



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

PREDICCIÓN DE CAMBIOS EN VOLATILIDAD DE RETORNOS  
FINANCIEROS BASADO EN FILTROS DE PARTÍCULAS SENSIBLES AL  
RIESGO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELECTRICISTA

JORGE EDUARDO SEPÚLVEDA ARANCIBIA

PROFESOR GUÍA:  
MARCOS ORCHARD CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
HECTOR AGUSTO ALEGRÍA  
NELSON MORALES OSORIO

SANTIAGO DE CHILE  
MARZO 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL ELECTRICISTA  
POR: JORGE EDUARDO SEPÚLVEDA ARANCIBIA  
FECHA: MARZO 2013  
PROF. GUÍA: MARCOS ORCHARD CONCHA

## PREDICCIÓN DE CAMBIOS EN VOLATILIDAD DE RETORNOS FINANCIEROS BASADO EN FILTROS DE PARTÍCULAS SENSIBLES AL RIESGO

En el presente informe se da cuenta del proceso de diseño e implementación de una metodología para la predicción de niveles de volatilidad de retornos financieros basada en modelos de volatilidad estocástica, sensibles al riesgo, y con entrada exógena. Dicha metodología se basa en modelos generalizados de heterocedasticidad condicional autoregresiva (GARCH por sus siglas en inglés), los que consideran que los retornos de activos financieros pueden ser explicados por información pasada, complementada con un proceso de innovación. En particular se utilizará el denominado modelo *unobserved* GARCH (uGARCH), el que considera que es un proceso de innovación no observado que maneja la evolución de volatilidad en función del tiempo, implementado mediante un enfoque de filtrado Bayesiano sensible al riesgo que logra identificar periodos de alta volatilidad y relacionar dichos periodos con fenómenos que se observan posteriormente en indicadores de otros husos horarios.

Para validar el modelo propuesto con datos reales se buscan indicadores de mercados que sean de relación cercana, pero que contengan una diferencia horaria significativa; como es el caso de los mercados asiático y latinoamericano, ya que tienen la mayor diferencia horaria posible y los principales países componentes mantienen una estrecha relación comercial. En efecto entre otras características, China es el mayor socio comercial para la venta de hierro Brasileño, por lo que información fundamental de sus variables macroeconómicas impactan en la valoración de ambos mercados. Finalmente el resultado de la implementación indica que para periodos de aumento de volatilidad en mercados emergentes latinoamericanos (representados con el índice MSCI LA), la predicción con filtro de partículas sensible al riesgo con entrada exógena dependiente del índice asiático (MSCI ASIAXJ), es superior a la predicción del filtro de partículas clásico bajo los valores calculados de los indicadores propuestos, que además se evidencia gráficamente. En efecto, el valor del índice de predicción calculado en la muestra completa, es 50% más favorable para el método propuesto, que el filtro de partículas clásico, diferencia que se hace aún más significativa cuando el efecto de la entrada exógena es relevante, llegando a ser 16 veces superior en ese caso.

A mi familia.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación . . . . .	5
1.2. Alcances y Objetivo General . . . . .	8
1.3. Objetivos Específicos . . . . .	8
1.4. Estructura de la memoria . . . . .	8
<b>2. Antecedentes</b>	<b>10</b>
2.1. Marco teórico . . . . .	10
2.1.1. Modelos de volatilidad . . . . .	10
2.1.2. Filtros de partículas . . . . .	14
2.2. Descripción del modelo . . . . .	25
2.2.1. Herramientas utilizadas . . . . .	31
2.2.2. Indicadores de desempeño . . . . .	32
<b>3. Resultados</b>	<b>34</b>
3.1. Resultados utilizando series de tiempo simuladas . . . . .	34
3.2. Resultados utilizando datos reales . . . . .	39
<b>4. Discusión y conclusiones</b>	<b>50</b>
4.1. Trabajo Futuro . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>60</b>

# Índice de figuras

2.1.	Histograma de dos muestras de mil datos de serie de tiempo generados. Azul: Densidad de importancia equivalente a la densidad de probabilidad a priori extraída del modelo uGARCH. Verde: Densidad de importancia propuesta que incorpora sensibilidad al riesgo.	27
2.2.	Esquema de funcionamiento de los filtros en la prueba de hipótesis.	31
3.1.	a): Niveles de retornos de la serie de tiempo generada. b): Volatilidad resultante de los datos de serie de tiempo generada.	35
3.2.	Evolución de los estimadores para $\alpha$ (Azul) y $\beta$ (Verde) en la implementación con series de tiempo generadas. a): Resultado del filtro de partículas clásico. b): Resultado del filtro de partículas sensible al riesgo.	36
3.3.	a): Diferencia entre el error cuadrático de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo y el filtro de partículas clásico. En azul el FPSR es superior, en rojo el caso contrario. b): Nivel de volatilidad del retorno considerado.	37
3.4.	a): Diferencia del ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo y el filtro de partículas clásico. b): Nivel de volatilidad del retorno considerado.	38
3.5.	a): Índice de predicción calculado para el filtro de partículas clásico implementado en series de tiempo generadas. b): Índice de predicción calculado para el filtro de partículas sensible al riesgo implementado en series de tiempo generadas. Gris: Señal de entrada exógena activa.	39
3.6.	Diferencia entre el índice de predicción de la predicción utilizando el filtro de partículas clásico y el filtro de partículas sensible al riesgo Gris: Señal de entrada exógena activa.	40
3.7.	Niveles de los índices considerados, en base 100 desde la fecha de inicio de la muestra.	41
3.8.	Diferencia error cuadrático de la predicción para cada muestra. Se expone el error cuadrático de predicción del filtro de partículas clásico menos el error cuadrático de predicción del filtro de partículas sensible al riesgo. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario.	42

3.9. a): Niveles de volatilidad del índice Latinoamericano considerado. b): Niveles de volatilidad del índice Asiático considerado. Gris: Expone las muestras donde la entrada exógena se encuentra activa. . . . .	44
3.10. Diferencia error cuadrático de la predicción para cada muestra. Se expone el error cuadrático de predicción del filtro de partículas clasico menos el error cuadrático de predicción del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando niveles de volatilidad como entrada exógena. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario. . . . .	45
3.11. Diferencia del ancho del intervalo de confianza calculado para cada muestra. Se expone el ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas clasico menos el ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando niveles de volatilidad como entrada exógena. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario. . . . .	46
3.12. a): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas clásico utilizando series de tiempo reales. b): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas sensible al riesgo en una primera implementación utilizando series de tiempo reales. c): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas sensible al riesgo en la segunda implementación utilizando series de tiempo reales. . . . .	47
3.13. Diferencia del índice de predicción entre el filtro de partículas clasico y el filtro de partículas sensible al riesgo para la primera implementación con datos reales. Azul: El filtro de partículas sensible al riesgo es superior. Rojo: El filtro de partículas clásico es superior . . . . .	48
3.14. Diferencia del índice de predicción entre el filtro de partículas clasico y el filtro de partículas sensible al riesgo para la segunda implementación con datos reales. Azul: El filtro de partículas sensible al riesgo es superior. Rojo: El filtro de partículas clásico es superior . . . . .	49

# Índice de tablas

3.1. Estadística descriptiva de los datos generados . . . . .	35
3.2. Resultado de la implementación con datos generados . . . . .	36
3.3. Resultado promedio de implementación con datos generados con señal activa .	37
3.4. Resultado índice de predicción para series de tiempo generadas . . . . .	38
3.5. Estadística descriptiva de los índices utilizados . . . . .	39
3.6. Fechas consideradas en las muestras . . . . .	40
3.7. Índices implementación inicial . . . . .	41
3.8. Errores cuadráticos medios y ancho del intervalo de confianza promedios, en primera implementación . . . . .	42
3.9. Índices segunda implementación . . . . .	43
3.10. Errores cuadráticos medios y ancho del intervalo de confianza promedios por muestra, en la implementación final . . . . .	43
3.11. Diferencia del error cuadrático medio e intervalo de confianza por señal y por filtro . . . . .	44
3.12. Resultado índice de predicción para la primera implementación del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando series de tiempo reales . . . . .	45
3.13. Resultado índice de predicción para la segunda implementación del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando series de tiempo reales . . . . .	46

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

La volatilidad juega un rol determinante en la valoración de activos, la selección de portafolios óptimos y la estimación de riesgos. En relación a esto último, actualmente las definiciones y tipos de riesgo no son tan claras para el universo de agentes del mercado financiero, ya que engloba factores tan disímiles como el riesgo de liquidez, el riesgo político, el riesgo de no pago (*default* en inglés) y en general cualquier tipo variable no determinística que posea un nivel de incertidumbre y que impacte en la valoración de activos.

En este sentido, la fuente de incertidumbre más reconocida se relaciona con el riesgo de mercado, y es asociado directamente a la volatilidad en la valoración de los productos financieros (por la respuesta de los agentes del mercado a la nueva información), la especulación, los movimientos tácticos, por liquidez y por otras decenas de razones que impiden tener certeza sobre cuál es el valor real de cada título que se transa.

La importancia de la volatilidad en el ámbito de las finanzas es significativa. Por ejemplo, según modelos clásicos de finanzas, los agentes racionales de la economía, maximizadores de utilidad, utilizan criterios de media y varianza para tomar sus decisiones de inversión y consumo. La teoría de portafolio de Markowitz (1952) [16] establece uno de los modelos más utilizados por los inversionistas (en lo que elección de activos se refiere) por su derivación teórica y su importante intuición económica; sin contar el hecho de que sienta las bases para el popular *Capital Asset Pricing Model*, más conocido como CAPM.

Sin embargo, detrás de los modelos de media y varianza se encuentra el supuesto que los retornos (o el ingreso en el caso de modelos de consumo) distribuyen normales, o que la función de utilidad de los agentes es cuadrática y su base se encuentra en el desarrollo en series de Taylor de la función de utilidad de los individuos centrado en el valor esperado de bienestar al final del

periodo:

$$u(W) = u(E[W]) + u'(E[W])(W - E[W]) + \frac{1}{2}u''(E[W])(W - E[W])^2 + R_3, \quad (1.1)$$

donde el término es el residuo de la expresión y depende de las derivadas de orden superior de la función de utilidad:

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n(E[W])(W - E[W])^n. \quad (1.2)$$

Suponiendo que los individuos maximizan la esperanza de su utilidad y que la serie escrita anteriormente converge, podemos escribir entonces una expresión para la utilidad esperada:

$$E[u(W)] = u(E[W]) + \frac{1}{2}u''(E[W])\sigma(W)^2 + E[R_3] \quad (1.3)$$

$$E[R_3] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n(E[W])m^n(W). \quad (1.4)$$

Donde  $m^n$  es el  $n$ -ésimo momento central de  $W$ . Por lo tanto, existen dos maneras principales para que la esperanza de la utilidad dependa sólo de los dos primeros momentos de  $W$ : (i) por un lado, si las derivadas de orden mayor a tres de la función de utilidad son cero, es decir, si la función es cuadrática o (ii) en el caso que la distribución de  $W$  sea normal, ya que es posible de escribir los momentos de orden superior a dos en función de los dos primeros.

Las dificultades al asumir procesos Gaussianos en retornos financieros son variadas y frecuentemente son fuente de crítica a los modelos, ya que empíricamente es fácil encontrar series de un comportamiento que difiere en mucho respecto de la teoría. Es así que magnitudes como el Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés) o intervalos de confianza de ciertos títulos pueden ser erróneamente calculados en datos con exceso de curtosis (con una alta concentración de datos muy cerca de la media y alta frecuencia de datos alejados de ella), como exponen en su artículo Mandelbrot & Hudson en el 2004 [14]. Similarmente se puede demostrar, de forma empírica, que el exceso de asimetría en retornos de activos reales frente a valores normales es un fenómeno recurrente por lo que la probabilidad de encontrar variaciones positivas en precios es mayor que en el caso contrario.

El término de varianza se asocia a la volatilidad de los retornos en el caso de instrumentos financieros y puede ser tratada como una secuencia determinística o estocástica. Independientemente de la naturaleza que se adopte para esta magnitud, es de una gran importancia para el denominado análisis técnico.

Empíricamente, la volatilidad se estima en base a observaciones dentro de una ventana de tiempo determinada. Bajo esa premisa se sabe que a pesar de que algunos procesos pueden mantener una varianza relativamente estable en el tiempo dicho valor no necesariamente se

mantiene constante durante todo el periodo considerado; por lo que es el concepto de volatilidad condicional (Rachev, Hsu, Bagasheva & Favozzi 2008) [22] el necesario para comprender esta dinámica:

$$\sigma_{r_t|\tau}^2 = \text{var}(r_t|\Sigma_\tau) = E((r_t - \mu_{t|\tau})^2|\Sigma_\tau), \quad (1.5)$$

donde  $r_t$  es el retorno del activo,  $\mu_{t|\tau}$  es la esperanza condicional de dicho retorno en el instante  $t$  dada la información en  $\tau$  y  $\Sigma_\tau$  es el sigma algebra generado por las observaciones hasta  $\tau$ .

Mandelbrot (1963) [13] encontró una recurrencia en las magnitudes de las variaciones de precios de activos ya que existía una tendencia recurrente en la magnitud de los cambios. En efecto, el autor encuentra que amplias variaciones de precios eran regularmente seguidos de otros grandes cambios mientras que las variaciones pequeñas eran seguidos de otras pequeñas variaciones, es decir que existe una cierta agrupación de volatilidad, donde por ciertos periodos es más probable encontrar variaciones de magnitudes altas o pequeña.

El impacto de la utilización de la volatilidad en la creación de carteras de inversión también ha sido estudiado ampliamente. Por ejemplo se han escrito artículos como el de Fleming, Kirby & Ostdiek (2001) [9], donde se demuestra que estrategias de sincronización de volatilidad superan a portafolios pasivos con el mismo retorno esperado y volatilidad objetivos; siendo esta diferencia robusta en riesgos de estimación y costos de transacción. La metodología utilizada involucra evaluar el impacto de cambios predecibles en la volatilidad en el resultado de estrategias de asignación de activos de corto plazo. Ellos encuentran que la predictibilidad capturada por la modelación de volatilidad tiene significancia económica. En particular, encuentran que las estrategias de sincronización de volatilidad (o *volatility-timing* en inglés) basadas en la estimación a un paso de la matriz de covarianza condicional mejoran en forma consistente estrategias estáticas, y señalan que los resultados fueron probablemente conservadores por utilizar una simple especificación no paramétrica de la volatilidad y se ignoraron cualquier relación entre los cambios de volatilidad y cambios en los retornos esperados.

Se tienen nociones, por lo tanto, de que conocer a priori el valor de la volatilidad o estimar de mejor manera su comportamiento en el tiempo es fundamental para una correcta estimación del riesgo e incluso para mejorar significativamente el desempeño de algunas estrategias de inversión. El tema principal es buscar la mejor alternativa a la hora de modelar la volatilidad y para esto es necesario un análisis desde las raíces del problema, considerando las estrategias más utilizadas hasta el momento como los modelos de volatilidad estocástica junto con estrategias avanzadas de modelación de sistemas no lineales.

## 1.2. Alcances y Objetivo General

El objetivo de este trabajo es proponer una metodología para predecir niveles de volatilidad para retornos financieros basada en un filtrado Bayesiano sensible al riesgo con entrada exógena. En particular se buscará mejorar la predicción de un modelo estándar de la industria sobre un indicador financiero de mercados emergentes de Latinoamérica en búsqueda de ser capaz de anticipar los cambios importantes en sus niveles de volatilidad. Se debe mencionar que dichos niveles forman un papel clave en la valoración de activos y en la creación de carteras de inversión, por lo que el objetivo será finalmente proveer una metodología más certera de la que se utiliza actualmente para ese propósito.

Con esa finalidad, se genera una propuesta en base al uso de un algoritmo de estimación Bayesiana basada en métodos de Monte Carlo denominada filtro de partículas sensible al riesgo, que modifica la densidad de importancia del método en base a una entrada exógena y se encargará de verificar las eventuales mejoras que presenta utilizar este enfoque por sobre el uso de un modelo similar implementado bajo el filtro de partículas clásico, expuesto en trabajos anteriores, para predecir niveles de volatilidad.

## 1.3. Objetivos Específicos

- Comprender las metodologías de modelación de volatilidad de retornos financieros más utilizadas en la industria financiera.
- Comprender la definición y los detalles de implementación del filtro de partículas en su versión clásica y la sensible al riesgo.
- Generar indicadores adecuados para evaluar el desempeño de un método de predicción de estados.
- Implementar y evaluar con datos reales una metodología de predicción de volatilidad de retornos financieros.

## 1.4. Estructura de la memoria

La estructura utilizada en este documento para exponer el trabajo realizado es la siguiente:

- **Capítulo 1. Introducción:** Corresponde a la descripción del tema, la motivación de éste y los alcances y objetivos del trabajo realizado.

- **Capítulo 2. Antecedentes:** Corresponde a la revisión bibliográfica o antecedentes. En este capítulo se explican los conceptos necesarios para la comprensión y contextualización del trabajo.
- **Capítulo 3. Resultados:** Corresponde la exposición de los resultados de la implementación con series de tiempo simuladas y con datos reales. Los indicadores calculados y los gráficos correspondientes.
- **Capítulo 4. Discusión y conclusiones:** Se enumeran las conclusiones del trabajo realizado y se proponen trabajos a realizar en el futuro.

# Capítulo 2

## Antecedentes

### 2.1. Marco teórico

#### 2.1.1. Modelos de volatilidad

Un activo financiero es un título, una anotación contable o un contrato por el que el adquirente recibe el derecho de percibir un ingreso en el futuro por parte del emisor o vendedor. Los activos son emitidos en el mercado primario por unidades de gasto por déficit que requieren de recursos financieros hacia las unidades de gasto por superávit o prestamistas que necesitan canalizar su ahorro.

Existen muchos tipos de activos financieros; los más conocidos son las acciones, los bonos y los depósitos (o instrumentos de intermediación financiera), a pesar de eso existe una infinidad de ellos con muchas características distintas. Dentro de estas características las más importantes se resumen en liquidez, riesgo y rentabilidad.

La liquidez es la capacidad del activo para ser convertido a alguna divisa de forma inmediata sin que se modifique mayormente su valor, y se relaciona con la cantidad de oferentes y ofertantes para ese título en particular. El riesgo financiero, hace referencia a la probabilidad de que ocurra un evento (interno o externo al emisor) que tenga consecuencias de pérdidas financieras. Finalmente la rentabilidad es el cambio en el valor de mercado del activo en dos periodos de tiempo.

Una particularidad importante de las inversiones en activos financieros es que el retorno proviene del ingreso por conceptos del monto pactado por el emisor, que puede ser fijo como los cupones de los bonos o variable como el reparto de dividendos de una empresa como en las acciones, y de los cambios en la valoración del título. Idealmente la información es totalmente transparente y el precio refleja exactamente el valor presente de los pagos futuros comprometidos que se llevarán a cabo con certeza absoluta, por lo que su variación se generará solamente cuando

exista nueva información relevante a los pagos, la que se informa inmediatamente a todo el mercado. En el mundo real el sistema no es perfecto y existen probabilidades ciertas de deshonorar los pagos por lo que la valoración de activos no es un problema de fácil solución.

Uno de los enfoques más modernos para la valoración general de activos es simplemente incorporar toda incertidumbre e información relevante del pago de las obligaciones futuras con un factor de descuento estocástico al calcular el valor presente de los pagos (Campbell J. & Cochrane J. 1999) [6], sin embargo aún se caracterizan mayormente los activos por su retorno y riesgo esperados donde el riesgo es caracterizado por la variación del retorno en el tiempo.

La volatilidad representa una parte de la incertidumbre en la valoración de los activos financieros y se define simplemente como la varianza o la desviación estándar de los retornos de ese activo en una ventana de tiempo determinada. Este punto es tan importante que por lo general se agrupan los activos por sus niveles de retorno y de volatilidad para poder así tomar decisiones de inversión que se implementarán en portafolios o carteras que no es más que el conjunto de activos en los cuales se invertirá un cierto monto predefinido.

Una de las estrategias de creación de portafolio es el enfoque tradicional de Markowitz 1952 [16] donde bajo supuestos importantes de normalidad de retornos o de funciones de utilidad cuadráticas se propone que cada individuo se comporta como un agente que busca maximizar su varianza bajo niveles de retorno esperado, que es denominado MVO *Mean Variance Optimization*. La función objetivo por lo tanto está descrita de la siguiente manera:

$$\min_{\omega} \omega' H \omega, \quad (2.1)$$

donde  $\omega$  representa los porcentajes en cada uno de los activos considerados en la creación de la cartera y  $H$  es la matriz de varianzas y covarianzas del retorno de los mismos. Regularmente, para ciertas implementaciones particulares, existen una serie de restricciones que deben ser incorporadas al planteamiento del problema; por ejemplo, si no se quiere que existan posiciones cortas en la cartera (que representa una posición de venta sobre un activo en particular) y se quiere mantener el fondo invertido totalmente, es decir que el portafolio no considere mantener dinero en caja el problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \omega' H \omega & \quad (2.2) \\ \sum_{n=1}^N \omega_n &= 1 \\ \omega_n &\geq 0 \\ r\omega' &= R, \end{aligned}$$

donde  $R$  es el retorno objetivo del portafolio y  $r$  es el vector de retornos esperados de cada activo.

Es importante señalar que ambas condiciones expuestas anteriormente son muy utilizadas en la industria.

Esta optimización usualmente es sólo una de las etapas del proceso completo, que involucra otras etapas más cualitativas, de valoración y de exposición a distintos tipos de riesgo; sin embargo, sirve para ilustrar la importancia que tiene la volatilidad del retorno de los activos financieros en el comportamiento de la industria.

Los modelos actuales de modelación de volatilidad más utilizados son por un lado los modelos generalizados de heterocedasticidad condicional GARCH (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*), y por otro los modelos de Volatilidad Estocástica.

El modelo GARCH fue desarrollado por Tim Bollerslev (1986) [28] y se basa en el modelo ARCH de Engle (1982) [23]. En este modelo se asume que el proceso que dirige la volatilidad de los retornos es una función determinística del rezago de la misma volatilidad y de los retornos, y está representada por dos ecuaciones que son las siguientes para el caso del GARCH (1,1):

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1|t-2}^2 \quad (2.3)$$

$$r_t = \mu_{t|t-1} + u_t, \quad (2.4)$$

donde  $r_t$  es el retorno del activo, y se asume que el residuo  $u_t = r_t - \mu_{t|t-1}$  está dada por la distribución siguiente:

$$u_t \sim N(0, \sigma_{t|t-1}). \quad (2.5)$$

Reestructurando la ecuación 2.6 de la manera siguiente,

$$\sigma_{t|t-1}^2 = (1 - \alpha - \beta) \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} + \alpha, \quad (2.6)$$

podemos ver que el modelo GARCH (1,1) determina la varianza condicional de los retornos en el instante  $t$  como una suma ponderada de la varianza de largo plazo, la varianza condicional y el residuo del estado anterior.

Una ventaja del modelo GARCH es que la identificación de los parámetros puede ser realizada por el método de máxima verosimilitud. Además, su resultado no solo nos entrega el valor esperado de la volatilidad del retorno, sino sus momentos de orden superior, lo que es importante para determinar intervalos de confianza, asimetrías o desviaciones de la media ya que no es una especificación estocástica.

Este modelo ha sido ampliamente utilizado en la industria, grandes instituciones financiera como RiskMetrics han verificado cual de todos los modelos que se desprenden del GARCH

presenta mejor desempeño; incluso han entregado recomendaciones sobre el valor de los parámetros necesarios para su funcionamiento. A pesar de esto, no es el único de los modelos de volatilidad estocástica que se utilizan en la actualidad, siendo también los modelos de volatilidad condicional denominados *VE* otros de los más utilizados en la industria ya que resuelve una serie de problemas que algunos modelos de valoración de activos poseen, como por ejemplo el modelo propuesto por Black & Scholes (1973) [3] sobre la valoración de opciones, ya que asume que la volatilidad del activo objeto es constante durante todo el proceso de valoración del activo.

El paradigma inicial de los modelos de Volatilidad Estocástica es que no es posible utilizar una distribución normal para describir su evolución en el tiempo ya que es imposible que existan valores negativos con probabilidad no nula, es más, algunos artículos como Taylor (1986) [26] han demostrado empíricamente que lejos de mantener una simetría, una de las características importantes de la volatilidad de activos financieros (en su caso, de acciones) es que su distribución tiene una mayor concentración de valores extremos a la derecha de la media, es decir que tiene asimetría positiva, y por lo tanto, es necesario encontrar una distribución que se acomode mejor a sus características más importantes.

En el trabajo de Clark (1973) [10] se propone utilizar la distribución normal para describir la evolución del logaritmo de la volatilidad o la volatilidad logarítmica en el tiempo:

$$\log(\sigma) \sim N(m, \sigma), \quad (2.7)$$

y por lo tanto, la distribución asociada a la volatilidad directamente es la siguiente:

$$\sigma_t \sim \text{LogN}(m, \sigma). \quad (2.8)$$

Si se supone, como ya se ha hecho anteriormente, que los retornos son el producto de un proceso de volatilidad y un ruido aleatorio  $r_t = \sigma_t \varepsilon_t$  se puede definir el modelo de volatilidad estocástica presentado por Taylor (1986) [26] con las ecuaciones siguientes:

$$V_t = \gamma + \phi V_{t-1} + \eta_t \quad (2.9)$$

$$r_t = \exp\left(\frac{1}{2}V_t\right)\varepsilon_t. \quad (2.10)$$

Donde

$$\varepsilon_t \sim N(0, 1) \quad (2.11)$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma). \quad (2.12)$$

Este modelo es el resultado de las condiciones expuestas anteriormente más asumir que la media de la distribución de  $\log(\sigma)$  es equivalente a  $m = \gamma + \phi V_{t-1}$  y que los ruidos  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$  son independientes.

Una de las características más importantes es que dadas estas definiciones la densidad de probabilidad posterior queda determinada por:

$$p(\sigma_t | \sigma_{t-1}) = \frac{1}{\sigma_t \sigma_{t-1} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log \sigma_t - \gamma - \phi V_{t-1})^2}{2\sigma_{t-1}^2}\right), \quad (2.13)$$

luego, su tercer y cuarto momento central son:

$$M^3 = (\exp(\sigma_t^2) + 2)\sqrt{\exp(\sigma_t^2) - 1} \quad (2.14)$$

$$M^4 = \exp(4\sigma_t^2) + 2(\exp(3\sigma_t^2)) + 3(\exp(2\sigma_t^2)) - 3. \quad (2.15)$$

Lo que es consistente con las características de la distribución empírica de la volatilidad.

Uno de los mayores problemas al utilizar este modelo es que los parámetros no pueden ser ajustados de manera tan sencilla como el modelo GARCH porque la función de máxima verosimilitud es una integral que no tiene solución analítica. Sin embargo muchos académicos han buscado soluciones aproximadas mediante metodologías de cuasi-máxima verosimilitud. Así, por ejemplo, Sandmann & Koopman (1996) [11] determinan que las soluciones en base a metodologías de Monte Carlo tienen mayor exactitud que las encontradas por el uso del filtro extendido de Kalman.

### 2.1.2. Filtros de partículas

Muchos procesos en la naturaleza han sido modelados utilizando modelos de espacio estado, donde se caracteriza la dinámica de un sistema real mediante una representación matemática de un sistema físico descrito por distintas entradas, salidas y variables de estado que se relacionan mediante una ecuación de estado y una ecuación de observación:

$$x_k = f_k(x_{k-1}, v_k) \quad (2.16)$$

$$y_k = h_k(x_k, n_k). \quad (2.17)$$

En la definición del modelo, nuestro sistema corresponde a un proceso estocástico no observable y debido al uso del rezago en la ecuación de estado (la realización de la volatilidad

anterior define parte del comportamiento actual del estado), posee características de un proceso de Markov de primer orden; esa es la razón de la estructura anterior. Ambas ecuaciones son generalmente ruidosas, por lo que las variables  $v$  y  $n$  son variables aleatorias no nulas e independientes, y luego, se puede utilizar un enfoque Bayesiano para analizar el problema de un punto de vista probabilístico, lo que permite generar varias metodologías de filtrado y predicción para determinar, al menos, los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad del vector de estados.

Desde este punto de vista Bayesiano, el problema consiste en ir calculando recursivamente un grado de certeza sobre el vector de estados  $x_k$ , esto es construir la densidad de probabilidad posterior  $p(x_k|y_{1:k})$  considerando que se tiene conocimiento total sobre la densidad de probabilidad inicial  $p(x_0)$ , llamada también densidad de probabilidad anterior; por lo tanto, es posible resolver el problema de forma recursiva utilizando primero una etapa de predicción, y luego, otra de actualización.

Si se supone que para un tiempo  $k - 1$  la densidad de probabilidad  $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$  es conocida entonces se puede calcular la función que determina la densidad de probabilidad anterior por medio de la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1}. \quad (2.18)$$

Hay que notar que en la ecuación anterior estamos considerando implícitamente el hecho de que dentro del estado  $x_{k-1}$  depende de los estados  $y_{1:k-1}$  al ser un proceso de Markov de orden uno, es decir que  $p(x_k|x_{k-1}, y_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$ .

En el tiempo  $k$ , se tiene acceso a la realización de la ecuación de observación, la que es utilizada para actualizar la densidad de probabilidad anterior por medio de la regla de Bayes:

$$p(x_k|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \quad (2.19)$$

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int p(y_k|x_k)p(x_k|y_{1:k-1})dx_k. \quad (2.20)$$

Dependiendo de las funciones de estado y de observación, puede existir solución a las recursiones expuestas en las ecuaciones anteriores aunque esto no es generalmente posible. Si  $\omega$  y  $v$  son muestras de funciones Gaussianas de parámetros conocidos y si  $f$  y  $h$  son funciones lineales entonces como Y. C. Ho & R. C. K. Lee (1964) [12] prueban,  $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$  y  $p(x_k|y_{1:k})$  son también Gaussianas y las ecuaciones pueden ser descritas como:

$$x_k = F_k x_{k-1} + v_{k-1} \quad (2.21)$$

$$y_k = H_k x_k + n_k. \quad (2.22)$$

En este caso es la metodología del filtro de Kalman la que entrega las ecuaciones necesarias para completar la recursión. Este algoritmo desarrollado por Rudolf Kalman (1960) [24] utiliza la información de las mediciones anteriores para identificar el estado  $x_k$  de manera óptima (minimizando el error cuadrático medio) para sistemas lineales y Gaussianos.

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo en el sentido de que no es necesario mantener toda la información disponible, lo que facilita su implementación en sistemas de procesado en tiempo real. Así, calcula recursivamente los primeros dos momentos de la distribución posterior bajo los supuestos expuestos anteriormente, por lo que entrega una descripción completa de la densidad. Para el filtro de Kalman, la recursión queda determinada por las ecuaciones de predicción y actualización que son las siguientes:

$$\begin{aligned} p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) &= N(x_{k-1}; m_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \\ p(x_k|y_{1:k-1}) &= N(x_k; m_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \\ p(x_k|y_{1:k}) &= N(x_k; m_{k|k}, P_{k|k}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$\begin{aligned} m_{k|k-1} &= F_k m_{k-1|k-1} \\ P_{k|k-1} &= Q_{k-1} + F_k P_{k-1|k-1} F_k^T \\ m_{k|k} &= m_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k m_{k|k-1}) \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} \\ S_k &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \\ K_k &= P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Los últimos coeficientes  $S_k$  y  $K_k$  representan la covarianza de la innovación del proceso y la denominada *ganancia de Kalman* respectivamente. Esta es la solución óptima para el problema de filtrado para cuando se cumplen las condiciones mencionadas anteriormente [24]; sin embargo, cuando la densidad del espacio estado es discreta, es decir, cuando existe un número finito de estados se puede escribir la densidad de probabilidad posterior en  $k - 1$  como [7]

$$p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^{N_s} \gamma_{k-1|k-1}^i \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^i), \quad (2.25)$$

donde  $\gamma$  representa la probabilidad discreta de cada uno de los estados posteriores dados los estados anteriores,  $\gamma_{k-1|k-1}^i = p(x_{k-1} = x_{k-1}^i | y_{1:k-1})$  y  $\delta$  es la función delta de Dirac.

Resolviendo las ecuaciones de la recursión con esta definición se obtiene:

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \sum_{i=1}^{N_s} \gamma_{k|k-1}^i \delta(x_k - x_k^i) \quad (2.26)$$

$$p(x_k|y_{1:k}) = \sum_{i=1}^{N_s} \gamma_{k|k}^i \delta(x_k - x_k^i), \quad (2.27)$$

donde,

$$\gamma_{k|k-1}^i \triangleq \sum_{j=1}^{N_s} \gamma_{k-1|k-1}^j p(x_k^i|x_k^{j-1}) \quad (2.28)$$

$$\gamma_{k|k}^i \triangleq \frac{\gamma_{k|k-1}^i p(y_k|x_k^i)}{\sum_{j=1}^{N_s} \gamma_{k|k-1}^j p(y_k|x_k^{j-1})}. \quad (2.29)$$

Esta solución se denomina método basado en grillas (*grid based methods*), y junto al filtro de Kalman también forma parte de las soluciones óptimas del problema de espacio estado.

Las restricciones para resolver el problema de filtrado y predicción de manera óptima son muy fuertes, por lo que los métodos descritos no son frecuentemente utilizados, salvo en implementaciones realmente puntuales; es por eso que con el tiempo se han desarrollado una serie de soluciones sub-óptimas que han permitido generar metodologías alternativas para abordar el problema.

Una primera solución es el filtro extendido de Kalman o EKF por sus siglas en inglés, que remueve varias restricciones del modelo, sobretodo sobre las funciones que determinan las ecuaciones de estado y de observación. De este modo el EKF es posible de ser aplicado si es posible considerar que  $p(x_k|y_{1:k})$  se aproxima por una Gaussiana. En ese caso, además se considera que una linealización local de las funciones utilizadas es suficiente para capturar las no linealidades del sistema.

$$p(x_{k-1}|y_{1:k-1}) \approx N(x_{k-1}; m_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}) \quad (2.30)$$

$$p(x_k|y_{1:k-1}) \approx N(x_k; m_{k|k-1}, P_{k|k-1})$$

$$p(x_k|y_{1:k}) \approx N(x_k; m_{k|k}, P_{k|k}),$$

donde,

$$\begin{aligned}
m_{k|k-1} &= f_k(m_{k-1|k-1}) \\
P_{k|k-1} &= Q_{k-1} + \hat{F}_k P_{k-1|k-1} \hat{F}_k^T \\
m_{k|k} &= m_{k|k-1} + K_k (y_k - h_k(m_{k|k-1})) \\
P_{k|k} &= P_{k|k-1} - K_k \hat{H}_k P_{k|k-1}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Como las funciones  $f$  y  $h$  no se suponen lineales, las matrices anteriores representan linealizaciones de las mismas, así se define que:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_k &= \left. \frac{df_k(x)}{dx} \right|_{x=m_{k-1|k-1}} \\
\hat{H}_k &= \left. \frac{dh_k(x)}{dx} \right|_{x=m_{k|k-1}} \\
S_k &= \hat{H}_k P_{k|k-1} \hat{H}_k^T + R_k \\
K_k &= P_{k|k-1} \hat{H}_k^T S_k^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Como se ve, el EKF busca utilizar el primer coeficiente de la expansión de Taylor de las funciones no lineales y a pesar de que se podrían eventualmente utilizar los de orden superior, la complejidad adicional ha hecho que su uso no sea muy popular. Al igual que algunas restricciones de linealidad del filtro de Kalman son eliminadas para dar paso al uso de EKF, es posible suponer que el espacio estado puede ser representado por un set de valores discretos y utilizar *grid based methods* para resolver las ecuaciones necesarias. Ambas metodologías son parte de los denominados algoritmos sub-óptimos.

Otro enfoque utilizado también dentro de los algoritmos sub-óptimos, forma parte de los denominados métodos secuenciales de Monte Carlo (*Markov Chain Monte Carlo*) MCMC, los que han sido ampliamente usados en predicción de fallas considerando que es necesario utilizar densidades de probabilidad variantes en el tiempo para modelar las dinámicas necesarias. Esta metodología es denominada *filtro de partículas*, y fue generada como una técnica numérica para aproximar integrales multidimensionales con respecto a una secuencia de medidas de probabilidad como se expone en el artículo de Del Moral 2004 [21]. Específicamente, el algoritmo explicado a continuación es denominado muestreo secuencial de importancia (*sequential importance sampling*), y es conocido también como filtrado *bootstrap* y algoritmo de condensación entre otras denominaciones.

Esta metodología es una técnica para implementar un filtrado Bayesiano recursivo por simulaciones de Monte Carlo cuya finalidad principal es representar la densidad de probabilidad posterior en función de un set de datos muestreados aleatoriamente, donde cada uno tiene un

peso asociados, los que conjuntamente definirán una distribución empírica para la densidad de probabilidad buscada. Un punto importante, es que se ha demostrado que mientras mayor sea el set de datos esta caracterización discreta se vuelve más similar a la descripción funcional de la densidad de probabilidad posterior, por lo que es posible demostrar que en el límite infinito, la densidad discreta converge a la densidad real.

En el desarrollo del algoritmo se considera que  $\{x_{0:k}^i, \omega_k^i\}$  es una medición aleatoria que caracteriza la función densidad de probabilidad posterior  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ , donde el conjunto de los elementos  $\{x_{0:k}^i\}$  representa puntos probables del estado asociados a un conjunto de pesos  $\{\omega_k^i\}$ , luego la densidad de probabilidad posterior en el tiempo  $k$  se puede aproximar como:

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega_k^i \delta(x_{0:k}|x_{0:k}^i). \quad (2.33)$$

Los pesos son elegidos mediante un procedimiento de muestreo de importancia o *importance sampling* en inglés, tal y como se propone en el artículo de A. Doucet (1998) [1], el cual se basa en que es difícil tomar muestras directamente de  $p(x)$  pero que existe  $\pi(x)$  que puede ser evaluado y que cumple que  $p(x) \propto \pi(x)$ . Por otro lado, se considera que  $x^i \sim q(x)$  son muestras fácilmente generadas de una densidad propuesta  $q(x)$  llamada densidad de importancia. Así, una aproximación de la densidad de  $p(x)$  está dada por:

$$p(x) \approx \sum_{i=1}^{N_s} \omega^i \delta(x - x^i), \quad (2.34)$$

donde

$$\omega^i \propto \frac{\pi(x^i)}{q(x^i)} \quad (2.35)$$

es el peso normalizado de la partículas  $i$ .

Se busca entonces que las muestras sean elegidas desde la densidad de importancia  $q(x)$ , así los pesos en la aproximación discreta de la densidad de probabilidad posterior quedan definidos por:

$$\omega^i \propto \frac{p(x_{0:k}^i|y_{1:k})}{q(x_{0:k}^i|y_{1:k})}. \quad (2.36)$$

Volviendo al caso secuencial se debe recordar que se tienen muestras que aproximan a  $p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$  y con estas es posible generar una aproximación de  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$  con un nuevo set de datos, si la densidad de importancia se elige de tal manera que se cumple:

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}), \quad (2.37)$$

entonces se pueden extraer muestras para  $q(x_{0:k}|y_{1:k})$  con las observaciones hasta  $k$  mediante la

amplificación de cada una de las partículas de la densidad discreta anterior por el nuevo estado.

Para encontrar los pesos de la ecuación de actualización  $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ , esta se debe descomponer utilizando la regla de Bayes según el razonamiento siguiente:

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_{0:k}, y_{1:k-1})p(x_{0:k}|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \quad (2.38)$$

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})}p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}) \quad (2.39)$$

$$p(x_{0:k}|y_{1:k}) \propto p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1}). \quad (2.40)$$

Finalmente reemplazando la expresión anterior en la ecuación de actualización de los pesos, se obtiene:

$$\omega \propto \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)p(x_{0:k-1}^i|y_{1:k-1})}{q(x_k^i|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})q(x_{0:k-1}^i|y_{1:k-1})} \quad (2.41)$$

$$\omega_k^i = \omega_{k-1}^i \frac{p(y_k|x_k^i)p(x_k^i|x_{k-1}^i)}{q(x_k^i|x_{0:k-1}^i, y_{1:k})}; \quad (2.42)$$

más aún, si  $q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}) = q(x_k|x_{k-1}, y_k)$ , la densidad de importancia depende únicamente del rezago del estado y de la observación en  $k$ , lo que es muy conveniente para las implementaciones con algoritmos recursivos.

El filtro de partículas posee una particularidad no muy favorable cuando se implementa en sistemas altamente no lineales o de estados muy ruidosos, denominado *degeneración*, y consiste en que bajo ciertas condiciones, después de algunas iteraciones es altamente probable que pocas o una sola partícula concentre mucho peso, haciendo por tanto que el resto de las mismas sean despreciables, tal y como se expone en el trabajo de M. Sanjeev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon, & Tim Clapp (2002) [2]. Este problema no se puede evitar tal y como está definido el algoritmo, ya que por su definición la varianza de los pesos solo crece en el tiempo, como lo demuestra el artículo de A. Doucet (1998) [1]. Llevando a que sea necesario utilizar un alto esfuerzo computacional para trabajar con partículas cuya contribución a la distribución empírica utilizada es casi nula.

Una métrica utilizada para detectar estos problemas de degeneración de partículas, propuesta por los artículos de J. S. Liu & R. Chen (1998) [5] y N. Bergman (1999) [17] se denomina *muestra efectiva* y se calcula como sigue:

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + Var_{\omega_k^*i}}, \quad (2.43)$$

donde se escala el número de partículas de acuerdo a la varianza del peso real:

$$\omega_k^{*i} = \frac{p(x_k^i | y_{1:k})}{q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k)}. \quad (2.44)$$

Como en general no es posible de evaluar la expresión anterior de forma exacta, se propone utilizar un estimador que queda determinado por:

$$N_{eff}^{\hat{}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N_s} (\omega_k^i)^2}, \quad (2.45)$$

donde  $\omega_k^i$  son los pesos normalizados encontrados con anterioridad.

Se recomienda utilizar una tolerancia sobre esta muestra efectiva, que indicará cuando la degeneración es crítica, lo que no resuelve el problema pero si lo detecta. Como una solución propuesta para este problema se ha diseñado una etapa llamada *remuestreo*, que es la generación de nuevas partículas una vez que la tolerancia a la degeneración es superada, este proceso es descrito entre otros trabajos como en el de Marcos E. Orchard (2007) [8], y cuya metodología se basa en generar un nuevo conjunto de partículas utilizando para eso la densidad de probabilidad descrita que queda reflejada por el conjunto de las partículas iniciales y sus pesos correspondientes, y reemplazar el conjunto inicial con este nuevo conjunto de partículas.

Para llevar a cabo el proceso descrito, se remuestrea  $N$  veces con reemplazo, de acuerdo a que:

$$p(x_k^r = x_k^i) = \omega_k^i, \quad (2.46)$$

donde  $x_k^i$  es la partícula del filtro en el instante  $k$  y  $\omega_k^i$  es el peso asociado a esa misma partícula en ese mismo instante de tiempo, es decir, considerando que la probabilidad de extraer una partícula del remuestreo sea su peso asociado.

Entonces, la nueva muestra resultante será independiente e idénticamente distribuída, de modo que los pesos considerados para la nueva muestra son equivalentes y deben ser normalizados a  $\frac{1}{N}$ .

Es evidente que este procedimiento disminuye la concentración de pesos en una sola partícula, sin embargo esta mejora se ve afectada directamente con el ruido del proceso, en el sentido de que si partículas iguales no evolucionan hacia direcciones diferentes con el tiempo se perderá diversificación (en la nueva muestra se repetirá muchas veces la misma partícula) y por lo tanto se empobrece la muestra ya que se intercambia un problema de convergencia en pesos a convergencia en partículas, que si son equiprobables, pero que son muy similares.

El proceso que se acaba de describir recibe el nombre de *sequential importance sampling* (SIS) con remuestreo, sin embargo existen muchos otros tipos de filtro de partículas que nacen de esta metodología, las que apuntan principalmente a la elección de la densidad de importancia y a la

modificación de la etapa de remuestreo.

Uno de los principales algoritmos que se desprenden del SIS se denomina *Sampling Importance Resampling filter* SIR, y es propuesto por el artículo de N. Gordon, D. Salmond & A. F. M. Smith (1993) [18]. Una de sus ventajas, es que requiere solamente que las funciones  $f_k$ ,  $h_k$  y el ruido del proceso sean conocidas y evaluables, y que la verosimilitud sea evaluable punto a punto.

El método SIR puede ser reconstruido fácilmente a partir del SIS eligiendo la densidad de importancia  $q(x_k|x_{k-1}^i, y_{1:k})$  equivalente a la densidad de probabilidad anterior  $p(x_k|x_{k-1}^i)$  y remuestreando en cada paso del proceso de filtrado. Luego de una vez generadas  $i$  muestras del ruido del proceso  $v_{k-1}^i$ , la evolución de las partículas estará dada por:

$$x_k^i = f_k(x_{k-1}^i, v_{k-1}^i). \quad (2.47)$$

Para esta implementación es evidente que los pesos serán actualizados según:

$$v_k^i \propto v_{k-1}^i p(y_k|x_k^i), \quad (2.48)$$

sin embargo como el remuestreo se efectúa en cada iteración, la real actualización de pesos está dada por:

$$v_k^i \propto p(y_k|x_k^i). \quad (2.49)$$

Como la densidad de importancia es independiente de las observaciones, el espacio estado es explorado sin considerar la realización posterior, además el remuestreo constante puede llevar a disminuir la diversidad de partículas sin embargo es un método fácil de implementar (comparativamente hablando) y requiere muy pocas condiciones para ello, es por eso de su popularidad.

Otra metodología importante de mencionar es el denominado *auxiliary sampling importance resampling filter* ASIR, propuesto por el artículo de Pitt & Shephard (1999) [27], donde se agrega al análisis la evolución de cada partícula considerando el índice de la anterior. Así se define la densidad de importancia  $q(x_k, i|y_{1:k})$  sobre un conjunto  $\{x_k^j, i^j\}$  donde el segundo elemento hace referencia al índice de la partícula en la iteración anterior.

Aplicando la regla de Bayes a la densidad posterior obtenemos:

$$\begin{aligned} p(x_k, i|y_{1:k}) &\propto p(y_k, i|x_k) p(x_k, i|y_{1:k-1}) \\ p(x_k, i|y_{1:k}) &\propto p(y_k|x_k) p(x_k|i, y_{1:k-1}) p(i|y_{1:k-1}) \\ p(x_k, i|y_{1:k}) &\propto p(y_k|x_k) p(x_k|x_{k-1}^i) v_{k-1}^i. \end{aligned} \quad (2.50)$$

El método muestrea desde la densidad conjunta  $p(x_k, i|y_{1:k})$  omitiendo los índices para producir la muestra de partículas desde la densidad marginal  $p(x_k|y_{1:k})$ . La densidad de importancia es elegida para satisfacer la siguiente proporción:

$$q(x_k, i|y_{1:k}) \propto p(y_k|\mu_k^i)p(x_k|x_{k-1}^i)v_{k-1}^i, \quad (2.51)$$

donde  $\mu_k^i$  es una caracterización cualquiera del estado posterior dadas las partículas en  $k-1$ . Tomando:

$$q(x_k, i|y_{1:k}) = q(i|y_{1:k})q(x_k|i, y_{1:k}), \quad (2.52)$$

y definiendo

$$q(x_k|i, y_{1:k}) \triangleq p(x_k|x_{k-1}^i), \quad (2.53)$$

es posible concluir que la siguiente proporción es correcta:

$$q(i|y_{1:k}) \propto p(y_k|\mu_k^i)v_{k-1}^i. \quad (2.54)$$

Luego de las relaciones anteriormente expuestas se puede deducir que para un par partícula-índice, el peso correspondiente puede ser elegido mediante:

$$\begin{aligned} v_k^j &\propto \frac{p(y_k|x_k^j)}{p(y_k|\mu_k^{ij})} \\ v_k^j &\propto \omega_{k-1}^{ij} \frac{p(y_k|x_k^j)p(x_k^j|x_{k-1}^{ij})}{q(x_k^j, ij|y_{1:k})} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Esta metodología es superior al filtrado SIR en el sentido de que genera las partículas posteriores a partir de la medición actual por lo que es más probable de que el resultado se asemeje al estado real del sistema. En el fondo el ASIR es un algoritmo de remuestreo previo ya que el coeficiente  $\mu$  incorporado anteriormente caracteriza, en el fondo, la densidad posterior, lo que es una desventaja en desempeño en presencia de sistemas con mucho ruido de proceso.

Previamente se expuso que el uso del remuestreo puede transformar el problema de la convergencia de pesos a una sola partícula y llevarlo a la degeneración de las partículas, haciendo que en pocas iteraciones se concentren muchas partículas en un solo punto del espacio estado, cuando el ruido del proceso es muy bajo. Este problema se trata de resolver con otra metodología de filtro de partículas denominada filtro de partículas regularizado (*regularized particle filter*) propuesto en el artículo de C. Musso, N. Oudjane & F. LeGland (2000) [20], que es idéntico al filtro SIR con la diferencia que las partículas remuestreadas no son extraídas desde una aproximación discreta de la densidad posterior, sino desde una aproximación continua de la misma densidad en base al kernel de Epanechnikov. Este método tiene una desventaja teórica importante, y es que la

densidad encontrada no se aproxima asintóticamente a la real como en el SIS, sin embargo es muy útil cuando el empobrecimiento de la muestra es demasiado.

A pesar de que la observabilidad y el filtrado de estados de un sistema es un problema muy importante para distintas ramas de la ciencia, la problemática más importante para muchas de las disciplinas que utilizan este tipo de modelación es el de predicción de estados. Las metodologías expuestas anteriormente han sido ampliamente utilizadas para resolver problemas de estimación de estados futuros del sistema, buscando mejorar por ejemplo la detección de estados de fallas en sistemas complejos [8], y por lo tanto se han generado desarrollos que buscan mejorar el desempeño de los filtros de partículas en esta área. Por otro lado, la necesidad de filtrado en sistemas altamente ruidosos y volátiles ha desembocado en la búsqueda de ajustes a las modelaciones que permitan la exploración de estados límites que en filtros anteriores se perdería rápidamente, principalmente por el problema de degeneración. Así, de la necesidad de un filtro de partículas que posea la capacidad de seguir estados críticos para el sistema nace el denominado filtro de partículas sensible al riesgo (FPSR).

El filtro de partículas sensible al riesgo, al igual que los anteriormente expuestos, es un proceso de filtrado sub-óptimo que permite favorecer algunos de los estados del sistema a pesar de que inicialmente su probabilidad posterior sea baja. Con este propósito, se busca generar una mayor cantidad de partículas en las regiones de riesgo del modelo, a pesar de que inicialmente su probabilidad a priori sea baja, mediante la modificación directa de la función de densidad de importancia, como se muestra entre otros trabajos en el artículo de Sebastian Thrun, John Langford, & Vandi Verma (2001) [25].

Como sabemos, al utilizar el filtro de partículas clásico es usual elegir la función de densidad de importancia como la densidad de probabilidad a priori, es decir  $q(x_k|x_{0:k-1}) = p(x_k|x_{0:k-1})$ , principalmente por simplicidad; sin embargo, esto no ofrece una buena probabilidad para eventos asociados a condiciones de alto riesgo y con baja verosimilitud.

El FPSR incorpora una función de costos a la densidad de importancia para generar más partículas en regiones de alto riesgo del espacio estado, así es posible definir una nueva densidad como sigue:

$$q(d_t, x_t | d_{0:t-1}, x_{0:t-1}, y_{1:t}) = \gamma r(d_t) p(d_t, x_t | y_{1:t}), \quad (2.56)$$

donde  $d_t$  es un conjunto de valores discretos que representan modos de falla,  $r(d_t)$  representa a una función positiva de riesgo y  $\gamma$  es una constante de normalización.

Tal y como se expone en el trabajo de Orchard, Tang, Saha, Goebel y Vachtsevanos (2010) [15] es importante notar que es una función exógena la que modifica la densidad de importancia, lo que puede ser difícil de implementar para algunas aplicaciones, sin embargo genera una flexibilidad interesante, ya que permite eventualmente incorporar información de sistemas externos no relacionados directamente con la ecuación de evolución de estado.

Para algunas aplicaciones, las mediciones indican que el filtro de partículas sensible al riesgo es más indicado que el filtro de partículas clásico para resolver problemas de predicción [15]. Por otro lado artículos como el de Orguner y Gustafsson (2008) [19] lo proponen como un método alternativo para implícita y automáticamente el ruido de covarianza del proceso ,y así mitigar el problema de empobrecimiento de la muestra.

## 2.2. Descripción del modelo

La hipótesis que se propone en este trabajo, considera que es posible mejorar la estimación de volatilidad de retornos financieros (índice objetivo) si se incorpora información externa (índice externo), la que se incorporará a la modelación en base a un filtro de partículas sensible al riesgo con entrada exógena. Para esto se utiliza una modelación que ha sido presentada en otros trabajos anteriores, más una modificación conveniente de la densidad de importancia para implementar en el filtro de partículas clásico.

El modelo base de este trabajo, es el introducido en el trabajo de tesis de Felipe Tobar (2010) [29] denominado uGARCH (*unobserved* GARCH) que es un modelo de volatilidad estocástica basada en la misma estructura del modelo GARCH expuesto al inicio de este capítulo, pero que considera que el proceso de innovación no es observado y que tiene la misma distribución que el del modelo GARCH clásico. Esto, debido a que la evolución del estado volatilidad, es mejor descrito si se considera la densidad de residuos en su totalidad, en vez de una realización particular de  $u_t = r_t - \mu_{t|t-1}$ . Adicionalmente, los coeficientes asociados al rezago del error y del estado  $\sigma$  que son ajustados con el filtro de Kalman en la implementación de Tobar (2010) [29], son en este modelo considerados dinámicos bajo una distribución Gaussiana. El modelo queda descrito bajo la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha_{t-1}\sigma_{t-1}^2\eta_{t-1}^2 + \beta_{t-1}\sigma_{t-1}^2 \\ \alpha_t &= \alpha_{t-1} + \varepsilon_{\alpha,t-1} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \varepsilon_{\beta,t-1} \\ r_t &= \eta + \sigma_t\varepsilon_t,\end{aligned}\tag{2.57}$$

donde se considera:

$$\begin{aligned}\eta &\sim N(0,1) \\ \varepsilon_{\alpha} &\sim N(0, \sigma_{\alpha}) \\ \varepsilon_{\beta} &\sim N(0, \sigma_{\beta}) \\ \varepsilon &\sim N(0,1).\end{aligned}\tag{2.58}$$

Para el uso de este modelo en el esquema del filtro de partículas es necesario caracterizar las distribuciones que determinan los proceso de evolución y de observación. En ese sentido se utiliza un resultado del trabajo de Tobar (2010) [29] para determinar la densidad de probabilidad del estado volatilidad o estado  $\sigma$  según:

$$p(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(\sigma_t - \omega - \beta\sigma_{t-1}^2)(\alpha\sigma_{t-1}^2)}} \exp\left(\frac{\omega + \beta\sigma_{t-1}^2 - \sigma_t^2}{2\alpha\sigma_{t-1}^2}\right). \quad (2.59)$$

Es posible concluir que hay una primera restricción importante a considerar en la implementación de este modelo, que es una condición para que la expresión anterior no se indefina, esto es que  $\sigma_t^2 \geq \omega + \beta\sigma_{t-1}^2$ . Por otro lado también es necesario tener en cuenta la densidad a priori:

$$p(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2) = \frac{2\sigma_t}{\sqrt{(2\pi)(\sigma_t - \omega - \beta\sigma_{t-1}^2)(\alpha\sigma_{t-1}^2)}} \exp\left(\frac{\omega + \beta\sigma_{t-1}^2 - \sigma_t^2}{2\alpha\sigma_{t-1}^2}\right). \quad (2.60)$$

La densidad posterior por su parte queda determinada por la expresión siguiente:

$$p(\sigma_t^2 | r_{1:t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}\right) \frac{|r_t - \mu|}{\sigma_t^3}. \quad (2.61)$$

Y finalmente, la función de verosimilitud:

$$L(\sigma_t^2 | r_t) = p(r_t | \sigma_t^2) = N(\mu, \sigma_t). \quad (2.62)$$

La implementación de la sensibilidad al riesgo propuesta, es levemente distinta a la expuesta en el capítulo anterior, ya que busca amplificar directamente la densidad de probabilidad a priori para utilizarla como densidad de importancia, en vez de utilizar una función de estados de falla. Esta tarea se lleva a cabo gracias al trabajo discreto del método, el que genera un porcentaje de las muestras desde la densidad de importancia usual, y el resto, desde una amplificación de esa misma, que es generada considerando que uno de sus parámetros (específicamente el estado anterior) tuvo un aumento artificial de un 50%. La densidad de importancia utilizada finalmente será:

$$q(x_t | x_{0:t}) = \bar{p}(x_t | x_{0:t}, c(\sigma_{ext}^2)), \quad (2.63)$$

donde  $c()$  es una función binaria de la volatilidad  $\sigma_{ext}^2$  del índice externo MSCI ASIAJX.

En específico, la densidad usada en el método es generada muestreando el 90% de las partículas utilizando la densidad de probabilidad a priori y el 10% restante desde la densidad modificada en el caso de que la señal externa  $c()$  se active. Cabe destacar que los valores indicados

en esta etapa del proceso fueron elegidos arbitrariamente, de forma que mejore el desempeño en una muestra generada de datos. Es necesario destacar, que podrían ser ajustados más formalmente por medio de algoritmos de optimización sobre el desempeño del filtro.

La densidad de importancia queda definida por la realización de la función de señal externa  $c$  y los porcentajes fijos expuestos, de la manera siguiente:

$$q(\sigma_{i,t}^2 | \sigma_{i,t-1}^2) \begin{cases} p(\sigma_{i,t}^2 | \sigma_{i,t-1}^2)[c = 0] \\ p(\sigma_{i,t}^2 | 2\sigma_{i,t-1}^2)[10\%, c = 1] \\ p(\sigma_{i,t}^2 | \sigma_{i,t-1}^2)[90\%, c = 1]. \end{cases} \quad (2.64)$$

En la Figura 2.1 vemos un ejemplo muestral de la densidad de probabilidad discreta utilizada en el filtro de partículas sensible al riesgo y una densidad sin modificar para unos parámetros en específico.

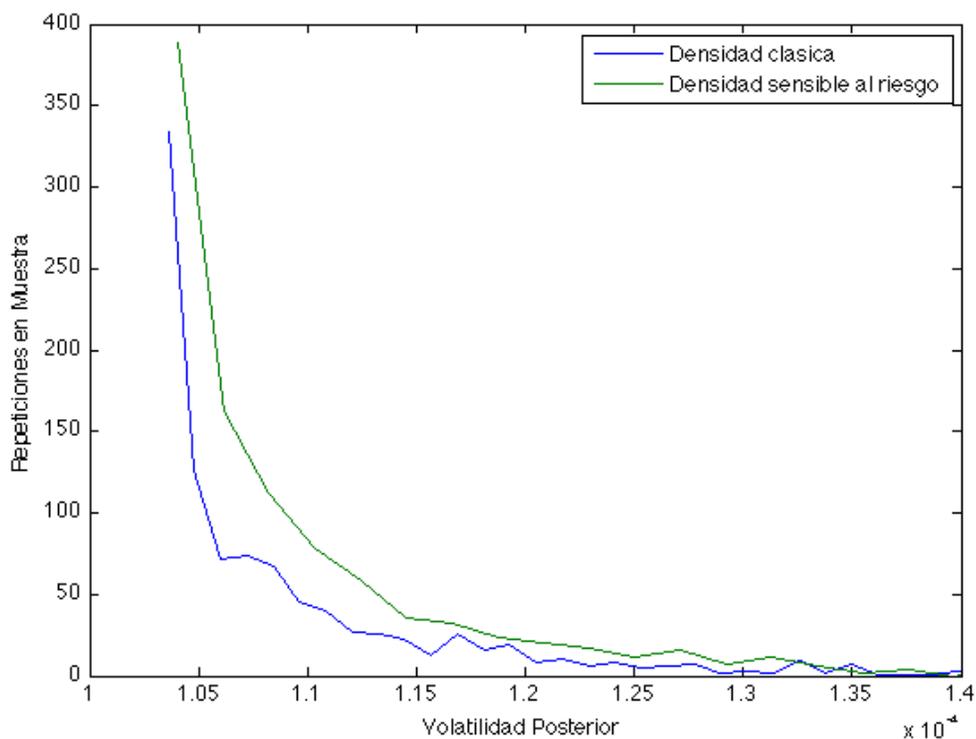


Figura 2.1: Histograma de dos muestras de mil datos de serie de tiempo generados. Azul: Densidad de importancia equivalente a la densidad de probabilidad a priori extraída del modelo uGARCH. Verde: Densidad de importancia propuesta que incorpora sensibilidad al riesgo.

Es necesario mencionar que el desempeño del método como filtrado de datos se ve fuertemente

afectado por la inclusión de la sensibilidad al riesgo, ya que artificialmente se amplifica el valor de las volatilidades generadas en cada paso, a pesar de que de otra forma estas se debiesen mantener en valores más acotados, es por eso que no se harán discusiones sobre el desempeño del método como filtro ya que escapa a los objetivos de este trabajo.

Cabe destacar, que para consolidar la predicción es necesario optimizar los pesos de las partículas, ya que al no existir observación como en el filtrado, no es posible utilizar la verosimilitud de las estimaciones para este propósito. Este problema no es trivial de resolver por lo que para este trabajo se consideran los pesos de la última predicción como mejor estimación de los pesos optimizados, para predecir el nivel posterior del estado. No se ahonda en el desarrollo de esta etapa del método ya que no es parte fundamental de los objetivos propuestos, sin embargo es necesario aclarar, que este proceso es posible de optimizar y es parte importante de las propuestas de trabajo futuro, que se serán detalladas en el capítulo siguiente.

Dentro de las particularidades de la implementación, se encuentra la elección del índice cuya volatilidad será predicha y el que impactará en el cambio de la sensibilidad al riesgo, para ello se identifican las condiciones que necesariamente deben cumplir los índices elegidos para verificar la hipótesis de este trabajo, las que son las siguientes:

- Como una característica importante es aprovechar información no considerada sobre el precio real de los activos en el mercado financiero, es vital que exista una diferencia temporal en la realización de las observaciones.
- Se deben utilizar retornos financieros asociados a activos o indicadores que tengan en sus fundamentos alguna relación importante, de modo que la información sobre los niveles de precios sea relevante para ambos.
- Hay que considerar que la frecuencia de los datos debe ser regular. Vale recordar que hay activos cuyas transacciones no son muy frecuentes, por lo que sus precios no son entregados de forma constante.
- Se deben utilizar activos cuyo precio no se modifique fuertemente por sus particularidades.

A modo de aclarar la última característica mencionada, existen acciones que pagan dividendos importantes lo que hace variar el precio alrededor de la fecha de pago, esta característica es particularmente relevante para instrumentos de renta fija ya que el pago de cupones genera importantes cambios en la valoración de dicho papel o de acciones privadas que devuelven ingresos importantes a los inversionistas por ventas de empresas. Lo que se intenta es que los datos utilizados no mantengan variaciones por esos conceptos no *fundamentales*.

Otra característica que es importante fijar en la implementación del método con datos reales, es la frecuencia de las muestras. En una primera instancia se utilizaron datos de periodo en horas,

sin embargo el ruido generado por los ajustes de precios dentro del día para indicadores y precios de acciones hace que el método intente explicar volatilidad asociada a liquidez, calce de puntas u otras particularidades de la *microestructura* de los mercados financieros, que no vale la pena detallar para la finalidad de este trabajo, pero que son importantes de señalar que existen.

En la práctica, mientras menos diversificado es un portafolio, más expuesto está al riesgo idiosincrático ya que particularidades propias del activo, del sector al que pertenece, la zona geográfica (por condiciones climáticas por ejemplo) o del tipo de instrumento pueden impactar de manera importante la valoración del mismo. Es vital que el análisis de este trabajo se base en el denominado riesgo de mercado, que no es más que el riesgo asociado a que el mercado ajuste sus precios de manera no exacta debido a que la información relevante no es inmediatamente incorporada en el análisis, pero que sin embargo siempre converge al precio justo o real. Por lo tanto la elección primaria es considerar un portafolio de activos bien diversificados, que mantengan una cierta relación en común pero que no tengan la misma exposición al mercado, para no explicar relaciones tautológicas entre ellos, luego la elección natural es elegir indicadores financieros asociados a alguna zona geográfica en particular.

Los indicadores finalmente utilizados son el *Morgan Stanley Capital International* (MSCI) Emerging Markets Latino America (denominado MSCI LA) para la predicción y el MSCI All Country Asia Ex Japan (MSCI ASIAJ) por las siguientes razones:

- Se eligen los índices de MSCI como los indicadores utilizados debido a su amplio uso en la industria como portafolio de referencia para muchos fondos de inversión.
- Cada día los datos asiáticos, asociados su nivel o precio de cierre, se han publicado horas antes de la apertura de los mercados en latinoamerica.
- Se utiliza un índice asiático asociado a mercados principalmente emergentes (excepto Hong Kong), es decir, sin considerar a Japón en su cálculo, para ser consecuentes con el tipo de mercado que se utilizará en la validación de la hipótesis, ya que los mercados emergentes son conocidos empíricamente por ser más volátiles.
- A pesar de que la composición de los índices no es fija, ya que se componen proporcionalmente a la capitalización de los mercados considerados, la mayor contribución al indicador americano es sin duda Brasil cuyo principal socio comercial es China, el mayor contribuyente del índice asiático. Por lo que en sus fundamentos económicos ambos indicadores tienen estrecha relación.

Para aclarar dudas, los países que conforman el índice asiático son China, Hong Kong, India, Indonesia, Korea, Malasia, Filipinas, Singapur, Taiwan, y Tailandia, mientras que el indicador financiero latinoamericano son Brasil, Mexico, Colombia, Chile y Perú. Además las ponderaciones

de cada país, para la conformación del índice, reflejan la capitalización de mercado, es decir que mientras más grande en monto sea el mercado de alguno de los países mencionados, más contribución hace al cálculo del indicador respectivo.

Muchos bancos de inversión o *portfolio managers* (quienes se encargan de crear portafolios de inversión) describen que la evidencia empírica señala que las correlaciones entre distintas clases de activos es distinta en las distintas etapas del ciclo económico, en base a las definiciones de ciclo dadas desde el artículo de Mitchell (1923) [4], siendo uno de los puntos claves de la relación entre las finanzas y la economía. Es por lo tanto necesario que la muestra de los datos a utilizar en este trabajo abarque la mayor cantidad de estados de la economía como sea posible, poniendo énfasis en los momentos de alta volatilidad.

La muestra finalmente utilizada, abarca desde el 30 de Diciembre del 2004 al 03 de Noviembre del 2011 y es subdividida en cuatro submuestras, para determinar el funcionamiento del método propuesto en cuatro condiciones de la naturaleza, utilizando como guía los niveles de volatilidad del índice. Además, como se verá más adelante, la varianza del ruido de proceso para los estados  $\alpha$  y  $\beta$  no es lo suficientemente grande como para ajustarse rápidamente a cambios grandes en los parámetros del modelo.

El enfoque propuesto, considera que el filtro de partículas sensible al riesgo con una entrada exógena, dependiente del índice externo MSCI ASIAXJ (de un huso horario distinto), tiene un mejor desempeño en términos de predicción de estados de volatilidad del índice MSCI LA que el filtro de partículas clásico.

Para validar esta hipótesis, se utiliza el set de datos expuesto para realizar predicciones (a un paso) en línea, del nivel de volatilidad del índice objetivo, utilizando el filtro de partículas sensible al riesgo con entrada exógena. De forma paralela, se realiza la misma predicción utilizando el filtro de partículas clásico. Se considerará además, que la mejor aproximación al nivel de volatilidad real del índice objetivo (nuestro *ground truth*), es el filtrado GARCH (1,1) de máxima verosimilitud; esto, debido a que es el método más utilizado en la industria financiera y porque el uso del uGARCH no entrega una solución óptima al problema. Finalmente, el esquema del ensayo utilizado en este trabajo está expuesto esquemáticamente en la Figura 2.2.

El resultado de cada una de las pruebas efectuadas se genera a partir del promedio simple de 30 realizaciones de funcionamiento del método para capturar la predicción media, ya que por la naturaleza aleatoria del filtro de partículas, para poder criticar el desempeño no basta con solo con un resultado puntual.

Por otro lado, todas las implementaciones se llevan a cabo utilizando un universo de 100 partículas y una tolerancia al remuestreo asociada a una muestra de partículas efectiva del 80% del universo total; todos los intervalos de confianza a los que se hace referencia han sido calculados al 90% de certeza y utilizando las densidades de probabilidad discretas, y que el algoritmo de

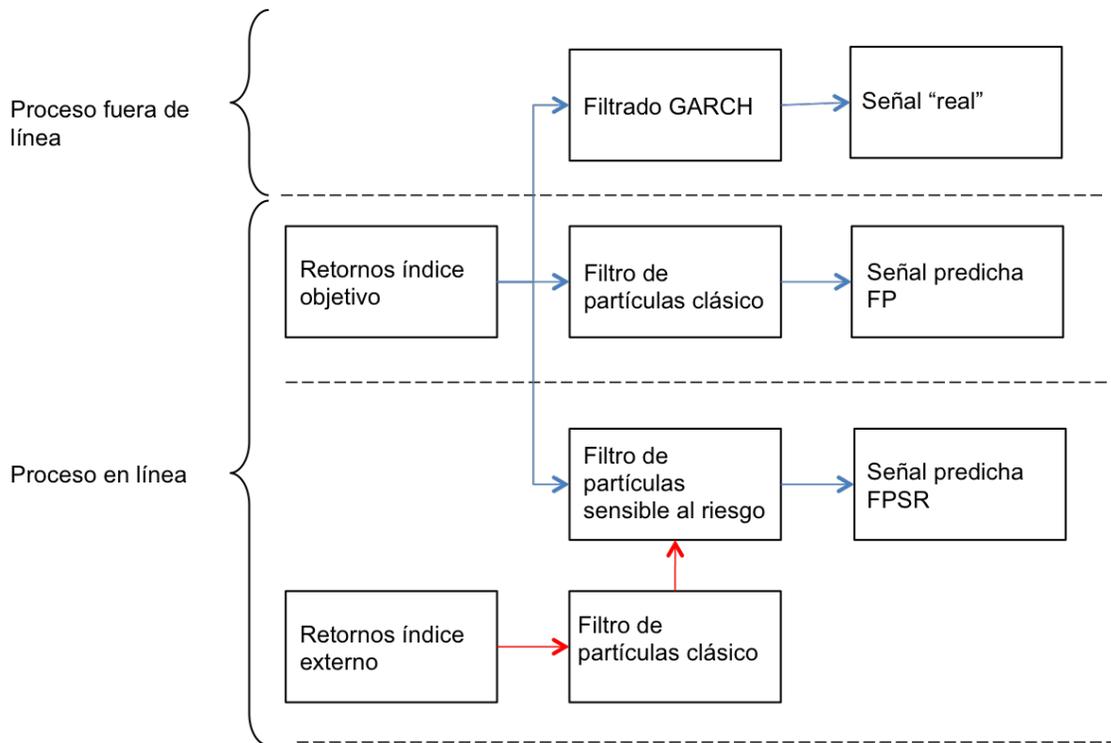


Figura 2.2: Esquema de funcionamiento de los filtros en la prueba de hipótesis.

remuestreo utilizado en todas las aplicaciones del método es el denominado sistemático. Además, la volatilidad asociada a la densidad de probabilidad del estado  $\alpha$  y del estado  $\beta$  (Gaussianas) son fijadas en 0.005 bajo un ajuste experimental de modo de impedir que por movimientos aleatorios coordinados se rompa la condición de convergencia de la densidad posterior del estado  $\sigma$  y que permita la movilidad necesaria para ajustar los parámetros cuando sea necesario en la evolución del modelo en el tiempo.

### 2.2.1. Herramientas utilizadas

Todos el desarrollo de esta tesis es programado exclusivamente para ese propósito en base al *software* propietario de la empresa The MathWorks denominado Matlab®; particularmente, utilizando la versión R2009b para sistemas operativos Unix, en específico, MacOSX. El principal problema del uso de esta versión del programa es que no está en español, por lo que todo texto presente en gráficos, en tablas, títulos, ejes u otros textos no poseen tilde ya que la codificación de texto del programa no permite su uso.

Independientemente de lo anterior, todos los códigos expuestos en el apéndice de este informe son compatibles con cualquier versión de Matlab, que posea el *toolbox* denominado *Econometrics Toolbox* debido al uso de las funciones de modelos de varianza condicional del paquete, *garchsim* y *garchfit*.

En términos del soporte físico, la herramienta utilizada para la programación, las simulaciones y la generación de gráficos necesarias en este trabajo, es un Macbook 2.1 con procesador Intel Core 2 Duo de 2.1 [GHz] con 1 GB de memoria DDR2 SDRAM.

El diseño de la programación intenta separar la mayor cantidad posible de funciones en distintas capas de programación, de tal modo las densidades de probabilidad utilizadas son la primera capa de funciones, luego se programan los métodos de filtro de partículas clásico y el sensible al riesgo utilizando las funciones de densidad anteriores, seguido se programa la implementación donde se ingresan los datos y finalmente se compone el ciclo de 30 repeticiones del método completo para consolidar los resultados obtenidos, calcular los indicadores y generar las tablas y figuras necesarias.

### 2.2.2. Indicadores de desempeño

Para evaluar el desempeño de la metodología propuesta se proponen dos indicadores, que dependerán de la densidad de probabilidad generada para la estimación, en partículas la dispersión de los datos, y de la cercanía de la predicción con el dato real o que es considerado como más verdadero para este trabajo, es decir el GARCH (1,1), nuestro *ground truth*.

El primero de ellos es el indicador de exactitud, que busca indicar de forma cuantitativa la cercanía de la predicción con el valor de la volatilidad real, y se construye bajo la siguiente formula para un instante  $t$  cualquiera:

$$i_t^{ex} = \frac{|\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2|}{IC_t}. \quad (2.65)$$

Donde  $\sigma_t^2$  es el valor de la volatilidad del instante  $r$  calculado con un filtrado GARCH (1,1),  $\hat{\sigma}_t^2$  es el valor predicho por el método y  $IC_t$  es el valor del ancho del intervalo de confianza de la densidad posterior discreta aportada por el método al 90%. Finalmente un indicador general para la exactitud de la predicción puede quedar dada por el promedio simple de los indicadores de exactitud parciales de la muestra:

$$I^{ex} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T i_t^{ex}. \quad (2.66)$$

Similarmente, se construye un indicador de precisión, utilizando como concepto que en cada predicción se debiese mantener un ancho del intervalo de confianza similar al promedio de los últimos intervalos filtrados, en caso de que no se dispersen mucho las partículas en la predicción como puede ser el caso para la implementación del filtro sensible al riesgo, de tal modo se construye el indicador como sigue:

$$i_t^{pr} = \frac{IC_t}{\bar{IC}_t}, \quad (2.67)$$

donde  $IC_t$  es el ancho del intervalo de confianza de la predicción y  $\bar{IC}_t$  es el ancho promedio de los intervalos de confianza de las últimas 50 muestras filtradas. Similarmente es posible construir un indicador de la precisión del método sobre una muestra completa a partir de los indicadores parciales de los datos:

$$I^{pr} = \frac{1}{T} \sum_{t=50}^T i_t^{pr}. \quad (2.68)$$

Notar que hay un conjunto inicial de predicciones a las que no es posible calcular su índice de precisión, ya que no existen suficientes datos filtrados como para estimar un ancho promedio por una cantidad considerable de muestras. Por esta razón, todos los indicadores calculados no consideran las primeras 50 muestras en su cálculo.

En una primera instancia, los indicadores utilizados fueron solo los descritos anteriormente; sin embargo, la poca confiabilidad de los resultados basados en estos indicadores (como se discutirá en las conclusiones), fuerza al uso de un indicador más representativo del desempeño de las predicciones. El indicador de predicción utilizado es el siguiente:

$$i_t^{pred} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(\hat{\sigma}_t^2 - IC_t^{sup})^2 + (\hat{\sigma}_t^2 - IC_t^{inf})^2}}{\bar{IC}_t}, \quad (2.69)$$

donde  $IC_t^{sup}$  y  $IC_t^{inf}$  representan los límites superior e inferior del ancho del intervalo de confianza de la respectiva predicción, y  $\hat{\sigma}$  representa la mejor estimación del valor real de la volatilidad para ese instante de tiempo determinado, es decir, la volatilidad filtrada por medio del GARCH (1,1).

Este indicador de predicción incorpora, además de la cercanía del valor predicho con el valor real, la posición relativa que tiene la mejor estimación de la volatilidad dentro del intervalo de confianza de la densidad posterior, utilizando sus valores límites.

Finalmente, es importante mencionar que cuando  $i_t^{pred} < 1$  las predicciones no son representativas de la evolución de la volatilidad, ya que la evolución de las partículas en ese instante difiere totalmente de la evolución real de los estados del sistema.

# Capítulo 3

## Resultados

### 3.1. Resultados utilizando series de tiempo simuladas

Una vez programada la metodología es importante como primera etapa, corroborar su correcto funcionamiento en base a datos generados artificialmente. Para ello se generó una base de datos de retornos utilizando la función *garchsim* de *Matlab* con la siguiente estructura arbitraria de parámetros:

$$\alpha = 0.3$$

$$\beta = 0.6$$

$$\mu = 0.001$$

$$n = 0$$

$$P = 1$$

$$Q = 1$$

$$Muestras = 500.$$

Para la elección de estos parámetros se considera la restricción de que los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  del modelo deben sumar estrictamente menos que uno debido a la convergencia del modelo GARCH implícito, y que los parámetros  $P$  y  $Q$  deben ser iguales a uno ya que representan los niveles de rezago del error y del estado para el modelo que definimos, en base al GARCH (1,1). La elección de los valores dentro de estas restricciones, es decir de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $n$  y el número de muestras es totalmente arbitraria

Los datos finalmente generados y utilizados en esta parte del trabajo son los que se ven en la

Figura 3.1 donde además de ver el nivel de retorno, se ve la volatilidad con la cual se generaron dichos valores. Además en la Tabla 3.1 se ve la estadística descriptiva de estos datos.

Como se genera solo un set de datos, para poder testear el desempeño del modelo sensible al riesgo, se utiliza el rezago de esta misma serie como indicador externo y para que la razón de información no fuese perfecta, ya que evidentemente tiene total efectividad y eficacia, se asigna mediante la amplificación de la misma por medio de un coeficiente aleatorio un porcentaje de fallo de 20% que es elegido de forma arbitraria. Es decir, la señal externa generada se crea a partir del nivel de volatilidad de los datos, y es alterada en un 20% para generar errores y disminuir su razón de información.

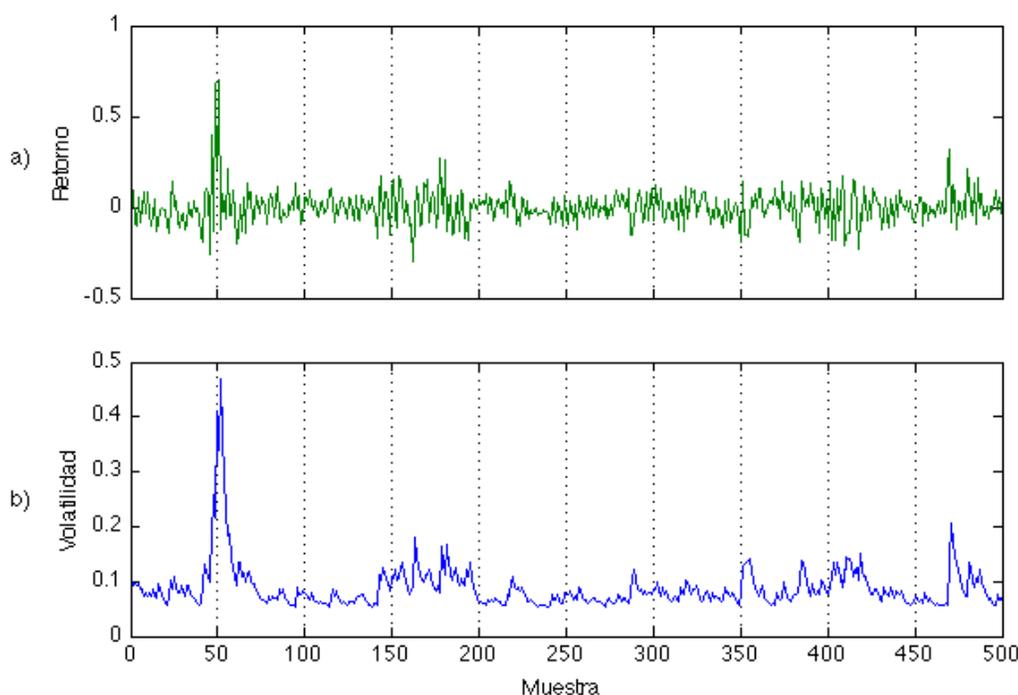


Figura 3.1: a): Niveles de retornos de la serie de tiempo generada. b): Volatilidad resultante de los datos de serie de tiempo generada.

Serie	Media	Desviación estándar
Retornos	$7.6294 \cdot 10^{-4}$	0.0961
Volatilidad	0.0844	0.0406

Tabla 3.1: **Estadística descriptiva de los datos generados**

En la Tabla 3.2, se ve el resultado de esta implementación con datos generados, donde es posible identificar una ventaja del filtro de partículas sensible al riesgo al comparar el resultado de los índices con respecto al filtro de partículas clásico.

Método	Índice Exactitud	Índice Precisión	Error Cuadrático Medio	Ancho I.C.
FPSR	0.1480	1.2462	$1.4599 \cdot 10^{-4}$	0.0665
FP	0.1550	1.2589	$3.1541 \cdot 10^{-4}$	0.0750

Tabla 3.2: **Resultado de la implementación con datos generados**

Se debe recordar que además de la volatilidad los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  también son estados del sistema, por lo que su evolución en el tiempo también impacta en el resultado de la predicción. En la Figura 3.2 se ve la evolución para cada muestra.

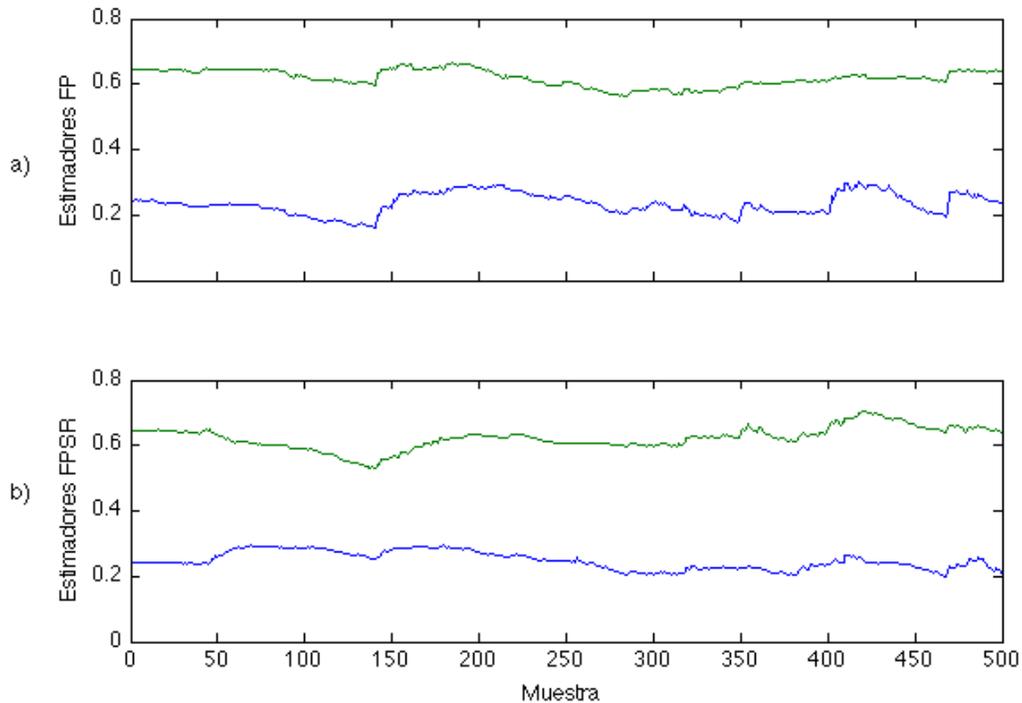


Figura 3.2: Evolución de los estimadores para  $\alpha$  (Azúl) y  $\beta$  (Verde) en la implementación con series de tiempo generadas. a): Resultado del filtro de partículas clásico. b): Resultado del filtro de partículas sensible al riesgo

A pesar de que los indicadores expuestos anteriormente fueron ideados para evaluar el desempeño de la predicción, se presenta además la diferencia del error cuadrático entre el filtro de partículas clásico y su versión sensible al riesgo para todo el set de datos en la Figura 3.3

Se ve también la diferencia del ancho del intervalo de confianza (en la Figura 3.4) entre ambos métodos, cabe destacar que, al igual que para la diferencia del error cuadrático, por construcción los valores positivos de la Figura indican que el filtro de partículas sensible al riesgo es superior a su símil clásico.

Además de los coeficientes mencionados en el Capítulo 2.2 es necesario para cada implementación del método de filtro de partículas, determinar otros parámetros para su

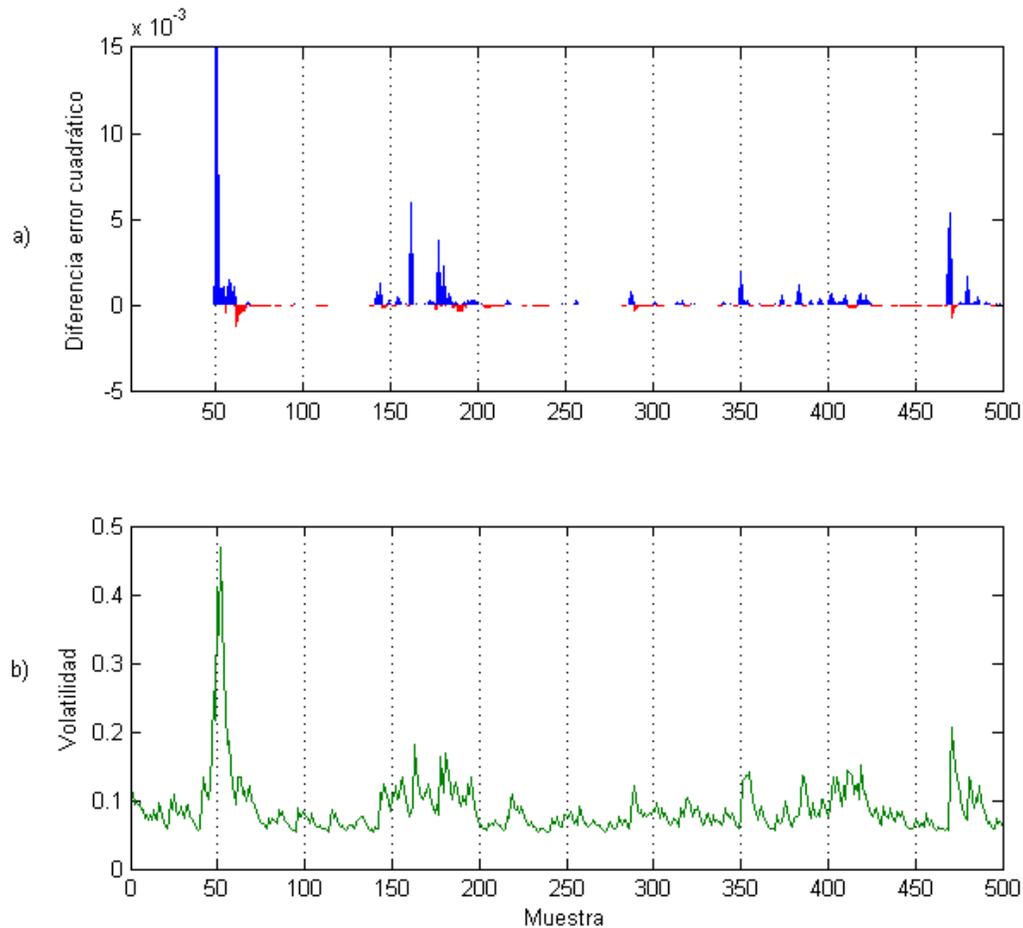


Figura 3.3: a): Diferencia entre el error cuadrático de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo y el filtro de partículas clásico. En azul el FPSR es superior, en rojo el caso contrario. b): Nivel de volatilidad del retorno considerado.

funcionamiento. Así no está de más recordar que todos los intervalos de confianza descritos en esta parte de los resultados, así como en la implementación con datos reales, los intervalos de confianza descritos corresponden a un 90% de certeza bajo el uso directo de la densidad de probabilidad discreta del estado predicho.

Finalmente, se ve en la Tabla 3.3 el resultado de la predicción de ambos filtros de partículas, en el subconjunto de muestras donde la señal genera un aumento en la densidad de importancia.

Método	Error <sup>2</sup>	Ancho I.C.
FPSR	$3.3228 \cdot 10^{-4}$	0.1230
FP	0.0010	0.1273

Tabla 3.3: Resultado promedio de implementación con datos generados con señal activa

Como se menciona en la descripción de los indicadores en la Sección 2.2.2 debe ser

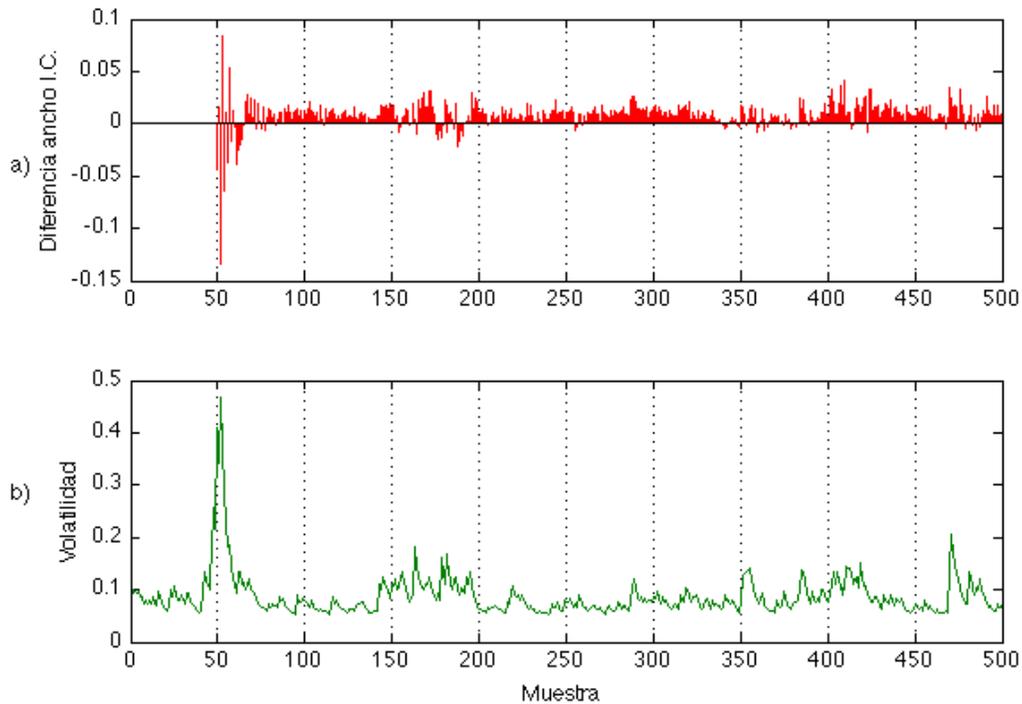


Figura 3.4: a): Diferencia del ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo y el filtro de partículas clásico. b): Nivel de volatilidad del retorno considerado

considerado un indicador de predicción, el resultado del cálculo para cada muestra en la serie de tiempo generada se puede apreciar en gráficamente en la Figura 3.5.

Y para poder evidenciar la dominancia de algún método, utilizando esta indicador de predicción podemos ver en la Figura 3.6 (en un ejercicio efectuado también para los indicadores anteriores), la diferencia entre los índices del filtro de partículas clasico y el filtro de partículas sensible al riesgo.

Para explicitar el resultado obtenido, se calculan los índices promedio para la muestra completa y en el subconjunto de datos donde la entrada exógena binaria se mantiene activa, los que se exponen en la Tabla 3.4.

Muestra	FP	FPSR
Muestra completa	1.0463	1.0597
Señal activa	1.0469	1.0605

Tabla 3.4: **Resultado índice de predicción para series de tiempo generadas**

Es importante mencionar, que la tabla y las figuras realizadas a partir del calculo del índice de predicción propuesto, están basadas en la volatilidad real (considerando el resultado del filtrado GARCH (1,1) como real) de la serie de tiempo generada para este propósito, ya que se extrae directamente de los estados generados a partir de las innovaciones calculadas por la función que genera los datos. Esto no es igual en el caso de una implementación con datos reales.

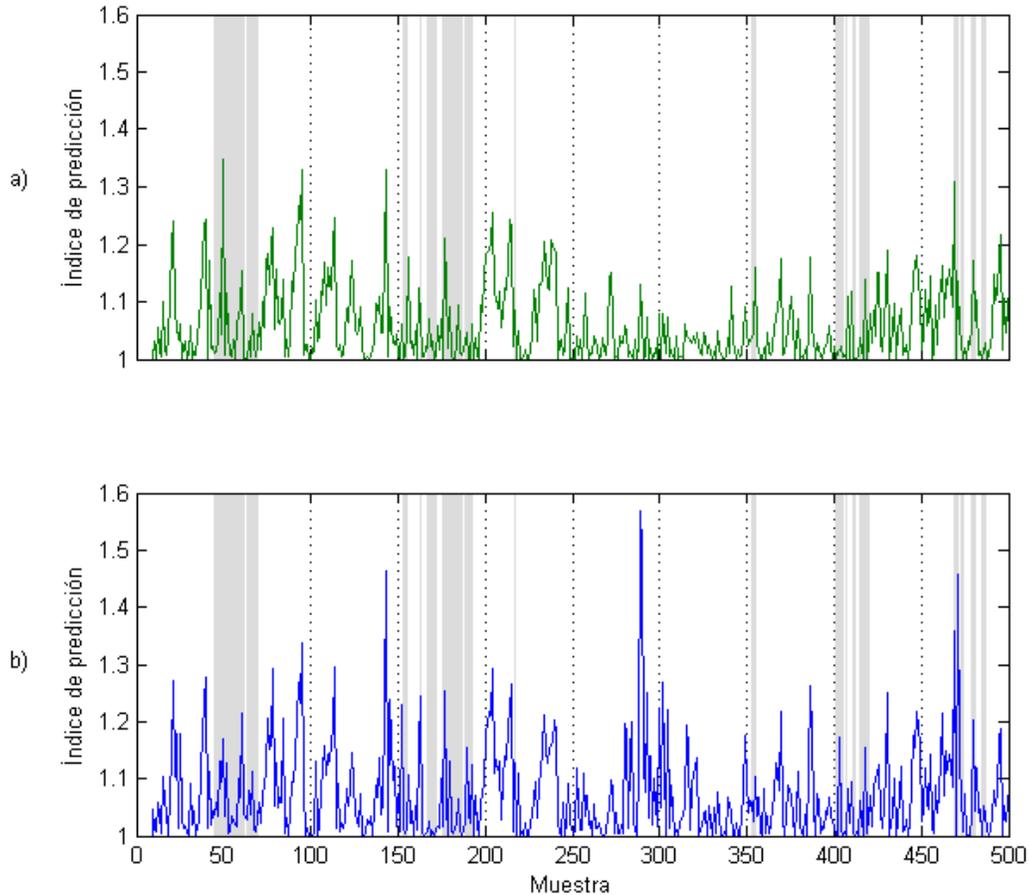


Figura 3.5: a): Índice de predicción calculado para el filtro de partículas clásico implementado en series de tiempo generadas. b): Índice de predicción calculado para el filtro de partículas sensible al riesgo implementado en series de tiempo generadas. Gris: Señal de entrada exógena activa.

## 3.2. Resultados utilizando datos reales

Una vez realizada la implementación con datos generados es necesario revisar el funcionamiento en la práctica del método utilizando los datos reales, que fueron elegidos mediante los criterios enunciados en la descripción del modelo. Se ve en la Tabla 3.5 los datos de los retornos de dichos índices, calculados en base 100 desde el inicio de la muestra.

Índice	Media	Desviación estándar
MSCI LA	247.8140	84.9043
MSCI ASIAJ	167.2154	42.9740

Tabla 3.5: Estadística descriptiva de los índices utilizados

Como es sabido, los datos totales, correspondiente a 2500 muestras fue dividida en cuatro

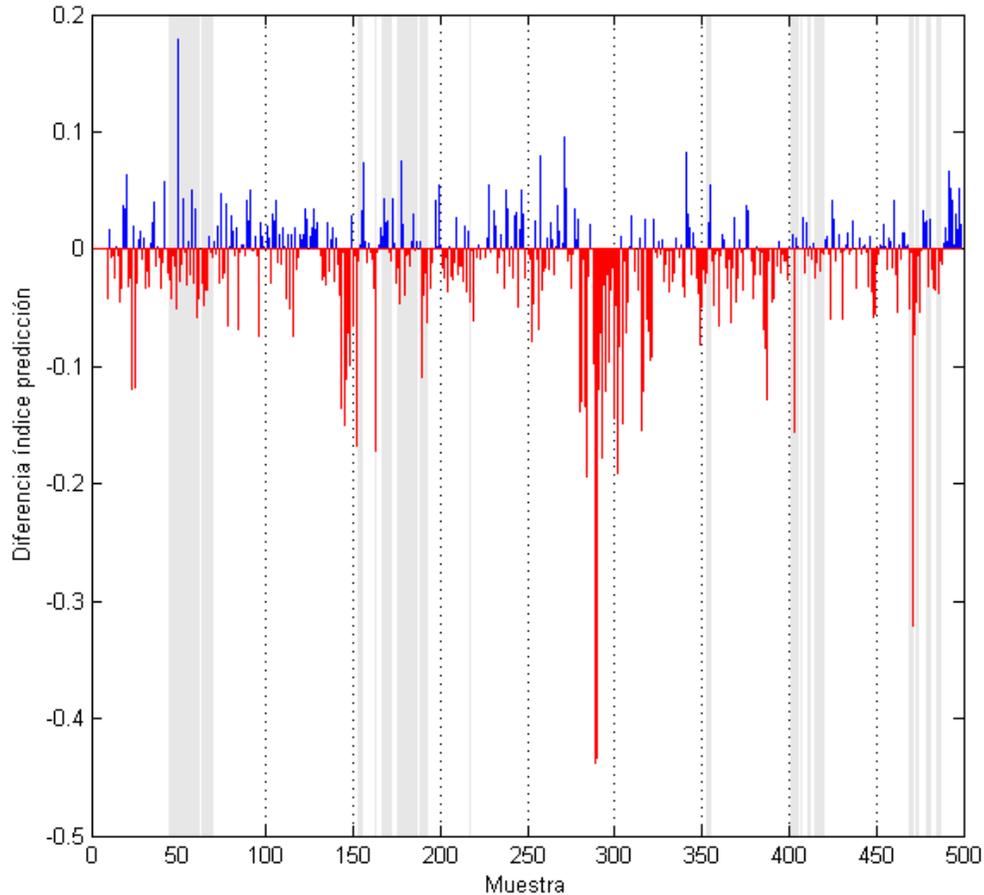


Figura 3.6: Diferencia entre el índice de predicción de la predicción utilizando el filtro de partículas clásico y el filtro de partículas sensible al riesgo Gris: Señal de entrada exógena activa.

submuestras para capturar el funcionamiento del filtro de partículas en ambas versiones e implementaciones de sensibilidad al riesgo, bajo distintas características de niveles de volatilidad, se ve en la Tabla 3.6 las fechas asociadas a cada una de las sub-muestras incorporadas al análisis con datos reales.

Muestra	Fecha Inicio	Fecha Fin
1 - 1000	30 de Diciembre del 2004	25 de Septiembre del 2007
1001 - 1500	26 de Septiembre del 2007	06 de Febrero del 2009
1501 - 2000	07 de Febrero del 2009	21 de Junio del 2010
2001 - 2500	22 de Junio del 2010	03 de Noviembre del 2011

Tabla 3.6: **Fechas consideradas en las muestras**

En la Figura 3.7 se detallan los niveles de los índices considerados en la implementación real del método, donde es posible apreciar dentro del horizonte de tiempo considerado, situaciones como el efecto de la crisis del 2008, el importante crecimiento del mercado latinoamericano y en

definitiva la razón de dividir la muestra.

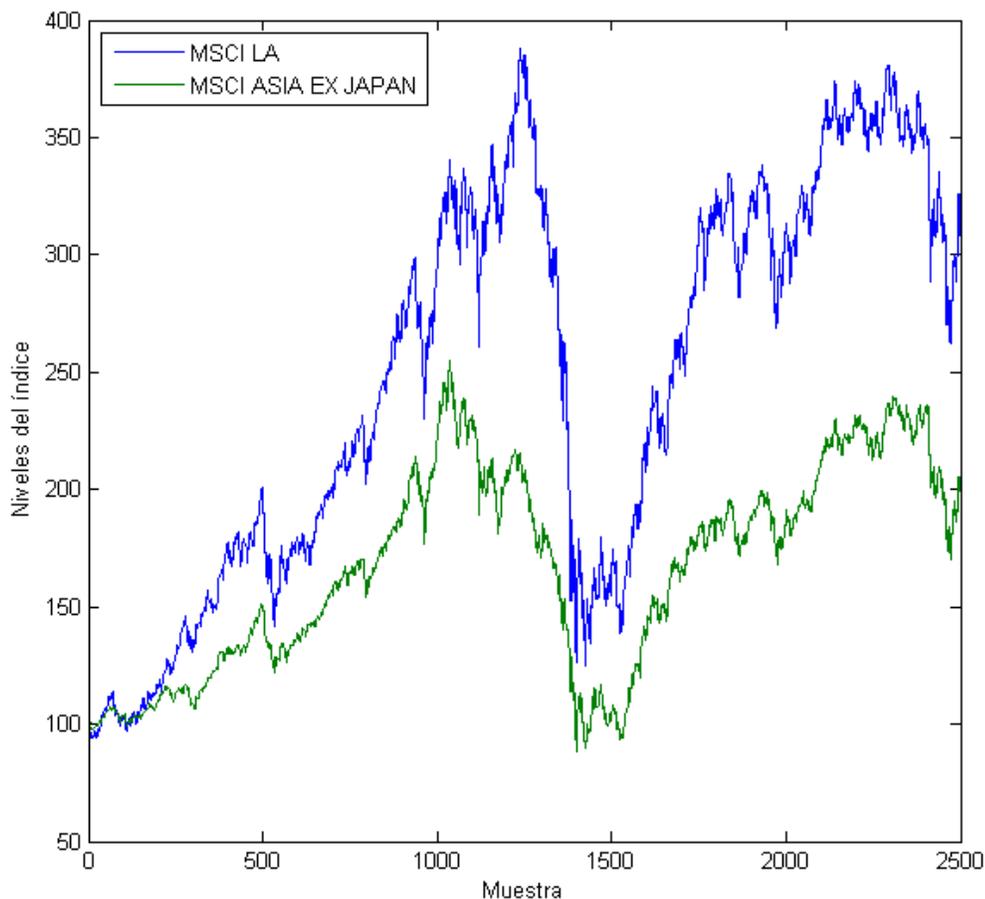


Figura 3.7: Niveles de los índices considerados, en base 100 desde la fecha de inicio de la muestra

En una primera instancia se utiliza una señal tipo binaria, dependiente de la diferencia temporal de la volatilidad del índice externo MSCI ASIAXJ, para aumentar la densidad de importancia, esto debido a que inicialmente se busca incorporar instantáneamente la información externa dentro de la predicción de la volatilidad del indicador objetivo. Se expone el resultado de los índices de exactitud y de precisión para esta primera implementación en la Tabla 3.7.

Muestra	Exactitud FP	Exactitud FPSR	Precisión FP	Precisión FPSR
1	0.1505	0.1347	1.0526	1.0452
2	0.2454	0.2181	1.0655	1.0629
3	0.2254	0.1748	1.0560	1.0315
4	0.3317	0.2225	1.0742	1.0619

Tabla 3.7: **Índices implementación inicial**

A pesar del resultado obtenido, al parecer favorable para el filtro de partículas sensible al

riesgo, se detallan además los errores cuadráticos medios en cada muestra y el ancho del intervalo de confianza correspondiente en la Tabla 3.8, donde se aprecia un resultado no muy definitivo del desempeño del filtro en esta primera implementación.

Muestra	Error <sup>2</sup> FP	Error <sup>2</sup> FPSR	Ancho I.C. FP	Ancho I.C. FPSR
1	3.6703*10 <sup>-6</sup>	5.3654*10 <sup>-6</sup>	0.0097	0.0102
2	2.2855*10 <sup>-5</sup>	2.6297*10 <sup>-5</sup>	0.0175	0.0194
3	4.8267*10 <sup>-6</sup>	4.2237*10 <sup>-6</sup>	0.0096	0.0106
4	4.6973*10 <sup>-6</sup>	3.1253*10 <sup>-6</sup>	0.0064	0.0069
<b>Total</b>	7.8509*10 <sup>-6</sup>	8.7991*10 <sup>-6</sup>	0.0105	0.0114

Tabla 3.8: Errores cuadráticos medios y ancho del intervalo de confianza promedios, en primera implementación

Se aprecia el resultado expuesto anteriormente de forma gráfica en la Figura 3.8, donde el resultado no es tan apreciable a simple vista, en esta figura se muestran en azul los valores donde el error cuadrático es menor para la implementación sensible al riesgo y en rojo el caso contrario.

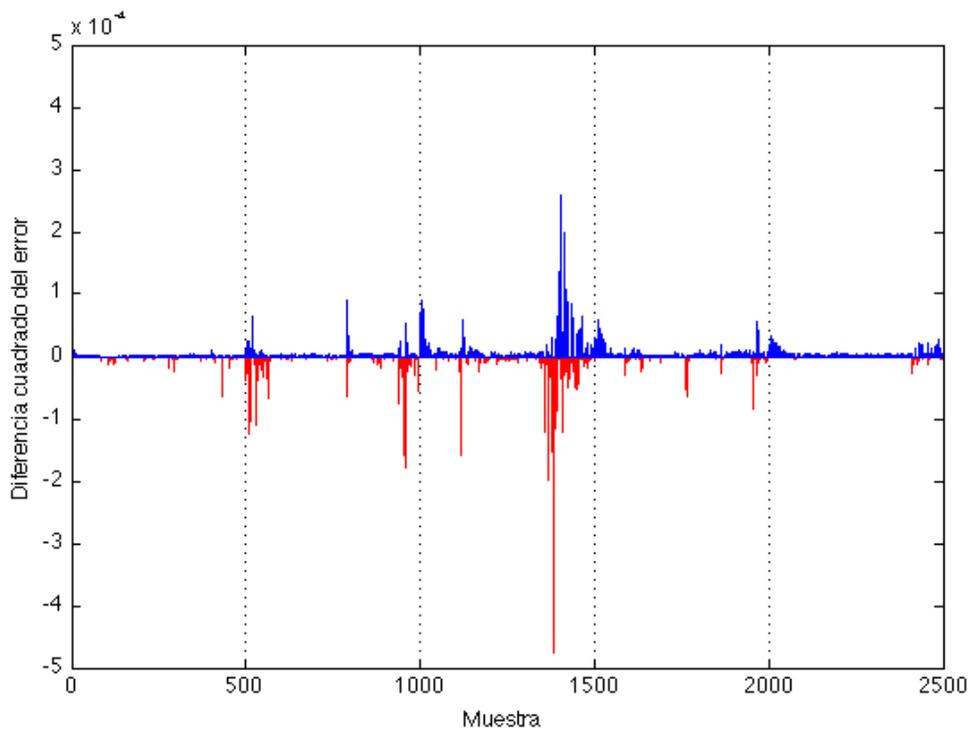


Figura 3.8: Diferencia error cuadrático de la predicción para cada muestra. Se expone el error cuadrático de predicción del filtro de partículas clasico menos el error cuadrático de predicción del filtro de partículas sensible al riesgo. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario.

Una vez efectuada esta primera implementación con datos reales se toma en consideración la cantidad real de información contenida en la señal utilizada, es por eso que se genera una nueva metodología de cálculo considerando, al igual que con los datos generados artificialmente, una

tolerancia sobre el nivel de volatilidad el índice externo directamente. En la Tabla 3.9 se muestra el resultado con los indicadores de precisión y exactitud de esta segunda implementación del método.

Muestra	Exactitud FP	Exactitud FPSR	Precisión FP	Precisión FPSR
1	0.1505	0.1280	1.0526	1.0497
2	0.2454	0.1734	1.0655	1.0802
3	0.2254	0.1487	1.0560	1.0309
4	0.3317	0.1954	1.0742	1.0814

Tabla 3.9: **Índices segunda implementación**

Con la finalidad de efectuar una comparación acabada entre ambas implementaciones, es necesario generar los mismos indicadores que en primera instancia, en ese sentido, en la Tabla 3.10, se presenta el error cuadrático medio y el ancho del intervalo de confianza promedio por muestra de esta nueva implementación de sensibilidad al riesgo.

Muestra	Error <sup>2</sup> FP	Error <sup>2</sup> FPSR	Ancho I.C. FP	Ancho I.C. FPSR
1	$3.6703 \cdot 10^{-6}$	$3.5706 \cdot 10^{-6}$	0.0097	0.0096
2	$2.2855 \cdot 10^{-5}$	$6.9185 \cdot 10^{-6}$	0.0175	0.0192
3	$4.8267 \cdot 10^{-6}$	$3.8121 \cdot 10^{-6}$	0.0096	0.0100
4	$4.6973 \cdot 10^{-6}$	$3.3994 \cdot 10^{-6}$	0.0064	0.0063
<b>Total</b>	$7.8509 \cdot 10^{-6}$	$4.5471 \cdot 10^{-6}$	0.0105	0.0101

Tabla 3.10: **Errores cuadráticos medios y ancho del intervalo de confianza promedios por muestra, en la implementación final**

Una de las ventajas de la implementación de la sensibilidad al riesgo en base al nivel de volatilidad, es que la señal se mantiene activa por más tiempo, pudiendo entonces identificar de mejor manera el efecto de la señal sobre el desempeño de las predicciones. Se evidencia en la Figura 3.9, el resultado del filtro de partículas para los dos indicadores reales usados y las muestras donde se mantiene activa la señal. Hay que recordar sin embargo que la señal sigue siendo binaria, por lo tanto solo determina el aumento en magnitud del estado asociado a las partículas por medio de la densidad de importancia, pero no hace ninguna distinción de magnitud, luego para el método es indiferente si la tolerancia es superada por un delta muy pequeño o ampliamente, el efecto práctico es el mismo.

La hipótesis es que el desempeño en predicción de la metodología sensible al riesgo es mejor que la implementación clásica y para ello un punto importante es conocer el resultado del método con señal activa. Como muestra la Tabla 3.11, para la muestra completa el error cuadrático medio se reduce en el caso del filtro sensible al riesgo en un 42 %, mientras que para la señal activa esta diferencia es aún más importante llegando a un 61 %.

El resultado expuesto en la Tabla 3.11, puede ser visto gráficamente tal como fue expuesto en la primera implementación con datos reales, en la Figura 3.10. En esta oportunidad es clara la

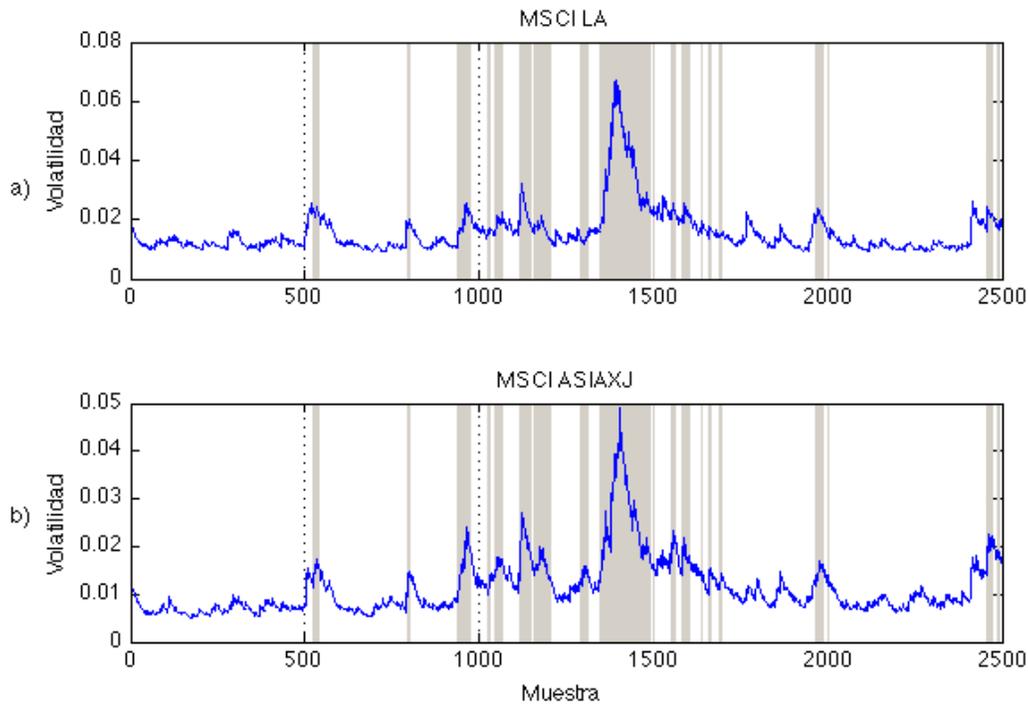


Figura 3.9: a): Niveles de volatilidad del índice Latinoamericano considerado. b): Niveles de volatilidad del índice Asiático considerado. Gris: Expone las muestras donde la entrada exógena se encuentra activa.

	Muestra completa	Señal activa
Error cuadrático medio FP	$7.8509 \cdot 10^{-6}$	$2.7833 \cdot 10^{-5}$
Error cuadrático medio FPSR	$4.5471 \cdot 10^{-6}$	$1.0887 \cdot 10^{-5}$
Ancho intervalo confianza medio FP	0.0105	0.0212
Ancho intervalo confianza medio FPSR	0.0101	0.0232

Tabla 3.11: **Diferencia del error cuadrático medio e intervalo de confianza por señal y por filtro**

ventaja del filtro en momentos de activación de la señal -en gris- por sobretodo en el valor máximo de la misma que podemos apreciar en la Figura 3.9, en muestras previas a la muestra 1500.

Finalmente se verifica el ancho del intervalo de confianza para esta implementación, en el gráfico de la Figura 3.11, donde se puede apreciar que a pesar de que el error cuadrático se ha reducido ampliamente con respecto a la implementación clásica, la ventaja del ancho del intervalo no es dramáticamente importante.

Para estas implementaciones de métodos predictivos con datos reales, se calcularon (al igual que para las series de tiempo generadas) los índices de predicción para cada muestra, las que podemos ver de forma gráfica en la Figura

Los índices promedio calculados, en base a estos indicadores para cada muestra en la primera

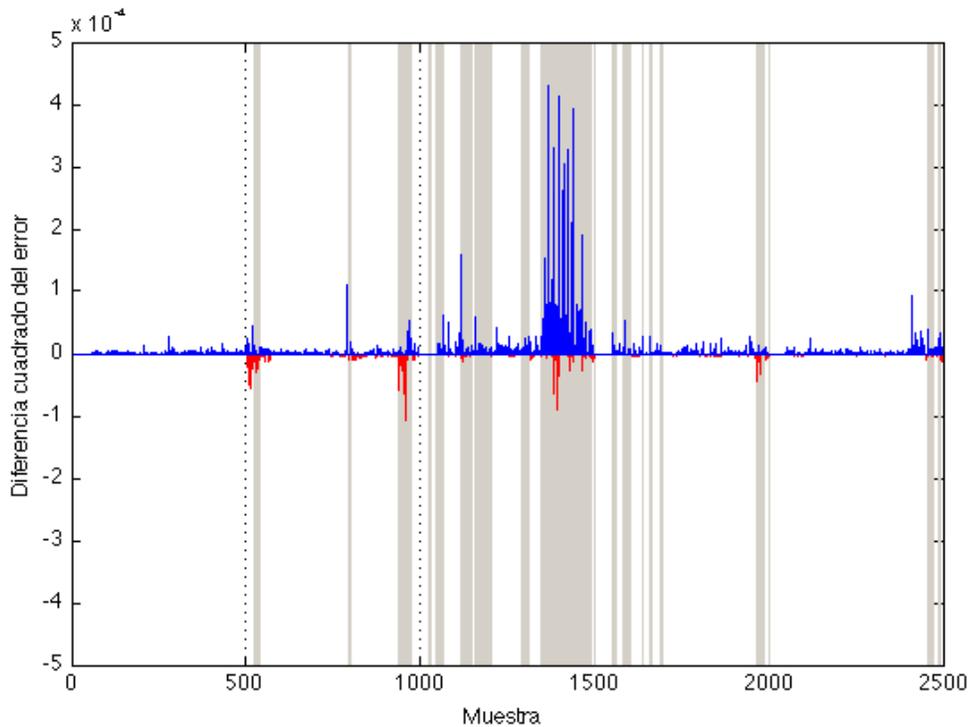


Figura 3.10: Diferencia error cuadrático de la predicción para cada muestra. Se expone el error cuadrático de predicción del filtro de partículas clasico menos el error cuadrático de predicción del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando niveles de volatilidad como entrada exógena. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario.

implementación, se detallan en la Tabla 3.12, donde además del resultado para la muestra completa, se calcula el indicador asociado a los instantes de tiempo, donde la señal de la entrada exógena se encuentra activa para facilitar la comparación en el cálculo símil para la segunda implementación.

Muestra	FP	FPSR
Muestra completa	1.1034	1.0750
Señal activa (segunda implementación)	1.0626	1.0541

Tabla 3.12: **Resultado índice de predicción para la primera implementación del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando series de tiempo reales**

Se ve en la Figura 3.13, la representación gráfica de la diferencia de los indicadores calculados. Al igual que en figuras anteriores, se realiza este ejercicio para evidenciar la dominancia de algún método, en términos del índice de predicción propuesto.

En la Tabla 3.13, se ve el resultado de los índices promedio para la segunda implementación de la sensibilidad al riesgo realizada con datos reales.

Finalmente se ve en la Figura 3.14, la representación gráfica de la diferencia de los indicadores calculados, para representar la superioridad de un método sobre otro en las distintas partes de la

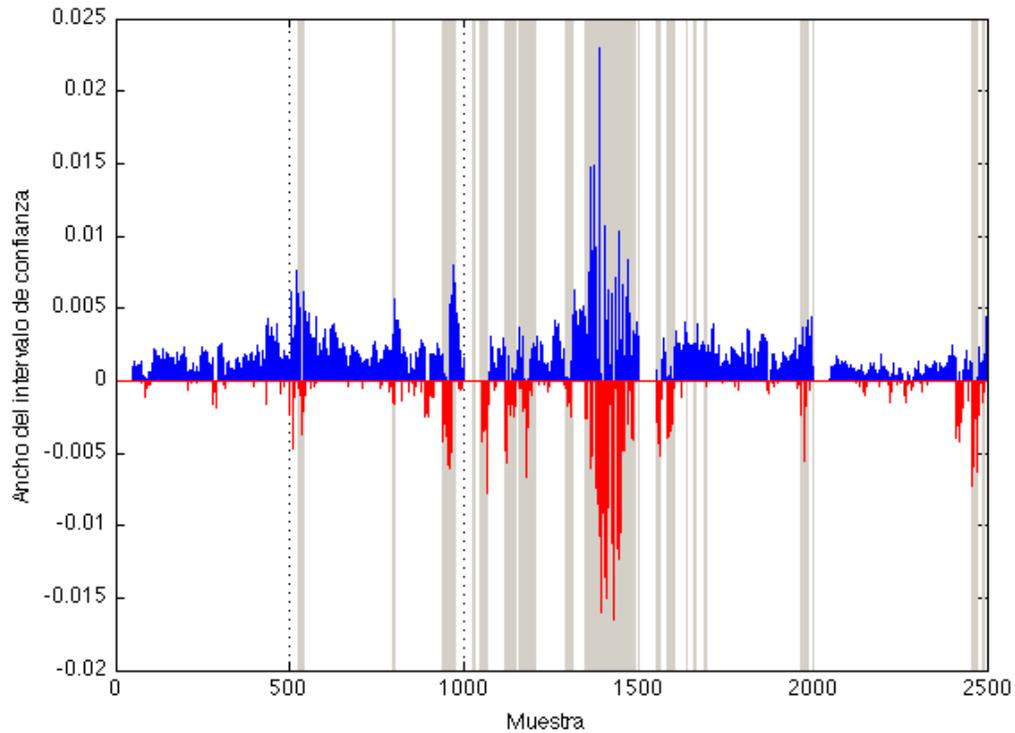


Figura 3.11: Diferencia del ancho del intervalo de confianza calculado para cada muestra. Se expone el ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas clasico menos el ancho del intervalo de confianza de la predicción del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando niveles de volatilidad como entrada exógena. En azul el FRSP es superior, en rojo el caso contrario.

Muestra	FP	FPSR
Muestra completa	1.1034	1.0536
Señal activa	1.0626	1.0039

Tabla 3.13: **Resultado índice de predicción para la segunda implementación del filtro de partículas sensible al riesgo utilizando series de tiempo reales**

serie de tiempo considerada.

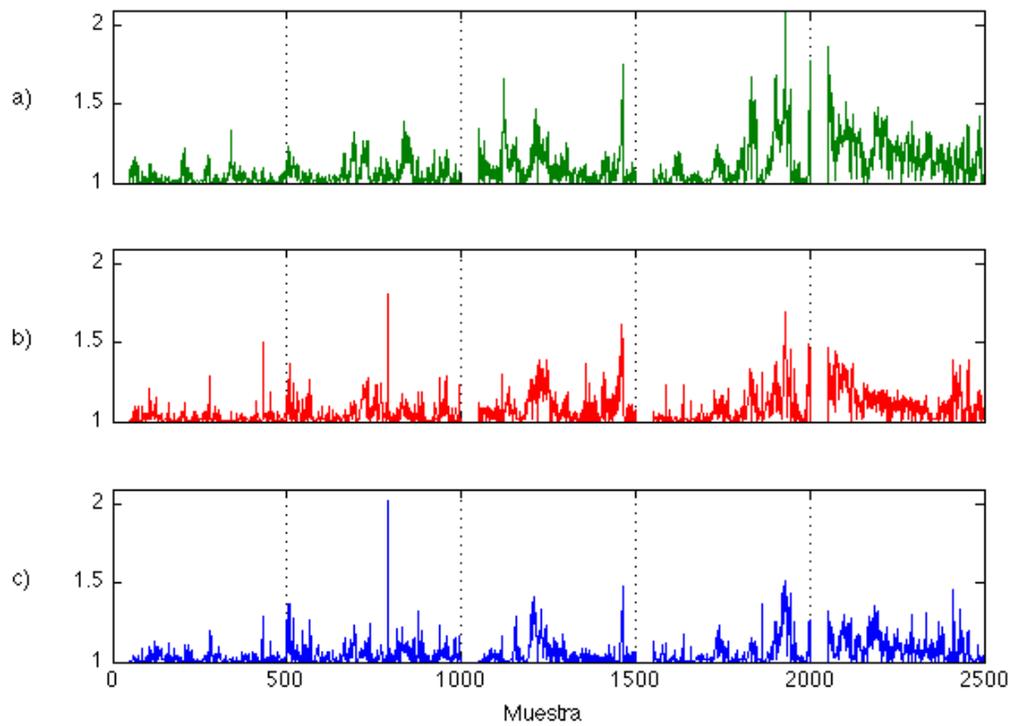


Figura 3.12: a): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas clásico utilizando series de tiempo reales. b): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas sensible al riesgo en una primera implementación utilizando series de tiempo reales. c): Índice de predicción de cada muestra para el filtro de partículas sensible al riesgo en la segunda implementación utilizando series de tiempo reales.

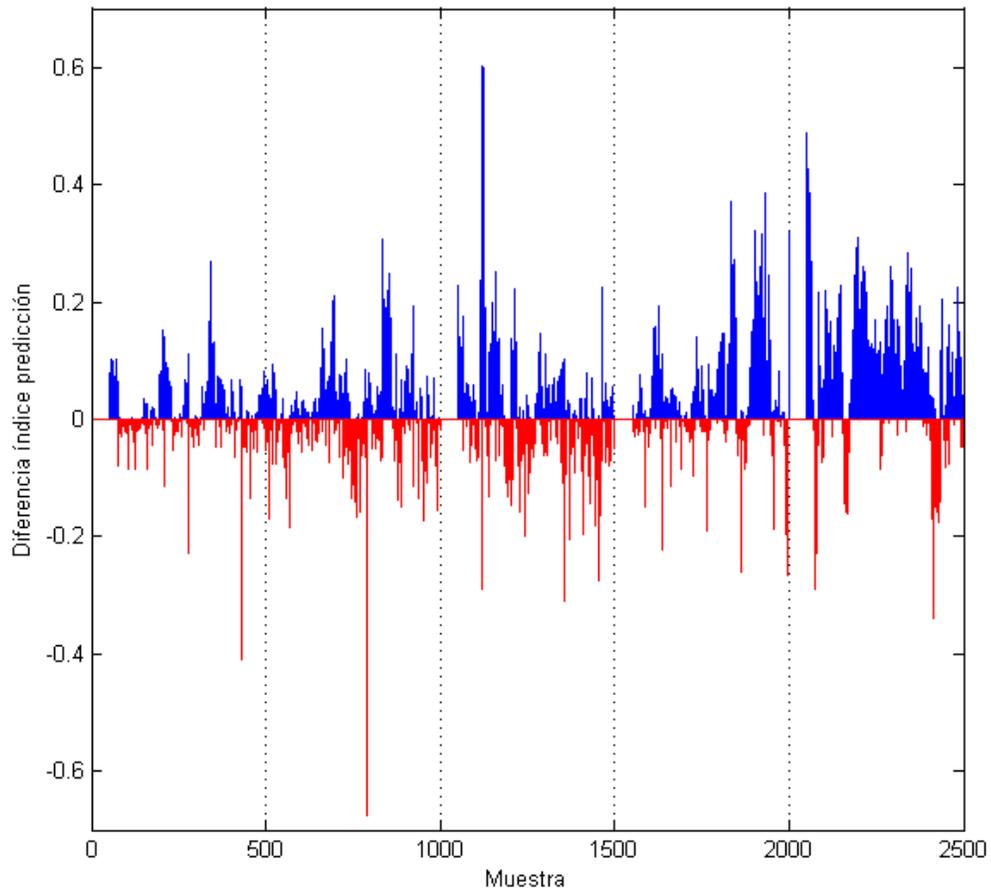


Figura 3.13: Diferencia del índice de predicción entre el filtro de partículas clásico y el filtro de partículas sensible al riesgo para la primera implementación con datos reales. Azul: El filtro de partículas sensible al riesgo es superior. Rojo: El filtro de partículas clásico es superior

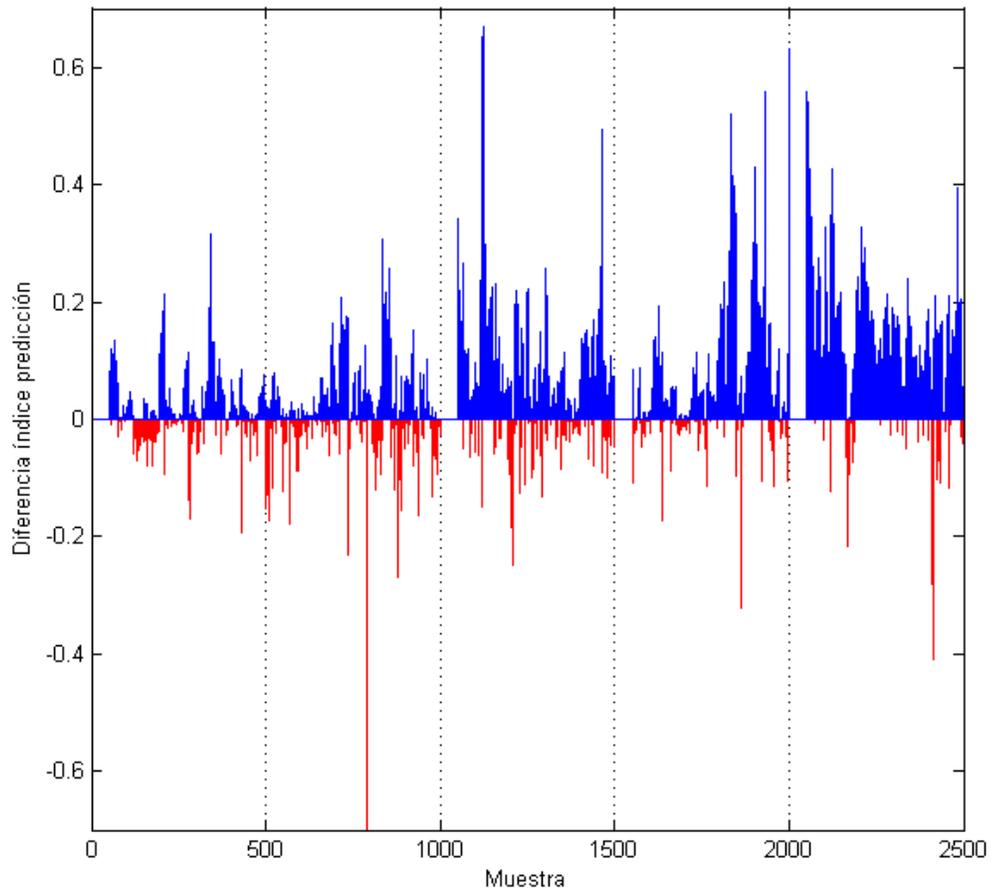


Figura 3.14: Diferencia del índice de predicción entre el filtro de partículas clásico y el filtro de partículas sensible al riesgo para la segunda implementación con datos reales. Azul: El filtro de partículas sensible al riesgo es superior. Rojo: El filtro de partículas clásico es superior

# Capítulo 4

## Discusión y conclusiones

En este trabajo de memoria se busca encontrar una metodología para mejorar las predicciones de cambios en volatilidad más utilizadas en la industria financiera, tratando de explotar dinámicas de los mercados financieros, buscando incorporar información no considerada al proceso. Para ello se compara un modelo uGARCH, implementado con filtro de partículas clásico, con una versión sensible al riesgo que incorpora una entrada externa. Para validar la metodología se consideran ensayos utilizando series de tiempo generadas artificialmente en primera instancia, y datos de un índice latinoamericano a ser predicho y un índice asiático para generar la entrada externa.

Cabe destacar, que el desempeño de un filtro de partículas sensible al riesgo es adecuado, cuando se busca incorporar una mayor diversificación en la evolución de las partículas, buscando en valores extremos de la función de densidad de probabilidad discreta, en nuestro caso, del estado, lo que determina que sea ideal para predecir cambios de estado, pero de menor desempeño en temas de filtrado. Es por esta razón, que durante el desarrollo de este trabajo no se considera hacer la comparación exhaustiva en términos de desempeño de filtraje, entre el filtro de partículas clásico y el filtro de partículas sensible al riesgo.

Cuando se utilizan series de tiempo generadas, la ventaja del filtro de partículas sensible al riesgo es bastante clara en base a los índices de precisión y exactitud; al igual que cuando se analizan directamente los errores y el intervalo de confianza, tal como lo demuestran los resultados expuestos. El principal problema de esta implementación es que, para el set de datos considerados, solo se utilizó una construcción de señal exógena bajo una tolerancia sobre el nivel de volatilidad y no sobre la diferencia, por lo que no es posible hacer un juicio sobre el impacto en la información contenida en la señal sobre el desempeño de las predicciones realizadas.

En la implementación con datos generados artificialmente, se pierde una oportunidad para analizar el impacto de la señal sobre el desempeño del método, ya que a diferencia de los datos reales, no se implementan señales sobre la variación del índice externo sino que solo con el nivel. La principal razón es que por los coeficientes elegidos, la variabilidad de la volatilidad de los datos

generados, como vemos en el gráfico inferior de la Figura 3.1, es muy alta, haciendo que en ese caso la activación de la señal suceda muchas o muy pocas veces dependiendo de la tolerancia utilizada, por lo que se desestimó el uso de este tipo de señal en la implementación con datos generados. Esto determina que al momento de analizar la forma en que actúa la señal sobre el método, se puede evidenciar que, es muy probable que el filtro en periodos de alta volatilidad, tenga un mejor desempeño al usar una tolerancia sobre el nivel, que al utilizar la variación, lo que no se corrobora con datos generados, pero si con datos reales como se ve más adelante. A pesar de esto, podemos verificar con el set de datos generados, que el uso del filtro de partículas sensible al riesgo con entrada externa mejora el resultado del filtro de partículas clásico en términos de exactitud, precisión, error cuadrático y ancho del intervalo de confianza de la predicción a un paso de los datos

Al igual que en las implementaciones con datos reales, solo se utiliza predicción a un paso, ya que se busca tener las mismas consideraciones que con el resto de los datos obtenidos en este trabajo, con el objeto de hacerlos comparables. La comparación con predicciones de mayor alcance puede ser una importante fuente de información, ya que a pesar de que el impacto de un aumento en la densidad de importancia debiese ser mantenida por el método en más de una iteración, una eventual degeneración de la muestra puede hacerla perder esa diversidad rápidamente, haciendo variar el desempeño del filtro de partículas sensible al riesgo en caso de predicciones de más largo plazo.

En una primera implementación con datos reales, se utiliza una entrada externa tipo impulso para incorporar la sensibilidad al riesgo del método, aumentando artificialmente la función de densidad de importancia, pero manteniendo de igual manera un nivel de sensibilidad al riesgo constante de nivel bajo durante todo el proceso de filtrado y predicción. Esto lleva por un lado, como las señales son puntuales, a que no se observen mejoras aparentes en la predicción en los momentos de activación de la señal, debido a que por temas de remuestreo, las no realizaciones instantáneas de aumentos de volatilidad hagan que desaparezcan las partículas que se alejan de la realización en el proceso de filtrado, y por otro lado a que el desempeño que se refleja en la muestra completa o en las submuestras sea el de un proceso de filtro de partículas sensible al riesgo, pero sin entrada externa por lo expuesto anteriormente y por la poca información adicional que la señal entrega. Recordemos que a pesar de que la correlación entre los indicadores financieros alrededor del mundo es muy grande, es imposible predecir a la perfección, con ratio de información igual a uno, los aumentos de volatilidad, sea cual sea el método, por lo que evidentemente al tener menos señales generadas por número de muestras el impacto es mucho menor en proporción.

En la Tabla 3.7 los indicadores de exactitud de la predicción reflejan para todas las muestras, que en la primera implementación hay una ventaja en ese aspecto para el filtro sensible al riesgo y los de precisión, por su parte, indican que a pesar de lo que indica la teoría, las predicciones son también más precisas. Este resultado muestra que los índices son poco representativos del

desempeño de las predicciones, ya que el indicador de precisión no es más que una normalización del ancho del intervalo de confianza al 95 % por una media móvil, por lo que no es útil para comparar desempeños entre métodos, si para comparaciones dentro de muestra, pero lo que es más importante, el indicador de exactitud es una magnitud de error ajustado por el ancho del intervalo de confianza, pudiendo entonces modificar su valor por cualquier cambio de los parámetros que lo componen. Luego es lógico pensar que es posible aumentar la exactitud medida por este indicador, manteniendo el mismo error pero aumentando el ancho del intervalo de confianza, de modo que vemos una predicción más exacta cuando en realidad tenemos una función de densidad de importancia más dispersa, que no es lo que se busca. Por lo tanto, utilizar el error cuadrático medio y el ancho del intervalo de confianza separadamente, entrega más información al respecto del desempeño de la predicción que los indicadores calculados.

Con la Tabla 3.8 se corrobora lo anterior, ya que si bien el error cuadrático medio es menor para el FPSR que para el FP en las muestras 3 y 4, para las otras, que son las que presentan mayores niveles de volatilidad, esta diferencia es críticamente revertida, alejándose del objetivo fundamental de este trabajo. Por otro lado el ancho del intervalo de confianza es mayor en cada muestra y en el global. Esto explica la ventaja del método reflejada en los indicadores, pero que no es respaldada por las métricas generales utilizadas.

En la segunda implementación se utiliza una señal de tipo binaria, que dependía directamente de los niveles de volatilidad del índice asiático con una tolerancia arbitraria, que por lo tanto se mantiene activa mucho más tiempo y por consiguiente impacta de mayor manera en el desempeño de la predicción y en la evaluación crítica de la metodología propuesta. En efecto, al igual que la primera implementación se nota en base a los indicadores de la Tabla 3.9 una mejora del FPSR en relación al FP, e incluso vemos que es levemente superior a la primera implementación, pero es necesario corroborar esta conclusión con las métricas de error e intervalo de confianza.

Al igual que con la implementación inicial, se utiliza directamente el error cuadrático medio y el promedio del ancho del intervalo de confianza al 95 % de la predicción para determinar el desempeño del FPSR. En este caso las métricas las podemos ver en la Tabla 3.10, donde se nota una clara dominancia del FPSR sobre el FP en términos de error cuadrático ya que éste es menor en cada muestra y en el global. De igual forma al comparar el resultado de la primera implementación con la segunda, se nota claramente, que en términos del error cuadrático y del ancho del intervalo de confianza, la predicción mejora de forma considerable al usar una entrada exógena binaria.

Como indica una comparación de la Figura 3.8 con la Figura 3.10, donde se grafica la diferencia del error cuadrático de la predicción del FP con el FPSR, la ventaja de la implementación sensible al riesgo es mucho mayor y mucho más notoria en la segunda implementación, en especial cerca de los valores máximos de volatilidad alrededor de la muestra 1500. Como se ve en la Tabla 3.11, la predicción con la entrada exógena activa mejora ampliamente el error cuadrático de la

predicción del método, disminuyendolo a menos de la mitad, sin aumentar de forma dramática el ancho del intervalo de confianza, esto indica que la incorporación de una señal de mejor calidad (que entregue más o mejor información) mejora el desempeño del método.

Al igual que en las pruebas con datos generados, en la implementación con datos reales solo se valida la metodología propuesta en predicción a un paso, lo que impide considerar el efecto de la inclusión de una modificación en la densidad de importancia en predicciones de mayor alcance.

Recordemos que el primer gran desafío de este trabajo es generar indicadores lo suficientemente representativos del desempeño en predicción del método, y en ese sentido los dos primeros indicadores presentados en el Capítulo 2 no cumplen los objetivos propuestos. Por un lado el indicador de exactitud es altamente dependiente del ancho del intervalo de confianza, en el sentido de que a pesar de que dos predicciones distintas tengan el mismo error en módulo se considerará más exacta a quien tenga el ancho del intervalo de confianza mayor, además el de precisión solo es una comparación entre el desempeño del filtro y de la predicción y por temas de construcción del modelo nunca presentará diferencias suficientes. Es por eso que al final de dicho Capítulo se introduce un indicador de predicción que busca incorporar la relación entre el valor más cercano a la realidad y el intervalo de confianza de la densidad posterior predicha.

En la implementación con series de tiempo generadas se ve en base a la Figura 3.5 que considerando los índices de predicción calculados, no existe mayor diferencia entre la metodología de filtro de partículas clásico y sensible al riesgo, inclusive cuando la señal de entrada exógena está activa; de hecho, para las muestras cercanas a la 300 se nota un desempeño mucho menos atractivo para el filtro sensible al riesgo. Posteriormente se explicita en la la figura 3.6 la realización de esta intuición, ya que es evidente la ventaja del filtro de partículas clásico sobre el sensible al riesgo.

Para la forma en que se construye el índice de predicción, se prefiere que éste sea pequeño, siempre y cuando este valor no sea menor que 1 (tal y como se describe en el Capítulo 2). Es así como vemos en la Tabla 3.4 que para la implementación utilizando series de tiempo generadas el indicador es favorable al filtro clásico en el caso de la muestra completa y cuando la señal se encuentra activa.

Así, los indicadores de predicción señalan una clara preferencia del filtro de partículas clásico para la implementación con series de tiempo generadas; esto se debe a que por construcción, el índice refleja que tan centrada está la realización (o su mejor estimación) de la volatilidad en el intervalo de confianza generado por el método y, prefiere además, que dicho intervalo sea pequeño en magnitud; es decir, que entre dos intervalos de confianza que tienen la mejor estimación de la volatilidad en la misma posición relativa del intervalo de confianza, quien tenga el ancho más pequeño tendrá un menor valor en el índice de predicción.

De esta forma, debido al desplazamiento hacia valores mayores del intervalo de confianza por la generación artificial de partículas en niveles superiores de volatilidad (producto de la

modificación de la densidad de importancia realizada por el filtro de partículas sensible al riesgo), el resultado del índice de predicción es peor, ya que como se ve en la Figura 3.4 el ancho del intervalo no aumenta.

Esto implica que dicha modificación en el ancho del intervalo, no genera una posición lo suficientemente ventajosa sobre la realización del estado como para mejorar el índice de predicción, lo que se explica por la importancia que tiene el coeficiente asociado solo al proceso de innovación ( $\alpha = 0.3$ ) del uGARCH utilizado para la generación de las series de tiempo utilizadas, que lleva a que el aumento artificial del estado previo cause un mayor impacto en la generación de nuevas partículas en cada iteración del método.

Por otro lado, en la implementación con indicadores financieros reales, el resultado de los índices de predicción es totalmente contrario. En primer lugar vemos en la Tabla 3.12 que en promedio, el índice es favorable para el filtro de partículas sensible al riesgo con entrada exógena y se evidencia gráficamente en la Figura 3.13 que efectivamente en la mayoría de las muestras, el índice de predicción calculado es superior en ese caso.

Esta ventaja del FPSR con entrada exógena, es aún más importante en el caso de la segunda implementación (que recordemos, utiliza una señal con mejor información que la primera implementación con datos reales), tal y como vemos en la Tabla 3.13, donde es posible apreciar que el índice de predicción promedio calculado para la muestra completa es 50% menor que utilizando el método clásico, y en las muestras donde la señal de entrada exógena se encuentra activa la diferencia es aún mayor, siendo el índice calculado 16 veces menor (recordar que el menor valor del índice es 1, por lo que esta comparación es en base a  $1 - \frac{1}{T} \sum_{t=50}^T i_t^{pred}$ ).

Al igual que en la primera implementación, la ventaja del filtro de partículas sensible al riesgo con entrada exógena es gráficamente apreciable en la Figura 3.14 que demuestra que la ventaja expuesta en la Figura 3.13 es aún más apreciable en esta implementación.

A diferencia de los ensayos realizados utilizando series de tiempo generadas, en las implementaciones con índices financieros reales se aprecia una mejora en predicción del FPSR con entrada exógena, por sobre el uso del filtro de partículas clásico. Esto refleja que la mejora en la posición relativa del valor real de la volatilidad (determinado por el GARCH (1,1)) dentro del intervalo de confianza de la predicción es lo suficientemente importante, como para superar el efecto de la modificación del mismo. Esta mejora se debe a que la modificación de la densidad de importancia es menor en la implementación con datos reales que en la con datos generados, principalmente porque el coeficiente asociado al proceso de innovación es mucho más pequeño, de hecho, para el índice MSCI LA el coeficiente asociado es  $\alpha = 0.08529$  (usando el GARCH), por lo que el impacto en el intervalo de confianza es menos que para la implementación con datos generados.

Se puede por lo tanto concluir, que la metodología propuesta de filtro de partículas sensible al

riesgo, con entrada externa, basada en modelos uGARCH, es superior a la implementación del filtro de partículas clásico, en predicción de cambios de volatilidad bajo conceptos de error cuadrático y el índice de predicción utilizado y que la calidad de la información contenida en la entrada exógena, impacta de manera profunda en el desempeño del método, medido por los indicadores utilizados en este trabajo.

## 4.1. Trabajo Futuro

La principal falencia de este trabajo son los indicadores de desempeño utilizados, ya que los inicialmente implementados no separaban claramente la eficiencia de la eficacia de la predicción, haciendo que a pesar de que dos predicciones resultasen igualmente cercanas al valor real, en la media de su distribución a priori se considerara de mejor desempeño a la que tuviera las partículas más dispersas, lo que no refleja en absoluto lo que se busca en el desarrollo de un mejor predictor de volatilidad. El indicador de predicción por su parte, debiese ser más representativo del desempeño real del método, sin embargo por construcción, sus valores máximos se encuentran cuando el valor real de la volatilidad se encuentra justo en medio del intervalo de confianza utilizado, lo que no es óptimo dada la función de densidad de probabilidad a priori del modelo. Sería importante mejorar el set de indicadores, como un aporte importante a la mejora de este trabajo.

En lo que respecta al desarrollo, se han tomado una serie de supuestos que podrían afectar el desempeño del modelo propuesto y que pueden ir siendo eliminados por medio de métodos matemáticos (o de otro tipo) que aseguren un avance hacia ajustar de mejor maneras los coeficientes necesarios para el funcionamiento del mismo. En ese sentido sería interesante abordar la forma de implementar la sensibilidad al riesgo, maximizando los índices en periodos de alta volatilidad, o que se considere un uso continuo de la señal, en vez del discreto que se utiliza en el modelo de esta memoria.

Por otro lado sería interesante abordar el desempeño del modelo en presencia de una señal externa de mejor calidad, en el sentido de que tenga una mejor razón de información y que no sea solo una variable discreta. Esto debido a que se han generado muchos estudios en torno a la correlación entre distintas clases de activos, que incluyen el uso de indicadores de crecimiento económico, valoración, sentimiento e incluso factores psicológicos que podrían ser canales de información sobre la correcta valoración de los activos y por lo tanto de la volatilidad que podrían eventualmente ser un aporte al desempeño de metodologías como la propuesta en este trabajo. Por otro lado es importante verificar si el desempeño del método efectivamente mejora consecuentemente con una mejora en la calidad de la información entregada por la señal externa.

Como se mencionó anteriormente, no es posible tal y como se llevan a cabo las implementaciones presentadas en este informe, hacer una crítica sobre el desempeño de la

metodología propuesta en predicciones mayores a un paso. Por lo tanto sería un importante aporte a este trabajo, verificar esto con datos reales y con datos generados, ya que mejoras en predicción de esa índole pueden ser muy útiles en estrategias de inversión que involucran el uso de instrumentos derivados. Recordemos que en el trabajo de Black & Scholes (1973) [3], se expone que uno de los puntos fundamentales en la valoración de este tipo de contratos es la volatilidad del activo subyacente, por lo que predicciones de mayor plazo podrían entregar una ventaja suficiente como para poder buscar posiciones de arbitraje (obtener retornos sin exposición alguna al riesgo financiero).

Finalmente se propone utilizar en una implementación real el resultado de este modelo de predicción de volatilidad, por ejemplo incluyéndolo en procesos de valoración de opciones o en el proceso de optimización y creación de portafolios de inversión. Bajo este último punto existen muchas maneras de conformar una cartera de inversión y se ha demostrado de la elección estratégica de activos aporta con alrededor de un 90% del desempeño final del portafolio, lo interesante es que a pesar de que las metodologías han evolucionado con el transcurso del tiempo (y crisis a crisis) desde la clásica optimización de media-varianza, por el modelo de Black & Litterman, y hasta el presupuesto de riesgo (*Risk Budgeting*), siempre se ha considerado que la correlación y la volatilidad de los retornos son una pieza fundamental y que impactan de manera importante en el desempeño de las estrategias de inversión.

# Bibliografía

- [1] A., Doucet: *On sequential Monte Carlo methods for Bayesian filtering*. Dept. Eng., Univ. Cambridge, 1998.
- [2] Arulampalam M., Markell S., Gordon N. y Clapp Tim: *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*. IEEE Trans. on Sign. Processing, 50(2):174–188, 2002.
- [3] Black F., y Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy, 81(3):637–654, Mayo 1973.
- [4] C., Mitchell W.: *The Economic Cycle*. Business Cycles and Unemployment National Bureau of Economic Research, páginas 5–18, 1923.
- [5] Chen R., Liu J. S. y: *Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems*. J. Amer. Statist. Assoc., 93(1032-1044), 1998.
- [6] Cochrane John, Campbell John y: *By force of habit: a consumption-based explanation of aggregate stock market behavior*. Journal of Political Economy, 107:205–251, Abril 1999.
- [7] Coope I., y Price C.: *On the Convergence of Grid-Based Methods for Unconstrained Optimization*. SIAM Journal of Optimization, 11(4):859–869, 2001.
- [8] E., Orchard Marcos: *A Particle Filtering-Based Framework for On-Line Fault Diagnosis and Failure Prognosis*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2007.
- [9] Fleming J., Kirby C. y Ostdiek B.: *The Economic Value of Volatility Timing Using 'Realized' Volatility*. Rice University, Jones Graduate School Working Paper, Diciembre 2001.
- [10] K., Clark P.: *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*. Econometrica, 41(1):135–155, 1973.
- [11] Koopman S. J., Sandmann G. y: *Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models*. Financial Markets Groups, 1996.

- [12] Lee R., Ho Y. y: *A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control*. IEEE Trans. Automat. Contr., 9(333-339), 1964.
- [13] Mandelbrot, B. Benoit: *The variation of certain speculative prices*. The Journal of Business, 36:394–419, 1963.
- [14] Mandelbrot, B. B. y Hudson, R. L.: *The (mis)behaviour of markets : a fractal view of risk, ruin and reward*. Basic Books, 2004.
- [15] Marcos E. Orchard, Liang Tang, Bhaskar Saha Kai Goebel y George Vachtsevano: *Risk-Sensitive Particle-Filtering-based Prognosis Framework for Estimation of Remaining Useful Life in Energy Storage Devices*. Studies in Informatics and Control, 19(3):209–219, Septiembre 2010.
- [16] Markowitz, Harry: *Portfolio Selection and the Efficient Frontier*. Journal of Finance, 7(1):77–91, 1952.
- [17] N., Bergman: *Recursive Bayesian estimation: Navigation and tracking applications*. Linköping Univ., 1999.
- [18] N. Gordon, D. Salmond, y A. F. M. Smith.: *Novel approach to non-linear and non-Gaussian Bayesian state estimation*. Proc. Inst. Elect. Eng., 140:107–113, 1993.
- [19] Orguner, U. y Gustafsson, F.: *Risk Sensitive Particle Filters for Mitigating Sample Impoverishment*. Signal Processing, IEEE Transactions on, 56(10):5001–5012, 2008.
- [20] Oudjane N., Musso C. y: *Progressive correction for regularized particle filters*. Proc. 3rd Int. Conf. Inform. Fusion, 2000.
- [21] P., Del Moral: *Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Probability and its Applications, 2004.
- [22] Rachev S. T., Hsu J. S. J., Bagasheva B. S. y Fabozzi F. J.: *Bayesian Methods in Finance*. Frank J. Fabozzi. Wiley, 2008.
- [23] Robert, Engle: *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the united kingdom inflation*. Econometrica, 50(4):987–327, Julio 1982.
- [24] Rudolf, Kalman: *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, 82(Serie D):35–45, 1960.
- [25] Sebastian Thrun, John Langford, y Vandi Verma: *Risk sensitive particle filters*. Journal of Basic Enge, Diciembre 2001.

- [26] Shelley, Taylor: *Modelling Financial Time Series*. John Wiley and Sons, 1986.
- [27] Shepard N., Pitt M. y: *Filtering via simulation: Auxiliary particle filters*. J. Amer. Statist. Assoc., 94(446):590–599, 1999.
- [28] Tim, Bollerslev: *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics, 31:307–327, 1986.
- [29] Tobar, Felipe: *Inferencia de la Volatilidad de Retornos Financieros Usando Filtro de Partículas*. Tesis Para Optar al Título de Magister en Ciencias de la Ingeniería Mención Eléctrica, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Santiago, Chile, Junio 2010.

# Apéndice A

## Apéndice

Código A.1: Función de densidad de probabilidad anterior

```
1 function y = custompdf(xk, xkm1, omega)
2     if nargin ~= 3
3         error();
4     end
5     if xk(1) >= omega+xkm1(3)*xkm1(1)
6         y = (1/sqrt((2*pi)*(xk(1)-omega-xkm1(3)*xkm1(1))...
7             *(xkm1(2)*xkm1(1))))*exp((omega+xkm1(3)*xkm1(1)-xk(1))...
8             /(2*xkm1(2)*xkm1(1)));
9     else
10        y = 0;
11    end
12    return;
```

## Código A.2: Función de remuestreo

```
1 function [xk, wk, idx] = remuestreo(xk, wk, tipo_remuestreo)
2     Ns = length(wk);           % numero de particulas
3     switch tipo_remuestreo
4         case 'multinomial'
5             con_reemplazo = true;
6             idx = randsample(1:Ns, Ns, con_reemplazo, wk);
7         case 'sistemático'
8             edges = min([0 cumsum(wk)'], 1);
9             edges(end) = 1;
10            u1 = rand/Ns;
11            [~, idx] = histc(u1:1/Ns:1, edges);
12        otherwise
13            error()
14    end;
15    xk = xk(:, idx);
16    wk = repmat(1/Ns, 1, Ns);   % resetea los pesos, iguales
17
18    return;
```

### Código A.3: Filtro de partículas y predicción

```

1 function [xf_k, xp_k, fp] = fpyp(sys, zk, fp, ci, tipo_remuestreo)
2
3 k = fp.k;
4     if k == 1
5         error();
6     end
7
8     Ns = fp.Ns;
9     nx = size(fp.particulas_filtro,1);
10    wkm1 = fp.pesos(:, k-1);
11    if k == 2
12        for i = 1:Ns
13            fp.particulas_filtro(:,i,1) = fp.gen_x0(ci);
14        end
15        wkm1 = repmat(1/Ns, Ns, 1);
16    end
17    xkm1 = fp.particulas_filtro(:, :, k-1);
18    xk    = zeros(size(xkm1));
19    xpk    = zeros(3,100,fp.pasos);
20    wk    = zeros(size(wkm1));
21
22    i = 1;
23    while i <= Ns
24        fp.v(:,k) = fp.gen_ruido_sys(ci);
25        xk(:,i) = sys(xkm1(:,i), fp.v(:,k), ci);
26        wk(i) = wkm1(i) * fp.p_zk_dado_xk(zk, xk(:,i), fp.n(:,k), ci);
27        if xk(1,i)>0 && xk(2,i)>0 && xk(3,i)>0 && xk(2,i)+xk(3,i)<1;
28            i = i+1;
29        end
30    end;
31
32    i = 1;
33    xp_k = zeros(nx,fp.pasos);
34    while i <= Ns
35        xpk(:,i,1) = sys(xkm1(:,i), fp.gen_ruido_sys(ci), ci);
36        if xpk(1,i,1)>0 && xpk(2,i,1)>0 && xpk(3,i,1)>0 && xpk(2,i,1)...
37            +xpk(3,i,1)<1;
38            i = i+1;
39        end

```

```

40     end;
41     for i = 1:Ns;
42         xp_k(:,1) = xp_k(:,1) + wkml(i)*xpk(:,i,1);
43     end
44     if fp.pasos > 1
45         for j=2:fp.pasos
46             i = 1;
47             while i <= Ns
48                 xpk(:,i,j) = sys(xpk(:,i,j-1), fp.gen_ruido_sys(ci),ci);
49                 if xpk(1,i,j)>0 && xpk(2,i,j)>0 && xpk(3,i,j)>0 && xpk(2,i,j)...
50                 +xpk(3,i,j)<1;
51                     i = i+1;
52                 end
53             end;
54
55             for i = 1:Ns;
56                 xp_k(:,j) = xp_k(:,j) + wkml(i)*xpk(:,i,j);
57             end
58         end
59     end
60
61     wk = wk./sum(wk);
62
63     Neff = 1/sum(wk.^2);
64     if Neff < Ns*0.7
65         [xk, wk] = remuestreo(xk, wk, tipo_remuestreo);
66         fp.remuestreos = fp.remuestreos + 1;
67     end
68     xf_k = zeros(nx,1);
69     for i = 1:Ns;
70         xf_k = xf_k + wk(i)*xk(:,i);
71     end
72
73     fp.pesos(:,k) = wk;
74     fp.particulas_filtro(:, :, k) = xk;
75     fp.particulas_prediccion(:, :, :, k) = xpk;
76
77     return;

```

#### Código A.4: Filtro de partículas y predicción sensible al riesgo

```

1 function [xf_k, xp_k, fp] = fpyp_sr(sys, zk, senal, fp, ci, tipo_remuestreo)
2
3     k = fp.k;
4     if k == 1
5         error();
6     end
7
8     Ns = fp.Ns;
9     nx = size(fp.particulas_filtro, 1);
10    wkm1 = fp.pesos(:, k-1);
11    if k == 2
12        for i = 1:Ns
13            fp.particulas_filtro(:, i, 1) = fp.gen_x0(ci);
14        end
15        wkm1 = repmat(1/Ns, Ns, 1);
16    end
17    xkm1 = fp.particulas_filtro(:, :, k-1);
18    xk = zeros(size(xkm1));
19    xpk = zeros(size(fp.particulas_prediccion(:, :, :, k-1)));
20    wk = zeros(size(wkm1));
21
22    i = 1;
23    while i <= Ns
24        fp.v(:, k) = fp.gen_ruido_sys(ci);
25        xk(:, i) = sys(xkm1(:, i), fp.v(:, k), ci, senal);
26        wk(i) = wkm1(i) * fp.p_zk_dado_xk(zk, xk(:, i), fp.n(:, k), ci) * ...
27            fp.p_xk_dado_xkm1(xk(:, i), xkm1(:, i), ci) / ...
28            fp.q_xk_dado_xkm1(xk(:, i), xkm1(:, i), ci, senal);
29        if xk(1, i) > 0 && xk(2, i) > 0 && xk(3, i) > 0 && xk(2, i) + xk(3, i) < 1;
30            i = i + 1;
31        end
32    end;
33
34    wk = wk ./ sum(wk);
35
36    Neff = 1 / sum(wk.^2);
37    if Neff < Ns * 0.7
38        [xk, wk] = remuestreo(xk, wk, tipo_remuestreo);
39        fp.remuestreos = fp.remuestreos + 1;

```

```

40     end
41     xf_k = zeros(nx,1);
42     for i = 1:Ns;
43         xf_k = xf_k + wk(i)*xk(:,i);
44     end
45
46     %prediccion inicial
47     i = 1;
48     while i <= Ns
49         xpk(:,i,1) = sys(xk(:,i), fp.gen_ruido_sys(ci),ci,senal);
50         if xpk(1,i,1)>0 && xpk(2,i,1)>0 && xpk(3,i,1)>0 && xpk(2,i,1)...
51             +xpk(3,i,1)<1;
52             i = i+1;
53         end
54     end;
55     xp_k = zeros(nx,fp.pasos);
56     for i = 1:Ns;
57         xp_k(:,1) = xp_k(:,1) + wk(i)*xpk(:,i,1);
58     end
59     % prediccion siguiente
60     if fp.pasos > 1
61         for j=2:fp.pasos
62             i = 1;
63             while i <= Ns
64                 xpk(:,i,j) = sys(xpk(:,i,j-1), fp.gen_ruido_sys(ci),ci,senal);
65                 if xpk(1,i,j)>0 && xpk(2,i,j)>0 && xpk(3,i,j)>0 && xpk(2,i,j)...
66                     +xpk(3,i,j)<1;
67                     i = i+1;
68                 end
69             end;
70         for i = 1:Ns;
71             xp_k(:,j) = xp_k(:,j) + wk(i)*xpk(:,i,j);
72         end
73     end
74 end
75
76 fp.pesos(:,k) = wk;
77 fp.particulas_filtro(:, :, k) = xk;
78 fp.particulas_prediccion(:, :, :, k) = xpk;
79

```

```
80 return ;
```

---

### Código A.5: Implementación filtro de partículas

```

1 function [filtrado , prediccion , fit , fp , ci , ic] = f_p(datos ,pasos)
2     z = mundo;
3     if size(z,1)>size(z,2)
4         z=z';
5     end
6     T = size(z,2);
7     [fit.EstSpec , fit.EstSE , fit.logL , fit.e , fit.sigma , fit.summary] =...
8         garchfit(datos(1:50));
9
10    %% Condiciones Iniciales
11    ci.omega = fit.EstSpec.K;
12    ci.mu = fit.EstSpec.C;
13    ci.sigma_alfa = 0.005;
14    ci.sigma_beta = 0.005;
15    ci.sigma_n = 1;
16    ci.alfa0 = fit.EstSpec.ARCH;
17    ci.beta0 = fit.EstSpec.GARCH;
18    ci.sigma20 = 0;
19
20    %% Ecuacion del Proceso  $x[k] = sys(x[k-1], v[k-1])$ 
21    dim.nx = 3;
22    sys = @(xkm1,vkm1,ci) [ci.omega + xkm1(2,1)*xkm1(1,1)*...
23    vkm1(1,1)^2+ xkm1(3,1)*xkm1(1,1);
24    xkm1(2,1) + vkm1(2,1);
25    xkm1(3,1) + vkm1(3,1)];
26
27    %% Ecuacion de Observacion  $z[k] = obs(x[k], n[k])$ 
28    dim.nz = 1;
29    obs = @(xk,nk,ci) ci.mu + sqrt(xk(1,1))*nk;
30
31    %% Funcion generadora de ruido del proceso
32    dim.nv = 3;
33    gen_ruido_sys = @(ci) [normrnd(0,1);
34    normrnd(0, ci.sigma_alfa);
35    normrnd(0, ci.sigma_beta)];
36
37    %% PDF del ruido de observacion y funcion generadora de ruido
38    dim.nn = 1;
39    gen_ruido_obs = @(ci) normrnd(0, ci.sigma_n);

```

```

40
41 %% PDF inicial
42 gen_x0= @(ci) [ci.omega + ci.alfa0*ci.sigma20*chi2rnd(1) +...
43 ci.beta0*ci.sigma20;
44 ci.alfa0 + normrnd(0, ci.sigma_alfa);
45 ci.beta0 + normrnd(0, ci.sigma_beta)];
46
47 %% Verosimilitud de la observacion PDF p(y[k] | x[k])
48 p_zk_dado_xk = @(zk, xk, nk, ci) normpdf(zk - obs(xk, nk, ci), ...
49 ci.mu, sqrt(xk(1,1)));
50
51 %% Simulacion del sistema
52 xf = zeros(dim.nx,T);
53 xp = zeros(dim.nx,pasos,T);
54 zh = zeros(dim.nz,T);
55 xf(:,1) = gen_x0(ci);
56 for i=1:pasos
57     xp(:,i,1) = xf(:,1);
58 end
59 n = zeros(dim.nn,T);
60 for i=1:T
61     n(:,i)=gen_ruido_obs(ci);
62 end
63
64 %% Preparacion FP
65 fp.k = 1;
66 fp.Ns = 100;
67 fp.pesos = zeros(fp.Ns, T);
68 fp.particulas_filtro = zeros(dim.nx, fp.Ns, T);
69 fp.particulas_prediccion = zeros(dim.nx, fp.Ns,pasos, T);
70 fp.pic = 0.9;
71 fp.pr = 0.8;
72 fp.gen_x0 = gen_x0;
73 fp.p_zk_dado_xk = p_zk_dado_xk;
74 fp.gen_ruido_sys = gen_ruido_sys;
75 fp.gen_ruido_obs = gen_ruido_obs;
76 fp.remuestreos = 0;
77 fp.n = n;
78 fp.v = zeros(dim.nv,T);
79 fp.pasos = pasos;

```

```

80
81     %% Estimacion de Estados
82     for k = 2:T
83         %fprintf('Iteracion = %d/%d\n',k,T);
84         fp.k = k;
85         [xf(:,k), xp(:,:,k), fp] = fpyp(sys, z(:,k), fp, ci,...
86         'multinomial');
87         zh(:,k) = obs(xf(:,k), fp.n(:,k), ci);
88     end
89
90     filtrado.sigma=sqrt(xf(1,:));
91     filtrado.alfa=xf(2,:);
92     filtrado.beta=xf(3,:);
93
94     prediccion.sigma=reshape(sqrt(xp(1,:,:)),pasos,T);
95     prediccion.alfa=reshape(sqrt(xp(2,:,:)),pasos,T);
96     prediccion.beta=reshape(sqrt(xp(3,:,:)),pasos,T);
97
98     %% Estimacion de Intervalos de Confianza e Indice Desempeno
99     ic.sigma = zeros(T,2);
100    ic.sigmap = zeros(T,2);
101    for k = 1:T
102        ic.sigma(k,:) = IC(sqrt(fp.particulas_filtro(1,:,k)'),...
103        fp.pesos(:,k),sqrt(xf(1,k)),fp.pic);
104        ic.sigmap(k,:) = IC(sqrt(fp.particulas_prediccion(1,:,1,k)'),...
105        fp.pesos(:,k),sqrt(xf(1,k)),fp.pic);
106    end
107    return

```

### Código A.6: Implementación filtro de partículas sensible al riesgo

```

1 function [filtrado ,filtrado_y , prediccion , fit , fity , fp , ci , senal , ic ]...
2 = f_p_sr(datos_predichos , datos_filtrados , pasos)
3
4     %% Preparacion de datos
5     z = datos_predichos ;
6     if size(z,1)>size(z,2)
7         z=z';
8     end
9     y = datos_filtrados ;
10    if size(y,1)>size(y,2)
11        y=y';
12    end
13    if size(y,2)<size(z,2)
14        error ();
15    end
16    T = size(z,2);
17    [ fit .EstSpec , fit .EstSE , fit .logL , fit .e , fit .sigma , fit .summary ] =...
18    garchfit (datos_predichos (1:50));
19    [ fity .EstSpec , fity .EstSE , fity .logL , fity .e , fity .sigma , fity .summary ]...
20    = garchfit (datos_filtrados (1:50));
21
22    %% SR Sensibilidad al riesgo
23    sr = 0.9;
24    dyk = zeros (T,1);
25    senal = zeros (T,1);
26
27    %% Condiciones Iniciales
28    ci.omega = fit .EstSpec.K;
29    ci.mu = fit .EstSpec.C;
30    ci.sigma_alfa = 0.005;
31    ci.sigma_beta = 0.005;
32    ci.sigma_n = 1;
33    ci.alfa0 = fit .EstSpec.ARCH;
34    ci.beta0 = fit .EstSpec.GARCH;
35    ci.sigma20 = 0;
36
37    %% Condiciones Iniciales Filtrado datos_filtrados
38    yi.omega = fity .EstSpec.K;
39    yi.mu = fity .EstSpec.C;

```

```

40 yi.sigma_alfa = 0.005;
41 yi.sigma_beta = 0.005;
42 yi.sigma_n = 1;
43 yi.alfa0 = fity.EstSpec.ARCH;
44 yi.beta0 = fity.EstSpec.GARCH;
45 yi.sigma20 = 0;
46
47 %% Ecuacion del Proceso  $x[k] = \text{sys}(x[k-1], v[k-1])$ 
48 dim.nx = 3;
49 sys = @(xkml,vkml,ci) [ci.omega + xkml(2,1)*xkml(1,1)...
50 *vkml(1,1)^2+ xkml(3,1)*xkml(1,1);
51                 xkml(2,1) + vkml(2,1);
52                 xkml(3,1) + vkml(3,1)];
53
54 %% Ecuacion de Observacion  $z[k] = \text{obs}(x[k], n[k])$ 
55 dim.nz = 1;
56 obs = @(xk,nk,ci) ci.mu + sqrt(xk(1,1))*nk;
57
58 %% Funcion generadora de ruido del proceso
59 dim.nv = 3;
60 gen_ruido_sys = @(ci) [normrnd(0,1);
61                       normrnd(0, ci.sigma_alfa);
62                       normrnd(0, ci.sigma_beta)];
63
64 %% PDF del ruido de observacion y fcn generadora de ruido
65 dim.nn = 1;
66 gen_ruido_obs = @(ci) normrnd(0, ci.sigma_n);
67
68 %% PDF inicial
69 gen_x0= @(ci) [ci.omega + ci.alfa0*ci.sigma20*chi2rnd(1)...
70 + ci.beta0*ci.sigma20;
71               ci.alfa0 + normrnd(0, ci.sigma_alfa);
72               ci.beta0 + normrnd(0, ci.sigma_beta)];
73
74 %% Verosimilitudes
75 % de la observacion
76 p_zk_dado_xk = @(zk, xk, nk, ci) normpdf(zk - obs(xk, nk, ci), ...
77 ci.mu, sqrt(xk(1,1)));
78 % de sigma 2
79 p_xk2_dado_xk2m1 = @(xk, xkml, ci) custompdf(xk,xkml,...

```

```

80     ci.omega);
81     % de alfa
82     p_ak_dado_akm1 = @(xk, xkm1, ci) normpdf(xk(2,1),...
83     xkm1(2,1), ci.sigma_alfa);
84     % de beta
85     p_bk_dado_bkm1 = @(xk, xkm1, ci) normpdf(xk(3,1),...
86     xkm1(3,1), ci.sigma_beta);
87     % total
88     p_xk_dado_xkm1 = @(xk, xkm1, ci) p_xk2_dado_xk2m1(xk,...
89     xkm1, ci);
90
91     %% Ecuacion generacion de particulas q()
92     % ecuacion densidad de importancia
93     q = @(xkm1, vkml, ci, dyk) [ci.omega + (xkm1(2,1)*xkm1(1,1)...
94     *vkml(1,1)^2+ xkm1(3,1)*xkm1(1,1))*(1+ floor(rand/sr)*dyk);
95     xkm1(2,1) + vkml(2,1);
96     xkm1(3,1) + vkml(3,1)];
97     % funcion generadora de ruido
98     gen_ruido_q = @(ci) [normrnd(0,1);
99     normrnd(0, ci.sigma_alfa);
100    normrnd(0, ci.sigma_beta)];
101    % verosimilitud de sigma2
102    q_xk2_dado_xk2m1 = @(xk, xkm1, ci, dyk) sr*custompdf(xk,...
103    xkm1, ci.omega) + (1 sr)*custompdf(xk([1+dyk,0,0;0,1,0;0,0,1]*...
104    xkm1), ci.omega);
105    % verosimilitud de alfa
106    q_ak_dado_akm1 = @(xk, xkm1, ci) normpdf(xk(2,1),xkm1(2,1),...
107    ci.sigma_alfa);
108    % verosimilitud de beta
109    q_bk_dado_bkm1 = @(xk, xkm1, ci) normpdf(xk(3,1),xkm1(3,1),...
110    ci.sigma_beta);
111    % total
112    q_xk_dado_xkm1 = @(xk, xkm1, ci, dyk) q_xk2_dado_xk2m1(xk,...
113    xkm1, ci, dyk);
114
115    %% Simulacion del sistema
116    xf = zeros(dim.nx,T);
117    yf = zeros(dim.nx,T);
118    xp = zeros(dim.nx, pasos, T);
119    zh = zeros(dim.nz, T);

```

```

120     xf(:,1) = gen_x0(ci);
121     yf(:,1) = gen_x0(yi);
122     for i=1:pasos
123         xp(:,i,1) = xf(:,1);
124     end
125     n = zeros(dim.nn,T);
126     ny = zeros(dim.nn,T);
127     for i=1:T
128         n(:,i)=gen_ruido_obs(ci);
129         ny(:,i)=gen_ruido_obs(yi);
130     end
131
132     %% Preparacion FP Predicho
133     fp.k = 1;
134     fp.Ns = 100;
135     fp.pesos = zeros(fp.Ns, T);
136     fp.particulas_filtro = zeros(dim.nx, fp.Ns, T);
137     fp.particulas_prediccion = zeros(dim.nx, fp.Ns, pasos, T);
138     fp.pic = 0.9;
139     fp.pr = 0.8;
140     fp.gen_x0 = gen_x0;
141     fp.p_zk_dado_xk = p_zk_dado_xk;
142     fp.p_xk_dado_xkml = p_xk_dado_xkml;
143     fp.q_xk_dado_xkml = q_xk_dado_xkml;
144     fp.gen_ruido_sys = gen_ruido_sys;
145     fp.gen_ruido_obs = gen_ruido_obs;
146     fp.gen_ruido_q = gen_ruido_q;
147     fp.remuestreos = 0;
148     fp.n = n;
149     fp.v = zeros(dim.nv,T);
150     fp.pasos = pasos;
151
152     %% Preparacion FP Filtrado
153     fpy.k = 1;
154     fpy.Ns = 100;
155     fpy.pesos = zeros(fp.Ns, T);
156     fpy.particulas_filtro = zeros(dim.nx, fp.Ns, T);
157     fpy.pic = 0.9;
158     fpy.pr = 0.8;
159     fpy.gen_x0 = gen_x0;

```

```

160     fpy.p_zk_dado_xk           = p_zk_dado_xk;
161     fpy.gen_ruido_sys         = gen_ruido_sys;
162     fpy.gen_ruido_obs        = gen_ruido_obs;
163     fpy.remuestreos          = 0;
164     fpy.n                     = ny;
165     fpy.v                     = zeros(dim.nv,T);
166
167     %% Estimacion de Estados
168     for k = 2:T
169         fp.k = k;
170         fpy.k = k;
171         [yf(:,k), fpy] = filtroparticulas(sys, y(:,k), fpy, yi, ...
172             'sistemico');
173         senal(k) = yf(1,k)>=0.0121;
174         [xf(:,k), xp(:,:,k), fp] = fpy_p_sr(q, z(:,k), 0 + senal(k), ...
175             fp, ci, 'sistemico');
176         zh(:,k) = obs(xf(:,k), fp.n(:,k), ci);
177     end
178
179     %% Extrayendo las predicciones.
180     filtrado_y.sigma=sqrt(yf(1,:));
181     filtrado_y.alfa=yf(2,:);
182     filtrado_y.beta=yf(3,:);
183
184     filtrado.sigma=sqrt(xf(1,:));
185     filtrado.alfa=xf(2,:);
186     filtrado.beta=xf(3,:);
187
188     prediccion.sigma=reshape(sqrt(xp(1,:,:)),pasos,T);
189     prediccion.alfa=reshape(sqrt(xp(2,:,:)),pasos,T);
190     prediccion.beta=reshape(sqrt(xp(3,:,:)),pasos,T);
191
192     %% Estimacion de Intervalos de Confianza Para Indice Desempeno
193     ic.sigma = zeros(T,2);
194     ic.sigmap = zeros(T,2);
195     for k = 2:T
196         ic.sigma(k,:) = IC(sqrt(fp.particulas_filtro(1, :, k) '), ...
197             fp.pesos(:,k), sqrt(xf(1,k)), fp.pic);
198         ic.sigmap(k,:) = IC(sqrt(fp.particulas_prediccion(1, :, 1, k-1) '), ...
199             fp.pesos(:,k), sqrt(xf(1,k)), fp.pic);

```

```
200     end
201 return
```