



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y BIOTECNOLOGÍA

ESTUDIOS REOFÍSICOS DE RELAVES CHILENOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL QUÍMICA E INGENIERA CIVIL EN BIOTECNOLOGÍA

CLAUDIA VIDAL PERALTA

PROFESOR GUÍA

SR. FRANCISCO GRACIA CAROCA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN

SR. CARLOS CONCA ROSENDE

SR. RAMÓN FUENTES AGUILAR

SANTIAGO DE CHILE

JUNIO 2013

Resumen Ejecutivo

El manejo de relaves en Chile presenta problemas especiales y a veces únicos a nivel mundial. Es de obvio interés investigar la aplicabilidad de los análisis reofísicos a los relaves chilenos, ya que la posibilidad de encontrar interpretaciones justas, permite aclarar la Reología de estas suspensiones, básicas para la minería chilena.

El presente trabajo de título es un estudio teórico dividido en dos secciones, enmarcado en Reología aplicada a relaves chilenos.

La primera parte está dirigida al estudio de las interacciones intermoleculares predominantes dentro de un relave chileno.

Coussot y Ancey (1999) desarrollaron un diagrama conceptual simplificado donde se detallan las interacciones predominantes en suspensiones concentradas cizalladas. El análisis de los números adimensionales de dicho diagrama, permite concluir que las interacciones predominantes en los relaves chilenos son de tipo friccional.

En la segunda parte de esta memoria se estudia el comportamiento del modelo reológico propuesto por Larenas (2010). Este modelo se implementa computacionalmente, haciendo uso de la solución explícita de la ecuación constitutiva encontrada por Larenas para el método Vane. Se estudian los valores de los parámetros y variables adimensionales del modelo para un rango de concentraciones de sólido, además del comportamiento tixotrópico de los relaves mediante el test 3-ITT (3 Interval Thixotropy Test).

La calidad del ajuste entre el modelo fenomenológico para el método Vane y las mediciones en los dos primeros intervalos del test resulta satisfactoria.

El análisis del parámetro de estructura, el cual cuantifica el grado de estructuración del sistema y la evolución temporal del sistema, arroja que éste disminuye linealmente con la concentración de sólidos en los dos primeros intervalos.

En el tramo C no se obtiene un ajuste satisfactorio del modelo y tampoco se aprecia una disminución lineal en el coeficiente de estructura.

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi familia y amigos, cada uno de los cuales ha sido fundamental para alcanzar este punto de mi vida en completa plenitud.

Agradezco a mis profesores, don Francisco Gracia y don Carlos Conca, por su apoyo y dedicación, pero especialmente quiero agradecer a don Ramón Fuentes, de quien no sólo recibí conocimientos e inspiración, sino también mucho cariño y comprensión.

Agradezco a mi querida Escuela de Ingeniería, lugar donde pasé los mejores años de mi vida. Conocí grandes amigos, compañeros y profesores.

Anita María, Pao y mami, gracias por su apoyo incondicional.

Benjita, has sido un regalo de Dios. Te amo por siempre.

Marco, tú sabes que no alcanzarían las palabras para expresar lo que siento por ti. Toda mi gratitud hacia ti, eres la luz de mi vida. Te amo.

Y a ti, mi amado Dios, has sido bueno conmigo. Sin ti, nada sería posible.

Tabla de contenido

Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Reología de relaves.....	4
1.3 Motivación.....	6
1.4 Objetivos.....	7
1.4.1 Objetivo general.....	7
1.4.2 Objetivos específicos.....	7
Capítulo 2: Enfoques reológicos.....	9
2.1 Postulados generales.....	9
2.1.1 Hipótesis del continuo.....	9
2.1.2 Continuo particulado.....	9
2.1.3 Ecuaciones constitutivas.....	10
2.1.4 Principios de la teoría de los materiales.....	11
2.1.5 Ecuaciones reológicas.....	12
2.1.5.1 Ecuaciones reológicas para fluidos simples.....	12
2.1.6 Modelos reológicos.....	15
2.1.6.1 Modelos simples – Versión unidimensional.....	16
2.1.6.1.1 Modelo newtoniano.....	17
2.1.6.1.2 Modelo plástico ideal o de Bingham.....	17
2.1.6.1.3 Modelo de Casson.....	21
2.1.6.1.4 Modelo de Herschel y Bulkley.....	22
2.1.6.2 Modelos simples – Versión generalizada.....	24
2.1.6.2.1 Modelo newtoniano.....	24
2.1.6.2.2 Modelo plástico ideal o de Bingham.....	24
2.1.6.2.3 Modelo de Herschel y Bulkley.....	25
2.1.7 Caracterización de las partículas.....	25
2.1.8 Parámetros que afectan la reología.....	26
2.1.9 Concentración de empaquetamiento.....	27
2.1.9.1 Empaquetamiento de esferas idénticas.....	27

2.1.9.2	Empaquetamiento con distribución granulométrica extendida.....	28
2.1.9.3	Algunos ejemplos de laboratorio.....	29
2.1.9.4	Empaquetamiento de sedimentos naturales.....	30
2.1.9.5	Empaquetamiento según la velocidad de deformación angular.....	31
2.1.9.6	Variación de la concentración debido a efectos fisicoquímicos.....	33
2.1.9.7	Otros aspectos.....	33
Capítulo 3: Diagramas reofísicos.....		35
Capítulo 4: Posicionamiento reofísico de los relaves chilenos.....		47
4.1	Consideraciones reológicas.....	47
4.2	Estudio de interacciones moleculares en suspensiones que fluyen.....	48
4.2.1	Interacciones sin contactos	48
4.2.2	Interacciones con contactos.....	51
4.2.2.1	Régimen friccional.....	53
4.2.3	Número de Stokes.....	54
4.3	Estudio de interacciones moleculares predominantes en relaves chilenos.....	55
4.3.1	Análisis de números adimensionales.....	56
4.3.2	Análisis del número de Stokes.....	56
4.3.3	Discusión de los resultados.....	56
4.4	Estudio de fuerzas gravitatorias.....	58
4.4.1	Fuerzas gravitatorias y brownianas.....	58
4.4.1.1	Discusión de los resultados.....	61
4.4.2	Fuerzas gravitatorias y de Van der Waals.....	62
4.4.2.1	Discusión de los resultados.....	65
Capítulo 5: Dependencia temporal de las propiedades reológicas.....		66
5.1	Tixotropía.....	66
5.2	Modelo estructural.....	68
5.3	Parámetro de estructura.....	69
5.3.1	Modelamiento del parámetro de estructura.....	70

5.4	Concepto de viscoelasticidad.....	71
5.4.1	Cuerpo elástico cizallado	71
5.4.2	Cuerpo viscoso cizallado.....	72
5.4.3	Cuerpo viscoelástico de Maxwell.....	73
5.4.3.1	Caso particular: Proceso a velocidad de deformación angular constante.....	74
5.5	Tensión de fluencia y Tixotropía.....	75
5.6	Tiempos de referencia.....	76
5.7	Método Vane.....	77
5.8	Modelo fenomenológico del ensayo Vane.....	80
5.8.1	Análisis de la máxima tensión tangencial.....	81
5.8.2	Estudio de la velocidad de deformación angular.....	83
5.8.2.1	Estimación del parámetro τ^*	86
5.8.2.1.1	Discusión de los resultados.....	86
5.8.3	Metodología para estimación de parámetros.....	87
5.8.3.1	Optimización de los parámetros α y β	87
5.8.3.2	Parámetro estructural.....	88
5.8.4	Análisis del comportamiento tixotrópico.....	88
5.8.4.1	Aplicación del modelo de Larenas a relaves mineros chilenos.....	91
5.8.4.1.1	Discusión de los resultados.....	102
5.8.4.2	Parámetros reológicos: viscosidad y tensión de fluencia.....	105
Capítulo 6: Conclusiones.....		106
Capítulo 7: Anexos.....		108
7.1	Tablas de Visser (1989).....	108
7.2	Modelos para viscosidad y tensión de fluencia	110
7.2.1	Modelo de Krieger y Dougherty (1959).....	110
7.2.2	Modelo de Heymann et al. (2002).....	110
7.3	Estudio del radio de la partícula y de la velocidad de deformación angular en el límite de los diferentes regímenes.....	111
7.3.1	Límite entre movimiento browniano e interacciones coloidales.....	111

7.3.2 Límite entre movimiento browniano y efectos hidrodinámicos.....	113
7.3.3 Límite entre interacciones coloidales y efectos hidrodinámicos.....	113
7.3.4 Límite entre efectos friccionales y lubricantes.....	115
7.3.5 Límite entre efectos lubricantes y colisionales.....	116
7.3.6 Resumen de los valores críticos en los límites de los diferentes regímenes.....	117
Capítulo 8: Referencias.....	119

Índice de ilustraciones

Figura 1.1: Producción de relaves espesados y pastas (Fuentes, 2012).....	2
Figura 1.2: Tensión de fluencia para distintos relaves mineros (Boger, 2006).....	6
Figura 2.1: Continuo particulado (Innova-JRI, 2010).....	10
Figura 2.2: Fluido newtoniano o pseudo newtoniano (Innova-JRI, 2010).....	18
Figura 2.3: Plástico de Bingham (Innova-JRI, 2010).....	19
Figura 2.4: Plástico de Bingham - ¿Tensión de fluencia? (Innova-JRI, 2010).....	20
Figura 2.5: Caso límite Plástico de Bingham (Innova-JRI, 2010).....	21
Figura 2.6: Modelo de Herschel y Bulkley (Innova-JRI, 2010).....	23
Figura 2.7: Esferas inscritas en una malla de hexaedros regulares (Slichter, 1899).....	28
Figura 2.8: Esquema de llenado de poros grandes por partículas pequeñas (Innova-JRI, 2010).....	29
Figura 2.9: Concentraciones máximas de empaquetamiento (Innova-JRI, 2010).....	32
Figura 3.1: Diagrama que clasifica escurrimientos en términos del tamaño de las partículas y su concentración (Gani, 2004).....	35
Figura 3.2: Diagrama de clasificación de escurrimientos en términos de los números de Froude y de Reynolds (Gani, 2004).....	36
Figura 3.3: Clasificación conceptual de caudales hiperconcentrados (Coussot, 1992).....	37
Figura 3.4: Flujos característicos y clasificación de flujos de debris (Schatzmann, 2005)	38
Figura 3.5: Viscosidad reducida v/s velocidades de deformación angular reducida (Jomha, 1991).....	39
Figura 3.6: Zona hidrodinámica del diagrama para fluidos en pasta (Roco, 1988).....	40
Figura 3.7: Efectos microreológicos. Tamaño de partícula v/s contenido de sólidos (Klein, 2002).....	41
Figura 3.8: Clasificación conceptual de los regímenes reológicos de una suspensión como una función de su velocidad de deformación angular y la fracción de sólido en escala logarítmica (Coussot and Ancey, 1999).....	43
Figura 4.1: Tendencia de la velocidad de deformación angular al aumentar el diámetro de las partículas (límite browniano/hidrodinámico).....	50
Figura 4.2: Tendencia de la velocidad de deformación angular al aumentar el diámetro de las partículas (límite coloidal/hidrodinámico).....	51
Figura 4.3: Planos que cumplen $Le \ll 1$ y $LeBa \ll 1$ (régimen friccional).....	53
Figura 4.4: Radio de las partículas que a una velocidad de deformación angular dada se mantienen en régimen friccional	54

Figura 4.5: Posicionamiento de los relaves chilenos en el diagrama de Coussot y Ancey (1999).....	58
Figura 4.6: Trayectoria irregular que sigue una partícula browniana (adaptada de la WEB).....	59
Figura 4.7: Comparación de los desplazamientos debido a la sedimentación y al movimiento browniano.....	61
Figura 4.8: Influencia de superficies rugosas y factores geométricos en la interacción de partículas comparado con un sistema idealizado. (a), (b): superficie rugosa limitando la aproximación entre partículas; (c), (d): estructuras superficiales que promueven contactos cercanos; (e): dos partículas idealizadas de radio R , una separación de distancia h y un área de contacto de diámetro $2r$ (Visser, 1989).....	63
Figura 4.9: Geometría de una partícula idealizada.....	64
Figura 5.1: Ilustración de la Tixotropía, referida a un sistema viscoelástico (adaptada de Barnes, 1995).....	68
Figura 5.2: Conceptualización del parámetro de estructura (Larenas, 2010).....	70
Figura 5.3: Deformación producida por la diferencia de las tensiones tangenciales aplicadas (Fuentes, 2012).....	72
Figura 5.4: Deformación producida por la diferencia de velocidades (Fuentes, 2012).....	73
Figura 5.5: Comportamiento de un material viscoelástico.....	75
Figura 5.6: Ilustración del dispositivo Vane y técnica para medir la tensión de fluencia de una muestra (Boger, 2006).....	77
Figura 5.7: Curva de respuesta típica torque v/s tiempo observada con el método Vane (Nguyen y Boger, 1983).....	78
Figura 5.8: Representación del modelo reofísico de Larenas (2010).....	80
Figura 5.9: Campo de flujo.....	83
Figura 5.10: Perfil de la velocidad angular local $\omega(R)$ y croquis del sistema (Fuentes, 2012).....	84
Figura 5.11: Variación del esfuerzo en el tiempo para un material en pasta con comportamiento tixotrópico, sometido a cambios escalonados de velocidad de deformación angular (Coussot, 2005).....	89
Figura 5.12: Curva de ajuste para una concentración del 64% (A).....	93
Figura 5.13: Curva de ajuste para una concentración del 64% (B).....	93
Figura 5.14: Curva de ajuste para una concentración del 64% (C).....	94
Figura 5.15: Curva de ajuste para una concentración del 66% (A).....	95
Figura 5.16: Curva de ajuste para una concentración del 66% (B).....	95
Figura 5.17: Curva de ajuste para una concentración del 66% (C).....	96

Figura 5.18: Curva de ajuste para una concentración del 68% (A).....	97
Figura 5.19: Curva de ajuste para una concentración del 68% (B).....	97
Figura 5.20: Curva de ajuste para una concentración del 68% (C).....	98
Figura 5.21: Curva de ajuste para una concentración del 70% (A).....	99
Figura 5.22: Curva de ajuste para una concentración del 70% (B).....	99
Figura 5.23: Curva de ajuste para una concentración del 70% (C).....	100
Figura 5.24: Curva de ajuste para una concentración del 72% (A).....	101
Figura 5.25: Curva de ajuste para una concentración del 72% (B).....	101
Figura 5.26: Curva de ajuste para una concentración del 72% (C).....	102
Figura 5.27: Parámetro estructural para un rango de concentraciones de sólido en el intervalo A.....	104
Figura 5.28: Parámetro estructural para un rango de concentraciones de sólido en el intervalo B.....	104
Figura 7.1: Tabla de coeficientes de Lifschitz – Van der Waals (1989).....	108
Figura 7.2: Distancia entre partículas utilizada por Visser (1989).....	109

Índice de tablas

Tabla 1: Distribución de agua a nivel mundial.....	3
Tabla 2: Velocidad y tiempo de sedimentación para partículas de distinto diámetro.....	5
Tabla 3: Diámetro característico y densidad de sólidos de los relaves chilenos (Innova-JRI, 2010).....	26
Tabla 4: Parámetros ajustados con el modelo de Krieger	30
Tabla 5: Parámetros ajustados con el modelo de Maron & Pierce (Innova-JRI, 2010)....	30
Tabla 6: Porosidad de sedimentos naturales.....	31
Tabla 7: Empaquetamiento máximo ajustado a fórmulas consideradas por Park et al. (1991) (Innova-JRI, 2010).....	33
Tabla 8: Empaquetamiento de esferas en varias dimensiones	34
Tabla 9: Número de Stokes para los relaves chilenos.....	56
Tabla 10: Radios de partícula para los cuales el peso iguala a las fuerzas de Van der Waals.....	65
Tabla 11: Estimación del parámetro τ^* por medio del método de Newton-Raphson.....	86
Tabla 12: Propiedades físicas del relave analizado.....	91
Tabla 13: Estimación de parámetros.....	92
Tabla 14: Parámetros de ajuste para los modelos de Heymann et al.(2002) y Krieger y Dougherty (1959).....	105
Tabla 15: Viscosidad (K y D), tensión de fluencia (H et al.) y tensión de fluencia experimental.....	105
Tabla 16: Diámetro de partícula para el límite browniano/coloidal.....	112
Tabla 17: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular para el límite browniano/hidrodinámico.....	113
Tabla 18: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular para el límite coloidal/hidrodinámico.....	115
Tabla 19: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite friccional/lubricante.....	116
Tabla 20: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite lubricante/colisional.....	117
Tabla 21: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite de los distintos regímenes para cementos y relaves.....	118

Capítulo 1: Introducción

1.1 Generalidades

El manejo de los relaves chilenos presenta problemas especiales y a veces únicos a nivel mundial. Estos aspectos son actualmente primordiales dado el mercado del cobre; y las expansiones y modificaciones de las plantas extractivas.

La producción de relaves chilenos es de un orden de magnitud superior a cualquiera otra en el planeta y su escala de manejo es un problema especial.

Este aspecto se detalla en la Figura 1.1. Los datos originales provienen de Williams *et al.* (2008).

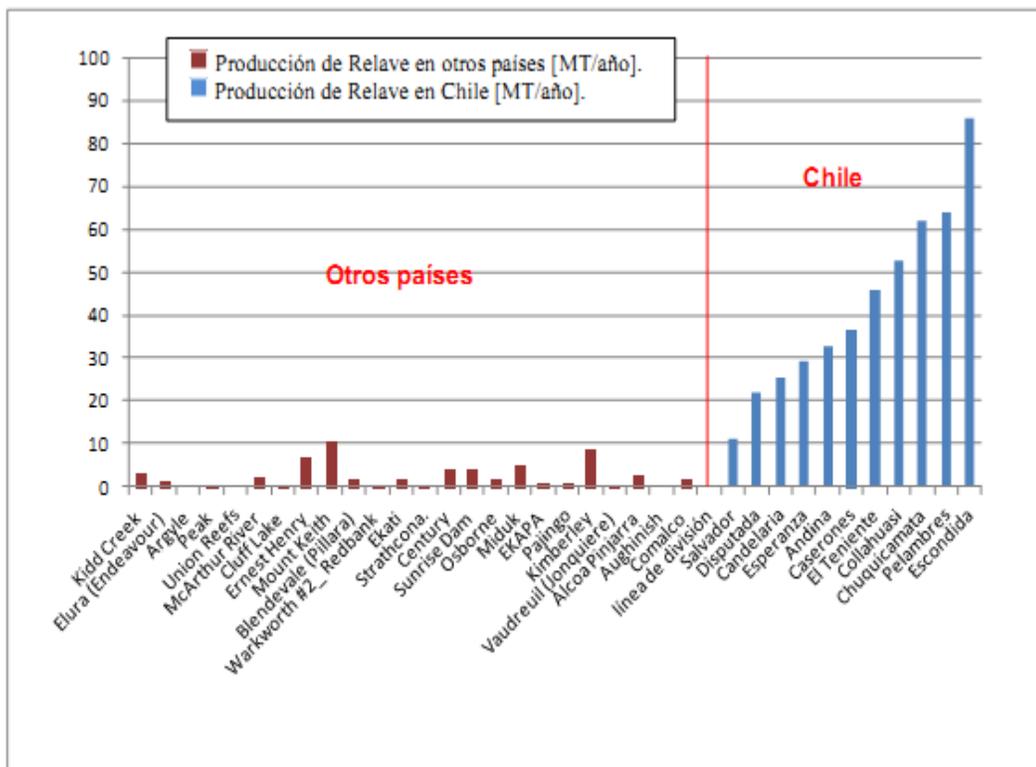


Figura 1.1: Producción de relaves espesados y pastas (Fuentes, 2012)

Por otra parte, a nivel mundial el agua se está convirtiendo en un bien de una escasez apremiante. Esto no es extraño si se miran las cifras disponibles.

La Tabla 1 muestra la distribución del agua en la Tierra (adaptado de Nanía y Gómez Valentín, 2004).

Tabla 1: Distribución de agua a nivel mundial				
	Agua Salada [Km ³]	Agua Dulce [Km ³]	Agua Salada [%]	Agua Dulce [%]
Océanos	1.338.000.000		96,5000	
Agua subterránea dulce		10.530.000		0,7600
Agua subterránea salada	12.870.000		0,9290	
Humedad del suelo		16.500		0,0000
Hielo polar		24.023.500		1,7300
Hielo no polar y nieve		340.600		0,0000
Lagos dulces		91.000		0,0000
Lagos salinos	85.400		0,0062	
Embalses		11.470		0,0000
Ríos		2.120		0,0000
Agua biológica		1.120		0,0000
Agua atmosférica		12.900		0,0000
Agua Salada Total	1.350.955.400		97,5000	
Agua Dulce Total		35.029.210		2,5300
Agua Total	1.385.984.610			

Efectivamente, el agua salada (marina o no) es muy abundante (97,5 % del total), pero el agua dulce es sólo una pequeña fracción: 2,53 %.

Esta cifra es inquietante, pero lo es más el advertir que el agua de los ríos, la cual ha sido la fuente natural para los seres humanos, es solamente 2 millonésimos del agua dulce total.

En el caso de Chile, en que una parte significativa del país es desértico, estas cifras son de un efecto mayor que en otros países cercanos y, para la Minería, resultan especialmente graves.

Examinando la Tabla 1 sólo caben tres medidas:

- Economizar agua.
- Buscar fuentes nuevas.
- Emplear agua de mar.

La estrategia más directa para economizar el agua es aumentar la concentración de los relaves. Pero este punto no es trivial, ya que el tratamiento de relaves espesados o llevados a pastas presenta varios problemas que están asociados fundamentalmente a su Reología.

1.2 Reología de relaves

La Reología de relaves cae dentro del marco más amplio de la *Reología* y de la *Dinámica de Suspensiones*.

Éste es un tema de investigación prioritario desde el punto de vista científico (Lumley *et al.*, 1996).

Una división crucial para el estudio teórico y experimental de la Mecánica de suspensiones es la *decantación o sedimentación de las partículas*.

Para fijar ideas:

- Se estudia la sedimentación uniforme de una partícula esférica, de cuarzo, cayendo en agua limpia a $20 [^{\circ}\text{C}]$, lejos de las paredes.
- Si la partícula tiene un diámetro de $1 [\mu\text{m}]$ o menos, no decanta jamás, debido a que fuerzas provenientes del movimiento browniano (fuerzas de Langevin) (Belorizky y Gorecki, 1992) son iguales o mayores al peso de la esfera.

Tabla 2: Velocidad y tiempo de sedimentación para partículas de distinto diámetro		
Diámetro de Partículas [μm]	Velocidad de Sedimentación [mm/s]	Tiempo para caer 10 [cm] [s]
10	0,1	1070 (18[min])
100	8	13
300	43	2

El punto es el siguiente:

La mayor parte de los estudios sobre relaves corresponden a relaves australianos y sudafricanos que, en su mayoría son muy finos y entonces no decantan.

En cambio, los relaves chilenos tienen un D_{50} que se encuentra entre 50 y 100 [μm], entonces decantan rápidamente y sobre ellos, a nivel mundial, se conoce poco.

Esto implica que es necesario estudiar los relaves chilenos en forma especial ya que su dinámica y en particular su Reología son drásticamente distintas a la de los relaves finos.

La Figura 1.2 muestra un ejemplo de la tensión de fluencia de varios relaves (Boger, 2006).

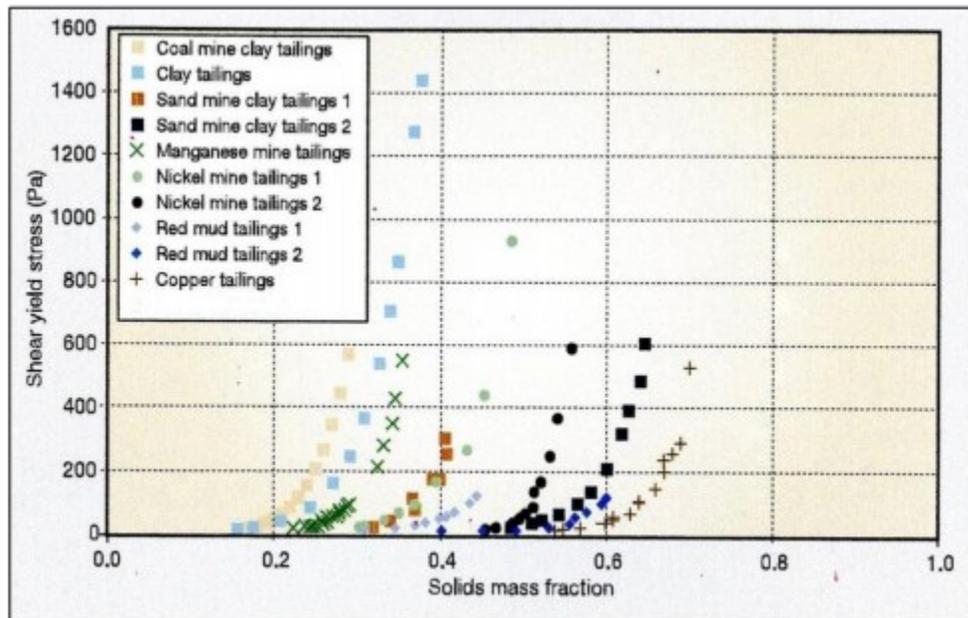


Figura 1.2: Tensión de fluencia para distintos relaves mineros (Boger, 2006)

1.3 Motivación

Los relaves en general y los chilenos en particular son suspensiones heterogéneas de partículas irregulares y de granulometría extendida.

Es de obvio interés investigar la aplicabilidad de los análisis reofísicos a los relaves chilenos, ya que la posibilidad de encontrar interpretaciones justas, permite aclarar la Reología de estas suspensiones, básicas para la minería chilena.

Algunos relaves chilenos presentan un comportamiento tixotrópico; y Larenas (2010) propuso un nuevo modelo reológico para este tipo de comportamiento. Se plantea ampliar el estudio de este modelo para poder analizar, comprender, interpretar y predecir este fenómeno.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Esta memoria tiene como objetivo principal realizar un estudio reofísico de los relaves chilenos:

- Estudiando los diferentes parámetros adimensionales que la Reofísica de Suspensiones hace intervenir, los cuales responden a balances de fuerzas que permiten definir el comportamiento mecánico de la suspensión.
- Ampliando el estudio del modelo de Larenas (2010), para verificar su comportamiento en rangos mayores de concentraciones de sólido.

1.4.2 Objetivos específicos

- Dar a conocer los elementos básicos de Reología.
- Estudiar las interacciones moleculares predominantes en suspensiones concentradas sometidas a cizalle.
- Estudiar los números adimensionales que gobiernan la transición entre diferentes regímenes.
- Determinar los valores límite de la velocidad de deformación angular y el radio de partícula para los cuales una suspensión se mantiene en un determinado régimen.
- Estudiar las interacciones moleculares predominantes en los relaves chilenos.
- Posicionar los relaves chilenos en el diagrama de Coussot (1999).
- Estudiar el efecto de las fuerzas gravitatorias en los relaves chilenos.
- Determinar el valor de los parámetros de ajuste del modelo de Larenas (2010) para un rango de concentraciones de sólido.

- Evaluar el desempeño del modelo de Larenas (2010).

Capítulo 2: Enfoques reológicos

2.1 Postulados generales

2.1.1 Hipótesis del continuo

El estudio a realizar se limita a suponer que los sistemas tratados corresponden a medios continuos.

A escala macroscópica se observa continuidad, ejemplo de esto es el agua, el aire, una barra de acero o una duna de arena. Pero se sabe que la materia no es un continuo, sino que está formada por moléculas, átomos y partículas elementales.

Se introduce la noción de continuo por dos razones:

- Conceptualmente es muy simple.
- Sólo si se acepta la continuidad de la variación, se puede emplear una herramienta tan potente y flexible como el análisis infinitesimal clásico.

2.1.2 Continuo particulado

El estudio a realizar es sobre suspensiones (relaves), lo cual hace necesario la introducción de la noción de continuo particulado. Esto es un tema complejo y sutil, motivo por el cual, se dará a continuación una descripción muy simple.

La Figura 2.1 muestra un dominio D , el cual ocupa un volumen V en el espacio. En ese dominio existen N partículas. Se fija un subdominio d en el cual se encuentran n partículas. Luego de fijar estas ideas, se puede hablar de un continuo particulado, si y sólo si:

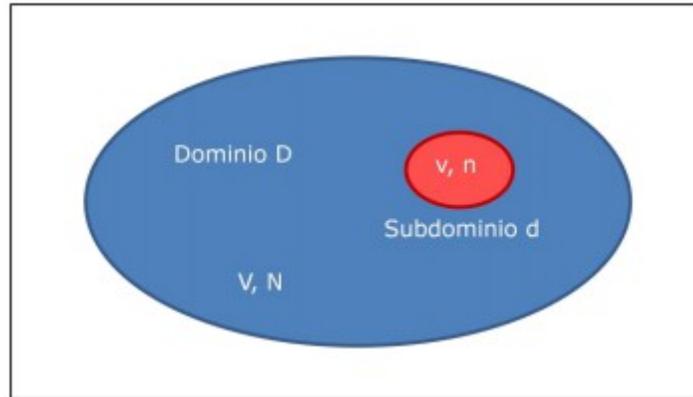


Figura 2.1: Continuo particulado (Innova-JRI, 2010)

$$v \ll V$$

$$N \gg n \gg 1$$

Nótese que las condiciones indicadas no imponen que las partículas estén uniformemente distribuidas.

2.1.3 Ecuaciones constitutivas

Existen muchos fenómenos físicos que son descriptibles mediante relaciones que emergen naturalmente o que guardan una estrecha relación con la Mecánica y la Termodinámica.

No obstante, para poder abordar numerosos fenómenos y/o procesos es necesario entregar relaciones adicionales, conocidas como *ecuaciones constitutivas*.

Algunos ejemplos de ellas corresponden a:

- La ley de los gases perfectos de Boyle, Mariotte y Charles.
- La ley de fricción de Leonardo y Coulomb.
- La ley de Ohm.
- La ley de Hooke.

- La ley de la viscosidad de Newton.

Algunas de estas relaciones constitutivas pueden deducirse de principios físicos generales (ab initio). Cuando no es así, se las denominan *ecuaciones fenomenológicas*.

El término *fenomenológico* se refiere a relaciones cuyo soporte es empírico.

Es natural exigir que las relaciones fenomenológicas sean perfectamente compatibles con las leyes generales de la Física, sin embargo, este requisito de compatibilidad no ha recibido atención detallada hasta tiempos relativamente recientes.

2.1.4 Principios de la teoría de los materiales

Estos principios son afirmaciones muy generales sobre las condiciones que deben cumplir las leyes de los materiales y, han sido enunciados y discutidos por muchos investigadores (Truesdell, 1966 y Noll, 2004).

Sus orígenes son en parte experimentales, y en parte, simplemente plausibles (Bertram, 2008).

Estos principios pueden enunciarse como sigue:

- *P1: Principio de determinismo.* El estado de las tensiones en un punto del cuerpo, en un instante de tiempo, está determinado por el movimiento actual y pasado del cuerpo, pero nunca por movimientos futuros.
- *P2: Principio de acción local.* El estado de las tensiones en un punto del material, depende solamente del movimiento de su entorno infinitesimal, es decir, deformaciones en puntos alejados no influyen en el valor de la tensión.
- *P3: Principio de objetividad material.* Las tensiones son invariantes bajo una transformación euclidiana.

2.1.5 Ecuaciones reológicas

Estas ecuaciones corresponden a *relaciones válidas para medios continuos susceptibles de deformarse y/o fluir*. Las dos más antiguas y más importantes, aún hoy en día, corresponden a:

- La *ley de Hooke*, para la elasticidad lineal.
- La *ley de Newton*, para los fluidos viscosos.

Las ecuaciones reológicas concernientes a la elasticidad y a la Mecánica de fluidos han sido estudiadas tanto en términos formales como históricos por Truesdell (1966).

2.1.5.1 Ecuaciones reológicas para fluidos simples

La denominación *Simple* es de Truesdell (2009) (Truesdell & Noll, 2004) y hay que entenderla en el sentido que el tratamiento de los fluidos corresponde a casos particulares sometidos a simplificaciones importantes.

Para un fluido simple, según Truesdell (1966):

$$t_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1)$$

Donde,

t_{ij} : Tensor de tensiones.

P : Presión.

δ_{ij} : Delta de Kronecker.

τ_{ij} : Tensor de tensiones desviatórico.

Ahora bien, se considera que el tensor desviatórico es función solamente del tensor de velocidades de deformación. Más explícitamente, no intervienen:

- La vorticidad.
- La deformación lineal relativa.

Entonces:

$$\tau_{ij} = f(d_{ij}) \quad (2)$$

Donde,

d_{ij} : Tensor de velocidades de deformación.

Posteriormente, Truesdell (2009) indica que la ecuación 2 debe escribirse:

$$\tau_{ij} = F(d_{ij}) \quad (3)$$

Donde F es un funcional. La misma observación hace Ancey (2005). Coussot (2005) también discute estos aspectos.

Por otra parte, los tensores que se están empleando deben ser isótropos, es decir, sus componentes no se alteran cuando los ejes coordenados rotan (Jeffreys, 1931). Esto es requerido por el principio de objetividad material (P3).

Bajo estos supuestos, es válida la expresión de Reiner (1956) enunciada en la ecuación 4 (Truesdell, 1966).

$$\tau_{ij} = G_0 \delta_{ij} + G_1 d_{ij} + G_2 d_{ik} d_{kj} \quad (4)$$

Donde G_0 , G_1 y G_2 son funciones de los invariantes I , II y III del tensor de velocidades de deformación (Truesdell, 1966). Esto se deriva del teorema de Cayley-Hamilton (Truesdell, 1966; Ancey, 2005; Masé, 1970). En términos más restringidos, este punto es discutido por Bird *et al.* (1960).

Estos invariantes se expresan en las ecuaciones 5, 6 y 7.

$$I = d_{ij} = \text{div } \vec{v} \quad (5)$$

$$II = \frac{1}{2} (d_{ij} d_{ij} - d_{ii} d_{jj}) \quad (6)$$

$$III = \det(d_{ij}) \quad (7)$$

Se considerarán solamente fluidos incompresibles, es decir, líquidos. Entonces $d_{ii} = 0$.

Las ecuaciones 5, 6 y 7 se convierten en las ecuaciones 8, 9 y 10.

$$I = 0 \quad (8)$$

$$II = \frac{1}{2} d_{ij} d_{ij} \quad (9)$$

$$III = \det(d_{ij}) \quad (10)$$

No es difícil demostrar que el tercer invariante es nulo para flujo paralelo y para flujo con simetría de revolución sin velocidad radial. En otros casos, Bird *et al.* (1960) indica que el invariante III no es relevante. Por lo tanto, los coeficientes

G de la ecuación de Reiner (1956) (ecuación 4) pueden considerarse como escalares que dependen solamente del invariante II .

Bajo estas condiciones, es posible enunciar la ecuación de Reiner (1956) bajo la forma de la ecuación 11.

$$\tau_{ij} = 2\eta(II, d_{ij}) d_{ij} \quad (11)$$

Donde η es un escalar que puede denominarse como propiedad viscosidad aparente.

Esta forma generalizada de la Ley de Newton se lee en Bird *et al.* (1960). En esta ecuación se explicita la dependencia indicada en las ecuaciones 2 y 3.

2.1.6 Modelos reológicos

Definir lo que es un *modelo* puede resultar complejo dado el gran abanico de ciencias que usan este concepto. Específicamente en Matemáticas, el término *modelo* se usa para definir *una relación entre variables y/o parámetros*, entendiendo como variable una propiedad que adopta diferentes valores y como parámetro a un dato.

En términos simples, la finalidad de un modelo matemático es traducir fenómenos o situaciones complejas de la realidad a un lenguaje que le permita al hombre moderno estudiar, comprender, interpretar y predecir estos fenómenos o situaciones.

Para que la designación de *modelo reológico* no resulte ambigua conviene mostrar algunas distinciones introducidas por uno de los fundadores de la Reología, Markus Reiner (1956).

- La *Reología Fenomenológica* trata con materiales homogéneos o casi homogéneos a un nivel fenomenológico (medios continuos).
- La *Macroreología* mira los materiales tal como ellos aparecen, bajo una inspección superficial a ojo desnudo.
- La *Microreología* toma en cuenta la cuasihomogeneidad y la cuasiisotropía, deduciendo el comportamiento reológico de los materiales complejos a partir del comportamiento reológico conocido de sus constituyentes.

El tratamiento de las suspensiones minerales y los modelos reológicos a usar se abordarán en el marco conceptual de la *Reología fenomenológica*.

Cabe destacar que se considerarán solamente modelos en que el tiempo no interviene en forma explícita, esto es, no se tomarán en cuenta fenómenos *tixotrópicos*.

Los autores más jóvenes ya no son tan prudentes. Así, han surgido las definiciones que se presentan a continuación:

- *Reología* es el estudio del flujo de materia, principalmente líquidos, pero también sólidos blandos bajo condiciones en las cuales ellos fluyen en vez de deformarse elásticamente (Schowalter, 1978).
- La *Reología* puede definirse como la ciencia de la materia que escurre (Piau, 2001).

Puede verse que las definiciones de la *Reología* son extremadamente vastas, solamente dejan fuera a los sólidos indeformables (que en rigor son inexistentes).

Existen estudios empíricos de *Reología de suspensiones* (medición de reogramas) y teóricos empleando diferentes herramientas.

Un enfoque paralelo y muy promisorio es la *Reofísica de suspensiones* en la cual se intenta estudiar el comportamiento reológico analizando y comparando las fuerzas y dimensiones de las partículas y su interacción con el líquido.

Este enfoque es el que se seguirá aquí para los relaves chilenos.

2.1.6.1 Modelos simples – Versión unidimensional

En este trabajo se entenderá por *modelos simples* a aquellas expresiones matemáticas que relacionan *tensiones tangenciales* con *velocidades de deformación angular*. Estas expresiones pueden tener justificación física o no. En la mayor parte de los casos son ecuaciones sencillas, cuyo mérito descansa en que ajustan bien con reogramas reales. Bajo esta denominación, la lista es enorme, donde se pueden contar decenas y quizás centenares de modelos.

Aquí se consideran algunas expresiones simples de la lista de Hallbom (2008), susceptibles de adoptar la forma de la ecuación 12.

$$\tau = f(\dot{\gamma}, \text{parámetros}) \quad (12)$$

Aún así la lista resulta muy extensa y, por ende, será reducida a cuatro para efectos de este trabajo. Esta elección parecerá arbitraria, y en algún grado lo es, pero se justificará más adelante.

Los modelos seleccionados son:

- El newtoniano o pseudo newtoniano.
- El plástico ideal o de Bingham.
- El modelo de Casson.
- El modelo de Herschel y Bulkley.

2.1.6.1.1 Modelo newtoniano

A muy bajas concentraciones las suspensiones, en general, se comportan siguiendo el modelo newtoniano, el cual se expresa mediante la ecuación 13.

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (13)$$

La ventaja de este modelo es su simplicidad, ya que sólo posee un término libre el cual es muy fácil de calcular a partir de una regresión lineal.

El término μ corresponde a la *viscosidad dinámica*. Ésta puede considerarse una constante o una función de estado (depende de la temperatura y la presión).

La Figura 2.2 muestra el reograma de un fluido newtoniano.



Figura 2.2: Fluido newtoniano o pseudo newtoniano
(Innova-JRI, 2010)

2.1.6.1.2 Modelo plástico ideal o de Bingham

El plástico de Bingham es un tipo de material viscoplástico que se comporta como un cuerpo rígido frente a esfuerzos bajos, pero fluye viscosamente ante esfuerzos altos (Larenas, 2010). Es el modelo de uso típico en pulpas de la industria minera, pero también se presenta en materiales comunes como la mayonesa y la pasta de dientes.

La explicación física a este fenómeno radica en que el fluido contiene partículas en suspensión interactuando mutuamente. Estas partículas crean una débil estructura sólida que se rompe al alcanzar la tensión de fluencia (τ_F). Una vez superado este umbral, las partículas se mueven libremente en el fluido con una cierta viscosidad (viscosidad de Bingham, μ_B) (Larenas, 2010).

La ecuación 14 expresa este modelo.

$$\tau = \tau_F + \mu_B \dot{\gamma} \quad (14)$$

Donde,

τ_F : Tensión de fluencia.

μ_B : Viscosidad plástica o de Bingham.



Figura 2.3: Plástico de Bingham (Innova-JRI, 2010)

La Figura 2.3 muestra el reograma de un plástico Bingham. La *tensión de fluencia* se obtiene mediante cálculos especiales o por extrapolación del reograma. Normalmente este valor es mayor al que se obtiene ajustando otros modelos a un mismo set de datos experimentales. Esta característica es a veces poco realista, pero es conservativa.

La viscosidad aparente de este modelo tiende a un valor finito (precisamente la viscosidad plástica) cuando la tasa de cizalle tiende al infinito. Esto significa a menudo una ventaja cuando hay que trabajar con grandes tasas de cizalle.

El concepto de tensión de fluencia ha tenido duras críticas en el sentido de que su existencia es imposible (Barnes, 2000; ver Recuadro 2.1). En realidad mediciones modernas con aparatos perfeccionados muestran curvas como la de la Figura 2.4. Éstas sugieren que no existe una tensión de fluencia, sino una subida abrupta de la tensión tangencial para valores pequeños de la velocidad de deformación angular.

Recuadro 2.1: Tensión de fluencia (Barnes, 2000)

Anyone testing a very shear-thinning liquid (e.g. toothpaste, Carbopol, tomato puree, etc.) in a viscometer with a limited range of shear rates—say the typical ~ 1 to $1000[\text{s}^{-1}]$ of a laboratory viscometer—and plotting the results linearly, is almost bound to come to the conclusion that the liquid has a yield stress. However, measurement of the complete flow curve—using the appropriate equipment—shows that no real yield stress exists.



Figura 2.4: Plástico de Bingham - ¿Tensión de fluencia? (Innova-JRI, 2010)

A este respecto es instructivo leer la opinión vertida por Haldenwang (2003) (ver Recuadro 2.2).

Recuadro 2.2: Tensión de fluencia (Haldenwang, 2000)

There is an on-going debate about whether a yield stress is real or not (Barnes & Walters, 1985). The hypothesis is that if the shear rate measured is low enough, there will be no yield stress. For engineering design, the yield stress is reality for certain fluids and has to be dealt with.

Adicionalmente, cabe destacar que existen pulpas que muestran una tensión de fluencia considerable, pero una viscosidad plástica muy baja. La Figura 2.5 muestra un ejemplo posible de su reograma.

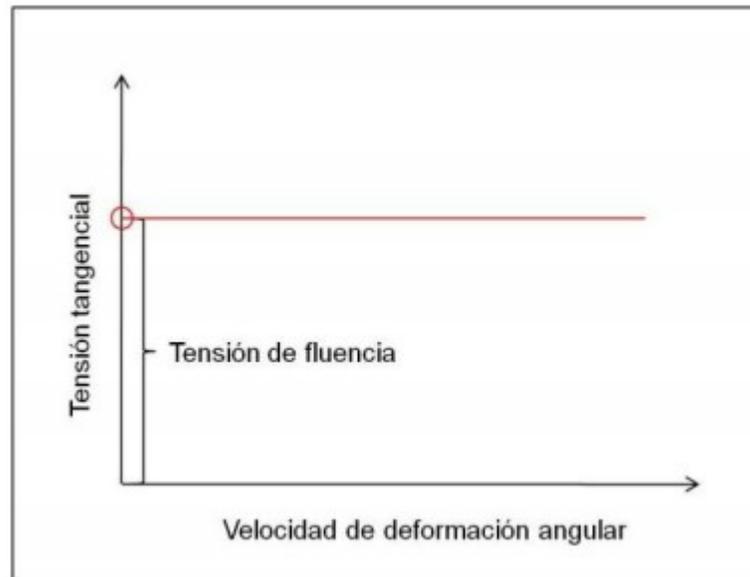


Figura 2.5: Caso límite Plástico de Bingham (Innova-JRI, 2010)

2.1.6.1.3 Modelo de Casson

Como el modelo de Bingham, éste también contiene dos parámetros:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_F} + \sqrt{\mu_C \dot{\gamma}} \quad (15)$$

Donde,

μ_C : Viscosidad de Casson.

El modelo de Casson representa en forma realista la parte de los reogramas en que la tasa de deformación angular es pequeña. Asimismo, al igual que el plástico Bingham, cuando la tasa de deformación tiende al infinito, la viscosidad aparente es finita y mayor que cero (precisamente la viscosidad de Casson).

2.1.6.1.4 Modelo de Herschel y Bulkley

Este modelo contiene tres parámetros.

$$\tau = \tau_F + K \dot{\gamma}^N \quad (16)$$

Donde el exponente N , para las aplicaciones normales, está en el intervalo abierto $]0, 1[$. Por esta razón, su viscosidad aparente tiende monotónicamente a cero cuando la velocidad de deformación angular crece indefinidamente. En numerosos casos esta característica es un inconveniente.

Otra limitante radica en que la ecuación 16 no es dimensionalmente homogénea y entonces no es susceptible de ser analizada empleando criterios de similitud.

Además, K y N no tienen interpretación física natural.

No obstante, en muchos casos el ajuste que se logra con reogramas experimentales es superior al obtenible con otros modelos.

La Figura 2.6 muestra el reograma de un fluido Herschel-Bulkley.

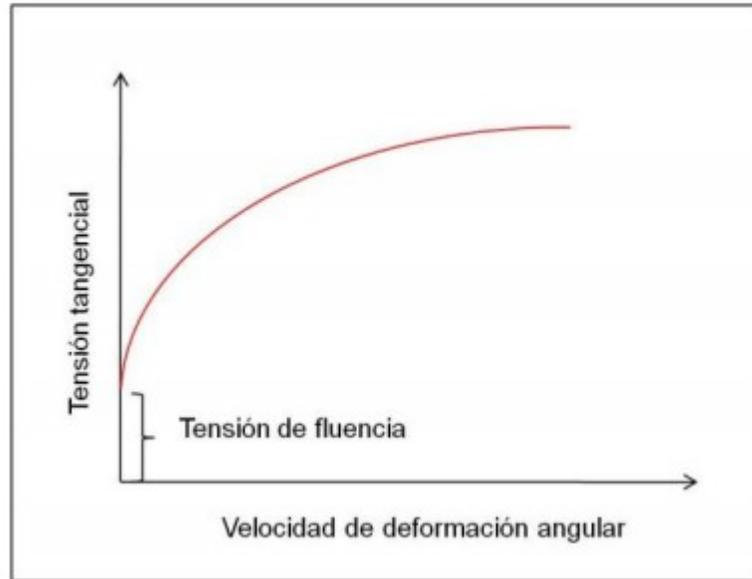


Figura 2.6: Modelo de Herschel y Bulkley (Innova-JRI, 2010)

Un caso importante es si la tensión de fluencia es nula o despreciable. El modelo de Herschel y Bulkley degenera en otro más simple, conocido por los nombres de Ostwald y De Waele:

$$\tau = K \dot{\gamma}^N \quad (17)$$

Klein y Hallbom (Hallbom, 2008) desarrollaron un modelo que generalizan los ya vistos y es dimensionalmente homogéneo.

$$\tau^K = \tau_F^K + (\mu_\infty \dot{\gamma})^K \quad (18)$$

Donde, $0 < K \leq 1$.

Este modelo es muy atractivo. No obstante, su uso es a veces difícil (Innova-JRI, 2010).

2.1.6.2 Modelos simples – Versión generalizada

A menos que se trate del escurrimiento por ductos circulares o entre placas infinitamente extendidas, las expresiones unidimensionales ya no son apropiadas y es necesario emplear relaciones más generales.

2.1.6.2.1 Modelo newtoniano

La versión general es sencilla y queda expresada en la ecuación 19.

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} \quad (19)$$

La viscosidad aparente corresponde a :

$$\eta = \frac{\tau_{ij}}{2 d_{ij}} \quad (20)$$

2.1.6.2.2 Modelo plástico ideal o de Bingham

La deducción de la expresión general ha sido realizada por Ancy (2005). El resultado para la viscosidad aparente puede expresarse como sigue:

$$\eta = \mu_B + \frac{\tau_F}{2\sqrt{II_{ij}}} \quad (21)$$

Considerando la ecuación 6 se obtiene la ecuación 22.

$$\eta = \mu_B + \frac{\tau_F}{2\sqrt{\frac{1}{2} d_{ij} d_{ij}}} \quad (22)$$

La existencia de cizalle puede definirse comparando $\sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}$ con τ_F (Ancy, 2005).

Entonces el modelo completo se plantea en la ecuación 23.

$$\begin{aligned}
 d_{ij} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} \leq \tau_F \\
 d_{ij} \neq 0 &\Leftrightarrow \tau_{ij} = \left(2\mu_B + \frac{\tau_F}{\sqrt{\frac{1}{2} d_{ij} d_{ij}}} \right) d_{ij}
 \end{aligned} \tag{23}$$

2.1.6.2.3 Modelo de Herschel y Bulkley

La generalización ha sido estudiada por Coussot (2005). Esta puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 d_{ij} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} \leq \tau_F \\
 d_{ij} \neq 0 &\Leftrightarrow \tau_{ij} = \left(\frac{2^n K}{(\sqrt{\Pi_B})^{1-n}} + \frac{\tau_F}{\sqrt{\frac{1}{2} d_{ij} d_{ij}}} \right) d_{ij}
 \end{aligned} \tag{24}$$

2.1.7 Caracterización de las partículas

En una suspensión las partículas se pueden caracterizar según:

- **Tamaño.** Se toman las definiciones que habitualmente se utilizan en *Hidráulica fluvial*, las cuales corresponden al diámetro nominal, de sedimentación o de tamiz.
- **Forma.** Se usan términos como el de esfericidad, área superficial o dimensiones triaxiales.
- **Densidad y concentración.** Cuando se trata de partículas que provienen de minerales asociados a cuarzo, sus densidades son cercanas a la de este compuesto $\rho = 2650 \text{ [kg/m}^3\text{]}$. A menudo se encuentra que en las faenas mineras la densidad de las partículas naturales no se aleja mucho de esta cifra, donde es típico encontrar valores que se encuentran entre 2700 y $2900 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ (Innova-JRI, 2010).

- *Velocidad de sedimentación.* Está definida para una única partícula en un medio continuo (velocidad de sedimentación libre) o para un conjunto de partículas (velocidad de sedimentación retardada).

La Tabla 3 presenta los diámetros característicos y la densidad de sólidos presente en los relaves chilenos.

Tabla 3: Diámetro característico y densidad de sólidos de los relaves chilenos (Innova-JRI, 2010)				
Diámetro característico	Media [μm]	Desviación estándar [μm]	Mínimo [μm]	Máximo [μm]
D_{16}	9	2,95	5	16
D_{50}	52	23,2	20	110
D_{84}	174	65,2	61	287
Densidad de sólidos [ton/m ³]	2,74	-	2.0	3,4

2.1.8 Parámetros que afectan la reología

En los modelos reológicos aparecen parámetros que dependen de las propiedades de la suspensión y de otras variables, tales como:

- Concentración.
- Granulometría.
- pH.

La viscosidad crece con la concentración de sólidos, y en particular, para la máxima fracción volumétrica alcanzable, o concentración de empaquetamiento, la viscosidad tiende al infinito.

2.1.9 Concentración de empaquetamiento

Cuando la concentración de partículas sólidas es extremadamente baja y éstas no se aglomeran, el movimiento de una de ellas no interfiere con el de las demás. Sin embargo, cuando ya se alcanza una cierta concentración, los movimientos de las partículas ya no son independientes. A concentraciones mayores, las colisiones y la fricción inter-partículas serán frecuentes, y si la concentración aumenta aún más, se llegará a un estado en que las partículas se entrabarán del todo. Esta condición es la que se denomina de empaquetamiento (packing).

La condición antes mencionada es de importancia considerable para la Reología de una suspensión, ya que se concibe que al alcanzar una condición de empaquetamiento, el efecto macroscópico consiste en viscosidades y/o tensiones de fluencia elevadas, tanto así, que pueden crecer indefinidamente.

2.1.9.1 Empaquetamiento de esferas idénticas

Se denomina *número de coordinación* a la cantidad de contactos que tiene una partícula con las que la rodean.

Para el caso de esferas idénticas, la configuración más suelta en que ellas permanecen en contacto ocupando un enrejado de n cubos de arista a , la concentración en volumen, Φ , se calcula en la ecuación 25.

$$\Phi = \frac{n \frac{\pi}{6} a^3}{n a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,5236 \quad (25)$$

En este caso el número de coordinación vale 6.

Nótese además que este grado de empaquetamiento es mínimo en el sentido que si fuese menor, las esferas ya no podrían estar en contacto.

Slichter, en 1899 (seq. Forchheimer, 1935) calculó la concentración para un enrejado hexaédrico (Figura 2.7).

El resultado de Slichter (1899) se resume en la ecuación 26.

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \frac{1}{(1 - \cos \delta) \sqrt{1 + 2 \cos \delta}} \quad (26)$$

El valor límite superior se obtiene para $\delta = 60^\circ$. En ese caso el número de coordinación es 12.

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \sqrt{2} \approx 0,7405 \quad (27)$$

Santon (1966), plausiblemente sin conocer el desarrollo de Slichter (1899), dedujo los valores extremos ya indicados por un raciocinio muy diferente.

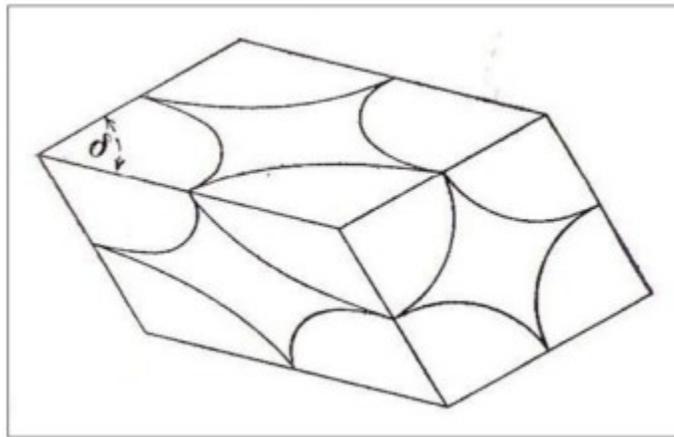


Figura 2.7: Esferas inscritas en una malla de hexaedros regulares (Slichter, 1899)

2.1.9.2 Empaquetamiento con distribución granulométrica extendida

El valor indicado en la ecuación 27 no es el mayor alcanzable, ya que si las esferas tuviesen una distribución granulométrica variada, las más pequeñas podrían llenar los huecos dejados por las más grandes, tal como ilustra la Figura 2.8.

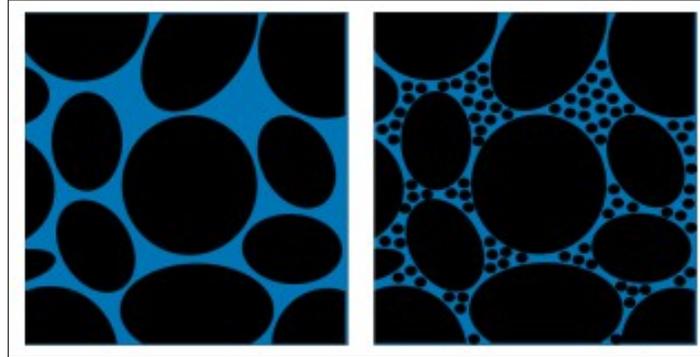


Figura 2.8: Esquema de llenado de poros grandes por partículas pequeñas (Innova-JRI, 2010)

2.1.9.3 Algunos ejemplos de laboratorio

Para caliza fina ($< 100 [\mu\text{m}]$), He (2005) encuentra la máxima concentración de empaquetamiento (Φ_m) como parámetro de ajuste para la viscosidad. Estima un valor de 0,646.

Mueller *et al.* (2010), para partículas esféricas estima Φ_m igual a 0,633. En este artículo se indica que Rintoul y Torcuato (1996) estimaron Φ_m igual a 0,64 (esferas al azar) y Rutgers un Φ_m igual a 0,67 (suspensión cizallada).

Huynh *et al.* (c.2000) analizaron un concentrado de cobre con una distribución de tamaños entre 1 y 100 $[\mu\text{m}]$ y $D_{80} = 46 [\mu\text{m}]$. Calcularon Φ_m igual a 0,42 y consideraron que este valor relativamente bajo era explicable por la gran variedad de diámetros y formas de las partículas.

Pabst *et al.* (2006) investigaron experimentalmente los valores de Φ_m , el parámetro de Einstein B (que se explica más adelante), y calcularon los coeficientes de correlación C para materiales relativamente finos:

- Wollastonita (WM45 y HSV): 45 $[\mu\text{m}]$.
- Almidón de maíz: 14 $[\mu\text{m}]$.
- Almidón de trigo: 20 $[\mu\text{m}]$.

Los resultados se resumen en la Tabla 4 y Tabla 5.

Tabla 4: Parámetros ajustados con el modelo de Krieger (Innova-JRI, 2010)			
Material	Φ_m [%]	E	C
Almidón de maíz	76	4,72	0,994
Almidón de trigo	61,30	4,77	0,999
Promedio de ambos almidones	53,10	4,44	0,999
WM 45	36,30	4,70	0,992
HSV 45	13,00	10,20	0,975

Tabla 5: Parámetros ajustados con el modelo de Maron & Pierce (Innova-JRI, 2010)			
Material	Φ_m [%]	E	C
Almidón de maíz	48,5	4,12	0,992
Almidón de trigo	47,7	4,19	0,997
Promedio de ambos almidones	47,9	4,18	0,999
WM 45	40,1	4,99	0,991
HSV 45	14,7	13,6	0,952

2.1.9.4 Empaquetamiento de sedimentos naturales

Para sedimentos naturales, la Tabla 6 muestra algunos resultados (recordar que la porosidad ε cumple $\Phi + \varepsilon = 1$).

Tabla 6: Porosidad de sedimentos naturales (Innova-JRI, 2010)	
Sedimento	Porosidad [%]
Grava	25 a 40
Arena limpia	30 a 50
Limo	35 a 50
Arcilla	35 a 80
Till glaciar	10 a 20

Puede observarse que los sedimentos gruesos tienen valores de Φ entre 0,60 y 0,75. Estas cifras son cercanas a los encontrados por Schlichter (1899) para esferas idénticas. Por el contrario, las arcillas muestran Φ (0,20 \rightarrow 0,65), lo que puede explicarse por la compleja estructura que ellas poseen.

2.1.9.5 Empaquetamiento según la velocidad de deformación angular

El comportamiento no newtoniano a altas concentraciones se explica introduciendo el concepto de empaquetamiento máximo dependiente de la velocidad de deformación angular, $d\gamma/dt$ (Heymann *et al.*, 2002). Así, para esferas monodispersas:

- $d\gamma/dt$ bajo : $\Phi_m = \Phi_{m,0} = 0,63 \pm 0,02$
- $d\gamma/dt$ alto : $\Phi_m = \Phi_{m,\infty} = 0,70 \pm 0,02$

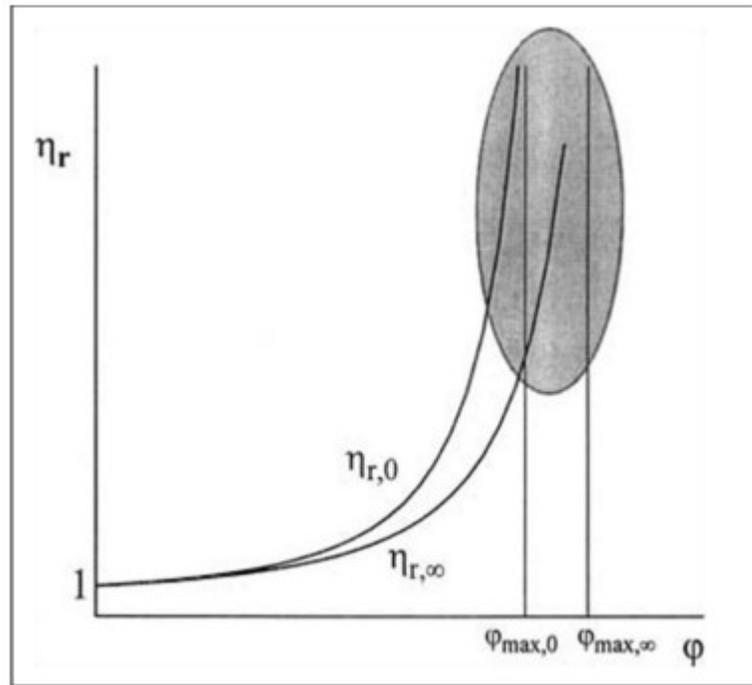


Figura 2.9: Concentraciones máximas de empaquetamiento (Innova-JRI, 2010)

A altas tasas de velocidad de deformación, el valor de Φ_m se aproxima a 0,74; el máximo de Slichter (1899) (ecuación 27).

Park y colaboradores (Park *et al.*, 1991) emplearon los mismos conceptos (es difícil aseverarlo ya que el trabajo está escrito en coreano). Los resultados pueden verse en la Tabla 7.

Tabla 7: Empaquetamiento máximo ajustado a fórmulas consideradas por Park <i>et al.</i> (1991) (Innova-JRI, 2010)			
Deformación [s ⁻¹]	Ec. Mooney c	Ec. Kitano Φ_m	Ec. Tsai Φ_m
0,05	1,766	0,49	0,554
8	1,193	0,597	0,686
50	1,149	0,623	0,694
200	1,128	0,630	0,699
400	1,060	0,639	0,715

2.1.9.6 Variación de la concentración debido a efectos fisicoquímicos

Todo lo anterior está considerado para partículas inertes. Las reacciones químicas y los fenómenos superficiales pueden provocar varios efectos especiales, por ejemplo:

- Sinterización.
- Sticking.
- Aglomeración.
- Floculación.

Estos efectos pueden modificar en forma apreciable el valor de la concentración en volumen.

2.1.9.7 Otros aspectos

El problema del empaquetamiento es matemáticamente complejo. Ver, por ejemplo, Solomon (1967). De ese trabajo se incluye la Tabla 8.

Tabla 8: Empaquetamiento de esferas en varias dimensiones (Innova-JRI, 2010)				
Dimensiones de la esfera/tipo de empaquetamiento	2	3	4	5
Mejor red de empaquetamiento	$\frac{\pi}{\sqrt{12}}=0,9069$	$\frac{\pi}{\sqrt{18}}=0,7404$	$\frac{\pi^2}{16}=0,6168$	
Aleatoriedad restringida	0,8	0,63		
Empaquetamiento cúbico	$\frac{\pi}{4}=0,7854$	$\frac{\pi}{6}=0,5236$	$\frac{\pi^2}{32}=0,3084$	$\frac{\pi^2}{60}=0,1654$
Distribución uniforme	0,6	0,27	0,148 *	0,075 *
Peor red de empaquetamiento	$\frac{2\pi}{4\sqrt{27}}=0,3023$	$\frac{5\sqrt{5}\pi}{24\cdot 4}=0,1829$	$\frac{3\pi^2}{5\sqrt{5}\cdot 16}=0,1103$ **	

* Esferas empaquetadas en una esfera.

** Menor que su valor en la celda, mayor que 0,1036.

El problema se ha estudiado desde hace tiempo. En el siglo XVI, el matemático inglés, Thomas Harriot (1585-1586), estudió respecto al apilamiento de balas de cañón. Kepler (1611) conjeturó que el empaquetamiento máximo era 0,74; lo cual no fue demostrado rigurosamente hasta 1998 (Thomas Hales, USA).

Capítulo 3: Diagramas reofísicos

Existen varios diagramas destinados a clasificar el comportamiento físico de las suspensiones, los cuales se han utilizado, en su mayoría, para Hidráulica fluvial.

La Figura 3.1 y la Figura 3.2 muestran la clasificación hecha por Gani (2004) en términos del tamaño de las partículas, concentraciones, el número de Froude y el de Reynolds.

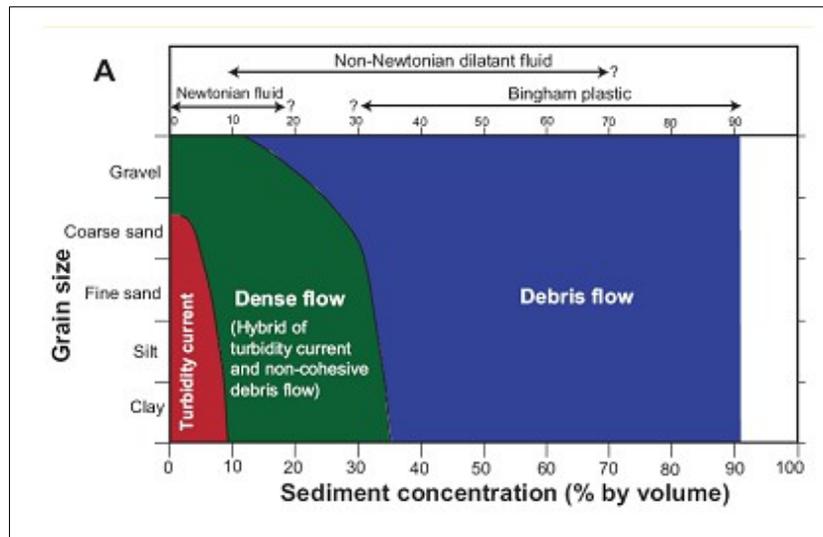


Figura 3.1: Diagrama que clasifica escurrimientos en términos del tamaño de las partículas y su concentración (Gani, 2004)

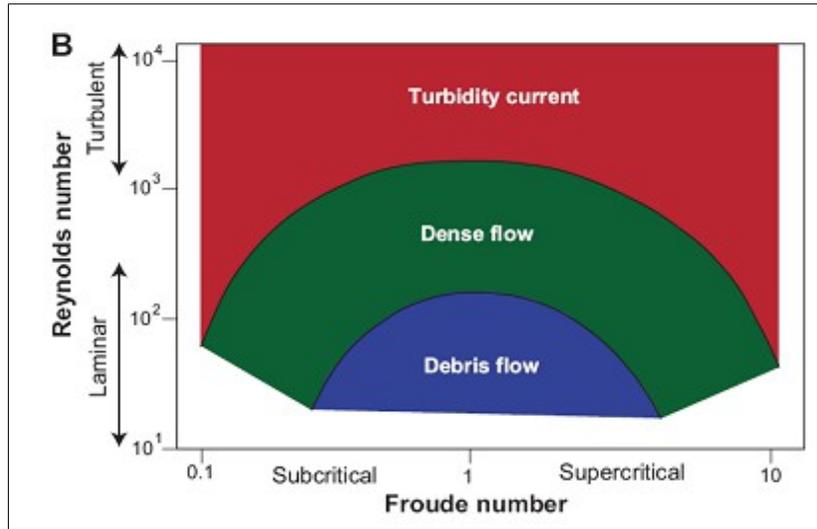


Figura 3.2: Diagrama de clasificación de escurrimientos en términos de los números de Froude y de Reynolds (Gani, 2004)

La Figura 3.3 muestra la clasificación conceptual de caudales hiperconcentrados hecha por Coussot (1992)

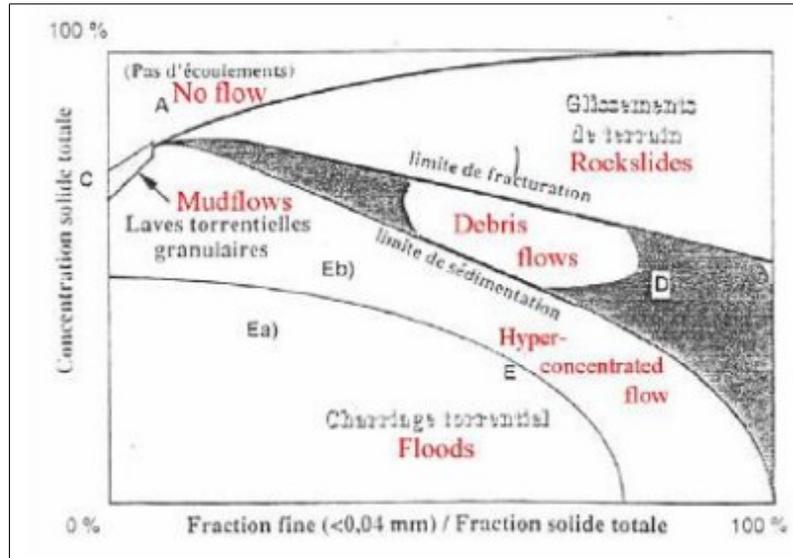


Figura 3.3: Clasificación conceptual de caudales hiperconcentrados (Cousot, 1992)

La Figura 3.4 muestra un diagrama triangular confeccionado por Schatzmann (2005), el cual es cercano conceptualmente al de Cousot.

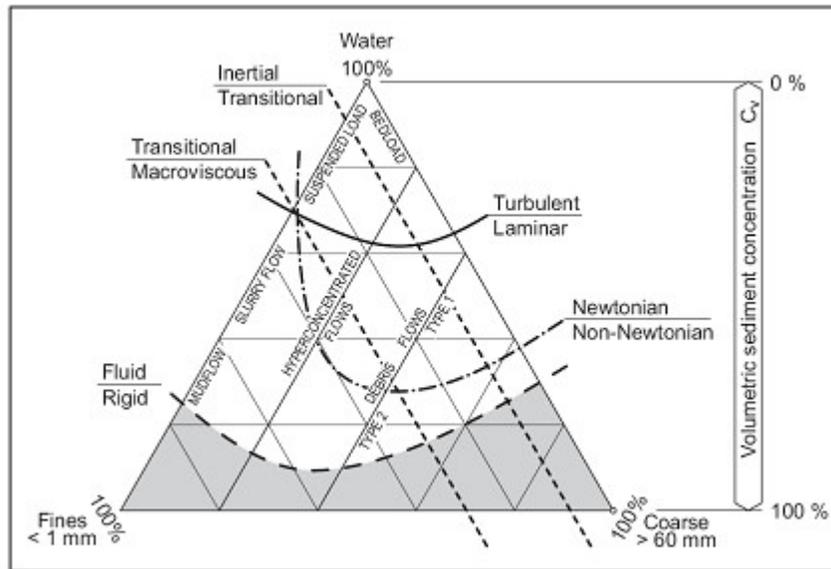


Figura 3.4: Flujos característicos y clasificación de flujos de debris (Schatzmann, 2005)

Se han encontrado cuatro diagramas reofísicos orientados a la dinámica de partículas, los cuales emplean los parámetros adecuados del análisis dimensional.

La Figura 3.5 muestra el diagrama de Jomha (1991).

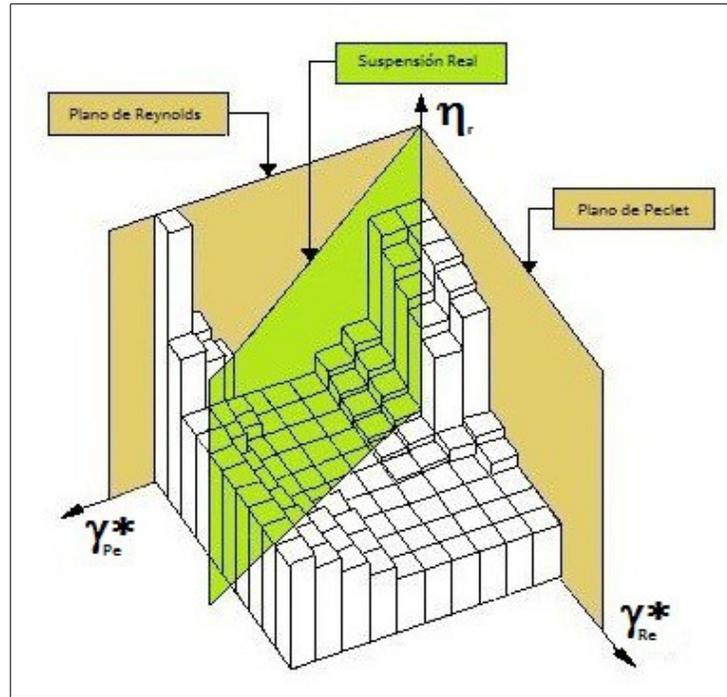


Figura 3.5: Viscosidad reducida v/s velocidades de deformación angular reducida (Jomha, 1991)

Donde,

η_r : Viscosidad reducida.

$$\dot{\gamma}_{Pe}^* = \dot{\gamma} \left(\frac{\eta_0 d_p^3}{\kappa_B T} \right).$$

$$\dot{\gamma}_{Re}^* = \dot{\gamma} \left(\frac{\rho_0 d_p^2}{\eta_0} \right).$$

d_p : Diámetro de la partícula.

ρ_0 : Densidad del medio.

T : Temperatura absoluta.

κ_B : Constante de Boltzmann ($1,3806504 \cdot 10^{-23} [J/^\circ K]$).

La Figura 3.6 muestra el segundo diagrama reofísico diseñado por Roco (1988).

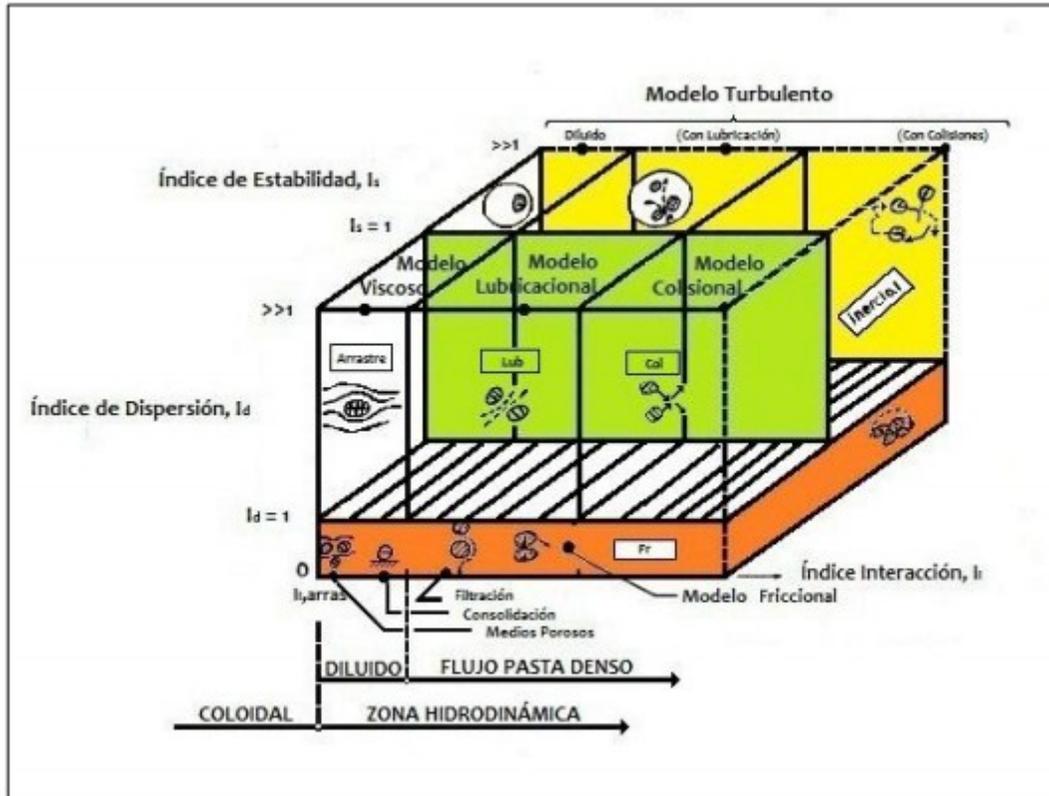


Figura 3.6: Zona hidrodinámica del diagrama para fluidos en pasta (Roco, 1988)

Los patrones de flujo de la zona hidrodinámica son modelados usando diferentes asunciones y técnicas. Se identifican 5 grupos de modelos:

- *Modelo viscoso para suspensiones diluidas*, en las cuales la interacción entre las partículas y el fluido es el principal mecanismo de interacción.
- *Modelo lubricacional*, donde las interacciones hidrodinámicas entre partículas son dominadas por fuerzas de lubricación.

- *Modelo colisional*, en el cual las colisiones elásticas y plásticas entre partículas proporcionan el principal mecanismo para transferencia de momentum.
- *Modelo friccional*, donde a partículas en permanente contacto sólo se les permiten giros y deslizamientos relativos entre ellas.
- *Modelo turbulento*, en el cual los efectos inerciales de la migración de partículas entre capas vecinas son simulados.

La Figura 3.7 muestra el tercer diagrama reofísico, confeccionado por Klein (2002).

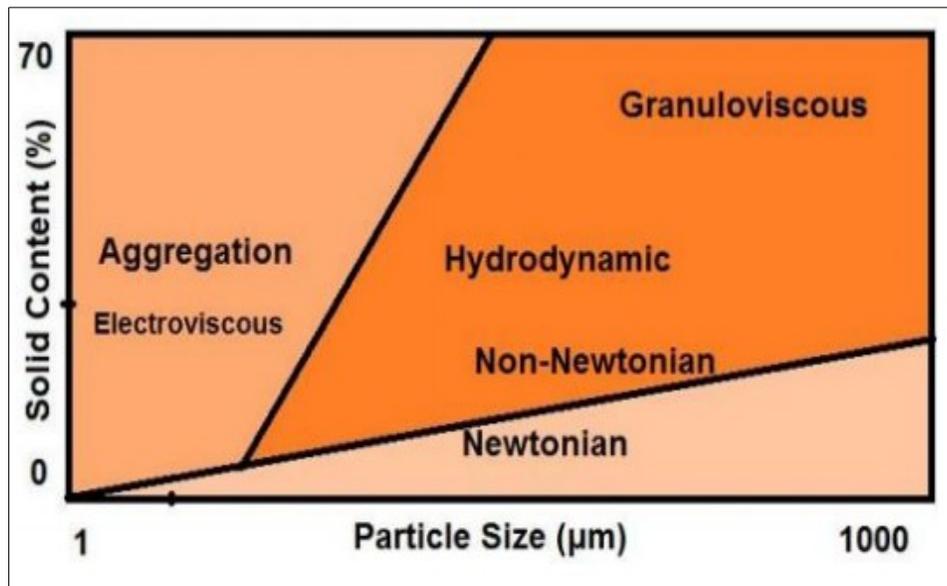


Figura 3.7: Efectos microreológicos. Tamaño de partícula v/s contenido de sólidos (Klein, 2002)

Según Klein (1992), las propiedades reológicas de una suspensión pueden ser analizadas desde el punto de vista de la microreología, donde actúan los siguientes efectos:

- *Efectos hidrodinámicos*: describen la energía de disipación viscosa debida al movimiento en el fluido de partículas que no interactúan entre ellas.
- *Efectos electroviscosos*: que están relacionados con la disipación de energía debido a la interacción entre las cargas de la superficie de dos partículas.
- *Efectos de agregación*: describe la energía disipada desde la ruptura y formación de enlaces resultantes de fuerzas atractivas entre partículas. La presencia de agregados en una suspensión influencía fuertemente el comportamiento del flujo. Los agregados se forman como el resultado de fuerzas de atracción interpartículas (típicamente de Van de Waals) que sobrepasan la repulsión electrostática. La agregación puede formar una red en la suspensión, la cual es responsable de la existencia de un esfuerzo de fluencia.
- *Efectos granuloviscosos*: describen la interacción física entre partículas en suspensiones densas que disipan energía vía fricción. Estos efectos están relacionados con el empaquetamiento de partículas en suspensión; los cuales son mayores para altas concentraciones de sólidos. A estas altas concentraciones de partículas, la estructura de empaquetamiento puede influenciar fuertemente las propiedades del flujo de la suspensión. La estructura del empaquetamiento puede cambiar en respuesta a el tipo de flujo, la velocidad de deformación y las condiciones fisicoquímicas y fisicomecánicas. La energía friccional es disipada como el resultado del deslizamiento entre partículas.

Los efectos granuloviscosos son responsables, por ejemplo, de la fluidización por cizalla.

La Figura 3.8 muestra el cuarto diagrama, diseñado por Coussot y Ancey (1999).

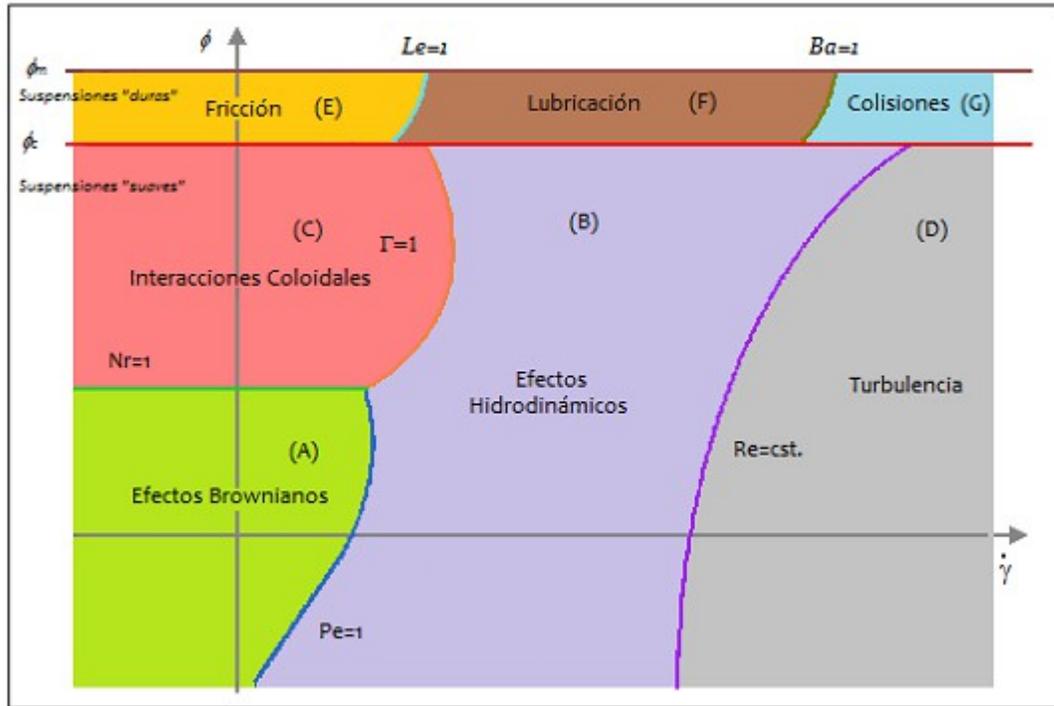


Figura 3.8: Clasificación conceptual de los regímenes reológicos de una suspensión como una función de su velocidad de deformación angular y la fracción de sólido en escala logarítmica (Coussot and Ancey, 1999)

Coussot y Ancey (1999) desarrollaron un diagrama conceptual simplificado (Figura 3.8) donde se detallan las interacciones predominantes en suspensiones concentradas cizalladas. Cuenta con dos parámetros que proveen rápidamente de información concerniente a la densidad de la suspensión y a la intensidad del flujo. Se asume que todos los demás parámetros de la suspensión, tales como el diámetro y forma de las partículas, la viscosidad del líquido intersticial, la densidad de la partícula y del fluido, la temperatura, el coeficiente de fricción, fuerzas externas y condiciones de borde son constantes.

En la Figura 3.8 se observan destacadas distintas fracciones de sólidos, las cuales corresponden a:

- Φ_c : Concentración de empaquetamiento crítico, la cual se asocia a procesos de percolación de partículas en contacto.
- Φ_m : Concentración máxima de partículas sólidas en volumen o fracción de empaquetamiento denso.

El esquema presenta fronteras que están definidas por diferentes números adimensionales que se detallan a continuación:

Número de repulsión

El límite entre los efectos brownianos e interacciones coloidales está representado por el número de repulsión expresado en la ecuación 28.

$$N_r = \frac{\Phi_0}{\kappa_B T} \quad (28)$$

Donde,

κ_B : Constante de Boltzmann.

T : Temperatura absoluta.

Φ_0 : Energía de barrera, definida en la ecuación 29.

$$\Phi_0 = \frac{A_0 \tilde{a}}{12h} \quad (29)$$

Donde,

A_0 : Constante de Hamaker.

\tilde{a} : Promedio armónico del radio de las partículas.

h : Distancia de separación entre superficies en los puntos de contacto.

Cuando $N_r \ll 1$, las interacciones coloidales son insignificantes comparadas con los movimientos brownianos (Coussot y Ancy, 1999).

Número de Peclet

El límite entre los efectos brownianos y efectos hidrodinámicos está representado por el número de Peclet expresado en la ecuación 30.

$$Pe = \frac{6\pi\mu_0}{\kappa_B T} d_p^3 \dot{\gamma} \quad (30)$$

Donde,

μ_0 : Viscosidad del fluido.

d_p : Diámetro de la partícula.

Número Γ

El límite entre interacciones coloidales y efectos hidrodinámicos está representado por el número Γ expresado en la ecuación 32.

$$\Gamma = \frac{3}{4} \pi \frac{\mu_0}{\Phi_0} \left(\frac{\Phi_m}{\Phi} \right)^{2/3} d_p^3 \dot{\gamma} \quad (31)$$

Donde,

Φ_0 : Energía de barrera, definida en la ecuación 29.

Cuando $\Gamma \ll 1$, el régimen hidrodinámico es insignificante comparado con las interacciones coloidales (Coussot y Ancy, 1999).

Número de Leighton

El límite entre los efectos friccionales y lubricantes está representado por el número de Leighton expresado en la ecuación 32.

$$L e = \frac{3\pi\mu_0 \ln(h/\varepsilon)}{f N} r_p^2 \dot{\gamma} \quad (32)$$

Donde,

ε : Porosidad.

f : Coeficiente friccional.

N : Fuerza normal requerida para mantener el contacto, enunciada en la ecuación 33.

$$N = \rho_0 g r_p^2 H \quad (33)$$

Donde,

ρ_0 : Densidad del fluido.

H : Altura de la muestra.

Número de Bagnold

El límite entre los efectos lubricantes y colisionales está representado por el número de Bagnold, expresado en la ecuación 34.

$$B a = \frac{\rho_p \varepsilon}{\mu_0} r_p \dot{\gamma} \quad (34)$$

Donde,

ρ_p : Densidad de la partícula.

Capítulo 4: Posicionamiento reofísico de los relaves chilenos

4.1 Consideraciones reológicas

Existen diferentes parámetros adimensionales en Reofísica de Suspensiones que permiten definir el comportamiento mecánico de una suspensión.

Se realizará un estudio sistemático para los relaves chilenos.

Los aspectos relevantes se pueden listar examinando los diagramas reofísicos, especialmente los de Roco (1988) y de Coussot y Ancey (1999):

- Brownianos.
- Coloidales.
- Hidrodinámicos.
- Friccionales.
- Lubricantes.
- Colisionales.
- Gravitatorios.

Coussot y Ancey (1999) y Jomha *et al.* (1990) se centraron en el estudio del comportamiento de suspensiones monodispersas. Sengun y Probststein (1989) demostraron que una distribución de tamaños de partículas puede ser reemplazada convenientemente por un diámetro medio cuando la concentración de las partículas gruesas es baja o moderada (Ancey, 2003).

Además, Sengun y Probststein (1989) estudiando suspensiones polidispersas (coal slurries) sugirieron que es posible considerar (Ancey, 2001):

- La fracción gruesa de la suspensión actúa independientemente de la fracción fina aumentando la viscosidad de la suspensión.
- La fase intersticial, correspondiente a la mezcla de partículas coloidales finas y agua, es la que imparte la mayoría de las propiedades reológicas a la suspensión (propiedades viscoplásticas).

Mediante sus experimentos probaron que ambos conceptos son confiables hasta concentraciones de sólido bajo 0,35 (Ancey, 2003). Sobre este valor, se observan cambios significativos en el comportamiento de la suspensión, atribuibles a los efectos de squeezing (la reducción de la película de fluido entre partículas genera cierta presión).

4.2 Estudio de interacciones moleculares en suspensiones que fluyen

Según las consideraciones antes mencionadas, para una suspensión con un tamaño de partícula dado se puede trazar un único diagrama representativo de Coussot y Ancey (1999). En éste se representan las distintas velocidades de deformación angular críticas que separan los distintos tipos de interacciones predominantes (asumiendo el resto de parámetros de la suspensión constantes).

4.2.1 Interacciones sin contactos

Se realiza el análisis para interacciones sin contacto, en el límite de los regímenes browniano/hidrodinámico ($Pe=1$) y coloidal/hidrodinámico ($\Gamma=1$).

Para el límite browniano/hidrodinámico se despeja el radio de la partícula desde la ecuación 30:

$$d_p^3 = \frac{\kappa_B T}{6\pi\mu_0} \frac{1}{\dot{\gamma}} \quad (35)$$

Para el límite coloidal/hidrodinámico se despeja el radio de la partícula desde la ecuación 31.

$$d_p^3 = \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \frac{\Phi_0}{\mu_0} \left(\frac{\Phi}{\Phi_m} \right)^{2/3} \frac{1}{\dot{\gamma}} \quad (36)$$

Por simplicidad se asumen $\kappa_B T = 4 \cdot 10^{-21}$ [J]; $\mu_0 = 0,001$ [Pa·s]; $\Phi = 0,3$; $\Phi_m = 0,64$ y $A_0 = 1,34 \cdot 10^{-19}$ [J] los cuales son valores razonables para enfocar el estudio del radio de partícula y la velocidad de deformación angular (Roussel *et al.*, 2010).

La Figura 4.1 muestra la tendencia de la velocidad de deformación angular cuando el tamaño de las partículas aumenta. El análisis se realiza en el límite entre los regímenes browniano/hidrodinámico.

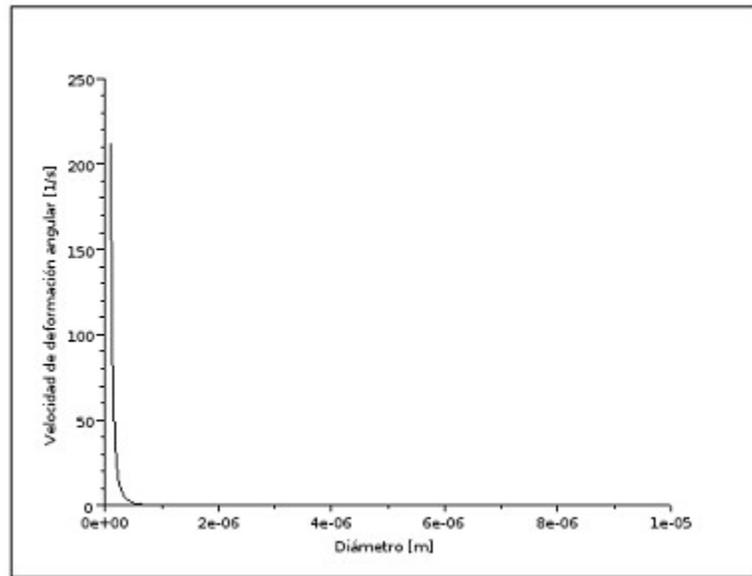


Figura 4.1: Tendencia de la velocidad de deformación angular al aumentar el diámetro de las partículas (límite browniano/hidrodinámico)

La Figura 4.2 muestra la tendencia de la velocidad de deformación angular cuando el tamaño de las partículas aumenta. El análisis se realiza en el límite entre los regímenes coloidal/hidrodinámico.

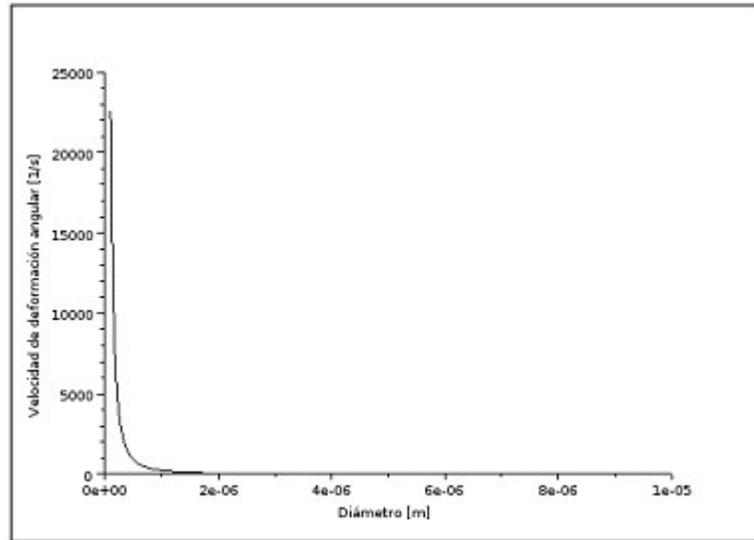


Figura 4.2: Tendencia de la velocidad de deformación angular al aumentar el diámetro de las partículas (límite coloidal/hidrodinámico)

La Figura 4.1 y la Figura 4.2 muestran como la velocidad de deformación angular crítica (en el límite) disminuye a valores muy pequeños cuando en una suspensión el diámetro de las partículas aumenta. Esto se traduce a que las curvas presentes en el diagrama de Coussot y Ancy (1999), correspondientes a la transición desde las interacciones brownianas/hidrodinámicas y coloidales/hidrodinámicas, son desplazadas hacia valores muy pequeños de velocidades, luego bajo condiciones establecidas, existe un tamaño de partícula sobre el cual, los efectos hidrodinámicos prevalecen.

4.2.2 Interacciones con contactos

A bajas velocidades de deformación angular el comportamiento entre partículas está gobernado por la fricción.

Coussot y Ancey (1999) afirman que la probabilidad de que ocurra una colisión es extremadamente pequeña excepto para velocidades de deformación angular y/o fracciones de sólido grandes.

Se puede determinar en forma cualitativa la forma en que el tipo de contacto directo se está llevando a cabo. Ésto es, la duración efectiva del contacto (T_c), comparado con el de una colisión pura (t_c). Si T_c es del orden de t_c , podemos hablar de contactos del tipo colisional (contactos normales). Si por el contrario, T_c es mucho mayor que t_c , principalmente los procesos son de tipo friccional (contactos tangenciales). La fuerza friccional requerida para mover dos partículas que se contactan, es proporcional a la fuerza normal que las mantiene en contacto (Coussot, 2005).

Algunas definiciones importantes formuladas por Coussot y Ancey (1999), atinentes para el análisis, corresponden a las de suspensión granular y suspensión concentrada. Definen una *suspensión granular* como aquella que se caracteriza por formar una red de partículas en contacto. Una *suspensión concentrada* es definida como aquella en la que las interacciones entre partículas juegan un papel importante en el comportamiento de la suspensión (las que pueden ser de tipo coloidal o de contacto). Para suspensiones de cuarzo y arcilla ésto puede ocurrir a fracciones de sólido tan bajas como 0,1 %.

Cuando una suspensión es de tipo granular, se estudia el régimen de flujo predominante mediante las siguientes relaciones (Coussot y Ancey, 1999):

- *Régimen friccional:* $Le \ll 1$ y $Le \cdot Ba \ll 1$.
- *Régimen lubricante:* $Le \gg 1$ y $Ba \ll 1$.
- *Régimen colisional:* $Le \cdot Ba \gg 1$ y $Ba \gg 1$.

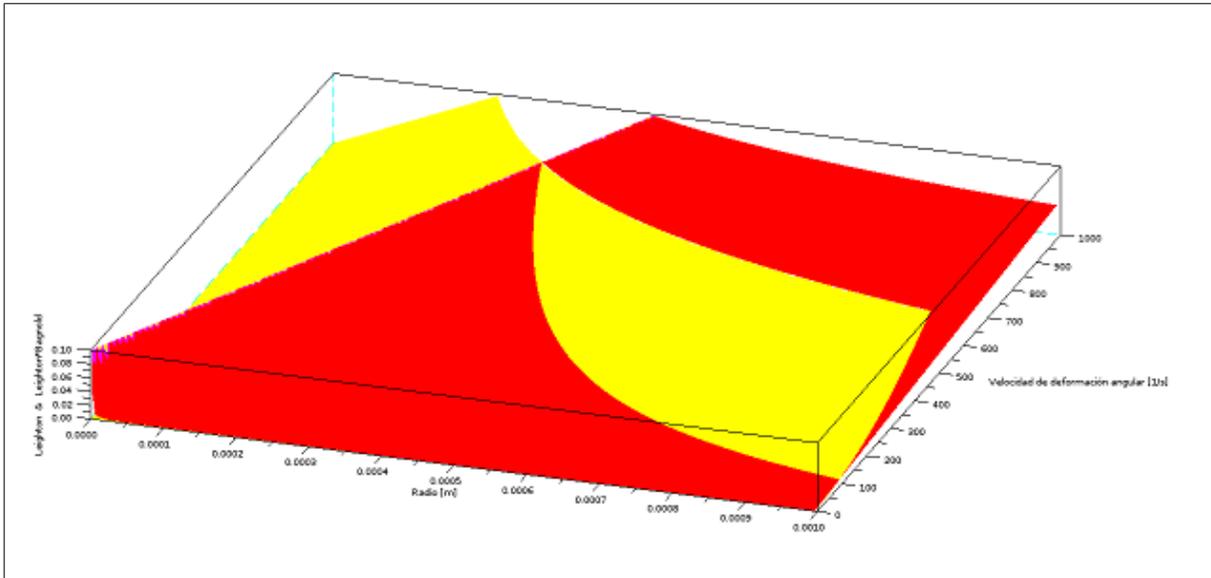
4.2.2.1 Régimen friccional

Se realiza el análisis de los efectos friccionales para una suspensión cizallada.

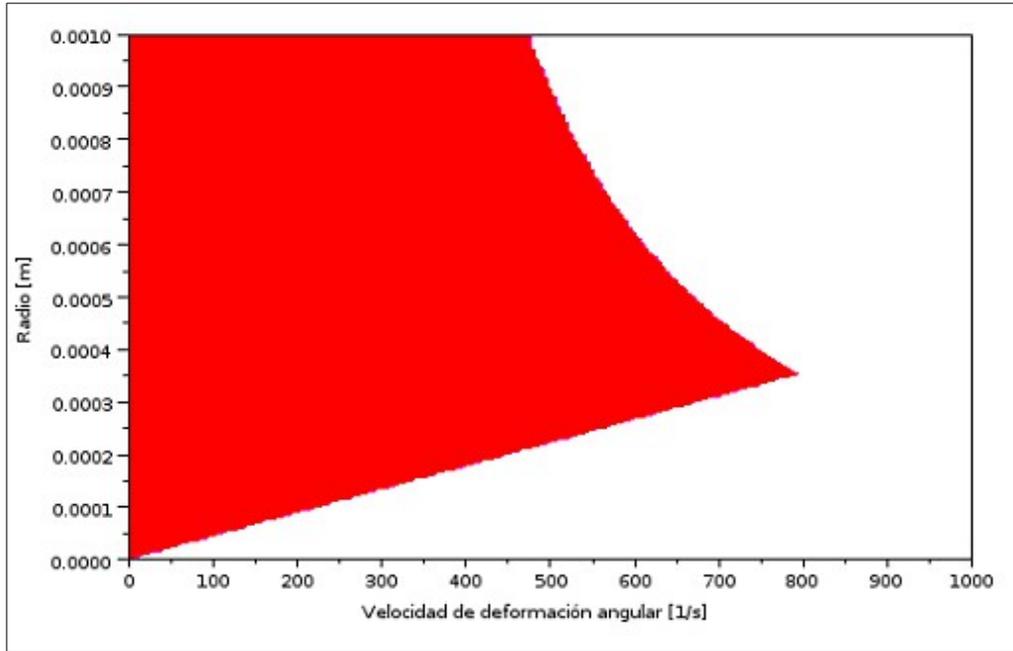
En este caso por simplicidad se asume $f=0,5$; $H=100 \cdot r$; $\varepsilon=r/100$; $\rho_p=1000 [\text{kg} \cdot \text{m}^3]$ y $\mu_0=0,001 [\text{Pa} \cdot \text{s}]$ (De Kee y Chhabra, 2002). Estos valores son razonables y permiten enfocarse en los parámetros críticos (r y $\dot{\gamma}$) para la transición de regímenes.

La Figura 4.3 muestra los planos que cumplen con las condiciones para que el régimen predominante corresponda al friccional.

El plano de color rojo representa los tamaños de las partículas que a una velocidad de deformación angular dada, cumplen con $Le \ll 1$, y el de color amarillo a las que cumplen con la condición $Le \cdot Ba \ll 1$.



La Figura 4.4 muestra la intersección de ambos planos, para la cual la interacción predominante es la del tipo friccional.



Una suspensión de partículas pequeñas no se mantiene en régimen friccional si se aumenta demasiado su intensidad de flujo. Existe un valor límite de velocidad en el que las partículas de un cierto radio se mantiene en régimen friccional ($r=354[\mu\text{m}]$ y $\dot{\gamma}=800[\text{s}^{-1}]$). Para suspensiones de radios mayores, la intensidad del flujo debe disminuir para que se mantenga en régimen friccional.

4.2.3 Número de Stokes

El número de Stokes corresponde a la razón entre la energía cinética de una partícula y la energía viscosa disipada durante un movimiento básico (a lo largo de una distancia). El acoplamiento entre la fase líquida y sólida puede ser estimado considerando este número.

Cuando $St \gg 1$, el movimiento de la partícula es independiente al movimiento del fluido intersticial.

Cuando $St \approx 1$, el acoplamiento entre las dos fases es débil (ninguna fase gobierna a la otra). En este caso la mezcla puede presentar un *comportamiento de dos fases*, donde cada fase es parcialmente dependiente e independiente de la otra.

Cuando $St \ll 1$, el movimiento de la partícula es principalmente dictado por la fase fluida.

El número de Stokes se expresa en la ecuación 37.

$$St = \frac{\rho_0 r^2}{K \mu} \dot{\gamma} \quad (37)$$

4.3 Estudio de interacciones moleculares predominantes en relaves chilenos

Las consideraciones tomadas para el estudio del régimen predominante en los relaves chilenos corresponden a:

- Los relaves corresponden a suspensiones granulares.
- Los relaves contienen fracciones de sólidos menores al 32 %.
- La densidad de las partículas de los relaves corresponde a $2650 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.
- El D_{50} de las partículas corresponde a $50 [\mu\text{m}]$.
- Para la minería $\dot{\gamma} \in [100[\text{s}^{-1}], 1000[\text{s}^{-1}]]$.
- $K = r$.
- La viscosidad del fluido corresponde a $0,001 [\text{Pa} \cdot \text{s}]$.

4.3.1 Análisis de números adimensionales

Los valores obtenidos en el análisis de los números adimensionales corresponden a:

- $Le = 0,064$.
- $Le Ba = 0,00109$.
- $\Gamma = 1891$.

4.3.2 Análisis del número de Stokes

La Tabla 9 presenta los valores obtenidos en el análisis del número de Stokes.

Tabla 9: Número de Stokes para los relaves chilenos	
$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	St
100	0,179
1000	1,79

4.3.3 Discusión de los resultados

Los relaves chilenos tienen granulometría extendida. Sengun y Probst (1989) demostraron que una distribución de tamaños puede ser reemplazada por un diámetro medio cuando la concentración de *partículas gruesas* de la suspensión es baja o moderada ($D_{50} = 50[\mu\text{m}]$). Las concentraciones en la minería chilena se encuentran entre 4 y 31 % (Innova-JRI, 2010), de este modo, los relaves se pueden posicionar en el diagrama conceptual de Coussot y Ancey (1999), diseñado para suspensiones de partículas monodispersas.

Los relaves chilenos presentan un comportamiento reológico tipo Bingham, donde la tensión de fluencia y la viscosidad son descritas de buena manera por los modelos de Heymann *et al.* (2002) y Krieger y Dougherty (1959) (Innova-JRI, 2010).

Heymann *et al.* (2002) atribuyeron la existencia de una tensión de fluencia a la formación de redes de partículas. La red de partículas se deforma en respuesta al esfuerzo aplicado, el cual es transmitido vía contacto directo entre partículas. La tensión de fluencia es alcanzada cuando el esfuerzo aplicado es suficiente para causar el rompimiento de la red, más allá del cual la suspensión fluye viscosamente (Innova-JRI, 2010).

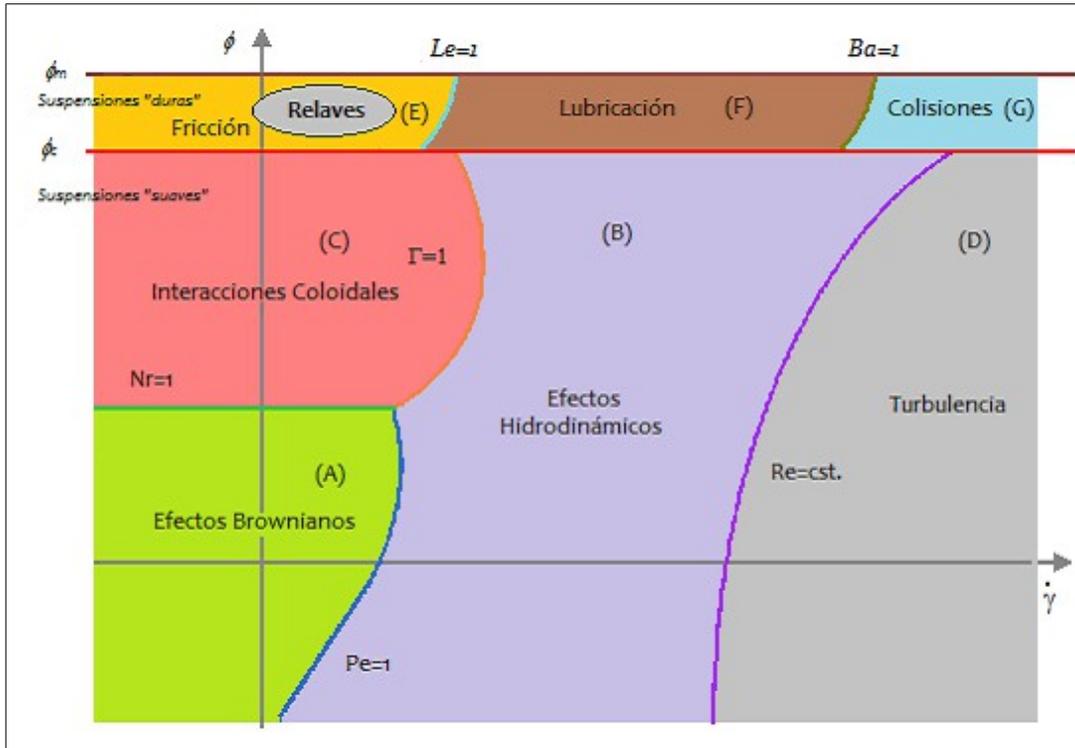
Una suspensión que se caracteriza por formar una red de partículas en contacto es definida por Coussot y Ancey (1999) como de tipo granular, las cuales se caracterizan por presentar contactos del tipo friccional, lubricante o colisional (Coussot y Ancey, 1999).

El análisis de los números adimensionales del diagrama de Coussot y Ancey (1999) permite concluir que las interacciones predominantes en los relaves chilenos son las de tipo friccional.

Por otro lado, se obtiene un valor del número de Stokes cercano a 1, lo cual indica que ninguna fase gobierna a la otra. El relave podría tener un comportamiento de dos fases (comportamiento bimodal), lo cual es concordante con lo demostrado por Sengun y Probst (1989) para concentraciones de sólidos menores a 35 %.

Es importante señalar que las interacciones de tipo coloidal, mencionadas en el diagrama de Coussot y Ancey (1999), se presentan entre elementos pequeños, comunmente con un largo característico entre $1[\text{nm}]$ y $1[\mu\text{m}]$ (Coussot, 2005). El estudio del número Γ comprueba este hecho.

La Figura 4.5 muestra la posición de los relaves chilenos en el diagrama de Coussot y Ancey (1999).



4.4 Estudio de fuerzas gravitatorias

Se constata que la mayor parte de los estudios sobre relaves corresponden a suspensiones australianas y/o sudafricanas cuyos diámetros de partículas son muy pequeños y que pueden calificarse como *suspensiones no decantables*. Pero éste no es el caso de la mayoría de los relaves chilenos, por lo cual, es primordial estudiar los efectos del peso de las partículas en ellos.

4.4.1 Fuerzas gravitatorias y brownianas

Si las partículas son relativamente muy pequeñas, las fuerzas asociadas al movimiento browniano (fuerzas de Langevin) pueden igualar o superar el peso de ellas

y entonces no sedimentarán jamás. Describirán trayectorias complejas alrededor de un eventual centro de equilibrio como se muestra en la Figura 4.6.

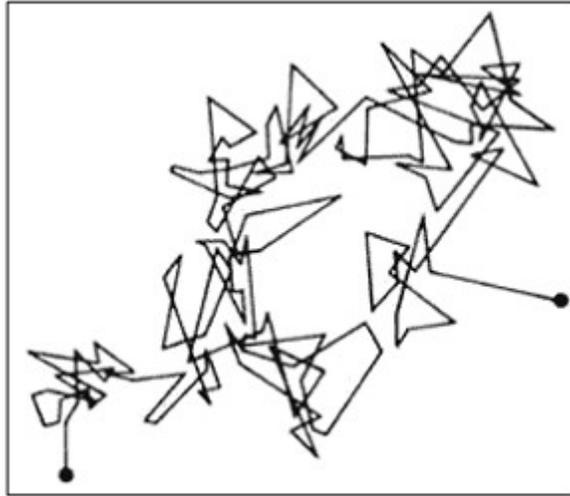


Figura 4.6: Trayectoria irregular que sigue una partícula browniana (adaptada de la WEB)

El desplazamiento cuadrático medio calculado de las ecuaciones de Langevin, según Hanggi (c.2006), se expresa en la ecuación 38.

$$\overline{X^2} = \frac{2\kappa_B T}{\xi} t \quad (38)$$

Donde,

t : Tiempo elapsado.

κ_B : Constante de Boltzmann.

T : Temperatura absoluta.

ξ : Factor que depende de la resistencia viscosa.

Desde la ley de Stokes se tiene que:

$$\xi = 3\pi\mu_0 d_p \quad (39)$$

Donde,

d_p : Diámetro de la partícula.

μ_0 : Viscosidad del fluido.

Entonces:

$$\overline{X^2} = XB^2 = \frac{2\kappa_B T}{3\pi\mu_0 d_p} \quad (40)$$

Si la partícula sedimentara libremente siguiendo la ley de Stokes:

$$W = \frac{1}{18} \frac{(\rho_p - \rho)g d_p^2}{\mu_0} \quad (41)$$

El camino recorrido en un tiempo t y partiendo del reposo:

$$XS = \frac{1}{18} \frac{(\rho_p - \rho)g d_p^2}{\mu_0} t \quad (42)$$

Siguiendo un camino sugerido por Happel & Brenner (1965) se pueden comparar, para un mismo tiempo, los desplazamientos debidos a la sedimentación y los debidos al movimiento browniano.



Figura 4.7: Comparación de los desplazamientos debido a la sedimentación y al movimiento browniano

La Figura 4.7 muestra dicha comparación, para $t=1$ [s]. El desplazamiento browniano XB iguala al stokesiano para d_p cercano a 1 [μm]. Para d_p cercano a 5 [μm] el desplazamiento XS supera en dos órdenes de magnitud a XB ; para $d_p=10$ [μm] XS alcanza un valor cercano a 500 XB .

4.4.1.1 Discusión de los resultados

Para partículas más pequeñas que 1 [μm] el movimiento browniano y la decantación son cercanos. Para 5 [μm] la influencia del movimiento browniano sobre la sedimentación es ya muy pequeña y sería imperceptible para $d=10$ [μm].

Si solamente interactúan la gravedad y las fuerzas de Langevin:

- Ellas se equiparan para diámetros de relave cercanos a 1 [μm].
- Para diámetros de 5 [μm] o más, las fuerzas brownianas son despreciables frente a las gravitatorias, por lo tanto, para los relaves chilenos las fuerzas del movimiento browniano son generalmente despreciables dados los diámetros de sus partículas.

4.4.2 Fuerzas gravitatorias y de Van der Waals

A continuación se estudiará el potencial que está asociado a las fuerzas de Van der Waals. Información sobre este aspecto se encuentra en Molerus (1985), Visser (1989), Rietema (1991) y Molerus (1993).

Hamaker, según Visser (1989), calculó la energía de interacción entre dos cuerpos sólidos semi-infinitos a una distancia de separación h sumando todas las posibles interacciones moleculares individuales. La fuerza p por unidad de área de contacto queda expresada en la ecuación 43 .

$$p = \frac{1}{6\pi} \frac{A_0}{h^3} \quad (43)$$

La fuerza total entonces corresponde a:

$$P = \frac{A_0}{6} \frac{r^2}{h^3} \quad (44)$$

La Figura 4.8 presenta los distintos tipos de interacciones que se presentan entre superficies.

Un primer aspecto relevante es determinar bajo qué condiciones el peso de las partículas de relave exceden significativamente a las fuerzas de Van der Waals.

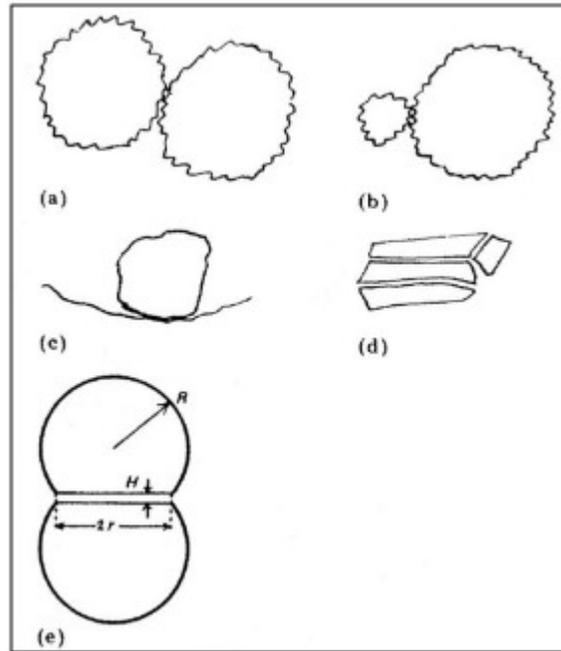


Figura 4.8: Influencia de superficies rugosas y factores geométricos en la interacción de partículas comparado con un sistema idealizado. (a), (b): superficie rugosa limitando la aproximación entre partículas; (c), (d): estructuras superficiales que promueven contactos cercanos; (e): dos partículas idealizadas de radio R , una separación de distancia h y un área de contacto de diámetro $2r$ (Visser, 1989)

Analizando las Tabla de Visser (1989) (anexos) se encuentra que la distancia equivalente esférica h_e es:

$$h_e \approx \frac{h}{4} \quad (45)$$

La Figura 4.9 muestra la geometría de una partícula idealizada.

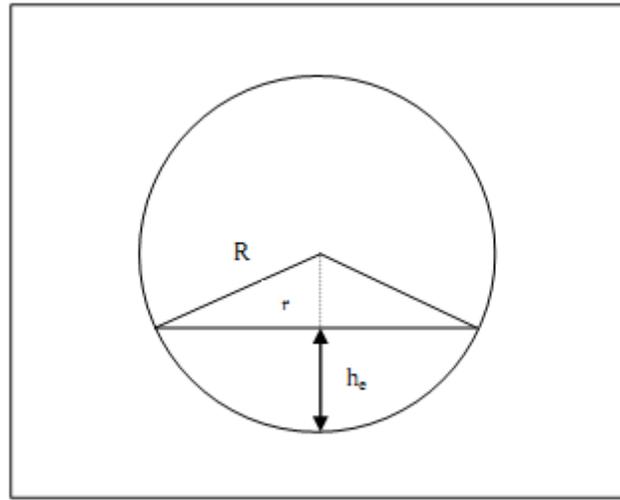


Figura 4.9: Geometría de una partícula idealizada

De la geometría del sistema (Figura 4.9) se obtiene la ecuación 46.

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h_e)^2} \quad (46)$$

El peso de una de las esferas se expresa en la ecuación 47.

$$W = \frac{4}{3} \pi \rho_p g R^3 \quad (47)$$

Igualando el peso con las fuerzas de Van der Waals, se obtiene el radio de la partícula:

$$R = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{A_0}{2\pi h \rho_p g}} \quad (48)$$

Como valor típico para los relaves chilenos se tiene que $\rho_p = 2650 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.

La Tabla 10 muestra los radios de partícula para el cual el peso iguala a las fuerzas de Van der Waals, empleando los valores de h dados por Visser.

Tabla 10: Radios de partícula para los cuales el peso iguala a las fuerzas de Van der Waals	
h [nm]	R [μm]
0.4	3
1	2
10	1

4.4.2.1 Discusión de los resultados

Se deduce, por lo tanto, que las fuerzas de Van der Waals igualan al peso cuando los granos tienen diámetros entre 2 y 6 [μm].

Los relaves chilenos tienen diámetros medianos cercanos a 50 [μm] (Tabla 3), por lo tanto, para estas partículas el peso es tres órdenes de magnitud mayor que las fuerzas de Van der Waals.

Capítulo 5: Dependencia temporal de las propiedades reológicas

5.1 Tixotropía

Una revisión relativamente reciente realizada por Barnes (1997) indica que la Tixotropía no se deja definir con facilidad.

Una definición que parece adecuada para los fines presentes es indicada por Bauer and Collins en 1967 (Barnes, 1997):

"When a reduction in magnitude of rheological properties of a system, such as elastic modulus, yield stress, and viscosity, for example, occurs reversibly and isothermally with a distinct time dependence on application of shear strain, the system is described as thixotropic".

Asimismo indica que existen muchas otras definiciones cercanas, pero no iguales.

Ancey (2005) la define como:

Thixotropy refers to the property of a material such that:

- *When it flows, its rheological properties vary strongly with shear rate (considerable shear thinning).*
- *When it is left at stand (after flow cessation), it retrieves its initial consistency (solid-like behavior) and properties.*

Recientemente, Mewis y Wagner (2009) dan otra definición:

Thixotropy is the continuous decrease of viscosity with time when flow is applied to a sample that has been previously at rest and the subsequent recovery of viscosity in time when the flow is discontinued.

Asimismo estos autores indican los elementos básicos de la definición:

- Está basada en la viscosidad.
- Implica una disminución a lo largo del tiempo de la viscosidad, inducida por el flujo.
- El efecto es reversible cuando el flujo se detiene.

La Figura 5.1 presenta una ilustración del concepto de tixotropía dado por Barnes (1995).

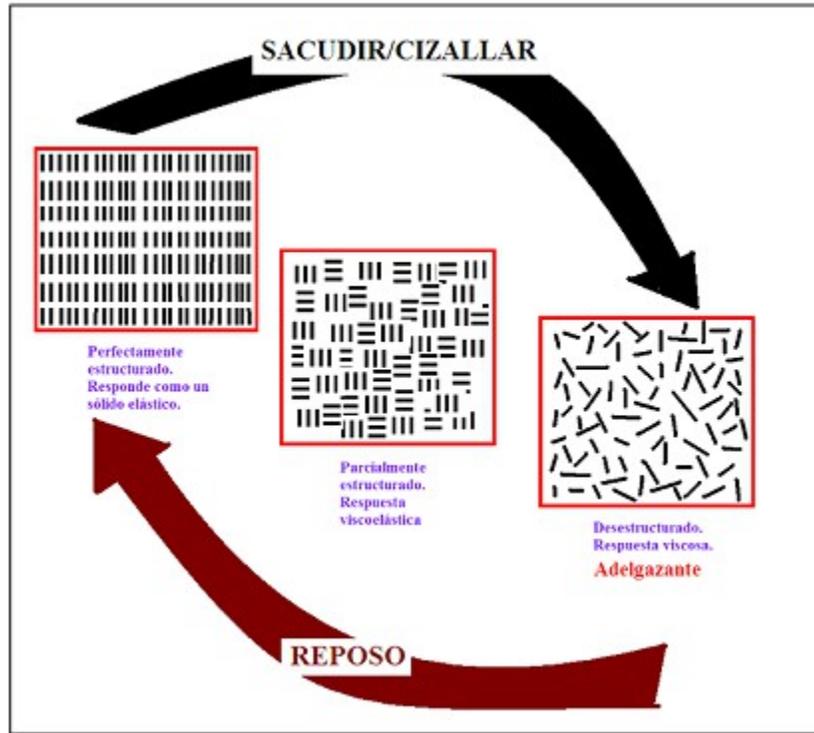


Figura 5.1: Ilustración de la Tixotropía, referida a un sistema viscoelástico (adaptada de Barnes, 1995)

5.2 Modelo estructural

Tomando el enfoque de Cheng y Evans (1965), el comportamiento reológico y dinámico se expresa mediante una ecuación constitutiva y una ecuación de evolución temporal de la estructura del material:

$$\tau_{ij} = \eta(\lambda, d_{ij}) d_{ij} \tag{49}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda, d_{ij}) \tag{50}$$

Donde,

τ_{ij} : Tensor de tensiones desviatóricas.

d_{ij} : Tensor de velocidades de deformación angular.

η : Viscosidad aparente.

λ : Parámetro estructural.

Para simplificar el análisis las ecuaciones 49 y 50 se escriben ahora en forma unidimensional:

$$\tau = \eta(\lambda, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (51)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda, \dot{\gamma}) \quad (52)$$

5.3 Parámetro de estructura

Los párrafos entre comillas que siguen a continuación son traducción literal de Baravian y Quemada (1996):

“Los modelos cinéticos estructurales de la Tixotropía suponen que la dependencia temporal de las propiedades reológicas se debe a cambios en la estructura interna de la muestra”.

Se define una simple variable estructural, λ , la cual vale 1 cuando la estructura está completa, por ejemplo, después de un largo tiempo en reposo, y 0 cuando la estructura está totalmente destruida debido a un fuerte cizalle.

Este parámetro se desea cuantifique:

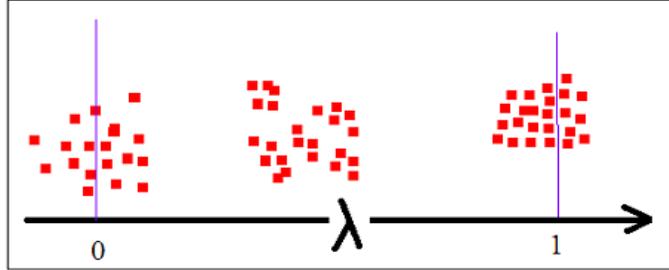
- Grado de estructuración del sistema.
- Evolución temporal del sistema.

En lo que sigue se considerará $\lambda \in [0, 1]$ (Larenas, 2010):

- $\lambda = 1$ representa a un sistema perfectamente estructurado.

- $\lambda=0$ representa a un sistema con su estructura totalmente destruida.

Esta evolución se evoca en el croquis de la Figura 5.2.



5.3.1 Modelamiento del parámetro de estructura

Se adopta aquí el planteamiento de Coussot (2005). En los términos actuales se puede escribir simbólicamente:

Variación temporal de $\lambda = \text{Construcción de } \lambda - \text{Destrucción de } \lambda$

Este planteamiento, expresado analíticamente ha sido introducido por Volterra (1931) en relación con el desarrollo de especies vivientes.

Ejemplos explícitos de la relación anterior han sido planteados por Baravian y Quemada (1996), Coussot (2005) y Huang (2006), entre otros.

Por conveniencia se empleará aquí el modelo de Larenas (2010):

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\theta} [\alpha(\dot{\gamma}) - \lambda] \quad (53)$$

Donde,

θ : Escala temporal.

α : Función decreciente en $\dot{\gamma}$.

La ecuación 53 se integra a:

$$\lambda(t) = \alpha(\dot{\gamma}_0) + (\lambda_0 - \alpha(\dot{\gamma}_0)) e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (54)$$

El parámetro $\alpha(\dot{\gamma}_0)$ puede interpretarse como el *valor residual* de λ en el sentido que el coeficiente de estructura tiende a ese valor cuando el tiempo transcurre indefinidamente.

$$\alpha(\dot{\gamma}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda = \lambda_{\infty}$$

5.4 Concepto de viscoelasticidad

5.4.1 Cuerpo elástico cizallado

Se trata de un cuerpo inicialmente en reposo e indeformado. Se esquematiza como el prisma de la Figura 5.3 (en rojo).

Debido a la diferencia $d\tau$ de tensiones tangenciales aplicadas en las caras superior e inferior del prisma se produce una deformación angular $d\gamma$.

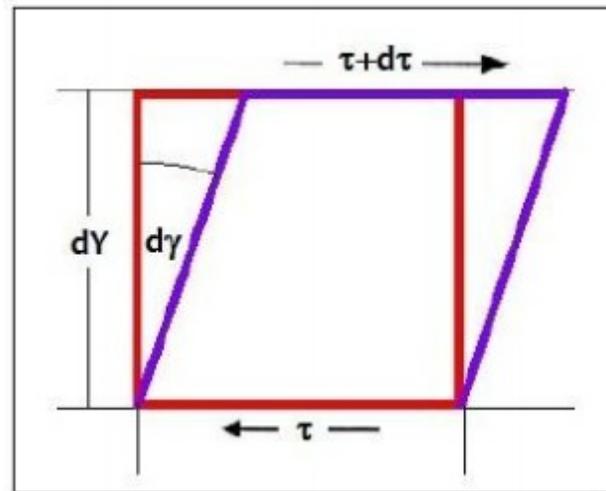


Figura 5.3: Deformación producida por la diferencia de las tensiones tangenciales aplicadas (Fuentes, 2012)

Se supone que el cuerpo es elástico y entonces:

$$d\gamma = \frac{d\tau}{E} \quad (55)$$

Donde,

E : Módulo de cizalle elástico.

Entonces:

$$\tau = E\gamma \quad (56)$$

La ecuación 56 expresa la ley de Hooke para la deformación por cizalle.

5.4.2 Cuerpo viscoso cizallado

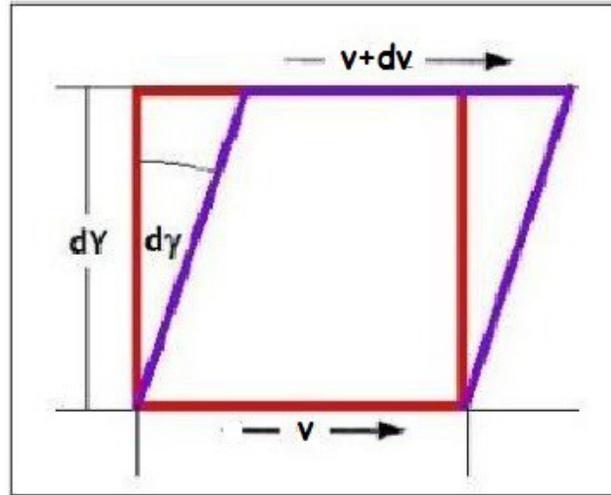


Figura 5.4: Deformación producida por la diferencia de velocidades (Fuentes, 2012)

La cara superior del prisma se mueve con una velocidad mayor en dv a la de la cara inferior. La velocidad de deformación angular del prisma es:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{dv}{dY} \quad (57)$$

Si la tensión tangencial en las caras superior e inferior del prisma es τ , entonces:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (58)$$

La ecuación 58 es la ley de viscosidad de Newton.

5.4.3 Cuerpo viscoelástico de Maxwell

Se supone un cuerpo que puede sufrir simultáneamente tanto deformaciones elásticas (e) como viscosas (v) y que estas pueden superponerse:

$$\gamma = \gamma_v + \gamma_e \quad (59)$$

Entonces, derivando esta ecuación respecto al tiempo y reemplazando en ella las ecuaciones 56 y 58:

$$\frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\mu} = \dot{\gamma} \quad (60)$$

Esta ecuación diferencial lineal de primer orden admite una solución analítica:

$$\tau_{ve}(t) = e^{-\frac{E}{\nu}(t-t_0)} \left(\tau(t_0) + E \int_0^t \dot{\gamma} e^{\frac{E}{\nu}(s-t_0)} ds \right) \quad (61)$$

Imponiendo $t_0=0$; $\tau(t_0)=0$:

$$\tau_{ve}(t) = e^{-\frac{E}{\nu}t} E \int_0^t \dot{\gamma} e^{\frac{E}{\nu}s} ds \quad (62)$$

Donde,

ve : Viscoelástico.

5.4.3.1 Caso particular: Proceso a velocidad de deformación angular constante

Este caso, quizás el más sencillo concebible, es de gran importancia en Reología experimental.

Considerando $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$ se obtiene la solución para este caso particular.

$$\tau_{ve}(t) = \nu \dot{\gamma}_0 \left(1 - e^{-\frac{E}{\nu}t} \right) \quad (63)$$

Si $Et/\nu \ll 1$ entonces:

$$\tau_{ve}(t) \approx E \dot{\gamma}_0 t \quad (64)$$

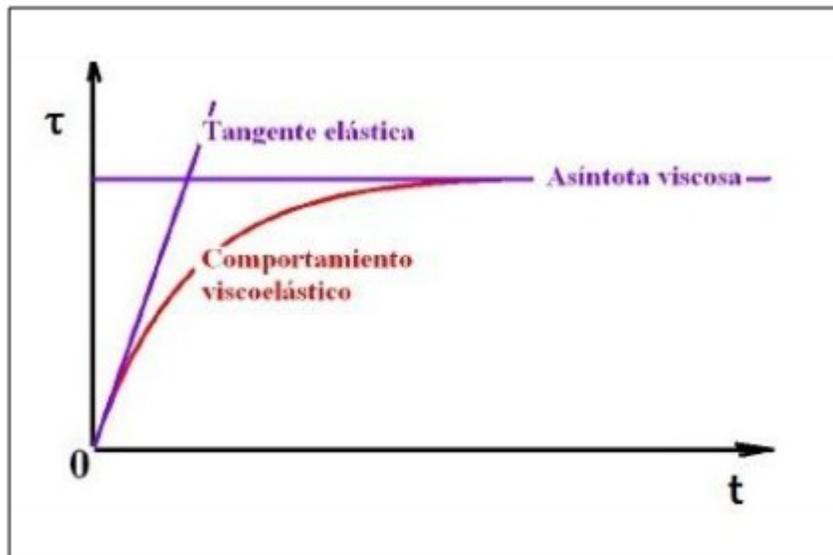
Luego, el comportamiento es aproximadamente elástico.

Si por el contrario, $Et/\mu \gg 1$:

$$\tau_{ve}(t) \approx \mu \dot{\gamma}_0 \quad (65)$$

Se trata de un escurrimiento viscoso.

El aspecto general de la curva se aprecia en la Figura 5.5.



Sometido a cizalle a lo largo del tiempo, se comporta como un sólido elástico inicialmente; transcurrido un tiempo se manifiesta como un líquido viscoso.

5.5 Tensión de fluencia y Tixotropía

Aceptando la definición de Bauer y Collins (1967) y considerando el análisis de Ancey (2005) se puede aceptar para la tensión de fluencia de los relaves:

$$\tau_F = f(\dot{\gamma}, t, t') \quad (66)$$

Es decir, la tensión de fluencia depende de la velocidad de deformación angular, del tiempo y de lo que ha ocurrido desde $t = t'$ hasta t , esto es, de la historia del fenómeno. Esto implica que el relave tiene memoria, aunque ella puede ser evanescente (fading).

5.6 Tiempos de referencia

Los tiempos de referencia o escalas temporales son parámetros relacionados con aspectos específicos de un fenómeno.

En el caso que se acaba de exponer se puede definir una escala temporal propia de la viscoelasticidad o escala temporal interna:

$$\tau_i = \frac{E}{\mu} \quad (67)$$

Otro tiempo es el lapso en que se desarrolla el fenómeno o escala temporal externa.

Se define ahora un parámetro adimensional asociado a las escalas temporales, el *número de Débora*:

$$D_e = \frac{t_i}{t_e} \quad (68)$$

Donde,

t_i : Tiempo en que la respuesta del material es elástica.

t_e : Tiempo de observación o de variación de parámetros (tiempo de medición o de aplicación de esfuerzos).

Para el ejemplo que se ha expuesto si $De \gg 1$ indica que el tiempo de observación es mucho menor que la escala interna. Esta situación corresponde a la zona elástica. A la inversa, si $De \ll 1$ se está en la zona viscosa. El dominio $De \approx 1$ corresponde a la viscoelasticidad.

5.7 Método Vane

El método Vane permite medir la tensión de fluencia de suspensiones concentradas.

El dispositivo Vane consiste en un rotor de paletas que se introduce lentamente en la muestra hasta sumergirlo completamente en ella.

La Figura 5.6 ilustra el dispositivo Vane y la técnica para medir la tensión de fluencia de una muestra.

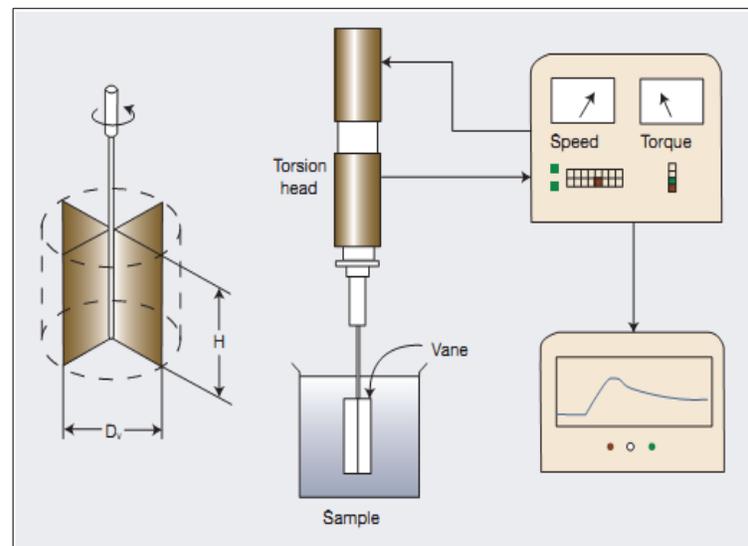
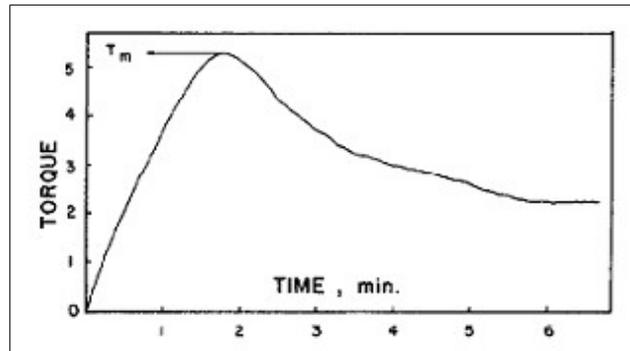


Figura 5.6: Ilustración del dispositivo Vane y técnica para medir la tensión de fluencia de una muestra (Boger, 2006)

Una vez sumergido el dispositivo se hace rotar lentamente a una velocidad angular constante. Para ello se aplica un torque que es medido como función del tiempo $T(t)$.

La Figura 5.7 muestra la curva de respuesta típica torque v/s tiempo observada con el método Vane.



Las zonas de la suspensión que están en contacto con las paletas del dispositivo, se deforman elásticamente como se observa en la parte lineal de la curva, lo cual se podría atribuir a estiramientos de los enlaces de las partículas de la red que conforman la suspensión. Mientras mayor sea el estiramiento, mayor es la resistencia a la deformación y, por lo tanto, el torque requerido para mantener un movimiento constante también aumenta hasta alcanzar un máximo T_m . Este comportamiento se mantiene hasta que la red que conforma la suspensión se rompe gradualmente y, por ende, el torque necesario para mantener una velocidad angular constante disminuye.

Finalmente, cuando todos los enlaces se rompen, la red colapsa y el material fluye sin que las fuerzas hidrodinámicas presentes puedan reincorporar la red.

Cuando se alcanza el torque máximo la suspensión fluye a lo largo de un cilindro virtual definido por las aletas del dispositivo Vane. Esta geometría permite relacionar la tensión de fluencia con el torque máximo medido.

El método Vane no causa perturbaciones significativas a la muestra, lo cual es relevante en el caso de que la suspensión en estudio tenga un carácter tixotrópico, ya que son sensibles a la historia del cizallamiento.

Para determinar la tensión de fluencia se asume que el dispositivo Vane es reemplazado por un cilindro de dimensiones similares, de esta forma, el torque medido es la sumatoria de los torques de la superficie del cilindro:

$$T = (2\pi R_v H) \tau_w R_v + 2 \left(2\pi \int_0^{R_v} \tau_e(r) r dr \right) \quad (69)$$

Donde,

T : Torque medido.

D_v : Diámetro del Vane.

R_v : Radio del Vane ($R_v = D_v/2$).

H : Largo del Vane.

τ_w : Esfuerzo de cizalla en la pared del cilindro.

τ_e : Esfuerzo de cizalla en las tapas del cilindro.

Como τ_e es desconocido, no es posible integrar el segundo término de la ecuación 69. Sin embargo, como una primera aproximación para un Vane de diámetro pequeño, se asume razonable considerar que τ_e está uniformemente distribuido sobre el extremo de ambas superficies y que, por lo tanto, τ_e se puede considerar igual a τ_w .

En el máximo torque se asume que el material fluye instantáneamente a lo largo de la superficie del cilindro y que la tensión de cizalla τ_w es igual a la tensión de fluencia del material τ_F .

Luego la ecuación se reduce a:

$$T_m = \frac{\pi}{2} D_v^2 \left[\frac{H}{D_v} + \frac{1}{3} \right] \tau_F \quad (70)$$

5.8 Modelo fenomenológico del ensayo Vane

La solución explícita de la ecuación constitutiva encontrada por Larenas (2010) para el método Vane se muestra en la ecuación 71 .

$$\tau(t) = v \dot{\gamma}_0 \left[\alpha(\dot{\gamma}_0) + (\lambda_0 - \alpha(\dot{\gamma}_0)) e^{-\frac{1}{\theta} t} \right] \left[1 - e^{-\frac{E}{v} t} \right] \quad (71)$$

La Figura 5.8 muestra un ejemplo de la performance del modelo de Larenas (2010).

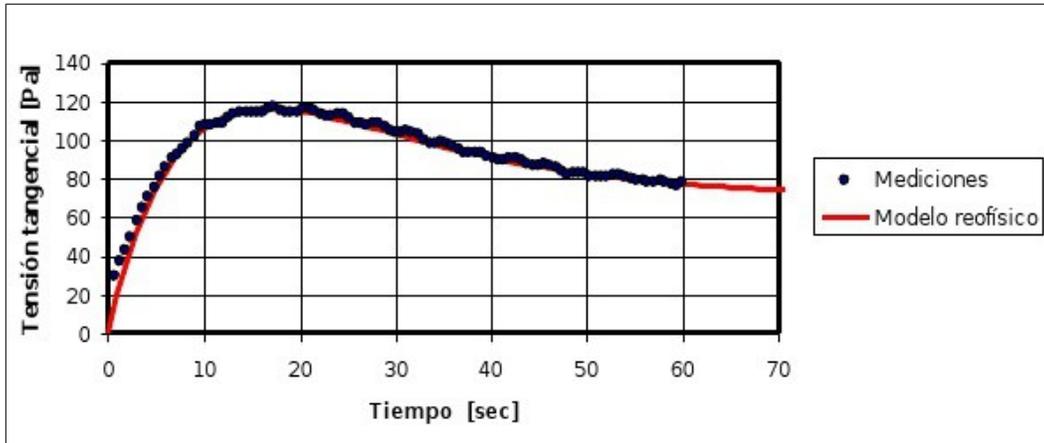


Figura 5.8: Representación del modelo reofísico de Larenas (2010)

Para reducir el número de variables y simplificar las ecuaciones se adoptan los siguientes parámetros y variables adimensionales:

$$\delta = \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \quad (72)$$

$$\alpha = \frac{1}{\theta} \quad (73)$$

$$\beta = \frac{E}{\nu} \quad (74)$$

$$U = e^{-\alpha t} \quad (75)$$

$$V = e^{-\beta t} \quad (76)$$

$$Y = \frac{\tau}{\nu \dot{\gamma}_0} \quad (77)$$

Con los parámetros descritos se construye la ecuación 78.

$$\frac{\tau}{\nu \dot{\gamma}_0} = Y = \lambda_0 [\delta + (1 - \delta) U] [1 - V] \quad (78)$$

O bien:

$$\tau = \nu \dot{\gamma}_0 \lambda_0 [\delta + (1 - \delta) U] [1 - V] \quad (79)$$

Para determinar el parámetro estructural λ , se reemplazan en la ecuación 54 el parámetro U y la variable adimensional δ .

$$\lambda = \lambda_0 [\delta + (1 - \delta) U] \quad (80)$$

5.8.1 Análisis de la máxima tensión tangencial

Derivando la ecuación 79 con respecto al tiempo se obtiene la ecuación 81.

$$\frac{d\tau}{dt} = \nu \dot{\gamma}_0 \lambda_0 [(1 - \delta) \dot{U} (1 - V) - [\delta + (1 - \delta) (1 - V)] \dot{V}] \quad (81)$$

Explicitando las derivadas \dot{U} y \dot{V} :

$$\frac{d\tau}{dt} = \nu \dot{\gamma}_0 \lambda_0 [-(1 - \delta) \alpha U (1 - V) + [\delta + (1 - \delta) U] \beta V] \quad (82)$$

El máximo anula la derivada en un punto M_0 , para el cual $t = t_{máx}$, $U_0 = e^{-\alpha t_{máx}}$ y $V_0 = e^{-\beta t_{máx}}$.

Entonces, desde la ecuación 82 se obtiene:

$$(1-\delta)\alpha U_0(1-V_0)=[\delta+(1-\delta)U_0]\beta V_0 \quad (83)$$

Despejando V_0 :

$$V_0 = \frac{\alpha(1-\delta)U_0}{\beta\delta+(1-\delta)U_0(\alpha+\beta)} \quad (84)$$

Considerando:

$$M=(1-\delta)U_0 \quad (85)$$

Y combinando las ecuaciones 79 , 84 y 85 se obtiene un valor máximo de la tensión tangencial expresado en la ecuación 86.

$$\tau_{m\acute{a}x}(t_{m\acute{a}x}) = \nu \dot{\gamma}_0 \lambda_0 \frac{(\delta+M)^2}{\delta\beta+(\alpha+\beta)M} \beta \quad (86)$$

Combinando las ecuaciones 79 y 86 se obtiene:

$$\frac{\tau}{\tau_{m\acute{a}x}} = \frac{\delta\beta+(\alpha+\beta)M}{(\delta+M)^2\beta} [\delta+(1-\delta)U][1-V] \quad (87)$$

Considerando,

$$\tau' = \tau_{m\acute{a}x} \frac{\delta\beta+(\alpha+\beta)M}{(\delta+M)^2\beta} \quad (88)$$

Luego, la expresión final corresponde a la ecuación 89 .

$$\tau = \tau' [\delta+(1-\delta)U][1-V] \quad (89)$$

5.8.2 Estudio de la velocidad de deformación angular

En las ecuaciones antes vistas se supone conocida la velocidad de deformación angular $\dot{\gamma}_0$.

Se considera el movimiento de un fluido entre dos cilindros concéntricos de radios R_1 y R_2 con ($R_1 < R_2$), el cilindro interior gira a una velocidad angular Ω en torno al eje común. El campo de flujo consta de en una zona cizallada hasta un radio R_F donde se alcanza la tensión de fluencia (Figura 5.9). Más allá no existe cizalle y el fluido no gira.

El campo de flujo consta de en una zona cizallada hasta un radio R_F donde se alcanza la tensión de fluencia (Figura 5.9). Más allá no existe cizalle y el fluido no gira.

Se estimará $\dot{\gamma}_0$ partir de la velocidad angular Ω .

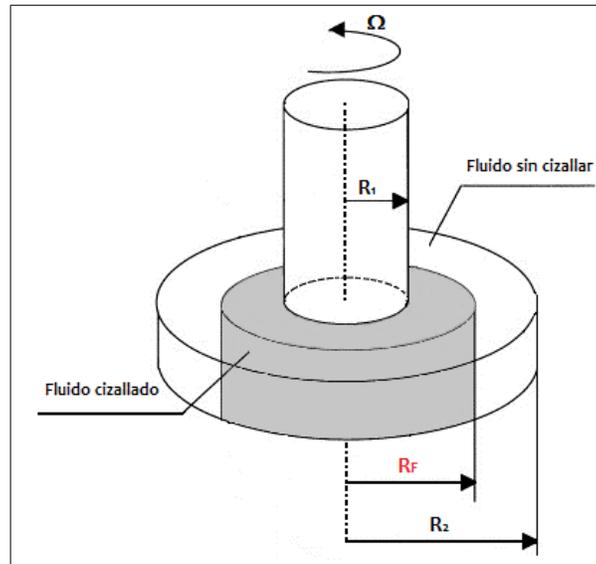


Figura 5.9: Campo de flujo

La Figura 5.10 muestra el perfil de la velocidad angular local $\omega(R)$ así como un croquis del sistema.

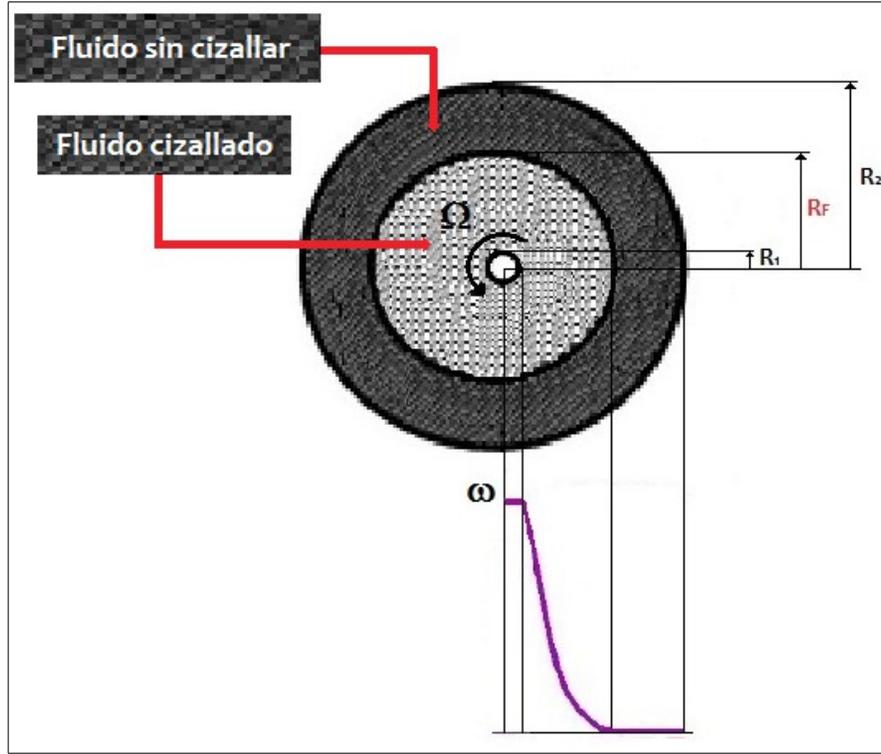


Figura 5.10: Perfil de la velocidad angular local $\omega(R)$ y croquis del sistema (Fuentes, 2012)

$\omega(R)$ puede describirse mediante una integral exacta de las ecuaciones del movimiento. Se muestra aquí una modificación de la fórmula para el radio de fluencia R_F dada por Muravleva *et al.* (2010).

$$\frac{\tau_F}{\mu_B \Omega} \left[\left(\frac{R_F}{\kappa} \right)^2 - \ln \left(\frac{R_F}{\kappa} \right)^2 - 1 \right] = 2 \tag{90}$$

Donde,

$$\kappa = R_1 / R_2.$$

La ecuación 91 expresa la relación entre esfuerzo y radio (Muravleva *et al.*, 2010).

$$\tau R^2 = C \quad (91)$$

Donde,

C : Valor constante.

Reemplazando la ecuación 91 en la ecuación 90 se obtiene:

$$\frac{\tau_F}{\mu_B \Omega} \left[\left(\frac{\tau_1}{\tau_F} \right) R_2^2 - \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_F} R_2^2 \right) - 1 \right] = 2 \quad (92)$$

La relación entre la tasa de corte y el esfuerzo tangencial del modelo Bingham cuando $\tau \geq \tau_F$ se establece en la ecuación 93.

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_1 - \tau_F}{\mu_B} \quad (93)$$

Reemplazando la ecuación 93 en la ecuación 92 se obtiene:

$$\dot{\gamma}_0 = 2 \Omega \frac{\left(\frac{\tau_1}{\tau_F} - 1 \right)}{\left[\frac{\tau_1}{\tau_F} R_2^2 - \ln \left(\frac{\tau_1}{\tau_F} R_2^2 \right) - 1 \right]} \quad (94)$$

Considerando:

$$\tau^* = \frac{\tau_1}{\tau_F} \quad (95)$$

La ecuación 94 queda expresada como:

$$\dot{\gamma}_0 = 2 \Omega \frac{\tau^* - 1}{\tau^* R_2^2 - \ln(\tau^* R_2^2) - 1} = 2 \Omega \cdot F(\tau^*) \quad (96)$$

5.8.2.1 Estimación del parámetro τ^*

Se estima el valor del parámetro τ^* mediante el método de Newton-Raphson con un error relativo menor a 0,00001. La información se obtiene de ensayos reológicos Vane de procedencia confidencial.

El método se aplica a la función expresada en la ecuación 97.

$$f(\tau^*) = 2\Omega \frac{\tau^* - 1}{\tau^* R_2^2 - \ln(\tau^* R_2^2) - 1} - \dot{\gamma}_0 \quad (97)$$

La Tabla 11 presenta los valores estimados de τ^* .

Tabla 11: Estimación del parámetro τ^* por medio del método de Newton-Raphson				
$\Omega [s^{-1}]$	$R_2 [m]$	τ^*	$\dot{\gamma}_0 [s^{-1}]$	
			Modelo (Ecuación 96)	Dato
0,0503	0,065	4,0602	0,0988	0,0998
10,4720	0,065	4,0849	21,0000	21,0000
$\Omega [s^{-1}]$	$R_2 [m]$	Valor promedio de τ^*	$\dot{\gamma}_0 [s^{-1}]$	
			Modelo (ecuación 96)	Dato
0,0503	0,065	4,0726	0,1003	0,0998
10,4720	0,065	4,0726	20,9479	21,000

5.8.2.1.1 Discusión de los resultados

El parámetro τ^* se estima en un valor promedio de 4,0726 para los datos experimentales en estudio. Reemplazando este valor en $F(\tau^*)$ (ecuación 96) se deduce que se aproxima a 1, como se muestra en la ecuación 98.

$$\frac{\tau^* - 1}{\tau^* R_2^2 - \ln(\tau^* R_2^2) - 1} \approx 1 \quad (98)$$

Luego, el valor de $\dot{\gamma}_0$ se aproxima a la expresión de la ecuación 99.

$$\dot{\gamma}_0 = 2\Omega \quad (99)$$

5.8.3 Metodología para estimación de parámetros

5.8.3.1 Optimización de los parámetros α y β

- Obtener desde los datos experimentales la dupla $(\tau_{m\acute{a}x}, t_{m\acute{a}x})$.
- Definir el parámetro δ .
- Para cada par (α, β) :
 - Calcular U_0 , M y τ' .
 - Para cada tiempo experimental:
 - Calcular U y V .
 - Calcular el esfuerzo tangencial τ del modelo (ecuación 89).
 - Calcular el coeficiente de correlación múltiple para estimar la desviación entre los τ del modelo y los τ experimentales.
- Elegir el par (α, β) que maximiza el coeficiente de correlación múltiple (ecuación 100).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum [\hat{\tau}(i) - \tau(i)]^2}{\sum \left(\hat{\tau}(i) - \frac{\sum \hat{\tau}(i)}{N} \right)^2} \quad (100)$$

- Con la dupla $(\alpha_{\acute{o}ptimo}, \beta_{\acute{o}ptimo})$:
 - Construir la curva teórica.

- Determinar $\dot{\gamma}_0$ en función de Ω utilizando la ecuación 96.

5.8.3.2 Parámetro estructural λ

- Para la dupla $(\alpha_{\text{óptimo}}, \beta_{\text{óptimo}})$:
 - Calcular U , V y τ .
- Calcular λ (ecuación 80).

Para evitar la estimación de la condición inicial λ_0 se supone que el fluido antes de ser sometido al experimento se deja en reposo suficiente tiempo para que las microestructuras se formen, luego se utiliza el valor de 1 para el primer segmento (A). Los dos siguientes tramos (B y C) tendrán como valor de λ_0 el λ final del tramo anterior.

5.8.4 Análisis del comportamiento tixotrópico

Uno de los test utilizados para estudiar el comportamiento tixotrópico que puede presentar un material corresponde al 3-ITT (3 Interval Thixotropy Test). Este test consiste en imponer una tasa de corte constante durante un período de tiempo, seguido por un repentino cambio (aumento y posterior disminución) del nivel de la velocidad de deformación angular para monitorear el esfuerzo aplicado en el tiempo.

En cada intervalo de tiempo se mantiene constante la velocidad de deformación angular, lo cual permite examinar la dependencia temporal de la estructura. Si el material no presentara un comportamiento dependiente del tiempo, se esperaría observar valores de esfuerzo constante (Larenas, 2010).

El primer intervalo de tiempo simula el estado quiescente del material antes de su procesamiento, por lo tanto, la muestra se somete a una baja velocidad de deformación angular para no introducir errores en la medición del torque máximo (debido a resistencias viscosas, la inercia del instrumento, etc). Nguyen y Boger (1983) determinaron que a velocidades entre 0,1 y 8 [rpm] las mediciones del esfuerzo de fluencia no se ven afectadas.

El segundo intervalo de tiempo simula el procesamiento del material, por lo que se somete a una velocidad de deformación angular alta.

El tercer intervalo de tiempo simula la recuperación de la estructura que se lleva a cabo en forma posterior al procesamiento, debido al reposo.

La Figura 5.11 representa la respuesta de un material tixotrópico al ser sometido al 3-ITT.

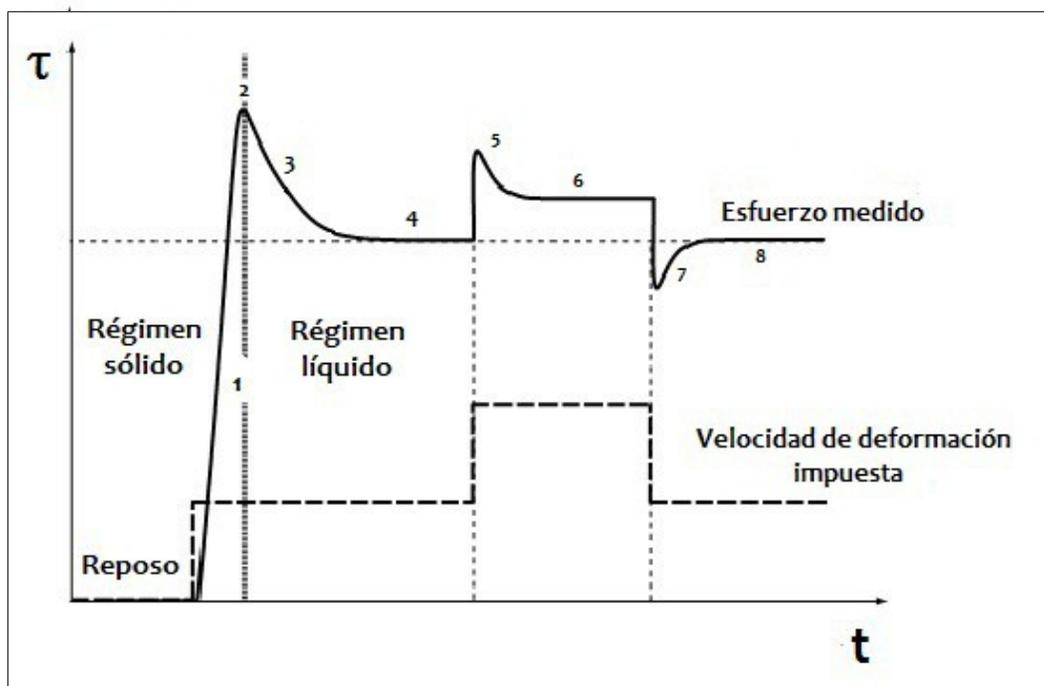


Figura 5.11: Variación del esfuerzo en el tiempo para un material en pasta con comportamiento tixotrópico, sometido a cambios escalonados de velocidad de deformación angular (Coussot, 2005)

A continuación se detallan las zonas destacadas de la Figura 5.11 :

- Zona 1: Comportamiento elástico del sistema.
- Zona 2: Esfuerzo de fluencia.

Las fuerzas de interacción entre partículas determinan para cada partícula un pozo de energía potencial, es decir, una posición de equilibrio para la cual la energía es mínima. Mientras la energía aplicada a un sistema sea menor que un valor dado, la partícula no deja su pozo. Cuando el esfuerzo aplicado se detiene, la partícula vuelve atrás a su posición inicial (comportamiento elástico). Sin embargo, si la energía dada al sistema es mayor que un valor umbral, la partícula entonces es capaz de dejar su pozo de energía potencial y el flujo ocurre (esfuerzo de fluencia). En el caso de los sistemas que presentan un comportamiento tixotrópico, la profundidad del pozo de energía potencial aumenta con el tiempo de reposo debido al movimiento browniano y una posible evolución de las interacciones coloidales (Roussel, 2006).

- **Zona 3:** Flujo y ruptura de los enlaces intermoleculares de la estructura (breakdown). Se presenta una disminución de la viscosidad aparente debido a una fluidización por cizalla (shear thinning) (Barnes, 1997).
- **Zona 4:** Equilibrio alcanzado después de un cizallamiento a velocidad de deformación angular constante.
- **Zona 5:** Incremento súbito del esfuerzo para luego decrecer a un estado estacionario (stress overshoot) (Coussot, 2005).
- **Zona 6:** La velocidad de deformación angular es alta y se alcanza un balance entre los fenómenos de reestructuración y destrucción (Coussot, 2005)
- **Zona 7:** Se observa una baja repentina del esfuerzo al disminuir súbitamente la velocidad de deformación angular para luego crecer monotónicamente (build-up). El movimiento browniano es capaz de lentamente mover los elementos de la microestructura a posiciones más favorables para la reconstitución de la estructura (Barnes, 2000). Este proceso ocurre a una tasa diferente a la de la ruptura de la estructura (Barnes, 1997).
- **Zona 8:** Equilibrio alcanzado cuando se cizalla a una velocidad de deformación angular constante.

Los fenómenos observados en la zona 5 y la 7 ocurren debido a la diferencia de densidad entre las partículas y el fluido. Cuando la densidad de las partículas es mayor a la de su fluido transportador, y ellas están viajando a una velocidad distinta a la de dicho fluido, existe un tiempo característico de respuesta al esfuerzo de corte aplicado. Además, existe una dinámica propia entre las partículas debido a interacciones físicas y químicas tales como diferencias de cargas eléctricas superficiales, fuerzas de Van der Waals y movimiento browniano (Larenas, 2010).

5.8.4.1 Aplicación del modelo de Larenas a relaves mineros chilenos

El método de Larenas fue aplicado a relaves mineros de procedencia confidencial. Sus propiedades se describen en la Tabla 12.

pH	7,5
D_{10}	4,04 [μm]
D_{50}	42,65 [μm]
D_{80}	179,4 [μm]
Densidad de sólidos	2,740 [g/cc]
Diámetro vaso	65,00 [mm]

Se estudian los valores de los parámetros y variables adimensionales del modelo de Larenas (2010) para un rango de concentraciones de sólido (Tabla 13).

Tabla 13: Estimación de parámetros							
C_d [%]	$\tau_{máx}$ [Pa]	$t_{máx}$ [s]	$\dot{\gamma}_0$ [s ⁻¹]	α	β	R^2	λ
64 (A)	17,5	19,2	0,0998	0,005	0,2370	0,953	0,7408
64 (B)	26,5	69,03	21	0,0092	0,4431	0,944	0,4001
64 (C)	11,3	979,3	0,0998	0,01	0,2204	0,628	0,2593
66 (A)	40,6	17,4	0,0998	0,0066	0,1888	0,963	0,6731
66 (B)	49,1	69,09	21	0,0103	0,8827	0,986	0,2908
66 (C)	17,5	978,6	0,0998	0,9995	0,3659	0,842	0,0727
68 (A)	41,2	16,8	0,0998	0,0073	0,2095	0,968	0,6453
68 (B)	48,5	69,06	21	0,0061	0,3490	0,994	0,2709
68 (C)	17,5	975,7	0,0998	0,0027	0,5129	0,662	0,2498
70 (A)	71,7	16,2	0,0998	0,0105	0,1948	0,978	0,5326
70 (B)	76,7	69,02	21	0,0060	0,5364	0,998	0,2021
70 (C)	18,6	979,2	0,0998	0,0112	0,2730	0,780	0,1279
72 (A)	114	16,2	0,0998	0,0123	0,1551	0,979	0,4781
72 (B)	106	69,03	21	0,0057	0,4269	0,998	0,1692
72 (C)	32,7	975	0,0998	0,0059	0,5414	0,713	0,1465

Los resultados gráficos del ajuste del método a los datos experimentales del ensayo Vane y la evolución del coeficiente de estructura se presentan entre la Figura 5.12 y la Figura 5.26.

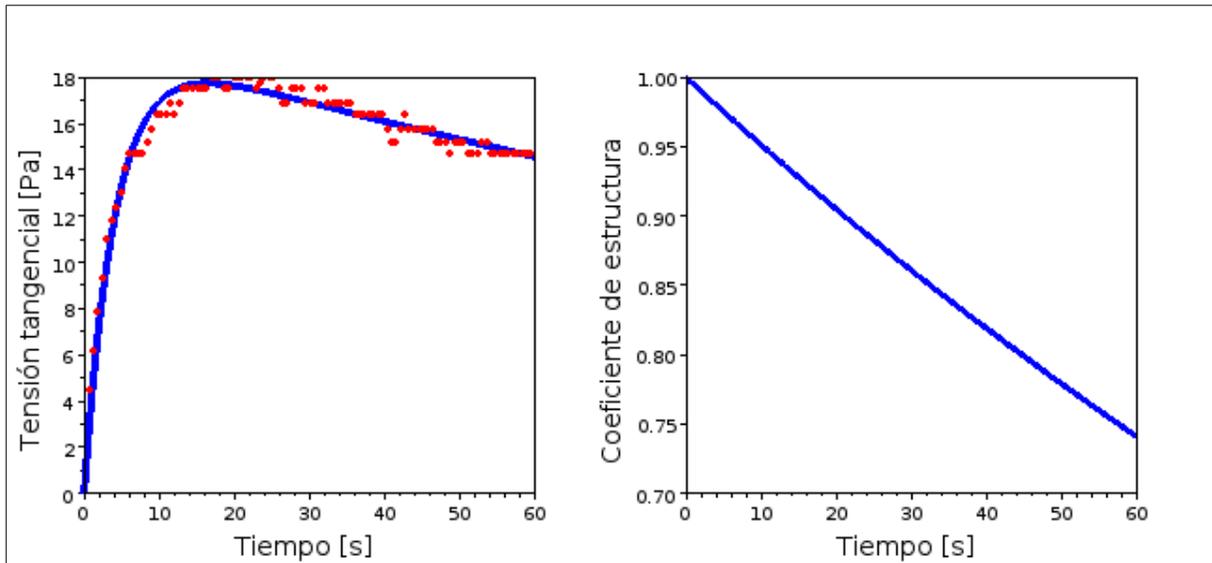


Figura 5.12: Curva de ajuste para una concentración del 64% (A)

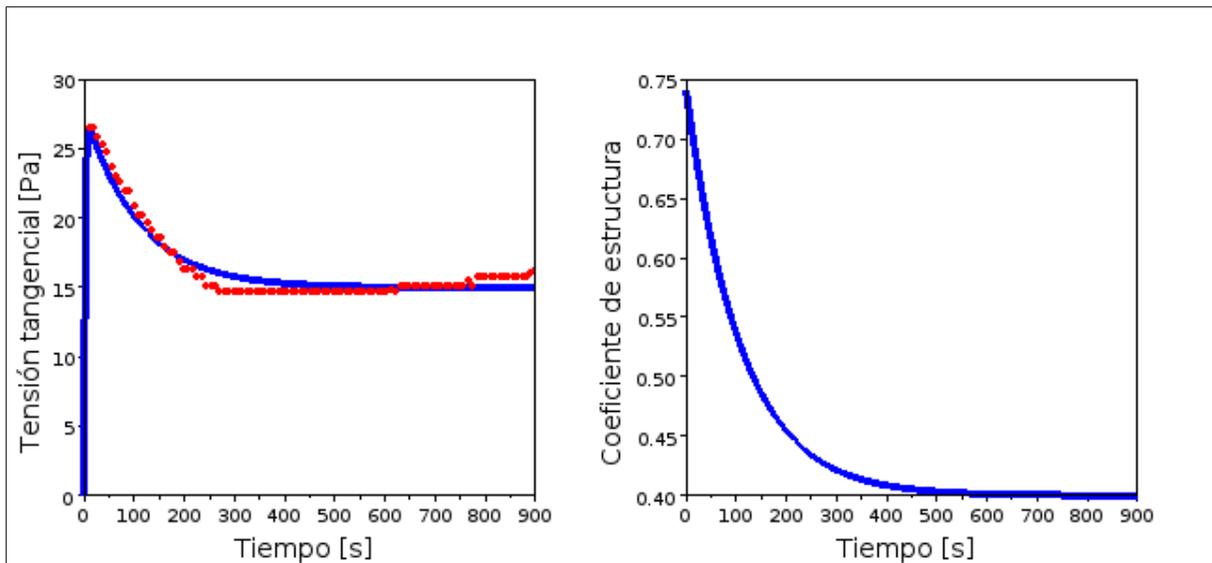


Figura 5.13: Curva de ajuste para una concentración del 64% (B)

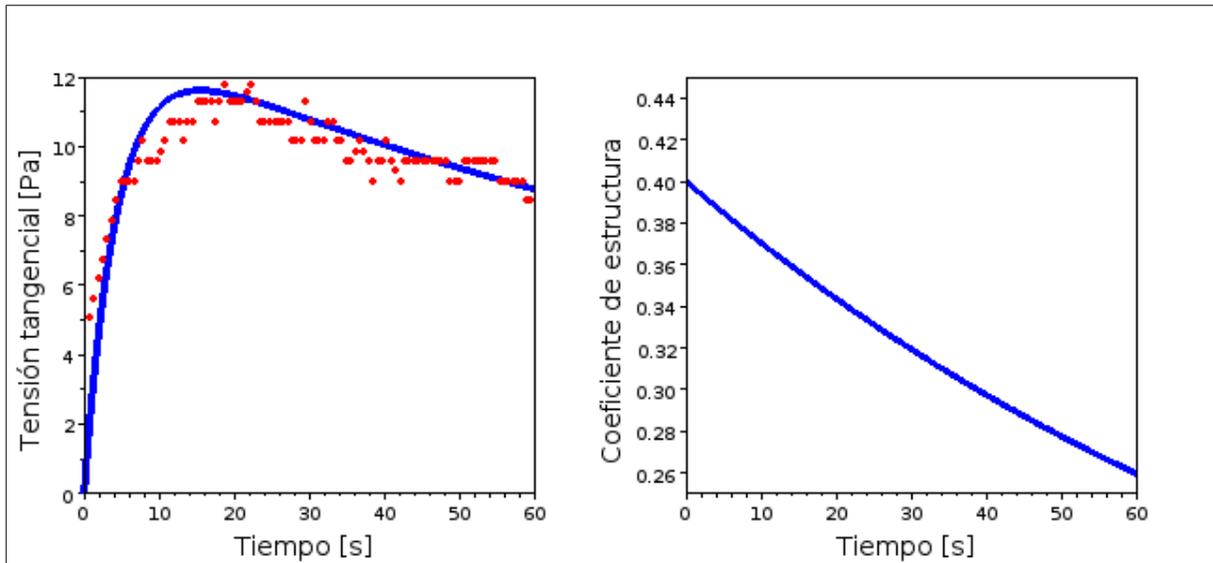


Figura 5.14: Curva de ajuste para una concentración del 64% (C)

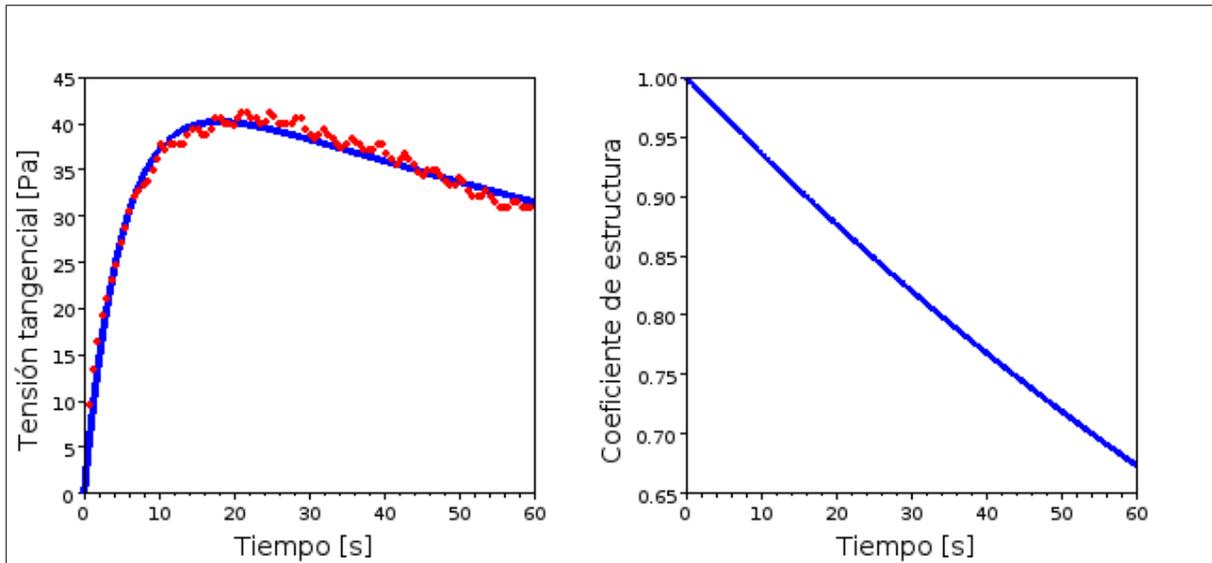


Figura 5.15: Curva de ajuste para una concentración del 66% (A)

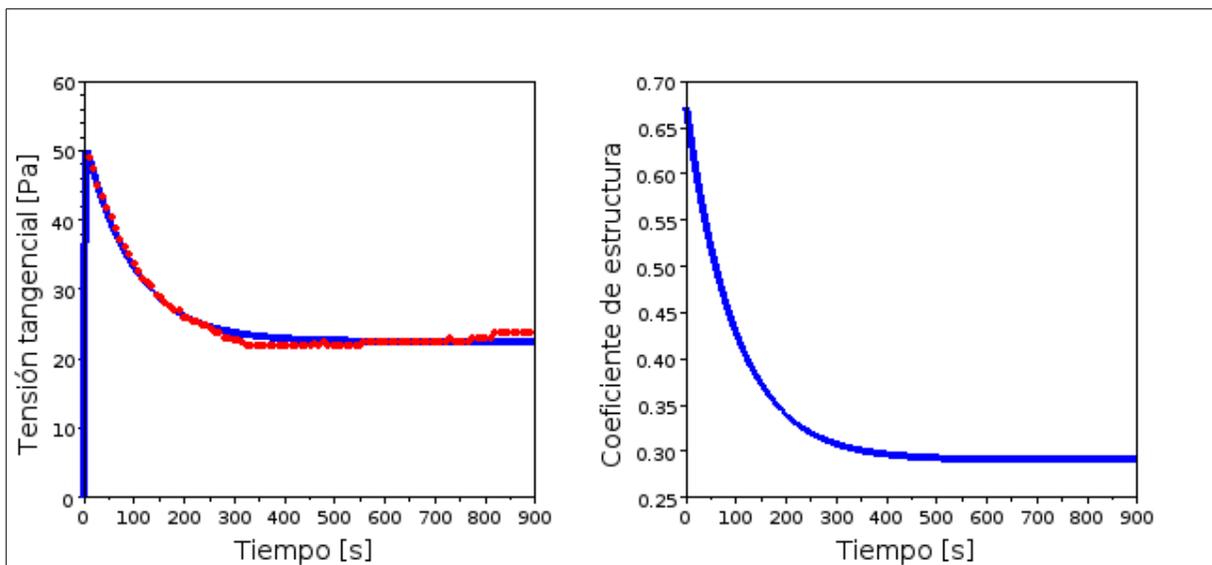


Figura 5.16: Curva de ajuste para una concentración del 66% (B)

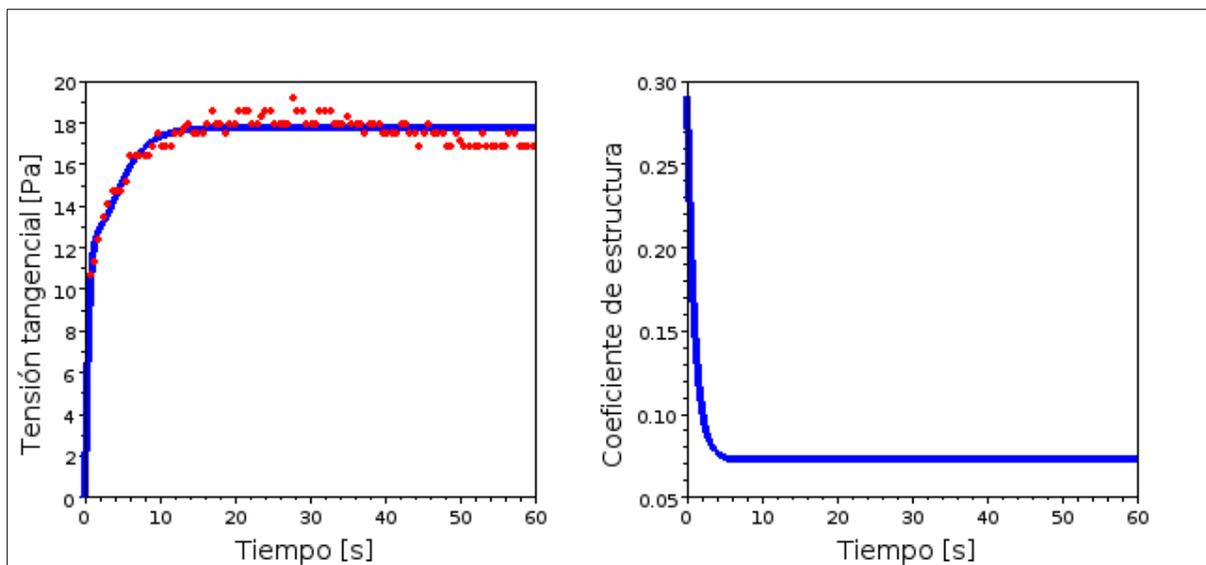


Figura 5.17: Curva de ajuste para una concentración del 66% (C)

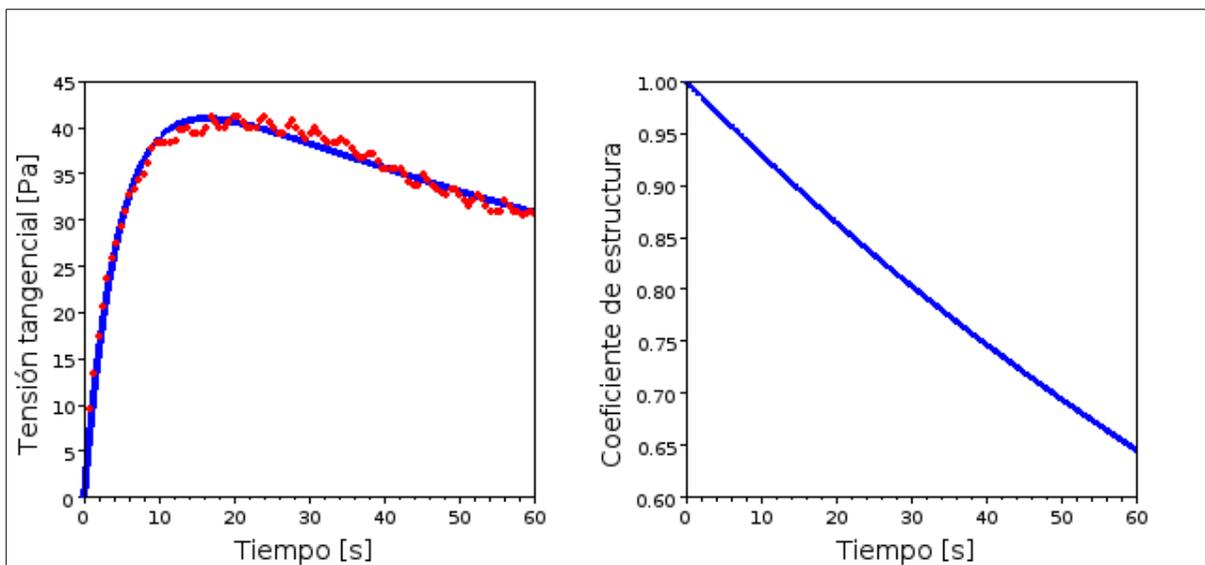


Figura 5.18: Curva de ajuste para una concentración del 68% (A)

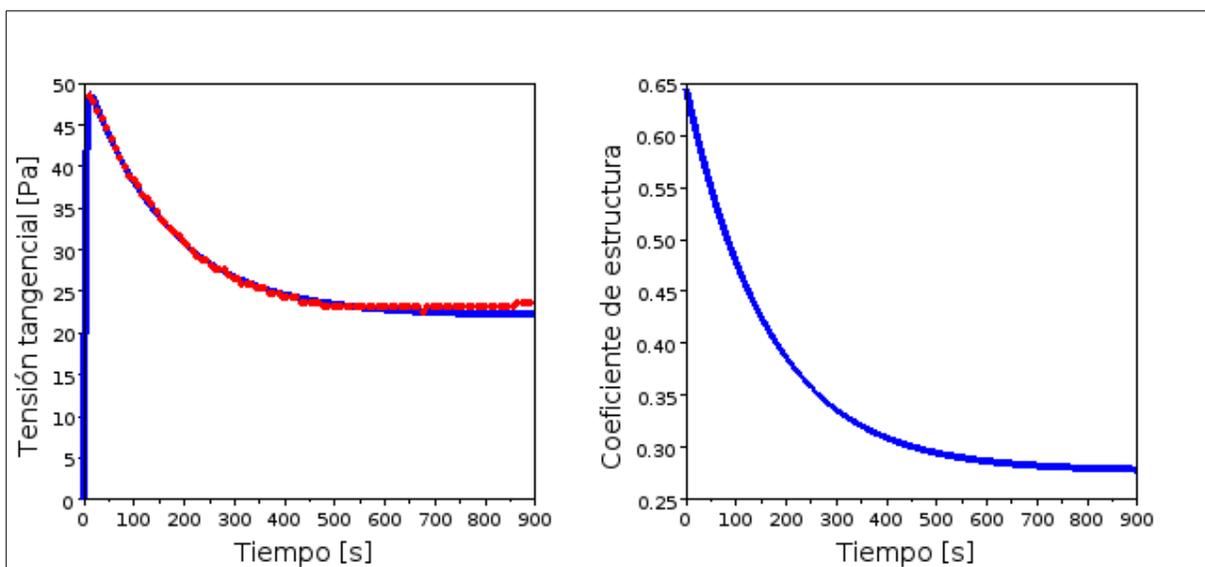


Figura 5.19: Curva de ajuste para una concentración del 68% (B)

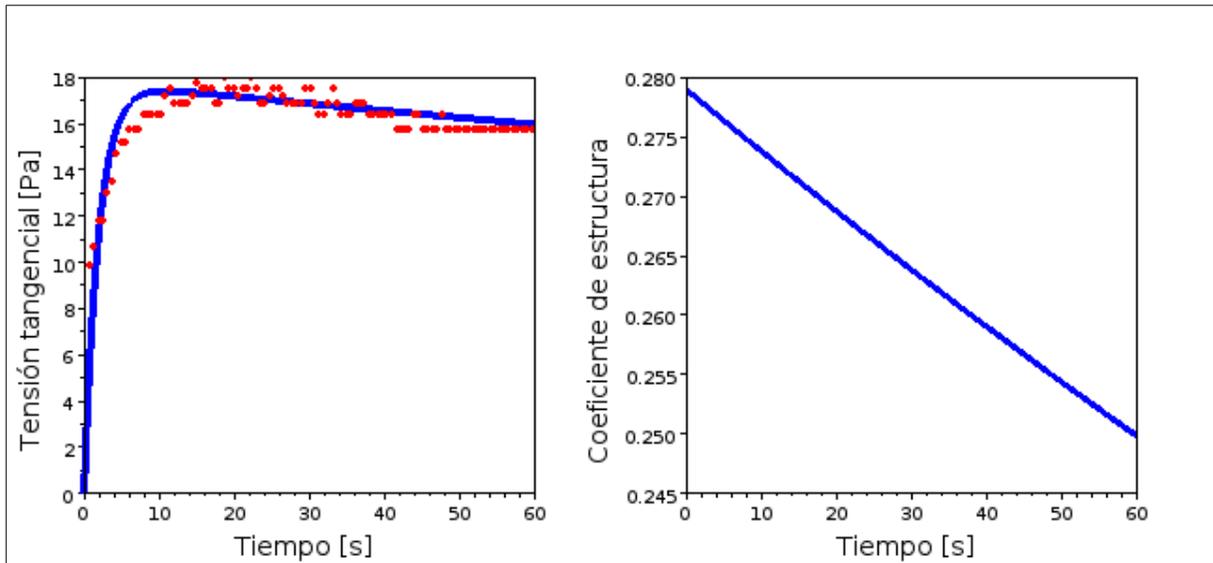


Figura 5.20: Curva de ajuste para una concentración del 68% (C)

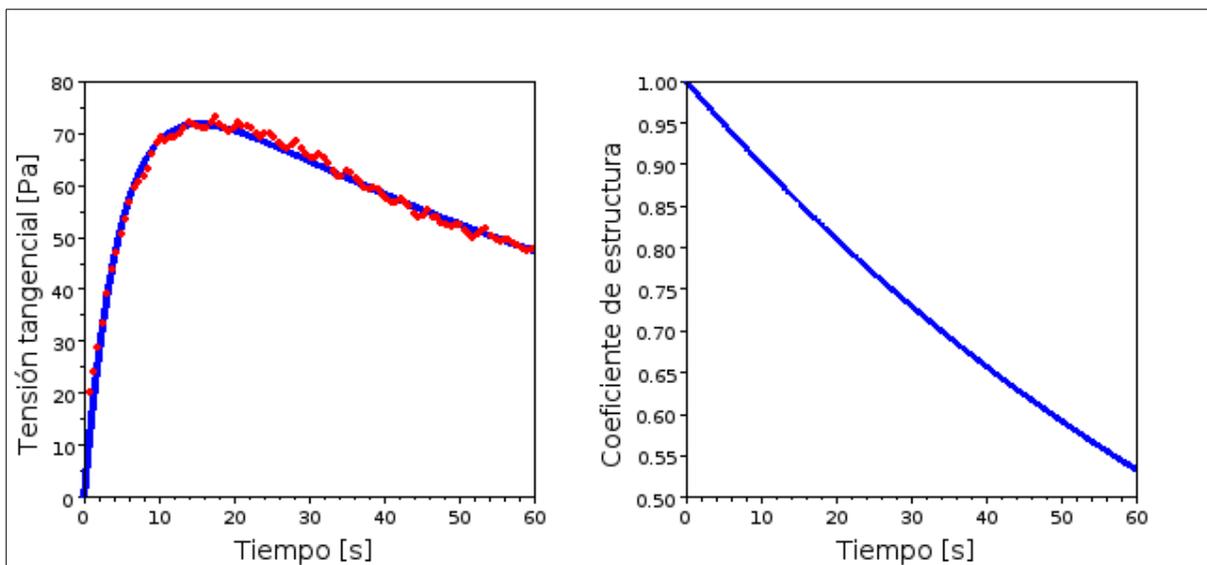


Figura 5.21: Curva de ajuste para una concentración del 70% (A)

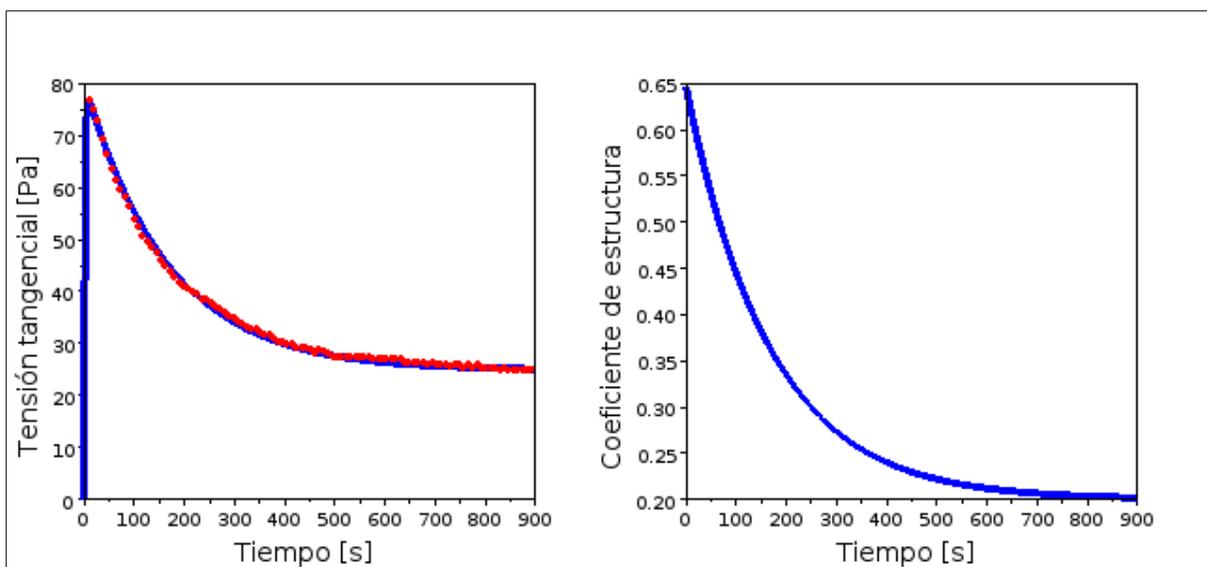


Figura 5.22: Curva de ajuste para una concentración del 70% (B)

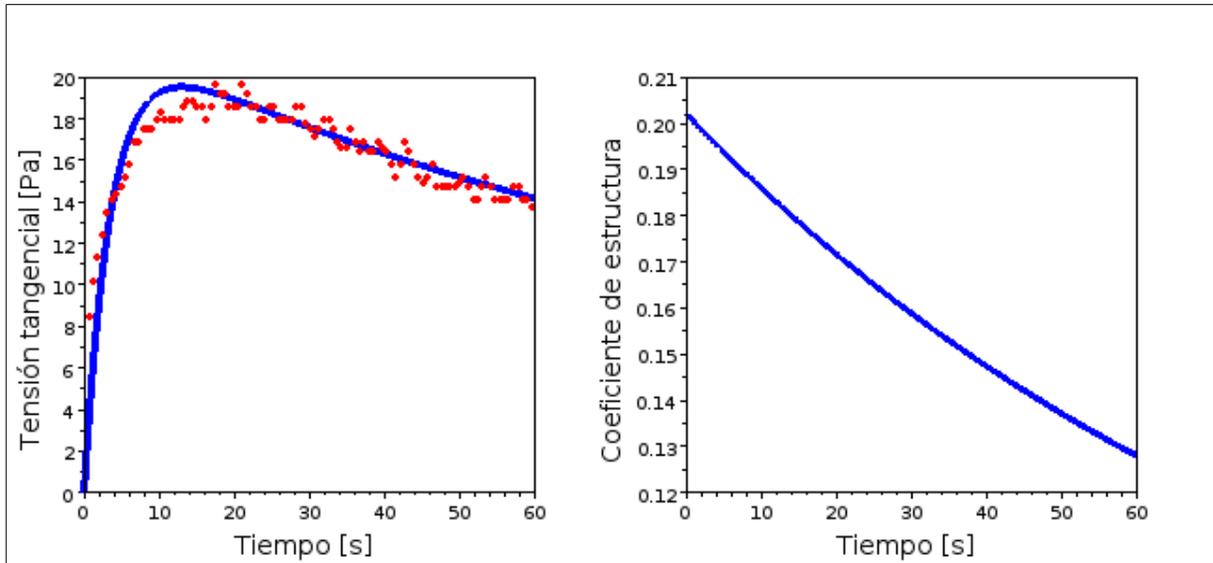


Figura 5.23: Curva de ajuste para una concentración del 70% (C)

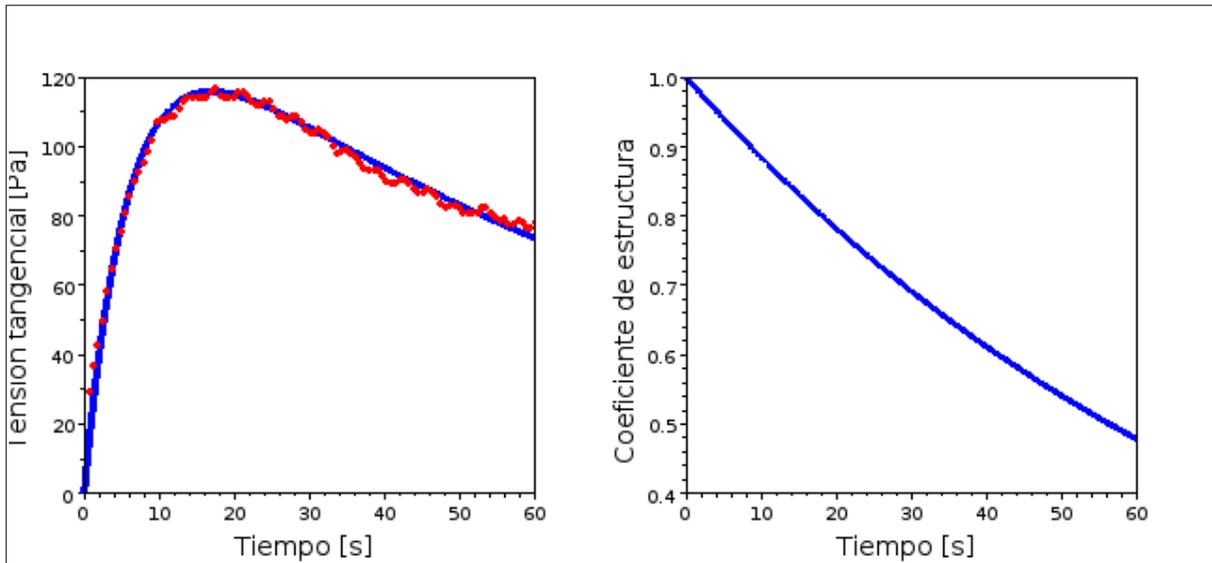


Figura 5.24: Curva de ajuste para una concentración del 72% (A)

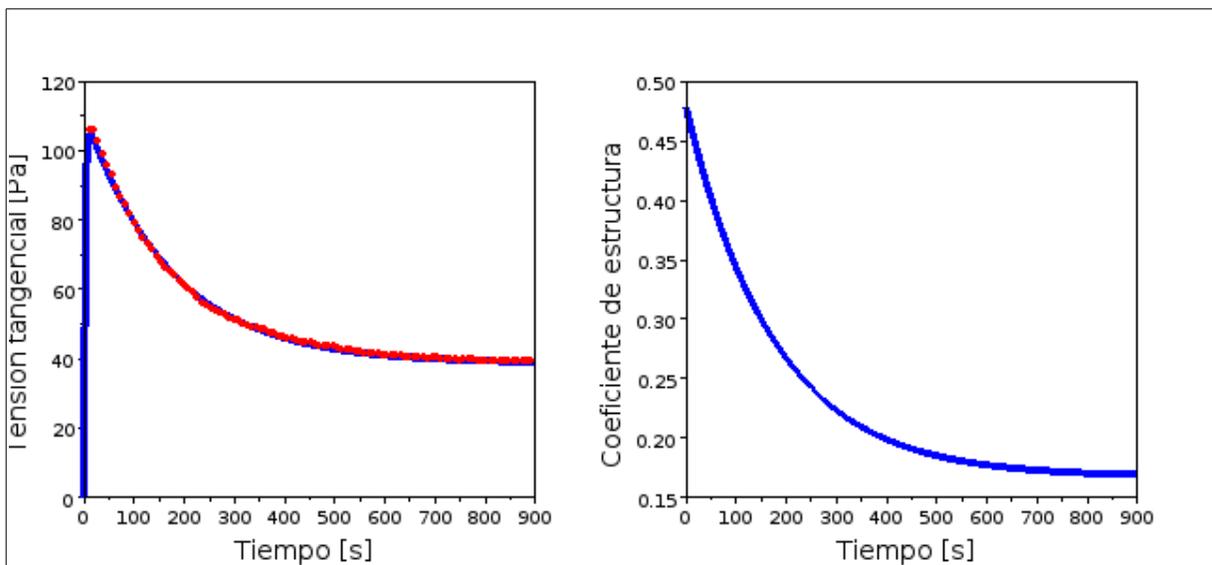


Figura 5.25: Curva de ajuste para una concentración del 72% (B)

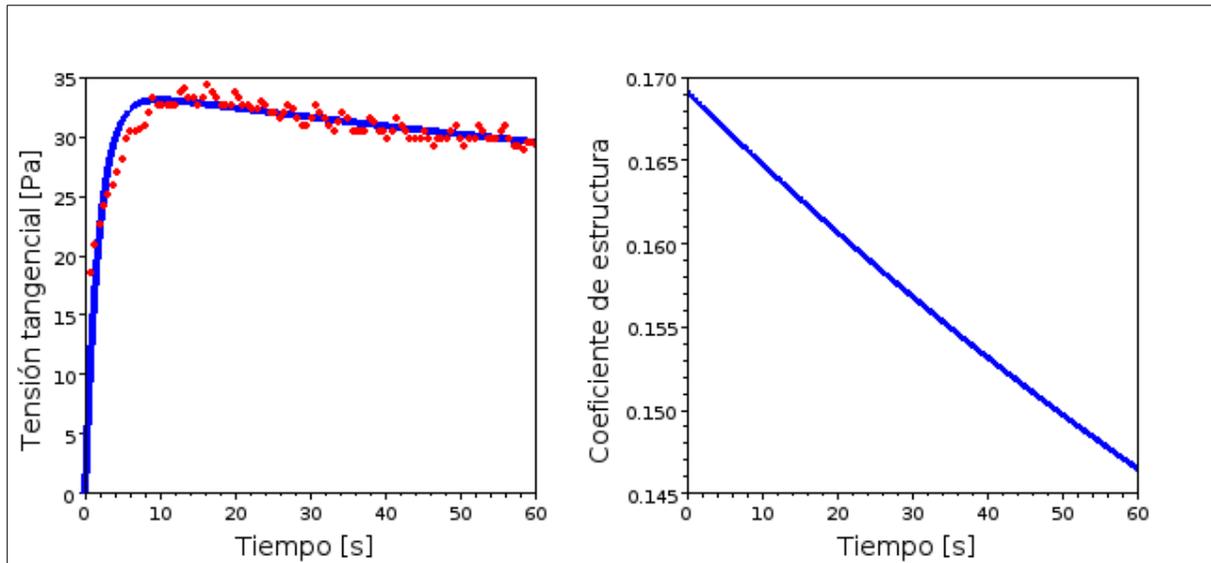


Figura 5.26: Curva de ajuste para una concentración del 72% (C)

5.8.4.1.1 Discusión de los resultados

La formación de regiones con muy diferentes propiedades de flujo fue estudiada por Coussot (2005). Explica que las zonas no cizalladas que se forman, no son un artefacto o una perturbación que puede ser evitada, sino que reflejan el comportamiento efectivo del material el cual es incapaz de fluir en un rango de $\dot{\gamma}$.

Coussot (2005) expone que si un material está siendo cizallado a una alta velocidad de deformación angular y se detiene el cizallamiento hasta un estado de reposo, comienza un proceso de reestructuración (la viscosidad aparente del fluido tiende a incrementar). A mayor tiempo de reposo, los elementos de la microestructura se mueven a posiciones energéticamente más favorables. Si la velocidad sólo se disminuye, se establece una competencia entre los procesos de reestructuración y desestructuración donde la tasa de reestructuración permanece más alta.

En el intervalo C se monitorea la reestructuración del material bajo esta última condición. Debido a la disminución de la velocidad de deformación (la cual tiene el mismo valor que en el intervalo A) el esfuerzo medido aumenta, indicando la

reestructuración del material. La tasa a la cual ocurre esta reestructuración y el porcentaje de material que es reestructurado podrían depender del cizallamiento continuo al cual está siendo sometida la muestra y al “efecto osmótico” descrito por Roussel, Le Roy y Coussot (2003).

Estos investigadores explican un complejo fenómeno que influye en el decrecimiento de la región cizallada (a esfuerzos menores al de fluencia). La reestructuración de la parte no cizallada podría inducir un tipo de “efecto osmótico” en la región cizallada tendiendo a hacerla desaparecer por un incremento de la viscosidad. Concluyen que este fenómeno no está simplemente asociado a la reestructuración del material interno sino también a una compleja interacción entre una delgada capa y dicho material.

La existencia de un esfuerzo de fluencia en este intervalo se debe a la reestructuración del material. Coussot (2005) advierte que la tensión de fluencia observada puede ser seriamente afectada por la historia del flujo y por el tiempo de reposo precedente al test, lo cual explica la violenta disminución del valor de esta tensión de fluencia.

Se estudia el valor de los parámetros de ajuste cuando el modelo de Larenas (2010) se aplica a un mayor rango de concentraciones de sólido.

La calidad del ajuste entre el modelo fenomenológico para el método Vane (Larenas, 2010) y las mediciones, en los intervalos A y B resulta satisfactoria.

Analizando el coeficiente de estructura con respecto a la concentración de sólido, se obtiene una disminución lineal en los intervalos A y B (Figura 5.27 y Figura 5.28).

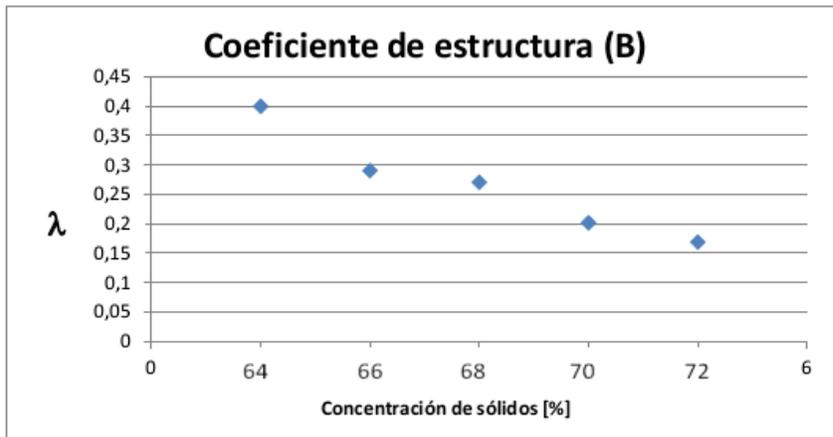
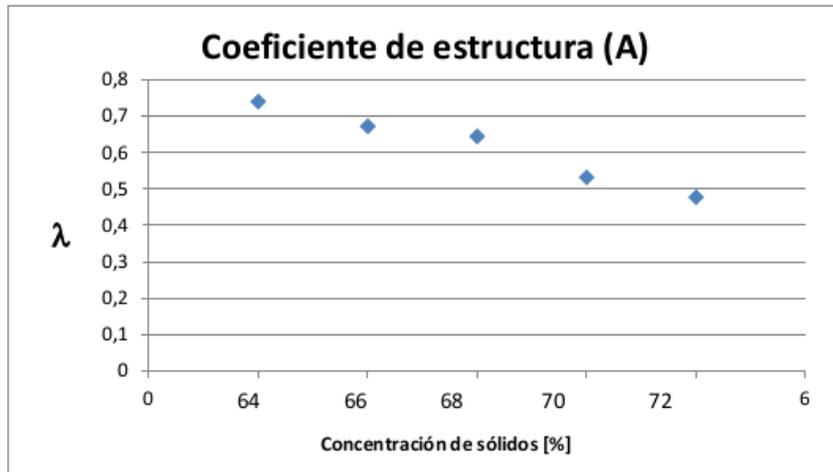


Figura 5.28: Parámetro estructural para un rango de concentraciones de sólido en el intervalo B

En el tramo C no se obtiene un ajuste satisfactorio y tampoco se aprecia una disminución lineal en el coeficiente de estructura.

5.8.4.2 Parámetros reológicos: viscosidad y tensión de fluencia

La viscosidad y la tensión de fluencia también dependen de la concentración de partículas. Los modelos que describen la relación entre parámetros

reológicos y concentración de sólidos utilizados en este estudio corresponden al de Krieger y Dougherty (1959) y Heymann *et al.* (2002).

Utilizando la información reológica del relave analizado, se determinan los valores de los parámetros que ajustan a los modelos. La Tabla 14 muestra estos valores.

Tabla 14: Parámetros de ajuste para los modelos de Heymann <i>et al.</i> (2002) y Krieger y Dougherty (1959)			
	τ_0	B	Φ_m
Modelo de Heymann et al.	2,74 [Pa]	-	0,532
Modelo de Krieger y Dougherty	-	7,03	1,00

La Tabla 15 muestra los valores de la viscosidad, de la tensión de fluencia calculada y experimental para las distintas concentraciones de sólidos.

Tabla 15: Viscosidad (K y D), tensión de fluencia (H et al.) y tensión de fluencia experimental			
C_p [%]	μ_B [Pa·s]	τ_F [Pa]	τ_F experimental [Pa]
64	0,0323	35,72	17,5
66	0,0408	49,36	40,6
68	0,0589	88,88	41,2
70	0,0761	146,85	71,1
72	0,092	284,05	114,0

Capítulo 6: Conclusiones

- Para una suspensión con un tamaño de partícula dado, se puede trazar un único diagrama representativo de Coussot y Ancy (1999). En éste se puede representar la velocidad de deformación angular crítica que separa los distintos tipos de interacciones predominantes en una suspensión concentrada cizallada.
- Cuando el diámetro de las partículas aumenta dentro de una suspensión donde las interacciones predominantes ocurren sin contacto, la velocidad de deformación angular crítica debe disminuir a valores muy pequeños para que dichas interacciones sean del tipo coloidal o browniano. Ésto se traduce a que las curvas presentes en el diagrama de Coussot y Ancy (1999), correspondientes a la transición de las interacciones brownianas/hidrodinámicas y coloidales/hidrodinámicas, se desplacen hacia valores muy pequeños de velocidad. Por lo tanto, bajo condiciones establecidas, existe un tamaño de partícula sobre el cual, los efectos hidrodinámicos prevalecen.
- Cuando las interacciones ocurren principalmente por medio de contactos, la suspensión se puede mantener en régimen friccional, lubricante o colisional. Suspensiones de partículas pequeñas no se mantienen en régimen friccional si se aumenta demasiado la intensidad de flujo. Los valores límites estimados para mantenerse en un régimen friccional, bajo condiciones dadas, corresponden a ($r=354[\mu\text{m}]$ y $\dot{\gamma}=800[\text{s}^{-1}]$).
- El análisis de los números adimensionales del diagrama de Coussot y Ancy (1999) permite concluir que los relaves chilenos tienen como interacciones predominantes las de tipo friccional. Además, el análisis del número de Stokes indica que los relaves podrían tener un comportamiento de dos fases (comportamiento bimodal), lo cual es concordante con lo

demostrado por Sengun y Probststein (1989) para concentraciones de sólidos menores a 35 %.

- El efecto de las fuerzas del movimiento browniano y de las de Van der Waals son generalmente despreciables comparadas con el efecto de la fuerza gravitatoria, debido a los diámetros de las partículas de los relaves chilenos. El contacto entre dos partículas no ocurre fácilmente debido a las fuerzas repulsivas que se desarrollan por su aproximación. Sin embargo, si las partículas son sometidas a fuerzas externas suficientemente grandes, como presión o gravedad, los contactos directos pueden ocurrir (Coussot y Ancy, 1999).
- La presencia de bandas de cizalle, en el análisis de una muestra que presenta un comportamiento tixotrópico, no corresponde a un artefacto o a una perturbación que puede ser evitada, sino que reflejan el comportamiento efectivo del material el cual es incapaz de fluir en un rango de $\dot{\gamma}$.
- La tasa a la cual se reestructura un material que presenta un comportamiento tixotrópico y su porcentaje de reestructuración podría depender del cizallamiento continuo al cual está siendo sometida la muestra y al “efecto osmótico” descrito por Roussel, Le Roy y Coussot (2003).
- La calidad del ajuste entre el modelo fenomenológico para el método Vane (Larenas, 2010) y las mediciones, en los intervalos A y B, resulta satisfactoria.
- El coeficiente de estructura disminuye linealmente con la concentración de sólidos en los intervalos A y B.
- En el tramo C no se obtiene un ajuste satisfactorio y tampoco se aprecia una disminución lineal en el coeficiente de estructura.

Capítulo 7: Anexos

7.1 Tablas de Visser (1989)

TABLE 1 Lifshitz-van der Waals coefficient $h\bar{\omega}_{131}$ for a homogeneous combination of two materials in vacuum or in water		
Combination	$h\bar{\omega}_{131}$ (eV)	
	Vacuum	Water
Au-Au	14.3	9.85
Ag-Ag	11.7	7.76
Cu-Cu	8.03	4.68
C-C (diamond)	8.60	3.95
Si-Si	6.76	3.49
Ge-Ge	8.36	4.66
MgO-MgO	3.03	0.47
KCl-KCl	1.75	0.12
Al ₂ O ₃ -Al ₂ O ₃	4.68	1.16
CdS-CdS	4.38	1.37
H ₂ O-H ₂ O	1.43	—
Polystyrene-polystyrene	1.91	0.11

Figura 7.1: Tabla de coeficientes de Lifshitz – Van der Waals (1989)

TABLE 2				
Numerical examples				
Van der Waals force of attraction between two spheres of radius R as a function of separation distance (in 10^{-8} N)				
$R(\mu\text{m})$ ($\hbar\omega = 1$ eV)	1	10	100	
$H(\text{nm}) =$	0.4	2	20	200
	1	0.3	3	30
	10	0.003	0.03	0.3
Van der Waals force of attraction between two spheres of radius R as a function of $\hbar\omega$ ($H = 1$ nm)				
$\hbar\omega(\text{eV}) =$	0.1	0.03	0.3	3
	1.0	0.3	3	30
	10	3	30	300
Van der Waals force of attraction between two flat plates of radius r as a function of r/R ($\hbar\omega = 1$ eV; $H = 1$ nm)				
$r/R =$	0.001	—	0.06	6.4
	0.01	0.06	6.4	640
Force of gravity acting on a sphere of radius R as a function of density ρ				
$\rho(\text{g. cm}^{-3}) =$	1	—	0.004	4
	10	—	0.04	40

Figura 7.2: Distancia entre partículas utilizada por Visser (1989)

7.2 Modelos para viscosidad y tensión de fluencia

7.2.1 Modelo de Krieger y Dougherty (1959)

La ecuación 101 expresa este modelo.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_m}\right)^{(-B\Phi_m)} \quad (101)$$

Donde,

B : Coeficiente de Einstein.

7.2.2 Modelo de Heymann *et al.* (2002)

La ecuación Error: No se encuentra la fuente de referencia representa este modelo.

$$\tau_F = \tau_0 \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_m}\right)^{-2} - 1 \quad (102)$$

Donde τ_0 es un parámetro de ajuste, tal que $\tau_0 = \tau_F$ cuando $\Phi = \Phi_m (1 - 1/2\sqrt{2}) \approx 0,2929 \Phi_m$.

7.3 Estudio del radio de la partícula y de la velocidad de deformación angular en el límite de los diferentes regímenes

7.3.1 Límite entre movimiento browniano e interacciones coloidales

En el rango de las pequeñas separaciones, se puede mostrar, que las fuerzas entre dos partículas esféricas son proporcionales al promedio armónico del radio de dos partículas de radios a_1 y a_2 :

$$\tilde{a} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \quad (103)$$

Para partículas que no son esféricas, pero para las cuales los puntos de contacto tienen aproximadamente curvatura esférica, las fuerzas se escalarían con un radio de curvatura, el cual es denotado como a^* , pero se utilizará \tilde{a} para ambos casos (Flatt, 2006).

Al combinar las ecuaciones (28) y (29), se obtiene que el número de repulsión corresponde a:

$$N_r = \frac{1}{12} \frac{A_0}{\kappa_B T} \frac{r}{h} \quad (104)$$

El análisis de Hamaker (Visser, 1989) introduce un nuevo coeficiente llamado de Lifschitz – Van der Waals, el cual permite calcular el coeficiente de Hamaker (A_0), el cual corresponde a una propiedad del material que puede ser relacionada directamente con sus propiedades moleculares:

$$A_0 = \frac{3}{4\pi \hbar \varpi} \quad (105)$$

Desde la ecuación 104 se estudia el radio de la partícula en el límite de los regímenes:

$$r_p = 12 \kappa_B T \frac{\hbar}{A_0} \quad (106)$$

Las consideraciones tomadas para este estudio corresponden a:

- Se supone un cizalle muy pequeño o inexistente.
- Se utiliza como valor de la distancia de separación entre superficies las entregadas por Visser (1989) (el valor de 10 [nm] corresponde a sistemas totalmente dispersos (Roussel *et al.*, 2005)).
- Se obtiene la constante de Hamaker (A_0) mediante la ecuación 105, donde $\hbar \varpi$ tiene un valor correspondiente a 3,5 [eV] (equivalente a $5,607 \cdot 10^{-17}$ [J]) (Visser, 1989).
- Se considera una temperatura de 20 [°C].

La Tabla 16 presenta los valores obtenidos para las consideraciones antes mencionadas.

Tabla 16: Diámetro de partícula para el límite browniano/coloidal	
h [nm]	Diámetro de la partícula [nm]
0,4	0,3
1	0,7
10	7,2

7.3.2 Límite entre movimiento browniano y efectos hidrodinámicos

El estudio del radio de la partícula para este límite está expresado en la ecuación 35.

Las consideraciones tomadas para este estudio corresponden a:

- Se estudian suspensiones de pastas de cemento y relaves chilenos.
- La viscosidad del fluido corresponde a $0,001 \text{ [Pa}\cdot\text{s]}$.
- Se considera una temperatura de $20 \text{ [}^\circ\text{C]}$.
- Para pastas de cemento la velocidad de deformación angular crítica correspondiente a la transición desde browniano al viscoso, corresponde a $0,001 \text{ [s}^{-1}]$ (Roussel *et al.*, 2010).
- Para los relaves chilenos el D_{50} corresponde a un valor aproximado de $50 \text{ [}\mu\text{m]}$ (Tabla 3).

La Tabla 17 presenta los valores obtenidos para las consideraciones antes mencionadas.

Tabla 17: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular para el límite browniano/hidrodinámico		
	$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	Diámetro de la partícula [μm]
Pastas de cemento	10^{-3}	5,96
Relaves chilenos	$1,7\cdot 10^{-6}$	50

7.3.3 Límite entre interacciones coloidales y efectos hidrodinámicos

El radio de partícula para este límite está expresado en la ecuación 36.

El número de Reynolds puede obtenerse mediante la ecuación 107.

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (107)$$

Donde,

ν : Viscosidad cinemática $\left(\nu = \frac{\mu}{\rho_0}\right)$.

V : Velocidad del fluido.

D : Diámetro de la tubería.

La velocidad de deformación angular, se obtiene como:

$$\dot{\gamma} = 8 \frac{V}{D} \quad (108)$$

Se verifica el parámetro adimensional N_r , para corroborar que la ubicación en el diagrama corresponde al sector estudiado.

Las consideraciones tomadas para este estudio corresponden a:

- Se estudian suspensiones de pastas de cemento y relaves chilenos.
- Utilizar como valor de la distancia de separación entre superficies el entregado por Visser (1989), $h = 10$ [nm].
- Se obtiene la constante de Hamaker (A_0) mediante la ecuación 105, donde $\hbar \omega$ tiene un valor correspondiente a $3,5$ [eV] (Visser, 1989).
- La fracción de sólido utilizada corresponde a $0,3$ y la fracción de sólido máxima a $0,64$ (Roussel *et al.*, 2010).
- La velocidad de deformación angular crítica, que separa un régimen dominado por interacciones coloidales y un régimen dominado por fuerzas viscosas hidrodinámicas corresponde a (Roussel *et al.*, 2010):

$$\dot{\gamma}_C = 8 \left(\frac{A_o a^*}{\mu_o d_p^2 h^2} \right) \left(\frac{f_c(\Phi)}{f_v(\Phi)} \right) \quad (109)$$

Su valor es del orden de $10^2 f_{cv}(\Phi)$ para sistemas dispersos. La función tiende a cero cuando $\Phi \rightarrow \Phi_{perc}$. Para aspectos prácticos se asumirá un valor de la función de 0,1 (Roussel *et al.*, 2010).

- Para los relaves chilenos el D_{50} corresponde a un valor aproximado de $50 [\mu\text{m}]$ (Tabla 3).

La Tabla 18 presenta los valores obtenidos para las consideraciones antes mencionadas.

Tabla 18: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular para el límite coloidal/hidrodinámico		
	$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	Diámetro de la partícula [μm]
Pastas de cemento	10	5,96
Relaves chilenos	0,06	50

7.3.4 Límite entre efectos friccionales y lubricantes

Desde la ecuación 32 se obtiene el radio de la partícula en el límite expresado en la ecuación 45.

$$r_p = \frac{3\pi\mu_o \ln(h/\varepsilon)}{100f\rho_p g} \dot{\gamma} \quad (110)$$

Las consideraciones tomadas para este estudio corresponden a:

- Se estudian suspensiones de pastas de cemento y relaves chilenos.
- Altura de la muestra $H = 100r$.

- Densidad de las partículas corresponde a $1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.
- Viscosidad del fluido corresponde a $0,001 [\text{Pa}\cdot\text{s}]$.
- Rugosidad de la partícula $\varepsilon=r/100$.
- Distancia de separación entre superficies $h \approx r / 10$.
- Para los relaves chilenos el D_{50} corresponde a un valor aproximado de $50 [\mu\text{m}]$ (Tabla 3).

La Tabla 19 presenta los valores obtenidos para las consideraciones antes mencionadas.

Tabla 19: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite friccional/lubricante		
	$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	Diámetro de la partícula [μm]
Pastas de cemento	10	0,44
Relaves chilenos	1555,2	50

7.3.5 Límite entre efectos lubricantes y colisionales

Desde la ecuación 34 se obtiene el radio de la partícula en el límite.

$$r_p = \frac{\mu_0}{\rho_p \varepsilon} \frac{1}{\dot{\gamma}} \quad (111)$$

Las consideraciones tomadas para el estudio del número de Bagnold en la frontera corresponden a:

- Se estudian suspensiones de pastas de cemento y relaves chilenos.
- Utilizar rugosidad de la partícula $\varepsilon=r/100$.
- La densidad de las partículas corresponde a $1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$.

- La viscosidad del fluido corresponde a $0,001[\text{Pa}\cdot\text{s}]$.
- La velocidad de deformación angular crítica, que separa un régimen dominado por fuerzas viscosas hidrodinámicas y un régimen dominado por la inercia de las partículas se expresa en la ecuación 112 (Roussel *et al.*, 2010).

$$\dot{\gamma}_C = \left(\frac{\mu_0}{\rho_p d_p^2} \right) \left(\frac{f_v(\Phi)}{f_i(\Phi)} \right) \tag{112}$$

La cual es del orden de $10^3 f_{vi}(\Phi)$. La función tiende a 1 para suspensiones diluidas de cemento (Roussel *et al.*, 2010).

- Para los relaves chilenos el D_{50} corresponde a un valor aproximado de $50[\mu\text{m}]$ (Tabla 3).

La Tabla 20 muestra los valores obtenidos para las consideraciones antes mencionadas.

Tabla 20: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite lubricante/colisional		
	$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	Diámetro de la partícula [μm]
Pastas de cemento	1000	632,46
Relaves chilenos	55822,3	50,00

7.3.6 Resumen de los valores críticos en los límites de los diferentes regímenes

La Tabla 21 presenta los valores críticos de los diámetro de partículas y velocidad de deformación angular que hacen los parámetros adimensionales relevantes cercanos a la unidad.

Tabla 21: Diámetro de partícula y velocidad de deformación angular en el límite de los distintos regímenes para cementos y relaves			
Número adimensional		$\dot{\gamma}$ [s ⁻¹]	Diámetro de la partícula
N_r			7,200 [nm]
Pe	Relave chileno	$1,7 \times 10^{-6}$	50,00 [μm]
	Cemento en pasta	0,001	5,960 [μm]
Γ	Relave chileno	0,06	50,00 [μm]
	Sistema disperso (cemento)	10	3,780 [μm]
Le	Relave chileno	1555,2	50,00 [μm]
	Cemento en pasta	10	0,440 [μm]
Ba	Relave chileno	55822,3	50,00 [μm]
	Suspensión diluida de cemento	1000	632,5 [μm]

Capítulo 8: Referencias

ADKINS, S.J. (2008). Underflow Rheology Optimization to Enhance Thickeners Performance. Paste 2008. Proceedings of the Eleventh International Seminar on Paste and Thickened Tailings, Kasane, Botswana, pp. 83-96.

ANCEY, Ch. (2001). Role of lubricated contacts in concentrated polydisperse suspensions. Journal of Rheology, V. 45, pp. 1421-1439.

ANCEY, Ch. (2003). Role of particle network in concentrated mud suspensions. Third International Conference on Debris Flow Hazards Mitigation, Davos, Proceedings edited by D. Rickemann & C-L. Chen, (Millpress, Rotterdam, 2003), pp. 257-268.

ANCEY, Ch. (2005). Introduction to Fluid Rheology. Laboratoire hydraulique environnementale (LHE), École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Écublens, CH-1015 Lausanne.

BARAVIAN, C. y QUEMADA, D. (1996). Modelling thixotropy using a novel structural kinetics approach: basis and application to a solution of iota carrageenan. Journal of Texture Studies, V. 27, pp. 371-390.

BARNES, H.A. (1997). Thixotropy - a review. Journal of Non-Newtonian Fluid Mech., V. 70, pp. 1-33. Elsevier.

BARNES, H.A. (2000). A Handbook of Elementary Rheology. The University of Wales Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Department of Mathematics, University of Wales, Aberystwyth, Penglais, Aberystwyth, Dyfed, Wales, UK.

BELORIZKY, E. y GORECKI, W. (1992). Introduction a la Mécanique Statistique, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, Francia.

BERGER, A., ADKINS, S., HESS, S., FLANAGAN, I. y STOCKS, P. (2011). Step change improvement in underflow rheology. Paste 2011. Proceedings of the 14th International Seminar on Paste and Thickened Tailings, Perth, Australia, pp. 135-141.

BERTRAM, A. (2008). Elasticity and Plasticity of large Deformations. Segunda edición, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, Deutschland.

BIRD, R.B., STEWART, W.E. y LIGTHFOOT, E.N. (1960). Transport Phenomena. John Wiley & Sons, New York. Edición en castellano, Editorial Reverté, Barcelona.

BOGER, D. (2006). Rheological Concepts. JEWELL, R.J., FOURIE, A.B. y LORD, E.R., Editores. Paste and Thickened Tailings: A Guide. Segunda edición, Cap. 3, The Australian Centre for Geomechanics, Nedlands, Australia.

CHENG, D.C-H. and EVANS, F. (1965). Phenomenological characterization of the rheological behaviour of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids. British Journal of Applied Physics, V. 16, pp. 1599-1617.

COUSSOT, Ph. (2005). Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials. Applications in Industry and Environment. John Wiley & Sons.

COUSSOT, Ph. and ANCEY, Ch. (1999). Rheophysical Clasification of Concentrated Suspensions and Granular Pastes. Physical Review E, V. 59, N° 4, pp. 4445-4457.

COUSSOT, Ph. y GROSSIORD, J-L. (2001): "Comprendre la Rhéologie", Ed. EDP Sciences.

CRAYA, A. (1960): "Mécanique des Transferts dans les Fluides", ENSIH, Grenoble.

DE KEE, D. y CHHABRA, R.P. (2002). Transport Processes in Bubbles, Drops and Particles. Segunda Edición. Capítulo 12. COUSSOT, P. Flows of Concentrated Granular Mixtures, pp. 291-315. Taylor & Francis, New York.

DICKEY, D.S. y FENIC, J.G. (1976). Dimensional analysis for fluid agitation systems. *Chemical Engineering*, January 5.

FLATT, R.J. (2006). Yodel: A Yield Stress Model for Suspensions. *Journal of the American Ceramic Society*, V. 89, N° 4, pp. 1244-1256.

FORCHHEIMER, P. (1935). *Hidráulica*. Editorial Labor, Barcelona. Traducción por Manuel Lucini de la tercera edición en alemán.

GANI, M.R. (2004). From Turbid to Lucid: A Straightforward Approach to Sediment Gravity Flows and Their Deposits. *The Sedimentary Record*, V. 2, N°. 3.

HALDENWANG, R. (2003). Flow of NonNewtonian Fluids in Open Channels. Dissertation (not published) in fulfilment of the degree Doctor Technologiae, Department of Civil Engineering, Cape Technikon, Cape Town, South Africa.

HALLBOM, D.J. (2008). Pipe Flow of Homogeneous Slurry. [Ph.D.Thesis], University of British Columbia, Vancouver, USA.

HANGGI, P. (c.2006). Robert Brown and the Pollen Staff. Institut für Physik, Universität Augsburg, Deutschland.

HAPPEL, J. y BRENNER, H. (1965). *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Editorial Prentice Hall, 1965.

HE, M. (2005). Slurry rheology of limestone and its effects on wet ultra-fine grinding. [Licenciate Thesis], Division of Mineral Processing, Department of Chemical Engineering and Geosciences, Luleå University of Technology, Luleå, Sweden.

HEYMANN, L., PEUKERT, S. y AKSEL, N. (2002). On the solid-liquid transition of concentrated suspensions in transient shear flow. *Rheological Acta*, V. 41, pp. 307-315.

HOUMAN, J., PATERSON, A.J.C. y VAN SITTERT, F. (2007). Underflow Rheology Quantifying the Effect of Pump Shear on Slurry Rheology – A

Case Study at the Combined Treatment Plant. Paste 2007. Proceedings of the Tenth International Seminar on Paste and Thickened Tailings, Perth, Australia, pp. 163-174.

HUANG, N. (2006). Rhéologie des pates granulaires. Tesis Doctor de la Universidad Paris 6.

HUYNH, L., JENKINS, P. y RALSTON, J. (c.2000). The Rheological Properties of a Copper Concentrate Slurry: From Surface Chemistry to Pipeline Transport.

INNOVA-JRI (2010). Aplicación Industrial de la Tecnología de Espesamiento Extremo En Proyectos Mineros. JRI Informe Técnico D102, Santiago, Chile.

JEFFREYS, H. (1931). Cartesian Tensors. Cambridge University Press.

JENKINS, J. T y HANES, D. M (1998). Collisional sheet flows of sediment driven by a turbulent fluid. Journal of Fluid Mechanics, V. 370, pp. 29-52.

JOMHA, A.I., MERRINGTON, A. and WOODCOCK, L.V. (1991). Recent Developments in Dense Suspension Rheology. Powder Technology, V. 65, N° 1-3, pp. 343-370.

KLEIN, B. (1992). Rheology and Stability of Magnetite Dense Media. PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

KLEIN, B. (2002). Rheology of Mineral Suspensions. Lecture Notes. Vancouver, Canada. Departament of Mining Engineering, University of British Columbia.

KRIEGER, I.M. (1972). Rheology of Monodisperse Latices. Advances in Colloid and Interface Science, V. 3, pp. 111-136. Elsevier.

KRIEGER, I.M. y DOUGHERTY, Th. J. (1959). A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. Transactions of the Society of Rheology, V. III, pp. 137-152.

LARENAS, M. (2010). Modelos en Reología y Aplicaciones a Fluidos, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Santiago, Chile. (Profesor Carlos Conca).

LEVI, E. (1996). Mecánica del Medio Continuo. Duodécima reimpresión, Ed. Limusa, México.

LOAN, C. y ARBUTHNOTH, I.M. (2010). Transforming paste thickener technology. Paste 2010. Proceedings of the 13th International Seminar on Paste and Thickened Tailings, Toronto, Canada, pp. 365-373.

LUMLEY, J.L., ACRIVOS, A., GARY LEAL, L. Y LEIBOVICH, S. (1996). Research Trends in Fluid Dynamics, AIP PRESS, New York, USA.

MASÉ, G.E. (1970). Continuum Mechanics. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill.

MEWIS, J. y WAGNER, N.J. (2009). Thixotropy. Advances in Colloid and Interface Science, V. 147-148, pp. 214-227, Elsevier.

MOLERUS, O. (1985). SchüttgutMechanik. SpringerVerlag Berlin, Heidelberg.

MOLERUS, O. (1993). Principles of flow in disperse systems. Chapman and Hall.

MUELLER, S., LLEWELLIN, E.W. y MADER, H.M. (2010). The rheology of suspensions of solid particles. Proceedings of the Royal Society, A2010, V. 466, pp. 1201-1228.

MURAVLEVA, L., MURAVLEVA, E., GEORGIU, G.C. And MITSOULIS, E. (2010). Unsteady circular Couette flow of a Bingham plastic with the Augmented Lagrangian Method. Rheologica Acta, V. 49, pp. 1197-1206.

NANIA, L.S. y GOMEZ VALENTIN, M. (2004). Ingeniería Hidrológica. Grupo Editorial Universitario, España.

NGUYEN, Q. D., y N, BOGER, D.V. (1983). Yield Stress Measurement for Concentrated Suspensions. *Journal of Rheology*, V. 27, N° 4, pp 321-349.

NOLL, W. (2004). On Material Frame-Indifference. Cap. 2, Five Contributions to Natural Philosophy.

PABST, W., GREGOROVÁ, E., BERTHOLD, Ch. (2006). Particle shape and suspension rheology of short-fiber systems. Elsevier Science, *Journal of the European Ceramic Society*, V. 26, pp. 149–160.

PARK, Ch. S., KIM, D.P. y LEE, K.J. (1991). Rheological Study of the Dye Swell of a Suspension. *The Korean Journal of Rheology*, V. 3, N° 2, pp. 117-123, [en japonés].

PIAU, J-M. (2001): »Préface», COUSSOT, Ph. y GROSSIORD, J-L. *Comprendre la Rhéologie*. Ed. EDP Sciences.

PORNILLOS, E.U. (2011). A technique for measuring the reduction of yield stress of thickened tailings. *Paste 2011. Proceedings of the 14th International Seminar on Paste and Thickened Tailings*, Perth, Australia, pp. 167-174.

REINER, M. (1956). *Phenomenological Macrorheology*. EIRICH, F.R. Editor. *Rheology: Theory and Applications*, V.1, Cap. 2, Academic Press, New York, USA.

RIETEMA, K. (1991). *The Dynamics of Fine Powders*. Elsevier Applied Science.

ROCO, M.C. (1988). Diagram to classify liquid-solid flows by their microstructure. *11th International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes*. Hydrotransport 11. Paper B3.

ROUSSEL, N. (2006). A thixotropy model for fresh fluid concretes: Theory, validation and applications. *Cement and Concrete Research*, V. 36, pp. 1797-1806. Elsevier.

ROUSSEL, N., LEMAITRE, A., FLATT, R., COUSSOT, Ph. (2010). Steady state flow of cement suspensions: A micromechanical state of the art. *Cement and Concrete Research*, V. 40, pp. 77-84. Elsevier.

ROUSSEL, N., LE ROY, R., COUSSOT, Ph. (2004). Thixotropy modelling at local and macroscopic scales. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, V. 117, pp. 85-95. Elsevier.

SALINAS, C., MARTINSON, R., COOKE, R. y FERRADA, O. (2009). Shear and Rheology Reduction for Flocculated Thickened Tailings. *Paste 2009. Proceedings of the Twelfth International Seminar on Paste and Thickened Tailings*, Viña del Mar, Chile, pp. 3-10.

SANTON, L. (1966). *Ecoulements dans les milieux poreux*, ENSIH, Université Joseph Fourier, Grenoble.

SCHATZMANN, M. (2005). Rheometry for large particle fluids and debris flow. *ETH Zürich*, N° 187, pp.14.

SCHOWALTER, W.R. (1978). *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon. Citado por Wikipedia – Rheology.

SLICHTER, C.S. (1899). Theoretical investigation of the motion of ground water. *19th Annual Report, Part II. U.S. Geological Survey*

SOLOMON, H. (1967). Random packing density. *Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, V. 3 (Univ. of Calif. Press, 1967), pp. 119-134.

SPIEGEL, M.R. (1970). *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*. Serie Schaum, McGraw-Hill de México.

TREINEN, J.M., COOKE, R. y SALINAS, C. (2010). Energy induced rheology reduction of flocculated thickened tailings – pipeline system design methodology. *Paste 2010. Proceedings of the 13th International Seminar on Paste and Thickened Tailings*, Toronto, Canada, pp. 385-392.

TRUESDELL, C. (1966). *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, London, Paris.

TRUESDELL, C. & NOLL, W. (2004). *The non-linear field theories of mechanics*. S.S. Antman, Ed. Springer.

TRUESDELL, C. y RAJAGOPAL, K.R. (2009). *An Introduction to the Mechanics of Fluids*. Reimpresión de la edición de 1999. Ed. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.

VISSER, J. (1989). An Invited Review Van der Waals and Other Cohesive Forces Affecting Powder Fluidization. *Powder Technology*, V. 58, pp. 1-10.

VOLTERRA, V. (1931). *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars. Edición facsimilar (1990). Editions Jacques Gabay, 1990.

WILLIAMS, M.P.A., SEDDON, K.D. y FITTON, T.G. (2008). *Surface Disposal of Paste and Thickened Tailings – A Brief History and Current Confronting Issues*. Proceedings of the Eleventh International Seminar on Paste and Thickened Tailings, pp. 143-164, 5-9 May, Kasane, Botswana, Africa.