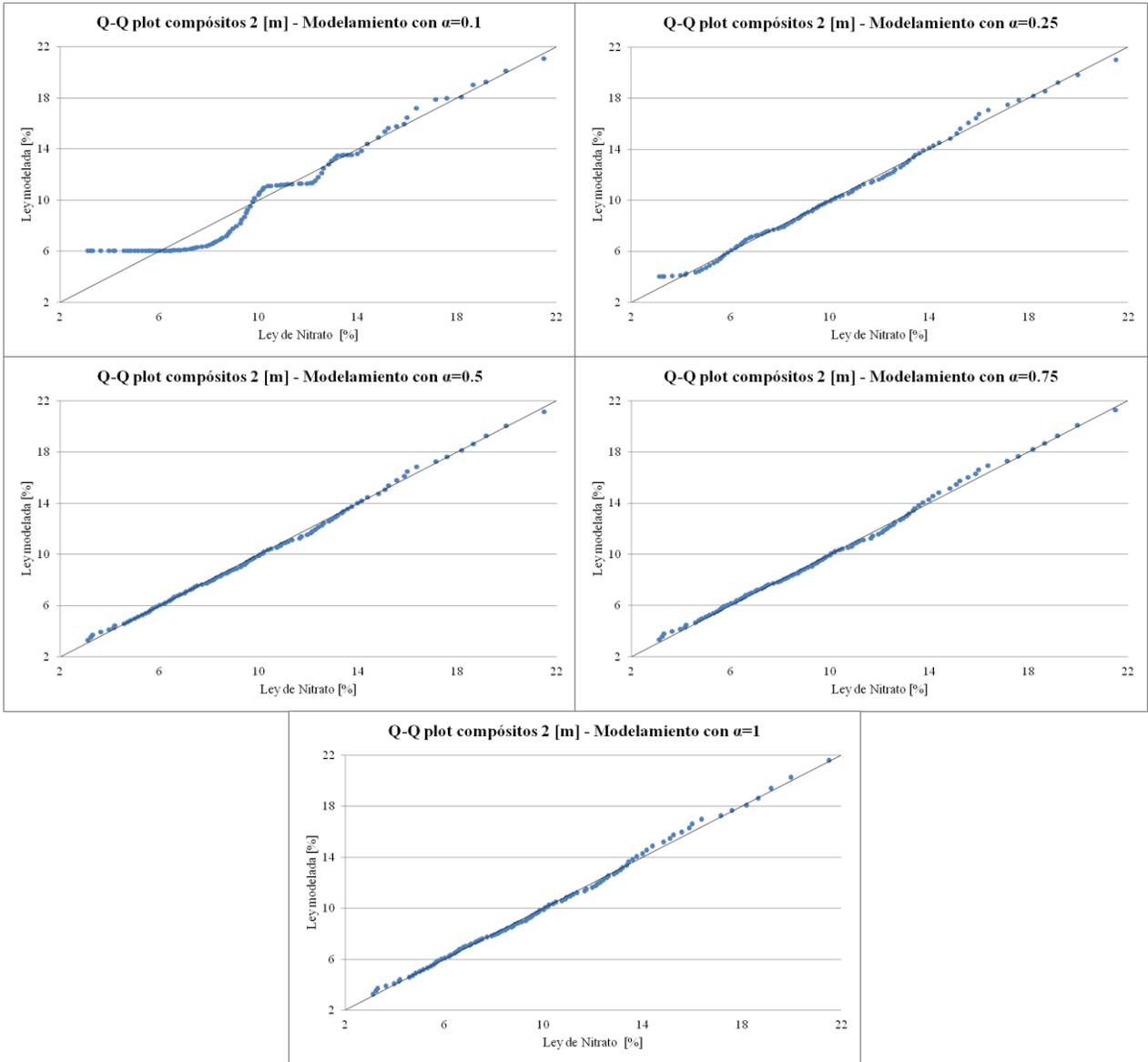
## 2. Q-Q Plot Nitrato - Yodo



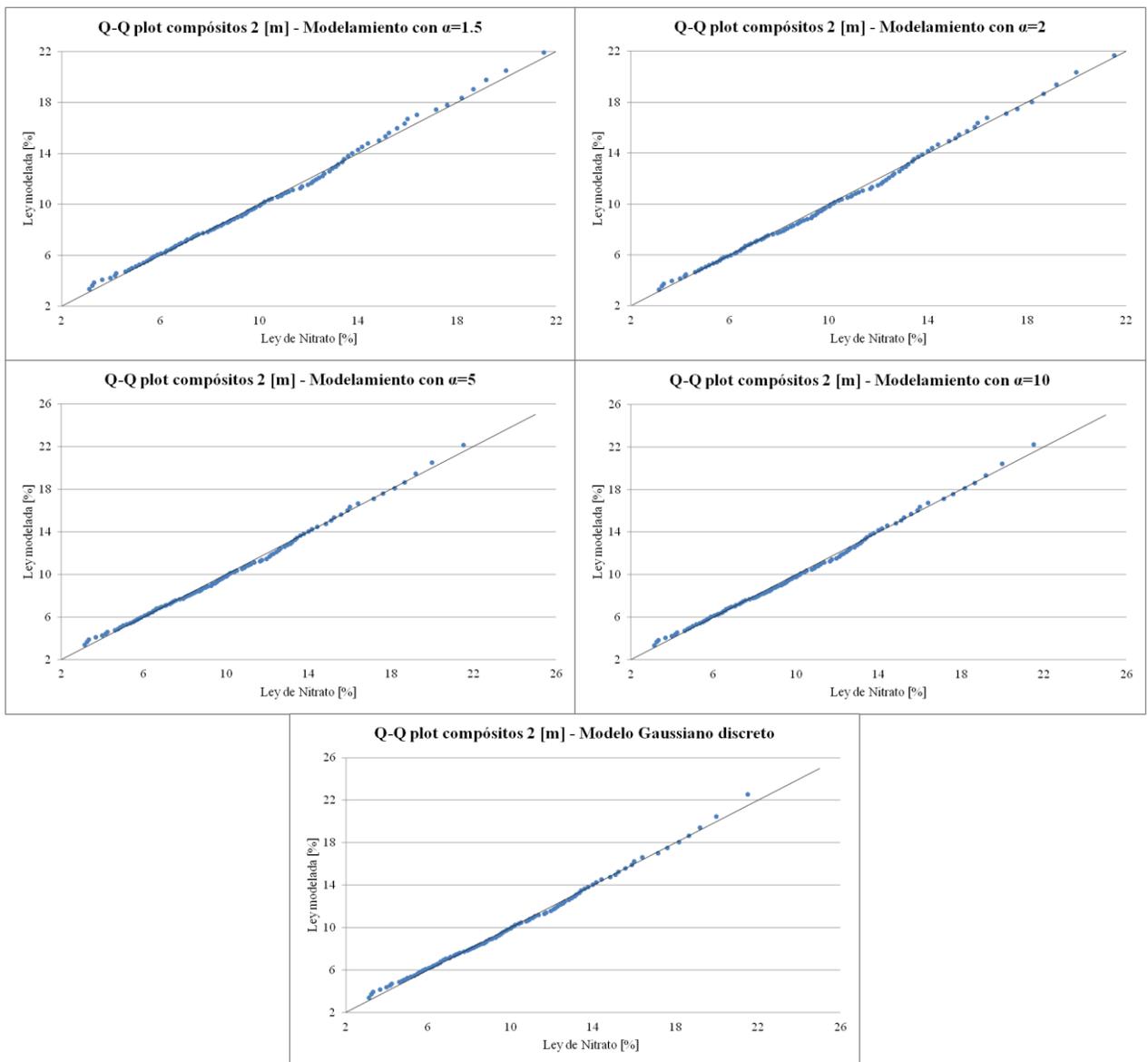
**FIGURA 74: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



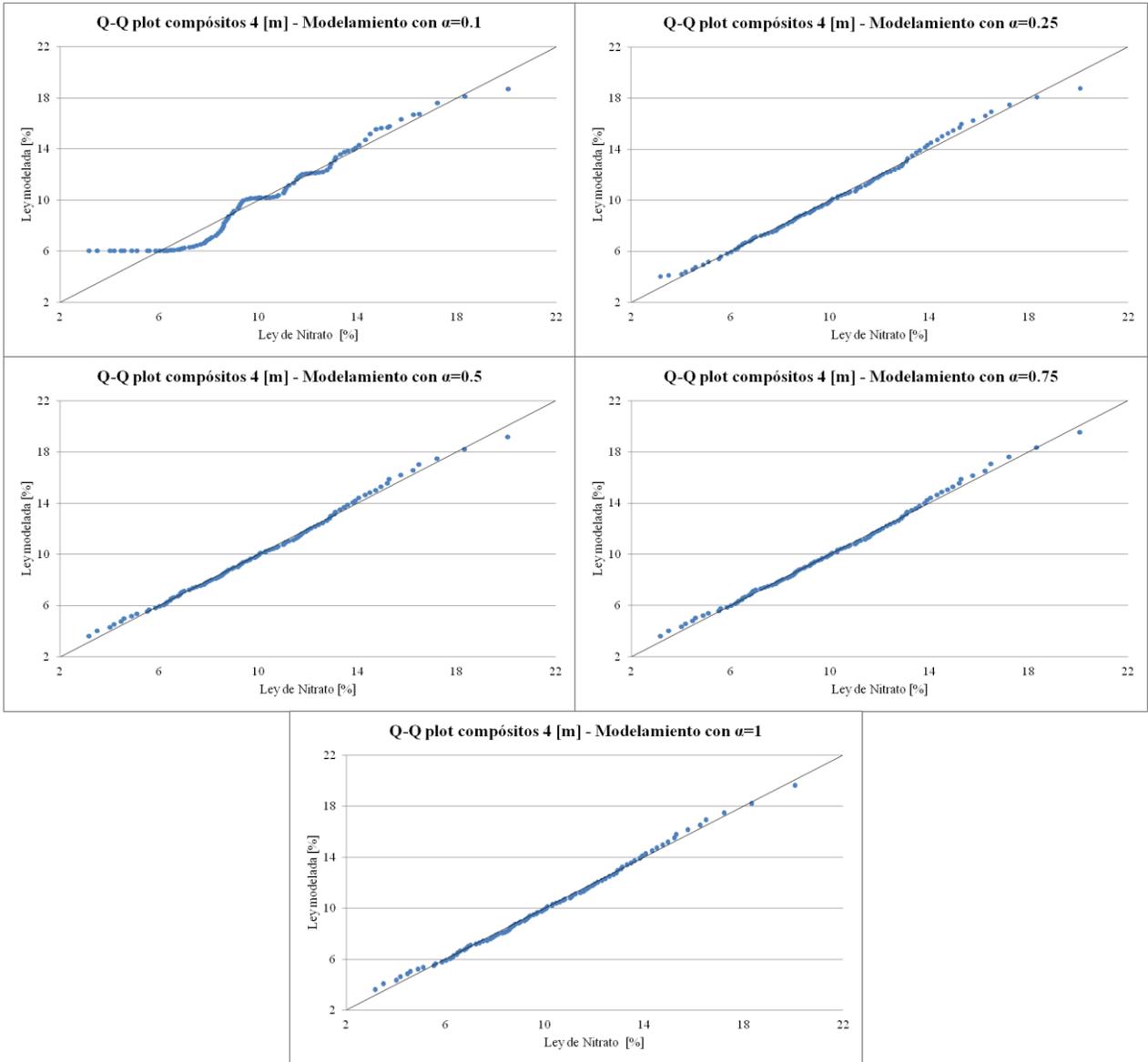
**FIGURA 75: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



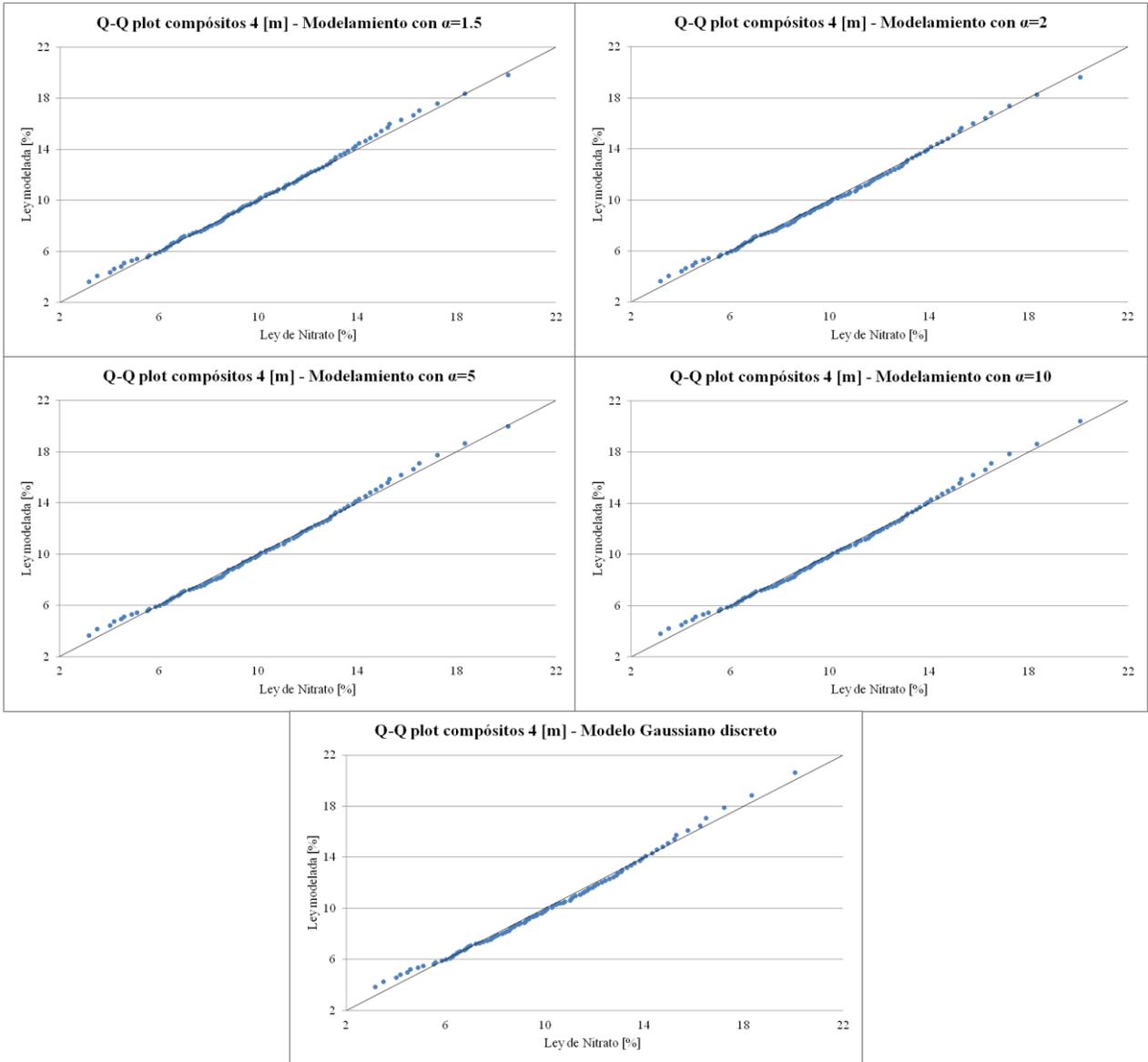
**FIGURA 76: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



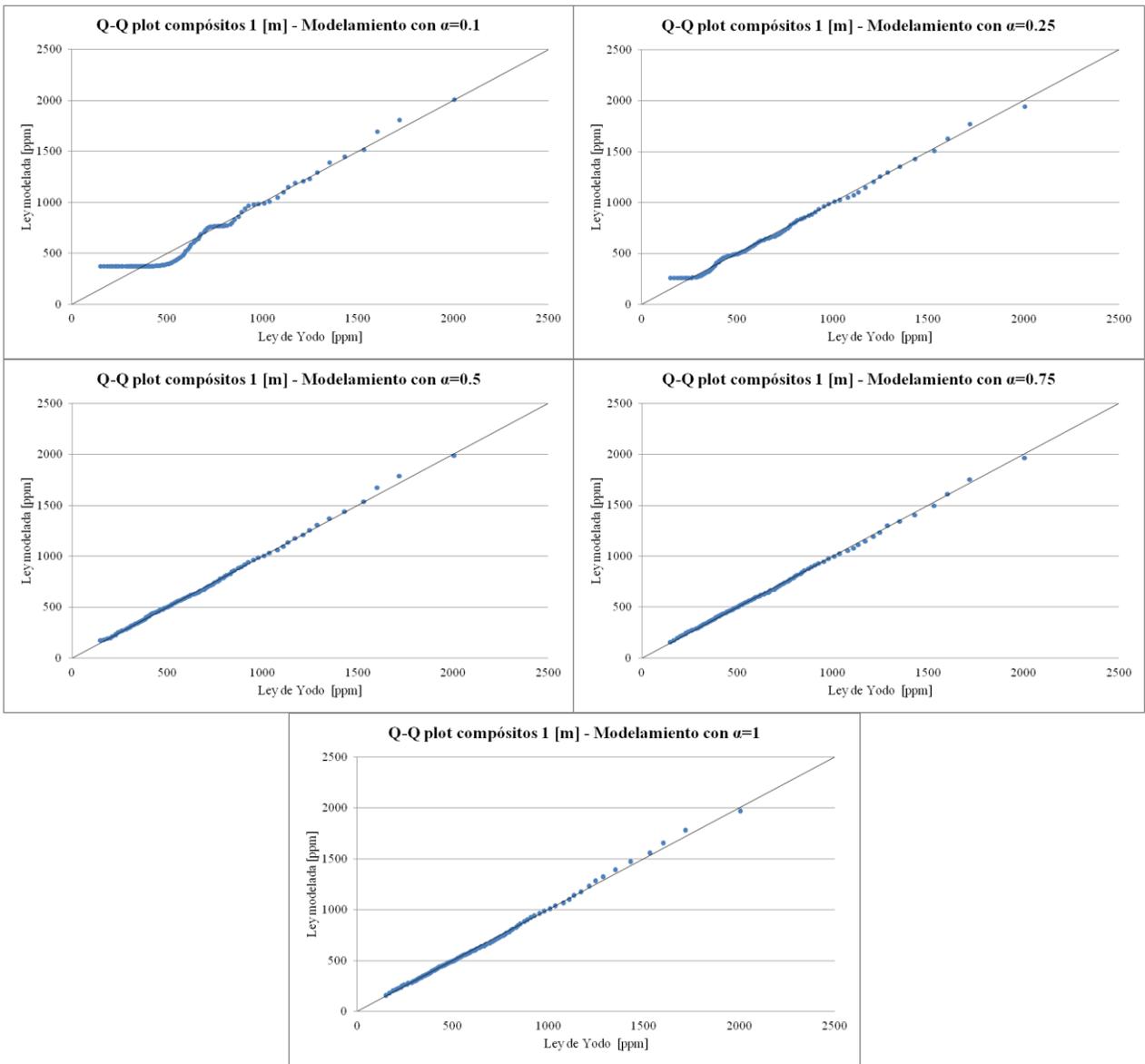
**FIGURA 77: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



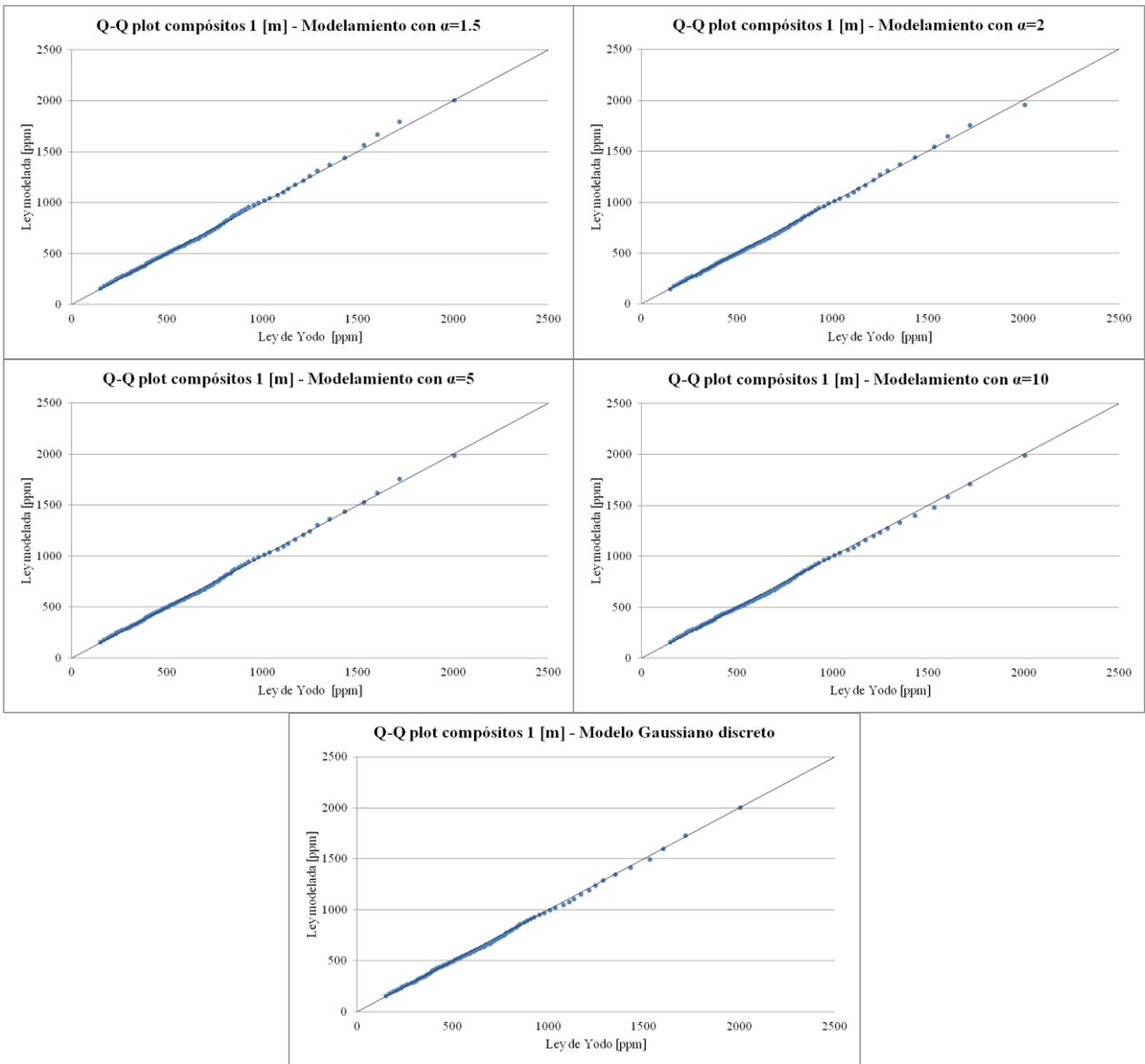
**FIGURA 78: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



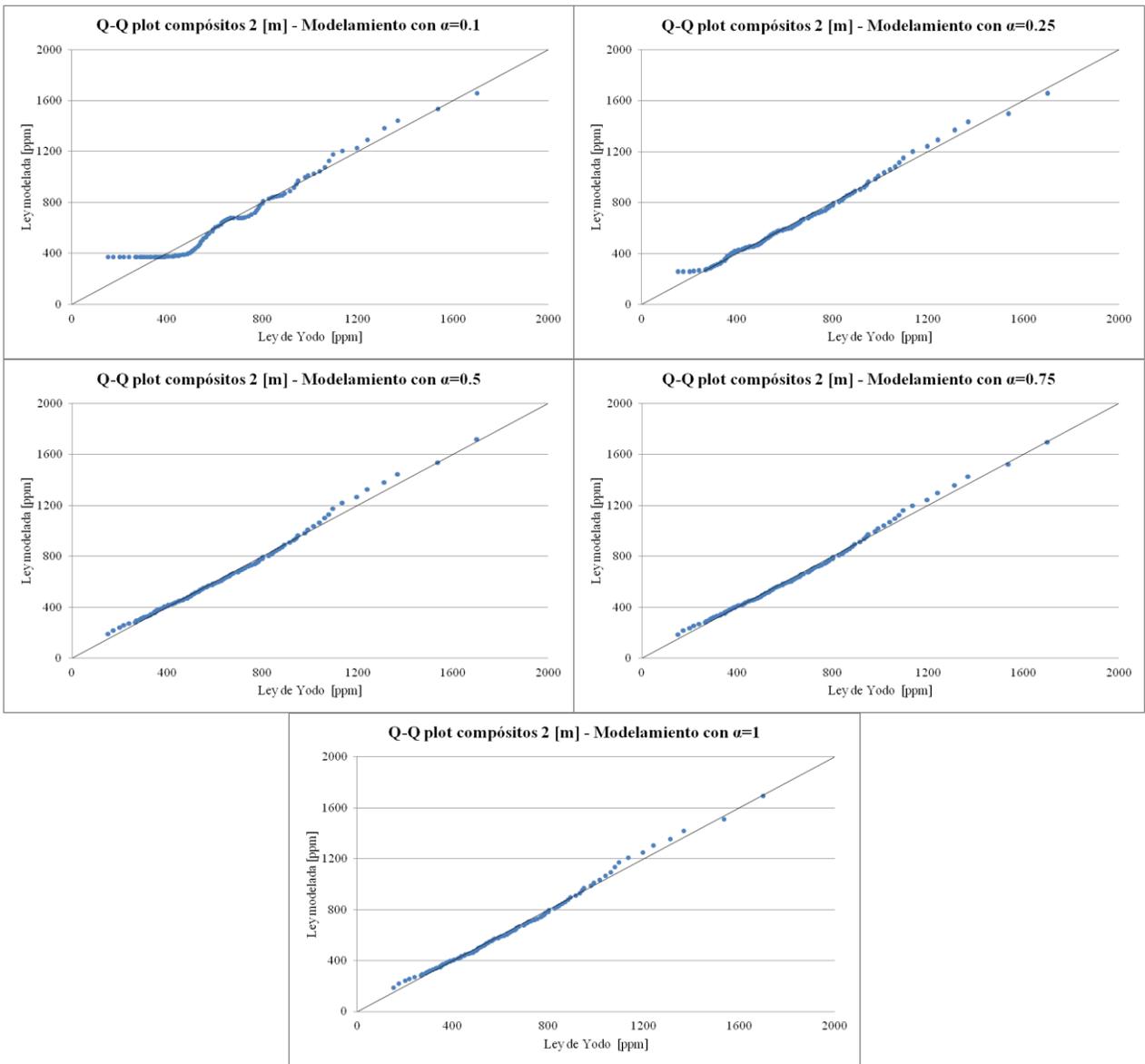
**FIGURA 79: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE NITRATO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



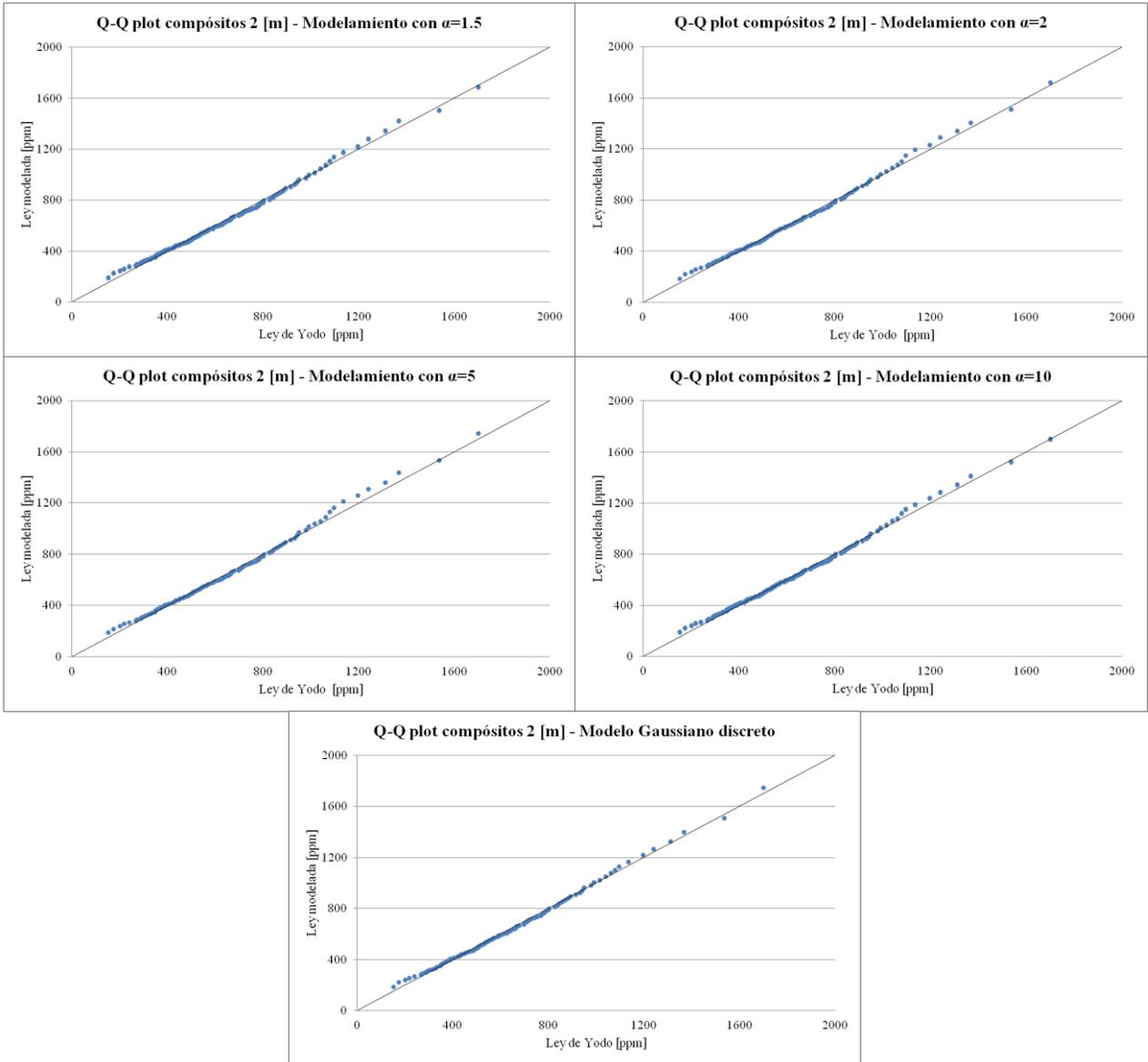
**FIGURA 80: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



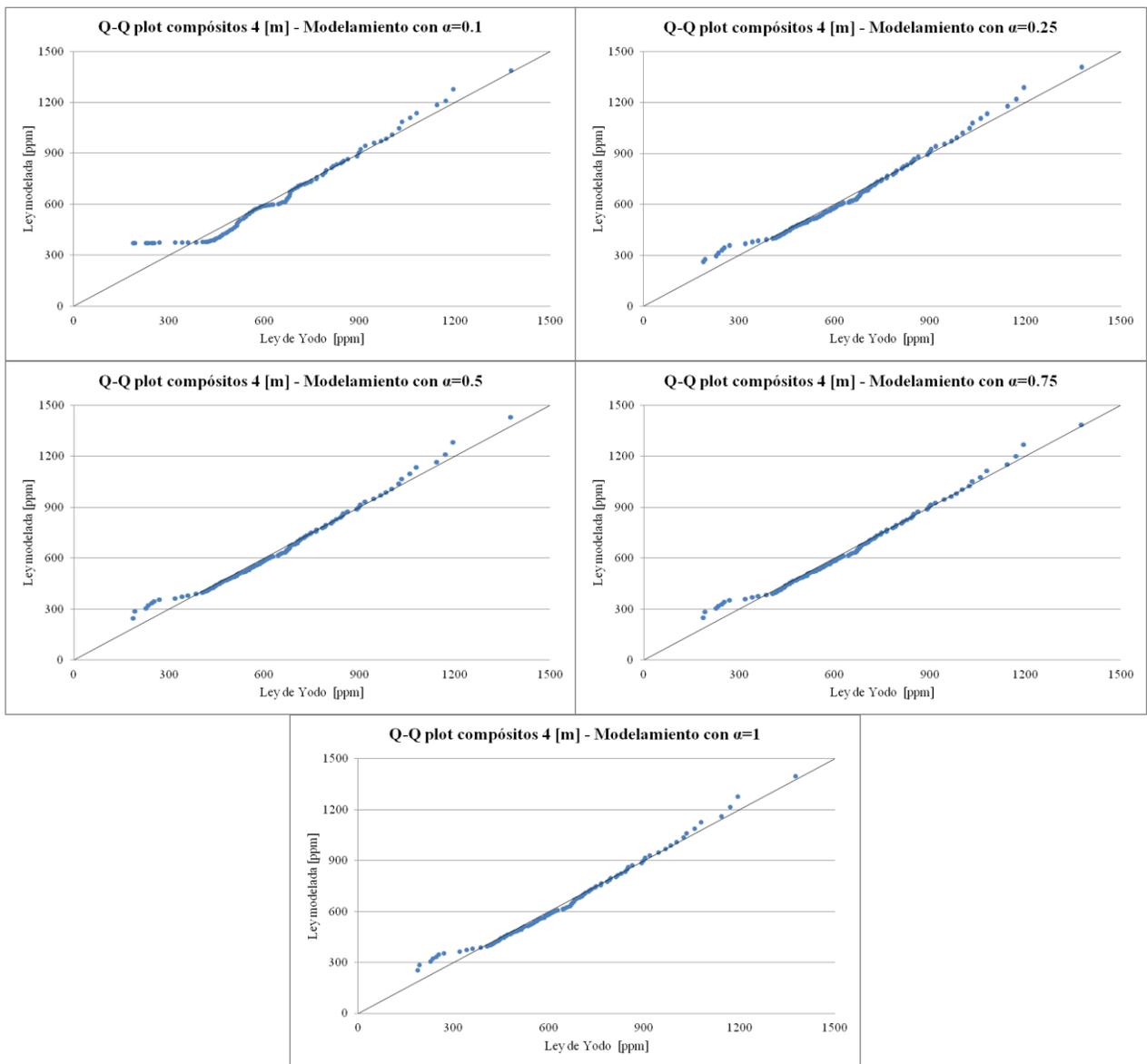
**FIGURA 81: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 1 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



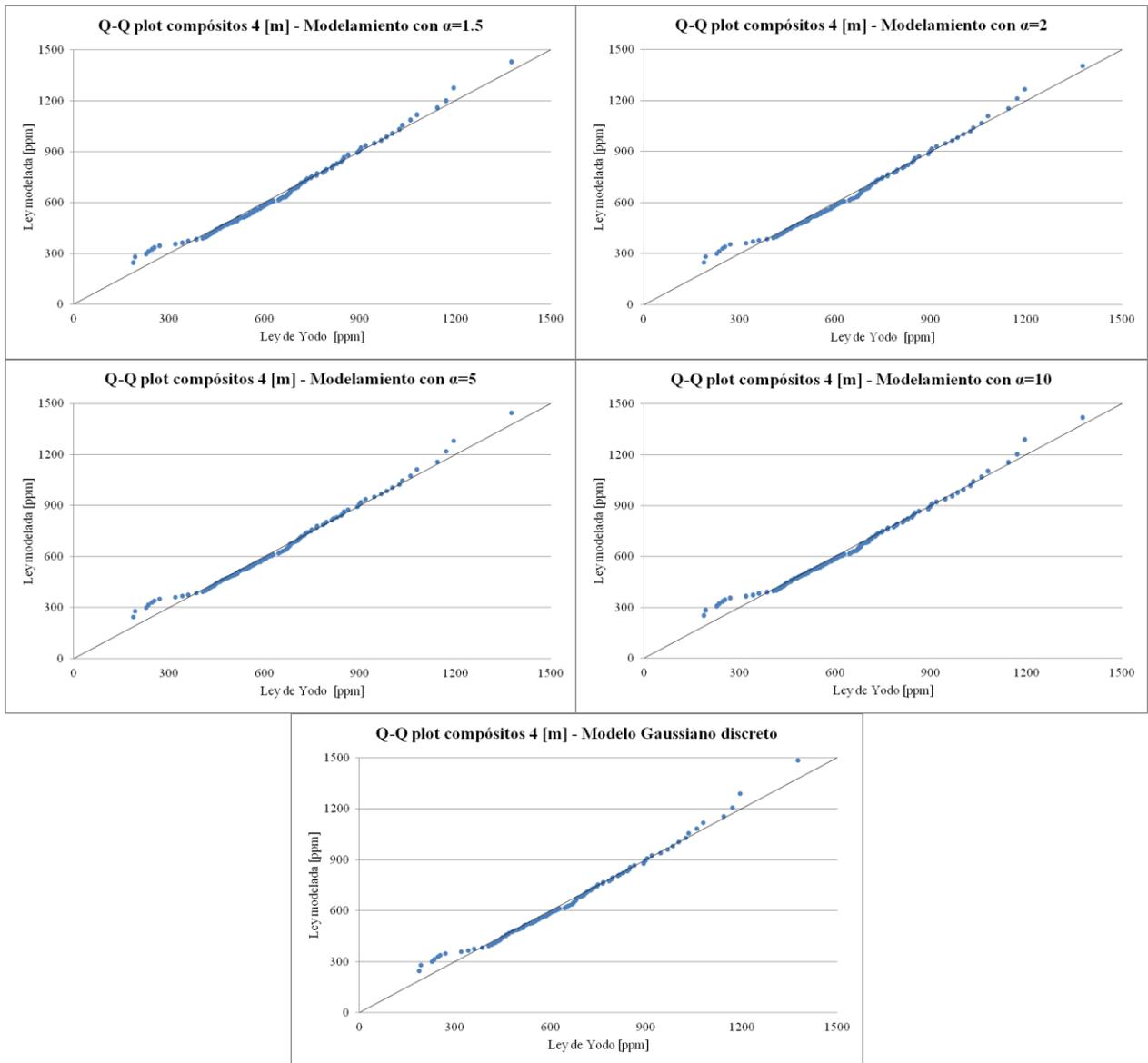
**FIGURA 82: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



**FIGURA 83: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 2 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**



**FIGURA 84: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 0.1 A 1**



**FIGURA 85: Q-Q PLOT ENTRE DATOS DE YODO COMPOSITADOS A 4 [M] Y DATOS MODELADOS CON FACTOR DE FORMA DE 1.5 A 10 Y EL MODELO GAUSSIANO DISCRETO**

### 3. Curvas Mineral - Tonelaje

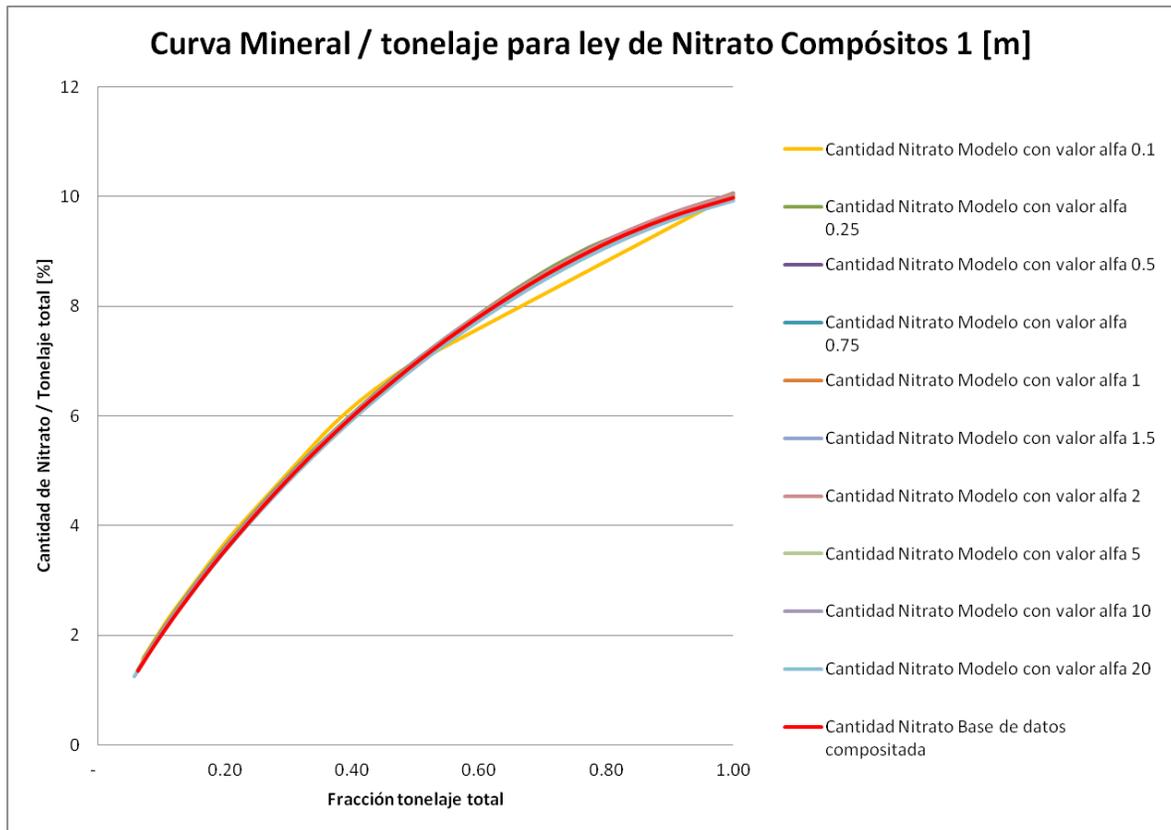
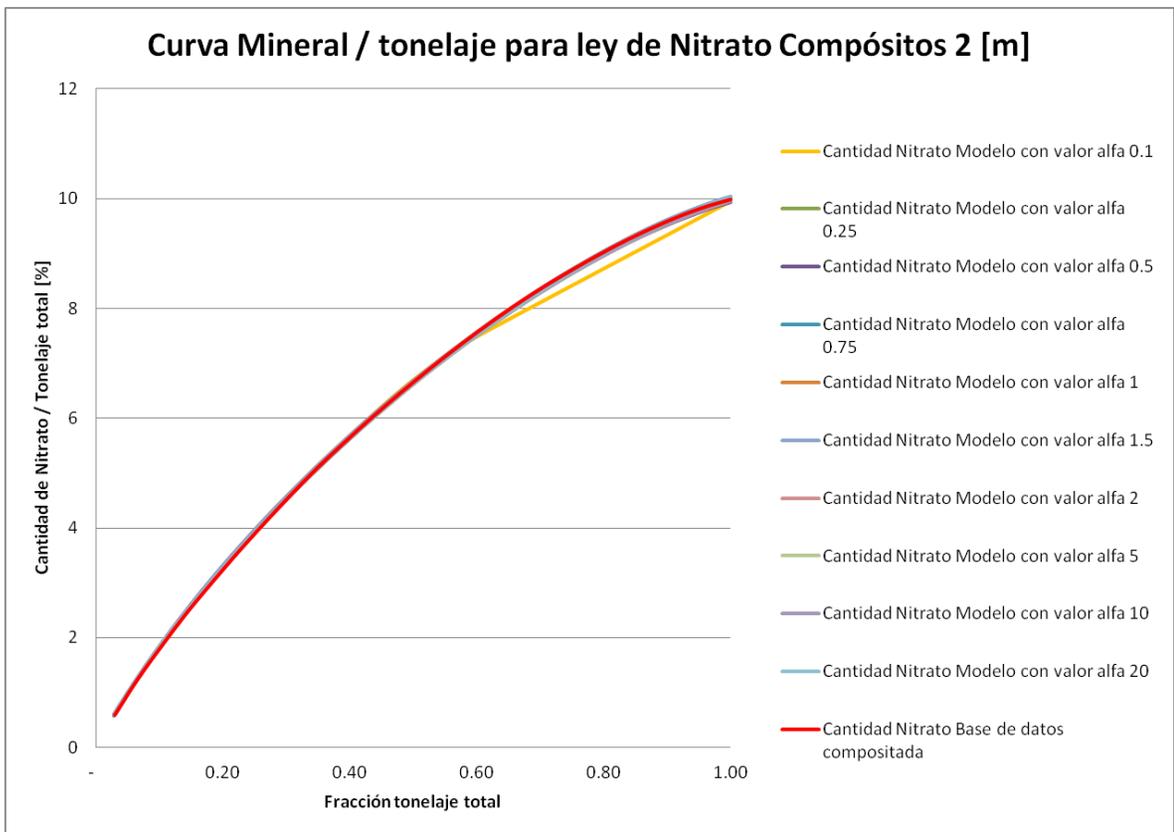
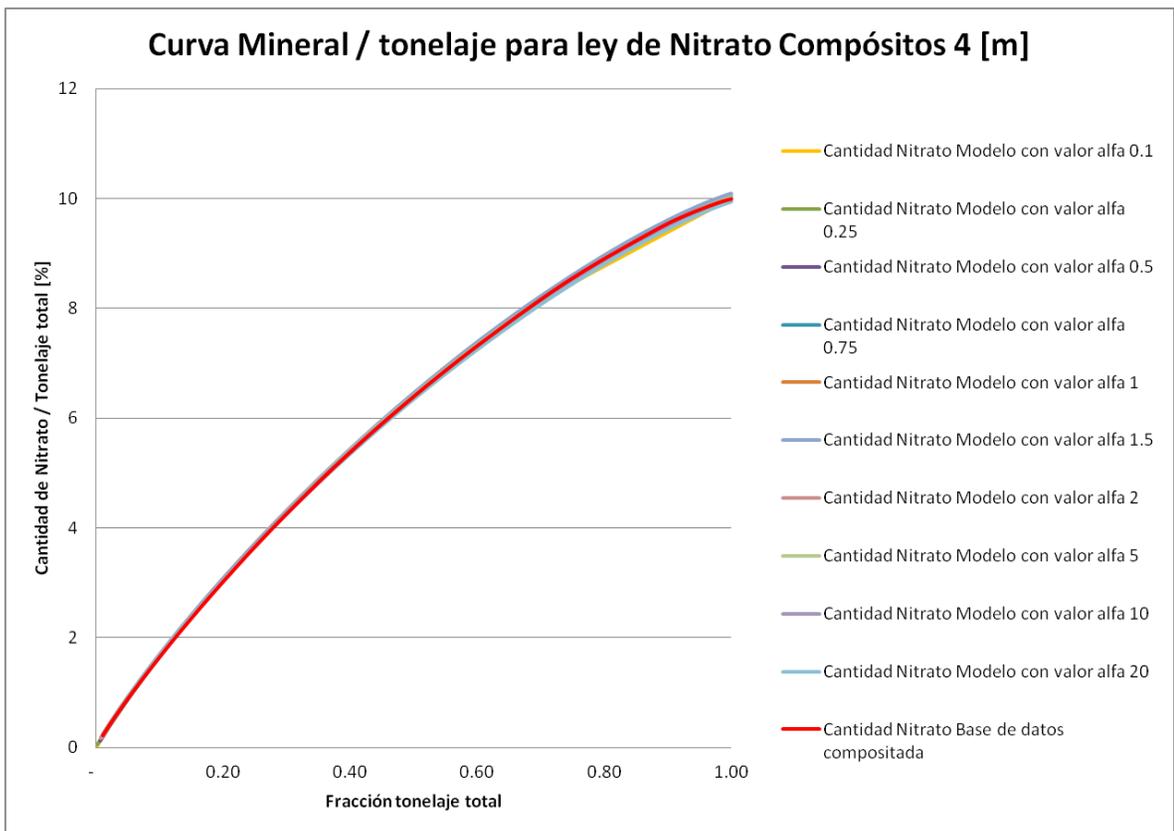


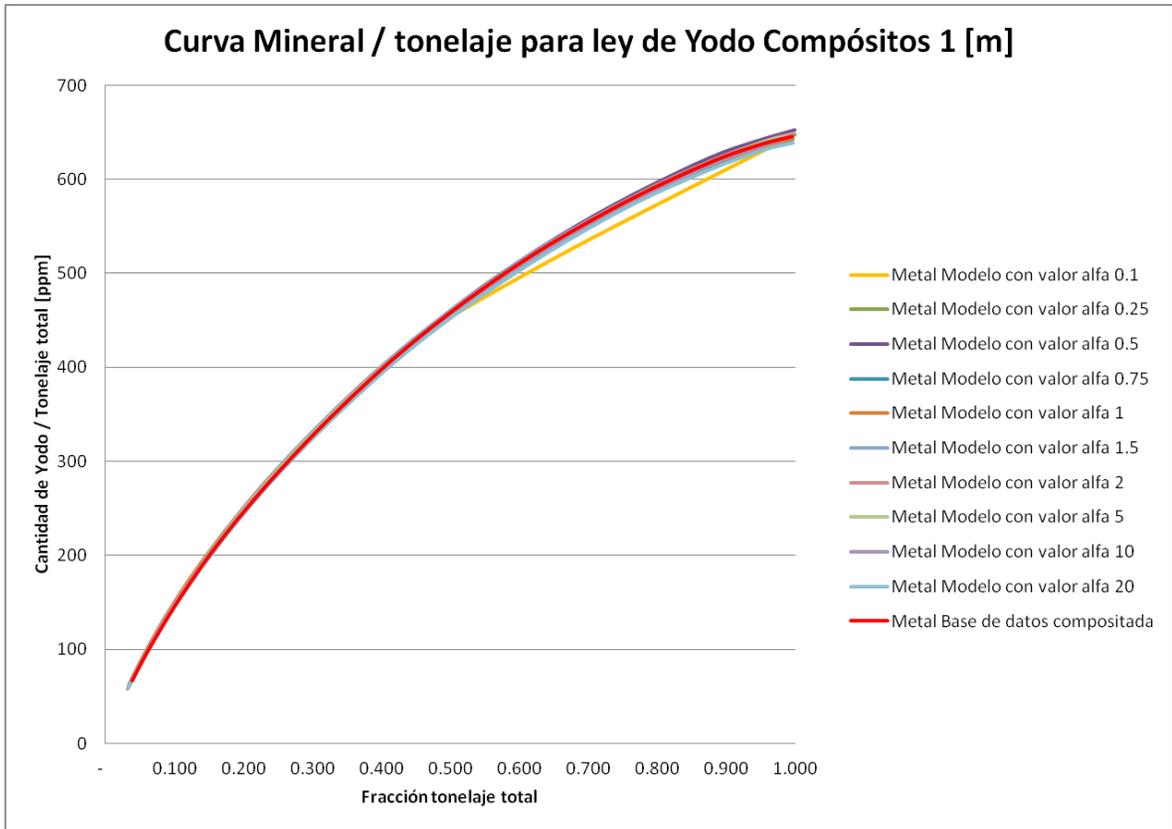
FIGURA 86: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE NITRATO. COMPÓSITOS DE 1 [m]



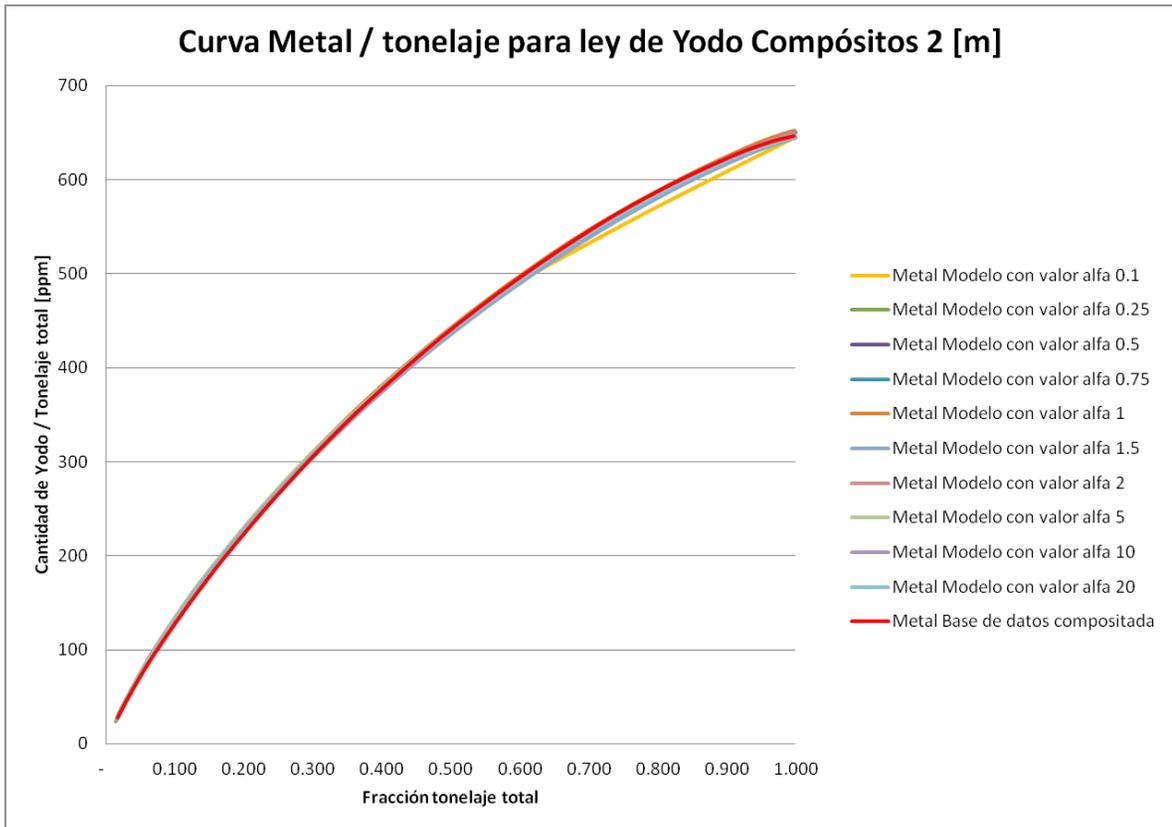
**FIGURA 87: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE NITRATO. COMPÓSITOS DE 2 [m]**



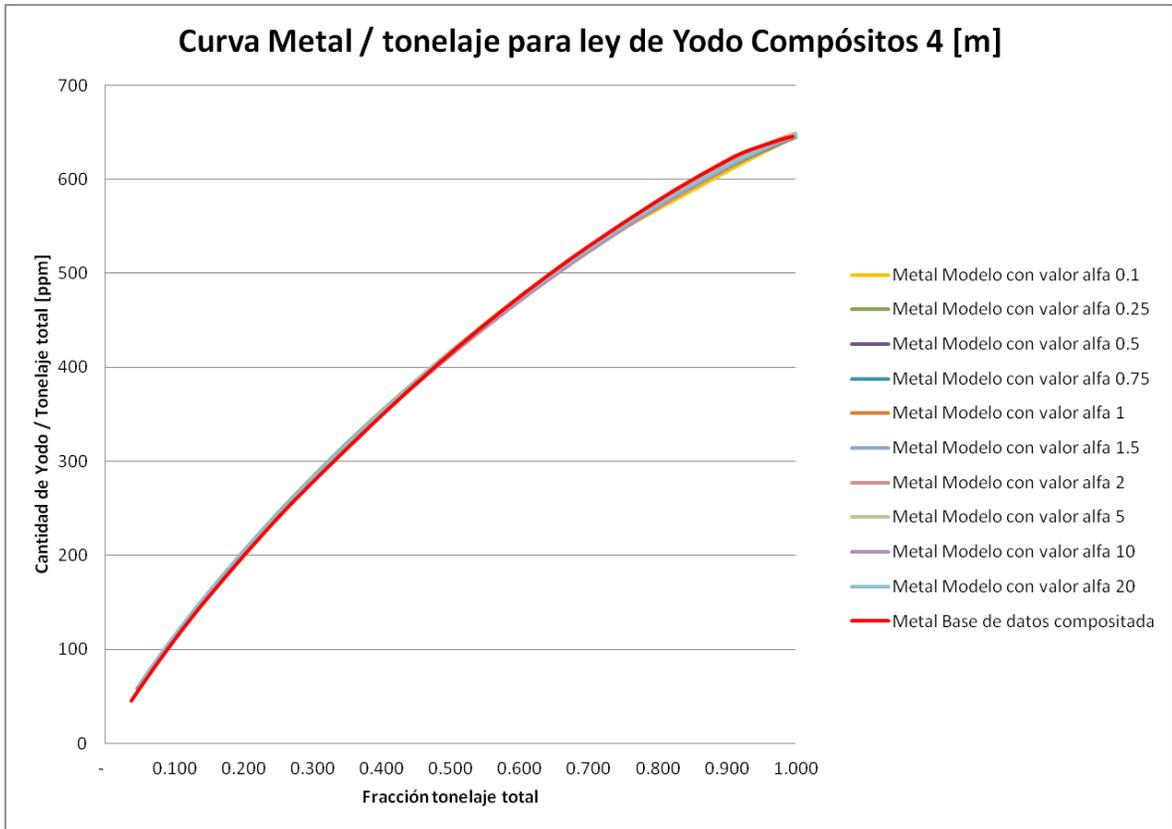
**FIGURA 88: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE NITRATO. COMPÓSITOS DE 4 [m]**



**FIGURA 89: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE YODO. COMPÓSITOS DE 1 [m]**

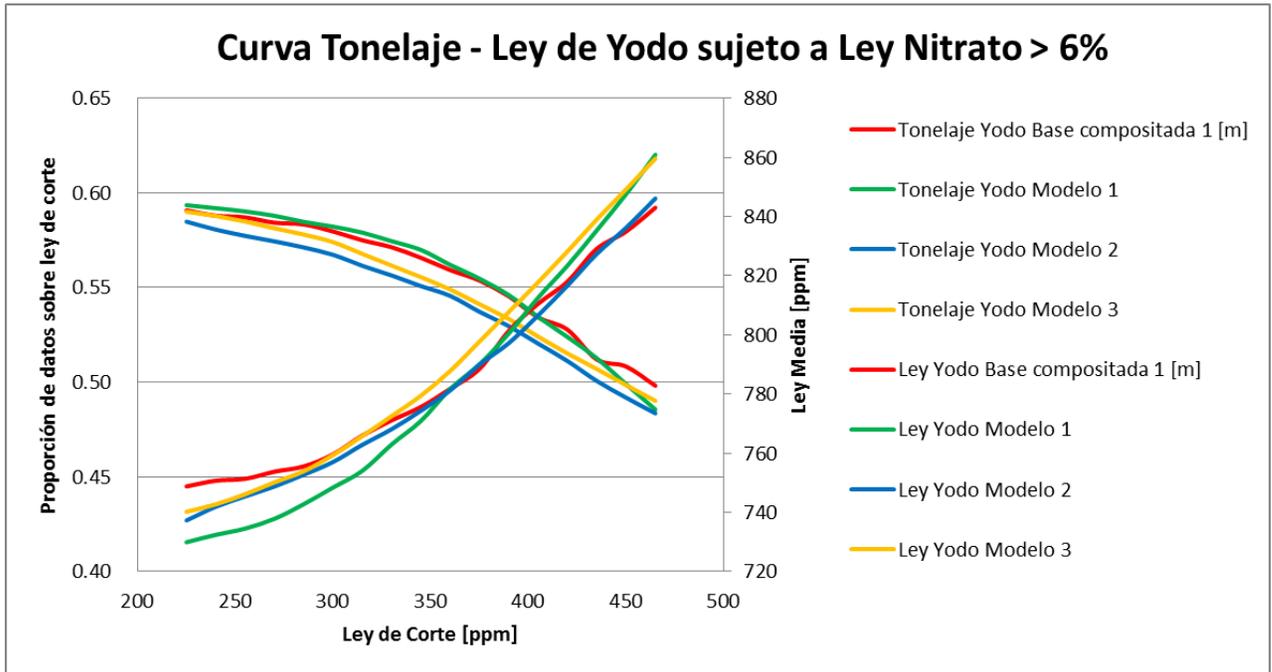


**FIGURA 90: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE YODO. COMPÓSITOS DE 2 [m]**

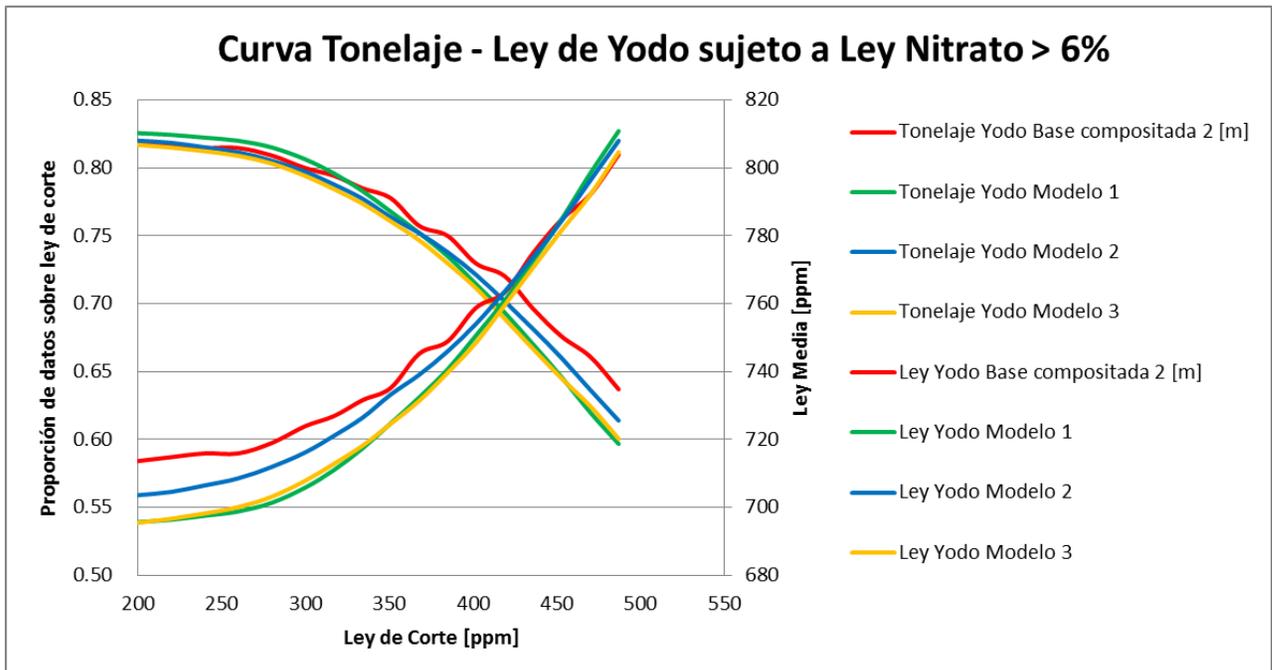


**FIGURA 91: CURVA MINERAL - TONELAJE PARA LEY DE YODO. COMPÓSITOS DE 4 [m]**

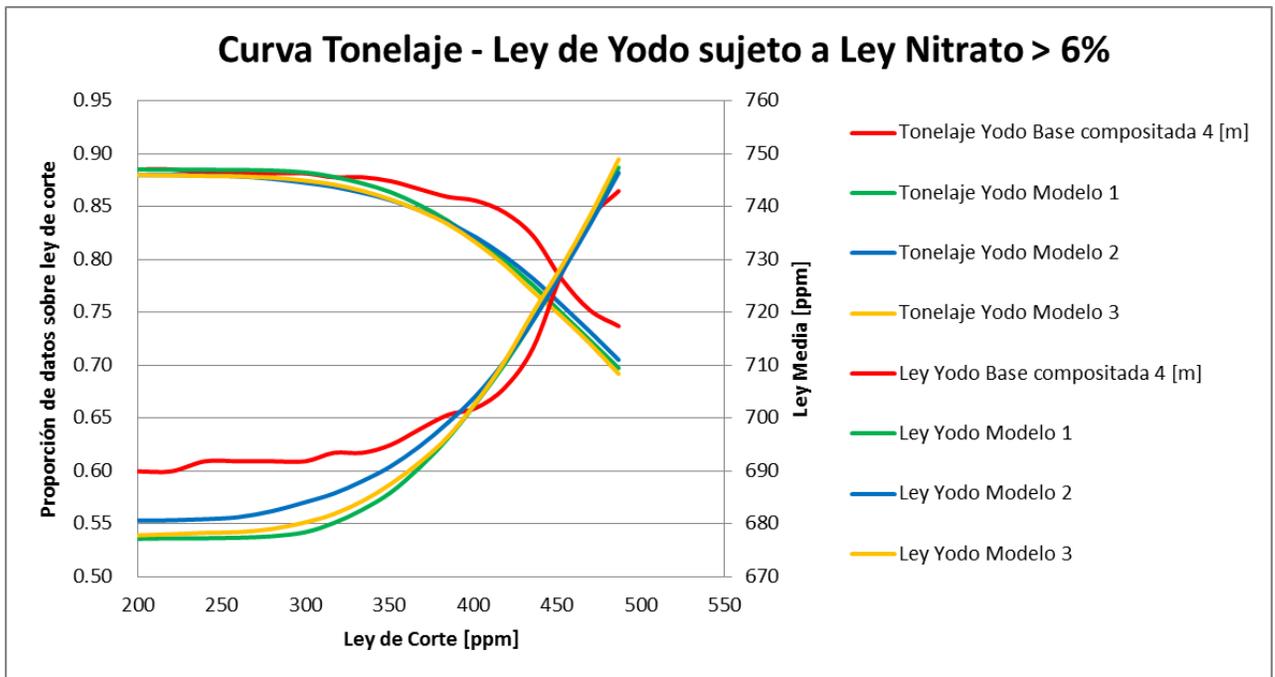
#### 4. Curvas Tonelaje – Ley para caso bivariable



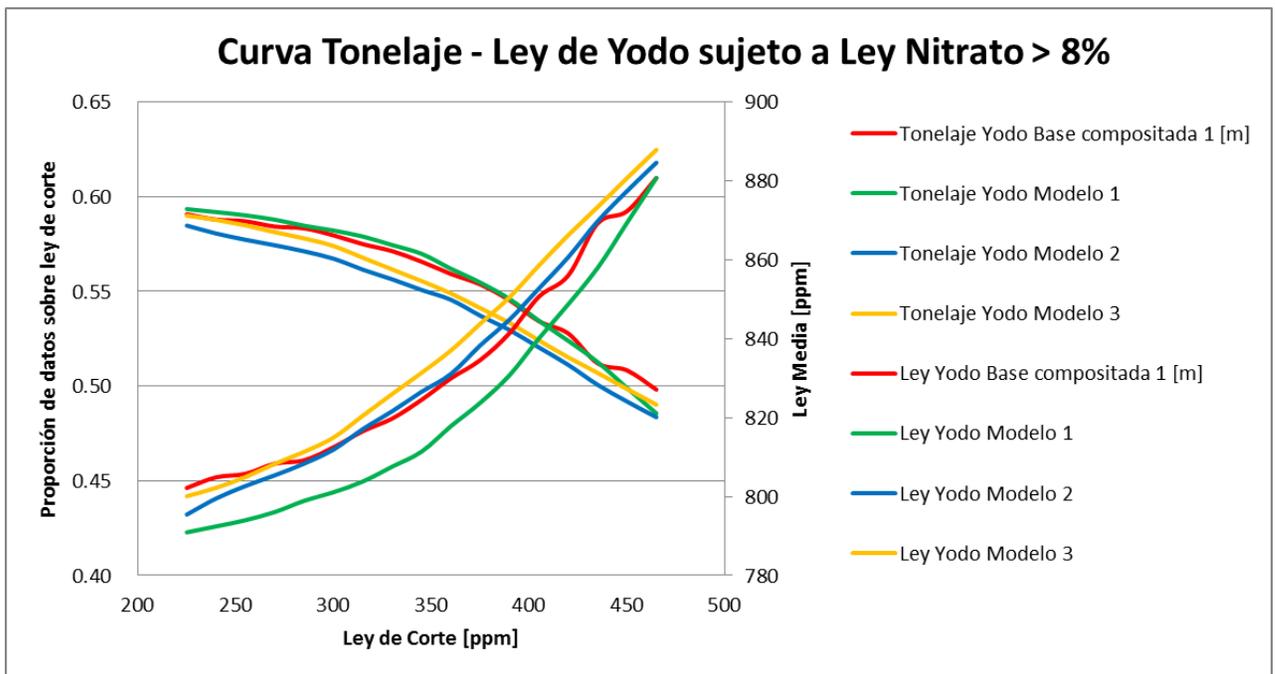
**FIGURA 92: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%. TAMAÑO DE BLOQUE 1[m]**



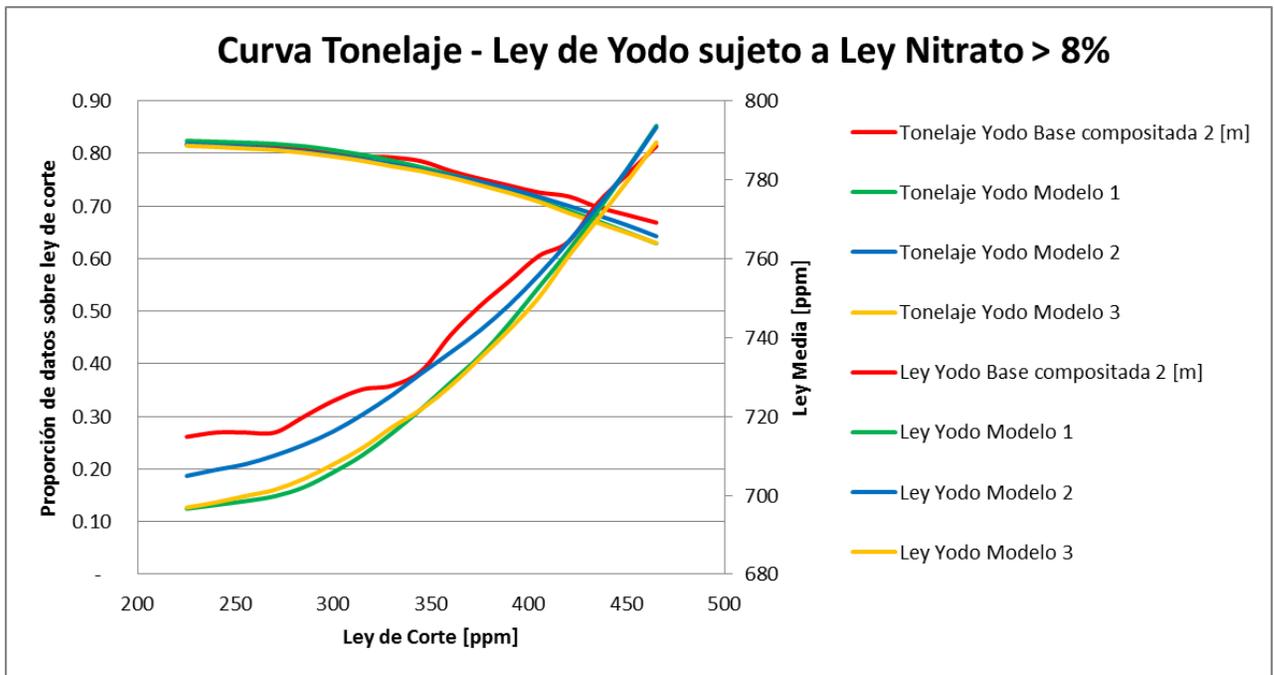
**FIGURA 93: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%. TAMAÑO DE BLOQUE 2[m]**



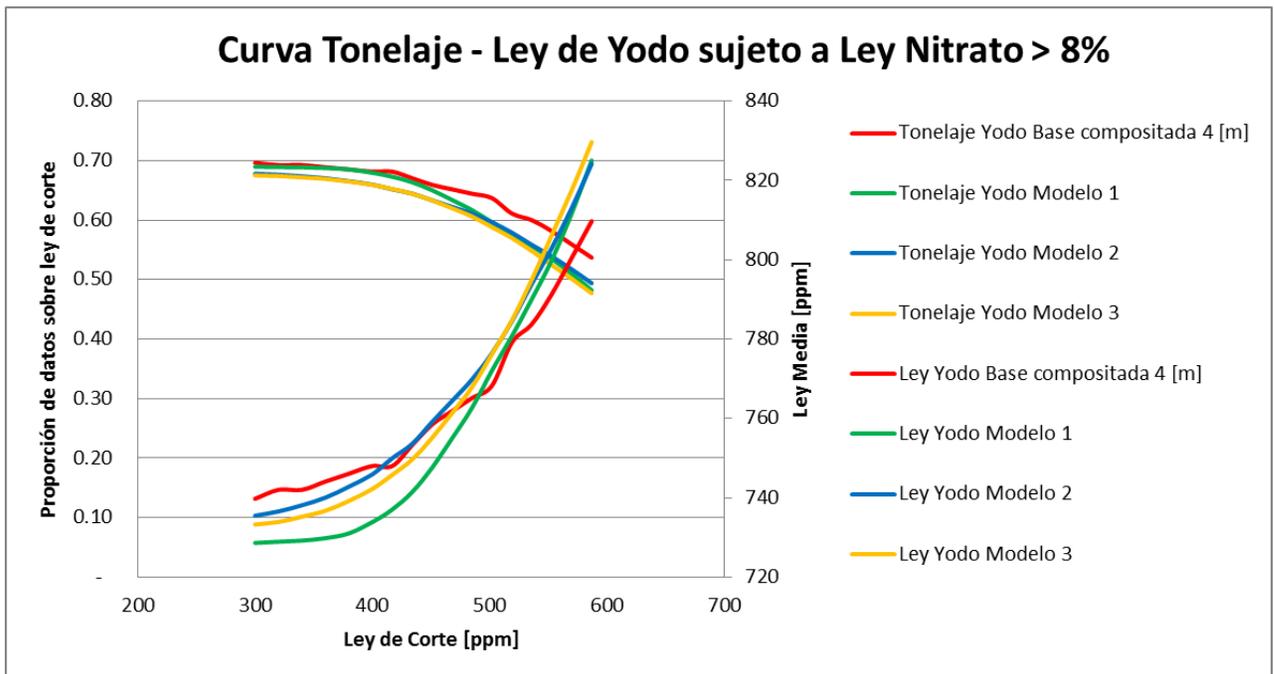
**FIGURA 94: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 6%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 4[m]**



**FIGURA 95: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%.  
TAMAÑO DE BLOQUE 1[m]**



**FIGURA 96: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%. TAMAÑO DE BLOQUE 2[m]**



**FIGURA 97: GRÁFICO TONELAJE – LEY PARA YODO, CONDICIONAL A NITRATO > 8%. TAMAÑO DE BLOQUE 4[m]**