



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO MATEMÁTICO DE ONDAS DE SEDIMENTO Y MODELACIÓN MATEMÁTICA DE UN
REÓMETRO DE PALETAS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

BENJAMÍN ALONSO OBANDO VALLEJOS

PROFESOR GUÍA:
CARLOS CONCA ROSENDE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
RAÚL GORMAZ ARANCIBIA
RAMÓN FUENTES AGUILAR

SANTIAGO DE CHILE
MAYO 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: BENJAMÍN ALONSO OBANDO VALLEJOS
FECHA: MAYO 2013
PROF. GUÍA: CARLOS CONCA ROSENDE

ESTUDIO MATEMÁTICO DE ONDAS DE SEDIMENTO Y MODELACIÓN MATEMÁTICA DE UN REÓMETRO DE PALETAS

Este trabajo consta de 2 capítulos. El primer capítulo trata sobre el estudio de ondas de sedimento en el transporte hidráulico de sólidos en tubería (THST). El primer objetivo de este capítulo es estudiar la solución clásica de la ecuación hiperbólica de Exner o de conservación de sedimento 1-d para una canaleta rectangular con la hipótesis de Exner sobre el gasto sólido. La solución clásica de esta ecuación está dada por una ecuación implícita, sin embargo, es posible encontrar la solución para la condición inicial de una onda sinusoidal. Con esta información se descarta la solución clásica ya que no es físicamente posible. Posteriormente se desarrolla un algoritmo que nos permite encontrar la solución débil del problema y verificar que esta solución si corresponde a un fenomeno físicamente posible. El segundo objetivo de este capítulo es levantar la hipótesis de Exner y formular un modelo más realista para el gasto sólido en el caso de la canaleta rectangular y de la tubería utilizando el modelo de Meyer-Peter y Muller y encontrar las soluciones débiles respectivas. Para encontrar la solución débil del problema con la hipótesis de Exner y el problema con el modelo de Meyer-Peter y Muller para el gasto sólido en una canaleta rectangular y una tubería se desarrollo un algoritmo numérico basado en el método de Galerkin discontinuo con límite de salto y se utilizó MATLAB para su desarrollo. Se utilizaron los datos de las mediciones experimentales de Coleman y García para validar el modelo para la canaleta rectangular. Esto se hace comparando las velocidades que alcanzan las ondas de sedimento simuladas con los modelos numéricos con las experimentales obteniendo resultados satisfactorios. El segundo capítulo de este trabajo es sobre la modelación de un reómetro de paletas. El primer objetivo de este capítulo es plantear las ecuaciones de Cauchy para un fluido Newtoniano y un fluido Bingham en un sistema de referencia no inercial que es solidario a las paletas. Un segundo objetivo es desarrollar un algoritmo que resuelva las ecuaciones y obtener una expresión para el Torque aplicado sobre las paletas en terminos de la geometría y la solución de las ecuaciones de Cauchy. Para esto se desarrollaron algoritmos basados en un método de punto fijo en el caso Newtoniano que transforma el problema no lineal en una sucesión de problemas lineales. En el caso Bingham se utilizo un método de tipo Uzawa que mediante equivalencias de problemas es posible reducir el problema no lineal a una sucesión de problemas lineales y utilizando un algoritmo alternante se resuelve el problema numericamente. Para el desarrollo de estos algoritmos se utilizó Matlab.

TABLA DE CONTENIDO

Índice de figuras	vii
1. ESTUDIO MATEMATICO DE ONDAS DE SEDIMENTO	2
1.1. INTRODUCCION	3
1.1.1. REGIMENES DE ESCURRIMIENTO	3
1.1.2. PROFUNDIDAD DEL LECHO DE MATERIAL DEPOSITADO	5
1.1.3. ONDAS DE ARENA A SUPERFICIE LIBRE	8
1.1.4. INICIO DEL ARRASTRE A SUPERFICIE LIBRE	9
1.1.5. CAUDAL DE SOLIDO DE FONDO EN CANALES	10
1.1.6. ONDAS DE SEDIMENTO EN EL THST	10
1.1.7. ECUACION DE EXNER PARA LAS ONDAS EN EL THST	12
1.2. OBJETIVOS	16
1.2.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS	16
1.3. HIPOTESIS DE EXNER Y SOLUCIÓN DE EXNER	17
1.4. SOLUCION DEBIL PARA EL PROBLEMA DE EXNER EN UNA CANALETA RECTANGULAR	23
1.4.1. PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA	26
1.4.2. PROBLEMA DE LA MASA FINITA	28
1.5. ECUACION DE EXNER PARA UNA CANALETA RECTANGULAR	32
1.5.1. ECUACION PARA EL GASTO SOLIDO PARA UNA CANALETA RECTANGULAR	32
1.5.2. ECUACION DE EXNER PARA TUBERIA RECTANGULAR	32
1.5.3. ANALISIS INSPECCIONAL	33
1.5.4. DETERMINACION DE CONSTANTES	34
1.5.5. PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA	34

1.5.6.	PROBLEMA DE LA MASA FINITA	37
1.6.	ECUACION DE EXNER PARA UNA TUBERIA	41
1.6.1.	ECUACION PARA EL GASTO SOLIDO PARA UNA TUBERÍA	41
1.6.2.	ECUACION DE EXNER PARA UNA TUBERIA	41
1.6.3.	ANALISIS INSPECCIONAL	42
1.6.4.	DETERMINACION DE CONSTANTES	43
1.6.5.	PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA	44
1.6.6.	COMPARACION DE SOLUCIONES PARA UNA CANALETA Y UNA TUBERIA	46
1.7.	DESARROLLO EXPERIMENTAL	52
1.7.1.	ANALISIS DE LOS DATOS EXPERIMENTALES	52
1.7.2.	SIMULACION NUMERICA PARA LA CANALETA RECTANGULAR	53
1.7.3.	SIMULACION PARA UNA TUBERIA	54
1.8.	CONCLUSIONES	56
2.	MODELACION DE UN REOMETRO DE PALETAS	57
2.1.	INTRODUCCION	58
2.1.1.	EL REOMETRO DE PALETAS	58
2.1.2.	MODELACION DEL REOMETRO DE PALETAS O VANE	58
2.2.	OBJETIVOS	60
2.2.1.	OBJETIVOS ESPECIFICOS	60
2.3.	ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO	61
2.3.1.	ECUACIONES CONSTITUTIVAS	61
2.3.2.	ECUACIONES PARA SISTEMA DE REFERENCIA MOVIL	62
2.4.	ANALISIS INSPECCIONAL	64
2.5.	PROBLEMA DEBIL	66
2.5.1.	PROBLEMA DEBIL PARA UN FLUIDO NEWTONIANO	66
2.5.2.	PROBLEMA DEBIL PARA UN PLASTICO BINGHAM	66
2.6.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL REOMETRO DE PALETAS DE ALTURA INFINITA	67
2.6.1.	ECUACIONES DE MOVIMIENTO	68
2.6.2.	CONDICIONES DE BORDE	68
2.6.3.	ESQUEMA NUMERICO	70

2.7.	RESOLUCION NUMERICA	71
2.7.1.	EL TERMINO DE CONVECCION	73
2.7.2.	EL TERMINO DE DIFUSION	74
2.7.3.	EL TERMINO DE CORIOLIS	75
2.7.4.	EL TERMINO PLASTICO	75
2.7.5.	EL TERMINO DE PRESION	76
2.7.6.	ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ Y SISTEMA LINEAL	76
2.7.7.	ALGORITMO PARA FLUIDO NEWTONIANO	77
2.7.8.	ALGORITMO PARA FLUIDO BINGHAM	77
2.7.9.	CALCULO DE INTEGRALES	78
2.8.	CALCULO DEL TORQUE	79
2.8.1.	CASO NEWTONIANO	79
2.8.2.	CASO BINGHAM	80
2.8.3.	CALCULO DEL TORQUE PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS	81
2.8.4.	CALCULO DEL TORQUE PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS	82
2.9.	RESULTADOS	84
2.9.1.	RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS: CASO NEWTONIANO	84
2.9.2.	RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS: CASO BINGHAM	87
2.9.3.	RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS: CASO NEWTONIANO	91
2.9.4.	RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS: CASO BINGHAM	95
2.10.	CONCLUSIONES	100
3.	Bibliografía	101
A.	DEDUCCION DE LA ECUACION DE CONSERVACION DE MASA PARA LA CANALETA RECTANGULAR	104
B.	MARCO TEORICO DE ECUACIONES HIPERBOLICAS	107
B.1.	CURVAS CARACTERISTICAS	107
B.2.	SOLUCION DEBIL	108
B.2.1.	NOCION DE ENTROPIA	109
B.3.	OTROS CRITERIOS DE ENTROPIA	110

C. RESOLUCION NUMERICA Y ANALISIS DE ESTABILIDAD	112
C.1. ELEMENTOS BASICOS DEL METODO DE GALERKIN DISCONTINUO	112
C.2. ANALISIS DE ESTABILIDAD	113
C.3. ALGORITMO DE GALERKIN DISCONTINUO CON LIMITE DE SALTO	117
C.4. ESQUEMA NUMERICO PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE SEDIMENTO POR TUBERIA	118
C.4.1. ALGORITMO PARA EL TRANSPORTE DE SEDIMENTO POR TUBERIA	119
D. PROBLEMA DE RIEMANN	120
E. DEDUCCION DE LA FORMULACION DEBIL PARA EL REOMETRO DE PALETAS	127
E.1. FORMULACION DEBIL PARA FLUIDO NEWTONIANO	127
E.2. FORMULACION DEBIL PARA FLUIDO BINGHAM	128

Índice de figuras

1.1. Velocidad del flujo v/s Diámetro de las partículas	3
1.2. Escurrimiento homogéneo o pseudo homogéneo	3
1.3. Escurrimiento heterogéneo	4
1.4. Escurrimiento con lecho móvil	4
1.5. Escurrimiento con lecho fijo	5
1.6. Esquema sección transversal de una tubería	5
1.7. Gráfico $\frac{Y}{D}$ v/s $\frac{C_V}{C_{VD}}$	6
1.8. Concentración volúmica v/s Conc. másica	7
1.9. Esquema de ondas de arena a superficie libre	8
1.10. Rizos y dunas	8
1.11. Diagrama de Shields (versión de Parker y García)	9
1.12. Esquema de transporte suspendido y de fondo para cauces aluviales y canales	10
1.13. Cauce aluvial donde el lecho y la atmosfera se extiende hacia el infinito	11
1.14. Napa líquida y sedimento de fondo estan confinados a un espacio limitado	11
1.15. Ondas de sedimento en THST	12
1.16. Solución de Exner según Graf	12
1.17. Esquema de sección transversal de una tubería	13
1.18. Condición inicial para la ec. de Exner	18
1.19. Solución de Exner para t=0.0212	19
1.20. Solución de Exner para t=0.022	19
1.21. Solución de Exner para t=0.024	20
1.22. Solución de Exner para t=0.026	20
1.23. Solución de Exner para t=0.03	21

1.24. Solución de Exner para $t=0.035$	21
1.25. Solución de Exner para $t=0.04$	22
1.26. Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.01$	24
1.27. Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.0212$	24
1.28. Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.03$	25
1.29. Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.04$	25
1.30. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.05$	26
1.31. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.3$	27
1.32. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.7$	27
1.33. Pendiente $v/s t^*$ para el problema de Exner en una tubería rectangular	28
1.34. $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$	28
1.35. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.7$	29
1.36. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=1.4$	29
1.37. Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=2.0$	30
1.38. Pendiente $v/s t^*$ para el problema de Exner en una tubería rectangular	30
1.39. $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$	31
1.40. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.01$	35
1.41. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.015$	35
1.42. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.02$	36
1.43. Pendiente $v/s t^*$ para la masa finita en canaleta rectangular	36
1.44. $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$	37
1.45. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triangulo en $t^*=0.005$	38
1.46. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triangulo en $t^*=0.01$	38
1.47. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triangulo en $t^*=0.015$	39
1.48. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triangulo en $t^*=0.02$	39
1.49. Pendiente $v/s t^*$ para la masa finita en canaleta rectangular	40
1.50. $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$	40
1.51. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.001105$	44
1.52. Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.001776$	44
1.53. Pendiente $v/s t^*$ para la onda generalizada en una tubería	45

1.54. $\frac{dx(t)}{dt}v/st^*$	45
1.55. Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.000067$	46
1.56. Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.00025$	47
1.57. Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.0075$	47
1.58. Comparación de velocidades de solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería.	48
1.59. Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.00075$	49
1.60. Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.003$	49
1.61. Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.006$	50
1.62. Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.01$	50
1.63. Comparación de velocidades de solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería.	51
1.64. Perfiles para sedimento Fino.	52
1.65. Perfiles para sedimento grueso.	53
2.1. Esquema de un reómetro de paletas.	58
2.2. Corte horizontal de un vane de 4 paletas de altura infinita.	67
2.3. Corte horizontal de un vane de 6 paletas de altura infinita.	67
2.4. Subdivisión de un triángulo de \mathcal{H}_{2h}	71
2.5. Triangulación del dominio V para 4 paletas.	71
2.6. Triangulación del dominio V para 6 paletas.	72
2.7. Corte horizontal de un vane de 4 paletas de altura infinita.	82
2.8. Corte horizontal de un vane de 6 paletas de altura infinita.	83
2.9. Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$	84
2.10. Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$	84
2.11. Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$	85
2.12. Perfil de velocidad u'_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$	85
2.13. Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$	86

2.14. Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$	86
2.15. Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$	86
2.16. Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$	87
2.17. Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	87
2.18. Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	88
2.19. Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	88
2.20. Perfil de velocidad u_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	88
2.21. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	89
2.22. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	89
2.23. Presión para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	89
2.24. Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	90
2.25. Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	90
2.26. Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	90
2.27. Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	91
2.28. Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$	91
2.29. Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$	92
2.30. Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$	92
2.31. Perfil de velocidad u'_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$	92
2.32. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$	93
2.33. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$	93
2.34. Presión para $Re = 0.66$	93
2.35. Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$	94
2.36. Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$	94
2.37. Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$	94
2.38. Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$	95
2.39. Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	95
2.40. Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	96
2.41. Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	96
2.42. Perfil de velocidad u_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	96
2.43. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	97
2.44. $ u $ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	97

2.45. Presión para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	97
2.46. Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	98
2.47. Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	98
2.48. Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	98
2.49. Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$	99
D.1. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	122
D.2. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	123
D.3. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	123
D.4. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	124
D.5. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	124
D.6. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	125
D.7. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	125
D.8. Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo) . . .	126

Capítulo 1

ESTUDIO MATEMATICO DE ONDAS DE SEDIMENTO

1.1. INTRODUCCION

1.1.1. REGIMENES DE ESCURRIMIENTO

El transporte de sólidos por tuberías puede realizarse en diferentes modos. La definición de estos modos depende de numerosos parámetros. Para fijar ideas se supondrá que solamente varían la velocidad de la suspensión y el diámetro de las partículas (supuestas de composición y diámetro uniformes)(Figura 1.1).

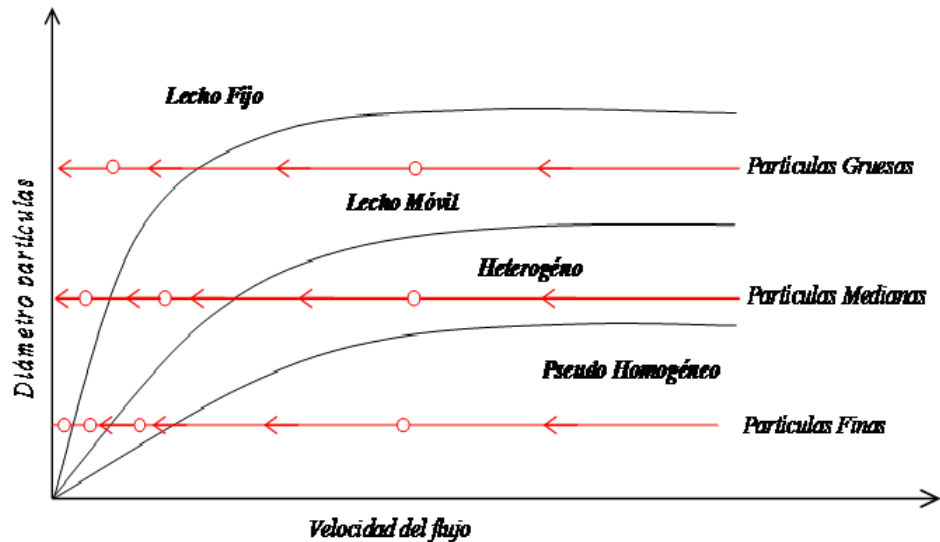


Figura 1.1: Velocidad del flujo v/s Diámetro de las partículas

■ Regimen 1. Escurrecimiento como suspensión homogénea

También se le conoce como flujo pseudohomogéneo. Las partículas van todas en suspensión y la concentración de ellas es uniforme en la sección (Figura 1.2). Corresponde a pequeños diámetros d y/o a grandes velocidades V de la mezcla. Un caso típico es una mezcla de agua y una cantidad moderada de arcilla.

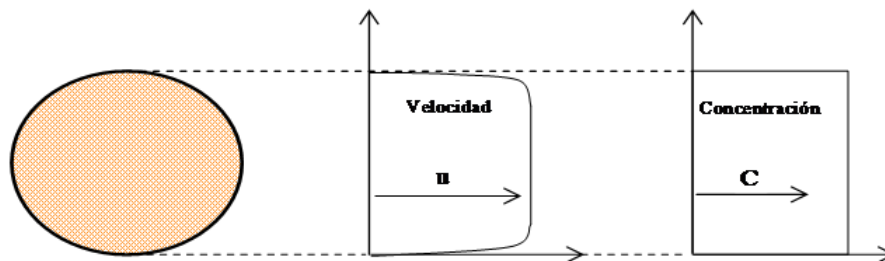


Figura 1.2: Escurrecimiento homogéneo o pseudo homogéneo

■ Regimen 2. Escurrecimiento con flujo Heterogéneo

Todas las partículas van en suspensión, pero la concentración no es uniforme en la sección: ella disminuye desde el fondo hacia la clave del ducto (Figura 1.3). Corresponde a pequeñas partículas y velocidades moderadas. Este régimen es, en la práctica industrial del transporte de pulpas, el más frecuente.

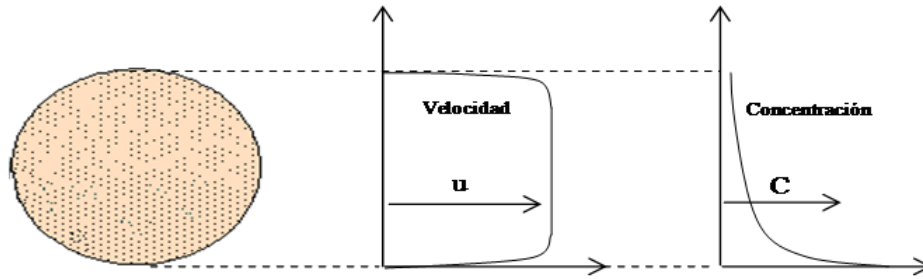


Figura 1.3: Esguerrimiento heterogéneo

■ **Regimen 3. Esguerrimiento con lecho Móvil**

Parte de los sólidos van en movimiento por el fondo. El resto va en suspensión, con un marcado gradiente negativo de concentración respecto a la distancia al fondo (Figura 1.4). Corresponde a velocidades bajas y/o a partículas grandes. Los sólidos que van por el fondo llevan en general velocidades mucho menores que la suspensión que fluye por sobre ellos: esta diferencia puede ser de un orden de magnitud y aún más. La naturaleza, en los ríos de pequeña pendiente, muestra un ejemplo muy claro de este régimen: mientras la suspensión se mueve a velocidades del orden de magnitud de un metro por segundo, las ondas de arena (barras o dunas) que van por las riberas o por el fondo se mueven a velocidades que pueden ser del orden de metros por día o menos.

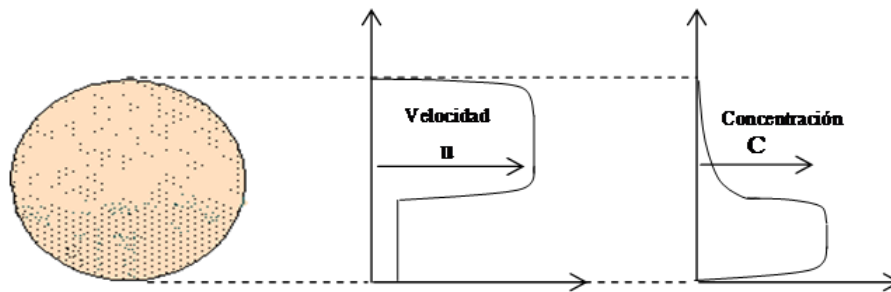


Figura 1.4: Esguerrimiento con lecho móvil

■ **Regimen 4. Esguerrimiento con lecho fijo**

Las velocidades son pequeñas y/o las partículas son grandes. Una parte importante de los sólidos están estancados en el fondo y por sobre ellos circula la suspensión, exhibiendo un fuerte gradiente de concentraciones en la vertical (Figura 1.5). Esta concentración puede ser nula y en ese caso circula el fluido puro sobre el lecho fijo. Este tipo de esguerrimiento puede producirse durante las detenciones de un sistema de transporte de pulpa sin que se efectúe lavado previo. Todo lo dicho es válido para partículas uniformes, pero puede ser considerado cierto para granulometrías razonablemente continuas y extendidas.

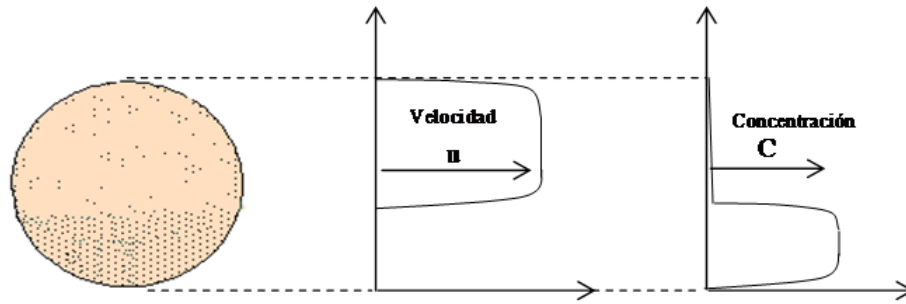


Figura 1.5: Esgurrimiento con lecho fijo

Las ondas de sedimento pueden producirse desde que aparece el escurrimiento con lecho móvil.

La dinámica del arrastre de sedimentos ha sido estudiada mayoritariamente en escurrimientos a superficie libre naturales y artificiales.

El caso del transporte hidráulico de sólidos por tuberías (THST) ha sido mucho menos estudiado y solo en fechas relativamente recientes.

Felizmente mucha de la investigación realizada en Dinámica Fluvial es en parte aplicable al THST, al menos cualitativamente.

Se expondrán, entonces, algunos aspectos de Hidráulica Fluvial

1.1.2. PROFUNDIDAD DEL LECHO DE MATERIAL DEPOSITADO

Si todo el material está depositado en la tubería circular es fácil realizar una estimación de las dimensiones relativas de la zona ocupada por los sólidos (Figura 1.6).

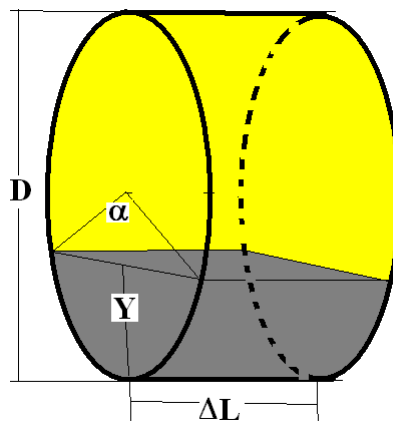


Figura 1.6: Esquema sección transversal de una tubería

Sean A_S y A las secciones transversales de la zona sedimentada y de la tubería, respectivamente.

Se introducen las concentraciones en volumen C_{VD} del sedimento depositado y C_V del sedimento antes de que se produjera el depósito. Se tendrá:

$$C_V = \frac{V_p}{A\Delta L}; C_{VD} = \frac{V_p}{A_D\Delta L}$$

Entonces:

$$(1.1) \quad \frac{C_V}{C_{VD}} = \frac{A_D}{A} = \frac{1}{2\pi}(\alpha - \sin \alpha) = \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{\frac{Y}{D}} - \sqrt{\frac{y}{D}(1 - \frac{Y}{D})(1 - 2\frac{Y}{D})})$$

Esta relación se muestra en la Figura 1.7.

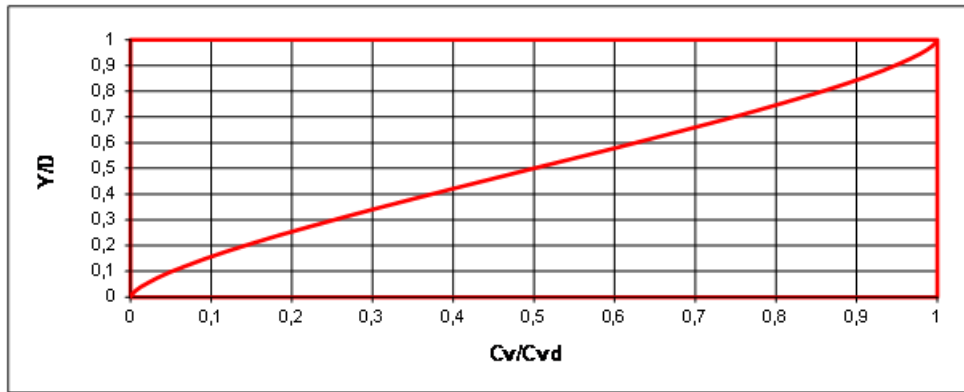


Figura 1.7: Gráfico $\frac{Y}{D}$ v/s $\frac{C_V}{C_{VD}}$

La concentración C_V puede considerarse un dato o un parámetro. La concentración del lecho depositado corresponde a un valor de “empaquetamiento”. Lambe y Whitman (1969) [21] consideran valores entre 0.5 y 0.81; [34] entre 0.65 y 0.69. Ambos autores se refieren a sedimentos naturales fijos (suelos o medios permeables).

En el caso de sedimentos recién depositados desde la suspensión los valores de la concentración de depósito plausiblemente son algo menores.

Por otra parte en la práctica industrial se emplea la concentración en masa o en peso C_p y no la concentración volúmica C_V .

Las relaciones entre ambas son sencillas:

$$(1.2) \quad \frac{C_V}{C_p} = \frac{1}{1 + \Delta(1 - C_p)}$$

$$(1.3) \quad \frac{C_p}{C_V} = \frac{S}{1 + \Delta C_V}$$

- S : Densidad relativa de las partículas
- $\Delta := S - 1$: Densidad relativa boyante o sumergida de las partículas.

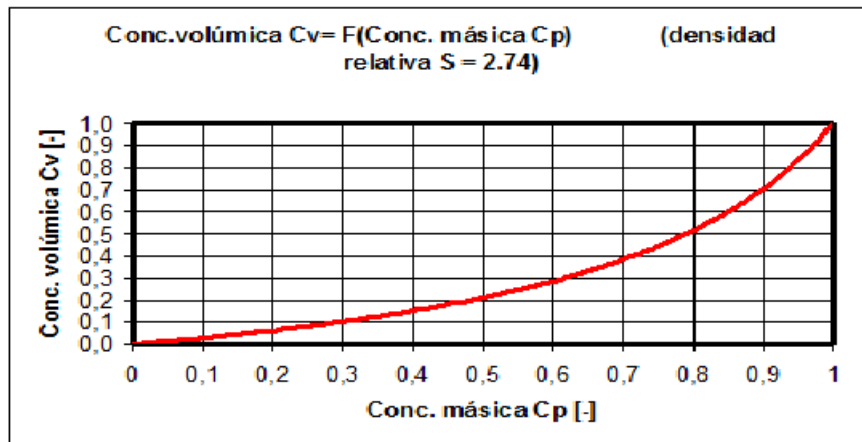


Figura 1.8: Concentración volúmica v/s Conc. másica

La densidad relativa S para los relaves chilenos es cercana a 2.74 en promedio ([18]).

Para ese valor, en la figura 1.8 se muestra la relación entre ambas concentraciones.

C_p	C_v	C_{VD}	$\frac{C_v}{C_{VD}}$	$\frac{Y}{D}$
0.5	0.27	0.5	0.54	0.53
0.6	0.35	0.5	0.70	0.66
0.7	0.46	0.5	0.94	0.89
0.5	0.27	0.7	0.39	0.41
0.6	0.35	0.7	0.50	0.50
0.7	0.46	0.7	0.66	0.63

Se deduce que en la realidad el sedimento depositado llena la mitad de la sección o algo más.

1.1.3. ONDAS DE ARENA A SUPERFICIE LIBRE

Se presentan en los ríos, en las costas, en los canales aluviales y en los desiertos.

Su estudio racional es relativamente reciente: por ejemplo, el primer texto dedicado íntegramente a las dunas en los desiertos fue producido por R. A. Bagnold en 1954 [4]; la primera clasificación cuantitativa de las formas de fondo en cauces aluviales fue dada por M. S. Yalin en 1971 [34].

Existe una variedad enorme de ondas de arena si se observa su forma y tamaño. Yalin (1971) [34] ha dado una clasificación simple basada en factores dinámicos. Ella será adoptada aquí casi literalmente.

Si el escurrimiento es tranquilo (número de Froude Fr menor que la unidad) se pueden presentar dos tipos de ondas de arena: rizos y dunas.

Elas adoptan formas similares: ambas tienen aguas arriba una superficie con pendiente suave y que varía gradualmente y aguas abajo una abrupta superficie con una pendiente casi constante (cercana al ángulo de reposo del material granular). La asimetría resultante se muestra en la Figura 1.9.

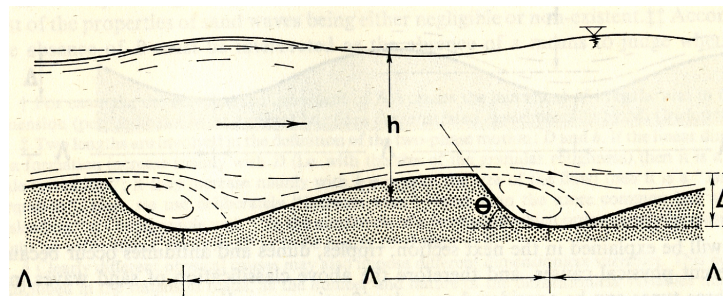


Figura 1.9: Esquema de ondas de arena a superficie libre

Los rizos se distinguen de las dunas por su relación con el tamaño del escurrimiento. El tamaño de los rizos es prácticamente independiente del tamaño del escurrimiento, mientras las dimensiones de las dunas son fuertemente dependientes de las dimensiones del escurrimiento global.

Tanto los rizos como las dunas no son estacionarios: ellos se mueven hacia aguas abajo, pero con una velocidad pequeña comparada con la velocidad del líquido. La superficie libre, si presenta curvatura, ella no está en fase con las ondas de fondo.

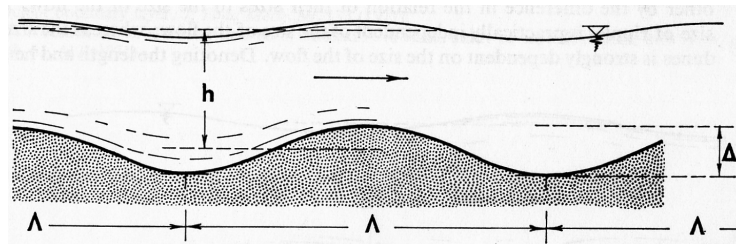


Figura 1.10: Rizos y dunas

Si el escurrimiento es disparado entonces las ondas de arena son referidas como antidunas. La forma de las antidunas es más simétrica que la de los rizos y las dunas (Figura 1.10). Ellas se mueven hacia aguas arriba con una velocidad pequeña respecto a la velocidad del líquido y la forma de la superficie libre está en fase con las ondas de fondo.

1.1.4. INICIO DEL ARRASTRE A SUPERFICIE LIBRE

Este aspecto ha sido estudiado cuantitativamente desde hace tiempo: Brahm en 1753 presentó una fórmula ([32]). Este estado se puede asociar a una velocidad crítica o a una tensión tangencial crítica. Ambos criterios (que no son del todo independientes) se han usado ampliamente. Se expondrá el llamado criterio de Shields para la tensión tangencial crítica. Se han dado numerosas versiones. Aquí se muestra el diagrama de Shields y Parker ([12]) (Figura 1.11).

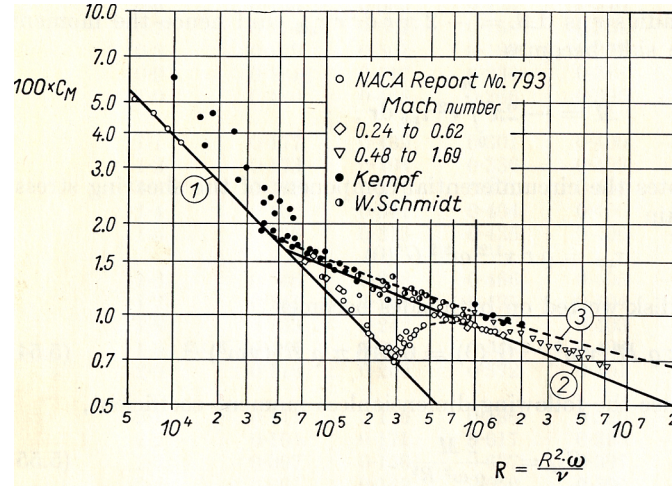


Figura 1.11: Diagrama de Shields (versión de Parker y García)

El eventual movimiento de los sólidos se asocia a dos variables:

$$(1.4) \quad \tau^* = \frac{\tau_F}{(\rho_p - \rho)gd} = \frac{\tau_F}{\rho g \Delta d} \text{ (Movilidad de Shields)}$$

$$(1.5) \quad R_{ep} = \frac{\sqrt{g \Delta d}}{\nu} \text{ (Número de Reynolds densimétrico)}$$

- τ_F : Tensión tangencial en el fondo 1.9.
- ν_s : velocidad de sedimentación de las partículas sólidas.
- d : Diámetro de las partículas sólidas.
- g : Aceleración de gravedad.
- ρ, ρ_p : Densidad del fluido y de las partículas sólidas, respectivamente.
- $\Delta = \frac{\rho_p}{\rho - 1}$: densidad relativa boyante.
- $v^* = \sqrt{\frac{\tau_F}{\rho}}$: velocidad de fricción o de Prandtl.
- ν : viscosidad cinemática del fluido.

La tensión tangencial y la velocidad están ligadas por la relación:

$$(1.6) \quad \tau = \frac{1}{2} \rho C_f V^2$$

1.1.5. CAUDAL DE SOLIDO DE FONDO EN CANALES

En cauces aluviales y canales de fondo móvil interesa el transporte de sedimentos suspendido y de fondo (Figura 1.12).

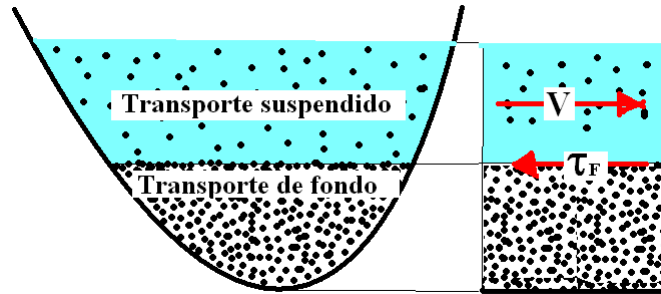


Figura 1.12: Esquema de transporte suspendido y de fondo para cauces aluviales y canales

En este estudio interesa solamente el gasto sólido de fondo. Para su estimación existen numerosas fórmulas (l'embarras c'est le choix). Algunas de ellas admiten ser expresadas en la siguiente forma sencilla:

$$(1.7) \quad q^* = f(\tau^*)$$

q^* es el caudal de sólidos adimensional:

$$(1.8) \quad q^* = \frac{q_p}{d\sqrt{g\Delta d}}$$

q_p es el caudal de partículas sólidas expresado en volumen de sólidos por unidad de tiempo y por unidad de ancho de la corriente. El caudal en masa correspondiente es:

$$(1.9) \quad m_p = \rho_p q_p$$

Ya que es posible relacionar la tensión tangencial con la velocidad(1.3) entonces se concibe que el gasto sólido sea función de esta.

1.1.6. ONDAS DE SEDIMENTO EN EL THST

En relación a las ondas de arena en canales:

- Siguiendo las explicaciones de [34] en un ducto a presión pueden producirse rizos y dunas; las antidunas quedan excluidas ya que requieren de una superficie libre para desarrollarse.
- Según [32] las experiencias de Ismail (1952) indican que las relaciones para los sólidos suspendidos en canales son aproximadamente válidas para conductos presurizados.

- Como resultado de una investigación experimental, [7] concluyen que las ondas de sedimento que se producen en ductos son similares a las que aparecen en canales abiertos a la atmósfera.

Pero existen diferencias profundas:

En los cauces aluviales puede suponerse que la atmósfera se extiende hasta el infinito hacia arriba y el lecho se extiende hasta el infinito hacia abajo (Figura 1.13)

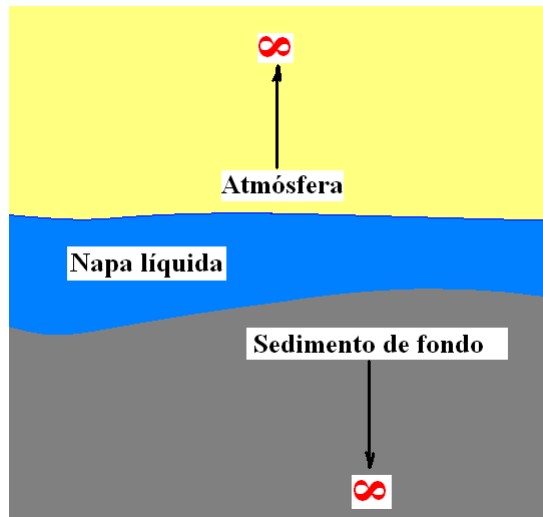


Figura 1.13: Cauce aluvial donde el lecho y la atmósfera se extiende hacia el infinito

En cambio en el THST tanto el líquido como los sólidos están confinados en un espacio limitado (Figura 1.14)



Figura 1.14: Napa líquida y sedimento de fondo están confinados a un espacio limitado

Más aún es posible que se presenten ondas que corresponden a bolsones aislados de sedimento(figura 1.1.6)

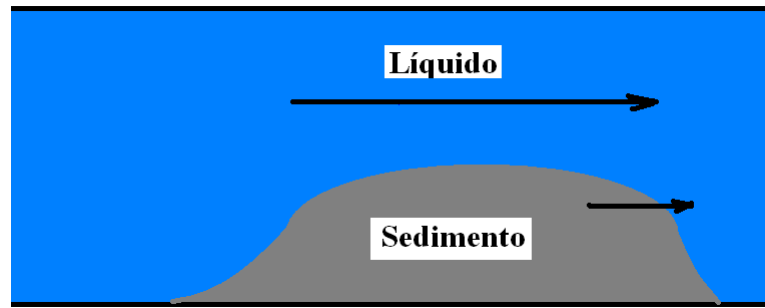


Figura 1.15: Ondas de sedimento en THST

1.1.7. ECUACION DE EXNER PARA LAS ONDAS EN EL THST

ANTECEDENTES HISTORICOS

El primer estudio cuantitativo, así como la primera modelación matemática de ondas de arena se debe a un meteorólogo y geofísico vienés: Felix Maria von Exner-Ewarten. Exner publicó su trabajo en 1925. No ha sido posible acceder al trabajo original. La referencia precisa se muestra en el recuadro siguiente:

Exner, F.M. (1925). Uber die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flussen. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, pt.IIa, Bd.134.

“Sobre la interacción entre el agua y un lecho móvil en un escurrimiento”

Felizmente el trabajo de Exner ha sido expuesto por diferentes autores (por ejemplo [23]; [15]).

En la Figura 1.16 se muestra el resultado de uno de los ejemplos desarrollados por Exner. Se trata de una onda de forma originalmente sinusoidal.

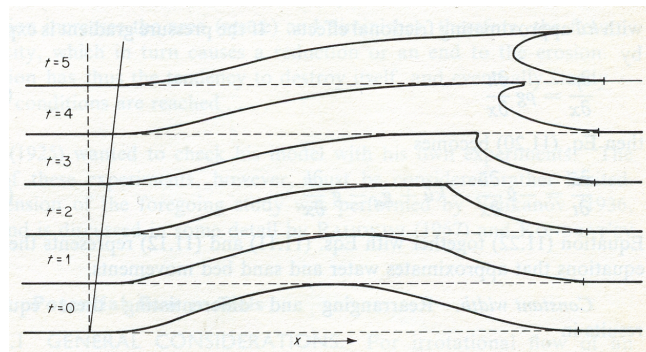


Figura 1.16: Solución de Exner según Graf

Yalin (1972) denomina la ecuación de Exner como de Exner-Polya. Plausiblemente se refiere al matemático húngaro George Pólya, pero no ha sido posible hasta ahora encontrar el lazo indicado.

Deducion detallada

Se considera el siguiente esquema de una tubería: Consideramos las siguientes hipótesis de base:

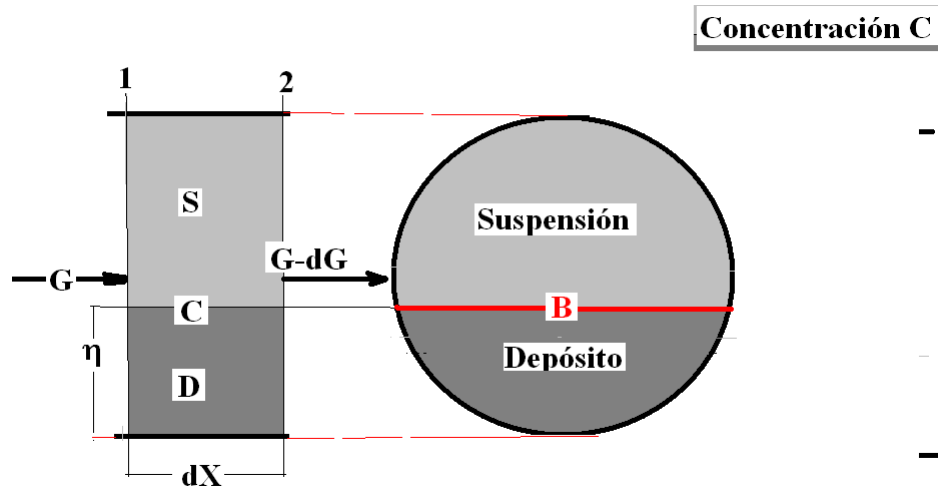


Figura 1.17: Esquema de sección transversal de una tubería

- Fluido y sólido incompresibles.
- Comportamiento de medio continuo.
- Ecurrimiento cuasi paralelo.
- Presión distribuida hidrostáticamente.

Se aplicará el principio de conservación de masa a los sólidos transportados en las secciones 1 y 2 (Figura 1.17).

$$(1.10) \quad G|_1 dt = G|_2 dt + dM$$

- G : Caudal en masa de partículas sólidas que atraviesa la sección.
- dM : Masa de partículas sólidas que se almacena en el lapso dt entre 1 y 2.

Se define ahora la concentración C en masa de partículas por unidad de volumen (densidad parcial de sólidos):

$$(1.11) \quad dM = CA dX$$

- A : Sección del ducto.

Combinando las ecuaciones 1.10 y 1.11:

$$(1.12) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{\partial C}{\partial t} A = 0$$

Esta última relación puede considerarse como una primera forma general de la ecuación de Exner.

A partir de la ecuación 1.12 se pueden seguir varios caminos: como por ejemplo ver Garcia(2008).

Aquí se ha desarrollado el siguiente:

Se supone que existen dos zonas perfectamente distinguibles:

- Una zona superior en que los sólidos están suspendidos (S).
- Una zona inferior en donde los sólidos están depositados (D), pero no necesariamente inmóviles.

Las áreas respectivas cumplen obviamente con la relación:

$$A = A_S + A_D = Cte$$

Estas áreas están separadas por un plano cuya traza en el ducto tiene ancho B , variable con la profundidad η .

Las concentraciones en las dos zonas cumplen:

$$(1.13) \quad C = \frac{dM_S + dM_D}{AdX} = \frac{C_S A_S + C_D A_D}{A}$$

Introduciendo la ecuación 1.13 en la ecuación 1.12:

$$(1.14) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + A \frac{\partial C_S}{\partial t} + A_D \frac{\partial C_D - C_S}{\partial t} + (C_D - C_S) \frac{\partial A_D}{\partial t} = 0$$

Dada las características del problema físico que se desea modelar se asume que η es una función continua en la variable X y al menos C^1 en la variable t , es decir, $\eta \in C^1(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}))$ Ahora como $A_D = A_D(\eta)$:

$$(1.15) \quad \frac{\partial A_D}{\partial t} = A(\eta)' \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

De esta forma reemplazando 1.15 en 1.14:

$$(1.16) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + A \frac{\partial C_S}{\partial t} + A_D \frac{\partial C_D - C_S}{\partial t} + (C_D - C_S) B \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Esta última versión de la ecuación de Exner tiene la forma requerida para todo el análisis que sigue.

CASO PARTICULAR

Si suponemos que solamente existe arrastre de fondo entonces $C_S = 0$, $C_D = C$ y entonces de la ecuación 1.16:

$$(1.17) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + A_D \frac{\partial C}{\partial t} + CB \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Como una aproximación adicional se encuentra experimentalmente que el sedimento depositado lo hace a una concentración cercana a un valor constante. Así la ecuación 1.17 se simplifica:

$$(1.18) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + CB \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Ahora la concentración C puede expresarse de varias maneras:

$$(1.19) \quad C = \rho_p C_V = \rho_p (1 - \varepsilon)$$

- C_V : Cocentración de las partículas sólidas en volumen en el lecho.
- ε : porosidad del lecho (Volumen de huecos sobre volumen total)

Remplazando en la ecuación 1.18

$$(1.20) \quad \frac{\partial G}{\partial X} + \rho_p(1 - \varepsilon)B \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Conviene definir el caudal de partículas sólidas en volumen:

$$(1.21) \quad Q_p = \frac{G}{\rho_p}$$

De esta forma:

$$(1.22) \quad \frac{\partial Q_p}{\partial X} + (1 - \varepsilon)B \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

SUBCASO PARTICULAR

Una situación atractiva tanto del punto de vista experimental como teórico es la de un ducto rectangular de altura h y ancho B , en el caso en que $B \gg h$ (muy ancho). Si es así, las paredes laterales no influirán y se puede escribir la ecuación 1.22 para el caudal de partículas sólidas por unidad de ancho:

$$(1.23) \quad q_p = \frac{Q_p}{B}$$

Remplazando en la ec. 1.22:

$$(1.24) \quad \frac{\partial q_p}{\partial X} + (1 - \varepsilon) \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Esta última expresión es la más empleada en la literatura. El caudal líquido Q puede expresarse :

$$(1.25) \quad Q = (A - A_D)V$$

En donde V es la velocidad del fluido sobre la cama de sedimento. En el caso del ducto rectangular se define un caudal líquido unitario q :

$$(1.26) \quad q = \frac{Q}{B}$$

La ecuación 1.25 se reorganiza

$$(1.27) \quad q = (h - \eta)V$$

En el apéndice A se presenta una deducción alternativa a este caso particular.

1.2. OBJETIVOS

Este trabajo esta enfocado en el estudio de la ecuación de Exner para el transporte de sedimentos. Se estudiarán 3 casos:

1. El estudio la solución clásica de la ecuación de Exner con la hipótesis de Exner sobre el gasto sólido.
2. El estudio de la solución debil de la ecuación de Exner 1-d para el transporte de sedimento en una canaleta rectangular.
3. El estudio de la solución debil de la ecuación de Exner 1-d para el transporte de sedimento en una tubería.

1.2.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Comparar la solución clásica con la solución débil de la ecuación de Exner con la hipótesis de Exner sobre el gasto sólido.
- Formular el problema al interior de una canaleta rectangular y una tubería especificando cual es la la ecuación del gasto sólido para cada caso utilizando el modelo de Meyer-Peter y Muller.
- Dada una condición inicial obtener el perfil de la onda en función del tiempo, la pendiente que representa el ángulo de reposo y la velocidad de la onda para los casos de la canaleta rectangular y la tubería.
- Usar los datos del trabajo [7] para validar los modelos para la canaleta y la tubería.

1.3. HIPOTESIS DE EXNER Y SOLUCIÓN DE EXNER

Exner resolvió un caso muy especial, pero que es de interés. Su solución, formalmente modificada, se dará a continuación.

Para el transporte sólido Exner supuso:

$$(1.28) \quad q_p = a_E(1 - \varepsilon)V$$

donde a_E es una constante llamada coeficiente de erosión.

Remplazando V en la ec. 1.28 y el resultado en la ec. 1.25, para el caudal líquido constante:

$$(1.29) \quad \frac{a_E q_p}{(a - \eta)^2} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

La solución de la ecuación 1.29, dada la condición inicial $\eta(x, 0) = F(x)$, tiene como solución:

$$(1.30) \quad \eta(x, t) = F(X - c(\eta)t)$$

donde

$$(1.31) \quad c(\eta) = \frac{a_E q_p}{(h - \eta)^2}$$

La solución η representa una onda con velocidad $c(\eta)$. Se observa que la velocidad c crece con η . Más aún, ella sería infinita si la tocara la clave del ducto ($h = \eta$).

Se empleará un ejemplo inspirado en el de Exner empleando variables y parámetros adimensionales (*):

- $x^* = \frac{x}{\lambda}$
- $\eta^* = \frac{\eta}{h}$
- $t^* = \left(\frac{a_E q_p}{\lambda h^2}\right)t$

De esta forma

$$(1.32) \quad c^*(\eta^*) = \frac{1}{(1 - \eta^*)^2}$$

$$(1.33) \quad \eta^*(x^*, t^*) = F(x^* - c^* t^*)$$

Se escoge como onda inicial una generalización de la dada por Exner:

$$(1.34) \quad F(x^*) = \eta_0^* \cos(\pi x^*)^2 + \eta_m^* \sin(\pi x^*)^2$$

donde η_0^* y η_m^* son el valor mínimo y el máximo, respectivamente. La solución es:

$$(1.35) \quad \eta(x^*, t^*)^* = \eta_0^* \cos\left(\pi\left(x^* - \frac{t^*}{(1-\eta^*)^2}\right)\right)^2 + \eta_m^* \sin\left(\pi\left(x^* - \frac{t^*}{(1-\eta^*)^2}\right)\right)^2$$

Esta relación representa una onda progresiva que avanza con velocidad $c(\eta^*) = \frac{1}{(1-\eta^*)^2}$. Se debe notar que 1.35 es una ecuación implícita para el perfil de la onda η^*

Para calcular el perfil η^* consideremos la condición inicial

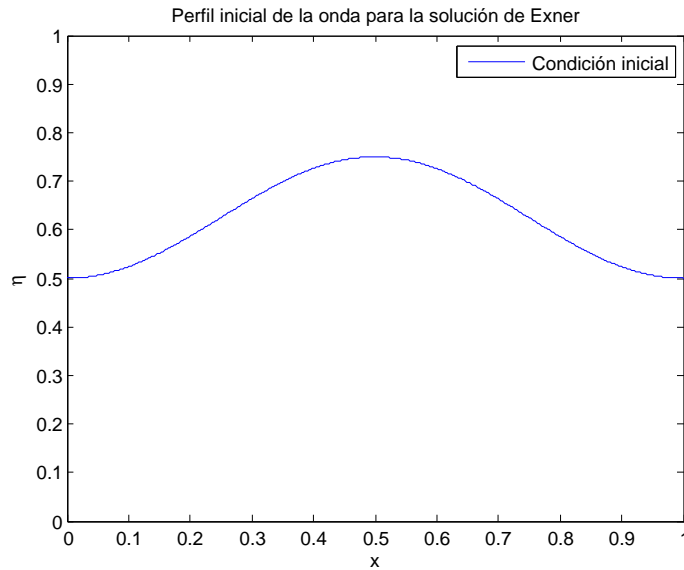


Figura 1.18: Condición inicial para la ec. de Exner

Se sabe que $\eta^*(x^*, t^*)$ representa una onda que se mueve con velocidad c , de esta forma, se toma un punto cualquiera en el perfil inicial $x_i \in [0, 1]$ y se le asocia la altura

$$\eta_i = F(x_i)$$

así es posible calcular la velocidad con la que se moverá ese punto para cualquier tiempo

$$c_i = \frac{1}{(1-\eta_i)^2}$$

De esta forma para cualquier tiempo t_f el punto con altura η_i estará en la posición $x_{f,i}$

$$x_{f,i} = x_i + c_i * t_f$$

Aplicando este esquema se obtienen los siguientes resultados

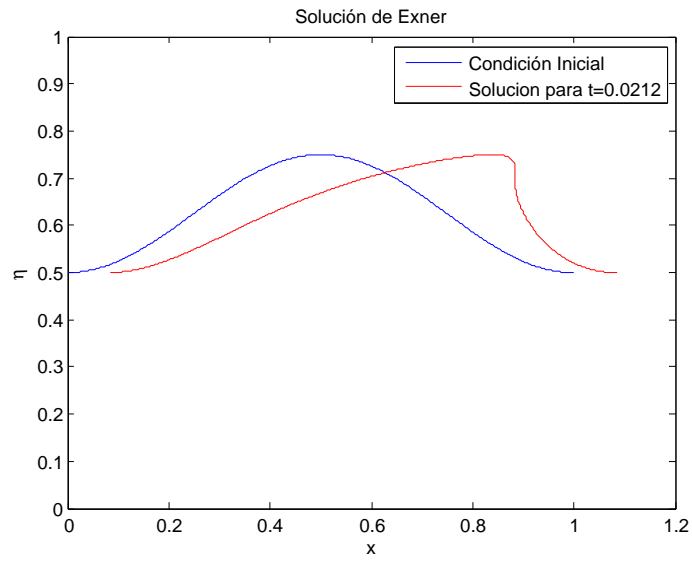


Figura 1.19: Solución de Exner para $t=0.0212$

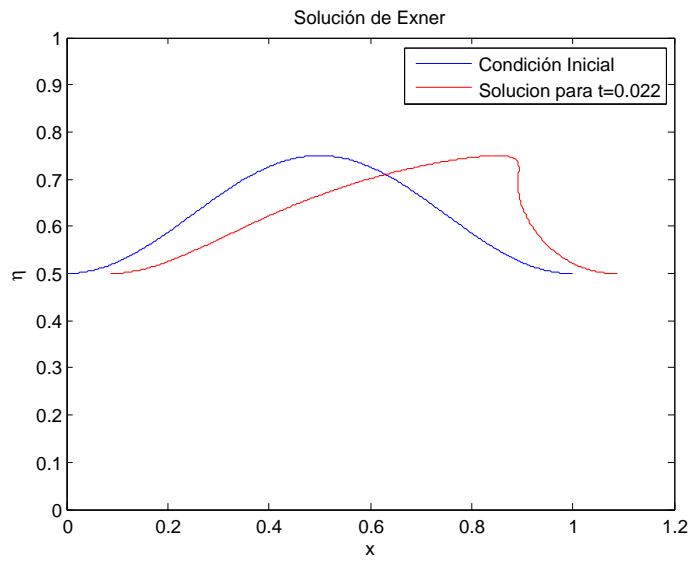


Figura 1.20: Solución de Exner para $t=0.022$

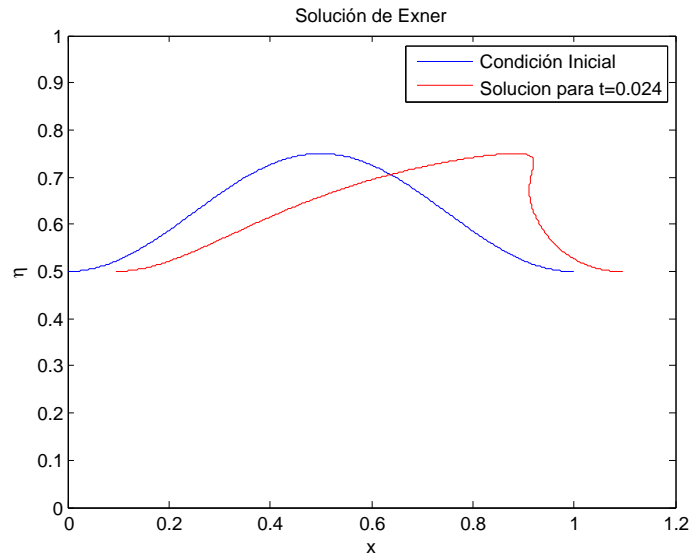


Figura 1.21: Solución de Exner para t=0.024

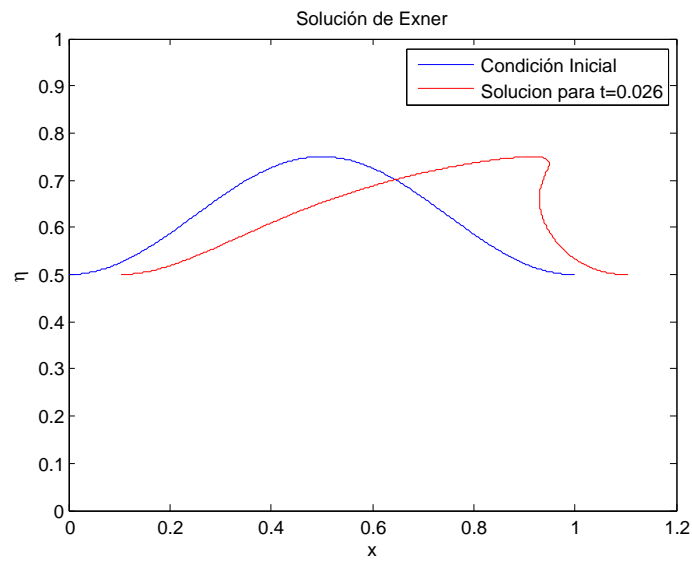


Figura 1.22: Solución de Exner para t=0.026

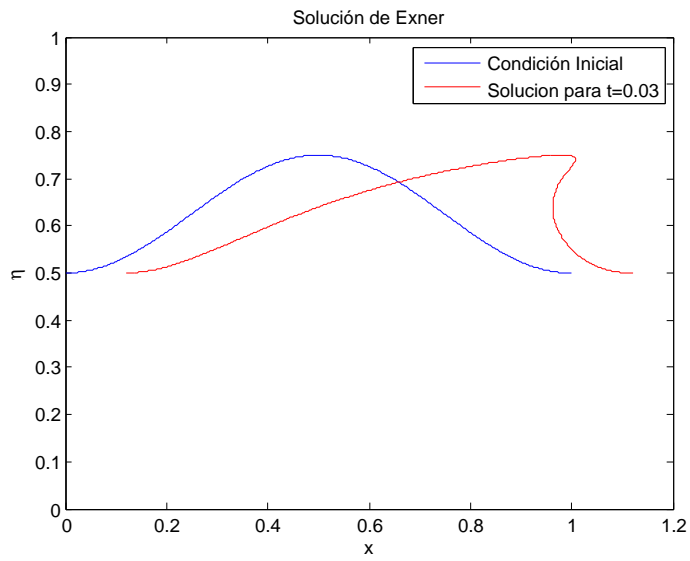


Figura 1.23: Solución de Exner para t=0.03

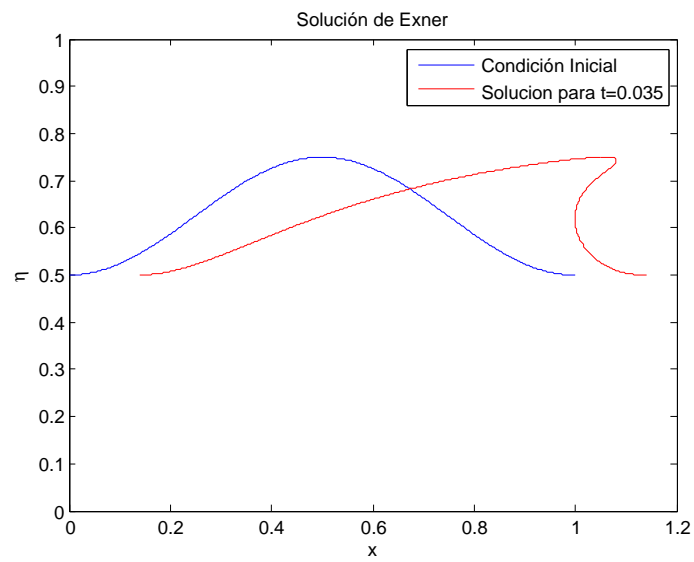


Figura 1.24: Solución de Exner para t=0.035

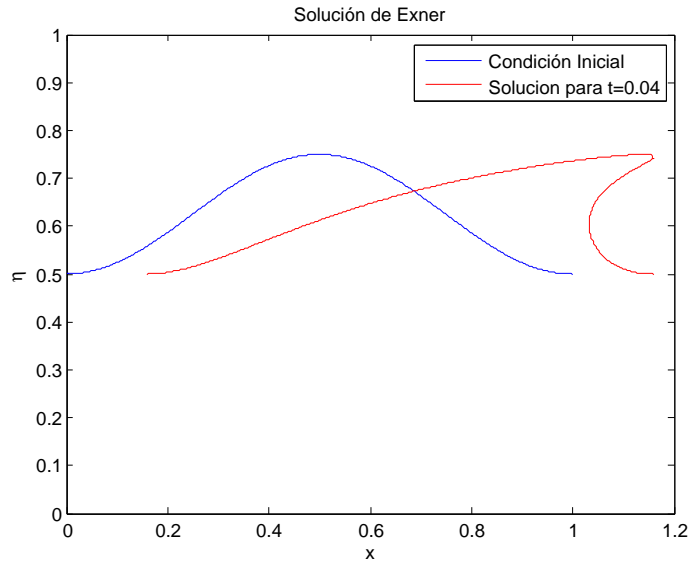


Figura 1.25: Solución de Exner para $t=0.04$

Al igual como se muestra en la figura 1.16 (Exner según Graf), el perfil de la onda comienza a ser una función multivaluada a partir de $t = 0.0212$. Esto se debe a que los puntos en la parte superior del perfil de la onda avanzan más rápido que los puntos en el fondo lo que se desprende de la fórmula de c_i . Lo anterior hace que partículas que yacen en la cresta de la onda queden suspendidas. Este fenómeno no es físicamente posible para un tiempo apreciable.

1.4. SOLUCION DEBIL PARA EL PROBLEMA DE EXNER EN UNA CANALETA RECTANGULAR

Como se comenta en [23] la solución clásica a la ecuación de Exner que se expone en la sección 1.3 no es físicamente correcta ya que un grano de sedimento no se puede mantener en el aire bajo un tiempo apreciable. El error de este enfoque es considerar que la solución de la ecuación hiperbólica

$$(1.36) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Es la misma solución de la ecuación

$$(1.37) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

que, dada la condición inicial u_0 , tiene la forma

$$u(x, t) = u_0(x - f'(u)t)$$

Pero como se demuestra en el apéndice B no es posible asumir la solución de la ecuación 1.36 es C^1 por lo cual no tiene sentido establecer

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Para obtener una solución realista del problema de Exner es necesario buscar una solución débil de la ecuación de Exner con forma 1.36. Para esto utilizamos el método de Galerkin discontinuo con límite de salto presentado en el apéndice C que entrega la solución débil del problema (también se denomina solución de entropía por sus características de unicidad, ver apéndice C).

Para resolver el problema planteamos la ecuación de Exner en una canaleta rectangular con los parámetros adimensionales

- $x^* = \frac{x}{\lambda}$
- $\eta^* = \frac{\eta}{h}$
- $t^* = \left(\frac{a_E q_p}{\lambda h^2}\right)t$

que tiene la forma

$$(1.38) \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \frac{1}{1-\eta^*}}{\partial x^*} = 0$$

En los siguientes gráficos se comprara la solución débil problema 1.38 calculada con el método numérico y la solución clásica presentada en la sección 1.3. La condición inicial es la onda generalizada

$$\eta_0 = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi x)^2 + 0.75 \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ 0.5 & x \in [1, 1.2] \end{cases}$$

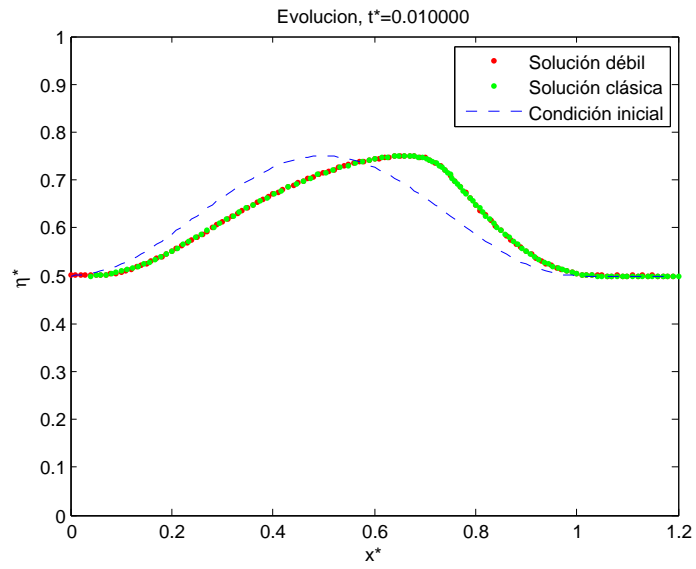


Figura 1.26: Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.01$

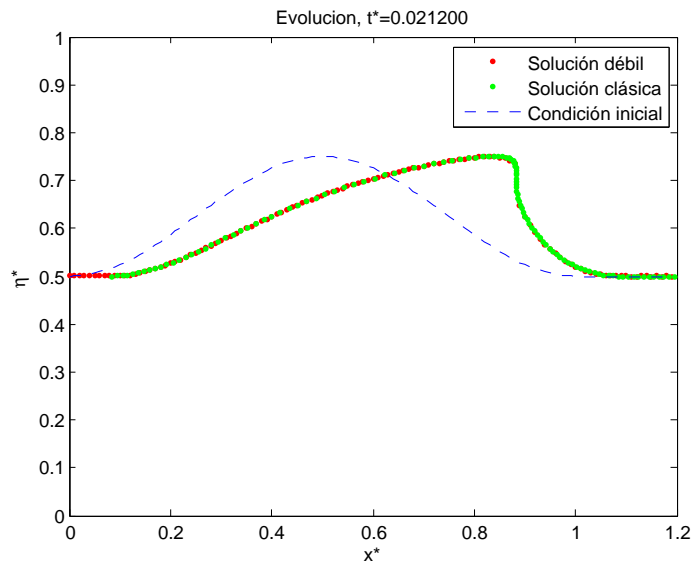


Figura 1.27: Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.0212$

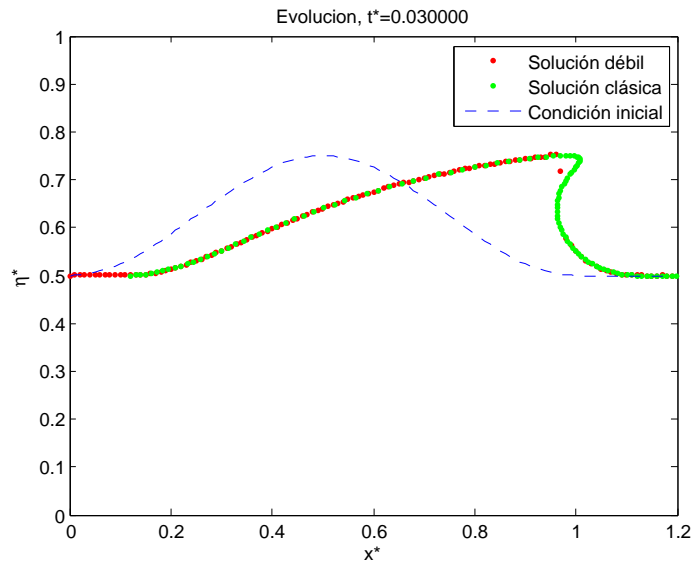


Figura 1.28: Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.03$

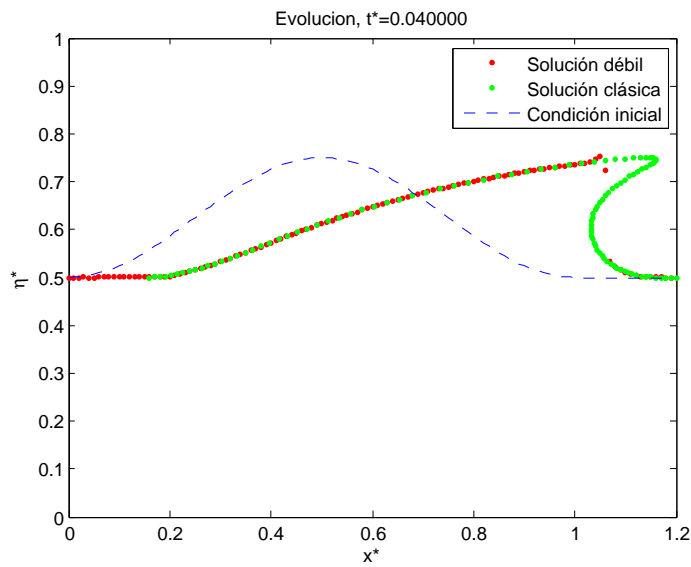


Figura 1.29: Comparación solución clásica con la solución débil para $t^*=0.04$

Las figuras 1.26,1.27,1.28 y 1.29 muestran:

- A partir de la fórmula para calcular el tiempo en que la solución deja de ser C^1 :

$$(1.39) \quad T^* = -\frac{1}{\min_{x_1 \in \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx_1} f'(\eta_0(x_1)) \right)} = 0.0212$$

Se concluye, a partir de la figura 1.27, que para la solución débil tanto como la clásica sus derivadas se vuelven discontinuas en la cresta de la onda.

- La solución débil es diferente a la solución clásica.
- En la solución débil no hay partes del perfil que esten suspendidas.

En base a lo anterior la solución débil del problema 1.38 es realista en cuanto a lo que se espera del fenómeno. A continuación se presentan las soluciones de la ecuación 1.38 y otros resultados para dos problemas de interes.

1.4.1. PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA

Para resolver este problema consideramos como condición inicial la onda generalizada descrita por:

$$\eta_0 = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi x)^2 + 0.75 \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ 0.5 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

Donde x_l es la coordenada x del punto que marca el fin de la canaleta rectangular que en este caso se toma $x_l = 5$. Los resultados son los siguientes:

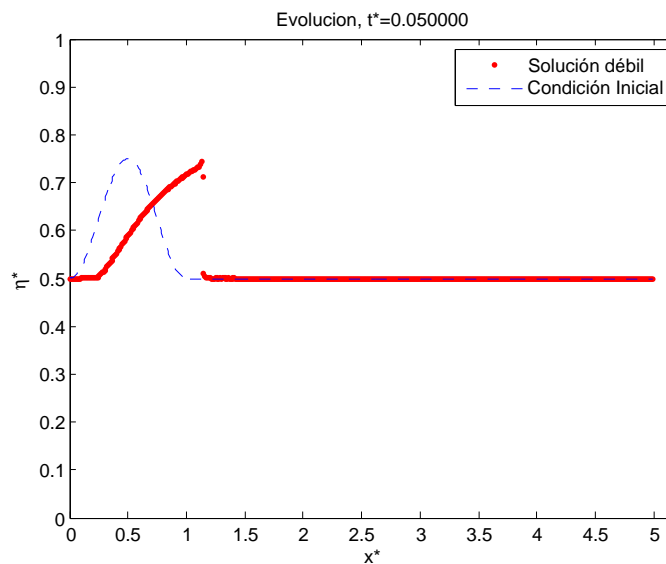


Figura 1.30: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.05$

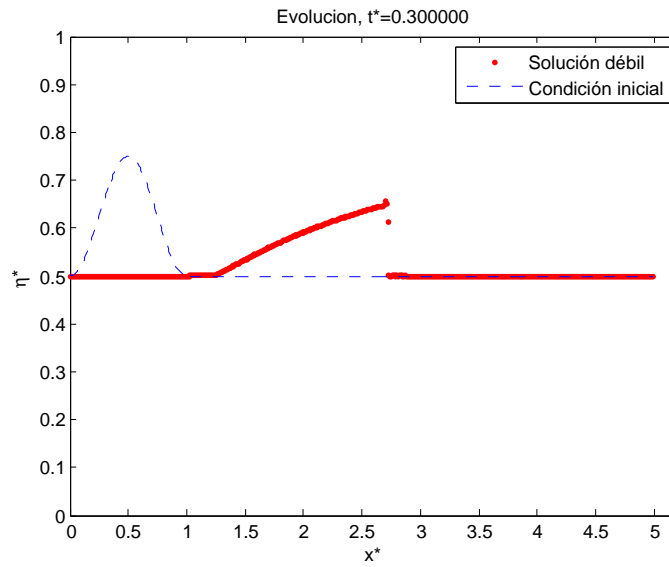


Figura 1.31: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.3$

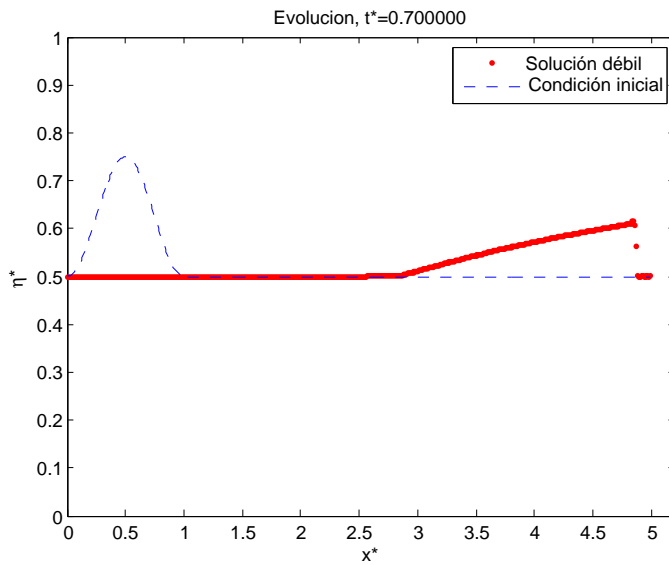


Figura 1.32: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.7$

El siguiente gráfico muestra el valor absoluto de la pendiente entre la cresta y la base (ángulo de reposo) en función del tiempo adimensional:

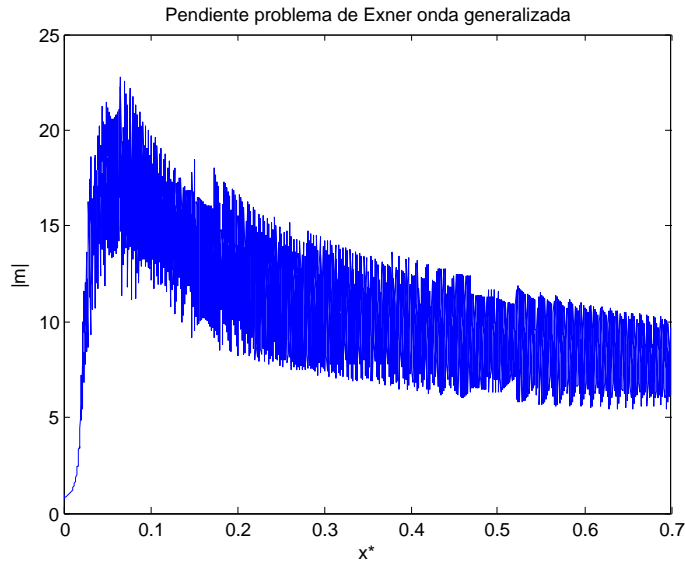


Figura 1.33: Pendiente $v/s t^*$ para el problema de Exner en una tubería rectangular

El siguiente gráfico muestra la velocidad de la cresta de la onda en función del tiempo adimensional:

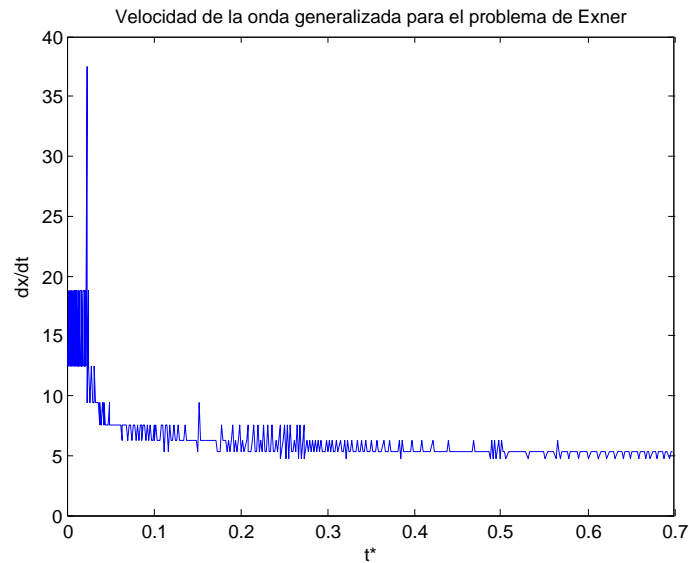


Figura 1.34: $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$

1.4.2. PROBLEMA DE LA MASA FINITA

Para el problema de la masa finita consideramos como condición inicial un triángulo de longitud de onda 1 y altura 0.5, es decir:

$$\eta_0 = \begin{cases} x & x \in (0, 0.5] \\ -x + 1 & x \in (0.5, 1) \\ 0 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

Donde x_l es la coordenada x del punto que marca el fin de la canaleta rectangular que en este caso se toma $x_l = 5$. Los resultados son los siguientes:

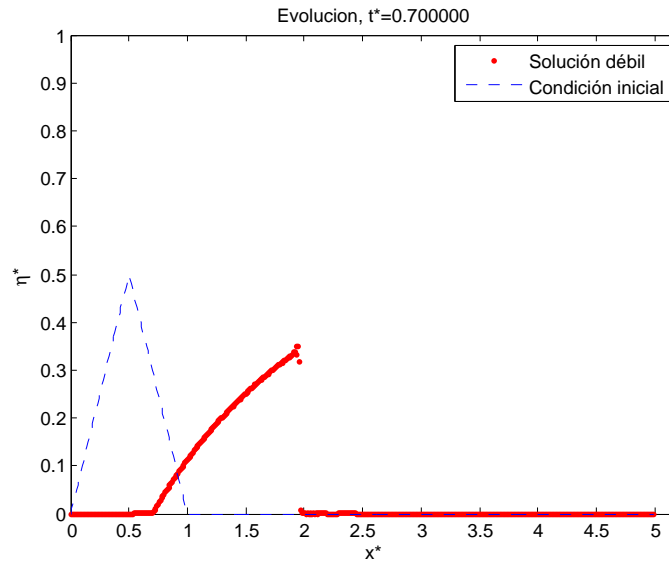


Figura 1.35: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=0.7$

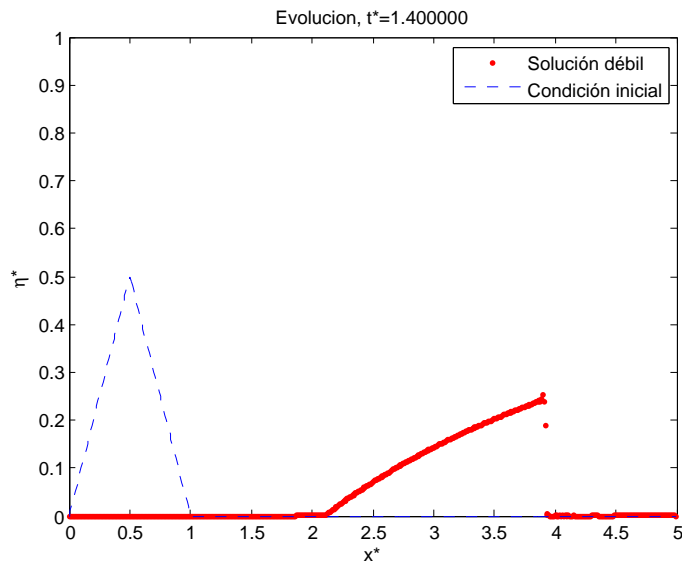


Figura 1.36: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=1.4$

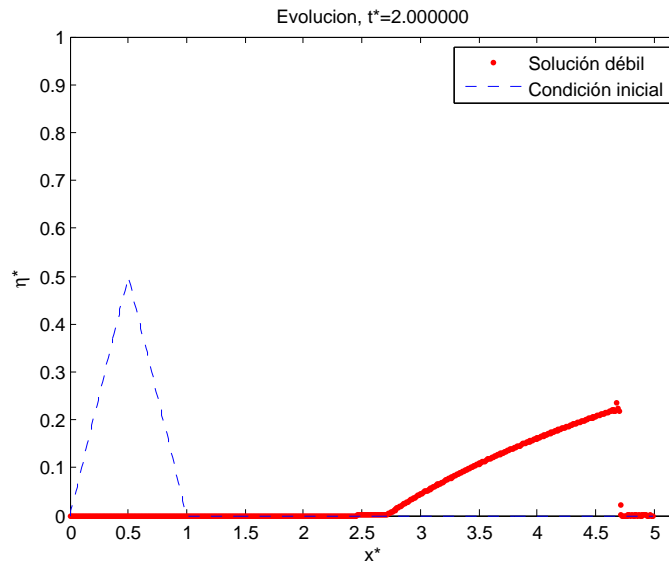


Figura 1.37: Solución para el problema de Exner en una canaleta rectangular en $t^*=2.0$

El siguiente gráfico muestra el valor absoluto de la pendiente entre la cresta y la base (ángulo de reposo) en función del tiempo adimensional:

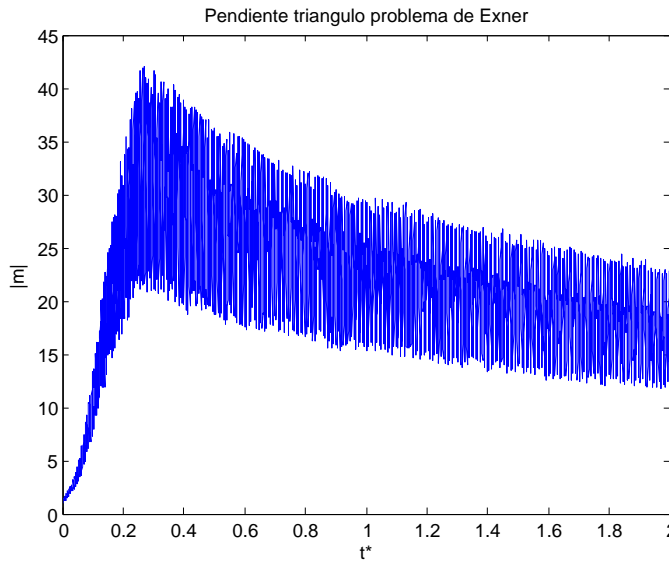


Figura 1.38: Pendiente v/s t^* para el problema de Exner en una tubería rectangular

El siguiente gráfico muestra la velocidad de la cresta de la onda en función del tiempo adimensional:

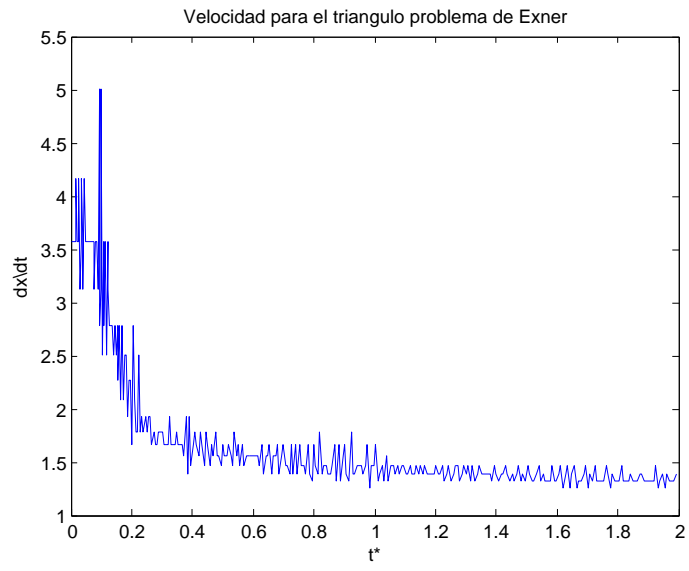


Figura 1.39: $\frac{dx(t)}{dt}v/st^*$

1.5. ECUACION DE EXNER PARA UNA CANALETA RECTANGULAR

1.5.1. ECUACION PARA EL GASTO SOLIDO PARA UNA CANALETA RECTANGULAR

Para determinar una expresión para el gasto sólido se utilizará el modelo de Meyer-Peter y Muller [12]

$$(1.40) \quad q_s^* = K(\tau^* - \tau_c^*)^{\frac{3}{2}}$$

donde:

- q_s^* = gasto sólido adimensional.
- τ^* = tensión de corte adimensional.
- τ_c^* = tensión de corte crítica adimensional.

Sabemos que:

- $q_s^* = \frac{q_s}{d\sqrt{d}\Delta g}$
- $\tau^* = \frac{\tau_0}{\rho g \Delta d}$
- $\tau_c^* = \frac{\tau_p}{\rho g \Delta d}$

donde:

- q_s = gasto solido por unidad.
- τ_p = tensión de corte en la parte superior de la tubería.
- τ_0 = tensión de corte sobre el sedimento.

Utilizando la fórmula para la tensión de corte:

$$(1.41) \quad \tau = \frac{1}{2} C_f \rho V^2$$

Reemplazando en la ecuación 1.40 se obtiene:

$$(1.42) \quad q_s^* = K \left(\frac{C_f}{2g\Delta d} \right)^{\frac{3}{2}} (V^2 - V_c^2)^{\frac{3}{2}}$$

1.5.2. ECUACION DE EXNER PARA TUBERIA RECTANGULAR

La ecuación de Exner para el caso de una canaleta rectangular es:

$$(1.43) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0$$

1.5.3. ANALISIS INSPECCIONAL

Tomando

- $x = \lambda x^*$
- $\eta = h\eta^*$

Donde

- $\lambda :=$ Longitud de onda.
- $h :=$ altura de la canaleta rectangular.

Reemplazando en la ecuación 1.43 y utilizando la expresión adimensional para el gasto sólido se obtiene

$$\frac{(1-\varepsilon)\lambda h}{d\sqrt{dg\Delta}} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} + \frac{\partial q_s^*}{\partial x^*} = 0$$

Se escoge

- $t^* = \frac{d\sqrt{dg\Delta}}{(1-\varepsilon)\lambda h} t$

Por lo tanto la forma final que toma la ecuación de Exner para la canaleta rectangular es:

$$(1.44) \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q_s^*}{\partial x^*} = 0$$

Para concluir el modelo se debe determinar una expresión para q_s^* en terminos de η^* . Para esto es necesario utilizar la ecuacion de continuidad:

$$q = h(1 - \eta^*)V_m^* \sqrt{gd\Delta}$$

Despejando V^* se obtiene

$$(1.45) \quad V_m^* = \frac{q^*}{1 - \eta^*}$$

donde

$$(1.46) \quad q^* = \frac{q}{h\sqrt{gd\Delta}}$$

Además

$$(1.47) \quad V_m^* = \frac{V_m}{\sqrt{gd\Delta}}$$

Donde V_m es la velocidad del fluido sobre el sedimento. Reemplazando 1.47 en 1.42 obtenemos:

$$q_s^* = K_1 \left(\frac{q^{*2}}{(1 - \eta^*)^2} - V_c^{*2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Donde

$$K_1 = K \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

1.5.4. DETERMINACION DE CONSTANTES

De la formula de Meyer-Peter y Muller ([12]) se tiene que $K = 4.93$. Además,

$$C_f = \frac{f}{4} = \frac{0.15}{4} = 0.0375$$

donde f es el factor de fricción, que para los análisis posteriores, se toma igual a 0.15. De esta forma:

$$K = 0.0127$$

Recordemos que las constantes d y Δ están definidas como:

- $d_{50} = 0.7[\mu m]$ (diámetro de las partículas)
- $\Delta = s - 1 = 1.76$

De esta forma, tomando la velocidad del fluido igual a $V_m = 0.5[\frac{m}{s}]$, se tiene

$$q^* = \frac{V}{\sqrt{dg\Delta}} = 14.35$$

La última constante que queda por determinar es V_c^* . Tomando $\tau_{0c}^* = 0.047$ se tiene que

$$V_c^* = \frac{2}{C_f} \tau_{0c}^* = 2.51$$

De esta forma la ecuación para el gasto sólido que se utilizara en los 2 problemas que se presentan a continuación es

$$q_s^* = 0.0127 \left(\frac{14.35^2}{(1 - \eta^*)^2} - 2.51 \right)^{\frac{3}{2}}$$

1.5.5. PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA

Para resolver este problema consideramos como condición inicial la onda generalizada descrita por:

$$\eta_0 = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi x)^2 + 0.75 \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ 0.5 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

Donde x_l es la coordenada x del punto que marca el fin de la canaleta rectangular que para este caso se toma $x_l = 5$. Los resultados son los siguientes:

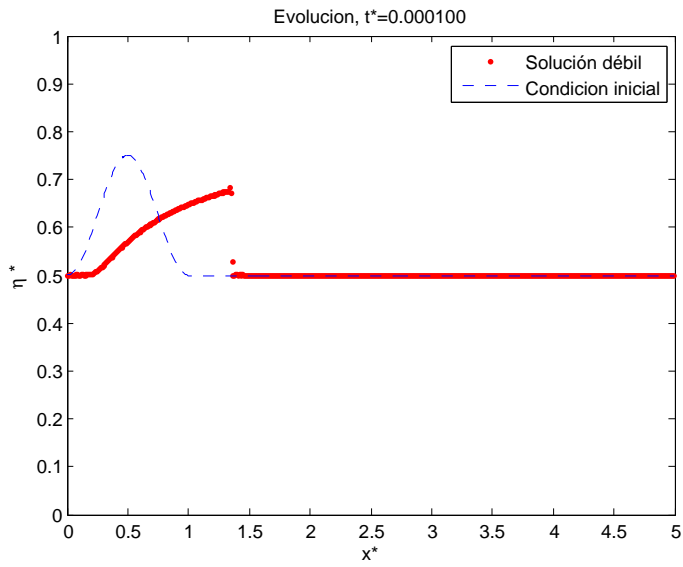


Figura 1.40: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.01$

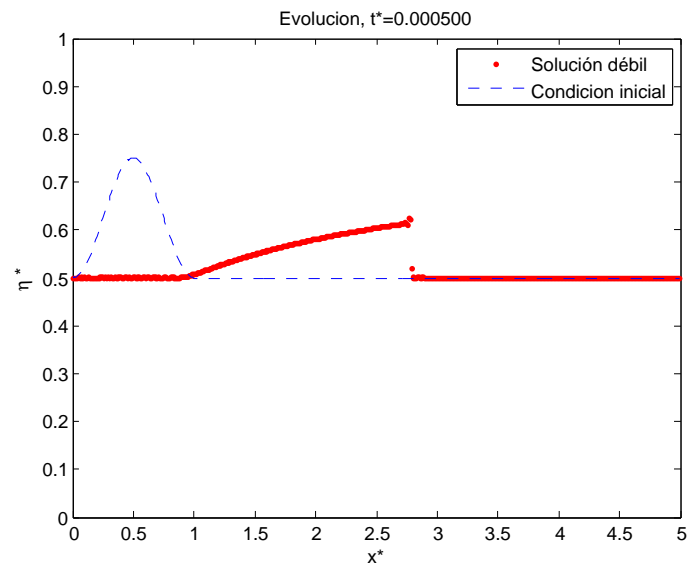


Figura 1.41: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.015$

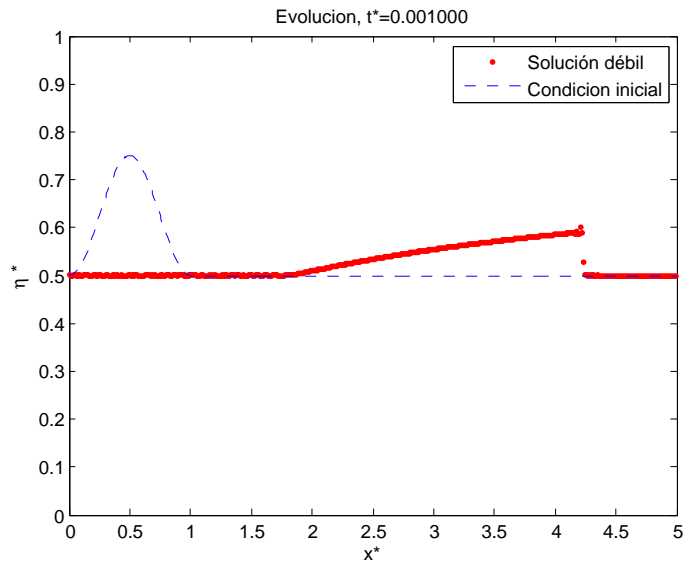


Figura 1.42: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.02$

A continuación se muestra al valor absoluto de la pendiente entre la cresta y la base (ángulo de reposo) en función del tiempo adimensional:

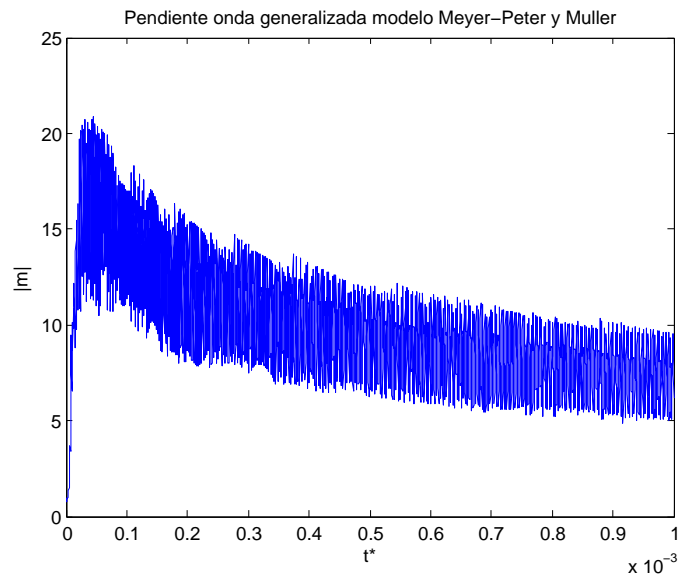


Figura 1.43: Pendiente v/s t^* para la masa finita en canaleta rectangular

El siguiente gráfico muestra la velocidad de la cresta de la onda en función del tiempo adimensional:

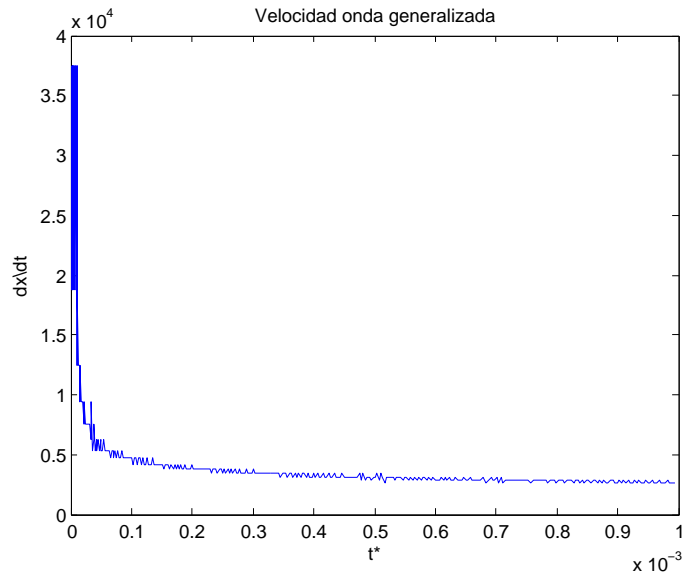


Figura 1.44: $\frac{dx(t)}{dt}v/st^*$

1.5.6. PROBLEMA DE LA MASA FINITA

Para el problema de la masa finita consideramos como condición inicial un triángulo de longitud de onda 1 y altura 0.5, es decir:

$$\eta_0 = \begin{cases} x & x \in (0, 0.5] \\ -x + 1 & x \in (0.5, 1) \\ 0 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

Donde x_l es la coordenada x del punto que marca el fin de la canaleta rectangular que para este caso se toma $x_l = 5$. Los resultados son los siguientes:

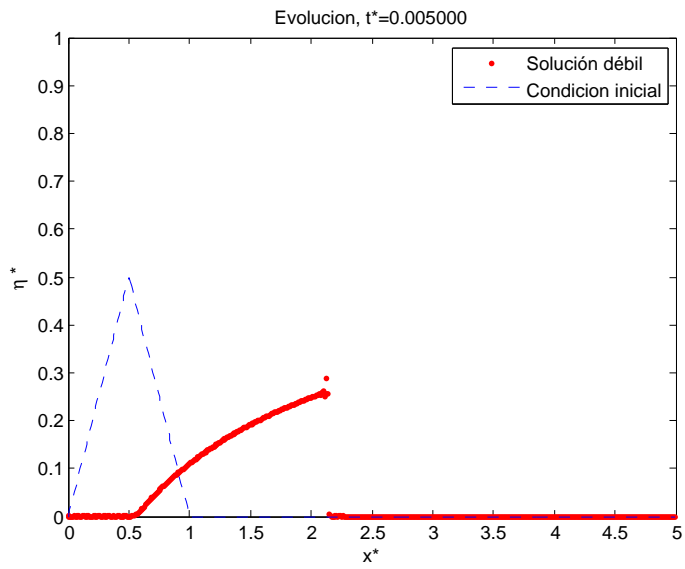


Figura 1.45: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triángulo en $t^*=0.005$

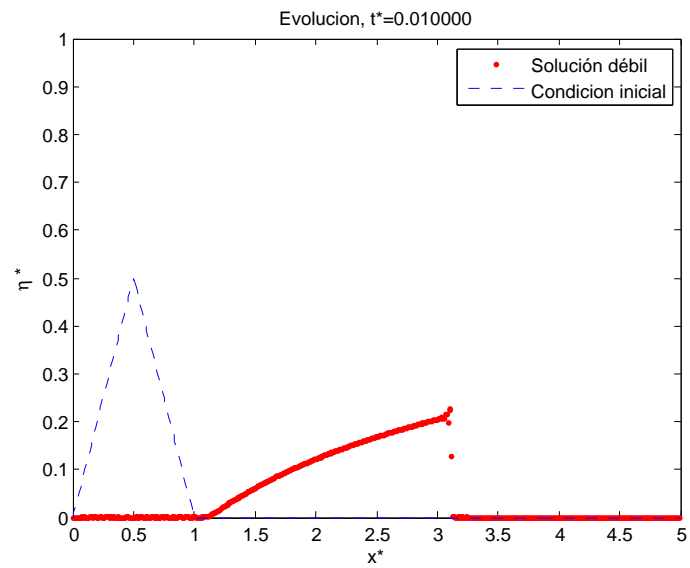


Figura 1.46: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triángulo en $t^*=0.01$

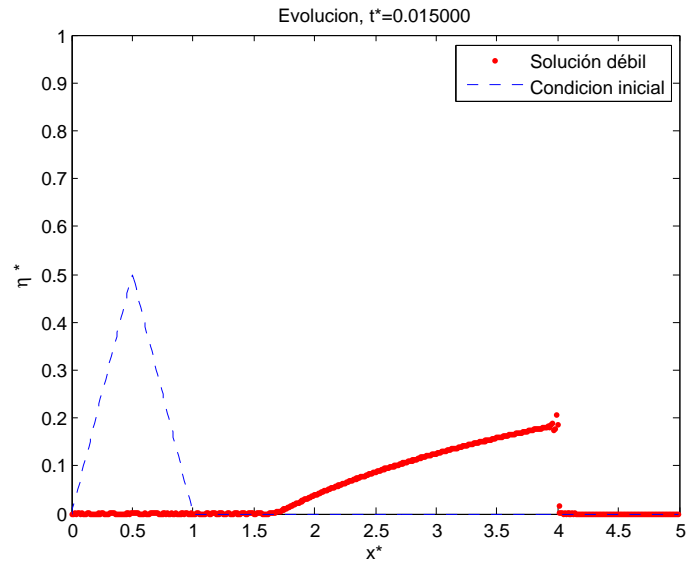


Figura 1.47: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triángulo en $t^*=0.015$

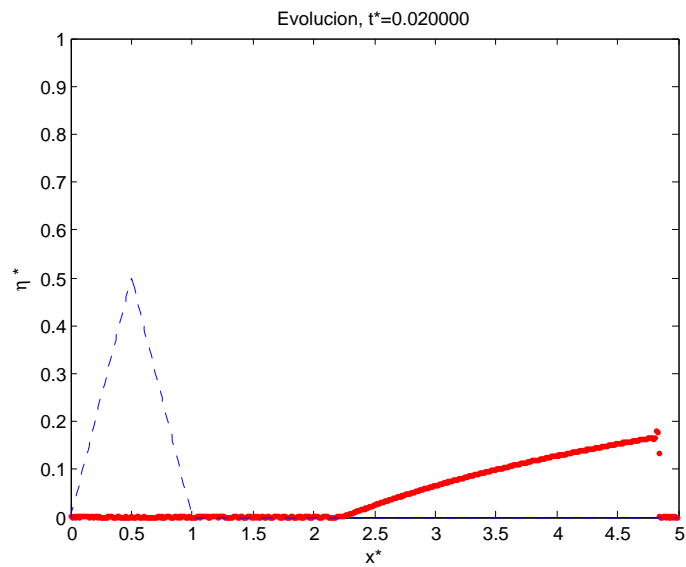


Figura 1.48: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para el triángulo en $t^*=0.02$

A continuación se muestra al valor absoluto de la pendiente entre la cresta y la base (ángulo de reposo) en función del tiempo adimensional:

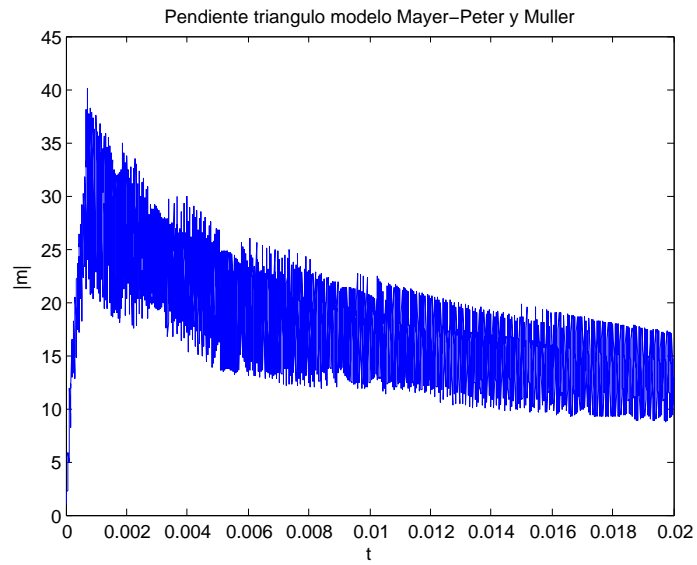


Figura 1.49: Pendiente $v/s t^*$ para la masa finita en canaleta rectangular

El siguiente gráfico muestra la velocidad de la cresta de la onda en función del tiempo adimensional:

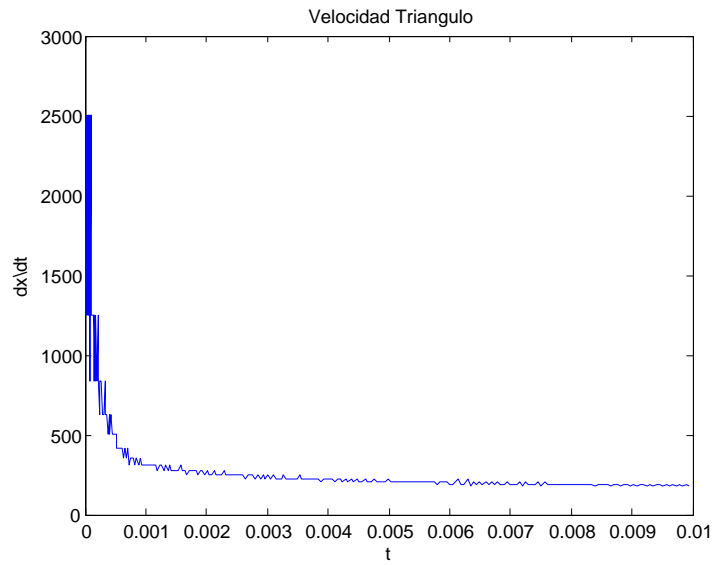


Figura 1.50: $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$

1.6. ECUACION DE EXNER PARA UNA TUBERIA

1.6.1. ECUACION PARA EL GASTO SOLIDO PARA UNA TUBERÍA

Al igual que para el caso de la canaleta rectangular para determinar una expresión para el gasto sólido se utilizara el modelo de Meyer-Peter y Muller [12].

$$(1.48) \quad q_s^* = K(\tau^* - \tau_c^*)^{\frac{3}{2}}$$

donde:

- q_s^* = gasto sólido adimensional.
- τ^* = tensión de corte adimensional.
- τ_c^* = tensión de corte crítica adimensional.

Sabemos que:

- $q_s^* = \frac{q_s}{d\sqrt{d\Delta g}}$
- $\tau^* = \frac{\tau_0}{\rho g \Delta d}$
- $\tau_c^* = \frac{\tau_p}{\rho g \Delta d}$

donde

- q_s = gasto solido por unidad.
- τ_p = tensión de corte en la parte superior de la tubería.
- τ_0 = tensión de corte sobre el sedimento.

Utilizando la fórmula para la tensión de corte

$$(1.49) \quad \tau = \frac{1}{2} C_f \rho V^2$$

Remplazando en la ecuación 1.48 se obtiene:

$$(1.50) \quad q_s^* = K \left(\frac{C_f}{2g\Delta d} \right)^{\frac{3}{2}} (V^2 - V_c^2)^{\frac{3}{2}}$$

1.6.2. ECUACION DE EXNER PARA UNA TUBERIA

La ecuación de Exner para el caso de la tubería es

$$(1.51) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B(\eta)(1-\varepsilon)} \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0$$

donde

- Q_s : Caudal de partículas sólidas en volumen.
- $B(\eta)$: ancho de la tubería circular para la altura η .

$$(1.52) \quad B(\eta) = 2D\sqrt{\frac{\eta}{D}\left(1 - \frac{\eta}{D}\right)}$$

- D = Diametro de la tubería [m]

Como hipótesis se supondrá que:

$$(1.53) \quad Q_s = q_s B(\eta)$$

1.6.3. ANALISIS INSPECCIONAL

Tomando

- $x = \lambda x^*$
- $\eta = D\eta^*$

Reemplazando en la ecuación 1.51 y utilizando la expresión adimensional para el gasto sólido y la hipótesis 1.53

$$\frac{(1-\varepsilon)\lambda D}{d\sqrt{dg\Delta d}} \frac{\partial \eta^*}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}} \frac{\partial q_s^* \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}}{\partial x^*} = 0$$

Se escoge

- $t^* = \frac{d\sqrt{dg\Delta d}}{(1-\varepsilon)\lambda D} t$

Por lo tanto, la forma final que toma la ecuación de Exner para la tubería:

$$(1.54) \quad \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}} \frac{\partial q_s^* \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}}{\partial x^*} = 0$$

Para concluir el modelo se debe determinar una expresión para q_s^* en términos de η^* . Para esto es necesario utilizar la ecuación de continuidad:

$$Q = (A - A_s)V = (A - A_s)V^* \sqrt{gd\Delta}$$

Despejando V^* se obtiene

$$(1.55) \quad V^* = \frac{Q}{(A - A_s)\sqrt{gd\Delta}}$$

donde

- A es el área de la tubería:

$$A = \frac{D^2 \pi}{4}$$

- A_s área que ocupa el sedimento en la tubería:

$$A_s = \frac{D^2}{2} (\arcsin(\sqrt{\eta^*}) - \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}(1-2\eta^*))$$

De esta forma

$$(1.56) \quad V^* = \frac{Q^*}{\frac{\pi}{2} - (\arcsin(\sqrt{\eta^*}) - \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}(1-2\eta^*))}$$

$$Q^* = \frac{Q}{\frac{D^2}{2} \sqrt{gd\Delta}} = \frac{\pi V_m}{2\sqrt{gd\Delta}} = \frac{\pi}{2} q^*$$

donde q^* es la constante calculada para la canaleta.

Reemplazando 1.56 en 1.50 obtenemos

$$q_s^* = K_1 \left(\left(\frac{Q^*}{\frac{\pi}{2} - (\arcsin(\sqrt{\eta^*}) - \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}(1-2\eta^*))} \right)^2 - V_c^{*2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

donde

$$K_1 = K \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

1.6.4. DETERMINACION DE CONSTANTES

De la formula de Meyer-Peter y Muller ([12]) se tiene que $K = 4.93$. Además

$$C_f = \frac{f}{4} = \frac{0.15}{4} = 0.0375$$

donde f es el factor de fricción que para los análisis posteriores se toma igual a 0.15. De esta forma

$$K = 0.0127$$

Recordemos que las constantes d y Δ están definidas como:

- $d_{50} = 0.7[\mu m]$ (diámetro de las partículas)
- $\Delta = s - 1 = 1.76$

De esta forma, tomando la velocidad del fluido sobre el sedimento igual a $V_m = 0.5[\frac{m}{s}]$, se tiene

$$Q^* = \frac{\pi}{2} \frac{V_m}{\sqrt{dg\Delta}} = 22.54$$

La ultima constante que queda por determinar es V_c^* . Tomando $\tau_{0c}^* = 0.047$ se tiene que

$$V_c^{*2} = \frac{2}{C_f} \tau_{0c}^* = 2.51$$

De esta forma la ecuación para el gasto sólido que se utilizará en el problema que se presenta a continuación es:

$$q_s^* = 0.0127 \left(\frac{22.54^2}{\left(\frac{\pi}{2} - (\arcsin(\sqrt{\eta^*}) - \sqrt{\eta^*(1-\eta^*)}(1-2\eta^*)) \right)^2} - 2.51 \right)^{\frac{3}{2}}$$

1.6.5. PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA

Para resolver este problema consideramos como condición inicial la onda generalizada descrita por:

$$\eta_0 = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi x)^2 + 0.75 \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ 0.5 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

donde x_l es la coordenada x del punto que marca el fin de la canaleta rectangular que para este caso se toma $x_l = 10$. Los resultados son los siguientes:

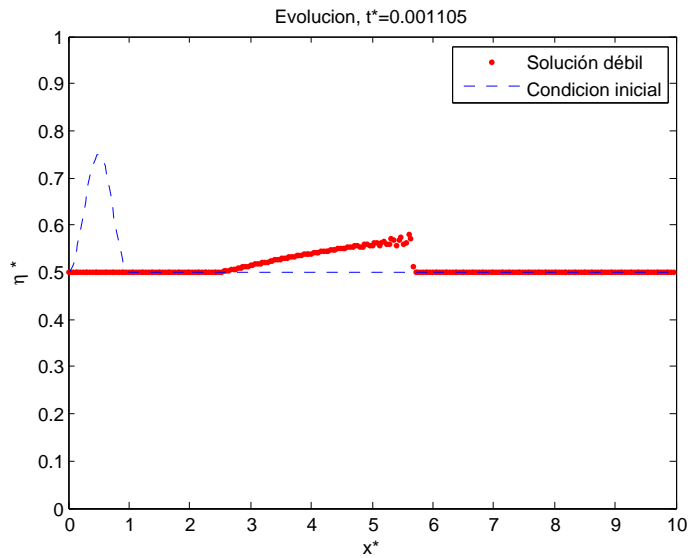


Figura 1.51: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.001105$.

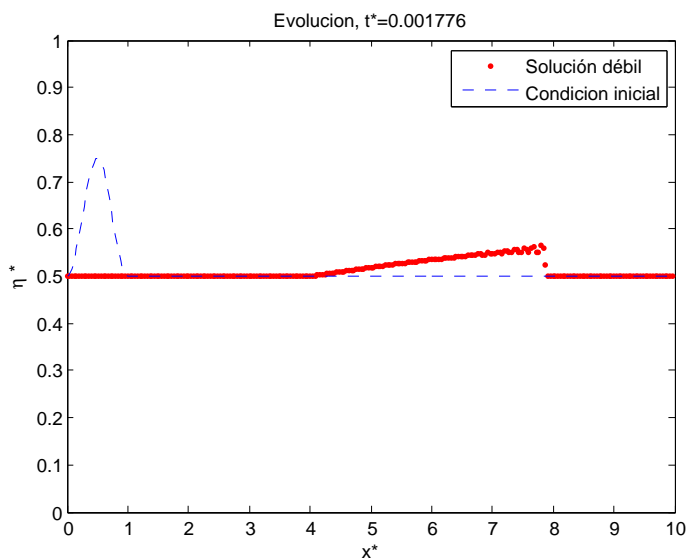


Figura 1.52: Solución modelo Meyer-Peter y Muller para la onda generalizada en $t^*=0.001776$.

A continuación se muestra al valor absoluto de la pendiente entre la cresta y la base (ángulo de reposo) en función del tiempo adimensional:

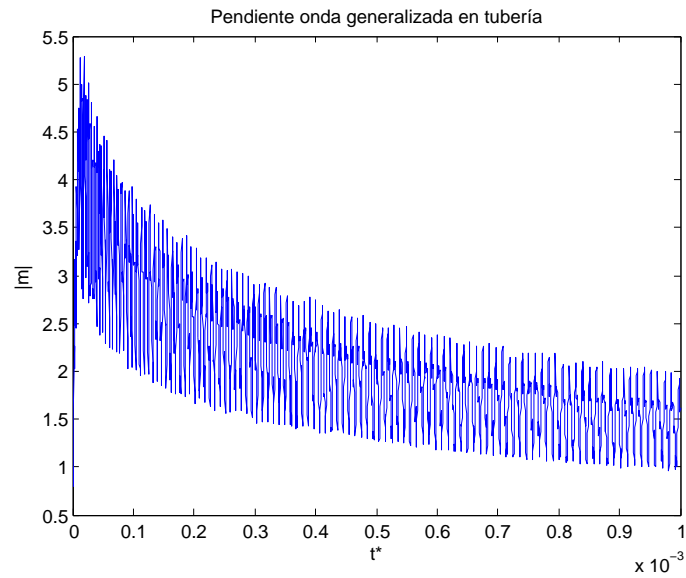


Figura 1.53: Pendiente $v/s t^*$ para la onda generalizada en una tubería

El siguiente gráfico muestra la velocidad de la cresta de la onda en función del tiempo adimensional:

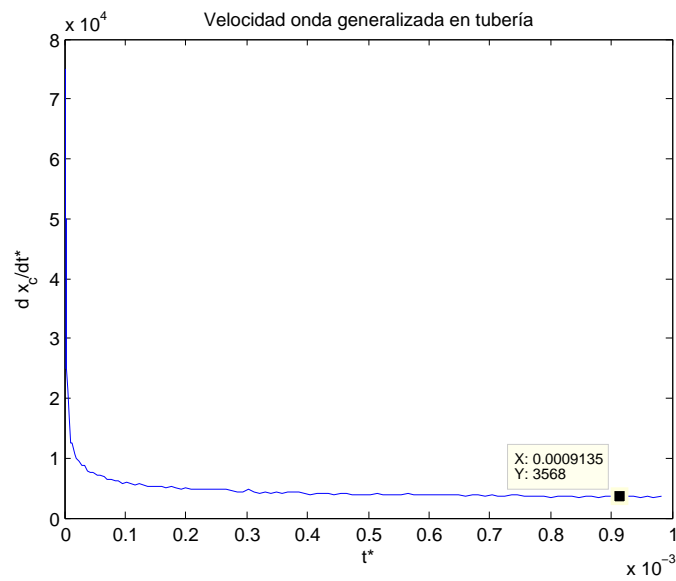


Figura 1.54: $\frac{dx(t)}{dt} v/st^*$

1.6.6. COMPARACION DE SOLUCIONES PARA UNA CANALETA Y UNA TUBERIA

PROBLEMA DE LA ONDA GENERALIZADA

A continuación se comparan los resultados obtenidos para el problema de la onda generalizada en una canaleta rectangular y una tubería. El problema de la onda generalizada tiene como condición inicial:

$$\eta_0 = \begin{cases} 0.5 \cos(\pi x)^2 + 0.75 \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ 0.5 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

tanto para la canaleta como para la tubería. Para este caso consideramos $x_l = 5$.

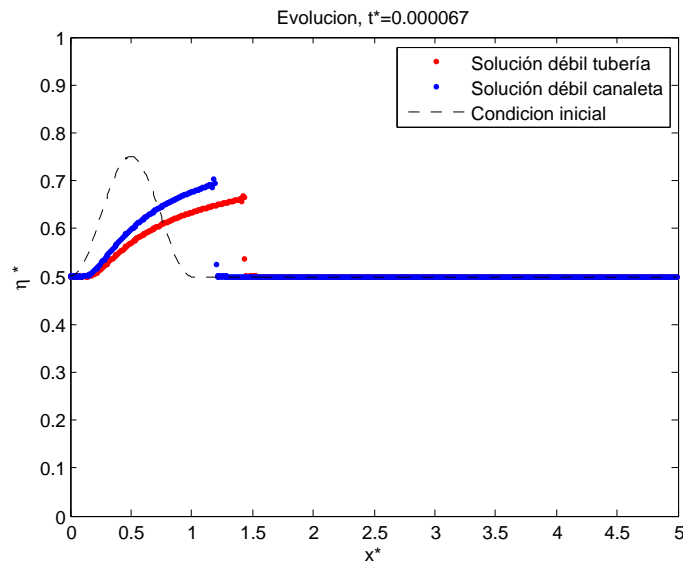


Figura 1.55: Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.000067$

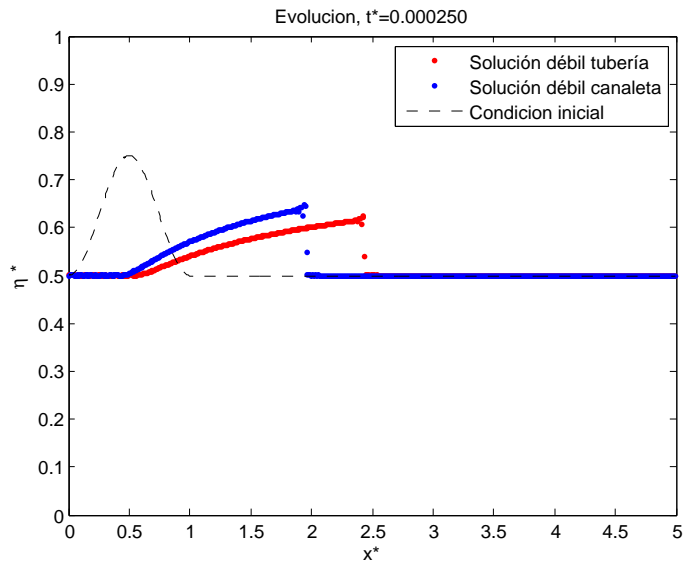


Figura 1.56: Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.00025$

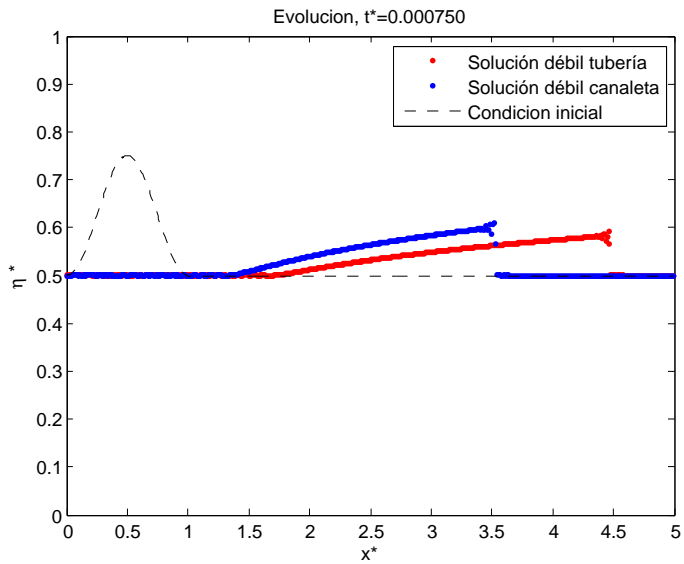


Figura 1.57: Comparación de la solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.0075$

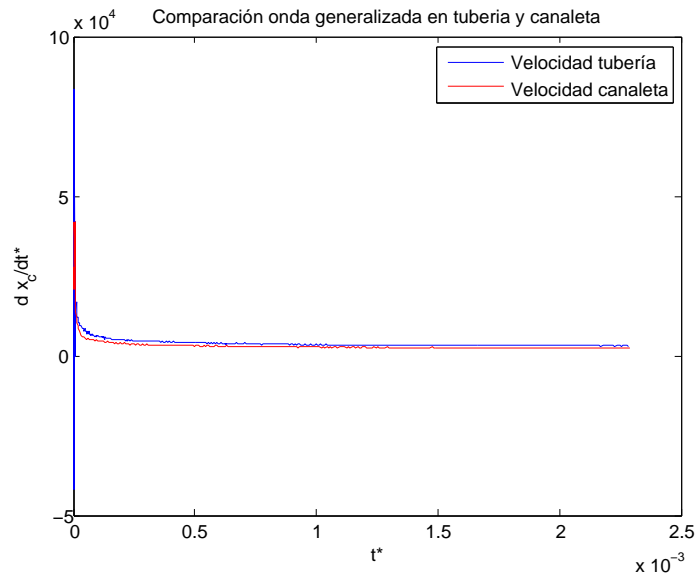


Figura 1.58: Comparación de velocidades de solución del problema de la onda generalizada para la canaleta y la tubería.

PROBLEMA DE LA MASA FINITA

A continuación se comparan los resultados obtenidos para el problema de la onda generalizada en una canaleta rectangular y una tubería. El problema de la onda generalizada tiene como condición inicial:

$$\eta_0 = \begin{cases} x & x \in (0, 0.5] \\ -x + 1 & x \in (0.5, 1) \\ 0 & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

tanto para la canaleta como para la tubería. Para este caso consideramos $x_l = 5$.

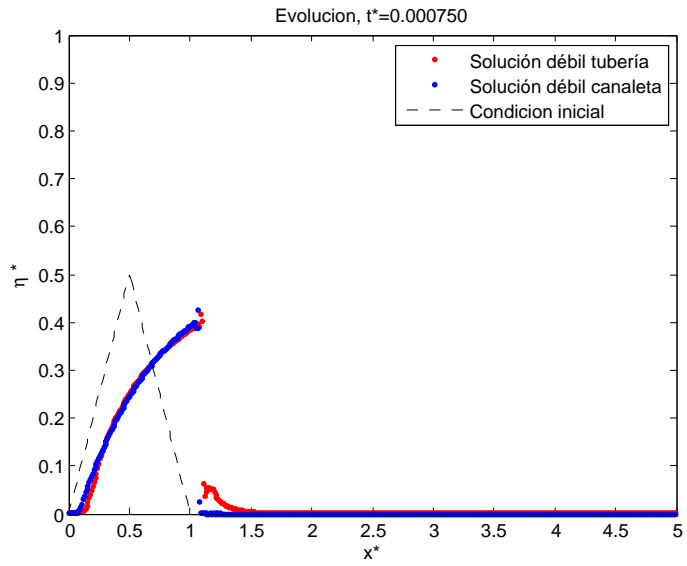


Figura 1.59: Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.00075$

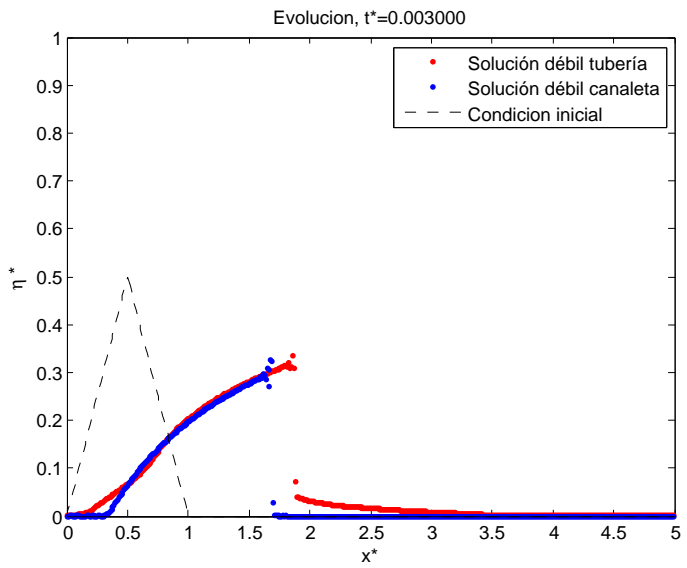


Figura 1.60: Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.003$

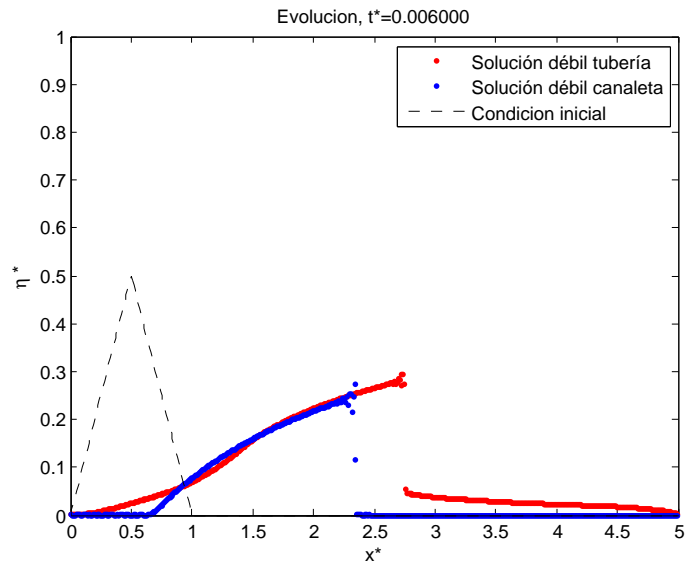


Figura 1.61: Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.006$

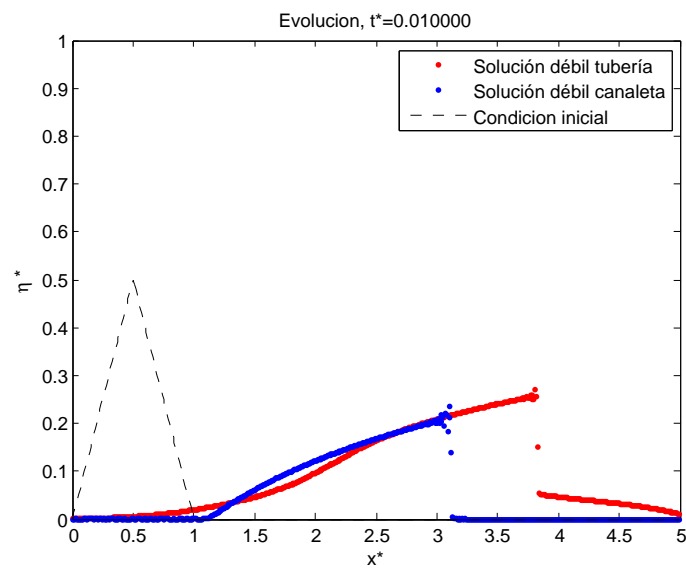


Figura 1.62: Comparación de la solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería en $t^* = 0.01$

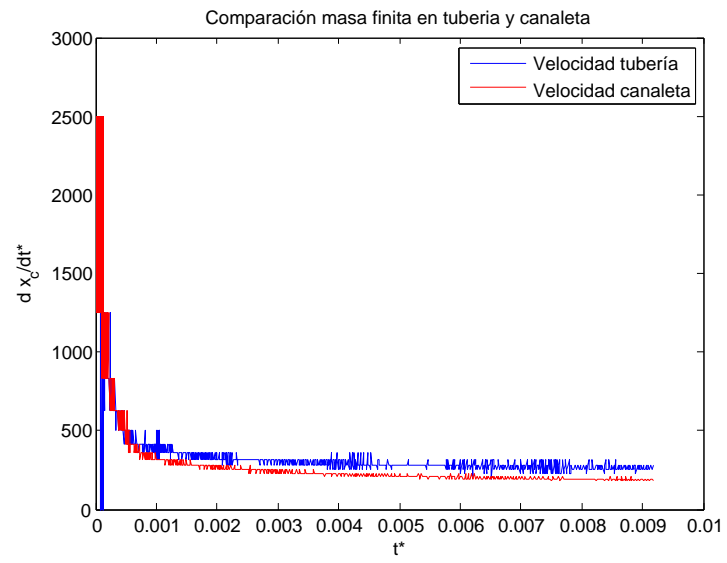


Figura 1.63: Comparación de velocidades de solución del problema de la masa finita para la canaleta y la tubería.

1.7. DESARROLLO EXPERIMENTAL

1.7.1. ANALISIS DE LOS DATOS EXPERIMENTALES

En el trabajo [7] se estudia experimentalmente la formación de ondas de sedimentos en una canaleta rectangular cerrada. El experimento realizado consta de una canaleta rectangular de 15 [cm] de alto con sedimento fino ($d = 0.11[mm]$) o sedimento grueso ($d = 0.87[mm]$) que cubre 5 [cm] de la canaleta. Al interior de la canaleta se hace pasar agua para distintas velocidades (V_m) obteniendo el perfil de la cama de sedimento para distintos tiempos como se ve en las figuras 1.64 y 1.65 donde cada R, numero(t_1, t_2) representa una corrida con una V_m diferente y adentro de cada corrida se muestra de abajo hacia arriba como evoluciona el perfil en tiempos iguales desde t_1 hasta t_2 . . El sedimento esta completamente liso al iniciar el experimento.

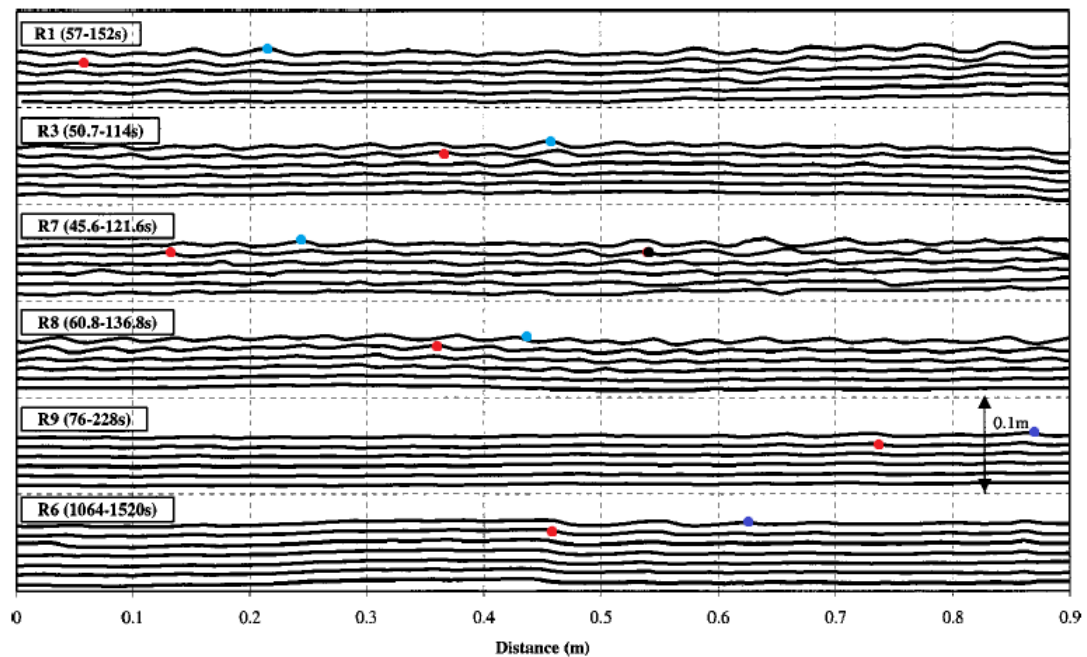


Figura 1.64: Perfiles para sedimento Fino.

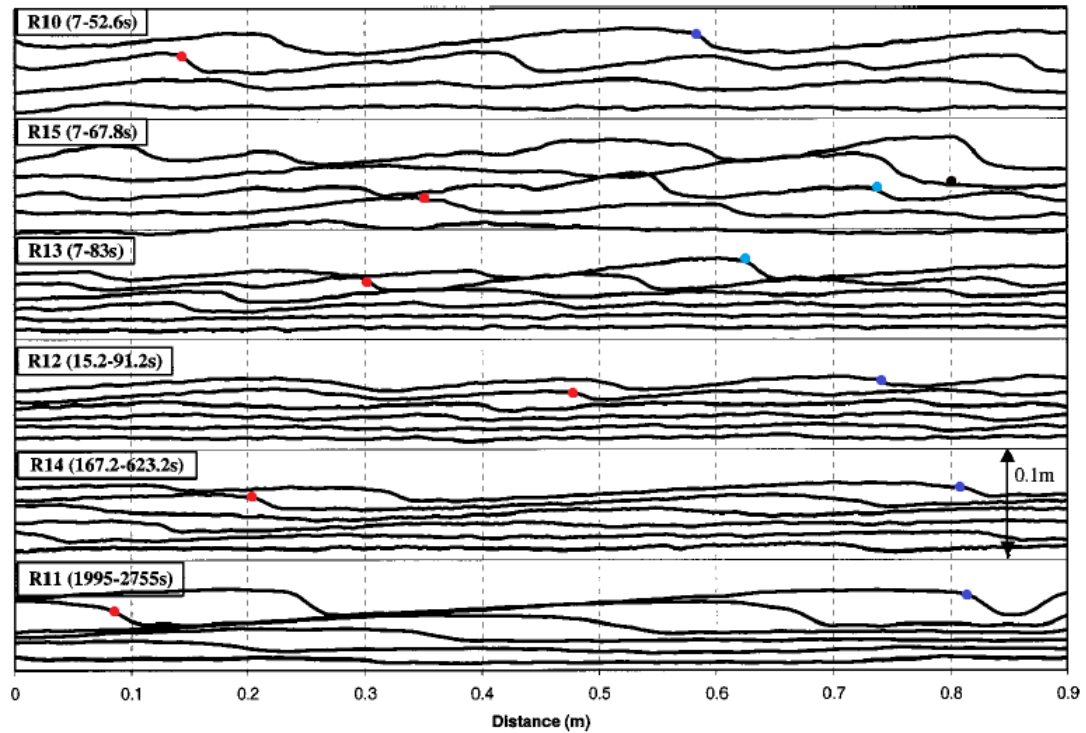


Figura 1.65: Perfiles para sedimento grueso.

Las imágenes muestran como evolucionan los perfiles de la cama de sedimento que va desde un perfil plano hasta formar bultos que se desplazan a través de la cama de sedimento. Usando las figuras y la fórmula $v = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$ es posible estimar la velocidad media de los algunos bultos de sedimento. Para esto calculamos la velocidad usando las figuras 1.64 y 1.65 donde suponemos para cada corrida que el punto rojo se mueve hacia el punto azul con velocidad constante. Estas velocidades están en las tablas de comparación en la siguiente sección.

1.7.2. SIMULACION NUMERICA PARA LA CANALETA RECTANGULAR

Para simular los bultos de sedimento que aparecen en las figuras 1.64 y 1.65 consideraremos la solución débil de la ecuación de Exner con el gasto sólido de Meyer-Peter y Muller para una canaleta rectangular con la condición inicial

$$\eta_0 = \begin{cases} (1/3) \cos(\pi x)^2 + (1/3 + 0.25) \sin(\pi x)^2 & x \in [0, 1] \\ (1/3) & x \in [1, x_l] \end{cases}$$

Con $x_l = 10$. Se escoge esta condición inicial para todas las corridas y se considera el comportamiento de la onda generalizada una vez que se estabiliza, es decir, permanece con velocidad constante. Para realizar las simulaciones se calculan las constantes q^* , Q^* , V_c^* y k que completan el modelo para la canaleta rectangular y para la tubería, para lo cual es necesario conocer V_m , d y $\Delta = 1.65$ que son valores que están en el trabajo [7]. Los datos se presentan en la siguiente tabla:

Tabla de datos del modelo						
Corrida	d [mm]	Velocidad (V_m) [$\frac{m}{s}$]	q^*	Q^*	v_c^*	k
R6	0.11	0.263	6.2328	9.7905	0.2868	0.0127
R9	0.11	0.297	7.0623	11.0934	0.2868	0.0127
R8	0.11	0.324	7.6784	12.0612	0.2868	0.0127
R7	0.11	0.326	7.7258	12.1357	0.2868	0.0127
R3	0.11	0.359	8.5079	13.3642	0.2868	0.0127
R1	0.11	0.394	9.3373	14.6670	0.2868	0.0127
R11	0.87	0.401	3.3792	5.3080	0.1837	0.0127
R14	0.87	0.452	3.8089	5.9830	0.1837	0.0127
R12	0.87	0.492	4.146	6.5125	0.1837	0.0127
R13	0.87	0.563	4.7443	7.4523	0.1837	0.0127
R15	0.87	0.687	5.7852	9.0874	0.1837	0.0127
R10	0.87	0.709	5.9241	9.3956	0.1837	0.0127

Tabla de velocidades para la cancheta rectaangular			
Corrida	Velocidad Paper [$\frac{m}{s}$]	Velocidad Programa [$\frac{m}{s}$], $\epsilon = 0.3$	Velocidad Programa [$\frac{m}{s}$], $\epsilon = 0.4$
R1	0.0074	0.0064	0.00747
R3	0.0069	0.0064	0.00747
R7	0.0066	0.0051	0.006
R8	0.0047	0.0047	0.0055
R9	0.0033	0.0037	0.0043
R6	0.0016	0.0026	0.0030
R10	0.03	0.047	0.054
R15	0.0263	0.043	0.0505
R13	0.0233	0.0285	0.0333
R12	0.0167	0.0167	0.0195
R14	0.0066	0.0071	0.0083
R11	0.005	0.006	0.007

1.7.3. SIMULACION PARA UNA TUBERIA

Se realizan las mismas simulaciones de la sección anterior pero considerando la ecuación de Exner con el gasto sólido de Meyer-Peter y Muller para una tubería.

Tabla de velocidades para la tubería			
Corrida	Velocidad Paper [$\frac{m}{s}$]	Velocidad tubería [$\frac{m}{s}$], $\varepsilon = 0.3$	Velocidad tubería [$\frac{m}{s}$], $\varepsilon = 0.4$
R1	0.0074	0.0095	0.011
R3	0.0069	0.0073	0.0085
R7	0.0066	0.0051	0.0059
R8	0.0047	0.0051	0.0059
R9	0.0033	0.0037	0.0043
R6	0.0016	0.0027	0.0031
R10	0.03	0.0541	0.063
R15	0.0263	0.0492	0.0574
R13	0.0233	0.0265	0.033
R12	0.0167	0.0187	0.021
R14	0.0066	0.0079	0.0092
R11	0.005	0.006	0.01

Tabla de Comparación entre tubería y canaleta rectangular			
Corrida	Velocidad Paper [$\frac{m}{s}$]	Velocidad Canaleta [$\frac{m}{s}$], $\varepsilon = 0.3$	Velocidad Tubería [$\frac{m}{s}$], $\varepsilon = 0.3$
R1	0.0074	0.0064	0.0095
R3	0.0069	0.0064	0.0073
R7	0.0066	0.0051	0.0051
R8	0.0047	0.0047	0.0051
R9	0.0033	0.0037	0.0037
R6	0.0016	0.0026	0.0027
R10	0.03	0.047	0.063
R15	0.0263	0.043	0.0492
R13	0.0233	0.0285	0.0265
R12	0.0167	0.0167	0.0187
R14	0.0066	0.0071	0.0079
R11	0.005	0.006	0.0088

1.8. CONCLUSIONES

Se estudia el fenómeno de ondas de sedimento en el transporte hidráulico de sólidos en tubería usando la ecuación hiperbólica de conservación de sedimento o ecuación de Exner para los casos de una canaleta rectangular y una tubería. El problema consta en encontrar el perfil de la onda que viene dado por la función $\eta(x, t)$, que indica la altura de la cama de sedimento en la posición x para el tiempo t .

Para el problema de la canaleta rectangular se estudia la hipótesis de Exner (sobre el gasto sólido):

$$(1.57) \quad q_s = (1 - \varepsilon)a_E V$$

Se encuentra la solución clásica de la ecuación de Exner con la hipótesis 1.57 y se confirma que la solución clásica del problema no es físicamente posible.

Es por esto que desarrollo un algoritmo basado en el método de Galerkin Discontinuo con límite de salto que permite calcular la solución débil (de entropía) de la ecuación de Exner. Con esto se comprobó que la solución débil de la ecuación de Exner es físicamente correcta.

En el siguiente paso se levanto la hipótesis de Exner y se utilizó el modelo de Meyer-Peter y Muller para dar una expresión para el gasto sólido para el caso de una canaleta rectangular. Posteriormente se utilizó el modelo de Meyer-Peter y Muller para dar una expresión para el gasto sólido en el caso de una tubería. En este punto fue necesario modificar el algoritmo numérico ya que la formulación variacional del modelo para la tubería no es equivalente a la formulación variacional del modelo de la canaleta rectangular ya que la ecuación para la tubería tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g(u) \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Es por esto que no es posible usar directamente este algoritmo para la canaleta rectangular. Se propone un algoritmo similar con una formulación variacional discreta adhoc a este caso.

Posteriormente se utilizan los modelos para la canaleta rectangular para simular los experimentos realizados en el trabajo de [7] comparando las velocidades de onda obtenidas de un análisis de gráficos que se presenta en el trabajo [7] con las obtenidas con las simulaciones para los modelos para la canaleta y la tubería. Los resultados indican que el algoritmo para la canaleta rectangular obtiene buenas aproximaciones de la velocidad. Para el caso de la tubería no se consiguieron resultados experimentales, sin embargo, se realizaron las mismas simulaciones que para el modelo de la canaleta rectangular obteniendo resultados muy parecidos lo que hace concluir que este modelo ajusta a la realidad también.

Capítulo 2

MODELACION DE UN REOMETRO DE PALETAS

2.1. INTRODUCCION

El reómetro de paletas o Vane puede emplearse para medir completamente la reología de un fluido [13, 30]. Sin embargo, en este informe sólo se considerará como un aparato para la medición de la tensión tangencial.

2.1.1. EL REOMETRO DE PALETAS

Un reómetro de paletas o vane consiste en una sonda compuesta por paletas (típicamente 4 o 6) unidas a un eje e inmersa en una muestra de fluido. La sonda se rota a velocidad angular constante Ω y se mide el torque ejercido sobre el eje (Fig. 2.1).

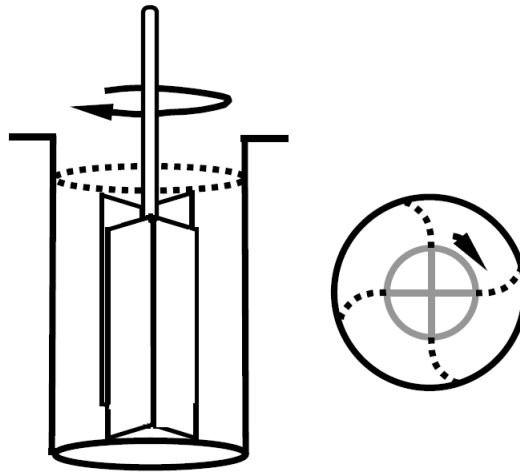


Figura 2.1: Esquema de un reómetro de paletas.

Este aparato es de interés pues a partir del torque se pueden deducir algunas propiedades reológicas del fluido en cuestión.

En esta memoria consideraremos un reómetro de paletas y supondremos que el líquido a ensayar es un fluido newtoniano con viscosidad μ o un fluido Bingham con viscosidad μ y tensión de fluencia τ .

2.1.2. MODELACION DEL REOMETRO DE PALETAS O VANE

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento al interior de un reómetro de paletas lleno con un fluido newtoniano o Bingham son las ecuaciones de Cauchy [16]. Debido a la complejidad de resolver estas ecuaciones en el presente caso algunos autores han planteado enfoques alternativos reduciendo la geometría del sistema o simplificándolas. Así, el reómetro de paletas se puede esquematizar a partir de 4 modelos (en orden de complejidad):

1. Cilindro macizo de altura infinita: El sensor se modela como un cilindro macizo de altura infinita [28].
2. Cilindro macizo de altura finita: El sensor se modela como un cilindro macizo de altura finita [26].
3. Paletas de altura infinita: Se modela un corte horizontal del reómetro suponiendo que las paletas son de altura infinita [19, 35, 36].

4. Paletas de altura finita: Se modela el sistema propiamente como un sensor de paletas de altura finita [27, 33]. Es común suponer que las paletas tienen un ancho despreciable [3].

En esta memoria se describe solo el tercer modelo.

2.2. OBJETIVOS

Esta memoria está enfocada en el estudio del flujo al interior de un reómetro de paletas a través de el modelo reómetro de paletas de altura infinita.

2.2.1. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Formular el problema del flujo al interior del reómetro de paletas.
2. Mostrar el perfil de velocidades y presión al interior de un reómetro de paletas.
3. Obtener la distribución de tensiones sobre el fluido y sobre las paredes de la sonda.
4. Calcular el torque en función de los parámetros geométricos y físicos del reómetro de paletas.

2.3. ECUACIONES GENERALES DE MOVIMIENTO

Consideremos un reómetro de tipo rotacional y supongamos que el fluido a ensayar ocupa un volumen V entre el sensor y la copa. Con respecto a la dinámica del reómetro se hacen las siguientes suposiciones:

1. El fluido es incompresible.
2. El régimen no es turbulento.
3. No hay movimiento relativo entre las paredes del sensor y el fluido inmediatamente adyacente.
4. No hay movimiento relativo entre las paredes de la copa y el fluido inmediatamente adyacente.

Bajo las condiciones anteriores las ecuaciones generales de movimiento para este fluido son [11, 29]:

$$(2.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } V,$$

$$(2.2) \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad \text{en } V,$$

donde \mathbf{u} denota el campo de velocidades del fluido, $\boldsymbol{\sigma}$ es el *tensor de esfuerzos internos*, $\rho > 0$ es la densidad del fluido y \mathbf{f} es el campo de fuerzas externas por unidad de masa. Las ecuaciones (2.1) y (2.2) dan cuenta de la conservación de la masa y la conservación de momentum, respectivamente. Además, el Teorema de Boltzmann-Cauchy [29] establece que $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico como resultado de la conservación de momentum angular.

Por lo tanto, en estado estacionario las ecuaciones de movimiento son:

$$(2.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } V,$$

$$(2.4) \quad \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \quad \text{en } V.$$

2.3.1. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) son válidas para cualquier medio material incompresible por lo que debemos imponer condiciones adicionales al sistema.

Debido a su aparición en la ecuación de movimiento, el tensor de esfuerzos gobierna la respuesta dinámica del medio: así relacionando $\boldsymbol{\sigma}$ a otras variables cinemáticas efectivamente se define o se delimita el tipo de medio a estudiar [29]. Tal relación entre $\boldsymbol{\sigma}$ y otras cantidades se denomina *ecuación constitutiva*.

Para definir el concepto de ecuación constitutiva es necesario introducir el tensor tasa de deformación. Se define el tensor tasa de deformación $D(\mathbf{u})$ como:

$$D(\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Además, se denotará por $\dot{\gamma}$ a la cantidad

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} D(\mathbf{u})_{ij} D(\mathbf{u})_{ij}}.$$

Además, de acuerdo con [29], una ecuación constitutiva debe satisfacer los siguientes postulados:

- $\boldsymbol{\sigma}$ es una función continua del tensor tasa de deformación $D(\mathbf{u})$, y es independiente de todas las otras cantidades cinemáticas.
- $\boldsymbol{\sigma}$ no depende explícitamente de la posición.
- No existe una dirección preferida en el espacio.
- Cuando $D(\mathbf{u}) = 0$, $\boldsymbol{\sigma}$ se reduce a $-pI$, donde p es la presión e I es la matriz identidad.

Los postulados anteriores permiten escribir el tensor de esfuerzos internos en dos términos:

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + \boldsymbol{\tau},$$

donde p es la presión, I la matriz identidad y $\boldsymbol{\tau}$ es el llamado *tensor de esfuerzos desviatorios*.

A continuación se describen las ecuaciones constitutivas más utilizadas en mecánica de fluidos.

FLUIDO NEWTONIANO

El modelo de fluido más simple corresponde al caso en que el tensor $\boldsymbol{\tau}$ varía linealmente con $D(\mathbf{u})$, es decir,

$$(2.5) \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mu D(\mathbf{u}),$$

donde μ es un parámetro conocido como la viscosidad del fluido. Este modelo se conoce como *fluido newtoniano* [2] y se presenta en materiales como el agua, la gasolina, el vino, el aceite, suspensiones poco concentradas, etc.

FLUIDO PLASTICO BINGHAM

El plástico de Bingham modela un tipo de material viscoplástico que se comporta como un cuerpo rígido frente a esfuerzos bajos, pero fluye viscosamente ante esfuerzos altos. Es el modelo de uso típico en pulpas de la industria minera, pero también se presenta en materiales comunes como la mayonesa y la pasta de dientes [22].

La ley constitutiva para un fluido de Bingham es [2, 8, 24, 25]

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + 2\mu_B \right) D(\mathbf{u}) && \Leftrightarrow \dot{\gamma} \neq 0, \\ D(\mathbf{u}) &= 0 && \Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

donde τ_0 se denomina tensión de fluencia y μ_B viscosidad plástica.

2.3.2. ECUACIONES PARA SISTEMA DE REFERENCIA MOVIL

Debido a que las paletas rotan con una velocidad angular Ω y para simplificar la imposición de condiciones de borde conviene considerar un sistema de referencia móvil (x', y') solidario a las paletas del vane. Para ello es necesario escribir las ecuaciones de movimiento en el nuevo sistema de coordenadas:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}' &= 0 && \text{en } V, \\ \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}') &= -\nabla p' + \mu \Delta \mathbf{u}' - \rho g \hat{k} && \text{en } V, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ es la velocidad en el sistema de referencia móvil, $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{k}$ es la velocidad del sistema de referencia inercial, Ω es la velocidad angular con que giran las paletas y \mathbf{r}' es el vector de posición en el sistema de referencia móvil. La ecuación que relaciona la velocidad en el sistema inercial con la velocidad en el sistema no inercial es la siguiente

$$(2.8) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times \vec{r}$$

El uso de este sistema de referencia móvil hace aparecer 2 términos adicionales con respecto al problema considerado desde un sistema de referencia inercial (Ec. (2.7)):

1. El término asociado a la fuerza centrípeta $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ que numéricamente se puede considerar una fuerza externa.
2. El término de Coriolis $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}'$ que es lineal en \mathbf{u}' .

2.4. ANALISIS INSPECCIONAL

El análisis inspeccional consiste en buscar los parámetros adimensionales de un fenómeno, analizando las ecuaciones que lo rigen [10]. Para realizar el análisis inspeccional consideremos los siguientes parámetros de referencia:

	Parámetro	Unidad
ρ	Densidad del fluido	$[kg/m^3]$
V	Velocidad de referencia	$[m/s]$
L	Largo de referencia	$[m]$
τ	Tensión de fluencia	$[Pa]$
μ_B	Viscosidad plástica	$[Pa \cdot s]$
g	Aceleración de gravedad	$[m/s^2]$

Se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{\tau L}{\mu V} && \text{“Número de Bingham”}, \\ \text{Fr} &= \frac{V}{\sqrt{gL}} && \text{“Número de Froude”}, \\ \text{Re} &= \frac{\rho LV}{\mu} && \text{“Número de Reynolds”}. \end{aligned}$$

Luego, usando la siguiente adimensionalización:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= V \hat{\mathbf{u}}, \\ \mathbf{x} &= L \hat{\mathbf{x}}, \\ p &= \rho V^2 \hat{p}, \end{aligned}$$

las ecuaciones de movimiento en estado estacionario se transforman en:

■ Caso Newtoniano

$$\frac{\Omega_0 L}{V} \hat{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \hat{\Delta} \hat{\mathbf{u}} + -\text{Fr}^{-2} \hat{z} \hat{k} + \frac{L^2 \Omega_0^2}{V^2} \vec{\hat{\Omega}} \times \hat{\Omega} \times \hat{r}$$

■ Caso Bingham

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_0 L}{V} \hat{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} + \\ (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{u}} &= -\hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\hat{\Delta} \hat{\mathbf{u}} + \frac{\text{Bi}}{\sqrt{2}} \hat{\nabla} \cdot (\hat{D}(\hat{\mathbf{u}})/\dot{\gamma}) \right) - \text{Fr}^{-2} \hat{z} \hat{k} + \frac{L^2 \Omega_0^2}{V^2} \vec{\hat{\Omega}} \times \hat{\Omega} \times \hat{r} \Leftrightarrow \dot{\gamma} \neq 0, \\ \hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) &= 0 \Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

donde los operadores diferenciales con decoración gorro son los operadores habituales con respecto a las variables adimensionales y $\hat{k} = (0, 0, 1)^t$.

Se define la presión motriz como:

$$(2.9) \quad \hat{p}_m = \hat{p} + \text{Fr}^{-2} \hat{z}.$$

Eliminando la decoración gorro las ecuaciones de movimiento se escriben como:

■ **Caso Newtoniano:**

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ & \frac{\Omega_0 L}{V} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_m + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \frac{L^2 \Omega_0^2}{V^2} \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

■ **Caso Bingham:**

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \text{div } \mathbf{u} = 0 \\ & \frac{\Omega_0 L}{V} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \\ & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_m + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{\text{Bi}}{\sqrt{2}} \nabla \cdot (D(\mathbf{u}) / |D(\mathbf{u})|) \right) + \frac{L^2 \Omega_0^2}{V^2} \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \Leftrightarrow \dot{\gamma} \neq 0, \\ & D(\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

Se observa que el movimiento es producto de tres efectos conjuntos: el efecto del número de Bingham, el efecto del número de Reynolds y el efecto del número de Froude.

2.5. PROBLEMA DEBIL

Debido a que se utiliza el método de elementos finitos es necesario encontrar la formulación variacional del problema (2.11) (véase el apéndice E).

2.5.1. PROBLEMA DEBIL PARA UN FLUIDO NEWTONIANO

El problema débil para el fluido Newtoniano consiste en:

Encontrar $(\mathbf{u}, p_m) \in (H^1(V))^3 \times L^2(V)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_V 2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} dx + \int_V (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \\ \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx = \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \int_V \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(V)^3, \\ \int_V q \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V), \end{aligned}$$

donde

$$D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = D(\mathbf{u})_{ij} D(\mathbf{v})_{ij} \text{ (notación de Einstein.)}$$

2.5.2. PROBLEMA DEBIL PARA UN PLASTICO BINGHAM

El problema débil para un plástico de Bingham consiste en:

Encontrar $(\mathbf{u}, p_m, \lambda) \in (H^1(V))^3 \times L^2(V) \times (L^2(V))^{3 \times 3}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_V 2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} dx + \int_V (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \\ \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx + \\ \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V \lambda : D(\mathbf{v}) dx = \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \int_V \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} dx \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(V))^3, \\ \int_V q \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V), \\ \int_V \lambda : D(\mathbf{u}) dx \geq \int_V \gamma : D(\mathbf{u}) dx \quad \forall \gamma \in (L^2(V))^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

2.6. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL REÓMETRO DE PALETAS DE ALTURA INFINITA

Consideremos un reómetro de paletas y supongamos que la sonda consiste en 4 o 6 paletas de largo ℓ y ancho w unidas por un hexágono inscrito en un círculo de radio R_i y el contenedor es cilíndrico con un radio R_e . (Fig. 2.2 y Fig. 2.3).

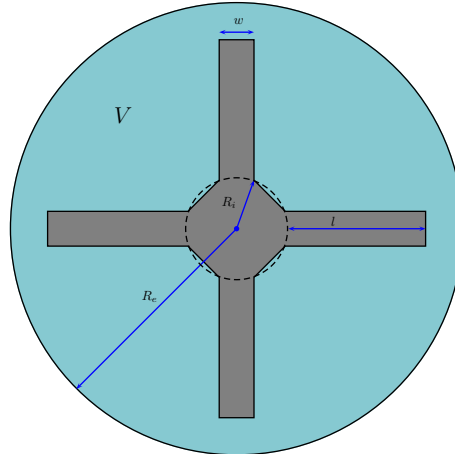


Figura 2.2: Corte horizontal de un vane de 4 paletas de altura infinita.

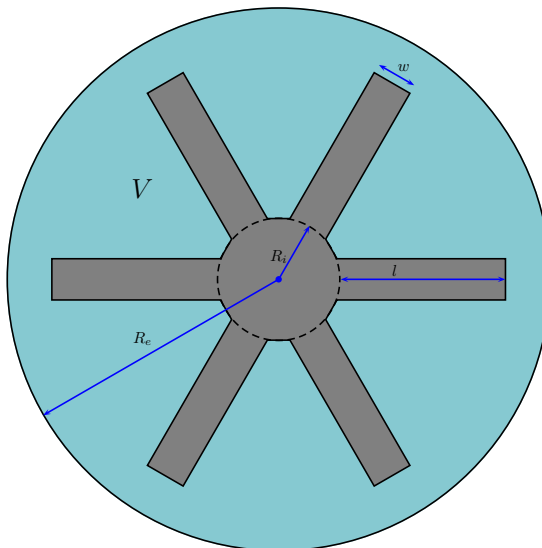


Figura 2.3: Corte horizontal de un vane de 6 paletas de altura infinita.

Consideremos un corte transversal del reómetro y supongamos que las paletas giran con una velocidad angular $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{k}$. Se supondrá además que la gravedad no actúa y que los perfiles de velocidad son iguales

independiente del corte transversal, lo que equivale a suponer que las paletas son cde altura infinita. Para el análisis adimensional consideramos que

- $L = R_i + l$
- $V = L * \Omega_0$

Con lo cual el termino $\frac{L\Omega_0}{V} = 1$.

2.6.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Sea (x', y') un sistema de referencia móvil solidario a una de las paletas. De acuerdo con la sección 2.3.2, las ecuaciones de movimiento para el sistema de referencial móvil son:

- **Fluido Newtoniano**

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}' &= 0 && \text{en } V \\ \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}') &= \mu \Delta \mathbf{u}' && \text{en } V, \end{aligned}$$

- **Fluido Bingham**

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}' &= 0 && \text{en } V \\ \rho (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}') &= \mu \Delta \mathbf{u}' + \tau_0 \operatorname{div} \left(\frac{D(\mathbf{u})}{\gamma} \right) && \text{en } V, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ es la velocidad en el sistema de referencial móvil y $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{k}$ es la velocidad de las paletas.

2.6.2. CONDICIONES DE BORDE

La condición de borde para el reómetro de 4 o 6 paletas es la condición de adherencia del fluido a las paletas, es decir, la velocidad del fluido es igual a la velocidad de las paletas en el contorno de éstas, lo que equivale a la siguiente condición de borde para el sistema de referencia:

$$u'_x = u'_y = u'_z = 0,$$

sobre las paletas. Además, como el contenedor está en reposo respecto del sistema de referencia inercial (x, y) se tiene que

$$\begin{aligned} u'_x &= \Omega y, \\ u'_y &= -\Omega x, \\ u'_z &= 0, \end{aligned}$$

sobre el contenedor.

Dada las condiciones de borde y que consideramos $g = 0$ es natural suponer que $u'_z = 0$, con lo cual solo es necesario calcular u'_x y u'_y que vienen dados por las primeras dos ecuaciones de los sistemas 2.12 y 2.13. Además

$$(2.14) \quad p_m = p$$

Y consideramos como lado derecho del problema

$$(2.15) \quad f = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \vec{r} = -(\Omega_0 x^2 \hat{i} + \Omega_0 y^2 \hat{j})$$

2.6.3. ESQUEMA NUMERICO

A continuación se presentan los pseudo algoritmos para resolver los problemas de fluido Newtoniano y Bingham en el reómetro de paletas que se desarrollan con mayor detalle en el apéndice E.

■ Caso Newtoniano:

Para resolver numéricamente el problema del flujo al interior de un reómetro de paletas se utilizará el siguiente esquema numérico:

Para $\varepsilon > 0$:

1. Se define $\mathbf{u}^0 = 0$.
2. Se calcula \mathbf{u}^{n+1} a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} dx + 2 \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^n) \mathbf{v} dx + \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(\mathbf{v}) dx \\ = \int_V p_m^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(V)^2, \\ \int_V q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V), \end{aligned}$$

3. Si

$$|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| < \varepsilon,$$

terminar y hacer $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1}$. Sino volver a 2.

El esquema numérico anterior está basado en el método de punto fijo (ver apéndice E) para discretizar el término no lineal

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

■ Caso Bingham:

Para resolver numéricamente el problema (2.11) se utilizará el siguiente esquema:

Para $\alpha \in (0, \frac{2}{\text{Bi}})$ y $\varepsilon > 0$:

1. Se define $\mathbf{u}^0 = 0$.
2. Se calcula \mathbf{u}^{n+1} y λ^{n+1} a partir de la siguiente expresión :

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} dx + 2 \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^n) \mathbf{v} dx + \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(\mathbf{v}) dx \\ + \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V \lambda^n : D(\mathbf{v}) dx = \int_V p_m^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(V)^2, \\ \int_V q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V), \\ \lambda^{n+1} = \frac{\lambda^n + \alpha D(\mathbf{u}^{n+1})}{\text{máx} \{1, |\lambda^n + \alpha D(\mathbf{u}^{n+1})|\}} \end{aligned}$$

3. Si

$$|\lambda^{n+1} - \lambda^n| < \varepsilon \text{ y } |\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n| < \varepsilon,$$

terminar y hacer $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1}$ y $\lambda = \lambda^{n+1}$. Sino volver a 2.

El esquema numérico anterior está basado en el método de Uzawa propuesto en [20, 31].

2.7. RESOLUCION NUMERICA

Se considera \mathcal{K}_{2h} una triangulación de V para la presión y \mathcal{T}_h una triangulación más fina para las velocidades construida a partir de \mathcal{K}_{2h} agregando los puntos medios de los lados de la triangulación \mathcal{K}_{2h} (Fig. 2.4).

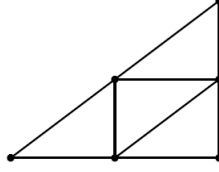


Figura 2.4: Subdivisión de un triángulo de \mathcal{K}_{2h}

A partir de esto podemos generala las mallas para las velocidades para el reometro de 4 paletas(Fig. 2.5) y 6 paletas (Fig. ??)

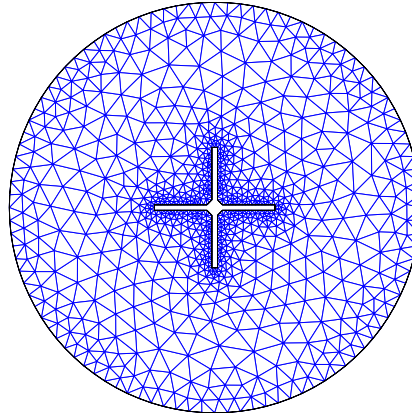


Figura 2.5: Triangulación del dominio V para 4 paletas.

Sea \mathbb{P}_1 el espacio de los polinomios de dos variables de grado menor o igual a 1. Se introducen los siguientes espacios que aproximan a $(H_0^1(V))^3$ y $L^2(V)$ respectivamente:

$$V_h = \left\{ \mathbf{v} \in C(\bar{V})^3 \text{ tal que } \mathbf{v}|_{T_j} \in (\mathbb{P}_1)^3 \text{ para todo } T_j \in \mathcal{T}_h \text{ y } \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial V \right\},$$

$$Q_h = \left\{ q \in C(\bar{V}) \text{ tal que } q|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ para todo } K_i \in \mathcal{K}_{2h} \right\}.$$

Se introduce la base $(s_k)_{k \in J}$ de V_h y la base $(w_k)_{k \in I}$ de Q_h construida con las funciones de base de los elementos finitos [1].

Si I y J denotan las dimensiones de los espacios V_h y Q_h , respectivamente, se introduce la base $(s_k)_{k \in J}$ de V_h y la base $(w_k)_{k \in I}$ de Q_h construida con las funciones de base de los elementos finitos [5].

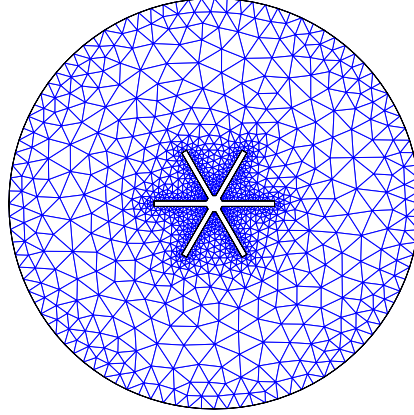


Figura 2.6: Triangulación del dominio V para 6 paletas.

Por lo tanto se puede descomponer \mathbf{u} y p sobre estas bases de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= u_x(x, y)\hat{i} + u_y(x, y)\hat{j}, \\
 u_x(x, y) &= \sum_{k \in I} s_k(x, y)u_x^k, \\
 u_y(x, y) &= \sum_{k \in J} s_k(x, y)u_y^k, \\
 p(x, y) &= \sum_{k \in I} w_k(x, y)p_k.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Reemplazando la descomposición (2.16) en la formulación variacional se obtienen varios términos que deben ser calculados para las funciones bases. Éstos son:

- El término de convección:

$$\int_V (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{v} dx dy.$$

- El término de difusión:

$$\int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(\mathbf{v}) dx dy.$$

- El término de Coriolis:

$$\int_V 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{v} dx dy.$$

- El término de presión:

$$\int_V p^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy.$$

Reemplazando la descomposición (2.16) en la formulación variacional se obtienen varios términos que deben ser calculados para las funciones bases. Éstos son:

- El término de convección:

$$\int_V (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{v} dx dy.$$

- El término de difusión:

$$\int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(\mathbf{v}) dx dy.$$

- El término plástico:

$$\int_V \lambda^n : D(\mathbf{v}) dx dy.$$

- El término de Coriolis:

$$\int_V 2\Omega \times \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{v} dx dy.$$

- El término de presión:

$$\int_V p_m^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx dy.$$

En las próximas secciones se detalla el cálculo de cada uno de los términos anteriores.

2.7.1. EL TERMINO DE CONVECCION

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_x^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial x} + u_y^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial y} \\ u_x^n \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial x} + u_y^n \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1. Según \hat{i} tomando $\mathbf{v} = s_k \hat{i}$

$$\int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n s_k \hat{i} dx dy = \int_V u_x^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial x} dx dy + \int_V u_y^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial y} dx dy$$

$$\begin{aligned} \int_V u_x^n \text{diff} u_x^{n+1} dx dy &= \sum_{j \in J} u_x^{n+1,j} \int_V \sum_{i \in J} u_x^{n,i} \frac{\partial s_j}{\partial x} s_i s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_x^{n+1,j} C_{kj}^{11}(u^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V u_y^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial y} dx dy &= \sum_{j \in J} u_x^{n+1,j} \int_V \sum_{i \in J} u_y^{n,i} \frac{\partial s_j}{\partial y} s_i s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_x^{n+1,j} C_{kj}^{12}(u^n) \end{aligned}$$

Luego:

$$\int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n s_k \hat{i} r dr dz = (C^{11} + C^{12}) U_x^{n+1}$$

2. Según \hat{j} tomando $\mathbf{v} = s_k \hat{j}$

$$\int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n s_k \hat{j} dx dy = \int_V u_x^n \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial x} dx dy + \int_V u_y^n \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial y} dx dy$$

$$\begin{aligned} \int_V u_x^n \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial x} dx dy &= \sum_{j \in J} u_y^{n+1,j} \int_V \sum_{i \in J} u_x^{n,i} \frac{\partial s_j}{\partial x} s_i s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_y^{n+1,j} C_{kj}^{11}(u^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_V u_y^n \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial y} dx dy &= \sum_{j \in J} u_y^{n+1, j} \int_V \sum_{i \in J} u_y^{n, i} \frac{\partial s_j}{\partial y} s_i s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_y^{n+1, j} C_{kj}^{12}(u^n)\end{aligned}$$

Luego:

$$\int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n s_k \hat{r} dr dz = (C^{11} + C^{12}) U_y^{n+1}$$

De esta forma la matriz asociada al termino convectivo

$$(2.17) \quad D^n = \begin{pmatrix} (C^{11} + C^{12}) & 0 \\ 0 & (C^{11} + C^{12}) \end{pmatrix}$$

2.7.2. EL TERMINO DE DIFUSION

Dado que $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}(x, y)$ se tiene que:

$$D(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

1. Componente según \hat{i} .

Sea $\mathbf{v} = s_k(x, y) \hat{i}$, entonces:

$$D(s_k(x, y) \hat{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_k}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial s_k}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial s_k}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(s_k \hat{i}) dx dy &= \frac{2}{\text{Re}} \int_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial s_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial s_k}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_x^j \frac{2}{\text{Re}} \int_V \left(\frac{\partial s_j}{\partial x} \frac{\partial s_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial s_j}{\partial y} \frac{\partial s_k}{\partial y} \right) dx dy + \\ &u_y^j \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial s_j}{\partial x} \frac{\partial s_k}{\partial y} dx dy\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(s_k \hat{i}) dx dy = A^{11} U_x^{n+1} + A^{12} U_y^{n+1}.$$

2. Componente según \hat{j} .

Sea $\mathbf{v} = s_k(x, y) \hat{j}$ entonces: Sea $\mathbf{v} = s_k(x, y) \hat{i}$, entonces:

$$D(s_k(x, y) \hat{j}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial s_k}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial s_k}{\partial x} & \frac{\partial s_k}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(s_k \hat{j}) dx dy &= \frac{2}{\text{Re}} \int_V \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial s_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial s_k}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_y^j \frac{2}{\text{Re}} \int_V \frac{\partial s_j}{\partial y} \frac{\partial s_k}{\partial x} dx dy + \\ &u_x^j \frac{2}{\text{Re}} \int_V \frac{\partial s_j}{\partial y} \frac{\partial s_k}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial s_k}{\partial x} \frac{\partial s_j}{\partial x} dx dy\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(s_k \hat{i}) dx dy = A^{21} U_x^{n+1} + A^{22} U_y^{n+1}.$$

De esta forma la matriz asociada al termino difusión

$$(2.18) \quad A_d = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}$$

2.7.3. EL TERMINO DE CORIOLIS

$$2\vec{\Omega} \times \mathbf{u} = 2\Omega_0(-u_y \hat{i} + u_x \hat{j})$$

De esta forma la matriz de Coriolis queda definida por

$$2 \int_V \vec{\Omega} \times \mathbf{u} \mathbf{v} dx dy = 2\Omega_0 \int_V (-u_y \mathbf{v} \hat{i} + u_x \mathbf{v} \hat{j}) dx dy$$

1. Según \hat{i}

$$\begin{aligned} 2 \int_V \vec{\Omega} \times \mathbf{u} s_k \hat{i} dx dy &= -2\Omega_0 \int_V u_y s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_y^j (-2\Omega_0) \int_V s_j s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_y^j A_{kj}^{12} \end{aligned}$$

2. Según \hat{j}

$$\begin{aligned} 2 \int_V \vec{\Omega} \times \mathbf{u} s_k \hat{j} dx dy &= 2\Omega_0 \int_V u_x s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_x^j (2\Omega_0) \int_V s_j s_k dx dy \\ &= \sum_{j \in J} u_x^j (-A_{kj}^{12}) \end{aligned}$$

De esta forma la matriz asociada al termino de coriolis

$$(2.19) \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & A^{12} \\ -A^{12} & 0 \end{pmatrix}$$

2.7.4. EL TERMINO PLASTICO

Dado que teóricamente buscamos λ tal que

$$(2.20) \quad \lambda = P_\Lambda \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|},$$

vamos a buscar λ^n simétrico. Además, supondremos que es constante por triángulos, es decir,

$$\lambda_{xx}^n = \sum_{j \in J} \lambda_{xx}^{n,j} 1_{T_j},$$

$$\lambda_{xy}^n = \sum_{j \in J} \lambda_{xy}^{n,j} 1_{T_j},$$

$$\lambda_{yy}^n = \sum_{j \in J} \lambda_{yy}^{n,j} 1_{T_j},$$

Luego:

$$\int_V \lambda^n : D(\mathbf{v}) dx dy = \int_V \lambda_{xx}^n \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda_{xy}^n \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \lambda_{yy}^n \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy$$

1. $\mathbf{v} = s_k \hat{i}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V \lambda^n : D(\mathbf{v}) dx dy &= \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V (\lambda_{xx}^n \frac{\partial s_k}{\partial x} + \lambda_{xy}^n \frac{\partial s_k}{\partial y}) dx dy \\ &= -b_k^1 \end{aligned}$$

2. $\mathbf{v} = s_k \hat{j}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V \lambda^n : D(\mathbf{v}) xy &= \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_V (\lambda_{xy}^n \frac{\partial s_k}{\partial x} + \lambda_{yy}^n \frac{\partial s_k}{\partial y}) dx dy \\ &= -b_k^2 \end{aligned}$$

2.7.5. EL TERMINO DE PRESION

$$\begin{aligned} \int_V p_m^{n+1} \nabla \cdot (s_k \hat{i}) dx dy &= \sum_{i \in I} p_i^{n+1} \int_V w_i \frac{\partial s_k}{\partial x} \\ &= - \sum_{i \in I} p_i^{n+1} B_{ki}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V p_m^{n+1} \nabla \cdot (s_k \hat{j}) dx dy &= \sum_{i \in I} p_i^{n+1} \int_V w_i \frac{\partial s_k}{\partial y} \\ &= - \sum_{i \in I} p_i^{n+1} B_{ki}^2 \end{aligned}$$

2.7.6. ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ Y SISTEMA LINEAL

Se definen:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} U_x^{n+1} &= (u_x^{n+1,1}, \dots, u_x^{n+1,|J|})^t \\ U_y^{n+1} &= (u_y^{n+1,1}, \dots, u_y^{n+1,|J|})^t \\ P^{n+1} &= (p^{n+1,1}, \dots, p^{n+1,|I|})^t \end{aligned}$$

Para la presión se define la matriz

$$(2.22) \quad B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix}$$

y para el lado derecho que contiene los términos asociados al término de bingham

$$(2.23) \quad b^n = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}$$

Además el lado derecho se compone de las fuerzas externas que se representan por

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

donde las fórmulas para f_1 y f_2 se hacen explícitas en la siguiente sección.

2.7.7. ALGORITMO PARA FLUIDO NEWTONIANO

Para un fluido Newtoniano el sistema lineal es el siguiente

$$(2.24) \quad A_n \begin{pmatrix} U_t^{n+1} \\ U_y^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = f.$$

donde

$$(2.25) \quad A_n = \begin{pmatrix} D^n + A_d + A_c & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$$

A continuacion se define el algoritmo para resolver el problema no lineal asociado a un fluido Newtoniano

Algoritmo 1 Algoritmo Newtoniano No Lineal

```

v0 ← 0 ∈ ℝ2
p0 gets 0
k ← 0
err ← ∞
while err ≥ threshold do
    (vk, pk)t ← Ak-1(f)
    err = ||vk+1 - vk||
    k ← k + 1
end while

```

2.7.8. ALGORITMO PARA FLUIDO BINGHAM

Para fluidos Bingham el sistema lineal a resolver es

$$(2.26) \quad A_n \begin{pmatrix} U_t^{n+1} \\ U_y^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = f + b^n.$$

Para resolver el sistema anterior se utiliza el algoritmo de Uzawa

Algoritmo 2 Algoritmo Uzawa

```

λ0 ← 0 ∈ ℝ|T|
v0 ← 0 ∈ ℝ2
p0 ← 0
k ← 0
err ← ∞
while err ≥ threshold do
    (vk, pk)t ← Ak-1(bk + f)
    λk+1 ←  $\frac{\lambda_k + \frac{\mu}{\tau} D(v^k)}{\max\{1, \|\lambda_k + \frac{\mu}{\tau} D(v^k)\|\}}$ 
    err = ||λk+1 - λk||
    k ← k + 1
end while

```

2.7.9. CALCULO DE INTEGRALES

Para el cálculo explícito de las integrales es necesario utilizar las siguientes formulas. Sea T un triángulo de \mathbb{R}^2 de vértices $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$ y de baricentro a_0 . Sean $(a_{ij})_{1 \leq i < j \leq 3}$ los puntos medios de los segmentos de extremos a_i, a_j . Entonces, se tiene la siguiente fórmula de cuadratura:

$$(2.27) \quad \int_T \psi(x) dx \approx \frac{|T|}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \psi(a_{ij}).$$

Además, la fórmula (2.27) es exacta para $\psi \in \mathbb{P}_2$ [5]. Sea s_k un función de la base de V_h , entonces

$$(2.28) \quad \nabla s_k|_T = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} (P_{a_k} - P_{b_k}) \cdot \hat{j} \\ (P_{b_k} - P_{a_k}) \cdot \hat{i} \end{pmatrix}$$

donde a_k y b_k son los otros vértices de T , que asumiremos aparecen $(k; ak; bk)$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Ademas dado que $s_k \in \mathbb{P}_1(T)$ entonces $\frac{\partial s_k}{\partial x}$ y $\frac{\partial s_k}{\partial y}$ son constantes por triángulo por lo cual se considera que $\lambda_{xx}, \lambda_{xy}$ y λ_{yy} son constantes por triángulo. De esta forma calculámos las integrales principales:

$$(2.29) \quad \int_V s_j s_k dx dy = \sum_T \begin{cases} \frac{|T|}{12} & k \neq j \\ \frac{|T|}{6} & k = j \end{cases}$$

$$(2.30) \quad \int_V \frac{\partial s_k}{\partial x} \frac{\partial s_j}{\partial x} dx dy = \sum_T \frac{(P_{a_k} - P_{b_k})(P_{a_j} - P_{b_j}) \cdot \hat{j}}{4|T|}$$

$$(2.31) \quad \int_V \frac{\partial s_k}{\partial x} \frac{\partial s_j}{\partial y} dx dy = \sum_T \frac{(P_{a_k} - P_{b_k}) \cdot \hat{j} (P_{b_j} - P_{a_j}) \cdot \hat{i} \cdot \hat{j}}{4|T|}$$

$$(2.32) \quad \int_V \frac{\partial s_j}{\partial y} \frac{\partial s_k}{\partial y} dx dy = \sum_T \frac{(P_{a_k} - P_{b_k})(P_{a_j} - P_{b_j}) \cdot \hat{i}}{4|T|}$$

$$(2.33) \quad \int_V w_i \frac{\partial s_k}{\partial x} dx dy = \sum_T \frac{\partial s_k}{\partial x} |T| \frac{|T|}{6} ((C_{ki} + C_{aki}) + (C_{ki} + C_{bki}) + (C_{ki} + C_{aki}))$$

$$(2.34) \quad \int_V w_i \frac{\partial s_k}{\partial y} dx dy = \sum_T \frac{\partial s_k}{\partial y} |T| \frac{|T|}{6} ((C_{ki} + C_{aki}) + (C_{ki} + C_{bki}) + (C_{ki} + C_{aki}))$$

$$(2.35) \quad \int_V \frac{\partial s_i}{\partial x} s_j s_k dx dy = \sum_T \frac{\partial s_k}{\partial x} |T| \begin{cases} \frac{|T|}{12} & k \neq j \\ \frac{|T|}{6} & k = j \end{cases}$$

$$(2.36) \quad \int_V \frac{\partial s_i}{\partial y} s_j s_k dx dy = \sum_T \frac{\partial s_k}{\partial y} |T| \begin{cases} \frac{|T|}{12} & k \neq j \\ \frac{|T|}{6} & k = j \end{cases}$$

2.8. CALCULO DEL TORQUE

Para calcular el torque en las superficies de las paletas (4 o 6) se distinguen 2 casos. Cuando la superficie es oblicua y cuando la superficie es vertical. Para representar el borde correspondiente en la triangulacion para el calculo del torque se utilizara Γ_j .

$$M(\Gamma_j) = \int_{\Gamma_j \times [h_1, h_2]} \vec{r} \times \sigma \hat{n} dS$$

Además, bajo las hipótesis del problema

$$D(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8.1. CASO NEWTONIANO

En este caso $\sigma = 2\mu D(\mathbf{v})$

■ Caso Oblicuo:

Se considera la superficie definida entre $[h_1, h_2]$ y la recta $y = mx + n$ con $x \in [a_1, a_2]$, con lo cual

$$\vec{r} = x\hat{i} + (mx + n)\hat{j} + z\hat{k}$$

y se define la normal a la superficie como

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(am\hat{i} + b\hat{j})$$

donde a b son 1 o -1 dependiendo de la orientación de la normal. Para esto

$$\sigma \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \begin{pmatrix} am\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{am}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + b\frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el calculo del torque consideramos solo la componente \hat{k} del torque que es la que proviene del giro de las paletas.

$$\vec{r} \times \sigma \hat{n} \hat{k} = \frac{am}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + bx\frac{\partial v}{\partial y} - (mx+n)(am\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}))$$

En base a lo anterior la formula numérica para el calculo del torque

$$\begin{aligned} M(\Gamma_j) &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{i \in T} \sum_{i \in T} \xi_{t \in \Gamma_j} \left(\frac{m(a-b)}{2} \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} (u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x}) \right. \\ &+ b \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} v^i \frac{\partial s_i}{\partial y} \\ &- am^2 \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\ &- anm |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\ &\left. - \frac{bn}{2} |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| (u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x}) \right) \end{aligned}$$

■ **Caso vertical:**

Se considera la superficie definida entre $[h_1, h_2]$ y los puntos $P_1 = (x_1, y_2)$ y $P_2 = (x_1, y_2)$, con lo cual

$$\vec{r} = x_1 \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

con $y \in [y_1, y_2]$. Es claro que la normal a la superficie es

$$\hat{n} = a \hat{i}$$

donde a es 1 o -1 dependiendo de la orientación de la normal. Con la información anterior se tienen todos los elementos para realizar el cálculo de la integral de torque

$$M(\Gamma_j) = \int_S \vec{r} \times \sigma \hat{n} dS = \int_{h_1}^{h_2} \int_{y_1}^{y_2} \vec{r} \times \sigma \hat{n} dy dz$$

Para esto

$$\sigma \hat{n} = a \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior la componente del torque que se desea calcular es la asociada a \hat{k}

$$\vec{r} \times \sigma \hat{n} = a \left(\frac{x_1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - y \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

En base a lo anterior la fórmula numérica para el cálculo del torque

$$\begin{aligned} M(\Gamma_j) &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{i \in T} \sum_{i \in T} \xi_{i \in \Gamma_j} \left(\frac{x_1}{2} |P_{a_i}(2) - P_{b_i}(2)| \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|P_{a_i}(2)^2 - P_{b_i}(2)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

2.8.2. CASO BINGHAM

Para calcular el torque para el caso Bingham consideramos $\sigma = 2\mu D(\mathbf{v}) + \sqrt{2}\tau_0 \frac{D(u)}{|D(u)|}$ donde $D(u)$ esta definido por 2.8.

■ **Caso Oblicuo:**

$$(2.37) \quad M(\Gamma_j) = 2\mu \tau_1 + \sqrt{2} \tau_2$$

Donde

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{i \in T} \sum_{i \in T} \xi_{i \in \Gamma_j} \left(\frac{m(a-b)}{2} \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad + b \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} v^i \frac{\partial s_i}{\partial y} \\ &\quad - am^2 \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\ &\quad - anm |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\ &\quad \left. - \frac{bn}{2} |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{t \in T} \frac{1}{|D(u)|_{t \in \Gamma_j}} \sum_{i \in T} \xi_{t \in \Gamma_j} \left(\frac{m(a-b)}{2} \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right. \\
&+ b \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} v^i \frac{\partial s_i}{\partial y} \\
&- am^2 \frac{|P_{a_i}(1)^2 - P_{b_i}(1)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\
&- anm |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \\
&\left. - \frac{bn}{2} |P_{a_i}(1) - P_{b_i}(1)| \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right)
\end{aligned}$$

■ **Caso vertical:**

$$(2.38) \quad M(\Gamma_j) = 2\mu \tau_1 + \sqrt{2} \tau_2$$

Donde

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{t \in T} \sum_{i \in T} \xi_{t \in \Gamma_j} \left(\frac{x_1}{2} |P_{a_i}(2) - P_{b_i}(2)| \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right. \\
&\left. - \frac{|P_{a_i}(2)^2 - P_{b_i}(2)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= (h_2 - h_1) \sum_T \sum_{t \in T} \frac{1}{|D(u)|_{t \in \Gamma_j}} \sum_{i \in T} \xi_{t \in \Gamma_j} \left(\frac{x_1}{2} |P_{a_i}(2) - P_{b_i}(2)| \left(u^i \frac{\partial s_i}{\partial y} + v^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right) \right. \\
&\left. - \frac{|P_{a_i}(2)^2 - P_{b_i}(2)^2|}{2} u^i \frac{\partial s_i}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

2.8.3. CALCULO DEL TORQUE PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS

Consideremos la superficies Γ_1 a Γ_5 de acuerdo con la Fig. 2.7.

Torque sobre Γ_1 La parametrización de la superficie Γ_1 está dada por:

$$\vec{r}(y) = (R_i + l, y, z) \quad z \in [0, H], y \in [0; w/2].$$

Torque sobre Γ_2 La parametrización de la superficie Γ_2 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, w/2, z) \quad z \in [0, H], x \in [\sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}; R_i + l].$$

Torque sobre Γ_3 La parametrización de la superficie Γ_3 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, mx + n, z) \quad z \in [0, H], x \in [w/2; \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}],$$

donde $m = -1$ y $n = \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}} + \frac{w}{2}$.

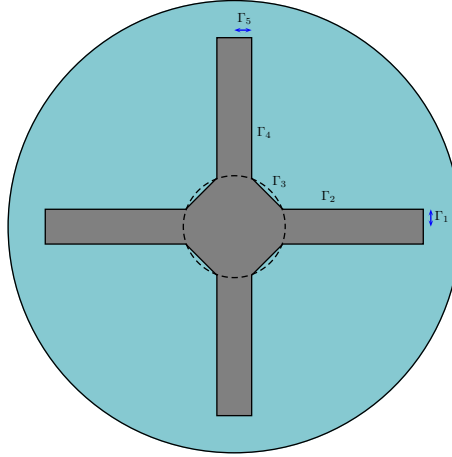


Figura 2.7: Corte horizontal de un vane de 4 paletas de altura infinita.

Torque sobre Γ_4 La parametrización de la superficie Γ_4 es dada por:

$$\vec{r}(y) = (w/2, y, z) \quad z \in [0, H], y \in [\sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}; R_i + l].$$

Torque sobre Γ_5 La parametrización de la superficie Γ_5 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, R_i + l, z) \quad z \in [0, H], x \in [0; w/2].$$

Torque total Debido a la simetría, se tiene que el torque total sobre el cilindro vale:

$$(2.39) \quad M_{\text{total}} = 4(M(\Gamma_1) + M(\Gamma_2) + M(\Gamma_3) + M(\Gamma_4) + M(\Gamma_5))$$

2.8.4. CALCULO DEL TORQUE PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS

Consideremos las superficies Γ_1 a Γ_5 de acuerdo con la Fig. 2.8.

Torque sobre Γ_1 La parametrización de la superficie Γ_1 está dada por:

$$\vec{r}(y) = (R_i + l, y, z) \quad z \in [0, H], y \in [0; w/2].$$

Torque sobre Γ_2 La parametrización de la superficie Γ_2 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, w/2, z) \quad z \in [0, H], x \in [\sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}; R_i + l].$$

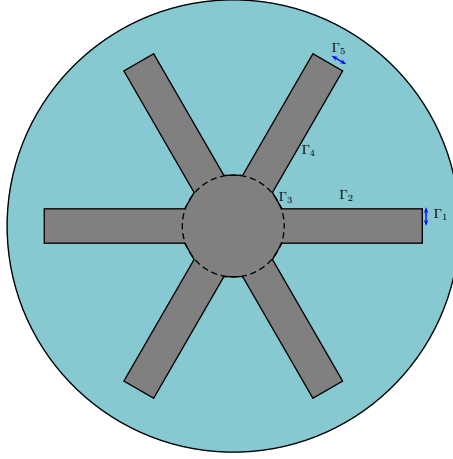


Figura 2.8: Corte horizontal de un vane de 6 paletas de altura infinita.

Torque sobre Γ_3 La parametrización de la superficie Γ_3 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, mx + n, z) \quad z \in [0, H], x \in \left[\frac{1}{2} \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{w}{2}; \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}} \right],$$

$$\text{donde } m = \frac{3 * w - 2\sqrt{3} \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}}{2\sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}} - \sqrt{3}w} \text{ y } n = \frac{w}{2} - m \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}}.$$

Torque sobre Γ_4 La parametrización de la superficie Γ_4 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, mx + n, z) \quad z \in [0, H], x \in \left[\frac{1}{2} \sqrt{R_i^2 - \frac{w^2}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{w}{2}; \frac{R_i + l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{w}{2} \right],$$

$$\text{donde } m = \sqrt{3} \text{ y } n = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \frac{w}{2}.$$

Torque sobre Γ_5 La parametrización de la superficie Γ_5 está dada por:

$$\vec{r}(x) = (x, mx + n, z) \quad z \in [0, H], x \in \left[\frac{R_i + l}{2}; \frac{R_i + l}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{w}{2} \right],$$

$$\text{donde } m = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } n = \frac{2\sqrt{3}}{3} (R_i + l).$$

Torque total Debido a la simetría, se tiene que el torque total sobre el cilindro vale:

$$(2.40) \quad M_{\text{total}} = 6(M(\Gamma_1) + M(\Gamma_2) + M(\Gamma_3) + M(\Gamma_4) + M(\Gamma_5))$$

2.9. RESULTADOS

2.9.1. RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS: CASO NEWTONIANO

PERFIL DE VELOCIDADES

En las Figs. 2.9 y 2.10 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia móvil obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

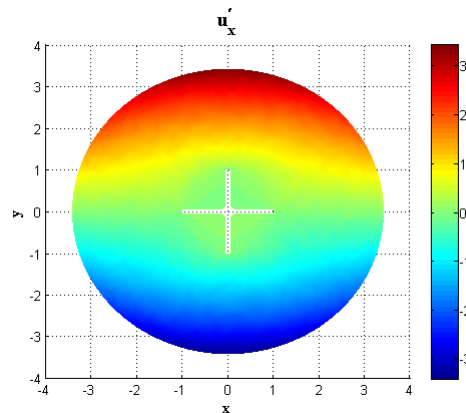


Figura 2.9: Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$.

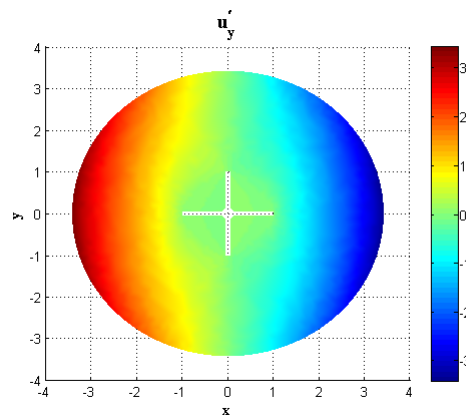


Figura 2.10: Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$.

En las Figs. 2.11 y 2.12 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia inercial obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

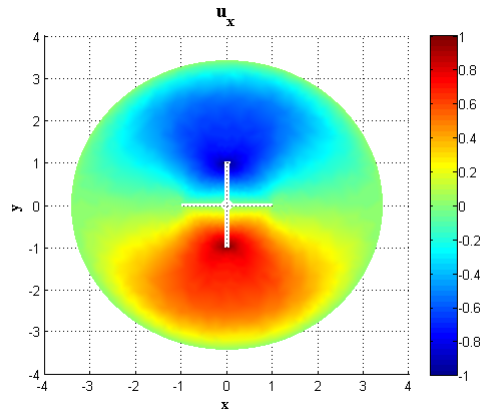


Figura 2.11: Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$.

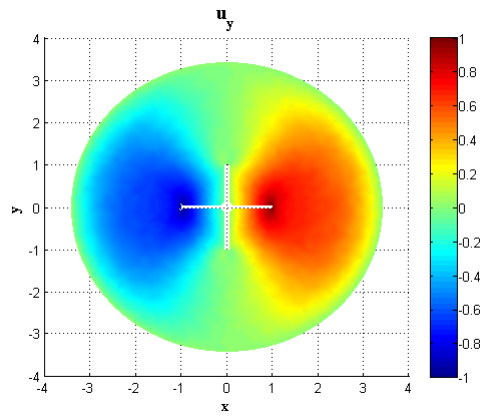


Figura 2.12: Perfil de velocidad u'_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$.

PERFIL DE TENSIONES

En las Figs. 2.13, 2.14 y 2.14 se presentan los perfiles de tensiones obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

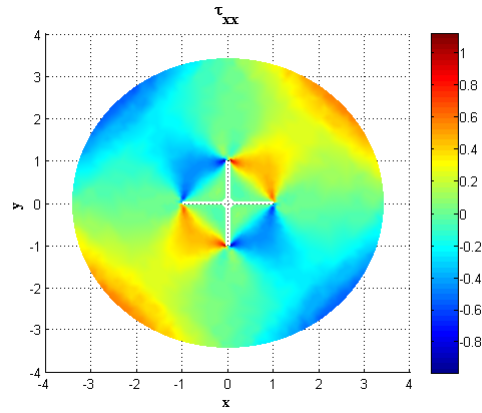


Figura 2.13: Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$.

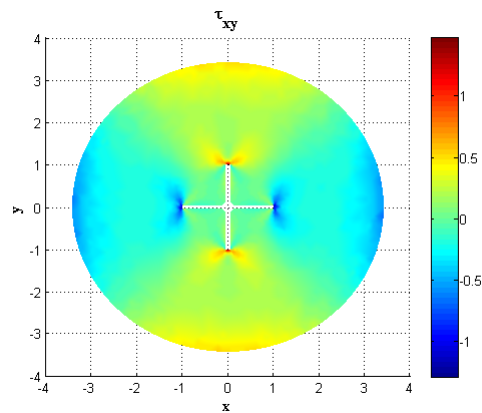


Figura 2.14: Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$.

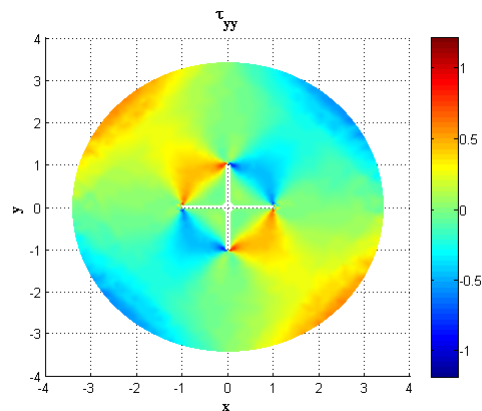


Figura 2.15: Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$.

LINEAS DE CORRIENTE

En la Fig. 2.16 se presentan las líneas de corriente para el sistema móvil y el sistema inercial, respectivamente obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

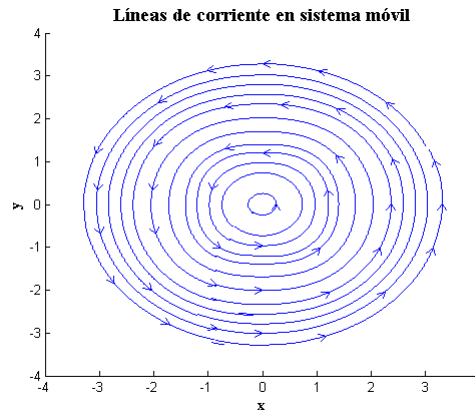


Figura 2.16: Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$.

2.9.2. RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 4 PALETAS: CASO BINGHAM

PERFIL DE VELOCIDADES

En las Figs. 2.17 y 2.18 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia móvil obtenidos para un número de Reynolds de 0.66 y número de Bingham de 10.

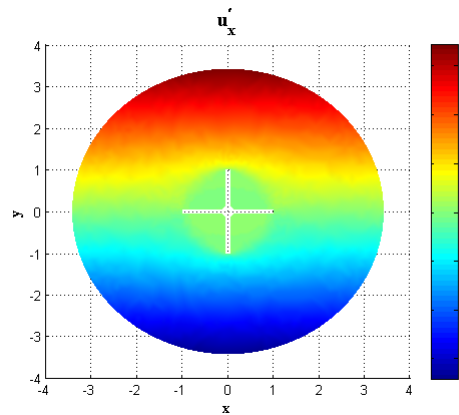


Figura 2.17: Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$

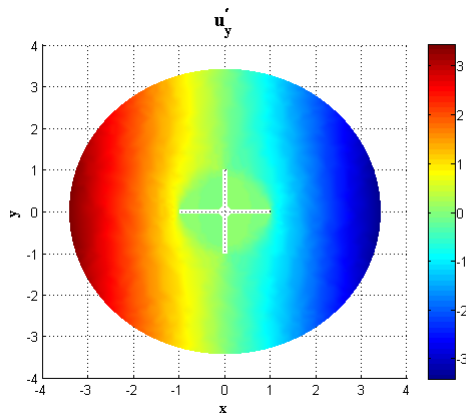


Figura 2.18: Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$

En las Figs. 2.19 y 2.20 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia inercial obtenidos para un número de Reynolds de 0.66 y número de Bingham de 10.

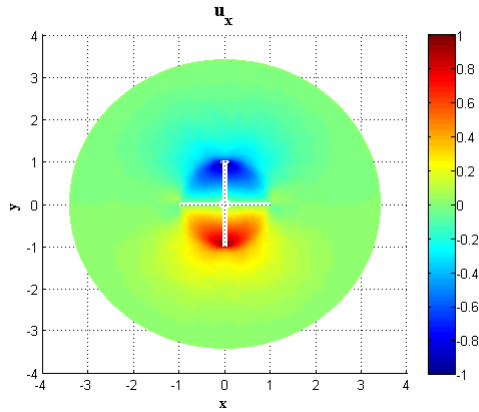


Figura 2.19: Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

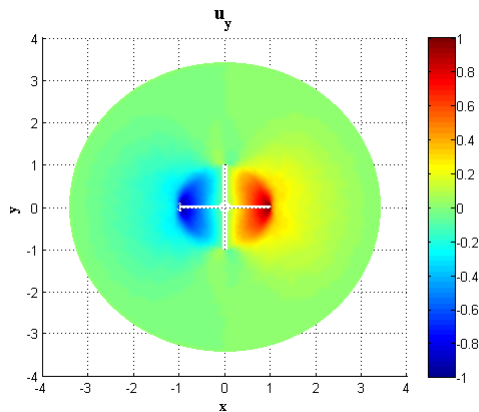


Figura 2.20: Perfil de velocidad u_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

En las Figs. 2.21 y 2.22 se presentan los perfiles del modulo de la velocidad para el sistema de referencia

no inercial y el sistema de referencia inercial respectivamente.

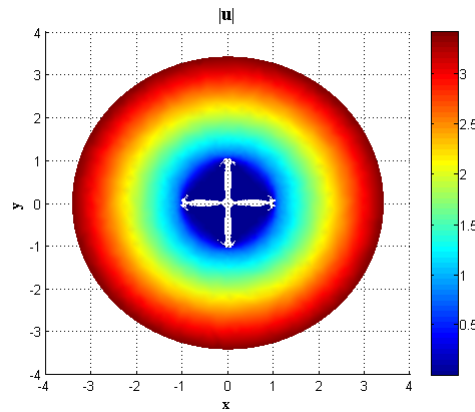


Figura 2.21: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

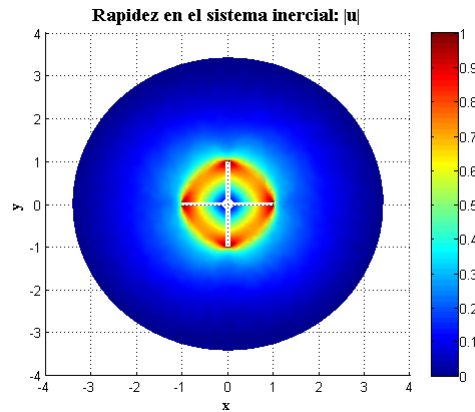


Figura 2.22: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

En la Fig. 2.23 se presenta la presión.

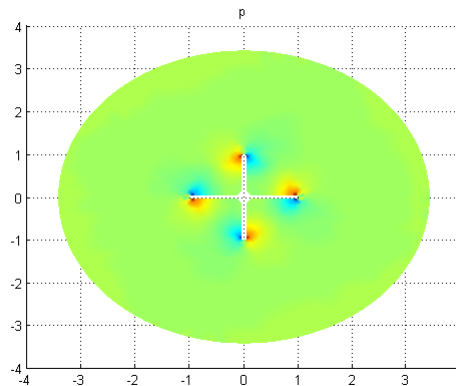


Figura 2.23: Presión para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

PERFIL DE TENSIONES

En las Figs. 2.24, 2.25 y 2.25 se presentan los perfiles de tensiones obtenidos para un número de Reynolds de 0.66. y número de Bingham de 10

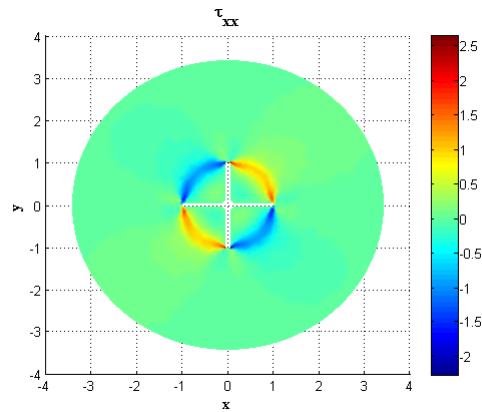


Figura 2.24: Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

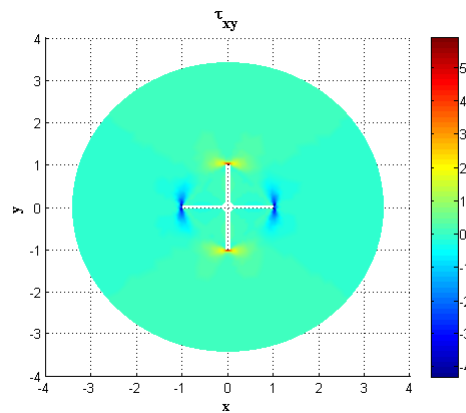


Figura 2.25: Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

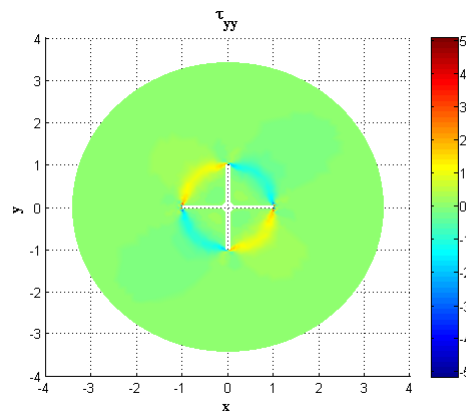


Figura 2.26: Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

LINEAS DE CORRIENTE

En la Fig. 2.27 se presenta las líneas de corriente para el sistema móvil obtenido para un número de Reynolds de 0.66 y número de Bingham de 10.

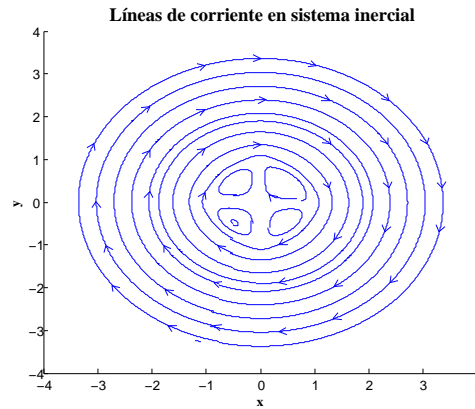


Figura 2.27: Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

2.9.3. RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS: CASO NEWTONIANO

PERFIL DE VELOCIDADES

En las Figs. 2.28 y 2.29 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia móvil obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

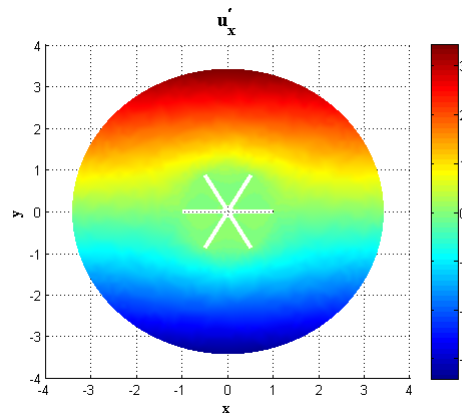


Figura 2.28: Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$.

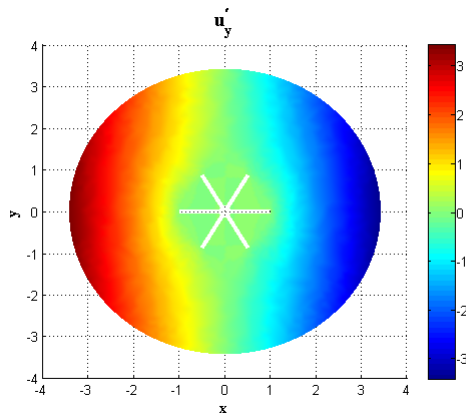


Figura 2.29: Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$.

En las Figs. 2.30 y 2.31 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia inercial obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

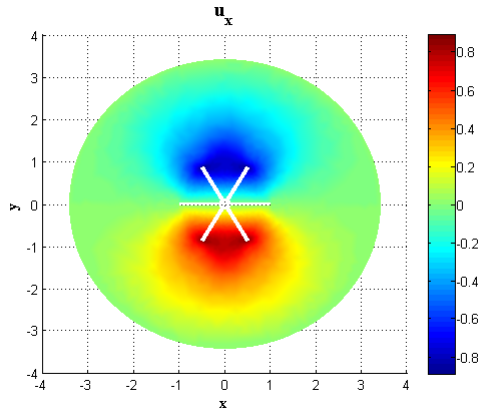


Figura 2.30: Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$.

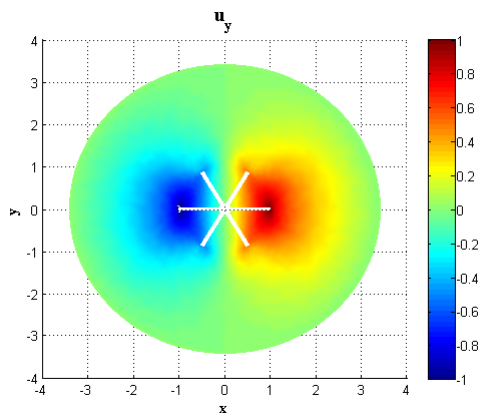


Figura 2.31: Perfil de velocidad u'_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$.

En las Figs. 2.32 y 2.33 se presentan los perfiles del modulo de la velocidad para el sistema de referencia

no inercial y el sistema de referencia inercial respectivamente.

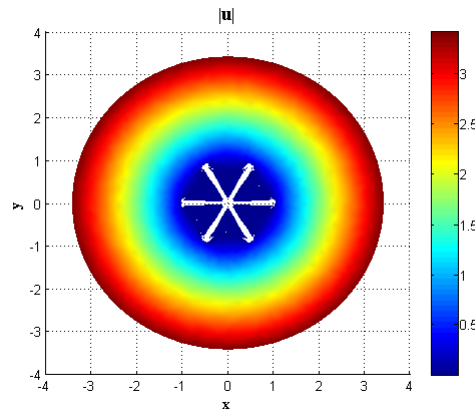


Figura 2.32: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$.

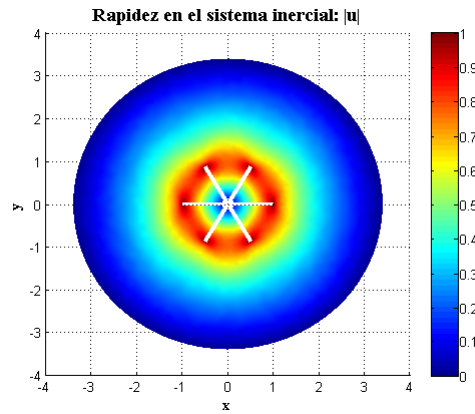


Figura 2.33: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$.

En la Fig. 2.34 se presenta la presión.

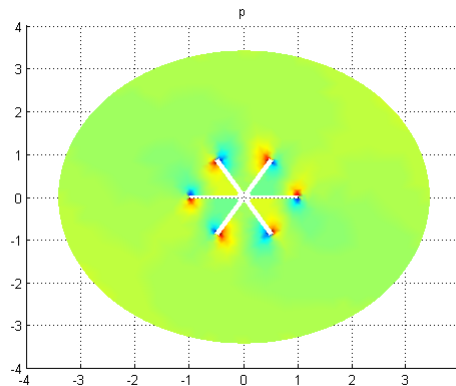


Figura 2.34: Presión para $Re = 0.66$.

PERFIL DE TENSIONES

En las Figs. 2.35, 2.36 y 2.36 se presentan los perfiles de tensiones obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

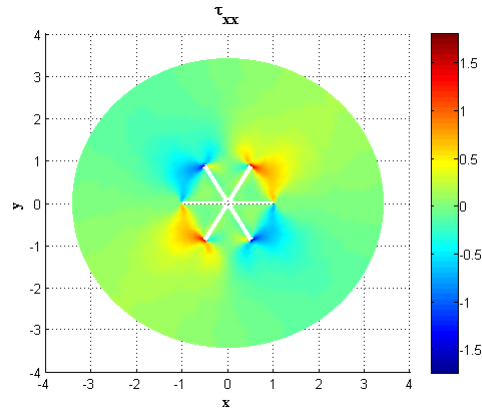


Figura 2.35: Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$.

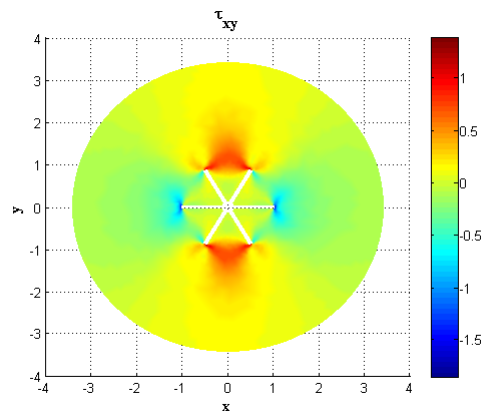


Figura 2.36: Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$.

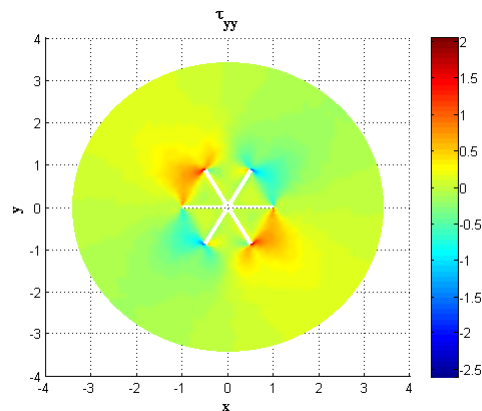


Figura 2.37: Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$.

LINEAS DE CORRIENTE

En las Figs. 2.38 se presentan las líneas de corriente para el sistema móvil obtenidos para un número de Reynolds de 0.66.

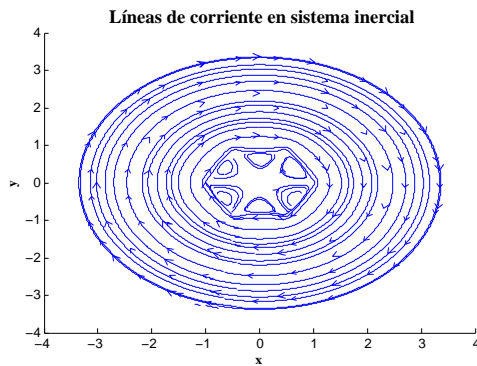


Figura 2.38: Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$.

2.9.4. RESULTADOS PARA EL REOMETRO DE 6 PALETAS: CASO BINGHAM

PERFIL DE VELOCIDADES

En las Figs. 2.17 y 2.18 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia móvil obtenidos para un número de Reynolds de 0.66 y numero de Bingham de 10.

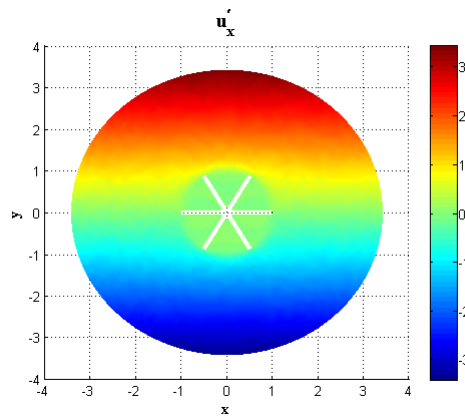


Figura 2.39: Perfil de velocidad u'_x en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$

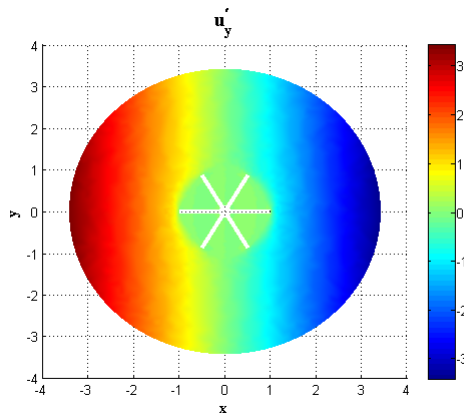


Figura 2.40: Perfil de velocidad u'_y en el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$

En las Figs. 2.41 y 2.42 se presentan los perfiles de velocidad para el sistema de referencia inercial obtenidos para un número de Reynolds de 0.66 y número de Bingham de 10.

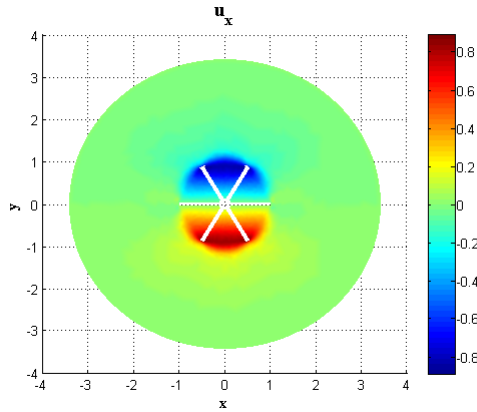


Figura 2.41: Perfil de velocidad u_x en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

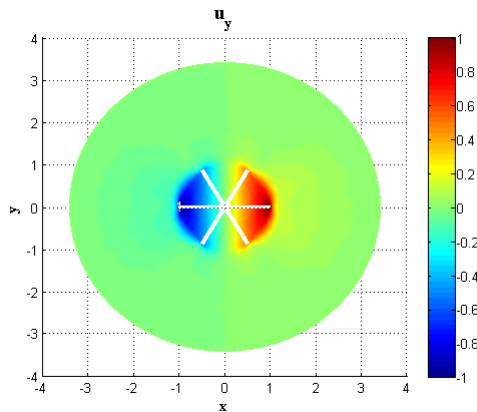


Figura 2.42: Perfil de velocidad u_y en el sistema inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

En las Figs. 2.43 y 2.44 se presentan los perfiles del modulo de la velocidad para el sistema de referencia

no inercial y el sistema de referencia inercial respectivamente.

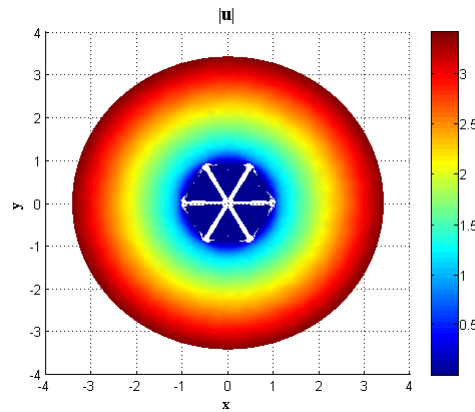


Figura 2.43: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

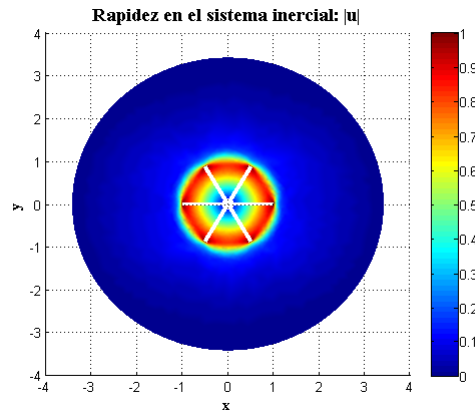


Figura 2.44: $|u|$ en el sistema de referencia no inercial para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

En la Fig. 2.45 se presenta la presión.

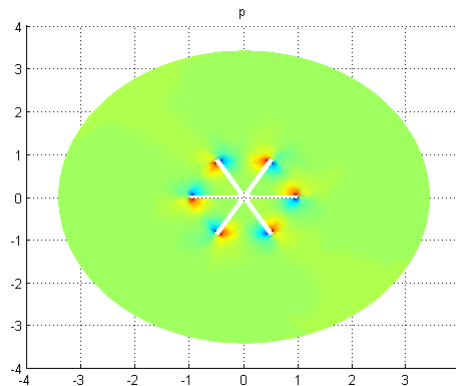


Figura 2.45: Presión para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

PERFIL DE TENSIONES

En las Figs. 2.46, 2.47 y 2.47 se presentan los perfiles de tensiones obtenidos para un número de Reynolds de 0.66. y número de Bingham de 10

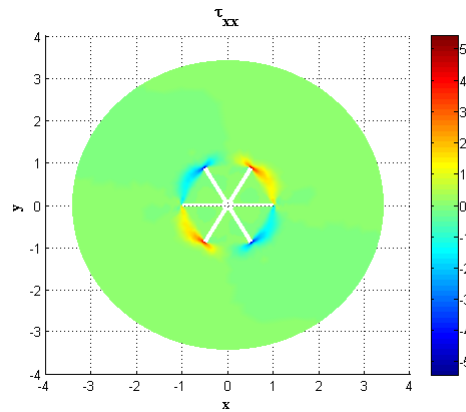


Figura 2.46: Tensión τ_{xx} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

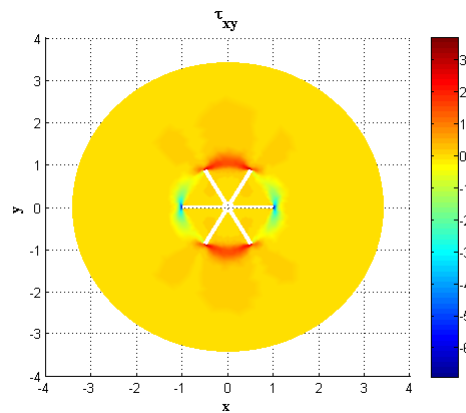


Figura 2.47: Tensión τ_{xy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

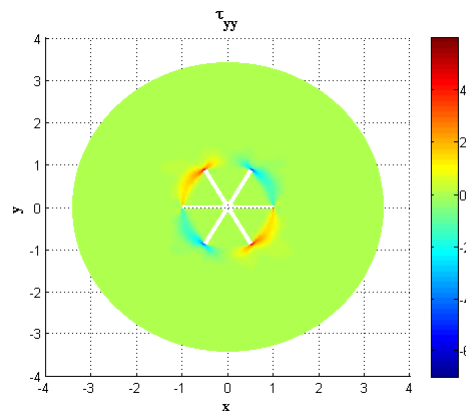


Figura 2.48: Tensión τ_{yy} para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

LINEAS DE CORRIENTE

En la Fig. 2.49 se presenta las líneas de corriente para el sistema móvil obtenido para un número de Reynolds de 0.66 y número de Bingham de 10.

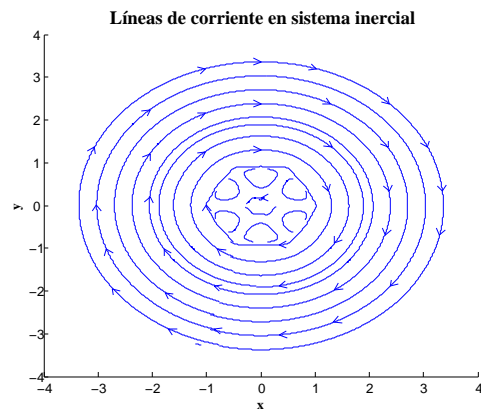


Figura 2.49: Líneas de corriente para el sistema móvil para $Re = 0.66$ y $Bi = 10$.

2.10. CONCLUSIONES

Se estudia el modelo Newtoniano y el modelo de Bingham en un reómetro de 4 y 6 paletas de altura infinita en ausencia de gravedad. Las hipótesis del problema lo reducen al problema bidimensional de encontrar $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ y p usando las ecuaciones de Cauchy sobre un dominio V que es corte transversal de las paletas.

Para plantear el problema es necesario definir un sistema de referencia móvil solidario a las paletas con lo cual aparecen nuevos términos en las ecuaciones de Cauchy que son el término de Coriolis, que es lineal con respecto a \mathbf{u} , y la fuerza centrípeta que actúa como fuerza externa. La dificultad del problema radica en los términos no lineales que son el término convectivo y término plástico.

En el caso de fluido newtoniano solo aparece el término convectivo que es básicamente un término cuadrático. Para resolver este problema se discretiza este término como $\mathbf{u}^n \nabla \mathbf{u}^{n+1}$. A partir de esto el problema se reduce a resolver una sucesión de problemas lineales donde la solución del problema no lineal es el límite de las soluciones de los problemas lineales.

En el caso del fluido Bingham aparece el término convectivo (que se discretiza de la misma manera que el caso newtoniano) y el término plástico. Para discretizar el término plástico se utiliza el método de Uzawa que, en base a una serie de equivalencias entre problemas, reduce el problema a agregar una variable auxiliar λ que juega el rol de $\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}$ y a proyectar esta variable sobre la bola unitaria. Utilizando un algoritmo alternante para λ y \mathbf{u} , es decir, dado un λ_n , λ_{n+1} es la proyección de λ_n en la bola unitaria y λ_{n+1} ahora juega el rol de $\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}$ en la ecuación de Cauchy. Esto hace al discretizar el término convectivo la ecuación de Cauchy sea lineal para \mathbf{u}^{n+1} . De esta forma el problema se reduce a una sucesión de problemas lineales para encontrar $(\mathbf{u}^n, \lambda^n)$ y el límite de estas soluciones es la solución del problema original.

Los algoritmos desarrollados permiten obtener el perfil de velocidades para las geometrías de 4 y 6 paletas. Con estos 2 elementos (las velocidades y la geometría) se desarrolló una fórmula que permite calcular el torque para ambos casos.

Capítulo 3

Bibliografía

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les éditions de l'école polytechnique, 2008.
- [2] C. Ancey. *Introduction to fluid rheology*. Laboratoire hydraulique environnementale (LHE), 2005.
- [3] C. Atkinson and J. D. Sherwood. The torque on a rotating n-bladed vane in a newtonian fluid or linear elastic medium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 438(1902):183–196, 1992.
- [4] R.A. Bagnold. *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, volume 129. Methuen, 1954.
- [5] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Society for industrial and applied mathematics, 2002.
- [6] B. Cockburn. *Discontinuous Galerkin method for convection-dominated Problems*. In *High-Order Methods for Computational Physics*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 9, Springer-Verlag, 1999.
- [7] Fedele J. Coleman, S. and M. García. *Closed-Conduit Bed-Form Initiation and Development*, volume 129. Journal of Hydraulic Engineering, 2003.
- [8] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [9] L. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematiaal Society, 1991.
- [10] R. Fuentes. *Modelos hidráulicos:teoría y diseno*. Codelco, 2002.
- [11] R. Fuentes. *Fenómenos de transporte en minería y metalurgia*. Codelco, 2007.
- [12] M. García. *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, chapter 2. Sedimentation Engineering, ASCE., 2008.
- [13] P. Garrido. Ensayos reológicos de relaves de cobre de mineras Andina y Teniente. Technical report, Universidad católica del norte, Antofagasta, Chile, 2008.
- [14] E. Godlewski and P. Raviart. *Numerical Aproximation of Hyperbolics System of Conservation Laws*. Springer, 1991.
- [15] W.H. Graf. *Hydraulics of Sediment Transport*. McGraw-Hill., 1971.
- [16] Barnes H. and Nguyen Q. D. Rotating vane rheometry - a review. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 98(1):1 – 14, 2001.

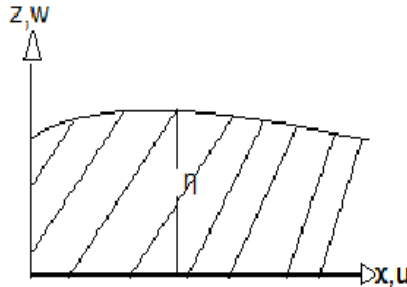
- [17] J. Hesthaven and T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods Algorithms Analysis and Applications*. Springer, 2000.
- [18] JRI. *Aplicación Industrial de la Tecnología de Espesamiento Extremo en Proyectos Mineros*. Innova Chile. Informe Técnico. D102-000-INF-AD-005, 2010.
- [19] M. Keentok, J.F. Milthorpe, and E. O'Donovan. On the shearing zone around rotating vanes in plastic liquids: theory and experiment. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 17(1):23 – 35, 1985.
- [20] P. Laaber. *Numerical simulation of a three-dimensional Bingham Fluid Flow*. Masterarbeit zur erlangung des akademischen grades diplomingenieur in der studienrichtung industriemathematik., Johannes Kepler Universitat Linz., 2008.
- [21] T.W. LAMBE and R.V. WHITMAN. *Soil Mechanics*. John Wiley and Sons., 1969.
- [22] M. Larenas. *Modelos en reología y aplicaciones a fluidos*. Memoria ingeniero civil matemático, Universidad de Chile, 2010.
- [23] S. Leliavsky. *An Introduction To Fluvial Hydraulics*, volume 2. Constable and Company Ltd., 1955.
- [24] J.L. Lions, R. Trémolieres, and R. Glowinski. *Analyse numérique des inéquations variationnelles-applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution*. Dunod Bordas, Paris, 1976.
- [25] J.L. Lions, R. Trémolieres, and R. Glowinski. *Analyse numérique des inéquations variationnelles-théorie générale et premières applications*. Dunod Bordas, Paris, 1976.
- [26] Q.D. Nguyen and D. V. Boger. Direct yield stress measurement with the vane method. *J. Rheol.*, 29:335–347, 1985.
- [27] A. Potanin. 3d simulations of the flow of thixotropic fluids, in large-gap couette and vane-cup geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(5 - 6):299 – 312, 2010.
- [28] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, Inc., 1979.
- [29] J. Serrin. Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics. In S. Flugge and C. Truesdell, editors, *Handbuch der Physik VIII/1*. Springer-Verlag, 1959.
- [30] F. Sofra, D.T. Fisher, and D. V. Boger. The bucket rheometer for thickened tailings and paste flow curve determination. In *Tenth International Seminar on Paste Thickened Tailings.*, pages 249–257, Perth, Australia, 2007.
- [31] F. Unda. *Fluidos de Bingham en canaletas rectangulares*. Memoria ingeniero civil matemático, Universidad de Chile, 2012.
- [32] V. A. VANONI. *Sedimentation Engineering*. ASCE, New York, USA., 1971.
- [33] W. Weixiong, D. De Kee, and D. Khismatullin. Numerical simulation of power law and yield stress fluid flows in double concentric cylinder with slotted rotor and vane geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(12-13):734–744, 2011.
- [34] M.S. YALIN. *Theory of Hydraulic Models*. MacMillan., 1971.
- [35] J. Yan and A.E. James. The yield surface of viscoelastic and plastic fluids in a vane viscometer. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70(3):237 – 253, 1997.

- [36] H. Zhu, N. M., C. F. Ferraris, and D. De Kee. A Numerical Study of the Flow of Bingham-Like Fluids In Two Dimensional Vane And Cylinder Rheometers Using a Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH) Based Method. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(7-8):362 – 375, 2010.
- [37] W. Zulehner. Numerical simulation of a three dimensional Bingham fluid flow. 142, 2008.

Apéndice A

DEDUCCION DE LA ECUACION DE CONSERVACION DE MASA PARA LA CANALETA RECTANGULAR

Consideremos el siguiente esquema de un fluido(sedimento) de densidad ρ_s con velocidad $\vec{v} = (u(x, z, t), w(x, z, t))$ y $\eta(x, t)$ es la elevacion de la cama.



Consideramos que ρ_s constante con lo cual la ecuación de continuidad se escribe:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Integrando con respecto a z entre 0 y η

$$\int_0^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

$$\int_0^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + w(x, \eta) - w(x, 0) = 0$$

Por la regla de Leibnitz

$$\int_0^{\eta(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\eta(x,t)} u dz - u(x, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Es claro que $w(x, 0) = 0$ y además:

$$w(x, \eta) = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(x, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

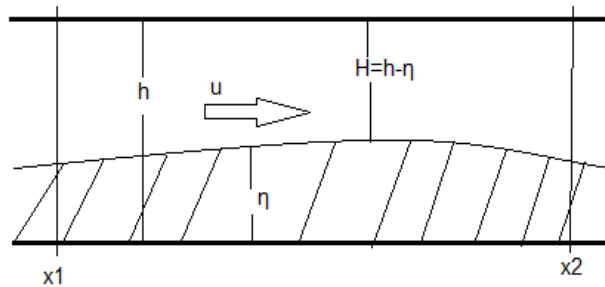
Así reemplazando en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta u dz = 0$$

Llamando $q_s = \int_0^\eta u dz$ (gasto sólido) tenemos la ecuación de conservación de masa para el sedimento:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q_s = 0$$

Basados en el siguiente esquema:



De esta forma la ecuación de conservación de masa queda:

$$\frac{d}{dt} \eta + \frac{\partial}{\partial x} q_s = 0$$

Para trabajar con una versión más simple de la ecuación consideraremos 2 hipótesis sobre los parámetros de la ecuación anterior:

- El flujo del fluido sobre el sedimento (q_f) es constante:

$$q_f = Hu = c^{te}$$

- El gasto sólido tiene la forma:

$$q_s = \alpha(u, H, \dots) u^n$$

Donde $n \in \mathbb{N}$ y α es una función determinada de manera empírica. Para ser consistente con el trabajo original de Exner consideramos $n = 1$ y α como una constante (hipótesis de Exner).

De las hipótesis anteriores se desprende:

$$u = \frac{q_f}{h - \eta}$$

Así

$$q_s = \alpha \frac{q_f}{h - \eta}$$

Remplazando en la ecuación de continuidad tenemos

$$(A.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} f(\eta) = 0$$

Donde $f(\eta) = \frac{\alpha q_f}{h - \eta}$. La ecuación A.1 es una ecuación hiperbólica y a la función f se le denomina flujo. Se asume en la ecuación anterior que q_f y α son constantes positivas. Además consideramos h lo suficientemente grande tal que $(h - \eta) > 0$ lo que implica que el flujo es convexo. La última hipótesis refleja que sedimento nunca alcanza el tope de la tubería.

Apéndice B

MARCO TEORICO DE ECUACIONES HIPERBOLICAS

En esta sección se presenta un breve resumen sobre la teoría de soluciones de ecuaciones hiperbólicas. En la primera parte se argumenta sobre las soluciones no son necesariamente suaves. Después se presenta el concepto de solución débil y solución de entropía y se presentan criterios de existencia y unicidad de soluciones de entropía. Este capítulo se basa en principalmente en argumentos que se presentan en [14] y en [9].

B.1. CURVAS CARACTERISTICAS

La ecuación A.1 tiene como forma general

$$(B.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Si u , una solución del problema B.1, es C^1 se le denomina solución clásica. Una característica esencial de este tipo de problemas es que en general no existe una solución clásica de B.1 salvo por un intervalo acotado de tiempo sin importar si es que u_0 , la condición inicial, fuese suave. Para ilustrar este hecho estudiaremos las trayectorias características de la ecuación.

Definición B.1.1. *Curvas Características*

La curva característica que pasa por el punto $(x_0, 0)$ se define como la solución de la EDO

$$(B.2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(u(x(t), t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Proposición B.1.1. *Si u es una solución suave de B.1 entonces u permanece constante sobre cada curva característica definida por la ecuación B.2.*

Demostración

Notemos que dada la regularidad de la función f es posible asegurar la existencia de la curva x_{x_0} para un intervalo $[0, t_0)$. Así

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} \right) = 0 \square$$

De la proposición anterior se deduce que las curvas características tienen la forma

$$(B.3) \quad x = x_0 + t f'(u_0(x_0))$$

Asumamos que existen puntos $x_1 < x_2$ tal que las pendientes de las curvas características que pasan por estos puntos son tal que

$$m_1 = \frac{1}{f'(u_0(x_1))} < m_2 = \frac{1}{f'(u_0(x_2))}$$

Supongamos que las curvas características se intersecan en un punto P . En este punto la solución debería tomar los valores $u_0(x_1)$ y $u_0(x_2)$ lo que es imposible ya que asumimos que la solución u es continua. Por ende u no puede ser continua en el punto P . Notemos que este fenómeno es independiente de la suavidad de la condición inicial u_0 y f . De esta forma salvo que la función $x \rightarrow f'(u_0(x))$ sea monótonamente creciente la ecuación B.1 no tendrá una solución clásica para todo tiempo t .

Es posible calcular el tiempo mínimo en que en que se demoran en chocar 2 curvas características. Para esto notemos que igualando las ecuaciones de las características en el punto P tenemos que:

$$t(f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))) = x_2 - x_1$$

Despejando t y tomando $x_2 \rightarrow x_1$:

$$T^*(x_1) = -\frac{1}{\frac{d}{dx_1} f'(u_0(x_1))}$$

y tomando el mínimo sobre x_1 obtenemos la fórmula para el tiempo en cual la solución de la ecuación deja de ser C^1 :

$$(B.4) \quad T^* = -\frac{1}{\min_{x_1 \in \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx_1} f'(u_0(x_1)) \right)}$$

B.2. SOLUCION DEBIL

Para esta sección y las posteriores consideraremos la siguiente notación $u^+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x + \varepsilon)$ y $u^-(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} u(x + \varepsilon)$. A continuación consideramos el problema B.1 y definimos la noción de solución débil

Definición B.2.1. *Solución Débil del problema B.1 La función $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty), \mathbb{R})$ es una solución débil de B.1 ssi*

$$(B.5) \quad \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi_t + f(u) \varphi_x dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

para toda función $\varphi : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ suave y a soporte compacto.

Es posible tener una caracterización de la discontinuidad de una solución de B.1

Teorema 1. *Condición de Rankine-Hugoniot*

Sea $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es C^1 por tramos. Entonces u es solución débil de B.1 si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. u es solución clásica de B.1 en el dominio en que u es C^1 .

2. u cumple la condición de salto

$$(B.6) \quad (f(u_-) - f(u_+))v^1 + (u_- - u_+)v^2 = 0$$

en la curva de discontinuidad, donde v_1 y v_2 son las normales opuestas en la curva.

Notemos que parametrizando la curva de discontinuidad como $\{(x, t) \mid x = s(t)\}$ tenemos que

$$(v_1, v_2) = (1, -\dot{s}) \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2}}$$

De esta forma la condición de Rankine-Hugoniot se puede escribir como

$$(B.7) \quad (f(u_-) - f(u_+)) = (u_- - u_+)\dot{s}$$

Es importante notar que en este tipo de problemas no necesariamente hay unicidad y la condición de Rankine-Hugoniot no la asegura.

La falta de unicidad nos lleva de manera natural a la pregunta de cuál es la solución relevante. El concepto de entropía permite seleccionar, y asegurar, la existencia de una solución que será la físicamente relevante.

B.2.1. NOCION DE ENTROPIA

Consideremos el siguiente problema: dada una solución suave de B.1 nos preguntamos si u satisface alguna otra ecuación de la forma

$$(B.8) \quad \frac{\partial U(u(x, t))}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} = 0$$

Notemos que esto se tiene si $U'(u)f'(u) = F'(u)$ ya que multiplicando B.1 por $U'(u)$ tenemos

$$\begin{aligned} U'(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + U'(u) \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} &= 0 \\ U'(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + U'(u)f'(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= 0 \\ U'(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F'(u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la ecuación B.8. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición B.2.2. Función de Entropía

Una función convexa $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina entropía para la ecuación B.1 si existe una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, llamada flujo de entropía, tal que

$$(B.9) \quad U'(u)f'(u) = F'(u)$$

Para conectar el concepto de entropía con la existencia de la solución físicamente relevante consideremos la ecuación de viscosidad asociada a la ecuación B.1

$$(B.10) \quad \frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u^\varepsilon(x,t))}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,t)}{\partial x^2}$$

Con lo anterior podemos formular el siguiente teorema (ver [14]).

Teorema 2. *Supongamos que B.1 admite una función de entropía U con un flujo F . Sea u^ε una secuencia de soluciones suaves de B.10 tal que*

▪

$$(B.11) \quad \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))} \leq C$$

▪

$$(B.12) \quad u^\varepsilon \rightarrow u \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ c.t.p en } \mathbb{R} \times [0, +\infty)$$

Donde $C > 0$ es una constante independiente de ε . Entonces u es solución débil de B.1 y satisface la condición de entropía

$$(B.13) \quad \frac{\partial U(u(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x} \leq 0$$

En el sentido de las distribuciones.

El teorema anterior motiva la siguiente definición

Definición B.2.3. *Solución de Entropía*

Una solución débil de B.1 se denomina solución de entropía si u satisface la condición B.13 para cualquier función de entropía U que admita la ecuación B.1

La definición anterior da paso al siguiente teorema de existencia y unicidad

Teorema 3. *Consideremos el problema con condición inicial B.1 con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces el problema B.1 tiene una única solución de entropía $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$. Esta solución satisface que para casi todo $t \geq 0$*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

La demostración de este teorema hace uso del teorema 2 y además prueba su unicidad (ver [9]).

B.3. OTROS CRITERIOS DE ENTROPIA

Una condición equivalente para verificar si es que una solución de es de entropía esta dada por el criterio de Lax:

Teorema 4. Criterio de Entropía de Lax:

Sea u una solución débil de B.1 y S una curva sobre la cual u posee una discontinuidad. Entonces u satisface la condición de entropía B.13 si y solo si

$$(B.14) \quad f'(u_-) > s > f'(u^+)$$

Donde s es la parametrización de la curva S dada por la condición de Runkine-Hugoniot

Notemos que si f es una función convexa la condición B.14 se reduce a

$$(B.15) \quad u_- > u_+$$

Otro criterio equivalente para verificar si una solución es de entropía es el siguiente:
Para alguna constante $C \geq 0$ y para $x, z \in \mathbb{R}$ c.t.p. y para $t > 0$ y $z > 0$ se tiene que

$$(B.16) \quad u(x+z, t) - u(x, t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right)z$$

Donde u es una solución débil del problema B.1. Ver [9].

Apéndice C

RESOLUCION NUMERICA Y ANALISIS DE ESTABILIDAD

Para resolver numéricamente la ecuación Exner en la canaleta rectangular usaremos el método de Galerkin discontinuo que se presenta en [17].

C.1. ELEMENTOS BASICOS DEL METODO DE GALERKIN DISCONTINUO

Consideremos el problema en su forma general

$$(C.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0 & x \in [x_L, x_R] = \Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

El dominio Ω se divide en K sub-dominios $D_k = [x_l^k, x_r^k]$ y consideramos la solución aproximada en D_k como

$$(C.2) \quad x \in D_k : u_h^k(x,t) = \sum_{i=0}^{N_p} u_h^k(x_i^k, t) \phi_i^k(x)$$

Donde N_p es grado de polinomios a usar en la aproximación y ϕ_i^k son los polinomios de aproximación de Lagrange en el subdominio D_k . Para nuestro caso se escogera $N_p = 1$ la aproximación se realiza con polinomios de grado 1 de la siguiente forma:

$$(C.3) \quad u_h^k = u_h^k(x_l^k, t) \frac{-(x-x_r^k)}{h_k} + u_h^k(x_r^k, t) \frac{(x-x_l^k)}{h_k}$$

Notemos que como se utilizan 2 polinomios de grado 1 es necesario contar con la aproximación en 2 puntos de la función en el intervalo D_k de esta forma la función se aproxima por la suma de 2 funciones lineales para cada intervalo D_k .

Considerando la ecuación C.1 se introduce de manera natural el espacio discreto $V_h = \bigoplus_{k=1}^K V_h^k$, donde $V_h^k = \langle \{\phi_i(D_k)\}_{i=0}^{N_p} \rangle$. Consideremos la siguiente formulación débil del problema C.1

$$(C.4) \quad \int_{D_k} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} \right) \varphi(x) dx = 0$$

Remplazando $u(x,t) \simeq u_h(x,t)$ y escogiendo $\varphi = \phi_n$ con $0 \leq n \leq N_p$ tenemos

$$(C.5) \quad \int_{D_k} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_n + f(u_h) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) dx = f(u_h(x_r^k)) \phi_n^k(x_r^k) - f(u_h(x_l^k)) \phi_n^k(x_l^k)$$

Donde se ha remplazado el término $f(u_h)$ en ∂D_k por una función f^* que se denomina flujo numérico. De esta forma la formulación variacional discreta:

$$(C.6) \quad \int_{D_k} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_n + f(u_h) \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) dx = f^*(u_h(x_r^k)) \phi_n^k(u_h(x_r^k)) - f^*(u_h(x_l^k)) \phi_n^k(x_l^k)$$

La elección mas común para la función f^* es el flujo de Lax-Friedrichs

$$f^*(u_h(x)) = f^*(u_h^+(x), u_h^-(x)) = \frac{f(u_h^+(x)) + f(u_h^-(x))}{2} + C \frac{u^+(x) - u^-(x)}{2}$$

Donde $C = \max|f_u|$ y $u_h^+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x + \varepsilon)$ y $u_h^-(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} u(x + \varepsilon)$ Para tratar la expresión $\int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial \phi_n}{\partial x}$ utilizamos la siguiente aproximación

$$f_h^k(u_h(x,t)) = \sum_{i=1}^{N_p} f(u_h^k(x_i, t)) \phi_i^{k(x)}$$

De esta forma el esquema final se escribe como

$$(C.7) \quad M^k \frac{d\vec{u}_h^k}{dt} + S^k \vec{f}_h^k = \vec{f}^* \phi^k$$

Donde

$$\begin{aligned} \vec{u}_h^k &= [u_h^k(x_l^k), u_h^k(x_r^k)] \\ \vec{f}_h^k &= [f_h^k(u_h(x_l^k)), f_h^k(u_h(x_r^k))] \\ \vec{f}^* &= [f^*(u(x_r^k)) \phi_0^k(x_r^k) - f^*(u_h(x_l^k)) \phi_0^k(x_l^k), f^*(u(x_r^k)) \phi_1^k(x_r^k) - F(u_h(x_l^k)) \phi_1^k(x_l^k)] \end{aligned}$$

y $M_{ij}^k = \int_{D_k} \phi_i(x) \phi_j(x) dx$ y $S_{ij}^k = \int_{D_k} \phi_i(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx$. De esta forma tenemos 2 ecuaciones para D_k de esta forma en total tenemos $2 \times K$ ecuaciones y $2 \times K$ incógnitas.

C.2. ANALISIS DE ESTABILIDAD

El objetivo de esta sección es presentar una versión modificada del método anterior introduciendo el concepto de límite de salto. Para esto se presentan los conceptos fundamentales de la convergencia del método que se divide en si el esquema converge tiene que converger a una solución débil del problema original, esta solución además debe ser la solución de entropía y por último analizar la existencia de esta solución numérica. Una vez completados estos análisis la necesidad de modificar el esquema aparece de manera natural y con lo cual se puede establecer un esquema numérico estable y además un teorema de convergencia. Los análisis presentados en esta sección se encuentran de manera detallada en [6] y en el

capitulo 5 de [17].

Consideramos nuevamente

$$(C.8) \quad \int_{D_k} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} \right) \phi(x) dx = 0$$

Remplazando $u(x,t) \simeq u_h(x,t)$ y escogiendo $\phi(x) = \phi_h(x) = \sum_{i=1}^{N_p} \phi(x_i^k, t) l_i^k(x)$ con $\phi(x,t) \in D(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ (ϕ_h es una representacion polinomial de ϕ) y remplazando por el flujo numérico de Lax-Friedrichs se obtiene:

$$(C.9) \quad \int_{D_k} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_h - f(u_h) \frac{\partial \phi_h}{\partial x} \right) dx = -[\phi_h(x) f^*]_{x_l^k}^{x_r^k}$$

A continuación integramos en tiempo y haciendo integración por partes:

$$(C.10) \quad \int_0^\infty \int_{D_k} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} u_h dx dt + \int_0^\infty \int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial \phi_h}{\partial x} dx dt - \int_{D_k} u_h(x,0) \phi_h(0) dx = \int_0^\infty [\phi_h(x) f^*]_{x_l^k}^{x_r^k} dt$$

Sumando las ecuaciones para cada D_k

$$(C.11) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_h}{\partial t} u_h dx dt + \int_0^\infty \int_{\Omega} f(u_h) \frac{\partial \phi_h}{\partial x} dx dt - \int_{\Omega} u_h(x,0) \phi_h(0) dx = \int_0^\infty \sum_{k_e} [\phi_h(x) f^*]_{x_l^e}^{x_r^e} dt$$

Donde k_e son el borde de cada subdominio D_k . Es claro que ϕ_h converge uniformemente a la función test ϕ cuando $h \rightarrow 0$. Notemos que si $u_h(x,t)$ converge c.t.p. a una función $u(x,t)$ es claro que se puede pasar al límite en las integrales de C.11 por el teorema de convergencia dominada con lo cual la función límite u cumple:

$$(C.12) \quad \int_0^\infty \int_{\Omega} \frac{\partial u \phi}{\partial t} dx dt + \int_0^\infty \int_{\Omega} \phi \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx dt - \int_{\Omega} u_h(x,0) \phi_h(0) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^\infty \sum_{k_e} [\phi_h(x) (f - f^*)]_{x_l^e}^{x_r^e} dt = 0$$

Es importante precisar que la última desigualdad se obtiene de la simetría de f^* en el sentido $f^*(u_h^+, u_h^-) = f^*(u_h^-, u_h^+)$. Con lo anterior se concluye que u es solución débil del problema B.1.

Consideremos la ecuación discreta:

$$(C.13) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_h + \frac{\partial}{\partial x} f(u_h) = 0$$

Multiplicando por u_h y integrando en D_k :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_k} u_h^2 + \int_{D_k} \frac{\partial}{\partial x} f(u_h) u_h dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_k} u_h^2 - \int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial}{\partial x} u_h dx + f(u_h) u_h \Big|_{x_l^k}^{x_r^k} \end{aligned}$$

Remplazando f por el flujo numérico f^* y realizando integración nuevamente:

$$(C.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|_{2,D_k}^2 + \int_{D_k} \frac{\partial}{\partial x} f(u_h) u_h dx = (f(u_h) - f^*(u_h)) u_h \Big|_{x_l^k}^{x_r^k}$$

Consideremos la siguiente función de entropía H y el correspondiente flujo F definidos por

$$H(u) = \frac{u^2}{2}, F'(u) = H'(u) f'(u)$$

Notemos que:

$$(C.15) \quad F(u) = \int f'(u) u du = f(u) u - g(u)$$

Donde $g(u) = \int f(u) du$ Reescribiendo la expresión:

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \frac{\partial}{\partial x} f(u_h) u_h dx &= \int_{D_k} H'(u_h) f'(u_h) \frac{\partial}{\partial x} u_h dx \\ &= \int_{D_k} F'(u_h) \frac{\partial}{\partial x} u_h dx \\ &= \int_{D_k} \frac{\partial}{\partial x} F(u_h) dx \end{aligned}$$

Reemplazando en C.14

$$(C.16) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_k} u_h^2 + [F(u_h)] \Big|_{x_l^k}^{x_r^k} = (f(u_h) - f^*(u_h)) u_h \Big|_{x_l^k}^{x_r^k}$$

De esta forma:

$$(C.17) \quad F(u_h(x_r^k)) - F(u_h(x_l^k)) + u_h(x_l^k)(f(u_h(x_l^k)) - f^*(u_h(x_l^k))) - u_h(x_r^k)(f(u_h(x_r^k)) - f^*(u_h(x_r^k))) < 0$$

Reescribiendo la desigualdad C.17 y utilizando C.15:

$$(C.18) \quad -g(u_h(x_r^k)) + g(u_h(x_l^k)) - f^*(u_h(x_r^k), u_h(x_l^k))(u_h(x_r^k) - u_h(x_l^k)) < 0$$

Notemos que $-g(u_h(x_r^k)) + g(u_h(x_l^k)) = g'(\xi)(u_h(x_l^k) - u_h(x_r^k)) = f(\xi)(u_h(x_l^k) - u_h(x_r^k))$ para algún $\xi \in [u_h(x_l^k), u_h(x_r^k)]$ con lo cual se puede reescribir C.18:

$$(C.19) \quad (f(\xi) - f^*(u_h(x_r^k), u_h(x_l^k)))(u_h(x_l^k) - u_h(x_r^k)) \leq 0$$

La desigualdad C.19 se denomina la propiedad de E-Flujo. Consideremos ahora el siguiente Flujo de entropía

$$(C.20) \quad \hat{F}(x) = f^*(x) u(x) - g(x)$$

Podemos reescribir la ecuación, utilizando C.16, como

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_k} (u_h)^2 dx - \int_{D_k} \frac{\partial}{\partial x} u_h f(u_h) dx + [u_h f^*]_{x_l^k}^{x_r^k} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D_k} H(u_h) + \hat{F}(u_h(x_r^k)) - \hat{F}(u_h(x_r^{k-1})) + \hat{F}(u_h(x_r^{k-1})) - \hat{F}(u_h(x_l^k)) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{D_k} H(u_h) + \hat{F}(u_h(x_r^k)) - \hat{F}(u_h(x_r^{k-1})) + \Phi \end{aligned}$$

con

$$\Phi = \hat{F}(u_h(x_r^{k-1})) - \hat{F}(u_h(x_l^k)) = f^*(u_h(x_r^{k-1}) - u_h(x_r^k)) - g(u_h(x_r^{k-1})) + g(u_h(x_l^k)) > 0$$

utilizando C.19. De esta forma:

$$(C.21) \quad \frac{d}{dt} \int_{D_k} H(u_h^k) + \hat{F}(u_h(x_r^k)) - \hat{F}(u_h(x_r^{k-1})) < 0$$

que es una desigualdad de Entropía discreta para la entropía H y el flujo de entropía \hat{F} .

Dada la desigualdad de entropía y la ecuación C.12, como se discutio anteriormente, solo es necesario probar la convergencia puntual de la sucesión u_h para determinar que la solución numerica converge a la solución de la ecuación hiperbólica asociada y la desigualdad C.21 asegura la convergencia a la solución de entropía. Para completar el esquema solo resta escoger la discretización en tiempo. De la discretización C.7:

$$(C.22) \quad \frac{du_h}{dt} = L(u_h, t)$$

Donde L es el operador que representa el lado derecho de despejar la ecuación matricial C.7. Para la discretización en tiempo se escogera el método de Euler(Foward). De esta forma dado u^j el paso siguiente $w^j = u_h^j + \delta L(u_h^j)$ con δ como el paso del método. Dada el método anterior es posible demostrar la siguiente propiedad (TVD).

Teorema 5. Propiedad TVD

Se tiene que

$$(C.23) \quad |\bar{w}^{n+1}|_{TV} + |\bar{u}^n|_{TV} + \Phi = 0$$

Donde

$$(C.24) \quad \Phi = \sum_{k=1}^K (g'(\bar{u}^{k+\frac{1}{2},n}) - g'(\bar{u}^{k-\frac{1}{2},n})) (p(u^{k+1,n}) - p(u^{k,n}))$$

$$(C.25) \quad + \frac{\Delta t}{h} \sum_{k=1}^K (g'(\bar{u}^{k-\frac{1}{2},n}) - g'(\bar{u}^{k+\frac{1}{2},n})) (f^+(u^{k,n}) - f^+(u^{k-1,n}))$$

$$(C.26) \quad + \frac{\Delta t}{h} \sum_{k=1}^K (g'(\bar{u}^{k+\frac{1}{2},n}) - g'(\bar{u}^{k-\frac{1}{2},n})) (f^-(u^{k,n}) - f^-(u^{k,n}))$$

Donde $g(u) = |u|$

$$\bar{u}^{k,n} = \int_{D_k} u_h^n dx$$

$$g'(\bar{u}^{k+\frac{1}{2},n}) = g'(\frac{\bar{u}^{k+1,n} - \bar{u}^{k,n}}{h})$$

$$p(u^{k,n}) = \bar{u}^k - \frac{\Delta t}{h} f^+(u_r^{k,n}) + \frac{\Delta t}{h} f^-(u_l^{k,n})$$

$$|\bar{u}^{k,n}|_{TV} = \sum_{j=1}^K |\bar{u}^{k+1,n} - \bar{u}^{k,n}|$$

y

$$f^+(a) = \frac{1}{2}(f(a) + Ca)$$

$$f^-(b) = \frac{1}{2}(f(b) + Cb)$$

son las partes crecientes y decrecientes de el flujo.

Se tiene que $g'(u) = \text{sign}(u)$ con lo cual se desprende del teorema anterior que para que $\phi \geq 0$ es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$$(C.27) \quad \text{sign}(\bar{u}^{k+1,n} - \bar{u}^{k,n}) = \text{sign}(p(u^{k+1,n}) - p(u^{k,n}))$$

$$(C.28) \quad \text{sign}(\bar{u}^{k,n} - \bar{u}^{k-1,n}) = \text{sign}(u_r^{k,n} - u_r^{k-1,n})$$

$$(C.29) \quad \text{sign}(\bar{u}^{k+1,n} - \bar{u}^{k,n}) = \text{sign}(u_l^{k+1,n} - u_l^{k,n})$$

Al cumplirse las condiciones C.27, C.28 y C.29 se tiene:

$$(C.30) \quad |\bar{u}^n|_{TV} \leq |\bar{u}_0^n|_{TV}$$

Con lo cual se asegura la estabilidad del esquema ya que $\|u\|_{L^1(D_k)} \leq |\bar{u}^n|_{TV}$. Lamentablemente no se puede asegurar que la solución numérica cumpla las condiciones C.27, C.28 y C.29 es por esto que es necesario introducir una transformación de la solución que cumpla las condiciones C.27, C.28 y C.29. Para esto consideremos se introduce la función min-mod:

$$(C.31) \quad m(a_1, \dots, a_m) = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} |a_i| & |s| = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \quad s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{sign}(a_i)$$

La función m será 0 a menos que todos sus argumentos tengan el mismo signo. Definamos v_h la solución numérica obtenida con el método de Euler para el tiempo N .

$$(C.32) \quad \Pi^1 v_h^{N,k}(x) = \bar{v}_h^{N,k} + (x - x_0^k) m\left((v_h^{N,k})_x, \frac{\bar{v}_h^{N,k+1} - \bar{v}_h^{N,k}}{\frac{h}{2}}, \frac{\bar{v}_h^{N,k} - \bar{v}_h^{N,k-1}}{\frac{h}{2}}\right)$$

Ocupando el operador anterior escribimos la solución numérica para el intervalo D_k como

$$(C.33) \quad u_h^{N,k} = \Pi^1 v_h^{N,k}(x)$$

a la solución C.33 se le denomina solución con límite de salto. Esta solución con límite de salto cumple la condición TVD y converge a la solución de entropía del problema C.1 (ver [6] TEOREMA 2.13). Con lo anterior es posible establecer un algoritmo definitivo que calcule la solución numérica.

C.3. ALGORITMO DE GALERKIN DISCONTINUO CON LIMITE DE SALTO

Como se comenta en [6] el análisis anterior es válido para el método de Runge-Kutta hasta orden 4. Es por esto que utilizamos el método de Runge-Kutta de orden 4 definido de la siguiente manera. Consideremos la ecuación C.7:

$$(C.34) \quad \frac{du_h}{dt} = L(u_h, t)$$

Así el método de Runge-Kutta de orden 4 es:

- Dado u_h^n calculamos

$$\begin{aligned}k_1 &= L(u_h^n, t^n) \\k_2 &= L(u_h^n + \frac{1}{2} dt k_1, t^n + \frac{1}{2} dt) \\k_3 &= L(u_h^n + \frac{1}{2} dt k_2, t^n + \frac{1}{2} dt) \\k_4 &= L(u_h^n + dt k_3, t^n + dt)\end{aligned}$$

- Definimos

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \frac{dt}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

De esta forma el algoritmo para calcular la solución numérica de la ecuación hiperbólica dada la condición inicial u_0 y tiempo final N .

1. Se toma $u_h^0 = u_0$.
2. Para $n = 0, \dots, N - 1$:
 - a) Calculamos v_h^{n+1} con el metodo de Runge-Kutta de orden 4
 - b) Se calcula el limite de salto y se asigna el valor de la función:

$$u_h^{n+1} = \Pi^1 v_h^{n+1}$$

A partir del desarrollo anterior se puede demostrar (ver [6]) el siguiente teorema.

Teorema 6. *El algoritmo definido anteriormente garantiza que la sucesion u_h converge a la solucion de entropia del problema original B.1 en $L^\infty(0, T; L^1)$ cuando $h \rightarrow 0$.*

C.4. ESQUEMA NUMERICO PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE SEDIMENTO POR TUBERIA

La ecuación de Exner para una tubería tiene la siguiente forma:

$$(C.35) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g(u) \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 & x \in [x_L, x_R] = \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Inspirado en el esquema para la canaleta rectangular se propone la siguiente formulación variacional discreta para C.35:

$$(C.36) \quad \int_{D_k} \frac{\partial u_h}{\partial t} \phi_n(x) dx + \int_{D_k} (f * g)(u_h) \frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x} dx + \int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial g(u_h)}{\partial x} \phi_n(x) dx = -[\phi_n(x)(f * g)^*]_{x_k^l}^{x_k^r}$$

Para aproximar el término $\int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial g(u_h)}{\partial x} \phi_n(x) dx$ consideramos el caso en que $N_p = 1$ y $g \simeq g_h$ donde:

$$g_h^k(u_h(x, t)) = \sum_{i=1}^{N_p} g(u_h^k(x_i, t)) \phi_i^k(x)$$

De esta forma:

$$\frac{\partial g(u_h)}{\partial x} = \sum_{i=0}^1 g(u_h^k(x_i, t)) \frac{\partial \phi_i^k}{\partial x}$$

Así:

$$\begin{aligned} \int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial g(u_h)}{\partial x} \phi_n(x) dx &= \sum_{i=0}^1 g(u_h^k(x_i, t)) \int_{D_k} f(u_h) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 g(u_h^k(x_i, t)) f(u_h^k(x_j, t)) \int_{D_k} \phi_j(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \phi_n(x) dx \\ &= \left(-\frac{1}{2} g(u_h^k(x_l^k, t)) + \frac{1}{2} g(u_h^k(x_r^k, t)) \right) \sum_{j=0}^1 f(u_h^k(x_j, t)) \int_{D_k} \phi_j(x) \phi_n(x) dx \end{aligned}$$

Donde $\int_{D_k} \phi_j(x) \phi_n(x) dx = M_{nj}^k$. Llamando $c_h^k = -\frac{1}{2} g(u_h^k(x_l^k, t)) + \frac{1}{2} g(u_h^k(x_r^k, t))$ el problema matricial se escribe como:

$$(C.37) \quad M^k \frac{d\vec{u}_h^k}{dt} + S^k \vec{f}_{g_h}^k + c_h^k M^k \vec{f}_h^k = \vec{f}_{g^*}^k \phi^k$$

Donde

$$\vec{u}_h = [u_h(x_l^k), u_h(x_r^k)]$$

$$\vec{f}_h^k = [f_h(u_h(x_l^k)), f_h(u_h(x_r^k))]$$

$$\vec{f}_{g_h}^k = [(fg)_h(u_h(x_l^k)), (fg)_h(u_h(x_r^k))]$$

$$\vec{f}_{g^*}^k \phi^k = [(fg)^*(u_h(x_r^k)) \phi_1^k(x_r^k) - (fg)^*(u_h(x_l^k)) \phi_1^k(x_l^k), (fg)^*(u_h(x_r^k)) \phi_2^k(x_r^k) - (fg)^*(u_h(x_l^k)) \phi_2^k(x_l^k)]$$

C.4.1. ALGORITMO PARA EL TRANSPORTE DE SEDIMENTO POR TUBERIA

Al igual que para el problema de la canaleta rectangular del sistema C.37 se obtiene:

$$(C.38) \quad \frac{du_h}{dt} = L_1(u_h, t)$$

En base a esto utilizamos el algoritmo de galerkin discontinuo con limite de salto: Dada la condicion inicial u_0 y tiempo final N . De esta forma el algoritmo para calcular la solución numérica de la ecuación hiperbólica dada la condición inicial u_0 y tiempo final N .

1. Se toma $u_h^0 = u_0$.
2. Para $n = 0, \dots, N - 1$:

a) Calculamos v_h^{n+1} con el metodo de Runge-Kutta de orden 4

b) Se calcula el limite de salto y se asigna el valor de la función:

$$u_h^{n+1} = \Pi^1 v_h^{n+1}$$

Es importante notar que a pesar de que el algoritmo entrega una solución al problema no es posible asegurar que esta solución es la físicamente correcta solo apartir del algoritmo. Sin embargo, al comparar los resultados con lo de la canaleta rectangular se confirma empiricamente que la solución entregada por este metodo corresponde a la solución correcta.

Apéndice D

PROBLEMA DE RIEMANN

Consideramos la ecuación B.1 con la siguiente condición inicial

$$(D.1) \quad u(x,0) = \begin{cases} u_r & x < 0 \\ u_l & x > 0 \end{cases}$$

A este problema se le denomina problema de Riemann 1-d (ver [9]) y se caracteriza por ser uno de los cuales se conoce una solución de entropía explícita. A continuación se presenta la solución al problema de Riemann y se usa como test para los métodos numéricos presentados en el apéndice C.

Consiremos la función f del problema B.1 es uniformemente convexa y \mathcal{C}_2 y denotamos $G = (f')^{-1}$ (la inversa de la derivada). Notemos que la existencia de la inversa viene dada del hecho que $f' > 0$.

Teorema 7. *Caracterización de Soluciones del Problema de Riemann*

1. Si $u_l > u_r$, la única solución de entropía del problema de Riemann es:

$$(D.2) \quad u(x,t) = \begin{cases} u_r & x < st \\ u_l & x > st \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

Donde s es la parametrización de la discontinuidad dada por:

$$s = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}$$

2. Si $u_l < u_r$, la única solución del problema de Riemann es:

$$(D.3) \quad u(x,t) = \begin{cases} u_r & x < f'(u_l)t \\ G\left(\frac{x}{t}\right) & f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_l & x > f'(u_r)t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

Demostración

1. En el caso $u_l > u_r$ es claro que la solución definida por D.2 cumple con la formulación débil B.5. Además notemos que la condición de Rankine-Hugoniot se cumple en el sentido de:

$$s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

por el teorema 4, por esto y dado que $u_l > u_r$, se tiene que u es solución de entropía y además es única (por definición).

2. En el caso que $u_l < u_r$ para verificar que u definida por D.3 es solución del problema de Riemann notemos primero que si definimos u de la siguiente forma:

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$$

Calculando:

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= u_t + F'(u)u_x \\ &= -v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{x}{t^2} + f'(v)v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} \\ &= v'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}\left(f'(v) - \frac{x}{t}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando v por la función G tenemos que $f'(v(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$ y asumiendo que G' es acotada tenemos que $u(x, t) = G(\frac{x}{t})$ resuelve la ecuación para $tf'(u_l) < x < tf'(u_r)$. Notemos que si $\frac{x}{t} = f'(u_l)$ entonces $G(\frac{x}{t}) = u_l$ y si $\frac{x}{t} = f'(u_r)$ entonces $G(\frac{x}{t}) = u_r$. Por lo tanto u definida por D.3 es continua. Por esto es fácil verificar que u definida por D.3 es una solución débil del Problema de Riemann. Notemos además que podemos suponer que G es una función Lipschitz continua por lo cual:

$$u(x+z, t) - u(x, t) = G\left(\frac{x+z}{t}\right) - G\left(\frac{x}{t}\right) \leq Lip(G)\frac{z}{t}$$

cuando $tf'(u_l) < x < tf'(u_r)$. Así, por la condición B.16, u es la solución de entropía.

□

Para el caso de la ecuación de Exner se considera la condición inicial:

$$(D.4) \quad \eta(x, 0) = \begin{cases} \eta_r & x < 0 \\ \eta_l & x > 0 \end{cases}$$

Con esto:

$$(D.5) \quad s = \frac{\alpha q_f}{(h - \eta_l)(h - \eta_r)}$$

Además

$$(D.6) \quad f'(\eta) = \frac{\alpha q_f}{(h - \eta)^2}$$

Con lo cual:

$$(D.7) \quad G\left(\frac{x}{t}\right) = h - \sqrt{\frac{\alpha t}{x}}$$

De esta forma, reemplazando en D.2 y D.3, la solución de la ecuación de Exner ?? con la condición inicial D.4 es:

- Caso $\eta_l > \eta_r$:

$$(D.8) \quad \eta(x, t) = \begin{cases} \eta_l & x < st \\ \eta_r & x > st \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

- Caso $\eta_l < \eta_r$:

$$(D.9) \quad \eta(x,t) = \begin{cases} \eta_l & x < f'(\eta_l)t \\ h - \sqrt{\frac{\alpha t}{x}} & f'(\eta_l)t < x < f'(\eta_r)t \\ \eta_r & x > f'(\eta_r)t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

Para los casos anteriores se calcula la solución numérica utilizando el esquema presentado en la sección C, con $N = 60$ y $\alpha = q_f = 1$ y un altura $h = 3$.

- Para el caso $\eta_l > \eta_r$:

$$(D.10) \quad \eta(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

La solución de la ecuación de Exner es:

$$(D.11) \quad \eta(x,t) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{6}t \\ 0 & x > \frac{1}{6}t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

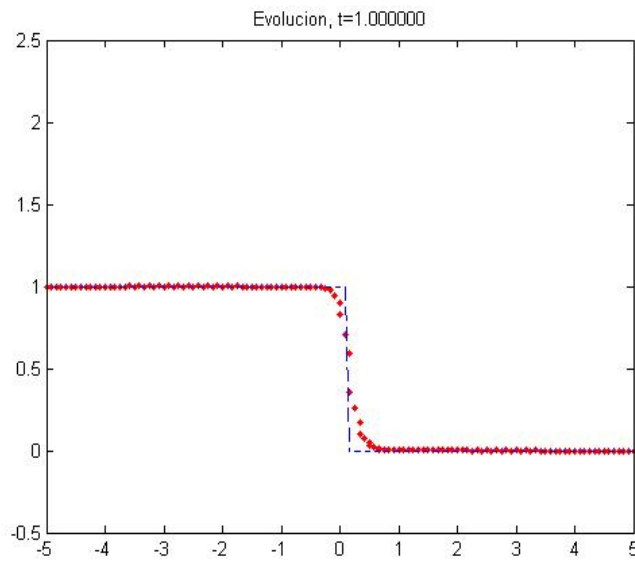


Figura D.1: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo)

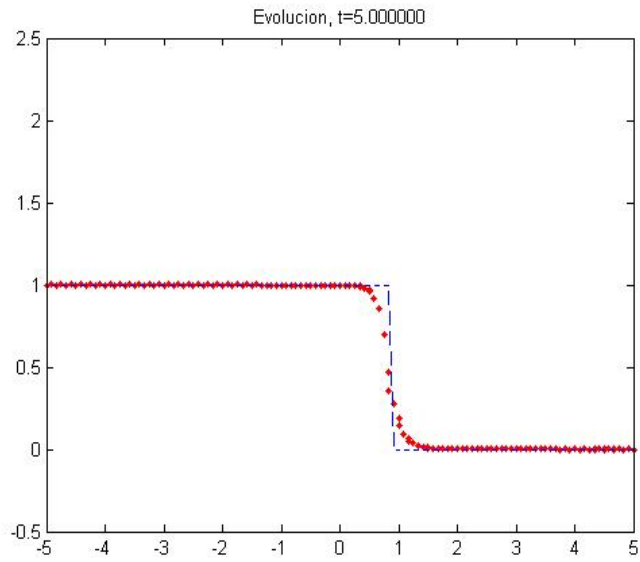


Figura D.2: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo)

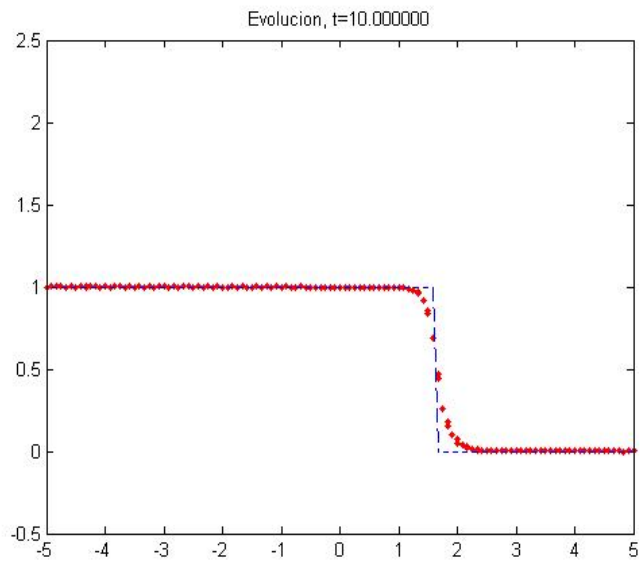


Figura D.3: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo)

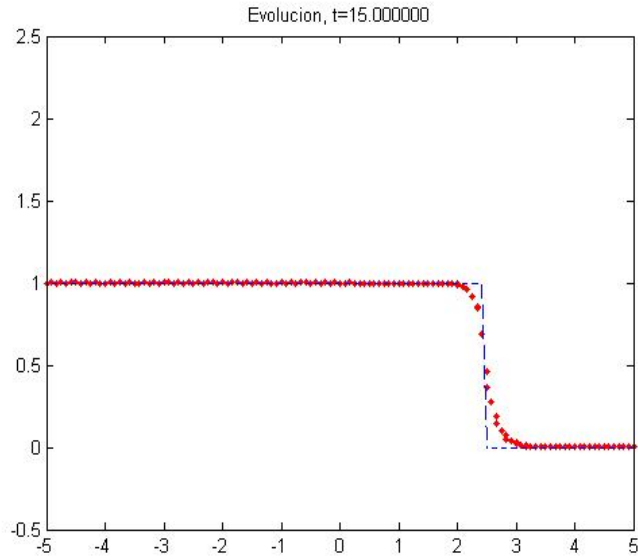


Figura D.4: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.11 (azul) y la solución numérica (rojo)

- Para el caso $\eta_l < \eta_r$ escogemos:

$$(D.12) \quad \eta(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

La solución de la ecuación de Exner es:

$$(D.13) \quad \eta(x,t) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{9}t \\ 3 - \sqrt{\frac{t}{x}} & \frac{1}{9}t < x < \frac{1}{4}t \\ 1 & x > \frac{1}{4}t \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

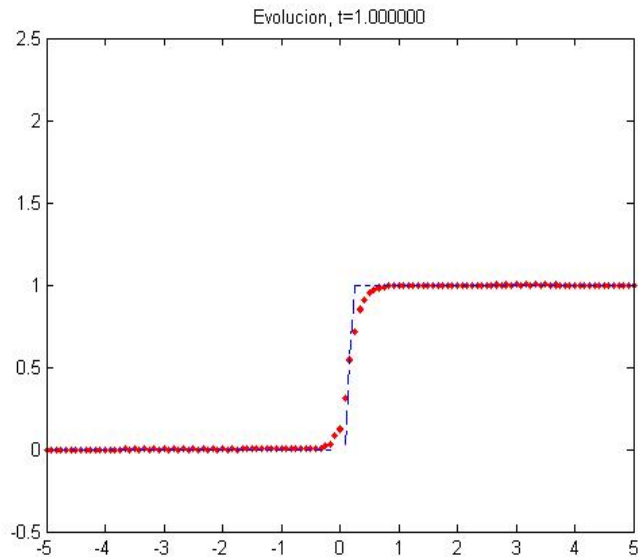


Figura D.5: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo)

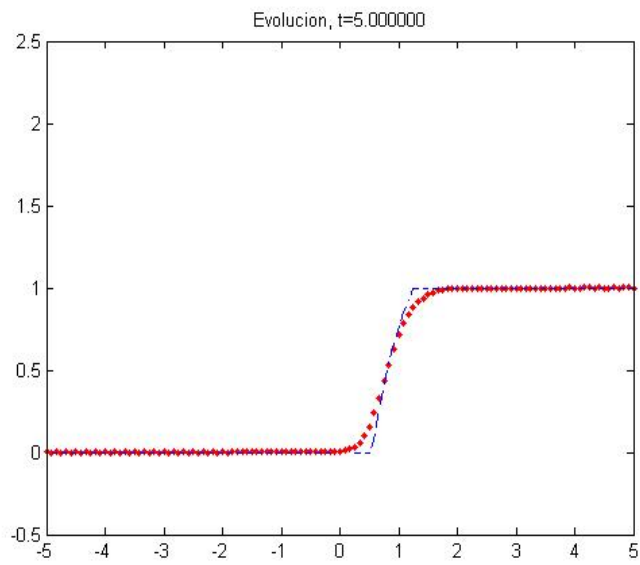


Figura D.6: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo)

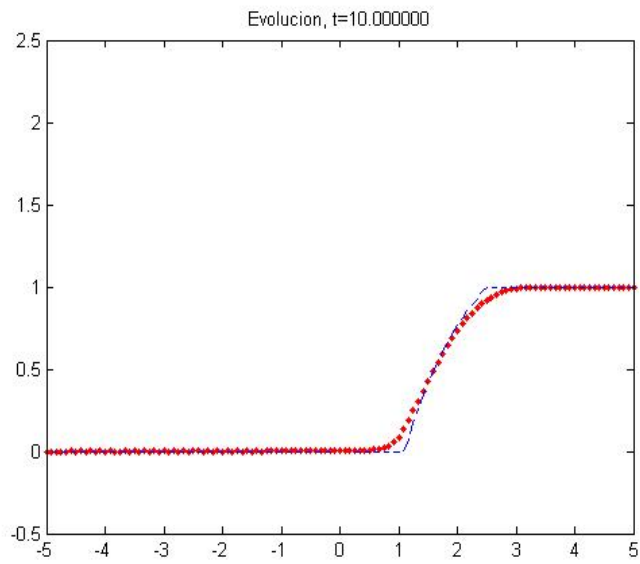


Figura D.7: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo)

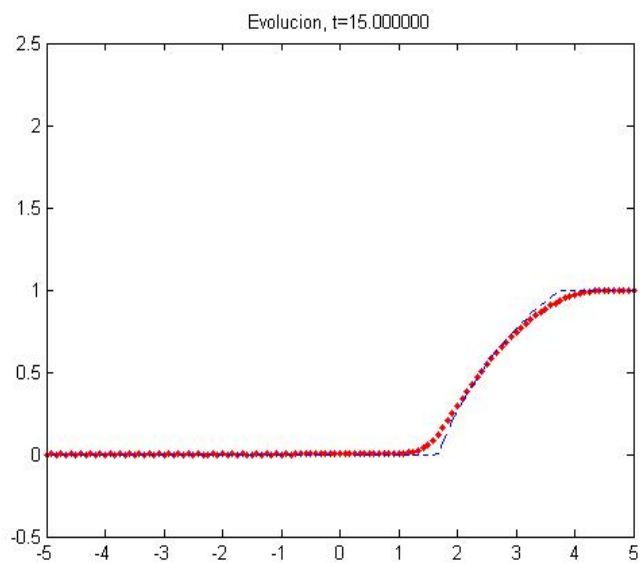


Figura D.8: Gráfico de la solución de la ecuación de Exner D.13 (azul) y la solución numérica (rojo)

Apéndice E

DEDUCCION DE LA FORMULACION DEBIL PARA EL REOMETRO DE PALETAS

E.1. FORMULACION DEBIL PARA FLUIDO NEWTONIANO

Se quiere resolver el problema:

Encontrar $(u, p_m) \in H^1(V)^3 \times L^2(V)$ tal que

$$(E.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} &= -\nabla p_m + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{v} \in (H_0^1(V))^3$ y multipliquemos la ecuación (E.5) por \mathbf{v} e integremos sobre V :

$$(E.2) \quad \begin{aligned} 2 \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dx = \\ - \int_V \nabla p_m \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_V \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \end{aligned}$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla p_m \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\partial V} p_m \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dx - \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx \\ &= - \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx &= 2 \int_V \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx \\ &= 2 \int_{\partial V} D_{ij}(\mathbf{u}) \mathbf{v}_i \hat{\mathbf{n}}_j dx - 2 \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx \\ &= - \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx - \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} dx \\ &= -2 \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx. \end{aligned}$$

Entonces, (E.2) se escribe como:

$$\begin{aligned} 2 \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \text{pos}) \cdot \mathbf{v} dx + \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx \\ = \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(V))^3. \end{aligned}$$

Sea $q \in L^2(V)$, entonces la condición de incompresibilidad queda:

$$\int_V q \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V).$$

Para resolver el problema discretizamos el termino de convección

$$(E.3) \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n$$

Donde \mathbf{u}^n es un valor inicial para la velocidad que es dado y \mathbf{u}^{n+1} la incognita a buscar. El resto de los terminos pasa a tener \mathbf{u}^{n+1} con lo cual el problema E.1 pasa a ser una sucesión de problemas lineales.

Algoritmo 3 Algoritmo de Punto Fijo

$$\mathbf{u}^0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^2$$

$$p^0 \leftarrow 0$$

$$k \leftarrow 0$$

$$err \leftarrow \infty$$

while $err \geq \varepsilon_0$ **do**

$(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1})^t \leftarrow$ la solución del problema

$$(E.4) \quad \begin{aligned} & 2 \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}^{n+1}) \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{v} dx \\ & + \int_V (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dx + \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}^{n+1}) : D(\mathbf{v}) dx \\ & = \int_V p \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(V))^2. \end{aligned}$$

$$err = \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|$$

$$k \leftarrow k + 1$$

end while

E.2. FORMULACION DEBIL PARA FLUIDO BINGHAM

Se quiere resolver el problema:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0$$

$$(E.5) \quad \begin{aligned} 2\text{Bi}\vec{\Omega} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p_m + \frac{1}{\text{Re}} (\Delta \mathbf{u} + \text{Bi} \nabla \cdot (D(\mathbf{u})/|D(\mathbf{u})|)) \Leftrightarrow |D(\mathbf{u})| \neq 0, \\ D(\mathbf{u}) &= 0 \Leftrightarrow |D(\mathbf{u})| = 0, \end{aligned}$$

donde $|D(\mathbf{u})| = \sqrt{D(\mathbf{u})_{ij} D(\mathbf{u})_{ij}}$.

Sea $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^3$ y multipliquemos la ecuación (E.5) por \mathbf{v} e integrando:

$$(E.6) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = \\ & - \int_{\Omega} \nabla p_m \cdot \mathbf{v} dx + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \sqrt{2} \frac{\text{Bi}}{\text{Re}} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{v})|} \right) \cdot \mathbf{v} dx \end{aligned}$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla p_m \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\partial V} p_m \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dx - \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx \\ &= - \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_V \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx &= 2 \int_V \nabla \cdot (D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx \\ &= 2 \int_{\partial V} D_{ij}(\mathbf{u}) \mathbf{v}_i \hat{\mathbf{n}}_j dx - 2 \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx \\ &= - \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx - \int_V D_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} dx \\ &= -2 \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \left(\frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \right) \mathbf{v} dx &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \right) \mathbf{v}_i dx \\ &= \int_{\partial V} \frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \mathbf{v}_i \hat{\mathbf{n}}_j dx - \int_V \frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx \\ &= - \int_V \frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_V \frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} dx - \frac{1}{2} \int_V \frac{D_{ij}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_V \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} : D(\mathbf{v}) dx\end{aligned}$$

Entonces, (E.6) se escribe como:

$$\begin{aligned}2Bi \int_V \vec{\Omega} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \int_V (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx + \sqrt{2} \frac{Bi}{\text{Re}} \int_V \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} : D(\mathbf{v}) dx \\ = \int_V p_m \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(V))^3.\end{aligned}$$

Sea $q \in L^2(V)$, entonces la condicion de incompresibilidad queda:

$$\int_V q \nabla \cdot \mathbf{u} dx = 0 \quad \forall q \in L^2(V).$$

Es posible demostrar ([37]) que la formulación variacional anterior es equivalente a encontrar $\mathbf{u} \in (H_0^1(V))^3$ y $p \in L^2(V)$ tal que se cumple la siguiente inecuación variacional

$$\begin{aligned}(E.7) \quad & a_1(u, v - u) + a_2(u, v - u) + \\ & b_1(u, u, v) + b(v - u, p) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(V))^3 \\ & b(u, q) = 0 \quad \forall q \in L(V)^2\end{aligned}$$

Donde se define a forma trilineal

$$b_1(\cdot, \cdot) : (H_0^1(V))^3 \times (H_0^1(V))^3 \times (H_0^1(V))^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad b_1(u, v, w) = \int_V (u \cdot \nabla) v \cdot w dx$$

las formas bilineales

$$\begin{aligned}
a_1(\cdot, \cdot) : (H_0^1(V))^3 \times (H_0^1(V))^3 &\rightarrow \mathbb{R} & a_1(u, v) &= \frac{2}{\text{Re}} \int_V D(u) : D(v) dx \\
a_2(\cdot, \cdot) : (H_0^1(V))^3 \times (H_0^1(V))^3 &\rightarrow \mathbb{R} & a_2(u, v) &= 2 \int_V \vec{\Omega} \times v \cdot v dx \\
b(\cdot, \cdot) : (H_0^1(V))^3 \times L(V)^2 &\rightarrow \mathbb{R} & b(v, p) &= 2 \int_V p_m \cdot \text{div}(v) dx
\end{aligned}$$

y el operador

$$j(\cdot) : (H_0^1(V))^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad j(u) = \frac{\sqrt{2}Bi}{\text{Re}} \int_V D(u) \frac{1}{H} dx$$

Se demuestra en [37] que la formulacion E.7 es equivalente a encontrar $\mathbf{u} \in (H_0^1(V))^2$, $p \in L^2(V)$ y $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\begin{aligned}
(E.8) \quad & a_1(\mathbf{u}, v - u) + a_2(\mathbf{u}, v - u) + \\
& b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, v) + b(v - \mathbf{u}, p) + b_2(\mathbf{u} - v, \lambda) = \langle f, v - \mathbf{u} \rangle \quad \forall v \in (H_0^1(V))^2 \\
& b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L(V)^2 \\
& b_2(\mathbf{u}, \eta - \lambda) \leq 0 \quad \forall \eta \in \Lambda
\end{aligned}$$

Donde

$$\Lambda = \{ \gamma : (L^2(V))^{3 \times 3} : |\gamma| = 1 \text{ c.t.p. en } V \}.$$

y se define el operador bilineal

$$b_2(\cdot, \cdot) : (H_0^1(V))^2 \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \quad b_2(v, \lambda) = \frac{\sqrt{2}BI}{\text{Re}} \int_V \lambda : D(v) dx$$

Para resolver el problema E.8 se utiliza el metodo tipo Uzawa descrito en ([37]) donde se demuestra que la equivalencia entre el problema E.8 y encontrar $\mathbf{u} \in (H_0^1(V))^2$, $p \in L^2(V)$ y $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\begin{aligned}
(E.9) \quad & a_1(\mathbf{u}, v) + a_2(\mathbf{u}, v) + b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, v) + b(v, p) + b_2(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in (H_0^1(V))^2 \\
& b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in L(V)^2 \\
& \lambda = P_\Lambda(\lambda + rD(\mathbf{u}))
\end{aligned}$$

donde P_Λ es el operador de proyeccion sobre el espacio Λ .

Al igual que en el caso newtoniano se procede a resolver el sistema mediante un algoritmo de punto fijo donde los terminos no lineales se discretizan de la siguiente forma:

$$(E.10) \quad b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}, v) = b_1(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n, v)$$

La igualdad

$$(E.11) \quad \lambda = P_\Lambda(\lambda + rD(\mathbf{u}))$$

pasa a ser

$$(E.12) \quad \lambda^{n+1} = P_\Lambda(\lambda^n + rD(\mathbf{u}^n))$$

y el termino lienal $b_2(v, \lambda) = b_2(v, \lambda^n)$ y el resto de los terminos queda con \mathbf{u}^n

Algoritmo 4 Algoritmo Uzawa

$$\lambda_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\mathbf{u}^0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^2$$

$$p^0 \leftarrow 0$$

$$k \leftarrow 0$$

$$err \leftarrow \infty$$

while $err \geq \varepsilon_0$ **do**

$(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1})^t \leftarrow$ la solución del problema

$$\begin{aligned} & a_1(\mathbf{u}^{k+1}, v) + a_2(\mathbf{u}^{k+1}, v) + \\ & b_1(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, v) + b(v, p^{k+1}) + b_2(v, \lambda^k) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0(V)^2 \\ & b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0 \quad \forall q \in L(V)^2 \end{aligned}$$

$$\lambda_{k+1} \leftarrow P_\Lambda(\lambda_k + rD(\mathbf{u}))$$

$$err = \|\lambda_{k+1} - \lambda_k\|$$

$$k \leftarrow k + 1$$

end while
