



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

GEMELOS DE ÁRBOLES CON UNA CANTIDAD CONTABLE DE ENDS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO.

SERGIO ANDRÉS ARANEDA GALARCE

PROFESOR GUÍA:  
MAYA STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ  
MARCOS KIWI KRAUSKOPF

SANTIAGO DE CHILE  
ABRIL 2013



RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: SERGIO ANDRÉS ARANEDA GALARCE  
FECHA: 04/03/2013  
PROF. MAYA J. STEIN

## GEMELOS DE ÁRBOLES CON UNA CANTIDAD CONTABLE DE *ENDS*.

Dos grafos son gemelos si son mutuamente subgrafos entre sí. En grafos finitos la única forma de que dos grafos sean mutuamente subgrafos entre sí es que sean isomorfos. Sin embargo, en grafos infinitos existen grafos que se incluyen mutuamente y no isomorfos entre sí. Bonato y Tardif [3] se preguntaron por la cantidad de gemelos que puede tener un grafo. La conjetura de alternativa en árboles plantea que si un árbol tiene gemelos no isomorfos a él, entonces tiene infinitos gemelos. En el presente trabajo se presenta una demostración de la conjetura para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends.

Se comienza realizando una revisión general de los conceptos y teoremas de grafos infinitos. Se introducen los conceptos básicos de grafos infinitos (*rayo*, *doble rayo*, *end* etc). Luego se estudia también una topología definible para un grafo infinito, que describe de mejor manera el grafo y sus ends que es de relevancia en la demostración dada posteriormente.

Posteriormente se estudian los conceptos, definiciones y teoremas propios de la conjetura. Se revisarán los trabajos hechos hasta ahora, las ideas que han surgido a partir de intentos para demostrar la conjetura y la descripción de un grafo con propiedades interesantes.

A continuación se estudia en detalle la relación subgrafo en grafos infinitos. Se introduce el concepto de *morfismo* y se muestra su relación con los conceptos de subgrafo e isomorfismo. También se estudia el grupo de automorfismos del doble rayo y de árboles finitos. Se mostrará además una forma de definir isomorfismos entre árboles infinitos localmente finitos a partir de *isomorfismos locales*. También se estudiará la construcción de isomorfismos definidos por componentes.

Luego, se demuestra la conjetura para árboles con una cantidad finita de ends. Primero se demuestra la conjetura para árboles con exactamente un end, luego con exactamente dos ends y finalmente para árboles con más de 2 ends.

Finalmente, se demuestra la conjetura para árboles con una cantidad infinita contable de ends. Se introduce el concepto de *centro-end* y a partir de éste se demostrará una extensión de un teorema dado por Halin [7] para árboles con una cantidad contable de ends. Este resultado fue dado por Polat y Sabidussi [9] para automorfismos, se presenta una demostración alternativa que también abarca endomorfismos. Usando esta extensión se demuestra la conjetura. Se define el concepto de *ecuación gráfica*, que junto con el teorema extendido de Halin permiten demostrar la conjetura en el caso más difícil.



## AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer profundamente a todas las personas que han colaborado con mi crecimiento y final resultado de esta memoria. Por supuesto primeramente a mi familia, que dentro de sus limitaciones han sabido orientarme, darme sus consejos, amor y recursos. Esta memoria no habría sido hecha si mi Mamá no me hubiera motivado por entrar al Instituto, si mi Papá no me hubiera enseñado a escribir mi primera palabra, “Sol”; si mi hermano no hubiera jugado los juegos que inventaba. Muchas gracias, los amo mucho.

También a todos mis compañeros de generación, con quienes pude compartir buenos momentos y más de una mano me tendieron. Esta memoria no sería tampoco sin la solidaridad de la comunidad DIM. Especial mención a Orlando Rivera, más conocido por todos como “Orly”, quien me enseñó a apreciar las matemáticas y llevarlas a un nivel superior. Gracias Orly. También a Nicolás Hernández y Emilio Vilches, quienes han sido buenos compañeros y modelos a seguir totalmente, mi admiración y cariño para ellos, son lo más grande cabros :) . En particular para esta memoria Emilio aportó con sus siempre excelentes tips de latex; y Orly con el archivo de su memoria, que usé como plantilla para escribir la mía.

También, quisiera hacer mención a Valentina Giaconi, Paulina Araya y Alex Fuentealba, con quienes pude compartir buenos momentos y experiencias invaluable en el CFG de razonamiento matemático en la escuela. Así mismo, quisiera agradecer a la profesora María Leonor Varas por darme la oportunidad de participar en la ayudantía de ese ramo. Sin duda, una de las experiencias más gratificantes de mi paso por la universidad.

Quisiera agradecer también a Felipe Troncoso, mi gran amigo, con quien pude compartir grandes momentos durante el paso por la universidad. Gracias pitch por tu amistad. También hago mención de mis amigos Hijos de Bello, a quienes pude conocer en el paso de estos años y han sido realmente un aporte a mi vida. Nicolás Messina, quien conoce (y enfrenta a la cara) mi corazón. Daniela Vera y su ímpetu maravilloso, su gran actitud. Maritza Casanova, quien me aconsejó en mis momentos más oscuros. Alejandro Dorna, quien me enseñó a conocer mejor la universidad. Ignacio Arenas, quien me acogió en momentos difíciles y siempre ha estado ahí para apoyarme. Y tantos más, conversaciones, carretes, ideas, sueños. Muchas gracias a cada uno.

También quisiera agradecer a Nueva Izquierda Universitaria, con quienes pude participar y aportar un pequeño granito de arena a la universidad. Admiro muchísimo su trabajo y actitud. Lo más grande cada uno de ellos.

Por último, quisiera agradecer a mi profesora guía Maya Stein. Gracias Maya por toda tu buena onda, comprensión, aportes, siempre mano a mano en las demostraciones. Sin duda esta memoria y todos sus resultados son tanto míos como tuyos. También a los profesores de la comisión Martín Matamala y Marcos Kiwi, quienes me enseñaron a hacer un trabajo de calidad y ver mis falencias. Muchas gracias, su aporte ha sido muy valioso.



# Tabla de contenido

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción.</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Grafos infinitos.</b>   | <b>10</b> |
| 2.1. Definiciones básicas. . . . .  | 10        |
| 2.2. Resultados clásicos. . . . .   | 12        |
| 2.3. Topología en grafos infinitos. . . . .   | 13        |
| <b>3. Teoremas sobre la conjetura de alternativa en árboles.</b>  | <b>15</b> |
| 3.1. Conjeturas de Tyomkyn. . . . .   | 18        |
| 3.1.1. El árbol de Tyomkyn. . . . .   | 19        |
| 3.2. Conjeturas de Tateno. . . . .  | 20        |
| <b>4. Endomorfismos, automorfismos e isomorfismos en grafos infinitos.</b>  | <b>21</b> |
| 4.1. Endomorfismos de grafos infinitos. . . . .   | 21        |
| 4.2. Automorfismos del rayo y doble rayo. . . . .   | 23        |
| 4.3. Isomorfismos de grafos infinitos. . . . .  | 24        |
| 4.3.1. Isomorfismos locales y sucesiones de grafos anidados. . . . .  | 25        |
| 4.3.2. Isomorfismos por componentes. . . . .  | 33        |
| <b>5. Demostración de la Conjetura de Alternativa en Árboles, para árboles localmente finitos con un número finito de ends.</b>     | <b>39</b> |
| 5.1. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^1$ . . . . .   | 40        |
| 5.2. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^2$ . . . . .   | 48        |
| 5.3. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^k$ , con $3 \leq k < \infty$ . . . . .   | 59        |
| <b>6. Demostración de la conjetura de alternativa en árboles para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends.</b> | <b>65</b> |
| 6.1. Centros en grafos infinitos. . . . .   | 66        |
| 6.2. Extensión del Teorema Elementos Fijos. . . . .   | 72        |
| 6.3. Demostración Teorema. . . . .  | 74        |
| 6.3.1. Ecuaciones gráficas. . . . .   | 78        |
| 6.4. Fin de la demostración. . . . .  | 82        |

|   |           |
|---|-----------|
| 6.4.1. Primer caso: Árboles con un total end y que poseen un rayo base-maximal. . . . . | 82        |
| 6.4.2. Segundo caso: Árboles con un total end y doble rayo base-maximal. . . . .        | 86        |
| <b>7. Conclusiones.</b>   | <b>91</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>93</b> |

# Índice de figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1. | Mapa de Königsberg que inspira el problema de los 7 puentes, que consiste en buscar una forma de recorrer todos los puentes de la ciudad partiendo desde alguna zona volviendo al punto de origen sin pasar más de una vez por el mismo puente. . . . .  | 2  |
| 1.2. | Multigrafo asociado a la conectividad de las zonas del mapa. Cada vértice representa una zona de la ciudad. Cada arista corresponde a un puente. . . .   | 2  |
| 1.3. | (a) Caminos de largo $n$ , $n \geq 1$ enlazados a través de un primer vértice común. (b) Caminos de largo $n$ , $n \geq 2$ enlazados a través de un primer vértice común. Se ha achurado en cada grafo la inmersión del gemelo a su lado. Nótese que ambos grafos son gemelos pero no son isomorfos. . . . .   | 5  |
| 1.4. | Un doble rayo $Z$ , con $V(Z) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ , $E(Z) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\}$ . No tiene gemelos propios. . . . .  | 7  |
| 1.5. | (a) Un grafo $G$ con $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ , $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_i : i \in \mathbb{N}\}$ . (b) Removiendo un número finito de hojas (salvo la primera) se obtiene un gemelo, distinto para cada elección. En la figura se muestra un ejemplo, se ha achurado en cada grafo la inclusión del gemelo que se muestra en la figura. Este grafo tiene contable cantidad de gemelos. . . . .           | 7  |
| 1.6. | Un grafo $G$ con $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ , $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_{0,i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{y_{i,j} y_{i+1,j-1} : i \in \mathbb{N}\}$ . Removiendo un número arbitrario de hojas se obtiene un gemelo. En la figura se muestra un ejemplo, se ha achurado en cada grafo la inclusión del gemelo que se muestra en la figura. Este grafo tiene no contable cantidad de gemelos. . . . . | 7  |
| 3.1. | Sea $T$ el grafo de la figura. Al borrar la hoja $x_1$ , se obtiene un grafo que sigue siendo isomorfo a $T$ . . . . .   | 19 |
| 4.1. | (a) El grafo es formado por caminos de largo $n$ , con $n \geq 1$ que comparten su primer vértice. (b) El grafo es formado por caminos de largo $n$ , con $n \geq 1$ que comparten su primer vértice, más un rayo que también comparte su primer vértice con los caminos. Ambos grafos son localmente isomorfos pero no son isomorfos. . . . .   | 27 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4.2. | En la figura se muestra el inicio del árbol binario inverso. Su definición formal es la siguiente: sea $J$ el conjunto de palabras infinitas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ que terminan en una secuencia infinita de ceros. Sea $z$ la secuencia infinita de ceros. Sea $J'$ el conjunto $\{(x, n) : x \in J, n \in \mathbb{N}\}$ . El conjunto de vértices del árbol binario es $J'$ y sus aristas corresponden a los pares $(x, n)(y, m)$ tales que $m = n + 1$ y $x = 0y$ o $x = 1y$ . Cercano a cada vértice de la figura se muestra el par correspondiente en $J'$ según esta definición. . . . . | 29 |
| 4.3. | En la figura, se muestra como una misma sucesión de grafos anidados puede converger a grafos totalmente distintos. En cada grafo se achura la inmersión del subgrafo antecesor. (a) El grafo límite de la sucesión es el árbol binario. (b) El grafo límite de la sucesión es el árbol binario inverso. . . . .   | 29 |
| 4.4. | La estrella infinita a la que se le van agregando vecinos a sus hojas. Si se reserva cierto vértice al cual nunca se le agrega una hoja, en cada paso se verán los mismos grafos pero en el límite no se obtiene el mismo grafo final. El vértice claro corresponde al vértice reservado. En cada grafo la raíz es el único vértice de grado infinito. . . . .  | 30 |
| 4.5. | Una misma sucesión de grafos, incluso con la relación subgrafo enraizado y con árboles localmente finitos, que posee dos formas de definir la unión. En cada grafo se achura la imagen del subgrafo antecesor, y se achura con un cuadrado la raíz. . . . .   | 30 |
| 4.6. | La zona sombreada es $L$ el grafo base de la descomposición. La definición dada acá para $[T : L](v)$ es válida para árboles finitos o infinitos. . . . .   | 34 |
| 4.7. | La zona sombreada es un doble rayo, base de la descomposición. La componente asociada a un nodo sin vecinos fuera del doble rayo es simplemente un vértice. . . . .   | 35 |
| 5.1. | Ejemplos de grafos acotsup y nacotsup (Definición 5.6). (a) El grafo de la figura es acotsup. (b) El grafo de la figura es nacotsup. Se achura la imagen del grafo vía un endomorfismo propio para poder ver que $T - \phi(T)$ posee infinitas componentes conexas. . . . .   | 42 |
| 5.2. | Sea $T$ el grafo de la figura (parte superior). La mínima cantidad de familias que se puede generar en el es 2. Sin embargo, como todas las componentes límite de sus familias son isomorfas, en $T'$ (grafo de la parte inferior) la mínima cantidad de familias que se pueden engendrar por un endomorfismo propio es 1. En ambos dibujos se achura el rayo que se usa como base de descomposición. . . . .   | 43 |
| 5.3. | La figura representa como se ve un grafo $T'$ que eventualmente sea isomorfo a $D^w$ . En este caso $w = 001$ . En el grafo de la figura se tiene que $\nu'(0) = 4$ y $\nu^*(0) = 6$ . Se define $W$ como el grafo inducido por la intersección entre $V([D^w : R'](r'_{\nu'(0)}))$ y $V([D^w : R^*](r^*_{\nu^*(0)}))$ . A priori no se puede demostrar que $W$ sea el árbol trivial. . . . .   | 44 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.4. | Ejemplos de grafos regulares, acotsup y nacotsup. (a) El grafo es regular. (b) El grafo es irregular y acotsup. (c) El grafo es irregular y nacotsup. Se achura la imagen del grafo vía un endomorfismo propio para poder ver que $T - \phi(T)$ posee infinitas componentes conexas. . . . .  | 51 |
| 5.5. | En la figura se muestra $T$ un árbol irregular y su gemelo $D^w$ con $w = 011$ . El vértice sombreado corresponde al vértice a partir del cual todas las componentes de vértices con índice mayor son componentes límites superiores. Solo sobre la familia donde pertenece este vértice se modifican componentes. . . . .  | 54 |
| 5.6. | $C_v$ es el grafo inducido por los vértices sombreados. . . . .   | 62 |
| 6.1. | El centro $C_3(T)$ corresponde a la zona sombreada. . . . .   | 67 |
| 6.2. | El centro $C_\infty(T)$ corresponde a la zona sombreada. . . . .  | 68 |
| 6.3. | El centro $C_\infty^2(T)$ corresponde a la zona sombreada. . . . .  | 68 |
| 6.4. | Sea $w$ el primer ordinal contable infinito. El centro $C_\infty^w(T)$ es vacío, pero para todo ordinal $k$ menor a $w$ el centro $C_\infty^k(T)$ no es vacío. El centro $C_\infty(T)$ corresponde a la zona sombreada. . . . .   | 68 |
| 6.5. | El árbol de la figura es el árbol binario. El centro $C_\infty(T)$ corresponde a la zona sombreada. $C_\infty(T) = T$ . . . . .   | 69 |
| 6.6. | $P$ son los vértices sombreados en círculo. $a$ y $b$ son los vértices sombreado en cuadrado respectivamente. . . . .   | 79 |
| 6.7. | A la derecha se muestra un ejemplo de ecuación gráfica. $P$ es el conjunto de vértices sombreados con círculo, y la raíz es el vértice sombreado con cuadrado. A la izquierda se presenta $*^4(G, P, r)$ . . . . .  | 79 |
| 6.8. | Figura para $D^w$ con $w = 0011$ . En la figura $\nu'(0) = 4, \nu^*(0) = 6$ . La componente $L_1$ satisface la ecuación gráfica descrita en la demostración. Los vértices achurados por un círculo son el conjunto de enganche, y el achurado por cuadrado la raíz. Nótese que en este ejemplo la última componente modificada corresponde al vértice donde se inicia $R^\cap$ . Esto puede pasar pero no afecta la demostración. El grafo de la parte inferior es el subgrafo de la ecuación gráfica que es usado para demostrar que $L_1$ tiene no contable cantidad de ends. . . . . | 87 |
| 6.9. | Figura para $D^w$ con $w = 001010$ . La ecuación gráfica que se satisface se muestra al medio. Nóte que se está usando el Lema 6.22 y el Lema 6.23 para concluir que $L_1^*$ posee no contable cantidad de ends. . . . .  | 89 |

# Capítulo 1

## Introducción.

En 1734, Euler presenta la solución al problema de los siete puentes de Königsberg usando una representación abstracta de la conectividad de la ciudad (ver Figura 1.1 y 1.2). Cada zona de la ciudad es un nodo o vértice y dos vértices están conectados si se puede pasar de una zona a otra usando uno de los puentes. Con esta forma de definir el problema, Euler construyó el concepto de grafo: un conjunto de vértices o nodos y un conjunto de pares de vértices o también llamados aristas, donde una arista representa la conexión entre dos vértices.

La versatilidad de esta definición ha permitido modelar diversos problemas de ingeniería que se relacionan con la conectividad entre algún tipo de objetos: circuitos, comunicación en redes de computadores, telecomunicaciones, redes sociales etc. Así mismo, en otras áreas de la matemática los grafos son una herramienta útil para su desarrollo. Un ejemplo de ello son los grafos de Cayley, cuya estructura captura información importante sobre el grupo que lo define.

En los problemas que surgen de la ingeniería, los grafos usados generalmente poseen una cantidad finita de vértices. La finitud del conjunto de vértices es la hipótesis base para numerosas partes de la teoría y sus resultados. ¿Qué pasa si se saca esta restricción? ¿Qué similitudes y diferencias hay entre un grafo finito y un grafo con una cantidad infinita de vértices? Estas preguntas dan origen al concepto de grafo infinito. Un *grafo infinito* es un grafo con un conjunto de vértices con cardinalidad infinita. Un grafo infinito es *contable* si su conjunto de vértices es contable, ídem para no contable.

En 1936, el primer libro escrito sobre teoría de grafos *Theorie Der Endlichen Und Unendlichen Graphen* (Teoría de grafos finitos e infinitos en español) escrito por König da cuenta de la presencia de grafos infinitos en la discusión. Sin embargo, su desarrollo no ha tenido el mismo crecimiento que ha tenido la teoría de grafos finitos.

Al permitir un número infinito de vértices surgen ciertos grafos de interés: un *rayo* es un camino que crece infinitamente en una dirección. Se puede definir a partir del conjunto de los naturales como vértices y como aristas cada natural y su sucesor. Un *doble rayo* consiste en dos rayos disjuntos a los que se agrega una arista que une los dos vértices iniciales de cada rayo. Se puede definir también a partir del conjunto de los enteros como vértices y como

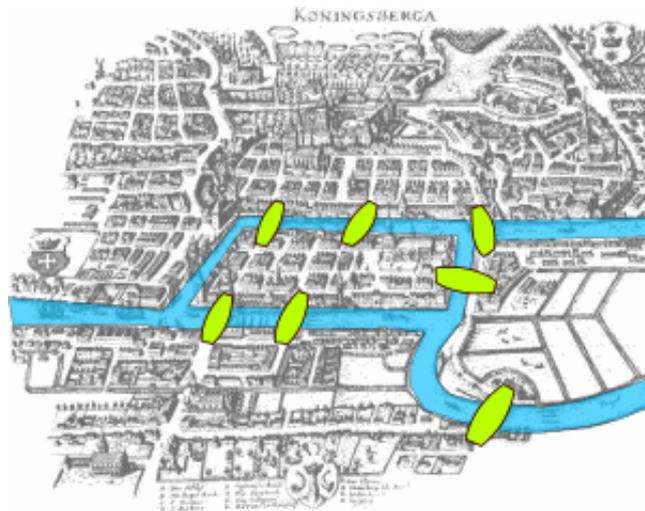


Figura 1.1: Mapa de Königsberg que inspira el problema de los 7 puentes, que consiste en buscar una forma de recorrer todos los puentes de la ciudad partiendo desde alguna zona volviendo al punto de origen sin pasar más de una vez por el mismo puente.

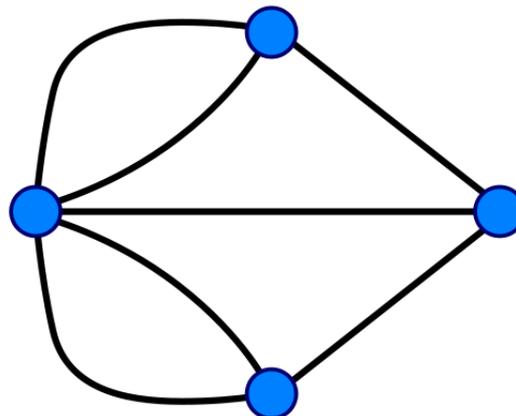


Figura 1.2: Multigrafo asociado a la conectividad de las zonas del mapa. Cada vértice representa una zona de la ciudad. Cada arista corresponde a un puente.

aristas cada entero y su sucesor. Una *estrella* es el grafo formado por un vértice central, un conjunto de vértices exteriores (con cardinalidad arbitraria) y aristas formadas por pares con cada vértice del conjunto exterior y el vértice central. Una *estrella infinita* es una estrella formada por un conjunto infinito de vértices exteriores. La estrella infinita en particular tiene grado infinito en uno de sus vértices, a diferencia del rayo o doble rayo en donde cada vértice tiene grado finito. Un grafo se dice *localmente finito* si el grado de cada vértice es finito. Un grafo se llama *sin rayos* o *rayless* (en inglés) si no posee un rayo como subgrafo. Un resultado intuitivo en grafos infinitos es que un grafo infinito conexo debe poseer un rayo o la subdivisión de una estrella infinita como subgrafo. Es decir, los grafos infinitos sin rayos deben tener vértices de grado infinito (ver Lema 2.20).

Dentro de los grafos infinitos es posible encontrar grafos de propiedades interesantes que no son comparables a algún grafo finito. Uno de ellos es el *grafo de Rado* o *infinite random graph*. Este grafo se puede definir del siguiente modo: se toma un conjunto infinito contable de vértices y se lanza una moneda por cada par de vértices. Si sale cara, se agrega ese par al conjunto de aristas; si sale sello, no se agrega el par. El grafo que se obtendría al lanzar todas las (infinitas) monedas es con probabilidad 1 isomorfo a un mismo grafo, de ahí su nombre grafo aleatorio infinito traducido al español. Rado [10] definió este grafo de otra forma que no requiere usar aleatoriedad. Una propiedad interesante de este grafo es su resistencia a pequeños cambios: si se borra un conjunto finito de vértices o aristas, el grafo que se obtiene sigue siendo isomorfo al grafo de Rado.

Otro grafo interesante y de gran relevancia para nuestro trabajo es el árbol llamado por su inventor como *el árbol que se comporta como una estrella*. En el presente trabajo también será llamado como el *Árbol de Tyomkyn*. Este grafo, construido por Tyomkyn [13] el año 2010, es un árbol localmente finito de grado menor o igual a 3 en cada vértice, que posee la siguiente propiedad: Sea  $T^*$  el árbol que se comporta como una estrella. Para toda hoja  $x$  de  $T^*$  se tiene que  $T^* - x$  es isomorfo a  $T^*$ . Nótese que una estrella infinita posee esta propiedad.

Muchas de las definiciones construidas para grafos finitos pueden ser heredadas en grafos infinitos. Por ejemplo, un grafo (finito) es conexo si para cada par de vértices existe un camino finito que los conecta. Esta definición no necesita que el conjunto de vértices sea finito, luego tiene sentido definir conexidad en grafos infinitos usando exactamente la misma definición. Otro ejemplo es la definición de árbol. Un árbol puede ser definido como un grafo conexo sin ciclos. Esta definición también puede ser satisfecha por un grafo con un conjunto infinito de vértices, por lo que un grafo infinito se llamará árbol si satisface también la misma definición. Lo mismo pasa con subgrafo, coloreamiento, matching, planar etc. Siempre se asumirá que la definición de grafos finitos aplica del mismo modo para grafos infinito a menos que se diga lo contrario.

Así mismo, ciertos resultados en grafos finitos también aplican a grafos infinitos. Por ejemplo, todo grafo finito conexo posee un árbol generador. En grafos finitos es posible demostrar esto construyendo un árbol generador paso a paso, donde la finitud del grafo permite terminar el proceso. En grafos infinitos este enfoque puede fallar ya que, eventualmente, se

puede necesitar más de una tirada de infinitos pasos para construir un árbol generador. Usando lema de Zorn o inducción transfinita es posible salvar este problema (ver [4], p. 206).

Sin embargo, otros resultados de grafos finitos no se heredan. Un ejemplo de esto es la llamada *Unfriendly partition conjecture*: una partición del conjunto de vértices de un grafo en dos conjuntos se llama *unfriendly* si cada vértice tiene igual o más vecinos en la partición donde no pertenece que en la partición donde pertenece. La conjetura señala que todo grafo con contable cantidad de vértices posee una partición unfriendly. Se sabe que todo grafo finito posee una partición unfriendly: basta con tomar una partición que maximice el número de aristas entre los conjuntos de la partición. Sin embargo, es posible mostrar también la existencia de grafos con no contable cantidad de vértices que no poseen una partición unfriendly. El caso contable aún no ha podido ser resuelto (sin embargo, existe una demostración para grafos localmente finitos al menos; ver [4] p.211).

Existen también ciertos conceptos en grafos infinitos que no poseen un símil en grafos finitos. El de mayor relevancia en el área y en el tema de este trabajo es el concepto de *end*. El primero en hablar de ends fue Freudenthal [5], quien en 1931 definió los ends para cierto tipo de espacios topológicos, con un enfoque “desde arriba”. Estos ends son secuencias descendientes  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$  de conjuntos abiertos, conexos, de frontera compacta, tal que  $\bigcap_i \bar{U}_i = \emptyset$ . Estos ends serán llamados como *ends topológicos*. En 1964, Halin [6] independientemente introdujo su concepto de ends para grafos infinitos. Éstos son definidos “desde abajo”, como clases de equivalencia de rayos en el grafo, donde dos rayos son equivalentes si ningún conjunto finito de vértices separa ambos rayos. Estos ends serán llamados como *ends grafo-teóricos*. Se verá en el capítulo 2 que todo grafo infinito posee un espacio topológico asociado. En grafos localmente finitos, los ends topológicos (en el espacio topológico asociado al grafo) coinciden con los end grafo-teóricos definidos por Halin. Sin embargo, en grafos no localmente finitos esto ya no sucede. En el presente trabajo, cuando se hable de ends se hablará de ends grafo-teóricos. Intuitivamente, los ends son los puntos “hacia infinito” que existen en un grafo. En particular, un rayo posee un end y un doble rayo posee dos ends.

¿Qué cardinalidad puede tener el conjunto de ends? No es difícil encontrar ejemplos de grafos con una cantidad contable de ends. De hecho existen ejemplos hasta con una cantidad no contable de ends. El ejemplo clásico es el *árbol binario*, que se define de la siguiente manera:  $\{0, 1\}^*$  es conjunto de vértices, y su conjunto de aristas está formado por pares de la forma  $\{w, w1\}$  ó  $\{w, w0\}$ , donde  $w$  es una palabra de  $\{0, 1\}^*$ . Nótese que el conjunto de rayos del árbol se biyecta naturalmente con el conjunto de las sucesiones infinitas de  $\{0, 1\}$ , que tiene cardinal no contable.

El problema que se aborda en el presente trabajo tiene que ver con la relación subgrafo en grafos infinitos. Un grafo  $G'$  es *subgrafo* de otro grafo  $G$  si existe una función inyectiva (ya no biyectiva) entre  $V(G')$  y  $V(G)$ , que mapee aristas en aristas. Ahora, para una función de este tipo, si dos vértices en la partida no forman una arista no implica que en la llegada sus imágenes no forman una arista. Esto da origen a la definición de subgrafo inducido. Un grafo es *subgrafo inducido* de otro si una arista en la imagen está en el grafo de llegada sí y solo

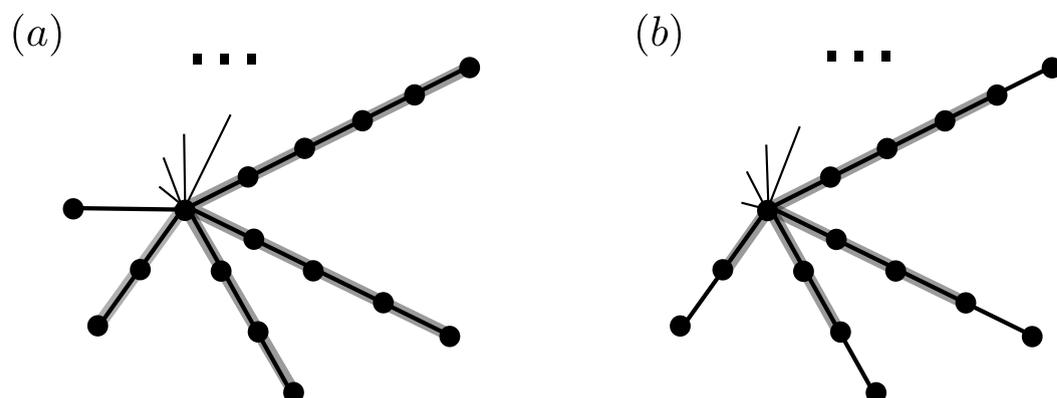


Figura 1.3: (a) Caminos de largo  $n$ ,  $n \geq 1$  enlazados a través de un primer vértice común. (b) Caminos de largo  $n$ ,  $n \geq 2$  enlazados a través de un primer vértice común. Se ha achurado en cada grafo la inmersión del gemelo a su lado. Nótese que ambos grafos son gemelos pero no son isomorfos.

sí los vértices pre imagen son una arista. Es decir, además de ser subgrafo, si dos vértices en la partida no forman una arista entonces en la llegada sus imágenes no forman una arista tampoco.

En grafos finitos ser subgrafo es una relación de orden. En particular la propiedad antisimétrica se tiene gracias a que en conjuntos con cardinal finito, la existencia de mutuas inyecciones implica la igualdad de cardinal. Luego las inyecciones son epiyectivas y por lo tanto una biyección. Sin embargo en grafos infinitos esto ya no es cierto. El teorema Cantor-Bernstein-Schröder asegura la existencia de una biyección, pero ya no es cierto que esta biyección mapee correctamente el conjunto de aristas. En la Figura 1.3 se muestran dos grafos que son mutuamente subgrafos pero que no son isomorfos. A partir de esto surge el concepto de *gemelos*: dos grafos conexos son gemelos si son mutuamente subgrafos entre sí. Dos grafos conexos son *gemelos fuertes* si son mutuamente subgrafos inducidos. La relación gemelo y gemelo fuerte son relaciones de equivalencia (note que la relación subgrafo es transitiva).

Bonato y Tardif [3] en el 2003 se plantearon siguiente la pregunta: ¿Cuántos grafos (salvo isomorfismos) son gemelos de un grafo dado? En [2] ellos conjeturan que la cantidad de gemelos que posee un grafo cualquiera puede ser 1 (es decir, solo el grafo mismo) o infinito. Ellos plantearon la conjetura primeramente para grafos en general y luego para árboles, siendo bautizada esta última como *tree alternative conjecture*, conjetura de alternativa en

árboles. Para  $G$  un grafo, se define  $m(G)$  como el cardinal del conjunto de gemelos (salvo isomorfismos) que posee  $G$ .

**Conjetura 1.1.** (*Conjetura de alternativa, Bonato y Tardif 2003 [3]*) Para todo grafo  $G$ ,  $m(G)$  es igual a 1 o  $\infty$ .

**Conjetura 1.2.** (*Conjetura de alternativa en árboles, Bonato y Tardif 2006 [2]*) Para todo árbol  $T$ ,  $m(T)$  es igual a 1 o  $\infty$ .

En las Figuras 1.4, 1.5 y 1.6 se presentan ejemplos de grafos que poseen sólo 1 gemelo (el mismo grafo), infinito contable cantidad de gemelos e infinito no contable cantidad de gemelos respectivamente.

En la figura 1.4, el doble rayo es un ejemplo de grafos que solo tienen un gemelo y es el mismo grafo. Cualquier gemelo debe contener un doble rayo, pero también debe estar contenido en un doble rayo. Luego, no pueden haber vértices extra o aristas distintas a las del doble rayo. Esto fuerza a que un gemelo sea isomorfo al doble rayo.

En el segundo ejemplo, un rayo y hojas que se conectan a él a partir de cierto vértice es un ejemplo de un grafo con contable cantidad de gemelos. Formalmente este grafo se puede definir como  $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$  su conjunto de vértices y  $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_i : i \in \mathbb{N}\}$  su conjunto de aristas. Si se borra una cantidad finita de hojas  $y_i$  salvo  $y_0$  se obtiene un subgrafo  $G'$  que está contenido en el original (pues se borraron vértices solamente). Sea  $N$  el máximo índice de una hoja borrada. Nótese además que  $G'$  contiene a  $G$  pues a partir del índice  $N$  todos los vértices  $x_i$  con índice mayor o igual a  $N$  tienen una hoja vecina. Borrando las hojas  $y_j$  con índice menor a  $N$  de  $G'$  se reobtiene  $G$ . La hoja  $y_0$  no borrada impide que los gemelos  $G'$  contruídos de este modo sean isomorfos entre sí (demostrar en detalle esto es largo, por razones de espacio no se explicará aquí). Por otra parte, todo gemelo de  $G$  debe corresponder a la eliminación de un número finito de hojas, pues si se borran infinitas hojas el grafo resultante no puede contener al grafo original, por lo que no puede haber más de contable cantidad de gemelos.

En el tercer ejemplo, un rayo y caminos de largo creciente que se conectan a partir de cierto nodo es un ejemplo de un grafo con no contable cantidad de gemelos. Formalmente se puede definir este grafo como  $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$  su conjunto de vértices y  $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_{0,i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{y_{i,j} y_{i+1,j-1} : i \in \mathbb{N}\}$  su conjunto de aristas. Nótese que los vértices  $y_{i,0}$  son hojas y se conectan al doble rayo a través del vértice  $x_i$ . Si se borra un conjunto arbitrario  $S \subseteq \mathbb{N}$  de hojas  $y_{i,0}$  con  $i \in S$  se obtiene un subgrafo  $G'$ . Además, si se elimina en  $G'$  todo el resto de las hojas  $y_{i,0}$  con  $i \in \mathbb{N} - S$  se reobtiene un grafo isomorfo a  $G$ . Se puede codificar la eliminación de las hojas  $y_{i,0}$ , con 1 si se borra y 0 si no, y de este modo cada sucesión de ceros y unos definiría un gemelo de  $G$ . Todos los gemelos contruídos de este modo son no-isomorfos entre sí (no es fácil demostrar esto, todos los gemelos son no-isomorfos entre sí salvo los asociados a 1111... y 0000...), y como el cardinal de las sucesiones en  $\{0, 1\}$  es no contable, entonces existe no contable cantidad de gemelos.



Figura 1.4: Un doble rayo  $Z$ , con  $V(Z) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ ,  $E(Z) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\}$ . No tiene gemelos propios.

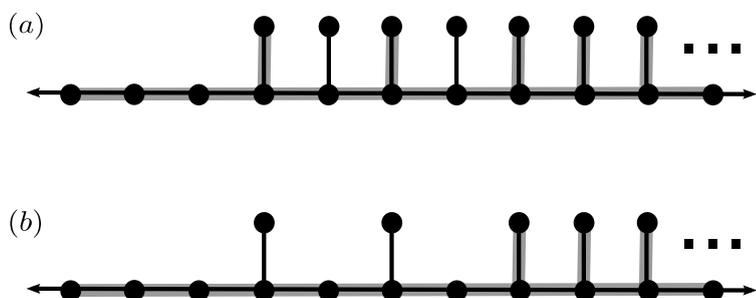


Figura 1.5: (a) Un grafo  $G$  con  $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ ,  $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_i : i \in \mathbb{N}\}$ . (b) Removiendo un número finito de hojas (salvo la primera) se obtiene un gemelo, distinto para cada elección. En la figura se muestra un ejemplo, se ha achurado en cada grafo la inclusión del gemelo que se muestra en la figura. Este grafo tiene contable cantidad de gemelos.

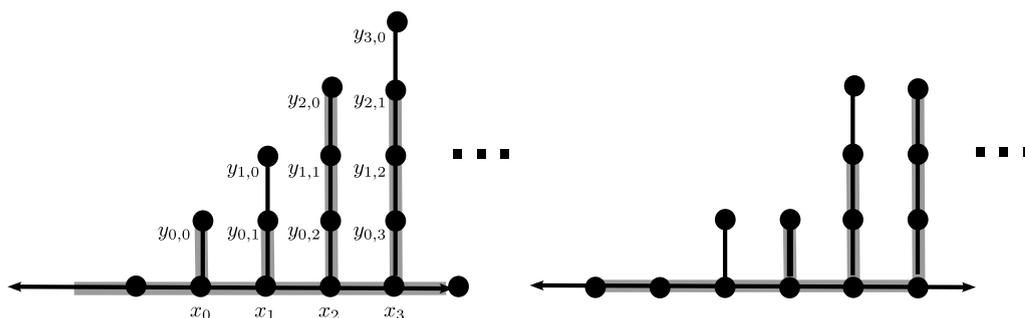


Figura 1.6: Un grafo  $G$  con  $V(G) = \{x_i : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{y_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ ,  $E(G) = \{x_i x_{i+1} : i \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_i y_{0,i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{y_{i,j} y_{i+1,j-1} : i \in \mathbb{N}\}$ . Removiendo un número arbitrario de hojas se obtiene un gemelo. En la figura se muestra un ejemplo, se ha achurado en cada grafo la inclusión del gemelo que se muestra en la figura. Este grafo tiene no contable cantidad de gemelos.

Bonato y Tardif demostraron la Conjetura 1.2 para árboles sin rayos en [2]. Tyomkyn demostró en [14] la conjetura para una definición alternativa de gemelos para árboles enraizados: dos árboles con raíz son gemelos si existen mutuas inyecciones que preservan aristas y que mapean las raíces entre sí. También en [14] Tyomkyn estudia la conjetura en árboles localmente finitos. Tateno en [12] propone un contraejemplo de la conjetura en un trabajo no acabado. En su trabajo Tateno propone también que para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends se tiene la conjetura, sin llegar a una demostración. En el presente trabajo se demostrará que:

**Teorema 1.3.** *Para todo árbol  $T$  localmente finito con una cantidad contable de ends,  $m(T) = 1$  o  $\infty$ .*

Una observación de interés en el estudio de la conjetura es que todo grafo  $G$  que posea un gemelo no isomorfo a él (es decir  $m(G) > 1$ ), contiene de forma estricta una copia de sí mismo (dentro de  $G$  se puede encontrar  $G'$  y dentro de  $G'$  se vuelve a encontrar  $G$ ). Como el gemelo  $G'$  no es isomorfo a  $G$ , entonces la función asociada a la inclusión como subgrafo de  $G$  en  $G'$  no puede ser epiyectiva. Este tipo de funciones corresponden a endomorfismos del grafo, en particular el endomorfismo descrito anteriormente no es epiyectivo. Estos endomorfismos serán llamados *endomorfismos propios*.

Si un grafo no posee endomorfismos propios, entonces no puede tener gemelos no isomorfos a él, por lo tanto  $m(G) = 1$ . Este hecho y el estudio de los endomorfismos de un árbol resulta ser una forma efectiva de abordar la conjetura. La forma que se usa en el presente trabajo para demostrar la conjetura (restringido a grafos localmente finitos con un número contable de ends) es la siguiente: si  $m(T) > 1$  entonces existe un endomorfismo propio, luego el grafo posee cierta estructura. Basado en esa estructura es posible definir infinitos grafos que son gemelos del original. Con esto se encuentra una familia infinita de gemelos, no isomorfos entre sí y no isomorfos con  $T$ , por lo que  $m(T) = \infty$ . En grafos con no contable cantidad de ends esta forma de demostrar falla, ya que no es posible construir del mismo modo gemelos. La dificultad radica en que perturbaciones del grafo original que podrían ser gemelos puede aún ser isomorfas al grafo original. El árbol de Tyomkyn es un ejemplo de ello. En general la demostración que dos posibles gemelos son no-isomorfos entre sí y no-isomorfos respecto al original es la parte más difícil de la demostración.

Halin mostró dos teoremas sobre endomorfismos de grafos infinitos que son de alto interés y utilidad para abordar la conjetura. El primero plantea que para un árbol  $T$  sin rayos dado, existe un vértice o una arista que se mapea en sí mismo para cualquier endomorfismo. En el caso que sea un vértice, el vértice es un punto fijo de todo endomorfismo. En el caso que sea una arista, todo endomorfismo realiza una permutación entre los vértices de la arista (Teorema 4.2, [8]). La potencia de este teorema reside en que el elemento fijo de un árbol dado es fijo **para todo** endomorfismo. El segundo teorema, dado en [7], plantea que para árboles en general y para un endomorfismo en particular de ese árbol, el endomorfismo debe fijar un vértice, permutar una arista, o mapear dentro de sí mismo un rayo (Teorema 4.1). En este segundo teorema ya no se tiene la propiedad que para todo endomorfismo el elemento fijo

de los endomorfismos sea el mismo. Es decir, es posible separar los endomorfismos según el tipo de elemento fijo que poseen. El primer teorema es usado fuertemente en la demostración de Bonato y Tardif en [2] para árboles sin rayos. El hecho que ciertos elementos sean estables bajo cualquier endomorfismo es parte clave de la demostración.

En el presente trabajo se presenta una demostración de la Conjetura 1.2 restringida a árboles infinitos localmente finitos con una cantidad contable de ends (Teorema 1.3). Primeramente se presenta la demostración de la conjetura para árboles con exactamente un end, dos ends, más de dos pero finitos ends. Luego, el caso con contables ends se puede descomponer en casos donde la demostración es similar a árboles con exactamente un, dos o más de dos pero finitos ends.

En el Capítulo 2, se hará una recopilación sobre los resultados de la teoría de grafos infinitos que serán de utilidad en este trabajo.

En el Capítulo 3 se revisarán los teoremas sobre la conjetura de alternativa en árboles conocidos hasta ahora. Se explicará también ideas sobre como se construye el árbol que se comporta como una estrella y su relación con la conjetura.

En el Capítulo 4 se revisarán teoremas sobre morfismos en grafos infinitos. Este capítulo permitirá tener una visión detallada sobre la definición y propiedades de los isomorfismos, automorfismos y endomorfismos en grafos infinitos.

En el Capítulo 5 se presenta la demostración de la conjetura para árboles infinitos localmente finitos con una cantidad finita de ends. La demostración tiene 3 casos: 1 end, 2 ends, más de 2 ends.

En el Capítulo 6 se presenta la demostración de la conjetura para arboles localmente finitos con una cantidad infinita contable de ends. Primeramente se hará una revisión sobre diversas definiciones de subconjunto de vértices en un grafo infinito que son estables bajo endomorfismos. Luego se definirá un subconjunto particular (centro-end) y se mostrará que este tipo de subconjuntos permiten demostrar una extensión de un teorema de Halin (ver Teorema 6.12, que extiende el Teorema 4.1) para endomorfismos en árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends. Usando esta extensión del teorema se mostrará finalmente la Conjetura 1.2 para árboles que cumplen la hipótesis del Teorema 6.12.

# Capítulo 2

## Grafos infinitos.

En el presente capítulo se presentarán las definiciones formales básicas concernientes a grafos infinitos (algunas dadas informalmente en la introducción). Posteriormente se revisarán los resultados clásicos del área que serán utilizados más adelante en este trabajo. Por último, se estudiará una topología definible en grafos infinitos conexos que será de relevancia en el Capítulo 5.

### 2.1. Definiciones básicas.

**Definición 2.1.** Un *grafo* es un par de conjuntos  $V$  y  $E$ . El conjunto  $V$  será llamado conjunto de *vértices* o *nodos* y  $E$  será un subconjunto de  $[V]^2 = \{e \subseteq V : |e| = 2\}$ , llamado conjunto de *aristas* o *arcos*. Se denota  $uv$  la arista definida como  $\{u, v\}$ . Un grafo también se denotará por  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es su conjunto de vértices y  $E$  su conjunto de aristas. Si  $G$  es un grafo, se denota también como  $V(G)$  a su conjunto de vértices y  $E(G)$  a su conjunto de aristas.

**Definición 2.2.** Un *grafo enraizado* es un grafo y un vértice de él al cual se le llama *raíz*. Se denota por  $(G, r)$ , donde  $G$  es el grafo y  $r$  su raíz.

**Definición 2.3.** Un *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$  es una función biyectiva entre  $V(G)$  y  $V(H)$  tal que, un par de vértices en  $V(G)$  es una arista de  $E(G)$  si y solo si el par de imágenes de esos vértices vía el isomorfismo también es una arista de  $H$ . Si existe un isomorfismo entre dos grafos  $G$  y  $H$ , se dice que los grafos son isomorfos. Se denota como  $G \cong_{\psi} H$ , donde  $\psi$  es un isomorfismo testigo.

*Observación 2.1.* La existencia de un isomorfismo entre dos grafos define una relación de equivalencia.

**Definición 2.4.** Un grafo abstracto es la clase de equivalencia de los grafos bajo la relación inducida por la existencia de isomorfismo. Como es habitual en la teoría de grafos, siempre se trabajará con grafos abstractos. En particular, cada vez que se hable de un grafo se estará hablando de grafos abstractos.

**Definición 2.5.** Un grafo es *infinito* si su conjunto de vértices es infinito.

*Observación 2.2.* En este trabajo siempre se tendrán grafos con una cantidad contable de vértices.

**Definición 2.6.** Un *rayo* es un grafo con conjunto de vértices  $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  indexados en  $\mathbb{N}$  y como conjunto de aristas los pares  $\{x_i, x_{i+1}\}$  con  $i$  natural. Para simplificar la notación, un rayo se definirá como conjunto de vértices el conjunto de los naturales y  $E = \{e : e = \{i, i+1\}, i \in \mathbb{N}\}$  su conjunto de aristas (los naturales parten en 0).

**Definición 2.7.** Un *doble rayo* es un grafo con conjunto de vértices  $V = \{\dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$  indexados en  $\mathbb{Z}$  y como conjunto de aristas los pares  $\{x_i, x_{i+1}\}$  con  $i$  entero. Del mismo modo, para simplificar notación un doble rayo se definirá a partir de los enteros como conjunto de vértices y  $E = \{e : e = \{i, i+1\}, i \in \mathbb{Z}\}$  su conjunto de aristas.

**Definición 2.8.** Un *peine* (comb en inglés) es un rayo  $R$  e infinitos caminos finitos, disjuntos entre sí, tal que para cada uno de los caminos uno de sus extremos pertenece a  $V(R)$ . Los vértices extremos que no pertenecen a  $V(R)$  de cada uno de los caminos son llamados *dientes* y  $R$  es llamado *espina*.

**Definición 2.9.** Una *cola* es un subgrafo de un rayo que también es rayo.

**Definición 2.10.** Dos Rayos  $R_1, R_2$  en  $G$  se dicen equivalentes si para cualquier conjunto finito  $S \subseteq V(G)$  de vértices, cada uno de los rayos tienen una cola en la misma componente de  $G - S$ . Esta relación es de equivalencia (ver [4] p. 212) y sus clases de equivalencia son sus *ends* (se usará la misma palabra que en inglés). El conjunto de ends se denota por  $\Omega(G)$ .

**Definición 2.11.** Sea  $A$  un conjunto y  $v$  un elemento que no pertenece a  $A$ . Una *estrella* (star en inglés) es el grafo cuyos vértices son  $A \cup \{v\}$  y sus aristas son todos los pares de la forma  $\{a, v\}$ , con  $a$  en  $A$ . Una *estrella infinita* es una estrella tal que  $A$  es infinito contable. De este modo, una estrella infinita se puede definir como  $V = \{v\} \cup \mathbb{N}$  y  $E = \{e : e = \{v, i\}, i \in \mathbb{N}\}$ .

**Definición 2.12.** Un grafo es *rayless* o *sin rayos* si no posee un rayo como subgrafo.

**Definición 2.13.** Un grafo es *localmente finito* si el grado de todos sus vértices es finito.

**Definición 2.14.** Un grafo  $G$  es *conexo* si para cada par de nodos  $x, y \in V(G)$  existe un camino  $P = xv_1v_2\dots v_{n-1}y$  en  $G$ .

**Definición 2.15.** Un *ciclo* es un camino donde su nodo inicial y final coinciden (sus vértices intermedios no se repiten).

**Definición 2.16.** Un *árbol* es un grafo conexo que no posee ciclos.

*Observación 2.3.* Dada la definición anterior, entre dos vértices  $u$  y  $v$  de un árbol  $T$  existe un único camino  $P$  con vértice inicial igual a  $u$  y vértice final igual a  $v$ . Se denota por  $uTv$  este camino.

**Definición 2.17.** Para un grafo conexo  $G$  y una arista  $e$  de él, se define  $G - e$  el grafo con el mismo conjunto de vértices y conjunto de aristas igual a  $E(G) - e$ . En particular,  $G - e$  tiene el mismo conjunto de vértices que  $G$ , y todas las aristas de  $G$  salvo  $e$ .

**Definición 2.18.** Sea  $G$  un grafo conexo. Para dos vértices  $u$  y  $v$  de  $V(G)$  se define la *distancia* como el largo del camino más corto que conecta  $u$  y  $v$  en  $G$ . Se denota por  $d(u, v)$ .

**Definición 2.19.** Sea  $(G, r)$  un grafo enraizado conexo. Se define  $(G, r)|_k$  como el subgrafo inducido por los vértices que están a distancia menor o igual a  $k$  respecto a la raíz.

## 2.2. Resultados clásicos.

A continuación se presentarán tres lemas de grafos infinitos que serán usados en los capítulos posteriores.

**Lema 2.20** (Graph Theory, Diestel [4], p. 213 ). *Todo grafo infinito conexo tiene un vértice de grado infinito o contiene un rayo.*

**Lema 2.21** (Graph Theory, Diestel [4], p. 213 ). *(Star-comb lemma) Sea  $U$  un conjunto de vértices infinito de  $G$  grafo conexo. Entonces existe un peine con todos sus dientes en  $U$ , o una subdivisión de una estrella infinita con todas sus hojas en  $U$ .*

*Observación 2.4.* En el lema anterior, nótese que todos los dientes del peine están en  $U$ . Sin embargo no es necesario que todo  $U$  esté cubierto por los dientes del peine. Lo mismo para la estrella infinita.

**Lema 2.22** (Graph Theory, Diestel [4], p. 209 ). *(Lema infinito de König) Sea  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia infinita de conjuntos, disjuntos entre sí, no vacíos y finitos. Sea  $G$  definido sobre su unión y suponga que cada vertice  $v$  en un conjunto  $V_n$  con  $n \geq 1$  posee un vecino  $f(v)$  en  $V_{n-1}$ . Entonces existe un conjunto  $U = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $u_n \in V_n$  para todo  $n$ ,  $u_{n-1} = f(u_n)$  e induce un rayo en  $G$ .*

Los siguientes lemas son de importancia en el presente trabajo y son conclusiones directas de las definiciones dadas en este capítulo, por lo que serán agregados en esta sección aunque no son resultados clásicos propiamente tal.

**Lema 2.23.** *Sea  $T$  un árbol y  $w$  un end de este árbol. Sean  $R_1$  y  $R_2$  dos rayos del end  $w$ . Entonces existe en ambos rayos una cola común, correspondiente al grafo inducido por  $V(R_1) \cap V(R_2)$ .*

*Demostración.* Si  $R_1$  y  $R_2$  son disjuntos en vértices, por la conexidad de  $T$  existe un camino que los conecta. Este debe ser el único camino que los conecta, de lo contrario existe un ciclo. Eliminando este camino se separa  $R_1$  y  $R_2$ , luego por Definición 2.10 ambos rayos corresponden a ends distintos, lo cual contradice la hipótesis del lema. Así mismo, si la intersección  $V(R_1) \cap$

$V(R_2)$  es finita, se usa ese conjunto como separador para mostrar que  $R_1$  y  $R_2$  pertenecen a ends distintos. Así, la intersección debe ser infinita.

Nótese que si un vértice  $r$  está en la intersección, todos los vértices con índice posterior en cada rayo  $R_1$  y  $R_2$  deben estar en la intersección: sea  $i$  el índice de  $r$  en  $R_1$  y  $j$  el índice de  $r$  en  $R_2$ . Sea  $r_k^1$  el nodo con índice  $k$  en  $R_1$ , ídem con  $R_2$ . Si existe  $r_p^1$  que no pertenece a la intersección, con  $p > i$ , como la intersección es infinita, debe existir un vértice en la intersección con índice  $l$  superior a  $p$ . Tomando el camino que une  $r_i^1$  con  $r_l^1$  usando vértices de  $R_2$ , y el camino en  $R_1$  que los conecta (y que contiene a  $r_p^1$ ) se encuentran dos caminos que conectan el mismo par de vértices pero que no son iguales. Luego, debe existir un ciclo; lo cual no puede suceder pues  $T$  es un árbol.

Con esto, la intersección es un conjunto infinito de vértices sucesivos en cada rayo. Luego, el conjunto  $V(R_1) \cap V(R_2)$  induce un rayo, que es una cola común a  $R_1$  y  $R_2$ , con lo que se demuestra el lema.  $\square$

**Lema 2.24.** *Sea  $T$  un árbol y sea  $k$  un natural. Entonces,  $T$  posee  $k$  ends si y solo si  $T$  posee  $k$  rayos disjuntos.*

*Demostración.* Para dos rayos de dos ends distintos en  $T$ , siempre es posible tomar una cola de cada rayo tales que sean disjuntas en vértices entre sí. Esto ya que, de lo contrario, por la Definición 2.10 ambos ends serían un mismo end pues no existiría un separador finito. Tomando un rayo de cada end y usando un número finito de veces la observación anterior, se encuentran  $k$  rayos disjuntos. Si existen  $k$  rayos disjuntos, a lo más puede haber un camino que conecte cada par de rayos (sino habría un ciclo). Luego existe un separador finito y por lo tanto son ends distintos.  $\square$

## 2.3. Topología en grafos infinitos.

*Esta sección solo es utilizada para argumentar un paso de la demostración del Teorema 6.12 en la sección 6.2. Por lo tanto el lector puede omitir la lectura de esta parte hasta llegar a esa sección.*

Una faceta interesante de la teoría en grafos infinitos es la posibilidad de integrar el conjunto de ends a la estructura del grafo. Esto se puede lograr definiendo un espacio topológico que incluye al grafo y su conjunto de ends, y que mantiene propiedades de su estructura. La topología se forma a partir de vecindades alrededor de cada vértice o end de  $G$ . Alrededor de un end, una vecindad corresponde a un subgrafo conexo del grafo que contiene al end y cierto borde a distancia epsilon de los vértices del subgrafo.

Formalmente, para un grafo infinito  $G$  se define su espacio topológico  $|G|$  del siguiente modo: el conjunto de puntos de  $|G|$  es  $V(G)$  unido a  $\Omega(G)$ ; y para cada arista  $e$  se agrega un continuo de puntos  $\hat{e} = (u, v)$ , disjuntos para aristas distintas y disjuntos con  $V(G) \cup \Omega(G)$ .

Con el conjunto de puntos definido, se construye una base de abiertos para dotar de una topología de la siguiente manera:

- Para cada arista  $e$  se escoge una biyección entre  $\mathring{e}$  y  $(0, 1)$ , y se extiende la biyección a una entre  $[u, v] = \{u\} \cup \mathring{e} \cup \{v\}$  y  $[0, 1]$ . Esta biyección define una métrica en  $[u, v]$ , se llama a esto un *arco topológico* con *puntos interiores*  $x \in \mathring{e}$ . Se declaran abiertos todos los conjuntos que corresponden en  $(u, v)$  a abiertos en  $(0, 1)$  vía su biyección.
- Para un vértice  $u$  cualquiera y  $\epsilon > 0$ , se declara abierto la estrella abierta alrededor de  $u$  de radio  $\epsilon$ . Esto es, la unión sobre  $v$  vecino de  $u$  de los puntos en  $[u, v]$  a distancia menor a  $\epsilon$  respecto a  $u$ .
- Para un end  $\omega$  y  $S$  un subconjunto de vértices existe una única componente conexa en  $G - S$  que contiene rayos de  $\omega$ , que se denotará por  $C(S, \omega)$ . Sea  $\Omega(S, \omega) = \{\omega' \in \Omega : C(S, \omega') = C(S, \omega)\}$  el conjunto de ends que también están en la misma componente conexa que  $\omega$ . Para cada  $\epsilon > 0$ , el conjunto  $\mathring{E}_\epsilon(S, \omega)$  es el conjunto de los puntos interiores de arcos en  $S - C(S, \omega)$  a distancia menor a  $\epsilon$  a su punto en  $C(S, \omega)$ .
- Por último, se agregan los abiertos de la siguiente forma:

$$D_\epsilon(S, \omega) = C(S, \omega) \cup \Omega(S, \omega) \cup \mathring{E}_\epsilon(S, \omega)$$

Los abiertos en  $|G|$  son uniones de conjuntos descritos anteriormente.

Se presentarán condiciones suficientes para que el espacio topológico  $|G|$  sea compacto. Esto será usado posteriormente para usar la propiedad de la intersección finita (PIF) en una cadena de subgrafos anidados.

**Teorema 2.25** (Graph Theory, Diestel [4] p. 237). *Sea  $G$  conexo y localmente finito. Entonces  $|G|$  es un espacio Hausdorff compacto.*

# Capítulo 3

## Teoremas sobre la conjetura de alternativa en árboles.

En la siguiente sección se presentará en detalle la definición de gemelo y  $m(T)$ . Primeramente se detallará la definición de subgrafo del presente trabajo. Luego, se revisarán los resultados conocidos sobre las conjeturas 1.1 y 1.2. Por último, se estudiará el árbol de Tyomkyn, dándose una idea de su construcción.

**Definición 3.1.** Para  $G$  y  $H$  grafos, un *semimorfismo* es una función  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , inyectiva tal que si  $uv$  pertenece a  $E(G)$  entonces  $\phi(u)\phi(v)$  pertenece a  $E(H)$ . Se dice que  $G$  es *subgrafo* de  $H$  si existe un semimorfismo entre  $G$  y  $H$ . Se denota  $G \subseteq_{\phi} H$ , donde  $\phi$  es un semimorfismo testigo.

**Definición 3.2.** Para  $G$  y  $H$  grafos, un *morfismo* es una función  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , inyectiva tal que  $uv$  pertenece a  $E(G)$  si y sólo si  $\phi(u)\phi(v)$  pertenece a  $E(H)$ . Se dice que  $G$  es *subgrafo inducido* de  $H$  si existe un morfismo entre  $G$  y  $H$ . Se denota  $G \subseteq_{\phi}^* H$ , donde  $\phi$  es un morfismo testigo.

*Observación 3.1.* La definición más común de subgrafo es la siguiente:  $G$  es subgrafo de  $H$  si el conjunto de vértices de  $G$  es subconjunto del conjunto de vértices de  $H$ , y el conjunto de aristas de  $G$  es subconjunto del conjunto de aristas de  $H$ . Como siempre estamos trabajando con grafos abstractos, nuestra definición ahorra algunas dificultades técnicas. Si existe un semimorfismo desde  $G$  a  $H$ , la imagen de  $V(G)$  y  $E(G)$  induce un subgrafo (o subgrafo inducido, en su definición usual) en  $H$ , que es isomorfo a  $G$  ya que los morfismos en particular son isomorfismos en su imagen.

**Definición 3.3.** Un *endomorfismo* en un grafo  $G$  es un morfismo  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  con igual grafo de partida y llegada. Se denota  $End(G)$  el conjunto de endomorfismos de  $G$ . Un *automorfismo* es un endomorfismo epiyectivo. Se denota  $Aut(G)$  el conjunto de automorfismos de  $G$ . Se llama *endomorfismo propio* a un endomorfismo no epiyectivo. Se denota  $Endp(G)$  el conjunto de endomorfismos propios de  $G$ .

**Definición 3.4.** Sean  $G$  y  $H$  dos grafos conexos. Ambos se dicen *gemelos* si son mutuamente subgrafos entre sí. Es decir, si existen dos semimorfismos  $\phi$  y  $\psi$ , con  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  desde  $G$  a  $H$  y  $\psi : V(H) \rightarrow V(G)$  de  $H$  a  $G$ . Se denota  $G \approx H$ . Se dice que son *gemelos fuertes* si son mutuamente subgrafos inducidos entre sí. Es decir, si existen dos morfismos  $\phi$  y  $\psi$ ,  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$  y  $\psi : V(H) \rightarrow V(G)$ , se denota  $G \approx^* H$ .

*Observación 3.2.* Ambas relaciones  $\approx$  y  $\approx^*$  definen relaciones de equivalencia.

*Observación 3.3.* Es importante notar que la relación gemelo se define entre grafos conexos. Es posible que dos grafos no conexos se incluyan mutuamente, sin embargo este tipo de gemelos no será estudiado en este trabajo.

**Definición 3.5.** Sea  $G$  un grafo conexo. Se define  $m(G)$  como el cardinal de las distintas clases de equivalencia definidas por la relación isomorfismo en el conjunto de todos los grafos que son gemelos con  $G$ .

Una definición dada en [2] por Bonato y Tardif para árboles sin rayos y usada en general para árboles por Tyomkyn es la idea de gemelo enraizado. Este enfoque también será usado en este trabajo, aunque el principal aporte de la demostración que se dará es probar la existencia de gemelos sin usar una raíz. La notación definida por Bonato y Tardif es útil y será usada frecuentemente.

**Definición 3.6.** Sean  $(G, u)$  y  $(H, v)$  dos grafos enraizados conexos. Ambos se dicen *gemelos enraizados* si son mutuamente subgrafos enraizados entre sí. Es decir, si existen dos semimorfismos  $\phi$  y  $\psi$ ,  $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$  y  $\psi : V(G') \rightarrow V(G)$  tal que  $\phi(u) = v$  y  $\psi(v) = u$ . Se dice que son *gemelos enraizados fuertes* si son mutuamente subgrafos inducidos enraizados entre sí. Es decir, si existen dos morfismos  $\phi$  y  $\psi$ ,  $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$  y  $\psi : V(G') \rightarrow V(G)$  y mapean las raíces mutuamente. Ambas definen relaciones de equivalencia. Se denotan  $(G, u) \approx (H, v)$  y  $(G, u) \approx^* (H, v)$  respectivamente.

**Definición 3.7.** Sea  $(G, r)$  un grafo enraizado conexo. Se define  $m(G, r)$  como el cardinal de las distintas clases de equivalencia definidas por la relación isomorfismo enraizado en el conjunto de todos los grafos que son gemelos enraizados con  $(G, r)$ .

*Observación 3.4.* En árboles, es fácil ver que todo subgrafo de un árbol es subgrafo inducido. Luego, para la conjetura de alternativa en árboles basta definirla con la relación gemelo.

En el año 2003, Bonato y Tardif plantearon en [3] dos preguntas que dan origen al problema: ¿Qué propiedades de un grafo garantizan que la existencia de mutuos morfismos implica la existencia de un isomorfismo? y ¿Si  $G$  y  $H$  son dos grafos no isomorfos mutuamente subgrafos entre sí, entonces pertenecen a una familia infinita de grafos mutuamente subgrafos no isomorfos entre sí?. La pregunta en particular que resuelven en ese primer trabajo fue ¿Existen ejemplos de grafos vertex-transitive mutuamente subgrafos no isomorfos entre sí? Ellos demostraron que existen infinitos ejemplos, pero estos grafos no pueden ser localmente finitos.

En el año 2006, en [2] ellos definen la conjetura de alternativa en árboles y dan una prueba de ésta para grafos sin rayos.

**Conjetura 3.8.** *Si  $T$  es un árbol, entonces  $m(T) = 1$  o infinito.*

**Teorema 3.9** (Bonato y Tardif 2006 [2]). *Si  $T$  es un árbol sin rayos, entonces  $m(T)$  es 1 o  $\infty$*

La demostración que ellos dan primeramente define gemelos con raíz y muestra que la conjetura se tiene para esta definición de gemelos. Luego usa el Teorema de Tlementos Finitos II de Halin (Teorema 4.2) para mostrar que siempre hay un vértice o arista fijo para cualquier endomorfismo. Usando uno de estos vértices como raíz muestra la conjetura.

En el año 2011 Bonato, Bruhn, Diestel, Sprüssel demostraron un resultado similar para grafos sin rayos en general:

**Teorema 3.10** (Bonato, Bruhn, Diestel, Sprüssel 2011 [1]). *Las siguientes proposiciones se cumplen para la noción de gemelo y gemelo fuerte:*

1. *Un grafo sin rayos tiene infinitos o solo un gemelo (el mismo grafo).*
2. *Un grafo conexo sin rayos tiene infinitos o solo un gemelo (el mismo grafo).*

En su demostración ellos usan una definición de *kernel* en todos los grafos sin rayos, que es estable para los endomorfismos, dada por Schmidt [11]. Estos kernel en dos grafos que se incluyen mutuamente siempre deben mapearse entre sí. Con este kernel de base, construyen gemelos usando las componentes asociadas a este kernel.

En 2009 Tyomkyn presenta una demostración de la conjetura para árboles (eventualmente con rayos). Sin embargo, solo demuestra una versión enraizada de la conjetura:

**Teorema 3.11** (Tyomkyn 2009 [14]). *Para  $(T, r)$  árbol con raíz,  $m(T, r)$  es 1 o  $\infty$ .*

Tyomkyn también estudió la conjetura en árboles localmente finitos. Los siguientes resultados son de interés para este trabajo:

**Teorema 3.12** (Tyomkyn 2009 [14]). *Para  $(T, r)$  árbol con raíz localmente finito,  $m(T, r) = 1$ .*

El siguiente teorema y su corolario también fueron desarrollados por Tyomkyn en su estudio de la conjetura en árboles localmente finitos. El corolario será usado en el presente trabajo en todas las demostraciones.

**Teorema 3.13** (Tyomkyn 2009 [14]). *Sea  $T$  árbol localmente finito, y  $S$  un gemelo de  $T$ . Si existe un morfismo  $\phi : S \rightarrow T$  tal que  $T - \phi(S)$  tiene infinitas componentes conexas, entonces  $m(T) = \aleph_1$ .*

**Corolario 3.14** (Tyomkyn 2009 [14]). *Sea  $T$  árbol localmente finito. Si existe un endomorfismo  $\phi : T \rightarrow T$  tal que  $T - \phi(T)$  tiene infinitas componentes conexas, entonces  $m(T) = \aleph_1$ .*

Este corolario es el único resultado hasta el momento permite mostrar la existencia de no contable número de gemelos. No se ha estudiado en esta memoria las condiciones necesarias para que un grafo tenga cierto cardinal de gemelos, sin embargo es una pregunta de interés.

Como se explicó en la introducción, la existencia de un gemelo propio implica la existencia de un endomorfismo propio. En el siguiente lema se demostrará esto en detalle.

**Lema 3.15.** *Sea  $T$  un árbol. Si  $T$  posee un gemelo  $T'$  no isomorfo a él, entonces existe un endomorfismo propio de  $T$ . Es decir,*

$$m(T) > 1 \Rightarrow \text{Endp}(T) \text{ es no vacío.}$$

*Demostración.* Si  $m(T) > 1$  entonces existe un gemelo  $T'$  no isomorfo a  $T$ . Por definición de gemelos, existen morfismos  $\phi$  y  $\psi$  tal que  $T \subseteq_{\phi} T' \subseteq_{\psi} T$ . La composición  $\psi \circ \phi : V(T) \rightarrow V(T)$  es una función inyectiva (composición de inyectivas) que preserva aristas (cada función es morfismo) y no puede ser epiyectiva, de lo contrario  $\psi$  sería epiyectiva y luego isomorfismo (propiedad de la composición). Luego  $\psi \circ \phi$  es un endomorfismo propio, con lo que se tiene el lema.  $\square$

### 3.1. Conjeturas de Tyomkyn.

Tyomkyn en [14] también plantea 2 conjeturas sobre el problema:

**Conjetura 3.16** (Tyomkyn 2009 [14]). *Sea  $T$  localmente finito con un endomorfismo propio. Entonces  $m(T) = \infty$  salvo que  $T$  sea un rayo.*

Esta conjetura implica la conjetura de alternativa de árboles para árboles localmente finitos. Esto se podría relajar reemplazando  $m(T) = \infty$  por  $m(T) > 1$ .

**Conjetura 3.17** (Tyomkyn 2009 [14]).  *$T$  localmente finito con un endomorfismo propio. Entonces  $m(T) > 1$  salvo que  $T$  sea un rayo.*

Nótese que la Conjetura 3.17 es la recíproca del Lema 3.15.

Tyomkyn plantea que si se demostrara que no existe un árbol con infinitas hojas  $x_1, x_2, \dots$  tal que  $T \cong T - x_1 \cong T - x_2 \cong \dots$  entonces se demostraría la Conjetura 3.17 <sup>1</sup>. Sin embargo, sí existe un árbol de grado máximo 3 tal que  $T \cong T - x$ , para cualquier hoja  $x$  de  $T$ . Este árbol fue propuesto en [13] y ha sido llamado en esta memoria como el árbol de Tyomkyn. Dicho árbol tiene un comportamiento similar a una estrella infinita (que también tiene la propiedad  $T \cong T - x$ , para  $x$  una hoja).

---

<sup>1</sup>Hasta el momento no hemos podido demostrar completamente esta implicancia planteada por Tyomkyn.

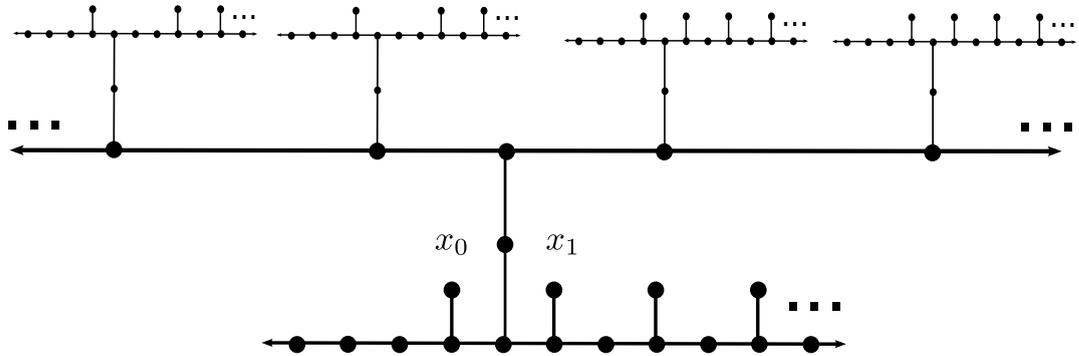


Figura 3.1: Sea  $T$  el grafo de la figura. Al borrar la hoja  $x_1$ , se obtiene un grafo que sigue siendo isomorfo a  $T$ .

### 3.1.1. El árbol de Tyomkyn.

No entraremos en el detalle sobre la construcción de este árbol, sin embargo explicaremos la idea núcleo de su construcción. El árbol de la Figura 1.5 posee la propiedad  $T \cong T - x_0$ , donde  $x_0$  es la hoja vecina del vértice con índice 0 (En esa figura, la hoja es llamada  $y_0$ ). Sin embargo, al sacar la hoja vecina del vértice con índice 1 (sea  $x_1$  esta hoja) no se tiene que  $T$  es isomorfo a  $T - x_1$ . Ahora, en el grafo de la Figura 3.1 se agregan vértices intermedios entre vértices del rayo. En cada vértice intermedio se agrega un grafo  $W$  que permite obtener el isomorfismo  $T \cong T - x_1$  al sacar  $x_1$ . Para lograr esto, se agrega un doble rayo paralelo, y en cada vértice de este rayo una copia de  $T$  en una dirección y una copia de  $T - x_1$  en la otra dirección.

Al sacar  $x_1$ , respecto a este nuevo doble rayo el grafo obtenido es isomorfo al original. Pero al agregar  $W$ , se pierde la propiedad  $T \cong T - x_1$ . Sin embargo, se puede mantener la propiedad agregando una copia de  $W$  en todos los vértices intermedios del doble rayo base original agregados. Pero entonces habría que modificar  $W$ , ya que el grafo que queda al sacar  $x_1$  cambió. Si se completa  $W$ , habría que copiar nuevamente este grafo en todos los vértices intermedios del doble rayo inicial y de nuevo  $W$  debería ser redefinido. El grafo límite que resulta de seguir este proceso posee la propiedad  $T \cong T - x_0 \cong T - x_1$ .

Para agregar una nueva hoja, se realiza un proceso similar modificando  $W$ . Para agregar la propiedad a las nuevas hojas en el grafo, se va tomando la hoja más cercana a las hojas ya “neutralizadas”.

Nótese que, para probar que  $T - x_1$  es isomorfo a  $T$  es necesario “cambiarse” de doble rayo base para poder ver  $T$ . Esto es relevante en nuestra demostración. Se mostrará que un árbol localmente finito con un número contable de ends posee cierta estructura que impide cambiarse de doble rayo. También se mostrará que con esto se pueden construir infinitos gemelos no isomorfos entre sí del grafo.

## 3.2. Conjeturas de Tatenó.

Tatenó presenta en un trabajo no revisado [12] un contraejemplo localmente finito de la conjetura. Específicamente Tatenó propone un grafo tal que  $m(T) = 2$ . A partir de este grafo también construye grafos con  $m(T)$  finito cualquiera. Sin embargo, el contraejemplo que él propone tiene un número no contable de ends, por lo que él propone la siguiente conjetura:

**Conjetura 3.18.** *Si  $T$  es un árbol localmente finito con contable cantidad de rayos, entonces  $m(T)$  es 1 o  $\infty$ .*

Éste es el resultado que se demostrará en los Capítulos 5 y 6. Nota: hasta la presente fecha el contraejemplo propuesto por Tatenó no ha sido revisado por referees internacionales, por lo que a priori no es posible saber si es correcto o incorrecto.

# Capítulo 4

## Endomorfismos, automorfismos e isomorfismos en grafos infinitos.

A primera vista, para demostrar la Conjetura de Alternativa en Árboles se requieren dos tipos de técnicas para demostrar que un par de grafos son gemelos. Primeramente, se requieren resultados que permitan entender cuando un grafo es subgrafo de otro. Luego de mostrar que un grafo es gemelo, sería necesario conocer resultados para demostrar que ese gemelo es no-isomorfo con otros posibles gemelos y con el grafo origen en particular. El árbol de Tyomkyn y el grafo de Rado son ejemplos de grafos infinitos contraintuitivos, donde una modificación del grafo (quitar vértices) que pudiera generar un grafo distinto en realidad entrega un grafo isomorfo al original. En el presente capítulo se estudiará en detalle distintas herramientas que serán útiles para la demostración del Teorema 1.3.

Se estudiará la relación subgrafo a través del concepto de *semimorfismo* y *morfismo*. Se revisará como se forma un endomorfismo propio a partir de un gemelo propio de un grafo, y se revisarán los teoremas de Halin sobre endomorfismos de un grafo. Luego se estudiará el grupo de automorfismos del rayo, doble rayo y árboles finitos. Ciertas propiedades de estos conjuntos son parte importante también de la demostración dada en este trabajo. Por último se estudiarán los isomorfismos en grafos infinitos, en la primera parte se revisará la construcción de un isomorfismo entre grafos enraizados en base a isomorfismos entre los subgrafos generados por los vértices a distancia  $n$  respecto a las raíces. Finalmente, se demostrará un teorema sobre isomorfismos que se construyen a partir de componentes conexas entre dos grafos.

### 4.1. Endomorfismos de grafos infinitos.

Solo para hacer más fluída la lectura de la sección, se repetirán las Definiciones 3.1, 3.2 y 3.3 dadas en el Capítulo 3.

**Definición.** Para  $G$  y  $H$  grafos, un *semimorfismo* es una función  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , inyectiva tal que si  $uv$  pertenece a  $E(G)$  entonces  $\phi(u)\phi(v)$  pertenece a  $E(H)$ . Se dice que

$G$  es *subgrafo* de  $H$  si existe un semimorfismo entre  $G$  y  $H$ . Se denota  $G \subseteq_{\phi} H$ , donde  $\phi$  es un semimorfismo testigo.

**Definición.** Para  $G$  y  $H$  grafos, un *morfismo* es una función  $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ , inyectiva tal que  $uv$  pertenece a  $E(G)$  si y sólo si  $\phi(u)\phi(v)$  pertenece a  $E(H)$ . Se dice que  $G$  es *subgrafo inducido* de  $H$  si existe un morfismo entre  $G$  y  $H$ . Se denota  $G \subseteq_{\phi}^* H$ , donde  $\phi$  es un morfismo testigo.

**Definición.** Un *endomorfismo* en un grafo  $G$  es un morfismo  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  con igual grafo de partida y llegada. Se denota  $End(G)$  el conjunto de endomorfismos de  $G$ . Un *automorfismo* es un endomorfismo epiyectivo. Se denota  $Aut(G)$  el conjunto de automorfismos de  $G$ . Se llama *endomorfismo propio* a un endomorfismo no epiyectivo. Se denota  $Endp(G)$  el conjunto de endomorfismos propios de  $G$ .

*Observación 4.1.* Nótese que la distancia entre dos nodos en el grafo de partida es igual a la distancia entre la imagen de esos nodos en la llegada, para cualquier morfismo. Esto se debe a que la imagen de un camino de largo mínimo entre  $u$  y  $v$  es un camino en la llegada. Además si existe en la llegada un camino de largo menor, por la definición de morfismo debe existir un camino en la partida del mismo tamaño que conecta  $u$  con  $v$ , contradiciendo la minimalidad del primer camino. En particular, si  $\phi$  es un morfismo entre  $(G, u)$  y  $(H, v)$ , siempre se tendrá que  $\phi(V((G, u)|_k)) = V((H, v)|_k)$ . Se dirá entonces que un morfismo *preserva distancias*.

Nótese además que un semimorfismo no preserva distancias, pues en la imagen pueden existir arcos nuevos que permitan encontrar caminos de largo menor entre dos nodos. Sin embargo, siempre se tendrá que la distancia en la imagen será menor o igual a la distancia en la partida. En particular, si  $\phi$  es un semimorfismo entre  $(G, u)$  y  $(H, v)$ , siempre se tendrá que  $\phi(V((G, u)|_k)) \subseteq V((H, v)|_k)$ . Se dirá entonces que un semimorfismo *acota distancias*.

En la siguiente sección se presentan los teoremas que desarrolló Halin sobre endomorfismos en árboles infinitos. El nombre *Teorema de Elementos Fijos* no es original de Halin, aunque Polat y Sabudissi en [9] usan la expresión “elemento” para referirse a un vértice fijo o una arista permutada. Dado que se usará en varias partes de este trabajo, se les llamará Teorema de Elementos Fijos a estos teoremas.

**Teorema 4.1** (Halin 1973 [8] p 260.). *Teorema de Elementos Fijos I (TEF I).*

Sea  $T$  árbol y  $\phi$  un endomorfismo de  $T$ . Una y solo una de las siguientes alternativas es verdadera:

- Existe un vértice  $v$  tal que  $\phi(v) = v$ .
- Existe una arista  $e = uv$  tal que  $\phi(u) = v$  y  $\phi(v) = u$ .
- Existe un rayo  $R \subseteq T$  tal que  $\phi(R) \subsetneq R$ .

Si ocurre el primer caso, los vértices de  $T$  que satisfacen  $\phi(v) = v$  forman un árbol subgrafo de  $T$  no vacío. Si ocurre el segundo caso,  $e$  es la única arista que es mapeada en sí misma por el endomorfismo. Si ocurre el tercer caso, para dos rayos  $R$  y  $R'$  que se mapean en sí mismo vía  $\phi$ , uno de esos rayos debe ser subgrafo del otro. Con esto, la unión de todos los rayos  $R$  que se mapean en sí mismo forman un rayo maximal con esta propiedad, o un único doble rayo  $Z$  tal que  $\phi(Z) = Z$ .

**Teorema 4.2** (Halin [7] p 643.). *Teorema de Elementos Fijos II (TEF II).*

Sea  $T$  árbol sin rayos. Una y solo una de las siguientes alternativas es verdadera:

- Existe un vértice  $v$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , se tiene que  $\phi(v) = v$ .
- Existe una arista  $e = uv$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ ,  $\phi(u) = v$  y  $\phi(v) = u$ .

Un resultado similar en espíritu al Teorema de Elementos Fijos II de Halin se tiene para automorfismos de árboles finitos. Este teorema será de utilidad en la demostración de la conjetura para árboles con finita cantidad de ends y más de 2 ends.

**Teorema 4.3.** *Sea  $T$  un árbol finito no vacío. Existe un vértice  $v$  o una arista  $e = uv$  tal que, para todo automorfismo  $\phi \in \text{Aut}(T)$ ,  $\phi(v) = v$  o  $\phi(u) = v$  y  $\phi(v) = u$  respectivamente.*

*Demostración.* Por inducción en el número de vértices, el caso base puede ser un vértice o una arista, ambos cumplen trivialmente el teorema. Sea  $T'$  el grafo inducido en  $T$  por los vértices de grado mayor a 1. Nótese que el grado se preserva vía cualquier automorfismo, luego para todo  $\phi \in \text{Aut}(T)$  se tiene que  $\phi(V(T')) = V(T')$  (la igualdad se tiene porque  $\phi^{-1}$  también es automorfismo). Luego, para todo  $\phi \in \text{Aut}(T)$ , el automorfismo restringido a  $T'$  es un automorfismo de  $T'$ . Nótese que  $T'$  tiene menos vértices que  $T$ , al menos 2 vértices menos, porque  $T$  tiene siempre al menos dos hojas. Además,  $T'$  no es vacío, pues si  $T$  no tiene vértices de grado mayor a uno,  $T$  es una arista o vértice y por lo tanto estamos en el caso base. Por hipótesis inductiva,  $T'$  también posee un vértice o arista fijo para todo automorfismo  $\square$

## 4.2. Automorfismos del rayo y doble rayo.

En esta sección se estudiará el grupo de automorfismos de un rayo y un doble rayo. Para hablar sobre el rayo o doble rayo se usará los conjuntos  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$  como conjunto de vértices, según lo visto en la Definición 2.6 y 2.7. Conocer estos grupos es de relevancia ya que, por los teoremas vistos anteriormente, un endomorfismo reducido a cierto rayo o doble rayo es un endomorfismo del rayo o un automorfismo del doble rayo. Conocer los posibles tipos de endomorfismos del rayo y automorfismos del doble rayo permitirá separar en casos más específicos la conjetura.

**Definición 4.4.** Sea  $R$  un rayo,  $Z$  un doble rayo y  $l$  un natural o un entero. Se llama *automorfismo de corrimiento* (shift en inglés) al endomorfismo  $\sigma : V(R) \rightarrow V(R)$  tal que

$\sigma(i) = i + 1$  para todo vértice  $i$  del rayo. Ídem para el doble rayo. Se llama *automorfismo de rotación* al morfismo  $\rho : V(Z) \rightarrow V(Z)$  tal que  $\rho(i) = -i$  para todo vértice  $i$  del doble rayo.

**Lema 4.5.** *Si  $Z$  es un doble rayo, entonces  $\text{Aut}(Z) = \langle \{\sigma, \rho\} \rangle$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi$  un automorfismo de  $Z$ . Como  $\phi$  es morfismo, preserva distancias. Luego  $\phi(1) = \phi(0) \pm 1$ . En general  $|\phi(i) - \phi(j)| = |i - j|$ . Notemos que  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi$  mapea 0 en 0. Con esto  $|\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i) - \sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(0)| = |i - 0|$ , es decir  $|\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i)| = |i|$ . El signo que aplica para cada  $i$  debe ser el mismo, sino se viola la preservación de distancias para algún par. Si  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i) = i$  entonces  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi = id$  y se tiene el lema. Si  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i) = -i$ , entonces  $\rho \circ \sigma^{-\phi(0)} \circ \phi = id$  y también se tiene el lema.  $\square$

**Lema 4.6.** *Si  $R$  es un rayo, entonces  $\text{End}(R) = \langle \{\sigma\} \rangle$ . En particular, si  $\phi$  es un endomorfismo propio, entonces  $\phi = \sigma^l$  con  $l$  mayor que cero.*

*Demostración.* Sea  $\phi$  un endomorfismo de  $R$ . Como  $\phi$  es morfismo, preserva distancias. Luego,  $\phi(1) = \phi(0) \pm 1$ . En general  $|\phi(i) - \phi(j)| = |i - j|$ . Notemos que  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi$  mapea 0 en 0. Con esto  $|\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i) - \sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(0)| = |i - 0|$ , es decir  $|\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i)| = |i|$ . En un rayo no hay posibilidad de signo negativo, luego  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi(i) = i$ . Entonces  $\sigma^{-\phi(0)} \circ \phi = id$  y se tiene el lema. En particular, si  $\phi$  es endomorfismo propio no puede ser la identidad, luego  $l$  no puede ser cero.  $\square$

**Lema 4.7.** *Si  $Z$  es un doble rayo y  $\phi \in \text{Aut}(Z)$  no fija vértices o aristas, entonces  $\phi$  es generado por el shift.*

*Demostración.* Por lo visto en el Lema 4.5  $\phi(i) = \pm i + c$ . En el caso negativo, si  $c = 2k$ , el vértice  $k$  queda fijo:  $\phi(k) = -(k) + 2k = k$ . Si  $c = 2k + 1$  para algún  $k$  natural, la arista  $\{k, k+1\}$  queda fija puesto que  $\phi(k+1) = -(k+1) + 2k + 1 = k$  y  $\phi(k) = -(k) + 2k + 1 = k + 1$ . Luego, si  $\phi$  no fija aristas o vértices entonces debe tener signo positivo y por lo tanto es generado por el shift.  $\square$

### 4.3. Isomorfismos de grafos infinitos.

En la siguiente sección se estudiarán los isomorfismos en grafos infinitos. Primeramente se mostrará un teorema que permite definir grafos localmente finitos como una sucesión de grafos finitos enraizados que van *anidados* respecto a la relación subgrafo. Es decir, un conjunto de grafos finitos  $\{(G_n, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $G_{n-1} \subseteq G_n$  y  $r_{n-1} = r_n$  para todo  $n$ . Se verá que, más importante que una sucesión de grafos, lo que realmente define al grafo límite es la sucesión de semimorfismos asociada a la inmersión de  $G_{n-1}$  en  $G_n$ . Si estos siempre mantienen una raíz única para toda la sucesión, se obtendrá un grafo distinto al caso cuando las raíces de los grafos de la sucesión no se mapean en la raíz de grafo sucesor en la sucesión. Un ejemplo de esto es el árbol binario y el *árbol binario inverso* (ver Figura 4.2). El primero posee una cantidad no contable de ends, mientras el segundo posee solo un end. Ambos se

pueden definir de una misma sucesión de grafos, sin embargo la forma en que se anida cada grafo de la sucesión en su sucesor hace la diferencia en el grafo límite final. También se demostrará un teorema que permite mostrar que dos grafos son isomorfos si son isomorfos por partes, es decir, si es posible encontrar un mismo subgrafo conexo en ambos grafos y que las componentes que se forman al sacar este subgrafo coinciden. Usando esto es posible encontrar un corolario que da un criterio para mostrar que dos grafos son no isomorfos, el cual será usado en los Capítulos 5 y 6.

**Definición.** Un *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$  es un morfismo epiyectivo entre  $G$  y  $H$ . Si existe un isomorfismo entre dos grafos  $G$  y  $H$ , se dice que los grafos son isomorfos, denotado  $G \cong_{\psi} H$ , donde  $\psi$  es un isomorfismo testigo. (Esta definición ya se dió en el Capitulo 2, Definición 2.3).

**Definición 4.8.** Un *isomorfismo enraizado* entre dos grafos con raíz  $(G, u)$  y  $(H, v)$  es un isomorfismo  $\psi : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $\psi(u) = v$  y se denota  $(G, u) \cong_{\psi} (H, v)$ .

### 4.3.1. Isomorfismos locales y sucesiones de grafos anidados.

Un teorema de relevancia para la conjetura de alternativa en árboles fue dado por Tyomkyn en [14] y originalmente por Halin en [7]. Este teorema permite asegurar que dos grafos enraizados localmente finitos son isomorfos si los subgrafos a distancia  $k$  respecto a la raíz son isomorfos, para todo  $k$  natural. Esto no se tiene si se saca la hipótesis de localmente finitos. A continuación se presenta el lema dado por Tyomkyn con una demostración en detalle, y un ejemplo sobre cómo dos árboles con grado infinito en un nodo son localmente isomorfos pero no son isomorfos.

**Definición 4.9.** Sea  $(G, r)$  y  $(G', r')$  dos grafos enraizados. Se dice que  $(G, r)$  es *localmente isomorfo* a  $(G', r')$  si  $(G, r)|_n$  es isomorfo a  $(G', r')|_n$  para todo natural  $n$ .

**Lema 4.10** (Tyomkyn [14], Halin [7]). *Dos grafos enraizados  $(G, r)$ ,  $(G', r')$  localmente finitos son isomorfos sí y solo si son localmente isomorfos.*

*Demostración.* Sea  $\psi_n$  el isomorfismo testigo entre  $(G, r)|_n$  y  $(G', r')|_n$ .

Para la suficiencia, cada isomorfismo  $\psi_n$  induce un isomorfismo entre los grafos  $(G, r)|_m$  y  $(G', r')|_m$  con índice menor. Sea  $Iso$  el conjunto de todos los isomorfismos  $\psi_n$  y los isomorfismos inducidos por algún  $\psi_n$ . Sea  $Iso_k$  el conjunto de los isomorfismos en  $Iso$  entre  $(G, r)|_k$  y  $(G', r')|_k$ . Note que los conjuntos  $Iso_k$  satisfacen las hipótesis del lema infinito de König, donde un isomorfismo de  $Iso_n$  apunta a uno de  $Iso_{n-1}$  si lo induce. La condición de localmente isomorfos asegura que  $Iso_n$  es distinto de vacío para todo natural  $n$ . Por Lema 2.22 existe entonces un rayo usando la relación descrita. Note que este rayo no necesariamente está compuesto por los isomorfismos  $\psi_n$  o alguna subsecuencia. Sea  $\{\psi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  el conjunto de isomorfismos del rayo encontrado. Este rayo en particular es un conjunto de isomorfismos que van *anidados*, es decir, para todo  $k$  se tiene que  $\psi'_k$  reducido a  $(G, r)|_{k-1}$  induce el isomorfismo  $\psi'_{k-1}$  entre  $(G, r)|_{k-1}$  y  $(G', r')|_{k-1}$ .

Una familia de isomorfismos como la anterior permite construir un isomorfismo global  $\Psi'$  definido de la siguiente forma: para un vértice  $v$  en  $G$  a distancia  $n$  de  $r$ , la imagen  $\Psi'(v)$  es el vértice  $\psi_n(v)$ . Para demostrar que  $\Psi'$  es isomorfismo es necesario probar primero que es morfismo y además es epiyectivo.

$\Psi'$  es morfismo: para todo par de vértices en  $G$  existe un  $K$  suficientemente grande para que ese par esté en  $(G, r)|_K$ . Como los isomorfismos del rayo son anidados, la función  $\Psi'|_{(G, r)|_K}$  es igual a  $\psi'_K$ . Como  $\psi'_K$  es isomorfismo, en particular es morfismo luego si el par de vértices forma una arista, su imagen también debe formar una arista en  $G'$ , ídem si no la forman.

$\Psi'$  es epiyectivo: para todo vértice  $v'$  en  $G'$ , tomando  $K$  suficientemente grande para que  $K$  sea mayor a la distancia entre  $v'$  y  $r'$ , el vértice  $v'$  tiene preimagen  $v$  en  $G$  vía  $\psi'_K$ , ya que  $\psi'_K$  es isomorfismo en particular es epiyectivo. Por la definición de  $\Psi'$ , esta preimagen  $v$  también se mapea en  $v'$  vía  $\Psi'$ , luego también es preimagen respecto a  $\Psi'$ . Por último,  $\Psi'(r) = r'$  pues  $\psi'_K(r) = r'$  para todo  $K$ .

Para la condición necesaria, si  $\Psi$  es un isomorfismo entre  $(G, r)$  y  $(G', r')$ , como es morfismo debe preservar distancias. Es decir  $\Psi(V((G, r)|_n)) = V((G', r')|_n)$ . Con esto, la función  $\Psi|_{(G, r)|_n}$  es un morfismo epiyectivo entre  $(G, r)|_n$  y  $(G', r')|_n$ , por lo que se tiene la definición de localmente isomorfos.  $\square$

*Observación 4.2.* El lema anterior no se tiene para grafos en general. Por ejemplo, sea  $(T, r)$  el árbol de la Figura 4.1: un vértice del que parte un camino de largo  $n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $(T', r')$  el mismo grafo, pero del que parte además un rayo desde su raíz. Ambos grafos son localmente isomorfos, sin embargo no pueden ser isomorfos ya que uno posee un rayo y el otro no. Al tener un vértice de grado infinito es posible que los grafos a distancia  $n$  de la raíz posean un número infinito de posibles isomorfismos. En general, la existencia de una familia de isomorfismos anidados asegura un isomorfismo global para cualquier tipo de grafos. Sin embargo, en los grafos del ejemplo nunca es posible encontrar una familia de isomorfismos anidados. Esto porque la parte del rayo que está a distancia  $n$  de su raíz debe mapearse en algún camino de  $T_n$ , pero todos esos caminos son finitos. Si la porción del rayo se mapea en una porción de un camino de largo  $N$  en  $T$ , ningún isomorfismo posterior en índice a  $N$  podrá extender a  $\psi_N$ .

El siguiente lema sigue un espíritu similar al Lema 4.10 y es de gran utilidad para la presente memoria.

**Lema 4.11.** *Sea  $T$  árbol localmente finito y sea  $\phi$  un endomorfismo de  $T$ . Si  $\phi$  fija un vértice o permuta una arista, entonces es epiyectivo.*

*Demostración.* Si  $\phi$  fija un vértice  $r$ , entonces para todo natural  $n$  se tiene que  $\phi(V((T, r)|_n)) \subseteq V((T, r)|_n)$ , pero como  $(T, r)|_n$  es finito para todo  $n$  (pues  $T$  es localmente finito) entonces se tiene la igualdad de conjuntos, y esto implica la epiyectividad de  $\phi$  pues todo vértice de  $(T, r)$  está a una distancia finita a  $r$ . Si  $\phi$  permuta una arista, entonces  $\phi^2$  fija un vértice. Luego  $\phi^2$  es epiyectiva, pero por propiedades de la composición esto implica que  $\phi$  es epiyectiva.  $\square$

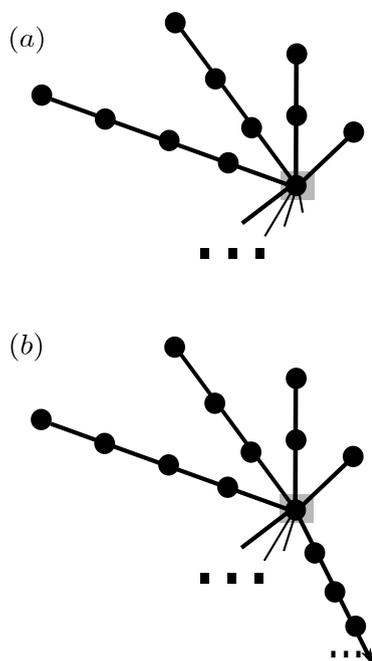


Figura 4.1: (a) El grafo es formado por caminos de largo  $n$ , con  $n \geq 1$  que comparten su primer vértice. (b) El grafo es formado por caminos de largo  $n$ , con  $n \geq 1$  que comparten su primer vértice, más un rayo que también comparte su primer vértice con los caminos. Ambos grafos son localmente isomorfos pero no son isomorfos.

**Corolario 4.12.** *Sea  $T$  un árbol localmente finito. Si  $\phi$  es un endomorfismo propio, entonces existe un rayo  $U$  subgrafo de  $T$  tal que  $\phi(U) \subsetneq U$ .*

*Demostración.* Si es endomorfismo propio, en particular no es epiyectivo. Luego, por el Lema 4.11 y el Teorema de Elementos Fijos I de Halin (Teorema 4.1) se tiene el corolario.  $\square$

*Observación 4.3.* A partir del Lema 4.11 se puede demostrar el Teorema 3.12.

Con el Lema 4.10 se puede entonces definir un grafo localmente finito si se conocen sus subgrafos dados por los vértices a distancia  $k$  respecto a su raíz. Estos subgrafos forman una cadena respecto a la relación subgrafo enraizado. Ahora, si se tiene una sucesión de grafos que no necesariamente es una sucesión dada por los subgrafos a distancia  $k$  respecto a algún vértice y que crecen en forma anidada, es decir, cada grafo es subgrafo de su sucesor ¿es posible definir un grafo límite a partir de la sucesión? ¿qué sucesiones permiten definir un único grafo límite?

Una posible forma de definir un límite sería formalizando la idea intuitiva de *unión* de los grafos: unir todos los conjuntos de vértices y aristas de los grafos de la familia. Esto funciona perfectamente para familias definidas usando conjuntos que se reutilicen para definir los grafos sucesores. Si se tiene solamente el grafo abstracto de cada término de una familia anidada no queda claro cómo definir la unión, ya que pueden existir muchas formas de identificar un grafo dentro del grafo sucesor en su familia. Con esto, se definirá un grafo unión que también depende de la familia de semimorfismos asociada a la relación subgrafo en cada par consecutivo de la familia anidada.

Dado que la unión eventualmente puede no ser única, se prefirió definir el límite de una sucesión anidada de grafos como el grafo tal que posea una subsucesión de subgrafos anidados isomorfos a los de la familia, y cualquier otro grafo que posea esta propiedad tiene al grafo límite como subgrafo. Esta definición de límite no asegura la unicidad tampoco.

En la Figura 4.3 se muestra como una sucesión de grafos finitos puede crecer para formar grafos límites distintos (Ver figura 4.2 para conocer la definición del árbol binario inverso). En la Figura 4.3 es clave notar que los grafos de la familia forman una cadena solo con la relación subgrafo (no enraizadamente). Ahora, para familias anidadas enraizadamente también puede pasar esto. En la Figura 4.4, los grafos forman una cadena con la relación subgrafo enraizado, tomando como raíz el vértice achurado en la figura. Dependiendo de la forma en que se vayan agregando vértices se obtienen grafos distintos, aunque en cada paso el grafo parcial que se observa sea el mismo.

¿Si los grafos de una cadena son localmente finitos es posible tener unicidad del límite? Tampoco. En la Figura 4.5 se muestra que los grafos límite son aproximados por una misma familia de elementos localmente finitos pero que de alguna forma “se acumulan” en el nodo central. Una definición que resultó ser efectiva para demostrar la unicidad del límite es la siguiente:

**Definición 4.13.** Una familia de grafos indexados en  $\mathbb{N}$ , enraizados y localmente finitos  $\{(T_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  es *expansiva* si para todo  $k$  natural, existe un  $N$  asociado tal que, para todo  $i$  índice de la familia mayor o igual a  $N$  se tiene que  $(T_i, r_i)|_k$  es isomorfo a  $(T_N, r_N)|_k$ .

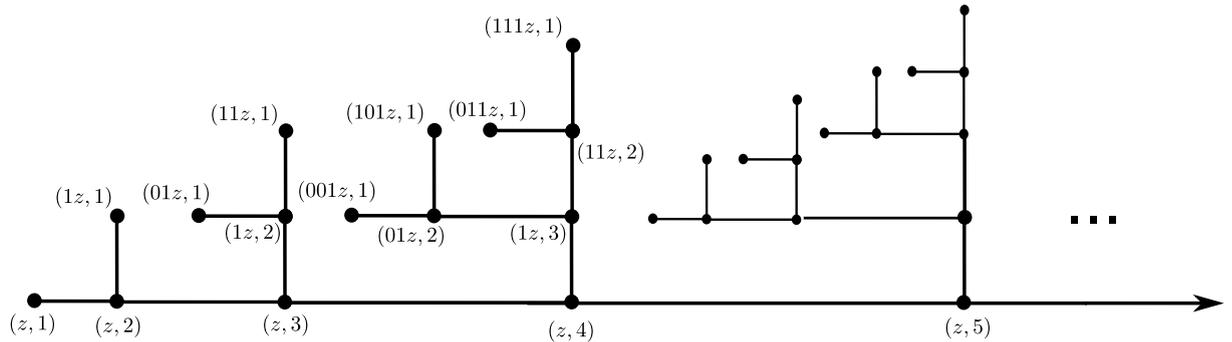


Figura 4.2: En la figura se muestra el inicio del árbol binario inverso. Su definición formal es la siguiente: sea  $J$  el conjunto de palabras infinitas sobre el alfabeto  $\{0, 1\}$  que terminan en una secuencia infinita de ceros. Sea  $z$  la secuencia infinita de ceros. Sea  $J'$  el conjunto  $\{(x, n) : x \in J, n \in \mathbb{N}\}$ . El conjunto de vértices del árbol binario es  $J'$  y sus aristas corresponden a los pares  $(x, n)(y, m)$  tales que  $m = n + 1$  y  $x = 0y$  o  $x = 1y$ . Cercano a cada vértice de la figura se muestra el par correspondiente en  $J'$  según esta definición.

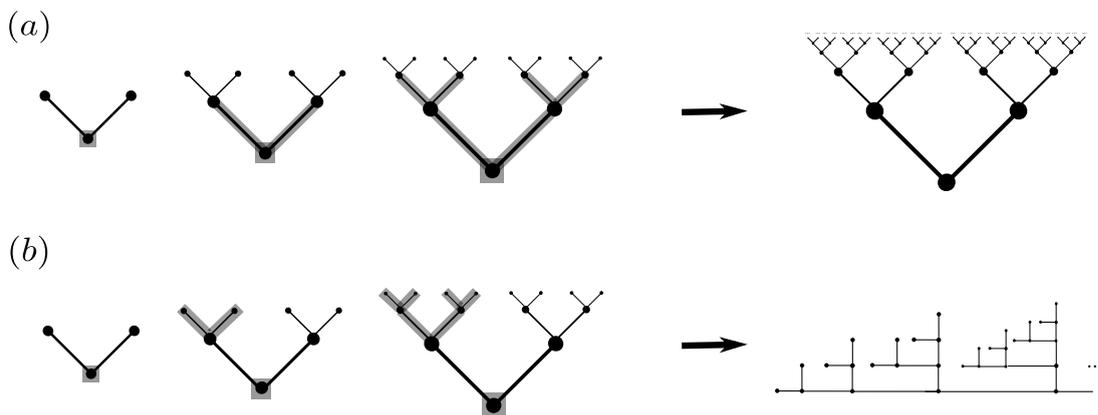


Figura 4.3: En la figura, se muestra como una misma sucesión de grafos anidados puede converger a grafos totalmente distintos. En cada grafo se achura la inmersión del subgrafo antecesor. (a) El grafo límite de la sucesión es el árbol binario. (b) El grafo límite de la sucesión es el árbol binario inverso.

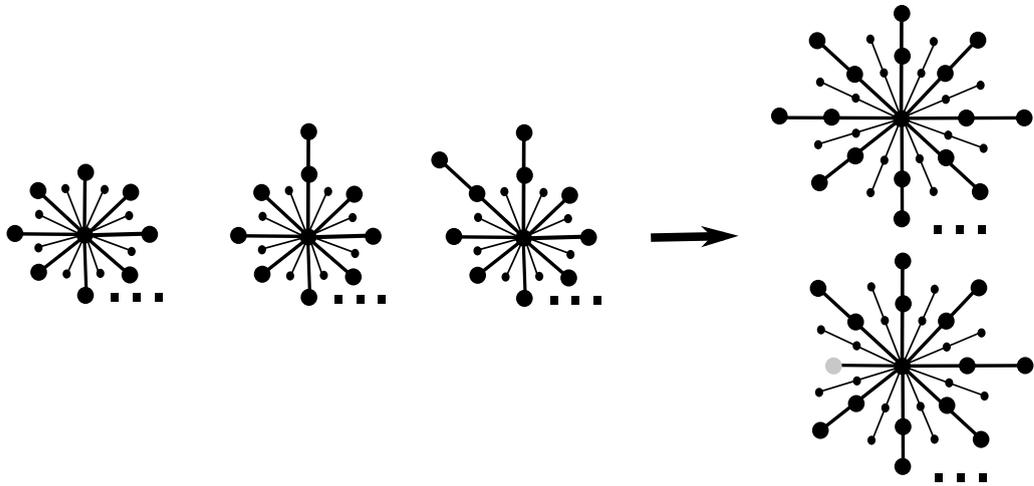


Figura 4.4: La estrella infinita a la que se le van agregando vecinos a sus hojas. Si se reserva cierto vértice al cual nunca se le agrega una hoja, en cada paso se verán los mismos grafos pero en el límite no se obtiene el mismo grafo final. El vértice claro corresponde al vértice reservado. En cada grafo la raíz es el único vértice de grado infinito.

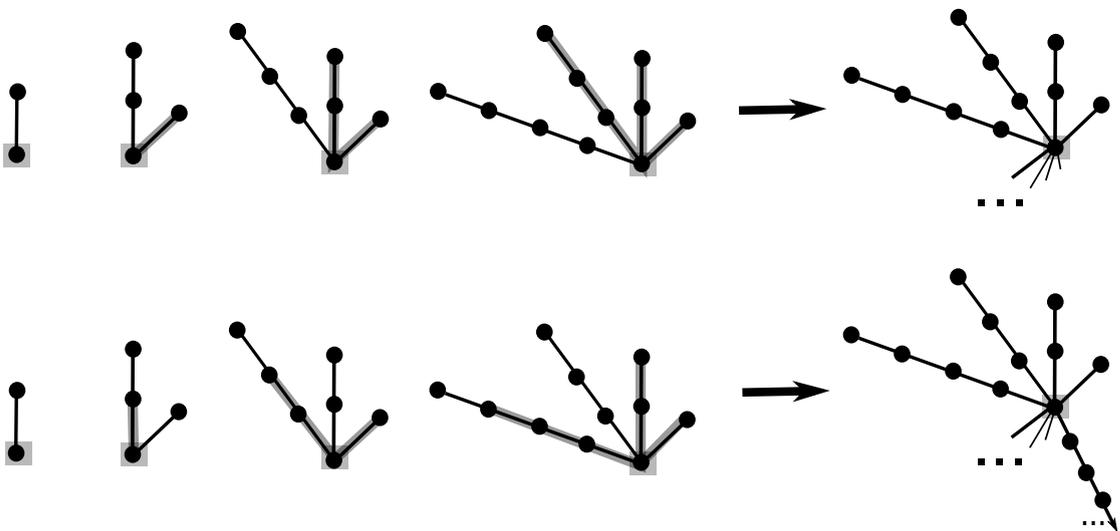


Figura 4.5: Una misma sucesión de grafos, incluso con la relación subgrafo enraizado y con árboles localmente finitos, que posee dos formas de definir la unión. En cada grafo se achura la imagen del subgrafo antecesor, y se achura con un cuadrado la raíz.

Notar que esta condición previene que haya este fenómeno de acumulación sobre algún vértice, de tal modo que cada grafo de la sucesión sea localmente finito pero el grafo límite pase a tener grado infinito. Usando la hipótesis de expansividad en una familia de grafos localmente finitos (no necesariamente finitos) es posible definir un grafo límite de manera única solo viendo la familia de grafos que lo aproximan. A continuación se formalizará esto en el siguiente lema.

**Lema 4.14.** *Sea  $\mathcal{G} = \{(G_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia expansiva de grafos localmente finitos, tal que para todo  $i$  natural  $(G_i, r_i)$  es subgrafo de  $(G_{i+1}, r_{i+1})$ . Luego, existe un único grafo  $(G, r)$  con las siguientes dos propiedades:*

1. *Todos los elementos de la familia  $\mathcal{G}$  son subgrafos enraizados de él*
2. *Todo otro grafo que cumpla la propiedad 1 tiene a  $(G, r)$  como subgrafo.*

*Se llamará a este grafo el límite de la familia  $\mathcal{G}$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi_{i,i+1}$  el semimorfismo testigo asociado a  $(G_i, r_i)$  subgrafo de  $(G_{i+1}, r_{i+1})$ . Sea  $\Phi$  la familia de todos los semimorfismos anteriores,  $\Phi = \{\phi_{i,i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Para un índice  $j$  mayor estricto a  $i$ , se denota  $\phi_{i,j}$  la composición  $\phi_{j-1,j} \circ \dots \circ \phi_{i+1,i+2} \circ \phi_{i,i+1}$ . Sea  $n(u)$  el índice del grafo al cual pertenece el vértice  $u$ . Se define  $\eta(u)$  como:

$$\eta(u) = \min_{i \in \mathbb{N}} \{i : \exists u^* \in G_i \ \phi_{i,n(u)}(u^*) = u\}$$

Es decir, el menor índice en donde  $u$  puede encontrar preimagen. Sea  $u^\downarrow$  la preimagen en  $G_{\eta(u)}$ . Como los semimorfismos son inyectivos, la preimagen en  $G_{\eta(u)}$  es única y por lo tanto  $u^\downarrow$  está bien definido. También se tiene que  $u^\downarrow$  es igual a  $\phi_{\eta(u),n(u)}^{-1}(u)$ . En particular, por la minimalidad de la definición de  $\eta(u)$ , para todo  $u$  en  $\cup_{i \in \mathbb{N}} V(G_i)$  se tiene que  $u^\downarrow$  no encuentra preimágenes en grafos con índice menor. Es decir,  $(u^\downarrow)^\downarrow = u^\downarrow$ . Además, es fácil ver que  $\eta(u) = n(u^\downarrow)$ . Se define el grafo *unión*  $U_{\mathcal{G}, \Phi}$  como el grafo con conjunto de vértices:

$$V(U_{\mathcal{G}, \Phi}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{u \in V(G_i)} u^\downarrow.$$

Es decir, todo el conjunto de vértices en  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V(G_i)$  que no tienen preimagen usando la familia  $\Phi$ . Se define su conjunto de aristas como:

$$E(U_{\mathcal{G}, \Phi}) = \{uv : \exists j \ \phi_{n(u),j}(u)\phi_{n(v),j}(v) \in E(G_j)\}. \quad (4.1)$$

Es decir, es el conjunto de pares  $uv$  tales que existe un índice  $j$  donde  $\phi_{n(u),j}(u)\phi_{n(v),j}(v)$  pertenece a  $E(G_j)$ . Además, se define la raíz de la unión como  $r_0$  la raíz de  $G_0$ .

Nótese que el grafo unión depende de la familia de grafos **y de la forma en que los elementos de la familia se inyectan entre sí**, cuya información esta guardada en la familia  $\Phi$ . (Ver figura 4.5).

Es fácil ver que, por la definición del grafo unión, todo elemento de la familia es subgrafo del grafo unión: basta tomar el conjunto de vértices

$$V(G_i)^\downarrow = \{u^\downarrow : u \in V(G_i)\}.$$

Note que si  $uv$  pertenece a  $E(G_i)$  entonces  $\phi_{\eta(u),i}(u^\downarrow)\phi_{\eta(v),i}(v^\downarrow) = uv \in E(G_i)$ . Por la definición de  $E(U_{\mathcal{G},\Phi})$  esto implica que  $u^\downarrow v^\downarrow \in E(U_{\mathcal{G},\Phi})$ .

A continuación se demostrará que, para todo  $k$  entero, se tiene que el grafo inducido por los vértices a máxima distancia  $k$  en  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k$  es isomorfo a  $(G_N, r_N)|_k$  ( $N$  es el índice asociado a  $k$  en la hipótesis de expansividad).

Sea  $k$  un natural dado y  $N$  su índice asociado por la hipótesis de expansividad. Notemos que por la acotación de distancias de los semimorfismos, se tiene siempre que para todo natural  $j$  mayor o igual a  $N$ , la imagen  $\phi_{N,j}(V((G_N, r_N)|_k))$  es subconjunto de  $V((G_j, r_j)|_k)$  (ver Observación 4.1). Además, por la hipótesis de expansividad, se tiene que  $(G_N, r_N)|_k$  es isomorfo a  $(G_j, r_j)|_k$ . Como cada grafo es localmente finito,  $(G_N, r_N)|_k$  y  $(G_j, r_j)|_k$  tienen un número finito de vértices. Como son isomorfos y con finita cantidad de vértices, deben entonces tener la misma cantidad de vértices. Como  $\phi_{i,i+1}$  es semimorfismo, en particular es inyectivo, luego  $\phi_{N,j}(V((G_N, r_N)|_k))$  tiene la misma cantidad (finita) de vértices que  $V((G_N, r_N)|_k)$ . Con esto se tiene que  $\phi_{N,j}(V((G_N, r_N)|_k))$  tiene la misma cantidad (finita) de vértices que  $V((G_j, r_j)|_k)$ . Esto más la inclusión implica que deben ser iguales. Es decir

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \phi_{N,j}(V((G_N, r_N)|_k)) = V((G_j, r_j)|_k). \quad (4.2)$$

Ahora, sea  $u$  un vértice en  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k$ . Si  $n(u)$  es mayor a  $N$ , por la igualdad (4.2) siempre existe una preimagen en  $N$  de  $u$ . Luego  $u$  no puede ser vértice de  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  (Ver definición de  $u^\downarrow$ ).

Sea  $\psi : V((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k) \rightarrow V((G_N, r_N)|_k)$  un candidato para isomorfismo entre  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k$  y  $(G_N, r_N)|_k$ . Se define como

$$\psi(u) = \phi_{n(u),N}(u).$$

Por la observación anterior siempre se tendrá que  $n(u)$  es menor o igual a  $N$ , por lo que  $\psi$  está bien definido.

Epiyectividad: Si  $u$  pertenece a  $V((G_N, r_N)|_k)$ , existe un camino  $P$  que conecta  $u$  con  $r_N$  de largo menor o igual a  $k$ . Notese que  $P^\downarrow$  también es un camino de  $U_{\mathcal{G},\Phi}$ , que conecta  $u^\downarrow$  con  $r_N^\downarrow = r_0$ . Luego,  $u^\downarrow$  pertenece a  $V((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k)$ . Nótese también que  $\psi(u^\downarrow) = u$ . Luego, todo vértice de  $V(G_N|k)$  tiene preimagen en  $V((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k)$ .

Morfismo: Si  $uv$  pertenece a  $E((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k)$ , por definición (4.1) existe un natural  $l$  tal que  $\phi_{n(u),l}(u)\phi_{n(v),l}(v)$  pertenece a  $E(G_l)$ . Si  $l$  es menor o igual a  $N$ , aplicando el morfismo  $\phi_{l,N}$  se tendrá que

$$\phi_{l,N}(\phi_{n(u),l}(u))\phi_{l,N}(\phi_{n(v),l}(v)) = \phi_{n(u),N}(u)\phi_{n(v),N}(v) = \psi(u)\psi(v) \in E(G_N).$$

Luego,  $\psi$  es semimorfismo en este caso. Si  $l$  es mayor a  $N$ , por (4.2) se sabe que  $\phi_{N,l}$  es isomorfismo entre  $(G_N, r_N)|_k$  y  $(G_l, r_l)|_k$ . Usando su inversa se tendrá que:

$$\phi_{l,N}^{-1}(\phi_{n(u),l}(u))\phi_{l,N}^{-1}(\phi_{n(v),l}(v)) = \phi_{n(u),N}(u)\phi_{n(v),N}(v) = \psi(u)\psi(v) \in E(G_N).$$

Luego,  $\psi$  también es semimorfismo en este caso. Si  $uv$  pertenece a  $E((G_N, r_N)|_k)$ , notemos que

$$uv = \phi_{\eta(u),N}(\phi_{\eta(u),N}^{-1}(u))\phi_{\eta(v),N}(\phi_{\eta(v),N}^{-1}(v)) = \phi_{\eta(u),N}(u^\downarrow)\phi_{\eta(v),N}(v^\downarrow).$$

Por la definición de  $E((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k)$  se tiene entonces que  $u^\downarrow v^\downarrow$  es una arista de  $E(U_{\mathcal{G},\Phi})$ . En particular, para  $P$  un camino  $r_N$  a  $u$  o  $v$  de largo menor o igual a  $k$  y una arista  $pq$  de  $P$ , la arista  $p^\downarrow q^\downarrow$  estará en  $E(U_{\mathcal{G},\Phi})$  y por lo tanto  $u^\downarrow$  y  $v^\downarrow$  estará a distancia  $k$  de la raíz. Luego, la arista  $u^\downarrow v^\downarrow$  estará también en  $E((U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k)$ .

Con esto se tiene la recíproca y por lo tanto  $\psi$  es morfismo. Como es además epiyectivo, es isomorfismo; y con esto se demuestra lo buscado. En particular, si  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k$  es isomorfo a  $(G_N, r_N)|_k$  para todo  $k$ , entonces  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es localmente finito. (Un vértice cualquiera está a distancia  $l$  de la raíz, luego él y sus vecinos están en  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_{l+1}$ , que es isomorfo a  $(G_N, r_N)|_{l+1}$ , el cual es localmente finito).

Si otro grafo  $(\mathcal{G}', r')$  tiene a todos los elementos de la familia como subgrafos, en particular para cada  $k$  tendrá a  $(G_N, r_N)$  con  $N$  asociado a la hipótesis de expansividad, y por lo tanto  $(\mathcal{G}', r')|_k$  posee como subgrafo a  $(G_N, r_N)|_k$ , que es isomorfo a  $(U_{\mathcal{G},\Phi}, r_0)|_k$ . Por Lema 4.10, el grafo  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es localmente isomorfo a un subgrafo enraizado de  $\mathcal{G}'$ . Como  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es localmente finito, entonces  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es isomorfo a un subgrafo enraizado de  $\mathcal{G}'$ , es decir, es subgrafo enraizado de  $\mathcal{G}'$  (ver Observación 3.1). Luego, el grafo  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es subgrafo de todo otro grafo que pueda contener a los grafos de la familia  $\mathcal{G}$ . Por Teorema 3.12 no existen gemelos entre grafos localmente finitos con la relación subgrafo enraizado, es decir, la relación subgrafo enraizado entre árboles localmente finitos es una relación de orden. Con esto se tiene entonces que  $U_{\mathcal{G},\Phi}$  es mínimo entre los grafos que pueden contener como subgrafos enraizados a los elementos de la familia  $\mathcal{G}$ . En particular, el mínimo es único.  $\square$

*Observación 4.4.* Notar que se eligió una familia arbitraria de semimorfismos. Luego, todos los grafos unión para cualquier familia de semimorfismos son isomorfos entre sí.

### 4.3.2. Isomorfismos por componentes.

En esta sección se formalizará cierta intuición sobre cómo mostrar que dos grafos son isomorfos. En los grafos que surgen de las demostraciones de la Conjetura 3.8 que se darán en este trabajo aparecen constantemente grafos formados a partir de un rayo y subárboles que se conectan al rayo en un único vértice. Para dos grafos vistos de esta forma, intuitivamente uno es isomorfo a otro si existe una forma de mapear su rayo en el rayo del otro y además, sus componentes asociadas a cada vértice coinciden con las componentes del rayo en la llegada. En los siguientes resultados se generaliza esta idea para isomorfismos y se mostrará que esta idea también aplica como criterio para ser subgrafo. En las siguientes definiciones, lemas y corolarios, siempre  $T$  será un árbol.

**Definición 4.15.** Sea  $T$  un árbol y  $L$  un subgrafo conexo de  $T$ . Para  $v \in V(L)$ , se denota  $[T : L](v)$  la componente conexa de  $T - E(L)$  que contiene a  $v$ . Los subgrafos  $[T : L](v)$  se

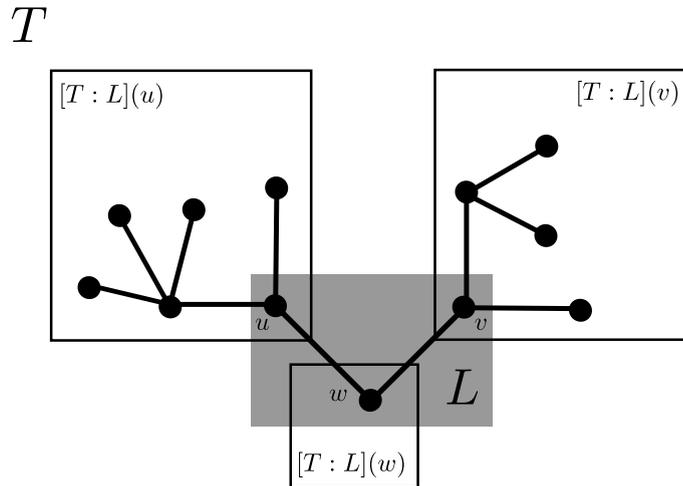


Figura 4.6: La zona sombreada es \$L\$ el grafo base de la descomposición. La definición dada acá para \$[T:L](v)\$ es válida para árboles finitos o infinitos.

llaman *componentes* y \$L\$ se llamará *base de descomposición*. Sea \$[T:L]\$ el conjunto de todas las componentes \$[T:L](v)\$ con \$v\$ vértice de \$L\$.

*Observación 4.5.* Nótese que se está usando la Definición 2.17 para borrar aristas.

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestra gráficamente la idea de la descomposición por componentes en un grafo. Nótese que la base de descomposición puede ser infinita. El siguiente lema caracteriza las componentes usando una definición tipo argmin.

**Lema 4.16.** *Para cada \$[T:L](v)\$ existe un único vértice de \$L\$ perteneciente a \$V([T:L](v))\$ y corresponde a \$v\$.*

*Demostración.* Por definición, \$v\$ pertenece a \$[T:L](v)\$. Si existe otro vértice \$u \in L\$ distinto a \$v\$, como \$[T:L](v)\$ es conexo existe un camino \$P\$ en \$[T:L](v)\$ que conecta \$u\$ y \$v\$, y no usa aristas de \$E(L)\$. Pero como \$L\$ es conexo, existe otro camino \$Q\$ disjunto en aristas a \$P\$ que también conecta \$u\$ con \$v\$. Luego, la unión de \$P\$ y \$Q\$ contiene un ciclo, lo cual es una contradicción pues \$T\$ es árbol. \$\square\$

**Lema 4.17.** *El grafo inducido por los vértices en \$T\$ tal que su vértice más cercano de \$L\$ es \$v\$, corresponde a \$[T:L](v)\$. Es decir*

$$[T:L](v) = T[\{u : d(u, v) = \min_{l \in V(L)} d(u, l)\}].$$

*Demostración.* Sea \$u\$ un vértice de \$[T:L](v)\$. Como \$[T:L](v)\$ es conexo existe un camino \$P\$ que conecta \$u\$ y \$v\$, por lo que el mínimo \$\min\_{r \in V(L)} d(v, r)\$ está acotado. Si existe otro vértice \$v'\$ distinto a \$v\$ en donde se alcance el mínimo, en particular debe existir un camino \$Q\$ que

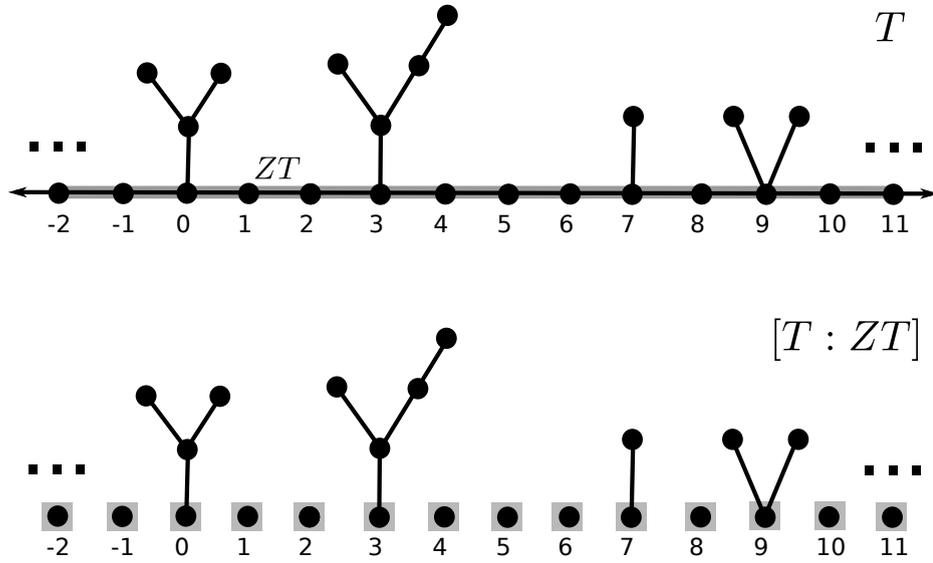


Figura 4.7: La zona sombreada es un doble rayo, base de la descomposición. La componente asociada a un nodo sin vecinos fuera del doble rayo es simplemente un vértice.

conecte  $u$  con  $v'$ . Por la elección de  $v'$ , el camino  $Q$  no usa vértices de  $L$  fuera de  $v'$ , y por lo tanto no usa aristas de  $L$ . Entonces  $v' \in Q$  es parte de  $[T : L](v)$ , pues es conexo. Pero esto contradice el Lema 4.16.

□

El siguiente Lema relaciona las componentes de  $[T : L]$  y  $[T : L']$  para dos grafos conexos  $L$  y  $L'$  tales que  $L'$  es subgrafo de  $L$ , y será de utilidad en las demostraciones de los Capítulos 5 y 6.

**Definición 4.18.** Sea  $T$  un árbol, sea  $L$  un subgrafo conexo de  $T$  y  $L'$  un subgrafo conexo de  $L$ . Se define la *frontera de  $L'$  respecto a  $L$*  como el conjunto de vértices en  $V(L')$  que son vecinos de algún vértice de  $V(L) - V(L')$ . Este conjunto de vértices se denota como  $\partial L' | L$ . Todo vértice de  $V(L')$  que no está en  $\partial L' | L$  será llamado *vértice interior de  $L'$  respecto a  $L$* .

**Lema 4.19.** Sea  $T$  un árbol, sea  $L$  un subgrafo conexo de  $T$  y sea  $L'$  un subgrafo conexo de  $L$ . Se tiene que, para todo vértice  $v$  en  $V(L')$ , la componente  $([T : L'](v), v)$  contiene como subgrafo enraizado a la componente  $([T : L](v))$ . Además, si  $v$  es un punto interior de  $L'$  respecto a  $L$ , entonces se tiene la igualdad entre las componentes. Es decir,

$$(\forall v \in V(L')) ([T : L](v)) \subseteq ([T : L'](v), v),$$

$$(\forall v \in V(L')) v \notin \partial L' | L \Rightarrow ([T : L](v), v) = ([T : L'](v), v).$$

*Demostración.* Nótese que, en general, si un conjunto  $V(L')$  es subconjunto de  $V(L)$  dentro de cierto grafo, se tiene que

$$\min_{l \in V(L)} d(u, l) \leq \min_{l \in V(L')} d(u, l).$$

Luego, para todo vértice  $v$  en  $V(L)$  y un vértice  $u$  cualquiera, si para ese vértice  $u$  se tiene que  $d(u, v) = \min_{l \in V(L)} d(u, l)$  entonces usando la desigualdad anterior se tiene que  $d(u, v) \leq \min_{l \in V(L')} d(u, l)$ . Pero como  $v$  está en  $V(L)$ , la desigualdad no puede ser estricta y por lo tanto  $d(u, v) = \min_{l \in V(L')} d(u, l)$ . Por Lema 4.17 lo anterior implica que para todo árbol  $T$  y  $L'$  subgrafo de  $L$ , se tiene que  $V([T : L](v))$  es subconjunto de  $V([T : L'](v))$ , y por lo tanto  $([T : L](v), v)$  es subgrafo de  $([T : L'](v), v)$ , para todo vértice  $v$  de  $L'$ .

Si  $v$  es un vértice interior de  $L'$  respecto a  $L$ , entonces para todo vértice  $u$  en  $[T : L'](v)$ , en el camino que conecta  $u$  con  $v$  no existe un elemento de  $L$ . Luego,  $v$  también es el elemento más cercano en  $L$  que se conecta a  $u$ . Es decir,  $V([T : L'](v)) \subseteq V([T : L](v))$ . Con lo anterior, se tiene la igualdad de conjuntos y el lema.  $\square$

El siguiente lema formaliza la idea explicada al inicio de la sección sobre isomorfismos entre bases de descomposición y componentes que calzan.

**Lema 4.20.** *Sea  $L$  un subgrafo conexo de  $T$ . Sea  $\psi : V(T) \rightarrow V(T')$  un morfismo entre  $T$  y  $T'$ . Entonces  $\psi$  es isomorfismo si y sólo si para todo vértice  $v$  de  $L$ , la imagen de la componente generada por  $L$  que incluye a  $v$  es la componente en  $T'$  definida por  $\psi(L)$  que contiene a  $\psi(v)$ . Es decir*

$$\psi \text{ es isomorfismo} \Leftrightarrow \forall v \in V(L) \quad \psi([T : L](v)) = ([T' : \psi(L)](\psi(v))).$$

*Demostración.* Sea  $L' = \psi(L)$ . Si  $u$  pertenece a  $[T : L](v)$  entonces por el Lema 4.17  $d(u, v) = \min_{l \in L} d(u, l)$ . Como  $\psi$  preserva distancias en el grafo (ver Observación 4.1),  $d(u, v) = d(\psi(u), \psi(v))$ . Luego,

$$d(\psi(u), \psi(v)) = d(u, v) = \min_{l \in L} d(u, l) = \min_{l \in L} d(\psi(u), \psi(l)).$$

Como  $\psi(L) = L'$  entonces  $\min_{l \in L} d(\psi(u), \psi(v)) = \min_{v' \in L'} d(\psi(u), v')$ . Luego

$$d(\psi(u), \psi(v)) = \min_{v' \in L'} d(\psi(u), v').$$

Esto significa que el mínimo de la distancia a  $L'$  lo alcanza  $\psi(v)$ . Luego  $\psi(u) \in [T' : L'](\psi(v))$  y por lo tanto  $\psi([T : L](v)) \subseteq [T' : L'](\psi(v))$ . Como  $\psi$  es biyectiva, aplicando lo mismo para  $\psi^{-1}$  se tiene que  $\psi^{-1}([T' : L'](v)) \subseteq [T : L](\psi^{-1}(v))$ . Aplicando  $\psi$  a la última expresión se obtiene la contención recíproca.

Para la condición suficiente, si  $v \in L'$ , por definición de  $L'$  se tiene que  $\psi(L) = L'$ . Luego  $v$  tiene preimagen. Si  $v \notin L'$ , entonces pertenece a alguna de las componentes  $[T' : L']$ . Por la hipótesis de la proposición, cada vértice en una componente tiene preimagen. Luego  $\psi$  es biyectiva y por lo tanto es isomorfismo.  $\square$

El lema anterior da un criterio para mostrar que un morfismo es epiyectivo, y luego un isomorfismo. Además, sirve para mostrar que si existe un isomorfismo  $\psi$  entonces las componentes de bases que son isomorfas calzan entre sí, es decir,  $([T : L](v), v) \cong_{\psi} ([T' : L'](\psi(v)), \psi(v))$  para todo vértice de  $L$ . Supóngase que las componentes  $([T : L](v), v)$  y  $([T' : L'](\psi'(v)), \psi'(v))$  son isomorfas con algún isomorfismo testigo  $\psi'$ , y que  $L \cong_{\phi} L'$  con algún otro isomorfismo. ¿Es posible construir un isomorfismo global entre  $T$  y  $T'$ ? El siguiente lema demuestra que sí es posible y da una caracterización de isomorfismo: dos grafos son isomorfos si existen bases respecto a las cuales sus componentes coinciden.

**Lema 4.21.** *Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles. Ambos árboles son isomorfos sí y solo si existe un subgrafo  $H$  en  $T$  y un subgrafo  $H'$  en  $T'$  tal que  $H$  es isomorfo a  $H'$  (sea  $\phi$  un isomorfismo testigo) y para todo vértice  $v$  en  $H$ , la componente asociada a  $v$  (con raíz en  $v$ ) es isomorfa a la componente en  $T'$  asociada a  $\phi(v)$  (con raíz en  $\phi(v)$ ). Es decir  $T \cong T' \Leftrightarrow$*

$$(\exists H \subseteq T, H' \subseteq T') H \cong_{\phi} H' \wedge (\forall v \in V(H)) ([T : H](v), v) \cong ([T' : H'](\phi(v)), \phi(v)).$$

*Demostración.* Para la condición necesaria, sea  $\psi$  isomorfismo entre  $T$  y  $T'$ . Basta tomar un subgrafo conexo  $L$  y tomar  $H = L, H' = \psi(L)$ . Por el Lema 4.20 se tiene.

Para la condición suficiente, sea  $\phi$  isomorfismo entre  $H$  y  $H'$ ,  $\rho_v$  isomorfismo entre  $([T : H](v), v)$  y  $([T' : H'](\psi(v)), \psi(v))$ . Se construirá un isomorfismo  $\psi : V(T) \rightarrow V(T')$  a partir de los isomorfismos de la hipótesis.

$$\psi(u) = \begin{cases} \phi(u) & u \in V(H) \\ \rho_v(u) & u \in [T : H](v) \end{cases} \quad (4.3)$$

Como los isomorfismos  $\rho_v$  son entre grafos con raíz, entonces  $\rho_v(v) = \phi(v)$  y no hay indefinición de  $\psi$ . Sea  $u$  un vértice de  $T'$ . Si  $u$  está en  $H'$ , tiene preimagen. Si no está en  $H'$ , está en algún  $[T' : H'](v)$ , y por la epiyectividad de  $\rho_v$ , tiene preimagen. Luego  $\psi$  es epiyectiva. Falta probar que  $\psi$  es morfismo. Es decir  $uv \in E(T) \Leftrightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(T')$ . Se tienen cuatro casos:

- $u, v \in V(H)$ . Se tiene la propiedad gracias a que  $\psi(u) = \phi(u)$  y  $\phi$  es isomorfismo entre  $L$  y  $L'$ .
- $u, v \in V([T : H](r))$  para algún  $r$ . se tiene también la propiedad gracias a que  $\psi(u) = \rho_r(u)$  y  $\rho_v$  es isomorfismo.
- $u \in V(H), v \in V([T : H](r))$ . Si  $u = r, v \neq r$  entonces se tiene la propiedad gracias al isomorfismo  $\rho_r$  enraizado en  $r$ . Si  $u \neq r$ , no existen aristas de este tipo. Si existiera la arista  $e = uv$ , entonces se tendría el ciclo  $uPrPv \cup e$ , pero  $T$  es árbol.
- $v \in V([T : H](r_1)), v \in V([T : H](r_2)), r_1 \neq r_2$ . No existen aristas  $uv$  de este tipo, gracias a la definición de  $[T : H](r)$  los vértices  $r_1$  y  $r_2$  son distintos y por Lema 4.16 deben generar componentes conexas distintas. Por lo tanto no pueden haber aristas intermedias, de lo contrario  $[T : H](r_1)$  y  $[T : H](r_2)$  serían la misma componente.

En cada caso se tiene la equivalencia, luego  $\psi$  es morfismo. Ya se demostró que es epiyectiva, luego es un isomorfismo.  $\square$

*Observación 4.6.* A partir de los Lemas 4.20 y 4.21 es posible definir un grafo a partir de una base de descomposición y sus componentes asociadas. Es decir, dado un grafo  $G$  definido de esta forma y otro  $G'$  tal que posee un subgrafo que es isomorfo a la base de descomposición y las componentes asociadas calzan, entonces  $G'$  debe ser isomorfo a  $G$  y por lo tanto  $G'$  está bien definido como grafo abstracto. Se dirá que un grafo es *definido por componentes* cuando solamente se conozca de él una base de descomposición y las componentes correspondientes a los vértices de la base.

Los siguientes corolarios son directos de los dos lemas anteriores.

**Corolario 4.22.** Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles con subgrafos conexos  $H$  y  $H'$  respectivamente. Si  $T$  es isomorfo a  $T'$  ( $\psi$  isomorfismo testigo) y la imagen de  $H$  vía  $\psi$  es  $H'$ , entonces para todo vértice  $v$  de  $H$  la componente asociada a  $v$  en  $T$  respecto a  $H$  (enraizada en  $v$ ) es isomorfa a la componente asociada a  $\psi(v)$  en  $T'$  respecto a  $H'$  (enraizada en  $\psi(v)$ ). Es decir,

$$[T \cong_{\psi} T' \wedge \psi(H) = H'] \Rightarrow (\forall v \in V(H)) ([T : H](v), v) \cong_{\psi} ([T' : H'](\psi(v)), \psi(v))$$

*Demostración.* Directo del Lema 4.21.  $\square$

**Corolario 4.23.** Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles con subgrafos conexos  $H$  y  $H'$  respectivamente. Si  $T$  es subgrafo de  $T'$  ( $\psi$  semimorfismo testigo) y la imagen de  $H$  vía  $\psi$  es  $H'$ , entonces para todo vértice  $v$  de  $H$  la componente asociada a  $v$  en  $T$  respecto a  $H$  (enraizada en  $v$ ) es subgrafo enraizado a la componente asociada a  $\psi(v)$  en  $T'$  respecto a  $H'$  (enraizada en  $\psi(v)$ ). Es decir,

$$[T \subseteq_{\psi} T' \wedge \psi(H) = H'] \Rightarrow (\forall v \in V(H)) ([T : H](v), v) \subseteq_{\psi} ([T' : H'](\psi(v)), \psi(v))$$

*Demostración.* Aplicar Corolario 4.22 y Observación 3.1.  $\square$

**Corolario 4.24.** Sean  $T$  y  $T'$  dos árboles. Entonces  $T$  es subgrafo de  $T'$  sí y solo si existe un subgrafo  $H$  en  $T$  y un subgrafo  $H'$  en  $T'$  tal que  $H$  es isomorfo a  $H'$  ( $\phi$  isomorfismo testigo) y para todo vértice  $v$  en  $H$ , la componente asociada a  $v$  (con raíz en  $v$ ) es subgrafo enraizado a la componente en  $T'$  asociada a  $\phi(v)$  (con raíz en  $\phi(v)$ ). Es decir  $T \subseteq T' \Leftrightarrow$

$$(\exists H \subseteq T, H' \subseteq T') H \cong_{\phi} H' \wedge (\forall v \in V(H)) ([T : H](v), v) \subseteq ([T' : H'](\phi(v)), \phi(v)).$$

*Demostración.* La condición necesaria es directa del Corolario 4.23, tomando  $H$  grafo conexo cualquiera y su imagen vía un morfismo testigo. La condición suficiente, directa del Lema 4.21 y la Observación 3.1.  $\square$

## Capítulo 5

# Demostración de la conjetura de alternativa en árboles, para árboles localmente finitos con un número finito de ends.

Durante el periodo de preparación para la presente memoria se buscó resolver la Conjetura 1.2 en casos sencillos. Se escogió el número de ends como una restricción para entender el problema. El primer resultado obtenido fue que un grafo con una cantidad finita de ends y más de dos ends no puede tener endomorfismos propios. Luego, no tiene gemelos propios y siempre  $m(T) = 1$ . Este resultado se basa en que un árbol con estas características tiene un vértice o arista fijo para cualquier endomorfismo, de hecho tiene un sub-árbol finito estable para todo endomorfismo. Usando el Lema 4.3 se tiene en particular un elemento fijo.

Después se revisó el caso de árboles con exactamente dos ends. Se encontró una forma de construir gemelos a partir de un endomorfismo propio. En general demostrar que dos posibles gemelos son no-isomorfos es la parte difícil de la demostración. Sin embargo en estos árboles resultó ser más fácil ya que al haber exactamente dos ends entonces hay un único doble rayo en el grafo y sus gemelos. Usando este doble rayo como base de descomposición y el Lema 4.20 con sus corolarios se puede demostrar que los gemelos construídos son no-isomorfos entre sí.

El caso con exactamente un end resultó ser un poco más difícil. A diferencia de grafos con dos ends, no es posible definir una única base de descomposición. Por ejemplo, en el árbol binario inverso cada rayo  $R$  que parte de alguna hoja genera la misma familia de componentes  $[T : R]$ . Luego, si se construye un gemelo usando un rayo como base y se modifican componentes respecto a esa base, hay que considerar la posibilidad que en el grafo modificado exista otra base distinta respecto a la cual el grafo modificado corresponde con el grafo original y por lo tanto sea isomorfo a él. Se verá que, para un árbol localmente finito con exactamente un end, si llegara a existir una segunda base desde donde “se ve”  $T$  en el árbol

modificado, entonces existe una componente que se contiene a sí misma en forma estricta. Pero las componentes son finitas (si una componente es infinita posee un segundo end (ver Lema 2.20), luego esto no puede pasar. Se presentarán las demostraciones siguiendo el orden creciente en la cantidad de ends. Las dos primeras demostraciones presentan similitudes, pero el argumento final para demostrar el teorema es de distinta naturaleza en cada caso.

Se denota  $\mathcal{T}_o$  el conjunto de árboles localmente finitos y  $\mathcal{T}_o^k$  el conjunto de árboles localmente finitos tal que el cardinal de  $\Omega(T)$  es igual a  $k$ .

## 5.1. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^1$ .

A continuación se presenta la demostración de la conjetura para árboles con exactamente un end. Se procederá del siguiente modo: se demostrará que las componentes asociadas a un rayo en un árbol de  $\mathcal{T}_o^1$  siempre son finitas. Luego, se definirá una noción de árboles “acotados” y no “acotados”, se demostrará la conjetura para árboles no acotados con el Corolario 3.14, y se demostrará la conjetura para árboles acotados usando una construcción ad-hoc de infinitos gemelos.

**Teorema 5.1.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^1$ . Entonces  $m(T) = 1$  o  $\infty$ .*

En los siguientes lemas,  $w_i$  es el único end de  $T_i$  y para cualquier rayo, su vértice con índice  $i$  será denotado por el nombre del rayo en minúscula y subíndice  $i$ . Por ejemplo,  $rt_i$  es el vértice con índice  $i$  del rayo  $RT$ .

Para partir, se demostrará que las componentes asociadas a algún rayo como base de descomposición deben ser finitas, como se explicó al inicio del capítulo. Esto será de utilidad en la demostración final y será un distintivo entre el caso con un único end e infinitos ends.

**Lema 5.2.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^1$  y  $R$  un rayo de él. Se tiene que las componentes dadas por el rayo  $R$  como base de descomposición son finitas, es decir  $[T : R](r_i)$  es finito para todo natural  $i$ .*

*Demostración.* Si  $[T : R](r_i)$  es infinito, por Lema 2.20 posee un vértice de grado infinito o un rayo como subgrafo. No puede poseer vértice de grado infinito porque  $T$  es localmente finito, y no puede poseer un rayo porque sería disjunto en aristas a  $R$ , ya que pertenece a  $[T : R](r_i)$  y por definición 4.15 la componente  $[T : R](r_i)$  no tiene aristas de  $E(R)$ , por lo que el end en  $[T : R](r_i)$  sería un end distinto al end dado por  $R$ . Es decir, el árbol  $T$  tendría más de un end. Pero esto contradice la pertenencia de  $T$  a  $\mathcal{T}_o^1$ .  $\square$

Por Corolario 4.12 se sabe que todo endomorfismo propio de un árbol localmente finito debe mapear un rayo dentro de sí mismo. Usando un rayo con esta propiedad como base de descomposición es posible encontrar en sus componentes inducidas familias de grafos enraizados que forman una cadena en la relación subgrafo. Se definirá el tipo de cadenas que aparecen de este modo y se caracterizará una noción de “acotado”.

**Definición 5.3.** Una familia  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  de grafos enraizados es una  $\subseteq$ -1cadena si para todo índice  $i$  en los naturales se tiene que  $(A_i, a_i)$  es subgrafo de  $(A_{i+1}, a_{i+1})$ .

**Lema 5.4.** Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^1$  y sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T$ . Entonces existe un rayo  $RT$  tal que  $\phi(RT) \subseteq RT$ , maximal respecto a la inclusión con esta propiedad; y existen  $l$  familias  $\subseteq$ -1cadena correspondientes a  $\{([T : RT](r_{p+kl}), r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $l$  natural y  $p$  entre 0 y  $l - 1$ . Se dirá en este caso que  $\phi$  genera las familias.

*Demostración.* Por Corolario 4.12 se tiene la existencia de  $RT$ . En particular se puede suponer que  $RT$  es el rayo maximal respecto a la inclusión. Como  $T$  tiene solo un end, no se tiene el caso de un doble rayo maximal planteado en el Teorema 4.1. Con esto, el endomorfismo  $\phi$  reducido en su dominio a  $V(RT)$  induce un endomorfismo de  $RT$ . Por Lema 4.6, el endomorfismo  $\phi$  reducido en el dominio a  $RT$  es generado por el shift, es decir, existe  $l$  natural mayor que cero tal que  $\phi|_{RT} = \sigma^l$ . Por Lema 4.23 se tiene que  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : \phi(RT)](\phi(r_i)), \phi(r_i))$ . Pero  $\phi|_{RT} = \sigma^l$ , luego

$$([T : \phi(RT)](\phi(r_i)), \phi(r_i)) = ([T : \phi(RT)](r_{i+l}), r_{i+l}).$$

Por Lema 4.19, para todo índice  $i$  mayor a cero se tiene que  $([T : \phi(RT)](r_{i+l}), r_{i+l})$  es igual a  $([T : RT](r_{i+l}), r_{i+l})$  (Nótese que el vértice  $r_l$  es el único vértice de la frontera de  $\phi(RT)$  respecto a  $RT$ ) y por lo tanto  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : RT](r_{i+l}), r_{i+l})$ .

Nótese que la componente  $[T : \phi(RT)](r_l)$  contiene a la componente  $[T : RT](r_l)$  y además contiene la parte de  $RT$  que no tiene preimagen vía  $\phi$  y todas las componentes respecto a  $RT$  asociadas a estos vértices de  $RT$ . Luego,  $[T : \phi(RT)](r_l)$  es distinto a  $[T : RT](r_l)$ .

Sin embargo, la imagen de  $V([T : RT](r_0) - \{r_0\})$  no interseca a  $V(RT)$ . Esto porque, de lo contrario, existiría un vértice  $r'$  tal que  $\phi(r') = r_p$  y un camino  $P$  que conecta  $r'$  con  $r_0$ . Como  $\phi(r') = r_p$  es un vértice de  $R$  y  $\phi(r_0) = r_l$  también es un vértice de  $RT$ , el camino  $P$  también debe mapearse en  $RT$ . Agregando  $P$  al inicio de  $RT$  se encontraría un rayo que incluye a  $RT$  y que se mapea dentro de sí mismo vía  $\phi$ , contradiciendo la maximalidad de  $RT$  respecto a la inclusión sobre los rayos con esta propiedad. Luego, la componente  $([T : RT](rt_0), rt_0)$  se mapea en la parte de  $[T : \phi(RT)](r_l)$  que no posee vértices de  $RT$  salvo su raíz, es decir  $([T : RT](rt_0), rt_0)$  es subgrafo de  $([T : RT](r_l), r_l)$ .

Aplicando lo anterior sucesivamente, se obtienen entonces  $l$  familias de grafos  $\subseteq$ -1cadena dados por  $\{[T : RT](r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $p$  entre 0 y  $l - 1$ .  $\square$

**Definición 5.5.** Sea  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una  $\subseteq$ -1cadena. Se dice que es *acotada superior (acotsup)* si existe un índice  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo índice  $i$  mayor o igual a  $k$  se tiene que  $(A_i, a_i)$  es isomorfo a  $(A_k, a_k)$ . En este caso su componente  $(A_k, a_k)$  se le llama componente límite superior. El índice de regularidad superior para una  $\subseteq$ -1cadena acotsup es el menor  $k'$  que cumple la definición de acotsup. Una  $\subseteq$ -1cadena es no acotada superior (nacotsup) si no es acotsup.

**Definición 5.6.** Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^1$  que posee un endomorfismo propio. Se dice que  $T$  es *acotado superior (acotsup)* si posee un endomorfismo propio  $\phi$  (con  $RT$  su rayo asociado) tal

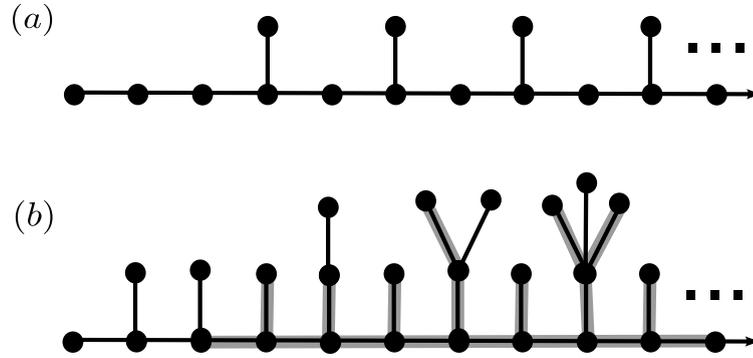


Figura 5.1: Ejemplos de grafos acotsup y nacotsup (Definición 5.6). (a) El grafo de la figura es acotsup. (b) El grafo de la figura es nacotsup. Se achura la imagen del grafo vía un endomorfismo propio para poder ver que  $T - \phi(T)$  posee infinitas componentes conexas.

que todas las familias  $\subseteq$ -1cadena que genera son acotsup. Sea  $k$  el índice del primer vértice a partir del cual todas las componentes con índice igual o mayor a  $k$  son isomorfas a la componente límite en su familia. Este índice será llamado el *índice de regularidad superior de  $T$  y  $\phi$* . Se dirá que  $T$  es *no acotado superior* (nacotsup) si  $T$  no es acotsup, es decir, para todo endomorfismo propio de  $T$  alguna de las familias que genera es nacotsup. Nótese que si  $T$  es nacotsup no necesariamente posee endomorfismos propios.

Se separará la demostración del Teorema 5.1 para árboles acotsup y nacotsup. A continuación se presentan las demostraciones para cada caso.

**Lema 5.7.** *Si  $T \in \mathcal{T}_o^1$  es nacotsup y posee un endomorfismo propio, entonces  $m(T) = \aleph_1$ .*

*Demostración.* Si  $T$  es nacotsup entonces posee un endomorfismo propio tal que  $T - \phi(T)$  posee infinitas componentes conexas: basta con tomar el rayo  $RT$  del Lema 5.4 que induce  $l$  familias  $\subseteq$ -1cadena, como  $T$  es nacotsup posee una cantidad infinita de vértices  $rt_i$  donde  $([T : RT](rt_i), rt_i) \subsetneq ([T : RT](rt_{i+l}), rt_{i+l})$ ; luego en esos vértices se generaran componentes conexas (no vacías) al eliminar  $\phi(T)$  de  $T$ . Por Corolario 3.14 se tiene que  $m(T) = \aleph_1$ .  $\square$

**Lema 5.8.** *Si  $T \in \mathcal{T}_o^1$  es acotsup distinto de un rayo, entonces  $m(T) \geq \aleph_0$ .*

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{T}_o^1$  acotsup distinto de un rayo. Sea  $RT$  su rayo asociado del Lema 5.4. Sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T$  que genera la menor cantidad de familias y sea  $l$  esta cantidad. Sea  $k$  el índice de regularidad superior de  $T$  y  $\phi$ . Por la Definición 5.6, las componentes de  $[T : RT]$  con índice mayor o igual a  $k$  son todas isomorfas al grafo límite en su familia. Sea  $\mathcal{L}$  el conjunto de sus componentes límites de cada familia y  $(L_p, r)$  el grafo límite de la familia  $p$ , para  $p$  en  $\{0, 1, \dots, l-1\}$ .

Sea  $T'$  el grafo que se obtiene al quitar de  $T$  los vértices de las componentes  $[T : RT](rt_i)$  con  $i$  menor a  $k$ . Este grafo posee un rayo  $RT' \subseteq RT$  respecto al cual las componentes

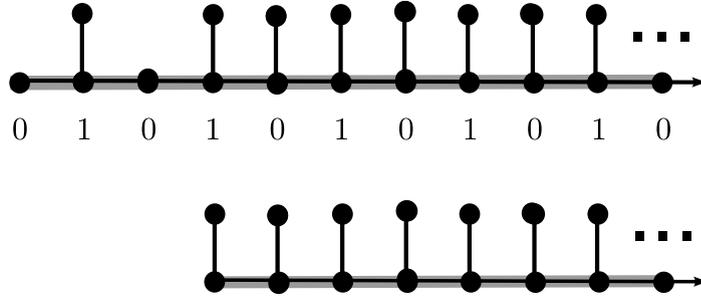


Figura 5.2: Sea  $T$  el grafo de la figura (parte superior). La mínima cantidad de familias que se puede generar en el es 2. Sin embargo, como todas las componentes límite de sus familias son isomorfas, en  $T'$  (grafo de la parte inferior) la mínima cantidad de familias que se pueden engendrar por un endomorfismo propio es 1. En ambos dibujos se achura el rayo que se usa como base de descomposición.

$[T' : RT']$  son los grafos límites de cada familia en  $T$ . Por definición, siempre se tendrá que  $T'$  es subgrafo de  $T$ . Además, si se toma un  $m$  suficientemente grande tal que para todo natural  $i$  se tenga que  $ml + i$  sea mayor o igual a  $k$ , entonces  $([T : RT](rt_{ml+i}), rt_{ml+i})$  será el grafo límite en su familia y por lo tanto isomorfo a  $[T' : RT'](rt'_{ml+i-k})$ . Recordar además que siempre se tiene que  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : RT](rt_{ml+i}), rt_{ml+i})$ , pues son parte de una misma familia. Tomando el morfismo entre  $RT$  y  $RT'$  dado por  $\phi(i) = i + ml - k$ , por el Corolario 4.24 se tiene entonces que  $T$  es subgrafo de  $T'$  y por lo tanto  $T$  y  $T'$  son gemelos. Por la transitividad de la relación gemelos, basta encontrar  $\aleph_0$  gemelos no isomorfos entre sí de  $T'$  para mostrar el lema.

La idea de la demostración es modificar las componentes de  $RT'$  para generar gemelos de  $T'$ . La modificación consiste en reemplazar ciertas componentes por una componente que sea no isomorfa pero aún esté contenida en el grafo límite de la familia donde pertenece. Sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T'$  que genera la menor cantidad de familias. Sea  $l$  esta cantidad (renombramos  $l$ ). Notar que la mínima cantidad de familias de  $T'$  puede diferir de el valor dado para  $T$  (Ver Figura 5.2).

Como  $T$  es distinto del rayo, alguna de las componentes límites de  $[T : RT]$  debe ser distinta del grafo enraizado que solo posee un nodo y éste es la raíz. A este grafo se le llamará *el árbol trivial* y será denotado como  $(r, r)$ . Luego, debe existir alguna familia tal que su grafo límite sea distinto de  $(r, r)$  y por lo tanto posea un subgrafo enraizado propio. Sea  $p$  la menor modularidad  $l$  de las familias en  $T'$  tal que  $[T' : RT'](rt'_p)$  posee un subgrafo propio. Sea  $[T' : RT'](rt'_p)^*$  un subgrafo propio de  $[T' : RT'](rt'_p)$ . Sea  $L_p^* = [T' : RT'](rt'_p)^*$ .

Sea  $w$  una palabra del lenguaje  $0 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ . Se denota  $w(i)$  el caracter  $i$ -ésimo de  $w$ , donde  $w(0)$  es su primer caracter. Se asume que para un índice fuera de su tamaño (mayor

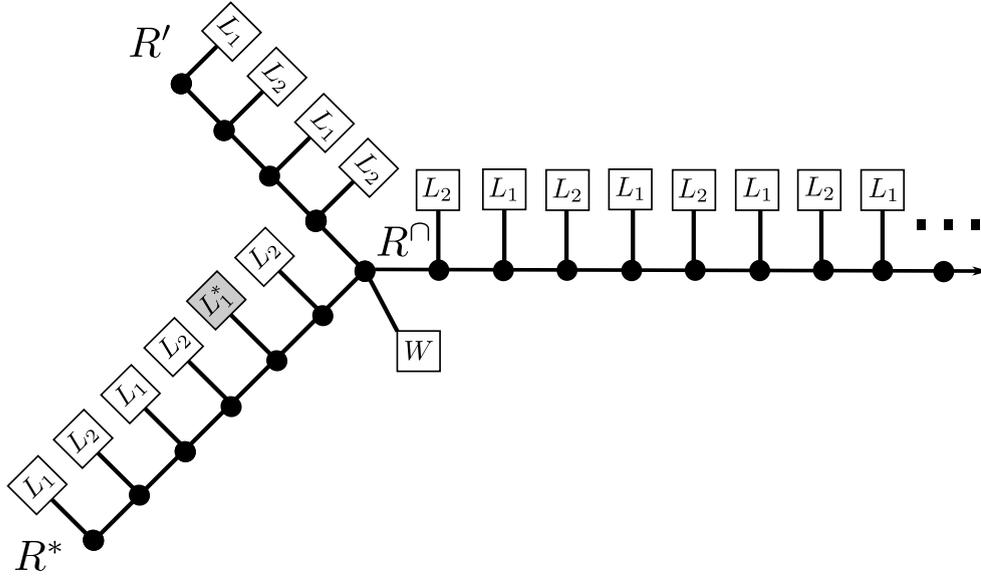


Figura 5.3: La figura representa como se ve un grafo  $T'$  que eventualmente sea isomorfo a  $D^w$ . En este caso  $w = 001$ . En el grafo de la figura se tiene que  $\nu'(0) = 4$  y  $\nu^*(0) = 6$ . Se define  $W$  como el grafo inducido por la intersección entre  $V([D^w : R'](r'_{\nu'(0)}))$  y  $V([D^w : R^*](r^*_{\nu^*(0)}))$ . A priori no se puede demostrar que  $W$  sea el árbol trivial.

a  $|w|$ ) siempre se tiene que  $w(i) = 0$ .

Se define el grafo  $D^w$  a partir de un rayo que será llamado  $RD^w$  y sus componentes  $[D^w : RD^w](rd_j^w)$ , usando la Observación 4.6 que permite definir correctamente un grafo de este modo. Se definen las componentes  $([D^w : RD^w](rd_j^w), rd_j^w)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  de la siguiente forma (ver Figura 5.3):

$$([D^w : RD^w](rd_j^w), rd_j^w) \cong \begin{cases} ([T' : RT'](rt'_j), rt'_j) & \text{si } j \not\equiv p \pmod{l} \\ ([T' : RT'](rt'_j), rt'_j) & \text{si } j \equiv p \pmod{l}, j = rl + p \text{ y } w(r) = 0. \\ ([T' : RT'](rt'_p)^*, rt'_p)^* & \text{si } j \equiv p \pmod{l}, j = rl + p \text{ y } w(r) = 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Para probar el lema se demostrarán las siguientes tres proposiciones: cada  $D^w$  es gemelo de  $T'$ , todos los gemelos  $D^w$  generados son no-isomorfos con  $T'$ , y entre ellos son no-isomorfos. Como el cardinal de las palabras en el lenguaje dado es infinito contable, la familia de gemelos  $\{D^w\}_{w \in 0 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1}$  sería testigo de la existencia de contable cantidad de gemelos no isomorfos entre sí, luego  $m(T) \geq \aleph_0$ .

Primero: Para todo  $w$  en  $0 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1$ , el grafo  $D^w$  es gemelo de  $T'$ . El endomorfismo inducido por el morfismo que mapea  $rd_i^w$  en  $rt'_i$  cumple las hipótesis del Corolario 4.24, por construcción de  $D^w$ . También, al quitar las componentes de los vértices en  $RT'$  con índice

menor o igual a  $|w|l$  se reobtiene  $T'$ , luego  $T' \subseteq D^w$ , y por lo tanto son gemelos.

Segundo: Para todo  $w$ ,  $D^w$  no es isomorfo a  $T'$ . Supongamos que son isomorfos. Sea  $\rho : \overline{V(T')} \rightarrow V(D^w)$  un isomorfismo entre  $D^w$  y  $T'$ . Sea  $R'$  la imagen de  $RT'$  vía  $\rho$ , sea  $R^* = RD^w$ . Por Lema 4.20 se tiene que, para todo  $i$  natural,  $([T' : RT'](r_i), r_i)$  es isomorfo a  $([D^w : R'](\rho(r_i)), \rho(r_i))$ .

$$R' = \rho(RT'), \quad R^* = RD^w \quad (5.2)$$

Como  $T'$  tiene solo un end, por Lema 2.23  $R'$  y  $R^*$  deben compartir una cola. Sea  $R_\cap$  el rayo maximal respecto a la inclusión que está en la intersección de  $V(R')$  y  $V(R^*)$ . Notemos que  $R_\cap$  tiene tres enumeraciones, una heredada por  $R^w$ , otra heredada de  $R'$  y la propia natural tomando vértice 0 su hoja. Sea  $\nu^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la función que asocia la numeración de  $R_\cap$  con  $R^*$ , y  $\nu'$  lo mismo pero con  $R'$  (ver Figura 5.3). En particular  $\nu^*(0)$  es el índice en  $R^*$  del primer vértice o vértice 0 de  $R_\cap$ . Nótese que por el Lema 4.19, para un índice  $i$  estrictamente mayor a 0 se tiene que

$$[D^w : R_\cap](r_i^\cap) = [D^w : R'](r'_{\nu'(0)+i}) = [D^w : R^*](r^*_{\nu^*(0)+i}). \quad (5.3)$$

De la ecuación anterior es posible concluir que  $L_{\nu'(0)+i \bmod l}$  es isomorfo a  $L_{\nu^*(0)+i \bmod l}$  para un índice  $i$  mayor que cero, ya que después de cierto índice en  $R'$  y en  $R^*$  las componentes de  $[D^w : R']$  y  $[D^w : R^*]$  son elementos de  $\mathcal{L}$ . Sea  $\Delta = \nu'(0) - \nu^*(0) \bmod l$ . Si  $\Delta$  es distinto de 0, tomando  $i = Nl - \nu^*(0)$  y  $N$  suficientemente grande en (5.3) se tendrá que  $L_\Delta \cong L_0$ . En general tomando  $i = Nl - \nu^*(0) + k\Delta + r$  y  $N$  suficientemente grande se tendrá que  $L_{(k+1)\Delta+r} \cong L_{k\Delta+r}$ , con  $r \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ . Con esto, el endomorfismo inducido por  $\sigma^\Delta : V(RT') \rightarrow V(RT')$  en  $T'$  también es un endomorfismo válido. Pero se buscó un endomorfismo que generara una mínima cantidad de familias  $\subseteq$ -1cadena, esa cantidad es  $l$ . Es decir, se encontró un endomorfismo que genera una menor cantidad que esa mínima cantidad, lo cual es una contradicción. Necesariamente  $\Delta$  debe ser cero y por lo tanto  $\nu'(0)$  tiene la misma modularidad  $l$  que  $\nu^*(0)$ .

$$\nu'(0) \equiv \nu^*(0) \bmod l \quad (5.4)$$

La primera componente en  $R_\cap$  es especial. Notemos que  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  contiene todos los vértices de  $R^*$  que no están en  $R'$ , ya que estos vértices se conectan a  $r'_{\nu'(0)}$  a través de la parte del rayo  $R^*$  que es disjunto a  $R'$ . Del mismo modo,  $[D^w : R^*](r^*_{\nu^*(0)})$  contiene los vértices de  $R'$  que no pertenecen a  $R^*$ . Nótese además que las componentes respecto a  $R'$  deben ser elementos de  $\mathcal{L}$ , ya que respecto a  $R'$  el grafo es isomorfo a  $T'$ . Por la ecuación (5.3) se tiene la igualdad entre  $[D^w : R'](v)$  y  $[D^w : R_\cap](v)$  para vértices que no están en la frontera de  $R_\cap$  respecto a  $R'$ . Estos vértices son todos salvo la hoja de  $R_\cap$ . Luego, todas las componentes  $[D^w : R_\cap](v)$  para vértices  $v$  interiores de  $R_\cap$  son elementos que pertenecen a  $\mathcal{L}$ .

Las componentes modificadas en  $R^*$ , que son isomorfas a  $[T' : RT'](rt'_p)^*$ , también podrían ser isomorfas al grafo límite de una familia distinta  $q$  en  $T'$ . Sin embargo, si un vértice de

$R^*$  cuya componente es isomorfa a  $[T' : RT'](rt'_p)^*$  es un vértice interior de  $R^\cap$ , por la ecuación (5.4) deberá ser isomorfa al grafo límite en su misma familia, lo cual contradice que  $[T' : RT'](rt'_p)^*$  sea subgrafo propio de  $[T' : RT'](rt'_p) = L_p$ . Nótese que todas las palabras de  $0 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$  terminan en 1, luego la última componente es una componente modificada. Con todo esto, el ultimo nodo en  $R^*$  tal que su componente es una componente modificada no puede ser un vértice interior de  $R^\cap$ . Es decir, el índice  $\nu^*(0)$  debe ser mayor o igual que el índice de este vértice. Luego,

$$\nu^*(0) \geq (|w| - 1)l + p. \quad (5.5)$$

Nótese que no se tiene desigualdad estricta, ya que nada impide a priori que la componente  $[D^w : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$  sea isomorfa a  $[T' : RT'](rt'_p)^*$ .

Nótese además que las palabras en  $0 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$  siempre parten con un cero. Luego, en la componente  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$ , donde se encuentran los vértices de  $V(R^*)$  con índice menor a  $\nu^*(0)$ , la componente asociada al vértice  $r_i^*$  debe ser isomorfa a  $L_i$ .

$$(\forall i \in \{0, 1, \dots, l-1\}) [D^w : R^*](r_i^*) \cong L_i. \quad (5.6)$$

Como  $R'$  es la imagen de  $RT'$  vía  $\rho$ , por Lema 4.20  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  es un elemento de  $\mathcal{L}$ . Luego, siempre existirá un  $q \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  tal que

$$(L_q, r) \cong [D^w : R'](r'_{\nu'(0)}). \quad (5.7)$$

Con (5.7) y (5.6), existe un índice  $q$  tal que

$$(L_q, r) \cong ([D^w : R'](r'_{\nu'(0)}), r'_{\nu'(0)}) \supseteq ([D^w : R^*](r_q^*), r_q^*) \cong (L_q, r). \quad (5.8)$$

La segunda contención es estricta ya que por (5.5) se tiene que

$$\nu^*(0) \geq (|w| - 1)l + p \geq (2 - 1)l + 0 = l.$$

Notar que los vértices en un rayo se cuentan a partir de cero, luego la desigualdad anterior muestra que  $([D^w : R'](r'_{\nu'(0)}), r'_{\nu'(0)})$  contiene siempre un vértice de  $V(R^*)$  distinto a  $r$ .

Luego, existe un  $q \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  tal que  $(L_q, r)$  se contiene a sí mismo de forma propia. Pero por Lema 5.2 todos los elementos de  $\mathcal{L}$  son finitos. Luego  $|V(L_q)| < |V(L_q)|$  lo cual es una contradicción.

Tercero: Para dos palabras  $w$  y  $w'$  distintas,  $D^w$  no es isomorfo a  $D^{w'}$ . Del mismo modo que en la demostración anterior, supongamos que son isomorfos. Sea  $\rho : V(D^{w'}) \rightarrow V(D^w)$  isomorfismo. Sea  $R'$  la imagen de  $RD^{w'}$  vía  $\rho$ , sea  $R^* = RD^w$ . Por Lema 4.20  $([D^{w'} : RD^{w'}](rd_i^{w'}), rd_i^{w'})$  es isomorfo a  $([D^w : R'](\rho(rd_i^{w'})), \rho(rd_i^{w'}))$  para todo índice  $i$ . Como  $T'$  tiene solo un end, por Lema 2.23 siempre se tendrá que  $R'$  y  $R^*$  comparten una cola. Sea  $R^\cap$  el rayo maximal respecto a la inclusión que está en la intersección de  $R'$  y  $R^*$ . Del mismo modo

que en la demostración anterior, se define  $\nu^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la función que asocia la numeración de  $R_\cap$  con  $R^*$ , y  $\nu'$  lo mismo para  $R'$ . Para cada índice  $i$  mayor estricto a 0 se tiene que

$$[D^w : R^\cap](r_i^\cap) = [D^w : R'](r'_{\nu'(0)+i}) = [D^w : R^*](r_{\nu^*(0)+i}^*).$$

Igual que en el punto segundo,  $\nu'(0)$  debe ser igual en módulo  $l$  a  $\nu^*(0)$ . Nuevamente  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  contiene los vértices de  $R^*$  que no están en  $R'$  y sus respectivas componentes respecto a  $R^*$  ( los vértices de  $R^*$  se conectan a  $r'_{\nu'(0)}$  a través del rayo  $R^*$  que es disjunto a  $R'$  por maximalidad de  $R_\cap$ ) y del mismo modo  $[D^w : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$  contiene los vértices de  $R'$  que no pertenecen a  $R^*$  y sus respectivas componentes respecto a  $R'$ .

Sea  $m$  el menor valor tal que  $w(|w| - m) \neq w'(|w'| - m)$ . Las palabras  $w$  y  $w'$  son iguales a partir de los índices  $|w| - m$  y  $|w'| - m$  respectivamente. Luego  $\nu^*(0)$  es mayor o igual a  $(|w| - m)l$  y  $R_\cap$  puede tener componentes modificadas para una cantidad finita de vértices iniciales. Luego  $[D^w : R'](\nu'(0))$  puede ser un elemento de  $\mathcal{L}$  o una componente modificada, pero en ese caso es un subgrafo de un elemento en  $\mathcal{L}$ . Como el primer índice de  $w$  siempre es 0 entonces los  $l$  primeros vértices generan todas las componentes límites de  $\mathcal{L}$  y por lo tanto existe  $q$  en  $\{0, 1, \dots, l - 1\}$  y  $r_q^*$  en  $V(R^*)$  tal que

$$(L_q, r) \supseteq ([D^w : R'](r'_{\nu'(0)}), r'_{\nu'(0)}) \supsetneq ([D^w : R^*](r_q^*), r_q^*) = (L_q, r)$$

La contención es estricta por la misma razón que en el punto segundo. Es decir,  $(L_q, r)$  se contiene a sí mismo de forma propia. Pero esto no puede ser, ya que las componentes en  $\mathcal{L}$  son finitas. Contradicción. □

Por último, falta ver qué sucede con el rayo.

**Lema 5.9.** *Sea  $R$  un rayo. Entonces  $m(R) = 1$ .*

*Demostración.* Si un grafo  $G$  es gemelo con  $R$ , debe poseer un rayo como subgrafo, correspondiente a la imagen  $R'$  de  $V(R)$  en  $G$ . Usando como base de descomposición  $R'$ , las componentes  $[G : R']$  deben mapearse de vuelta en las componentes del rayo, que siempre corresponden al árbol trivial. Luego cada componente de  $[G : R']$  contiene y está contenida en  $(r, r)$ . El árbol trivial no posee gemelos, luego todo gemelo de un rayo debe corresponder a un rayo como base de descomposición y componentes isomorfas a  $(r, r)$ . Por Lema 4.20 el gemelo  $G$  es isomorfo a un rayo. Luego, todo gemelo de un rayo es isomorfo a un rayo y por lo tanto  $m(R) = 1$ . □

*Demostración.* (Teorema 5.1) Si  $T$  no posee endomorfismos propios, entonces  $m(T) = 1$  (Lema 3.15). Si los posee y es acotsup distinto de un rayo, entonces por Lema 5.8 posee al menos  $\aleph_0$  gemelos. Si es un rayo, por Lema 5.9 no posee gemelos propios. Si es nacotsup, entonces por Lema 5.7 posee  $\aleph_1$  gemelos. En todos los casos se tiene el Teorema 5.1. □

## 5.2. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^2$ .

A continuación se presenta la demostración de la conjetura 1.2 para árboles con exactamente dos ends. En los siguientes lemas, para cualquier doble rayo, su vértice con índice  $i$  será denotado por el nombre del rayo en minúscula y subíndice  $i$ . Por ejemplo:  $zt_i$  es el vértice con índice  $i$  del doble rayo  $ZT$ .

**Teorema 5.10.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$ . Entonces  $m(T) = 1$  o  $\infty$ .*

Para demostrar la conjetura de alternativa en árboles en este caso, se procederá del mismo modo que para árboles con un end: se demostrará que las componentes asociadas a un rayo en un árbol de  $\mathcal{T}_o^2$  siempre son finitas. Luego, se definirá una noción de árboles “acotados” y “no acotados”, se demostrará usando el Corolario 3.14 la conjetura para árboles no acotados, y se demostrará la conjetura para árboles acotados usando una construcción ad-hoc. A diferencia de la demostración con exactamente un end, un árbol con exactamente dos ends posee un doble rayo único que es posible usar como base de descomposición. El doble rayo posee un grupo de endomorfismos con más estructura que el grupo de endomorfismos del rayo. Esto requerirá analizar más casos en las demostraciones de no-isomorfismo entre un gemelo construido y el grafo original.

**Lema 5.11.** *Para todo  $T$  en  $\mathcal{T}_o^2$  existe un único subgrafo  $Z$  de  $T$  isomorfo al doble rayo.*

*Demostración.* Como hay dos ends distintos entre sí, existe un conjunto separador de los rayos asociados a cada end. En particular existen dos rayos  $R_1$  y  $R_2$  disjuntos, asociados a los dos ends  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente. Como  $T$  es conexo, existen vértices  $v_1$  y  $v_2$  en  $R_1$  y  $R_2$  y un camino  $P = v_1Tv_2$ . En particular  $R_1 \cup P \cup R_2$  contiene un doble rayo.

¿Existe un único doble rayo? Suponiendo lo contrario, existen  $Z_1$  y  $Z_2$  doble rayo distintos. Luego existe un vértice  $k$  en la diferencia simétrica de sus vértices. Sin pérdida de generalidad  $k$  pertenece a  $Z_1$ . Como  $T$  es árbol,  $T - v$  es desconexo para cualquier  $v$  que no sea una hoja. En particular  $T - k$  es desconexo ya que  $k$  tiene grado mayor a 1 (pues está en  $Z_1$  doble rayo). Si  $Z_2$  no queda desconexo al eliminar  $k$ , entonces existe una componente conexa de  $T - k$  que contiene integralmente a  $Z_2$ . Los dos ends de  $Z_1$  deberán quedar en componentes conexas distintas, luego al menos existen 3 ends. Pero  $T$  solo tiene dos ends, por lo que  $Z_2$  queda desconexo al quitar  $k$  de  $T$ . Con esto, para dos vértices de  $Z_2$  en componentes distintas,  $k$  pertenece al único camino entre ellos. Pero ese camino es subgrafo de  $Z_2$ . Luego,  $k$  pertenece a  $V(Z_2)$  lo cual es una contradicción.  $\square$

Para los árboles  $T \in \mathcal{T}_o^2$  se denota  $ZT$  el único doble rayo asociado a  $T$ .

**Lema 5.12.** *Sean  $T_1, T_2$  dos árboles en  $\mathcal{T}_o^2$ . Para todo morfismo  $\psi : V(T_1) \rightarrow V(T_2)$  se tiene que la imagen de  $ZT_1$  vía el morfismo debe ser  $ZT_2$ .*

*Demostración.* Por el Lema 5.11 se tiene que  $ZT_2$  es el único doble rayo en  $T_2$ . Como la imagen vía un morfismo de un doble rayo es un doble rayo, entonces por unicidad  $\psi(V(ZT_1)) = V(ZT_2)$ .  $\square$

Como consecuencia del Lema 5.12 todo endomorfismo de  $T \in \mathcal{T}_o^2$  induce un automorfismo en  $ZT$ . Si es un endomorfismo propio, por Lema 4.11 no puede fijar vértices ni aristas. Por Lema 4.7, el automorfismo inducido debe ser generado por el shift. Pero esto implica por Lema 4.23 que las componentes van formando una especie de cadena en la relación subgrafo. Al igual que en la demostración para árboles con un único end, para entender en detalle esto se definirá lo que es una “cadena” en este contexto y se demostrará la existencia de estas cadenas en grafos con endomorfismos propios.

**Definición 5.13.** Una familia  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  de grafos enraizados indexada en los enteros es una  $\subseteq$ -2cadena si para todo índice  $i$  en  $\mathbb{Z}$  se tiene que  $(A_i, a_i)$  es subgrafo de  $(A_{i+1}, a_{i+1})$ .

**Lema 5.14.** Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$  y sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T$ . Entonces existen  $l$  familias  $\subseteq$ -2cadena correspondientes a  $\{([T : ZT](zt_{p+kl}), zt_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , con  $l$  un natural y  $p$  entre  $0$  y  $l - 1$ . Se dirá en este caso que  $\phi$  genera las familias.

*Demostración.* Por Lema 5.12 todo endomorfismo reducido a  $ZT$  es un automorfismo, que por Lema 4.11 no fija vértices o aristas. Luego, por Lema 4.7 este automorfismo es generado por el shift, es decir,  $\phi|_{ZT} = \sigma^l$  para algún  $l \in \mathbb{N}$ . Por Lema 4.24 se tiene que

$$[T : ZT](z_i) \subseteq [T : \phi(ZT)](\phi(zt_i)) = [T : \phi(ZT)](\sigma^l(zt_i)) = [T : \phi(ZT)](zt_{i+l}). \quad (5.9)$$

La inclusión es enraizada. Pero por Lema 4.19, como no hay vértices en la frontera relativa, se tiene que  $([T : \phi(ZT)](zt_{i+l}), zt_{i+l})$  es igual a  $([T : ZT](zt_{i+l}), zt_{i+l})$  para todo índice  $i$ . Aplicando todo lo anterior sucesivamente, se obtienen  $l$  familias de grafos  $\subseteq$ -2cadena dados por  $\{[T : ZT](zt_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , con  $p$  en  $\{0, 1, \dots, l - 1\}$ .  $\square$

Un hecho sobre los árboles en  $\mathcal{T}_o^2$  es que sus componentes respecto al doble rayo como base deben ser finitas. Luego, si sus componentes forman una familia  $\subseteq$ -2cadena, debe haber una sucesión hacia  $-\infty$  de grafos finitos que van decreciendo. Por la finitud de los grafos en la sucesión, esta debería fijarse en algún momento. ¿Sucede lo mismo hacia  $+\infty$ ? No necesariamente. Si la cadena es en cierto modo “no acotada”, por el Corolario 3.14 de Tyomkyn deben haber  $\aleph_1$  gemelos. A continuación se demostrará que las componentes respecto al doble rayo son finitas y se le definirá formalmente las cadenas que son acotadas hacia  $+\infty$  y  $-\infty$ .

**Lema 5.15.** Para todo árbol  $T$  en  $\mathcal{T}_o^2$  se tiene que las componentes dadas por el doble rayo  $ZT$  como base de descomposición son finitas, es decir  $[T : ZT](zt_i)$  es finito para todo índice entero  $i$ .

*Demostración.* Si  $[T : ZT](zt_i)$  es infinito, por Lema 2.20 posee un vértice de grado infinito o un rayo. No puede poseer vértice de grado infinito porque  $T$  es localmente finito, y no puede poseer un rayo porque  $[T : ZT](zt_i)$  es disjunto en aristas a  $ZT$  y por lo tanto  $T$  tendría más de 2 ends.  $\square$

**Definición 5.16.** Sea  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una familia  $\subseteq$ -2cadena. Se dice que es *acotada superior* (*acotsup*) si existe un entero  $k$  a partir del cual todos los grafos de la familia con índice mayor o igual a  $k$  son isomorfos. Una familia  $\subseteq$ -2cadena es *no acotada superior* (*nacotsup*) si no es acotsup. El índice de regularidad superior para una familia acotsup es el ínfimo sobre los enteros  $k$  que cumplen la definición de acotsup.

Una familia  $\subseteq$ -2cadena se dice que es *acotada inferior* (*acotinf*) si existe un entero  $k$  a partir del cual todos los grafos de la familia con índice menor o igual a  $k$  son isomorfos. Un  $\subseteq$ -2cadena es *no acotada inferior* (*nacotinf*) si no es acotinf. El índice de regularidad inferior para una familia acotinf es el supremo sobre los enteros  $k$  que cumplen la definición de acotinf.

**Lema 5.17.** *Sea  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una familia  $\subseteq$ -2cadena. Si cada término de la familia es un árbol finito y no vacío, entonces la familia es acotada inferior.*

*Demostración.* Supongamos la familia no es acotada inferior. Entonces, para todo  $k \in \mathbb{Z}$  existe un índice  $j$  menor a  $k$  tal que  $(A_k, a_k) \not\cong (A_j, a_j)$ . En particular  $(A_j, a_j) \subsetneq (A_k, a_k)$ . Aplicando nuevamente esto sobre  $j$ , es posible construir una subsucesión  $\{(A_{\xi(i)}, a_{\xi(i)})\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $(A_{\xi(i)}, a_{\xi(i)}) \supsetneq (A_{\xi(i+1)}, a_{\xi(i+1)})$ . Si un grafo es subgrafo no-isomorfo a otro, debe tener menos aristas al menos, como los grafos de la familia son árboles finitos y no vacíos, también debe reducirse el número de vértices. Luego  $\{V(A_{\xi(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$  posee una subsucesión estrictamente decreciente de valores en  $\mathbb{N}$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Corolario 5.18.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$ . Todo endomorfismo propio de  $T$  genera familias acotinf.*

*Observación 5.1.* El Lema 5.17 y corolario anterior no será usado en la demostración del Teorema 5.10. Se demostró este corolario solamente para tener una idea completa de los árboles localmente finitos con exactamente dos ends. Podría haber sido usado, pero se optó por no usarlo para que la demostración del teorema fuera generalizable a árboles con infinita cantidad de ends, donde ya no se puede demostrar este corolario.

¿Qué pasa en una  $\subseteq$ -2cadena tal que su límite inferior y superior coinciden? Cada elemento de la familia es isomorfo a un único grafo. Si un árbol  $T$  en  $\mathcal{T}_o^2$  posee esta propiedad para todas sus familias entonces es un árbol de algún modo “regular”, con un periodo igual al número de familias que posee. En particular el doble rayo cae dentro de esta categoría. Se formalizará esta idea de “regular” y se mostrará que estos grafos no pueden tener gemelos propios.

**Definición 5.19.** Una  $\subseteq$ -2cadena  $\{(A_i, i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  es *regular* si para todo par de índices  $i$  y  $j$  en  $\mathbb{Z}$  se tiene que  $(A_i, i)$  es isomorfo a  $(A_j, j)$ . Es decir, si es acotsup, acotinf y la componente límite inferior es isomorfa a la componente límite superior. Una  $\subseteq$ -2cadena es *irregular* si no es regular. Un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$  es *regular* si para todo endomorfismo todas sus familias generadas son regulares. Un árbol es *irregular* si no es regular.

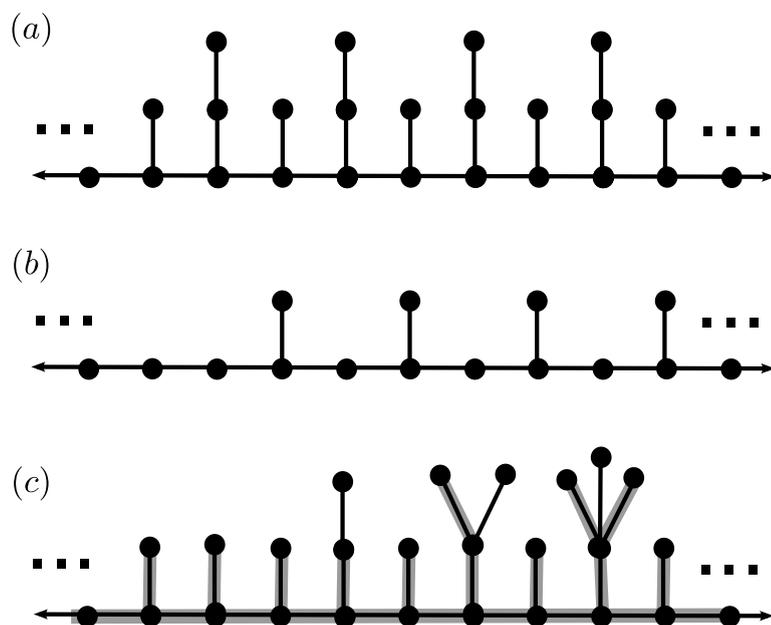


Figura 5.4: Ejemplos de grafos regulares, acotsup y nacotsup. (a) El grafo es regular. (b) El grafo es irregular y acotsup. (c) El grafo es irregular y nacotsup. Se achura la imagen del grafo vía un endomorfismo propio para poder ver que  $T - \phi(T)$  posee infinitas componentes conexas.

**Lema 5.20.** *Sea  $T \in \mathcal{T}_o^2$ . Si  $T$  es regular, entonces  $m(T) = 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $T$  tiene gemelos propios. Sea  $T'$  un gemelo propio de  $T$ , y sea  $\psi : V(T) \rightarrow V(T')$  un morfismo testigo para la relación subgrafo entre  $T$  y  $T'$ , sea  $\psi' : V(T') \rightarrow V(T)$  homólogo. Sea  $\Psi$  la composición  $\psi' \circ \psi$ . Siempre se tendrá que  $\Psi$  es un endomorfismo de  $T$ , y debe ser propio pues si es epiyectivo entonces el morfismo  $\psi'$  será epiyectivo y por lo tanto isomorfismo, pero  $T'$  es gemelo propio. Por Lema 5.12 la imagen de  $ZT$  vía  $\Psi$  es  $ZT$ , luego  $\Psi$  reducido a  $ZT$  es un automorfismo del doble rayo. Por Lema 4.11 siempre se tendrá que  $\Psi$  no puede fijar vértices o aristas, ya que es un endomorfismo propio. Por Lema 4.7 la función  $\Psi$  debe ser generada por el shift, es decir para algún entero  $r$  se tiene que  $\Psi(zt_i) = zt_{i+r}$ . En todos los siguientes pasos se estará usando el Lema 4.19. Como  $\psi(ZT)$  no tiene frontera relativa respecto a  $ZT$ , siempre se cumple la igualdad del lema. Por Corolario 4.23 se tiene entonces que  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$  es subgrafo de  $([T' : ZT'](\psi(zt_i)), \psi(zt_i))$ , y éste a su vez es subgrafo de  $([T : ZT](\psi' \circ \psi(zt_i)), \psi' \circ \psi(zt_i))$ . Pero como  $\Psi(zt_i) = zt_{i+r}$ , se tiene que  $([T' : ZT'](\psi(zt_i)), \psi(zt_i))$  es subgrafo de  $([T : ZT](zt_{i+r}), zt_{i+r})$ . Como  $T$  es regular, en particular para el endomorfismo  $\Psi$  sus familias generadas son regulares y por lo tanto  $([T : ZT](zt_{i+r}), zt_{i+r})$  es isomorfo a  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$ . Con esto,  $([T' : ZT'](\psi(zt_i)), \psi(zt_i))$  es subgrafo de  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$ . Luego, los grafos  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$  y  $([T' : ZT'](\psi(zt_i)), \psi(zt_i))$  son gemelos enraizados. Pero ambos son grafos localmente finitos, por Teorema 3.12 tienen que ser isomorfos. Es decir,  $([T : ZT](zt_i), zt_i) \cong ([T' : ZT'](\psi(zt_i)), \psi(zt_i))$  y esto con un índice  $i$  cualquiera. Nótese que no hemos usado que las componentes son finitas, basta con que sean localmente finitas. Por Lema 4.20 el morfismo  $\psi$  es isomorfismo, pero  $T'$  es gemelo propio; lo cual es una contradicción. Luego, todo gemelo de  $T$  debe ser isomorfo a  $T$  y por lo tanto  $m(T) = 1$ .  $\square$

**Corolario 5.21.** *Sea  $T \in \mathcal{T}_o^2$ . Si  $m(T) > 1$  entonces  $T$  es irregular.*

Con el resultado anterior, es posible entonces reducirse a árboles en  $\mathcal{T}_o^2$  que sean irregulares. A continuación se definirá *acotsup* y *acotinf* para árboles en  $\mathcal{T}_o^2$  (nótese que anteriormente se definió *acotsup* y *acotinf* para familias  $\subseteq$ -2cadena, no para grafos).

**Definición 5.22.** Un árbol  $T$  en  $\mathcal{T}_o^2$  que posea un endomorfismo propio. Se dice que es *acotsup* si posee un endomorfismo respecto al cual todas sus familias  $\subseteq$ -2cadena inducidas son *acotsup*. Un grafo es *nacotsup* si no es *acotsup*, es decir, si todo endomorfismo genera al menos una familia *nacotsup*. La definición de *acotinf* y *nacotinf* es homóloga.

Se demostrará la Teorema 5.10 separando en casos:  $T$  *nacotsup* y  $T$  *acotsup*.

**Lema 5.23.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$  que posee un endomorfismo propio, irregular y *nacotsup*. Entonces  $m(T) = \aleph_1$ .*

*Demostración.* Si  $T$  es irregular, *nacotsup* y posee un endomorfismo propio entonces un endomorfismo propio en particular genera al menos una familia *nacotsup*. Sea  $\phi$  este endomorfismo y  $l$  la cantidad de familias  $\subseteq$ -2cadenas que genera en  $T$ . Por Lema 5.12, Lema

4.11 y Lema 4.7 el endomorfismo  $\phi$  reducido al doble rayo es el shift en corrimiento  $l$ , con  $l$  mayor que cero. Por Lema 4.23 y Lema 4.19 se tiene que  $\phi([T : ZT](zt_i), zt_i)$  es subgrafo de  $([T : ZT](\phi(zt_i)), \phi(zt_i))$ , luego es subgrafo de  $([T : ZT](zt_{i+l}), zt_{i+l})$ . Por definición de una familia nacotsup existe  $p$  en  $\mathbb{Z}$  y una cantidad infinita de índices  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $([T : ZT](zt_{p+ql}), zt_{p+ql})$  es subgrafo propio de  $([T : ZT](zt_{p+(q+1)l}), zt_{p+(q+1)l})$ . En esos índices se generaran componentes conexas al eliminar  $\phi(T)$  de  $T$ . Por Corolario 3.14 se tiene que  $m(T) = \aleph_1$ .  $\square$

Antes de demostrar la conjetura para grafos acotsup, un lema de utilidad para la demostración.

**Lema 5.24.** *Sea  $\{(A_i, a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  una familia  $\subseteq$ -2cadena irregular y acotsup, y  $k$  su índice regularidad superior. Entonces  $(A_{k-1}, a_{k-1})$  es subgrafo estricto de  $(A_k, a_k)$ , en particular no son isomorfos.*

*Demostración.* Como  $T$  es irregular, el índice de irregularidad  $k$  es finito. Por definición minimal de  $k$  el grafo anterior de la familia debe ser no isomorfo.  $\square$

En lo que sigue, si existen endomorfismos propios se tomará un endomorfismo propio que induzca la menor cantidad de familias  $\subseteq$ -2cadena. Sea  $l$  esa cantidad. El endomorfismo asociado a la familia reducido a  $ZT$  será  $\rho(i) = i + l$ , y  $l$  será llamado *índice de corrimiento*.

**Lema 5.25.** *Sea  $T$  un árbol en  $\mathcal{T}_o^2$ , irregular y acotsup. Entonces  $m(T) \geq \aleph_0$ .*

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{T}_o^2$  irregular y acotsup. Sea  $ZT$  su doble rayo,  $\phi$  su endomorfismo propio de mínima cantidad de familias y  $l$  su índice de corrimiento.

El índice de regularidad superior es definido como el ínfimo de los índices que cumplen la definición de acotsup (ver Definición 5.16). Luego, para una familia regular el índice de regularidad superior es  $-\infty$  y el índice de regularidad superior de una familia irregular es mayor a  $-\infty$ . Sea  $zt_k$  el vértice en  $ZT$  correspondiente al máximo de los índices de regularidad superior de las familias inducidas por  $\phi$ . Como  $T$  es irregular entonces posee al menos una familia irregular y por lo tanto el máximo es distinto de  $-\infty$ . En particular la familia que alcanza el máximo índice de regularidad es irregular. Sin pérdida de generalidad ésta es la familia  $p = 0$ .

Al igual que en la demostración en  $\mathcal{T}_o^1$ , se pueden construir gemelos de  $T$  modificando las componentes respecto a  $ZT$ . La modificación consiste en reemplazar ciertas componentes por una componente que sea no isomorfa a la original pero aún esté contenida y conteniendo al sucesor y antecesor de su  $\subseteq$ -2cadena respectivamente. Nótese que por Lema 5.24 se tiene que  $[T : ZT](zt_{k-l})$  no es isomorfo a  $[T : ZT](zt_k)$ . El grafo  $[T : ZT](zt_{k-l})$  será usado para reemplazar  $[T : ZT](zt_k)$  y así generar gemelos. Se modificarán solo las componentes de la familia irregular que contiene al vértice  $zt_k$ . Nótese que para todo índice mayor o igual a  $k$ , las componentes asociadas a vértices con estos índices son componentes límite en sus respectivas familias. En particular  $[T : ZT](zt_k)$  es isomorfo a  $[T : ZT](zt_{k+ql})$  para todo  $q$  natural. Se tomará una palabra  $w$  en cierto lenguaje,  $w$  representa los lugares donde se

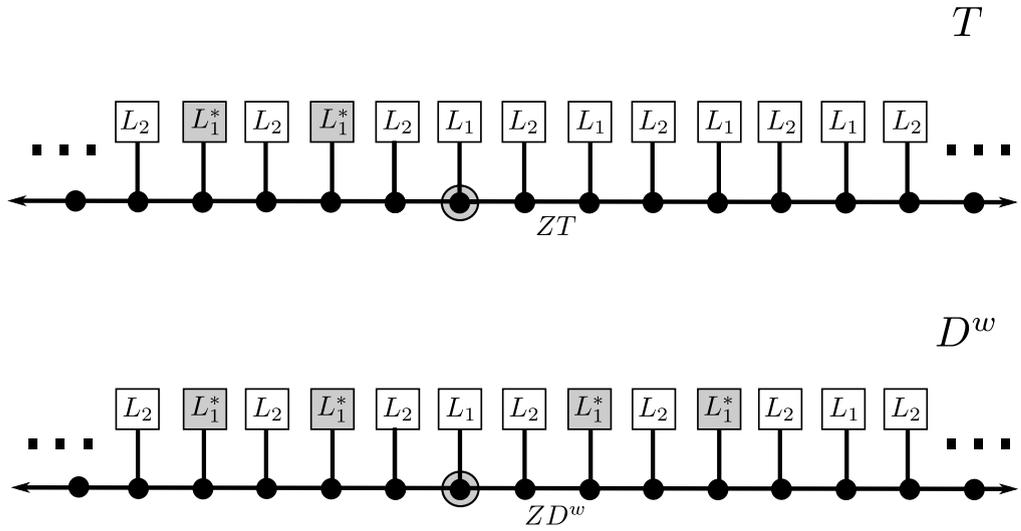


Figura 5.5: En la figura se muestra  $T$  un árbol irregular y su gemelo  $D^w$  con  $w = 011$ . El vértice sombreado corresponde al vértice a partir del cual todas las componentes de vértices con índice mayor son componentes límites superiores. Solo sobre la familia donde pertenece este vértice se modifican componentes.

modificará una componente de  $ZT$ : si  $w(r) = 1$  se cambia  $([T : ZT](zt_{k+rl}), zt_{k+rl})$  por  $([T : ZT](zt_{k-l}), zt_{k-l})$ , si  $w(i) = 0$  entonces no se modifica  $([T : ZT](zt_{k+rl}), zt_{k+rl})$ .

Formalmente, sea  $w \in 0 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$  una palabra finita con símbolos 0 o 1,  $w(i)$  es el caracter  $i$ -ésimo de  $w$ ,  $w(0)$  es el primer caracter. Se asume que para  $i$  un índice fuera de su tamaño (negativo o mayor al tamaño de  $w$ ), el valor de  $w(i)$  es 0. Se define el grafo  $D^w$  a partir de un doble rayo que será llamado  $ZD^w$  y sus componentes  $[D^w : ZD^w](zd_j^w)$  (ver Observación 4.6).

Se define  $([D^w : ZD^w](zd_j^w), zd_j^w)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  de la siguiente forma (ver Figura 5.5):

$$([D^w : ZD^w](zd_j^w), zd_j^w) \cong \begin{cases} ([T : ZT](zd_j^w), zd_j^w) & \text{si } j \not\equiv k \pmod{l} \\ ([T : ZT](zd_j^w), zd_j^w) & \text{si } j \equiv k \pmod{l}, j = k + rl \text{ y } w(r) = 0. \\ ([T : ZT](zd_{k-l}^w), zd_{k-l}^w) & \text{si } j \equiv k \pmod{l}, j = k + rl \text{ y } w(r) = 1. \end{cases} \quad (5.10)$$

Es fácil ver que  $D^w$  tiene exactamente dos ends y por lo tanto aplica el Lema 5.12.

Nótese que  $T$  y  $D^w$  poseen las siguientes propiedades. Todas las contenciones e isomorfismos son enraizados.

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad [D^w : ZD^w](zd_i^w) \subseteq [T : ZT](zt_i) \quad (5.11)$$

$$i \leq k \vee i > k + |w|l \quad [D^w : ZD^w](zd_i^w) \cong [T : ZT](zt_i) \quad (5.12)$$

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad [T : ZT](zt_i) \subseteq [T : ZT](zt_{i+pl}) \quad p \in \mathbb{N} \quad (5.13)$$

$$i \geq k + l|w| \quad [D^w : ZD^w](zd_i^w) \cong [D^w : ZD^w](zd_{i+pl}^w) \quad p \in \mathbb{N} \quad (5.14)$$

$$i \leq k \wedge i + pl \leq k \quad [D^w : ZD^w](zd_i^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{i+pl}^w) \quad p \in \mathbb{N} \quad (5.15)$$

Para probar la conjetura se demostrarán las siguientes tres proposiciones: todos los grafos  $D^w$  son gemelos de  $T$ , todos los gemelos  $D^w$  generados son no-isomorfos con  $T$  y entre ellos no son isomorfos entre sí. Al tener esto, la familia de grafos  $\{D^w\}_{w \in 0 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1}$  es una familia infinita de gemelos no isomorfos entre sí, por lo que sirve de testigo para probar que  $m(T) \geq \aleph_0$ .

Primero: Para toda palabra  $w$  en  $0 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1$ , el grafo  $D^w$  es gemelo con  $T$ . Por Corolario 4.23, para mostrar que  $D^w$  es subgrafo de  $T$  es necesario encontrar un isomorfismo  $\rho : V(ZD^w) \rightarrow V(ZT)$  entre los doble rayos  $ZT$  y  $ZD^w$  tal que  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$  sea subgrafo de  $([D^w : ZD^w](\rho(zt_i)), \rho(zt_i))$ . Con  $\rho(zt_i) = zd_i^w$  y la propiedad 5.11 se demuestra entonces que  $D^w \subseteq T$ .

Con el isomorfismo  $\rho' : V(ZT) \rightarrow V(ZD^w)$ ,  $\rho'(i) = i + l|w|$ ; para  $i \geq k$  se tiene que  $[T : ZT](zt_i)$  es una componente límite. Por la construcción de  $D^w$  las componentes con vértice superior a  $k + |w|l$  son también esas mismas componentes límites, por lo que  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$  es isomorfo a  $([D^w : ZD^w](zd_{i+|w|l}^w), zd_{i+|w|l}^w)$ , en particular es subgrafo. Si  $i < k$  y no está en la familia  $p = 0$  la componente  $[D^w : ZD^w](zd_{i+|w|l}^w)$  es isomorfa a  $[T : ZT](zt_{i+|w|l})$  y dado que las familias son  $\subseteq$ -2cadena se tiene lo buscado. Si  $zt_i$  está en la familia  $p = 0$  es posible que  $[T : ZT](zt_i)$  deba mapearse en una componente modificada de  $D^w$ . Pero la componente usada en esa modificación es  $[T : ZT](zt_{k-l})$  y como  $i$  es menor estricto a  $k$ , entonces es un índice de la forma  $i = k - ql$   $q \in \mathbb{N}$ . Como está en la misma familia y siempre tiene un índice menor en su familia, se tiene la contención buscada. En todos los casos  $\rho'$  induce un endomorfismo válido, testigo para la contención  $T \subseteq D^w$ ; por lo que son gemelos.

Segundo: Para toda palabra  $w$  en  $0 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1$ , el grafo  $D^w$  no es isomorfo a  $T$ . Supongamos que son isomorfos. Sea  $\rho : T \rightarrow D^w$  isomorfismo. Por Lema 5.12 se tiene que  $\rho$  mapea  $ZT$  en  $ZD^w$ , por lo que reduciendo su dominio a  $V(ZT)$  es un automorfismo del doble rayo. Por Lema 4.5 se tiene entonces que para todo índice  $i$  entero,  $\rho(zt_i) = zd_{\pm i+r}^w$ , con  $r \in \mathbb{Z}$ .

Si  $\rho(zt_i) = zd_{-i+r}^w$ , en los siguientes pasos se demostrará que para todo índice  $i$  y natural  $q$  siempre se tiene que  $([T : ZT](zt_{i-ql}), zt_{i-ql})$  es isomorfo a  $([T : ZT](zt_i), zt_i)$ . En cada paso se explica a la derecha la proposición que fundamenta el paso. Se procedió a explicar de este modo ya que la explicación en palabras resulta difícil de seguir. Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son enraizados.

$$\begin{aligned} [T : ZT](zt_i) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{-i+r}^w) && \text{por Lema 4.20} \\ [D^w : ZD^w](zd_{-i+r}^w) &\subseteq [T : ZT](zt_{-i+r}) && \text{por Propiedad (5.11)} \\ [T : ZT](zt_{-i+r}) &\subseteq [T : ZT](zt_{-i+r+ql}) && q \in \mathbb{N} \text{ por Propiedad (5.13)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T : ZT](zt_{-i+r+ql}) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{-(i+r+ql)+r}^w) & q \in \mathbb{N} & \text{por Lema 4.20} \\
[D^w : ZD^w](zd_{-(i+r+ql)+r}^w) &= [D^w : ZD^w](zd_{i-ql}^w) & q \in \mathbb{N} & \text{por igualdad de índices} \\
[D^w : ZD^w](zd_{i-ql}^w) &\subseteq [T : ZT](zt_{i-ql}) & q \in \mathbb{N} & \text{por Propiedad (5.11)} \\
[T : ZT](zt_i) &\subseteq [T : ZT](zt_{i-ql}) & q \in \mathbb{N} & \text{por las anteriores} \\
[T : ZT](zt_{i-ql}) &\subseteq [T : ZT](zt_i) & q \in \mathbb{N} & \text{por Propiedad (5.13)} \\
[T : ZT](zt_{i-ql}) &\approx [T : ZT](zt_i) & q \in \mathbb{N} & \text{por las anteriores} \\
[T : ZT](zt_{i-ql}) &\cong [T : ZT](zt_i) & q \in \mathbb{N} & \text{por Teorema 3.12}
\end{aligned}$$

Como se tomó un índice  $i$  arbitrario, tomando en particular el índice  $k(p)$  de regularidad superior en la familia  $p$  se tiene que  $([T : ZT](zt_{k(p)-ql}), zt_{k(p)-ql})$  es isomorfo a  $([T : ZT](zt_{k(p)}), zt_{k(p)})$  para todo  $q$  natural, quien a su vez es isomorfo a  $([T : ZT](zt_{k(p)+q'l}), zt_{k(p)+q'l})$  para todo  $q'$  natural, dada la definición de índice de regularidad superior (ver Definición 5.16). Luego, toda la familia es isomorfa a un único grafo y por lo tanto es una familia regular. Haciendo esto con cada familia, se muestra que  $T$  es regular para el endomorfismo propio que genera  $l$  familias mínimas, que por definición es un endomorfismo testigo de irregularidad, lo cual es una contradicción.

Si  $\rho(i) = i - r$  ( $r > 0$ ), en los siguientes pasos se demostrará que  $([T : ZT](zt_{k-l}), zt_{k-l})$  es isomorfo a  $([T : ZT](zt_k), zt_k)$ . Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son enraizados.

$$\begin{aligned}
[T : ZT](zt_k) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) & \text{por Lema 4.20} \\
[D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-r}) & \text{por Propiedad (5.11)} \\
[T : ZT](zt_k) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-r}) & q \in \mathbb{N} & \text{por los pasos anteriores} \\
[T : ZT](zt_k) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-qr}) & q \in \mathbb{N} & \text{repetiendo el paso anterior } q \text{ veces} \\
[T : ZT](zt_k) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-lr}) & & \text{en particular para } l \\
[T : ZT](zt_{k-lr}) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-l}) & & \text{por Propiedad (5.13)} \\
[T : ZT](zt_k) &\subseteq [T : ZT](zt_{k-l}) & & \text{usando como pivote el término } k - lr \\
[T : ZT](zt_{k-l}) &\subseteq [T : ZT](zt_k) & & \text{por Propiedad (5.13)} \\
[T : ZT](zt_{k-l}) &\approx [T : ZT](zt_k) & & \text{por los pasos anteriores} \\
[T : ZT](zt_{k-l}) &\cong [T : ZT](zt_k) & & \text{por Teorema 3.12}
\end{aligned}$$

Pero esto contradice el Lema 5.24, ya que  $[T : ZT](zt_k)$  es no-isomorfo a  $[T : ZT](zt_{k-l})$ .

Si  $\rho(i) = i + r$  ( $r > 0$ ), en los siguientes pasos se demostrará que  $([T : ZT](zt_{k-l}), zt_{k-l})$  es isomorfo a  $([T : ZT](zt_k), zt_k)$ . Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son

enraizados.

$$\begin{array}{ll}
 [T : ZT](zt_{k-lr}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-(l-1)r}^w) & \text{por Lema 4.20} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-(l-1)r}^w) \cong [T : ZT](zt_{k-(l-1)r}) & \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [T : ZT](zt_{k-lr}) \cong [T : ZT](zt_{k-(l-1)r}) & \text{por los pasos anteriores} \\
 [T : ZT](zt_{k-lr}) \cong [T : ZT](zt_k) & \text{repetiendo } l \text{ veces el paso anterior} \\
 [T : ZT](zt_{k-lr}) \subseteq [T : ZT](zt_{k-l}) & \text{por Propiedad (5.13)} \\
 [T : ZT](zt_k) \subseteq [T : ZT](zt_{k-l}) & \text{usando como pivote el termino } k-lr \\
 [T : ZT](zt_{k-l}) \subseteq [T : ZT](zt_k) & \text{por Propiedad (5.13)} \\
 [T : ZT](zt_{k-l}) \approx [T : ZT](zt_k) & \text{por los pasos anteriores} \\
 [T : ZT](zt_{k-l}) \cong [T : ZT](zt_k) & \text{por Teorema 3.12}
 \end{array}$$

Al igual que en el caso anterior, por Lema 5.24 esto es una contradicción.

Si  $\rho(i) = i$ , trivialmente los grafos  $D^w$  y  $T$  no son isomorfos, ya que siempre  $w$  posee un índice donde es 1. Luego, en ese índice no se puede cumplir las hipótesis del Lema 4.20. En todos los posibles isomorfismo se genera contradicción, por lo que  $D^w$  no puede ser isomorfo a  $T$ .

Tercero: Para todo par de palabras  $w$  y  $w'$  distintas en  $0 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ , los grafos  $D^w$  y  $D^{w'}$  no son isomorfos. Supóngase que son isomorfos. Sea  $\rho : V(RD^w) \rightarrow V(RD^{w'})$  isomorfismo, por Lema 4.5  $\rho(i) = \pm i + n$ , para algun entero  $n$ .

Si  $\rho(i) = -i + r$ , en los siguientes pasos se demostrará que  $[D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w)$  es isomorfo a  $[D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w)$  para todo natural  $q$ . Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son enraizados. En todos los pasos, se tomará  $Q$  suficientemente grande para que se tengan las propiedades.

$$\begin{array}{ll}
 [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w) \cong [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{-(i-Ql)+r}^{w'}) & \text{por Lema 4.20} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{-i+Ql+r}^{w'}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{-i+Ql+r}^w) & \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{-i+Ql+r}^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{-i+Ql+r+ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por Propiedad (5.14)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{-i+Ql+r+ql}^w) \cong [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{-(i+Ql+r+ql)+r}^{w'}) & q \in \mathbb{N} \text{ por Lema 4.20} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{-(i+Ql+r+ql)+r}^{w'}) = [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{i-Ql-ql}^{w'}) & q \in \mathbb{N} \text{ por igualdad de índices} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{i-Ql-ql}^{w'}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por Propiedad (5.12)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por Propiedad (5.14)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w) \approx [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql-ql}^w) \cong [D^w : ZD^w](zd_{i-Ql}^w) & q \in \mathbb{N} \text{ por Teorema 3.12}
 \end{array}$$

Con esto, se tiene que  $i$  está en una familia regular inferior. Nótese también que en los dos primeros pasos se demuestra que  $[D^w : ZD^w](zd_{i-Q}^w)$  es isomorfo a  $[D^w : ZD^w](zd_{-i+Ql+r}^w)$ , el cual es el grafo límite superior de la familia  $r-i \pmod{l}$  para  $Q$  suficientemente grande. Sea  $L_i^+$  el límite superior de la familia correspondiente al índice  $i$  modulo  $l$ , y sea del mismo modo  $L_i^-$  el límite inferior. Se mostró entonces que  $L_{r-i}^+$  es subgrafo de  $L_i^-$ , para cualquier  $i$ . En general  $L_i^-$  es subgrafo de  $L_i^+$ , por definición de las familias  $\subseteq$ -2cadena. Pero por lo mostrado anteriormente  $L_i^+$  es isomorfo a  $L_{r-i}^-$ . Así mismo, siempre se tiene que  $L_{r-i}^-$  es subgrafo de  $L_{r-i}^+$  por ser parte de una misma familia  $\subseteq$ -2cadena y aplicando nuevamente el punto anterior, ahora para la familia  $r-i$  se tiene que  $L_{r-i}^+$  es subgrafo de  $L_{r-(r-i)}^- = L_i^-$ . Luego, se tiene que  $L_i^- \subseteq L_i^+ \subseteq L_i^-$ , donde todas las inclusiones son enraizadas. Con esto  $L_i^-$  es gemelo enraizado de  $L_i^+$  y como las componentes son siempre localmente finitas por Teorema 3.12 deben ser isomorfos, y esto para cada familia ya que  $i$  es arbitrario. Por propiedad 5.12 las componentes límites deben coincidir entre  $T$  y  $D^w$  y por lo tanto  $T$  debe ser regular, lo cual es una contradicción pues  $T$  es irregular.

Si  $\rho(i) = i - r$  ( $r > 0$ ), en los siguientes pasos se demostrará que  $[D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w)$  es isomorfo a  $[D^w : ZD^w](zd_k^w)$ . Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son enraizados.

$$\begin{aligned}
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) &\cong [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-r}^{w'}) && \text{por Lema 4.20} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-r}^{w'}) &\cong [T : ZT](zt_{k-r}) && \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [T : ZT](zt_{k-r}) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) && \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-r}^{w'}) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) && \text{por transitividad de } \cong \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) && \text{por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-rq}^w) \quad q \in \mathbb{N} && \text{usando el paso anterior sucesivamente} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-r}^w) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-lr}^w) && \text{en particular para } l \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-lr}^w) &\subseteq [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) && \text{por Propiedad (5.15)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) &\subseteq [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) && \text{usando como pivote el término } k-lr \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) &\subseteq [D^w : ZD^w](zd_k^w) && \text{por Propiedad (5.15)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) &\approx [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) && \text{por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) &\cong [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) && \text{por Teorema 3.12}
 \end{aligned}$$

Pero por Lema 5.24 y Propiedad (5.12) se tiene que

$$[D^w : ZD^w](zd_k^w) \cong [T : ZT](zt_k) \not\cong [T : ZT](zt_{k-l}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w)$$

lo cual es una contradicción.

Si  $\rho(i) = i + r$  ( $r > 0$ ), en los siguientes pasos se demostrará que  $[D^w : ZD^w](zd_k^w)$  es isomorfo a  $[D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w)$ . Todas las siguientes contenciones e isomorfismos son enraiza-

dos.

$$\begin{array}{ll}
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) \cong [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-(l-1)r}^{w'}) & \text{por Lema 4.20} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-(l-1)r}^{w'}) \cong [T : ZT](zt_{k-(l-1)r}) & \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [T : ZT](zt_{k-(l-1)r}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-(l-1)r}^w) & \text{por Propiedad (5.12)} \\
 [D^{w'} : ZD^{w'}](zd_{k-(l-1)r}^{w'}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-(l-1)r}^w) & \text{transitividad de } \cong \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-(l-1)r}^w) & \text{por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) \cong [D^w : ZD^w](zd_k^w) & \text{repetiendo el paso anterior} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) & \text{por Propiedad (5.15)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) & \text{por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) \subseteq [D^w : ZD^w](zd_k^w) & \text{por Propiedad (5.15)} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) \approx [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) & \text{por los pasos anteriores} \\
 [D^w : ZD^w](zd_k^w) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w) & \text{por Teorema 3.12}
 \end{array}$$

Pero por Lema 5.24 y Propiedad (5.12) se tiene que

$$[D^w : ZD^w](zd_k^w) \cong [T : ZT](zt_k) \not\cong [T : ZT](zt_{k-l}) \cong [D^w : ZD^w](zd_{k-l}^w),$$

lo cual es una contradicción.

Si  $\rho(i) = i$  trivialmente no se cumple la condición de isomorfismo ya que siempre existe un índice en el cual  $w$  y  $w'$  son distintos. Con esto se tienen todos los posibles isomorfismos entre  $D^w$  y  $D^{w'}$  llevan a contradicción, con lo que se tiene el punto tercero y el lema.  $\square$

*Demostración.* (Teorema 5.10) Si  $T$  no posee endomorfismos propios,  $m(T) = 1$  (Lema 3.15). Si los posee, por Lema 5.21  $T$  es irregular. Si es acotsup, por Corolario 5.25 se tiene el teorema,  $m(T) \geq \aleph_0$ . Si es nacotsup, por Lema 5.23 también se tiene el teorema,  $m(T) = \aleph_1$ . En todos los casos se tiene el teorema.  $\square$

### 5.3. Demostración para árboles en $\mathcal{T}_o^k$ , con $3 \leq k < \infty$ .

Para grafos en  $\mathcal{T}_o^k$ , con  $3 \leq k < \infty$  se demostrará que no existen endomorfismos propios. Ésto se da porque en los grafos de este conjunto siempre existe un subárbol finito fijo para todo endomorfismo. Se verá que, gracias al Teorema 4.3, siempre existe un vértice o arista fijo. Pero por Lema 4.11 esto obliga a que el endomorfismo sea epiyectivo y por lo tanto no es propio. Esto implicará que todo gemelo debe ser isomorfo a  $T$  y por lo tanto  $m(T) = 1$ .

**Teorema 5.26.** *Sea  $T$  árbol localmente finito, y  $|\Omega(T)| = k$ , para  $3 \leq k < \infty$ . Entonces  $m(T) = 1$ .*

Para la demostración se requerirán definiciones y lemas preliminares.

**Definición 5.27.** Sea  $v$  un vértice de  $T$ . Se define  $(T - e)_{v \notin}$  la componente conexa de  $T - e$  que no contiene a  $v$ .

En los siguientes lemas se usará la notación dada por Diestel en [4], Capítulo 6, sobre flujos. Se denota  $\vec{E}$  el conjunto de aristas dirigidas y  $f(X, Y)$  la suma de  $f(e, x, y)$  sobre todas las aristas que parten en un vértice de  $X$  y terminan en un vértice de  $Y$ . En particular  $f(\{x\}, Y)$  se abrevia como  $f(x, Y)$ .

**Definición 5.28.** Sea  $T$  en  $\mathcal{T}_o^k$ , con  $3 \leq k < \infty$ . Una función  $f : \vec{E} \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  en  $T$  es un *flujo out-end respecto a  $v$*  si cumple las siguientes cuatro propiedades:

1.  $f(e, x, y) = -f(e, y, x)$  para todo  $(e, x, y) \in \vec{E}$  donde  $x \neq y$ .
2.  $f(u, V(T)) = 0$  para todo  $u \in V(T) - \{v\}$ .
3.  $f(v, V(T)) = k$ .
4. Para todo end  $w \in \Omega(T)$  existe un rayo  $R$  de  $w$  tal que todas sus aristas  $e = uv \in E(R)$  tienen valor absoluto de flujo igual uno, es decir  $|f(e, u, v)| = 1$ .

Un flujo out-end respecto a  $v$  es un flujo que tiene como fuente  $k$  unidades de flujo desde  $v$  y que tiene como sumidero cada end con una unidad de flujo. Como un end no es un elemento del árbol, una forma de formalizar la idea intuitiva es pidiendo rayos con flujo uno que pertenezcan al end. Por lo mismo, no se puede usar la misma definición de flujo dada para grafos finitos, pues no hay vértices sumideros. Se denota  $f(e)$  al valor absoluto  $|f(e, u, v)|$ .

El siguiente lema muestra que solo existe una única forma de construir un flujo out-end respecto a algún vértice  $v$ .

**Lema 5.29.** Sea  $T$  en  $\mathcal{T}_o^k$ ,  $3 \leq k < \infty$ . Existe un único flujo out-end  $F_v$  y corresponde a

$$F_v(e, x, y) = \text{signo}(d(y, v) - d(x, v)) |\Omega((T - e)_{v \notin})|.$$

*Demostración.* Se denota  $\partial v$  el conjunto de aristas que contienen a  $v$ . Notemos que  $F_v(\cdot)$  es un flujo out-end: Naturalmente siempre se tiene que  $F_v(e, x, y) = -F_v(e, y, x)$  por el término  $\text{signo}(d(y, v) - d(x, v))$  en la definición de  $F_v(\cdot)$ , luego se tiene la condición 1 de flujo out-end.

De todas las aristas de  $\partial u$  para  $u$  un vértice distinto de  $v$ , una de sus aristas será la arista que conecta  $u$  con  $v$ , pues  $v$  pertenece a una sola de las componentes de  $T - \partial u$ . Sea  $e^* = \{w^*, u\}$  esta arista. Según la definición de  $F_v(\cdot)$ , el flujo  $F_v(e^*, w^*, u)$  es igual a la cantidad de ends en  $\Omega((T - e)_{v \notin})$ , con signo positivo pues por definición  $w^*$  está más cerca de  $v$  que  $u$ . Para el resto de aristas en  $\partial u$ , el valor del flujo  $F_v(e, u, w)$  será negativo y por un valor equivalente a la cantidad de ends en la componente de  $T - \partial u$  que contiene a  $w$ . Pero todos estos ends, para distintas aristas de  $\partial u - \{e^*\}$  son los mismos ends que están en

$(T - e)_{v \notin}$ , pues  $v$  no pertenece a estas componentes. Luego, al sumar sobre las aristas que salen desde  $u$  se tiene suma cero y se cumple por lo tanto la condición 2 de flujo out-end.

Como  $T$  es árbol, habrá una y solo una componente vecina a cada  $e \in \partial v$  de  $T - \partial v$ . Cada end debe estar incluido en alguna componente, y solo en una pues los rayos son grafos conexos. Luego se tiene la condición 3 de flujo out-end.

Entre cada par de ends existe un separador finito, la unión de los separadores de cada par de ends es un separador de todos los ends, y es finito porque el número de ends es finito y es la unión finita de conjuntos finitos. Luego, sacando esta unión, se obtienen  $k$  componentes conexas y sólo un end en cada componente. Dentro de cada componente debe haber un rayo y ese rayo debe tener flujo igual a 1 en todas sus aristas, ya que solo hay un end en su componente  $(T - e)_{v \notin}$  para  $e$  una arista de la componente. Con esto se tiene la condición 4 de flujo out-end.

¿Existe un único flujo out-end respecto a  $v$ ? Supongamos que existe una función  $F'$ , flujo out-end respecto a  $v$  y distinto de  $F_v$ . Si son distintos, debe existir una arista  $e^* = u^*v^*$  tal que  $F_v(e^*, u^*, v^*) \neq F'(e^*, u^*, v^*)$ . Por definición de  $F_v$ , en  $(T - e^*)_{v \notin}$  hay exactamente  $F(e^*)$  ends. Si  $F'$  es out-end debe también tener rayos con flujo = 1 para cada uno de esos ends. Como  $T$  es un árbol, cada arista es un corte y en particular  $e$ ; por lo tanto  $F'(e^*) \geq |(T - e^*)_{v \notin}| = F(e^*)$ . Si es estrictamente mayor, por conservación de flujo (propiedad 2), en alguna de las aristas incidentes a  $v^*$  salvo  $e^*$  existirá una arista donde se mantendrá la desigualdad estricta entre  $F'$  y  $F_v$  en esa arista. Aplicando este argumento sucesivamente y dado que no hay ciclos, existirá un rayo tal que cada una de sus aristas  $e$  del rayo satisficará la desigualdad estricta  $F'(e) > F_v(e)$ . Sea  $w^*$  el end asociado a ese rayo. Como  $F'(\cdot)$  es flujo out-end, entonces satisface la propiedad 4 en particular para  $w^*$ , pero por la desigualdad estricta  $F_v(\cdot)$  no satisface entonces la misma propiedad para  $w^*$ . Como se sabe que  $F_v$  es flujo out-end, entonces la desigualdad estricta implica una contradicción.  $\square$

**Definición 5.30.** Para todo árbol  $T \in \mathcal{T}_o^k$ , con  $3 \leq k < \infty$  y un vértice  $v$  de  $T$ , se define  $c_v$  el conjunto de aristas tal que su flujo out-end  $F_v(e)$  es mayor estricto a uno. Se define  $C_v$  como el grafo inducido por las aristas de  $c_v$  (ver Figura 5.6).

**Lema 5.31.** Para todo  $v \in V(T)$  se tiene que  $C_v$  es conexo.

*Demostración.* El camino entre dos aristas  $e$  y  $e'$  con flujo mayor a 1 también debe ser compuesto por aristas de flujo mayor a 1. En particular, si una arista  $e''$  en el camino que conecta  $e$  con  $e'$  tiene flujo exactamente igual a uno, entonces una de las componentes conexas de  $T - e''$  solo tendrá aristas de flujo 1 o menor por conservación del flujo. Pero esto contradice que el flujo sea mayor estricto de una de las aristas  $e$  o  $e'$ . Luego,  $C_v$  es conexo y cada arista en  $C_v$  cumple la propiedad de flujo out-end estrictamente mayor a 1.  $\square$

**Lema 5.32.** Para todo  $v \in V(T)$  se tiene que  $C_v$  es finito.

*Demostración.* Supongamos que es  $C_v$  infinito para algún vértice  $v$ . Como  $C_v$  es conexo, por Lema 2.20 existe un rayo o una estrella infinita como subgrafo, y por condición localmente



finito de los grafos en  $T_o^k$ , debe ser un rayo. Pero  $F_v(\cdot)$  en el end asociado a este rayo no satisface la condición 4 de flujo out-end válido, pues siempre sus aristas tienen flujo  $> 1$ , pero por Lema 5.29 siempre  $F_v(\cdot)$  es flujo out-end respecto a  $v$ , luego se tiene una contradicción y por lo tanto  $C_v$  debe ser finito.  $\square$

**Definición 5.33.** Sea  $l$  el mínimo valor que alcanza  $|c_v|$  para algún vértice  $v$  de  $T$ . Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de vértices que alcanzan este mínimo. Como  $|c_v|$  es finito para todo vértice, entonces el mínimo se alcanza en un número finito. Llamaremos a  $\mathcal{C}$  el *centro-flujo* del grafo  $T$ .

**Lema 5.34.** Para todo  $T \in \mathcal{T}_o^k$ , con  $3 \leq k < \infty$ ; se tiene que  $\mathcal{C}$  es finito.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{C}$  es infinito. Por Lema 2.21 existe un peine  $R$  tal que todos los dientes del peine están en  $\mathcal{C}$  o una subdivisión de estrella  $S$  con todos sus extremos en  $\mathcal{C}$ . El segundo caso se descarta porque  $T$  es localmente finito. Como el grafo posee una cantidad finita de ends, es posible separar el end  $\bar{w}$  asociado al peine del resto de los ends, usando un separador suficientemente grande. En particular, tomando un rayo  $\bar{R}$  en  $\bar{w}$  que no se interseque con las aristas del separador, y una arista  $\bar{e}$  de  $\bar{R}$  es posible separar  $\bar{w}$  de los, al menos, 2 ends restantes. Nótese que en la componente de  $T - \bar{e}$  que contiene a  $\bar{w}$  existirán elementos de  $\mathcal{C}$  conectados al rayo base, arbitrariamente lejos de  $\bar{e}$ . Con esto, la cantidad de arcos con flujo  $> 1$  asociados a  $F_v$  para  $v$  en  $\mathcal{C}$  que se conecta con  $\bar{R}$  puede ser arbitrariamente grande. Basta con tomar un vértice  $v'$  que esté suficientemente lejos de  $\bar{e}$ , todo el camino de arcos a partir de  $v'$  hasta  $\bar{e}$  tiene flujo  $> 1$ , pues deben ir al menos dos unidades de flujo hacia  $(T - \bar{e})_{v' \notin}$ . Con esto, se puede escoger  $v'$  tal que  $|c_{v'}| > l$ , contradiciendo la pertenencia de  $v'$  en  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Lema 5.35.** Para todo endomorfismo  $\psi$ , la imagen de  $\mathcal{C}$  vía  $\psi$  es  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Sea  $v \in \psi(\mathcal{C})$ . Sea  $u = \psi^{-1}(v)$ . El flujo  $F_u$  induce el flujo  $F'$  definido como  $F'(e, u, v) := F_u(\psi^{-1}(e), \psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v))$  para una arista en la imagen, y  $F'(e) = 0$  para una arista fuera de la imagen. Nótese que  $F'$  satisface las condiciones de flujo out-end: Como  $\psi$  es morfismo entonces preserva distancias. Luego, el signo de  $\text{signo}(d(y, v) - d(x, v))$  es el mismo de  $\text{signo}(d(\psi^{-1}(y), \psi^{-1}(v)) - d(\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(v)))$ . Por lo tanto se tiene la condición 1. Para la condición 2, como para los vértices fuera de la imagen no pasa flujo, se hereda la propiedad 2 de  $F_u$ . Ídem para la condición 3. Además, la imagen  $\psi(T)$  debe poseer  $k$  ends ya que la imagen de un rayo es un rayo y dos rayos disjuntos tienen imágenes disjuntas. Por Lema 2.24 la imagen entonces tiene  $k$  ends, pero  $T$  ya tiene  $k$  ends. Luego, todo end tiene al menos un rayo con preimagen. La preimagen de cada rayo comparte una cola con el rayo de la condición 4 para  $F_u$ , y por Lema 2.23 comparten una cola. La imagen de esa cola satisface la condición 4 para  $F'$ .

Como existe un único flujo out-end respecto a  $v$ , se tiene que  $F_v(e) = F'(e) = F_u(\psi^{-1}(e))$  para toda arista  $e \in E(T)$ . Luego, si  $F_u(\cdot)$  alcanza el mínimo  $l$  entonces  $\psi(u) = v$  también alcanza el mínimo, con lo que se tiene la inclusión  $\psi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ . Como  $\psi$  es inyectiva y  $|\mathcal{C}|$  es finito, entonces el cardinal de la imagen es igual al del conjunto de partida, es decir  $|\psi(\mathcal{C})| = |\mathcal{C}|$ . Esto y la inclusión implican que los conjuntos deben ser iguales.  $\square$

**Lema 5.36.** *Sea  $T$  un árbol localmente finito, y  $|\Omega(T)| = k$ , para  $3 \leq k < \infty$ . Entonces, existe un vértice o una arista fija para cualquier endomorfismo de  $T$ .*

*Demostración.* Por Teorema 4.3 existe un vértice fijo o arista fijo para todo automorfismo de un árbol finito. Por Lema 5.34, el grafo inducido por  $\mathcal{C}$  es un árbol finito y por Lema 5.35 todo endomorfismo de  $T$  reducido a  $\mathcal{C}$  es un automorfismo. Luego,  $T$  posee un vértice o arista fijo para cualquier endomorfismo.  $\square$

*Demostración.* (Teorema 5.26). Sea  $T'$  un gemelo propio de  $T$ . Por ser gemelos, existen morfismos  $f : V(T) \rightarrow V(T')$  y  $f' : V(T') \rightarrow V(T)$  asociados. A partir de estos morfismos se define  $\psi$  como la composición  $f' \circ f$ . Es fácil ver que  $\psi$  es un endomorfismo de  $T$ , y debe ser propio pues si  $\psi$  es epiyectivo entonces  $f'$  debe ser epiyectivo y por lo tanto un isomorfismo, pero  $T'$  es gemelo propio. Por el Lema 5.36, existe un vértice o arista fijo para todo endomorfismo y en particular para  $\psi$ . Pero esto contradice el Lema 4.11 de endomorfismos propios, el cual señala que todo endomorfismo propio no puede fijar vértices o aristas. Luego  $T'$  no puede ser un gemelo propio y por lo tanto todo gemelo de  $T$  debe ser isomorfo a  $T$ , es decir  $m(T) = 1$ .  $\square$

## Capítulo 6

# Demostración de la conjetura de alternativa en árboles para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends.

¿Cómo abordar la conjetura para árboles con una cantidad infinita de ends? El árbol de Tyomkyn es un ejemplo de cómo un árbol con una cantidad infinita de ends tiene suficiente complejidad para que al remover una hoja de él se reobtenga un grafo isomorfo al inicial. Usando el lenguaje de las demostraciones dadas para finitos ends, al usar un rayo o doble rayo como base de descomposición y construir gemelos, es posible que exista otra base respecto a la cual siga “viéndose” el grafo original. En las demostraciones con finita cantidad de ends, cualquier nueva base estaba de algún modo conectada o intersectada con la base antigua. Sin embargo, con infinita cantidad de ends esto ya no sucede necesariamente. El árbol de Tyomkyn es un buen ejemplo de como el cambio a un segundo doble rayo “paralelo” impide demostrar del mismo modo la conjetura.

Por Teorema 4.2 de Halin, para cualquier árbol (incluso con infinitos ends) y un endomorfismo de ese árbol, existe un vértice fijo, una arista fija, o un rayo que se mapea en un subrayo de él. En los dos primeros casos, si  $T$  es localmente finito, por Lema 4.11 el endomorfismo debe ser epiyectivo, luego un automorfismo. En el último caso, la existencia de este rayo permite encontrar una familia  $\subseteq$ -1cadena de componentes respecto al rayo similar a la demostración del caso 1 end (en este caso las componentes no necesariamente son finitas). Con esto, nuevamente es posible definir “acotado superior” y el Teorema 3.14 de Tyomkyn aplica del mismo modo si la familia no es acotado superior. Ahora, la construcción de  $D^w$  hecha para las demostraciones con finita cantidad de ends puede que siga siendo isomorfa a  $T$  respecto a otro rayo, distinto al usado como base para modificar  $T$ .

El trabajo de Tateno sugiere que hay una diferencia entre los grafos con contable cantidad de ends y no contable cantidad de ends. En el presente capítulo se presenta el concepto

de *centro-end*. A través de este concepto se demostrará una extensión al Teorema 4.1 de Halin para árboles con una cantidad contable de ends: todo árbol localmente finito con una cantidad contable de ends posee un vértice que es fijo para todo endomorfismo, una arista que se permuta para todo endomorfismo, un end tal que todo endomorfismo mapea un rayo del end en sí mismo, o un doble end tal que su imagen bajo cualquier endomorfismo es el mismo doble rayo. Nótese el carácter del teorema. A diferencia del Teorema 4.1 se asegura que **todo** endomorfismo tiene el mismo elemento fijo. Con esto, es posible separar la demostración según el elemento fijo que posea cada grafo.

Sorprendentemente, la demostración para el caso de un doble rayo fijo es exactamente igual a la de árboles en  $\mathcal{T}_o^2$ . Se presentó en esa sección (Sección 5.2) una demostración que fuera suficientemente general. Para árboles con un end fijo, la demostración para árboles con exactamente un end solamente falla en el argumento final de finitud de las componentes. A partir de esto, se definió el concepto de *ecuaciones gráficas*. A través de este concepto se extiende la demostración dada para  $\mathcal{T}_o^1$  a árboles con un end “fijo”. Para árboles con un vértice o arista fijo, corresponden justamente al caso demostrado en el Teorema 3.12 de Tyomkyn.

En la bibliografía revisada todos los autores definen diversos subgrafos dentro de un árbol que son estables bajo endomorfismos. A continuación se presentan algunos de estos conjuntos. Serán renombrados por el autor, ya que en los papers originales todos los autores usan la palabra “core” para referirse a estos conjuntos. Se introducirá el concepto de centro-end y se estudiarán sus propiedades. Luego, se demostrará la extensión del Teorema 4.1 para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends. Finalmente, se presentará la demostración de la conjetura 3.8 para árboles con una cantidad infinita contable de ends.

## 6.1. Centros en grafos infinitos.

En [13] y [12], ambos autores desarrollaron alguna definición de un subgrafo de un árbol que es estable bajo endomorfismos. Estas definiciones no fueron usadas en el presente trabajo, pero se agregarán para dar un conexto a la definición de centro-end.

**Definición 6.1.** (Tyomkyn [13]). Sea  $T$  un árbol. Se define el *centro-vértice* como el grafo inducido por los vértices  $v$  en  $V(T)$  tal que  $T - v$  posee al menos dos componentes conexas con una cantidad infinita de vértices.

Ésta definición fue dada por Tyomkyn en su trabajo sobre el árbol que se comporta como una estrella [13]. Es fácil ver que el centro-vértice es conexo y estable bajo endomorfismos.

**Definición 6.2.** (Tateno [12]). Sea  $T$  un árbol. Se define el *centro maximal sin hojas* como el subgrafo de  $T$  conexo y maximal respecto a la inclusión que no posee hojas.

Es fácil ver que el centro maximal sin hojas también es conexo y estable bajo endomorfismos. Nótese además que las dos definiciones anteriores pueden ser definidas para grafos

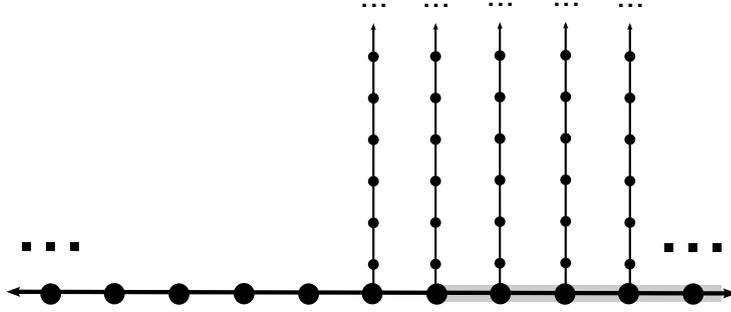


Figura 6.1: El centro  $C_3(T)$  corresponde a la zona sombreada.

conexos en general, no solamente en árboles.

A continuación se presenta la definición propia de centro comentada al inicio del capítulo.

**Definición 6.3.** Sea  $T$  árbol y  $k$  un natural. Se define el *Centro-end- $k$*  como el subgrafo inducido por las aristas  $e$  tales que las dos componentes de  $T - e$  poseen al menos  $k$  ends. Se denota este centro por  $C_k(T)$ . Es decir,

$$C_k(T) = T[\{e \in T : \text{cada componente de } T - e \text{ tiene } \geq k \text{ ends}\}]. \quad (6.1)$$

Se define el *Centro-end- $\infty$*  como el subgrafo generado por las aristas  $e$  tales que las dos componentes de  $T - e$  poseen infinitos ends. En particular ese subgrafo puede ser visto como una intersección de todos los centro-end- $k$  con  $k$  finito. Es decir,

$$C_\infty(T) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k(T) = T[\{e \in T : \text{cada componente de } T - e \text{ tiene } \infty \text{ ends}\}]. \quad (6.2)$$

A partir de esta definición es posible definir usando recursión transfinita el centro del centro de un grafo, para cada ordinal. Sobre el concepto de ordinales usado en esta memoria y sus propiedades, por favor revisar el capítulo Anexo A en [4].

Sea  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Para un ordinal sucesor  $\beta$ , se define *Centro-end- $r$ - $\beta$*  como el centro-end- $r$  del centro-end- $r$  con ordinal antecesor. Se denota por  $C_r^\beta(T)$ . Es decir,

$$C_r^\beta(T) = C_r(C_r^{\beta-1}(T)) \quad \forall r \in \mathbb{N} \cup \infty. \quad (6.3)$$

Se toma como término 0 el mismo grafo. Es decir,  $C_r^0(T) = T$ . Para  $k$  un ordinal límite, se define centro-end- $r$ - $\beta$  como la intersección de los centro-end- $r$  con ordinal anterior. Es decir,

$$C_r^\beta(T) = \bigcap_{\gamma < \beta} C_r^\gamma(T) \quad \forall r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \quad (6.4)$$

A continuación se presentan distintas propiedades del Centro-end. En todos los siguientes lemas  $T$  es un árbol localmente finito no vacío.

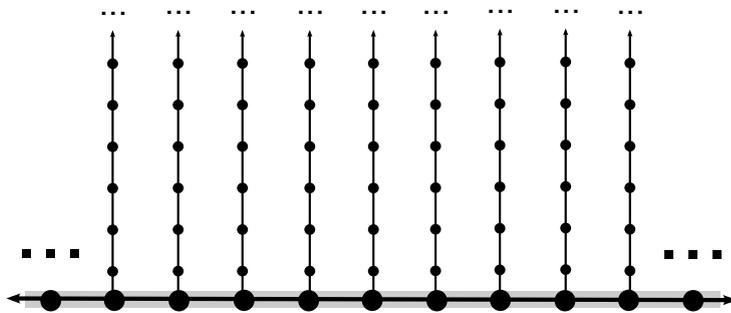


Figura 6.2: El centro  $C_\infty(T)$  corresponde a la zona sombreada.

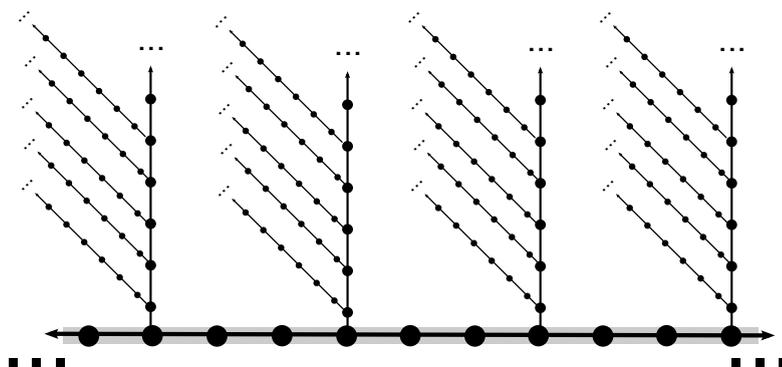


Figura 6.3: El centro  $C_\infty^2(T)$  corresponde a la zona sombreada.

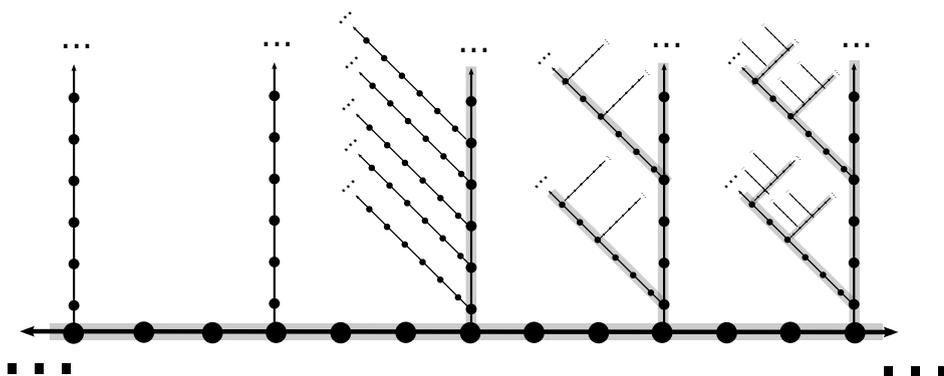


Figura 6.4: Sea  $w$  el primer ordinal contable infinito. El centro  $C_\infty^w(T)$  es vacío, pero para todo ordinal  $k$  menor a  $w$  el centro  $C_\infty^k(T)$  no es vacío. El centro  $C_\infty(T)$  corresponde a la zona sombreada.

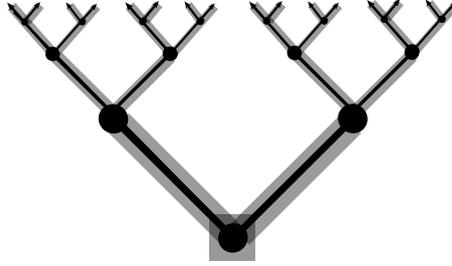


Figura 6.5: El árbol de la figura es el árbol binario. El centro  $C_\infty(T)$  corresponde a la zona sombreada.  $C_\infty(T) = T$ .

**Lema 6.4.** *Para todo natural extendido  $r$  y ordinal  $\beta$  se tiene que  $C_r^\beta(T)$  es conexo.*

*Demostración.* Primero: Se demostrará que  $C_r(T)$  es conexo para todo natural extendido  $r$ . Sean  $e_1$  y  $e_2$  dos aristas distintas en  $C_r(T)$  (si sólo hay una arista, la conexidad es trivial). Sea  $A$  la componente conexa de  $T - e_1$  que no contiene a  $e_2$ , sea  $B$  la componente conexa de  $T - e_2$  que no contiene a  $e_1$ . Como  $T$  es conexo, existe un único camino  $P$  entre  $e_1$  y  $e_2$ . Para cada  $e \in P$ , la componente de  $T - e$  que no contiene a  $e_2$  debe contener a  $e_1$  y luego a  $A$ . Del mismo modo la componente que no contiene a  $e_1$  debe contener a  $e_2$  y luego a  $B$ . Por definición de  $C_r(T)$ ,  $A$  y  $B$  tienen  $\geq r$  ends, luego todas componentes de  $T - e$  tienen  $\geq r$  ends ya que contienen subgrafos con esta propiedad. Con esto  $P$  también es subgrafo de  $C_r(T)$ , luego es conexo.

Segundo: Se demostrará usando inducción transfinita que para todo ordinal  $\beta$  y natural extendido  $r$ , el centro  $C_r^\beta(T)$  es conexo. El caso base  $\beta = 0$  es trivial, pues  $T$  es árbol. Si  $\beta$  es ordinal sucesor, por definición 6.3 se tiene que  $C_r^\beta(T) = C_r(C_r^{\beta-1}(T))$ . Por hipótesis inductiva  $C_r^{\beta-1}(T)$  es conexo y por el punto primero de la demostración aplicado al árbol  $C_r^{\beta-1}(T)$ , se tiene entonces que  $C_r(C_r^{\beta-1}(T))$  es conexo. Si  $\beta$  es ordinal límite, dos vértices  $u$  y  $v$  están en la intersección sobre todos los ordinales menores a  $\beta$ , entonces están en cada uno de los conjuntos de la intersección. Por hipótesis inductiva, son grafos conexos. Como  $T$  es árbol, existe un único camino  $P$  que conecta  $u$  y  $v$ , luego está también en cada uno de los conjuntos de la intersección y por lo tanto también en la intersección. Con esto,  $P$  pertenece a  $C_r^\beta(T)$  para cualquier par de vértices  $u$  y  $v$  que se tomen, por lo que es conexo.  $\square$

**Lema 6.5.** *Para todo natural extendido  $r$ , ordinal  $\beta$ , y endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , se tiene que  $\phi(C_r^\beta(T))$  es subgrafo de  $C_r^\beta(T)$ .*

*Demostración.* Primero se demostrará que  $\phi(C_r(T))$  es subgrafo de  $C_r(T)$  para todo árbol  $T$ . Nótese que la imagen de un rayo a través de un endomorfismo debe ser un rayo. Además, por Lema 2.24 un árbol posee  $\geq r$  ends sí y sólo sí existen al menos  $r$  rayos disjuntos. Por la definición de  $C_r(\cdot)$ , para una arista  $e$  las dos componentes de  $T - e$  poseen  $r$  rayos disjuntos

cada una, y por propiedad de endomorfismo la imagen de cada componente poseerá  $\geq r$  ends. Por último, las componentes conexas de  $T - \phi(e)$  deben tener como subgrafos a las imágenes de las componentes de  $T - e$  (Corolario 4.23), luego  $\phi(e)$  está en  $C_r(T)$ .

Segundo, se usará inducción transfinita para mostrar el lema. El caso base  $\beta = 0$  es trivial. Si  $\beta$  es ordinal sucesor, basta aplicar el punto primero a  $T' = C_r^{\beta-1}(T)$  para demostrar. Si  $\beta$  es ordinal límite, basta notar que  $\phi(\bigcap_{\gamma < \beta} C_r^\gamma(T))$  es subgrafo de  $\bigcap_{\gamma < \beta} \phi(C_r^\gamma(T))$ , por propiedades de una función simplemente. Gracias a la hipótesis inductiva, intersectando se tiene el resultado.  $\square$

**Lema 6.6.** *Sea  $G$  un grafo y  $H$  un subgrafo de él. Para todo natural extendido  $r$  y ordinal  $\beta$  se tiene que  $C_r^\beta(H)$  es subgrafo de  $C_r^\beta(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi : H \rightarrow G$  semimorfismo testigo de la relación subgrafo entre  $H$  y  $G$ . Sea  $e = uv$  una arista de  $H$ . Si  $[H : e](u)$  posee más de  $r$  ends, entonces  $\psi([H : e](u))$  también los tendrá (la imagen de un rayo es un rayo, y  $\psi$  es inyectiva), y lo mismo con  $[H : e](v)$ . Luego,  $\psi(e)$  tendrá a lo menos  $k$  ends en cada componente. Con esto  $\psi(e)$  pertenece a  $C_r(G)$  y por lo tanto  $C_r(H)$  es subgrafo de  $C_r(G)$  (el caso  $r = \infty$  es trivial a partir del resultado para  $r$  finito).

Inducción transfinita. El caso base  $\beta = 0$  es trivial. Si  $\beta$  es ordinal sucesor, basta aplicar el punto primero a  $H' = C_r^{\beta-1}(H)$  y  $G' = C_r^{\beta-1}(G)$ , que por hipótesis inductiva son subgrafo el primero del segundo. Si  $\beta$  es ordinal límite, para todo ordinal  $\gamma$  menor a  $\beta$  se tiene que  $C_r^\gamma(H)$  es subgrafo de  $C_r^\gamma(G)$ , intersectando sobre todos los  $\gamma$  se tiene el paso inductivo y el lema.  $\square$

**Corolario 6.7.** *Sea  $G$  un grafo y  $H$  un gemelo de él. Para todo natural extendido  $r$  y ordinal  $\beta$  se tiene que  $C_r^\beta(H)$  es gemelo de  $C_r^\beta(G)$ .*

*Demostración.* Directo de la Definición 3.4 sobre gemelos y el Lema 6.6.  $\square$

**Lema 6.8.** *Para todo par de naturales extendidos  $r_1$  y  $r_2$ , si  $r_1$  es menor a  $r_2$  entonces  $C_{r_2}^\beta(T)$  es subgrafo de  $C_{r_1}^\beta(T)$ .*

*Demostración.* Si una componente conexa posee más de  $r_2$  ends y  $r_2$  es mayor estricto a  $r_1$ , entonces posee más de  $r_1$  ends. Luego,  $C_{r_2}(T)$  es subgrafo de  $C_{r_1}(T)$ . Usando inducción transfinita, el caso base  $\beta = 0$  es trivial. Si  $\beta$  es ordinal sucesor, por hipótesis inductiva  $C_{r_2}^{\beta-1}(T)$  es subgrafo de  $C_{r_1}^{\beta-1}(T)$ , y por Lema 6.6 más lo anterior se tiene que  $C_{r_2}(C_{r_2}^{\beta-1}(T))$  es subgrafo de  $C_{r_1}(C_{r_2}^{\beta-1}(T)) \subseteq C_{r_1}(C_{r_1}^{\beta-1}(T))$ . Si  $\beta$  es ordinal límite, la hipótesis inductiva implica que para todo ordinal  $\gamma$  menor que  $\beta$ , se tiene que  $C_{r_2}^\gamma(T)$  es subgrafo de  $C_{r_1}^\gamma(T)$ . Intersectando sobre todos los  $\gamma$  se tiene el paso inductivo.  $\square$

**Lema 6.9.** *Si  $C_2(T)$  es igual a  $T$ , entonces el cardinal del conjunto de ends  $|\Omega(T)|$  es no contable.*

*Demostración.* Sea  $T_3$  el árbol infinito 3-regular y  $[T_3]_k$  el subgrafo de  $T_3$ , para un vértice como raíz y tomando los vértices a distancia  $\leq k$  de esa raíz (es fácil ver que da lo mismo cual vértice se tome como raíz). Se mostrará usando inducción y el Lema 4.14 que si  $C_2(T)$  es igual a  $T$  entonces existe una subdivisión de  $T_3$  como subgrafo de  $T$ . Es fácil ver que tal subdivisión tiene no contable cantidad de ends, por lo que  $T$  también los tendría.

Caso base:  $k = 1$ . Si  $T$  no posee vértices de grado mayor o igual a 3, entonces es un rayo y luego  $C_2(T)$  es vacío, pero  $T$  no es vacío. Si  $C_2(T)$  es igual a  $T$ , entonces existe un vértice de grado al menos 3, que será llamado  $v^*$ . Éste vértice y tres de sus vecinos induce  $[T_3]_1$ .

Paso inductivo: Supongamos que existe una subdivisión  $T'_k$  de  $[T_3]_k$  como subgrafo de  $T$ , con  $u^*$  su raíz. Se demostrará que entonces existe una subdivisión  $T'_{k+1}$  de  $[T_3]_{k+1}$  como subgrafo de  $T$ , que además es anida a  $T'_k$  de la hipótesis inductiva. Sea  $u \in e'$  una hoja de  $T'_k$  y  $e'$  su arista incidente. Como  $C_2(T)$  es todo  $T$ , en particular al eliminar  $e'$  en  $T$  se obtienen dos componentes con más de 2 ends cada componente. En la componente que no intersecta a  $T'_k$  en particular hay dos ends. Como es una componente conexa, desde  $u$  salen dos rayos correspondientes a dos ends distintos. Como  $T$  es acíclico, es fácil ver que  $T - T'_k$  contiene el camino  $uTw$  y dos vértices  $w_1, w_2$  vecinos de  $w$  que no están en  $uTw$ . Haciendo esto en cada hoja de  $T'_k$ , se encuentra entonces una subdivisión de  $[T_3]_{k+1}$  que tiene como raíz a  $u^*$ , con lo que se tiene el paso inductivo.

Nótese que la sucesión de subdivisiones de  $T_3$  es expansiva, pues siempre agrega vértices con distancia respecto a la raíz mayor a los pre-existentes. Por Lema 4.14 existe un grafo límite de la sucesión, que es una subdivisión de  $T_3$  y es subgrafo de  $T$ . Luego  $T$  tiene no contable cantidad de ends.  $\square$

**Corolario 6.10.** *Para todo natural extendido  $r$  mayor o igual a dos, si  $C_r(T)$  es igual a  $T$  entonces  $|\Omega(T)|$  no es contable.*

*Demostración.* Por Lema 6.8  $C_r(T)$  es subgrafo de  $C_2(T)$ , que también es subgrafo de  $T$ . Luego si  $C_r(T)$  es igual a  $T$ , entonces  $C_2(T)$  es igual a  $T$ . Por Lema 6.9 se tiene entonces que  $|\Omega(T)| = \aleph_1$ .  $\square$

**Lema 6.11.** *Para todo natural extendido  $r$ , si  $T$  posee contable cantidad de ends entonces existe un ordinal  $\gamma$  contable tal que  $C_r^\gamma(T)$  es vacío.*

*Demostración.* Por Corolario 6.10 se tiene que  $C_r(T)$  no puede ser igual a  $T$ . Además, en general para un ordinal  $\beta$  cualquiera,  $C_r^{\beta+1}(T)$  no puede ser igual a  $C_r^\beta(T)$ . De lo contrario, por Corolario 6.10 el centro  $C_r^\beta(T)$  tendría  $\aleph_1$  ends y por lo tanto  $T$  también los tendría.

Luego, la familia  $\{C_r^\beta(T)\}_{\beta \in Ord}$  es una familia de conjuntos anidados, en donde  $C_r^{\beta+1}(T)$  es subgrafo propio de  $C_r^\beta(T)$  para todo ordinal. Es decir,  $C_r^{\beta+1}(T) \subsetneq C_r^\beta(T)$ . Con esto, el conjunto de vértices en  $C_r^\beta(T) - C_r^{\beta+1}(T)$  es no vacío a menos que  $C_r^\beta(T)$  sea vacío. Si  $C_r^\beta(T)$  nunca es vacío, entonces para cada ordinal  $\beta$  es posible encontrar un vértice en el grafo perteneciente a  $C_r^\beta(T) - C_r^{\beta+1}(T)$ .

Cada vértice elegido es distinto para ordinales distintos, luego se tiene una inyección. Pero el conjunto de los ordinales menores a  $\aleph_1$  tienen cardinal  $\aleph_1$  (Ver anexo A en [4]). Con

esto habría no contable cantidad de vértices en  $T$ . Pero esto es una contradicción, pues  $T$  es contable en vértices.  $\square$

## 6.2. Extensión del Teorema Elementos Fijos.

A continuación se presenta la extensión del Teorema de elementos fijos I (Teorema 4.1), más cercana al tipo de enunciados dados por Halin en el Teorema de elementos fijos II (Teorema 4.2) al hablar de elementos fijos para todo endomorfismo.

**Teorema 6.12.** *Sea  $T \in \mathcal{T}_o^{\aleph_0}$  un árbol localmente finito con contable cantidad de ends. Sea  $\xi$  el ínfimo de los ordinales tales que  $C_\infty^\beta(T)$  es vacío.*

$$\xi = \inf\{\beta : C_\infty^\beta(T) = \emptyset\}.$$

Entonces una y solo una de las siguientes es verdadera:

1. *El ordinal  $\xi$  es un ordinal límite. En este caso, existe un end  $w$  en  $\Omega(T)$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , existe un rayo  $R(w)$  de  $w$  tal que  $\phi(R(w))$  es subgrafo propio de  $R(w)$ .*
2. *El ordinal  $\xi$  es un ordinal sucesor y  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  tiene infinitos ends. En este caso, existe un end  $w$  en  $\Omega(T)$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , existe un rayo  $R(w)$  de  $w$  tal que  $\phi(R(w))$  es subgrafo propio de  $R(w)$ .*
3. *El ordinal  $\xi$  es un ordinal sucesor y  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  tiene exactamente un end. En este caso, existe un end  $w$  en  $\Omega(T)$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , existe un rayo  $R(w)$  de  $w$  tal que  $\phi(R(w))$  es subgrafo propio de  $R(w)$ .*
4. *El ordinal  $\xi$  es un ordinal sucesor y  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  tiene exactamente dos ends. En este caso, existen dos ends  $w_1$  y  $w_2$  en  $\Omega(T)$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , se tiene que la imagen de su doble rayo asociado  $Z_{(w_1, w_2)}$  es  $Z_{(w_1, w_2)}$ .*
5. *El ordinal  $\xi$  es un ordinal sucesor,  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  tiene exactamente finita cantidad de ends y tiene más de dos ends. En este caso existe un vértice  $v$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , se tiene que  $\phi(u) = u$ ; o existe una arista  $e = \{u, v\}$  en  $E(T)$  tal que, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$ , se tiene que  $\phi(u) = v$  y  $\phi(v) = u$ .*

En el primer, segundo y tercer caso se dice que  $T$  posee un end *total*. En el cuarto caso se dice que  $T$  posee un doble rayo *total*. En el quinto caso se dice que  $T$  posee un vértice  $v$  o una arista  $e$  *total*.

*Demostración.* Por Lema 6.11 existe un ordinal  $\gamma$  tal que  $C_\infty^\gamma(T)$  es vacío. Se define

$$\xi = \inf\{\beta : C_\infty^\beta(T) = \emptyset\}.$$

Es decir, el ordinal  $\xi$  es el primero donde  $C_\infty^\beta(T)$  es vacío. Nótese que si un ordinal  $\beta'$  es menor a  $\xi$ , entonces  $C_\infty^{\beta'}(T)$  es distinto de vacío. Nótese además que  $\xi$  es distinto de cero, pues  $T$  es no-vacío.

Si  $\xi$  es un ordinal límite, la intersección  $\bigcap_{\gamma < \xi} C_r^\gamma(T)$  es vacía. Sin embargo la cerradura en la topología asociada a  $T$  de cada parte de la intersección  $\overline{C_r^\gamma(T)}$  (ver Sección 2.3 sobre topología asociada a un grafo infinito) es un conjunto no vacío, cerrado en  $|T|$ , que satisface la propiedad de intersección finita: para una cantidad finita de elementos de  $\{C_r^\gamma(T)\}_{\gamma < \xi}$ , la intersección corresponde al mayor ordinal, luego es no vacía. Como  $T$  es localmente finito, por Teorema 2.25 la topología  $|T|$  es compacta. Por PIF, la intersección  $I = \bigcap_{\gamma < \xi} \overline{C_r^\gamma(T)}$  debe entonces ser no vacía. Sin embargo, la intersección no puede contener vértices o aristas, puesto que  $\bigcap_{\gamma < \xi} C_r^\gamma(T)$  es vacío. Entonces en  $I$  sólo pueden haber elementos de  $\Omega(T)$ .

Supongamos que existen dos ends distintos  $w_1$  y  $w_2$  en  $I$ . Si son distintos, existe un conjunto  $S$  separador y finito, tal que para todo par de rayos  $R_1$  en  $w_1$  y  $R_2$  en  $w_2$ ;  $R_1 - S \cap R_2 - S$  es vacío. Ahora, para cualquier conjunto finito de vértices  $S$  existe un  $\gamma^*$  tal que  $S \cap C_\infty^{\gamma^*}(T)$  es vacío. Como el centro-end- $\infty$  es conexo (Lema 6.4), solo una de las componentes de  $T - S$  puede intersectar con  $C_\infty^{\gamma^*}(T)$  y luego con  $I$ . Por lo que no pueden haber dos ends distintos en  $I$ .

Llamemos  $w_I$  al único end que puede estar en  $I$ . Etiquetamos cada arista de  $T$  con el primer ordinal  $\gamma(e)$  en que la arista ya no pertenece a  $C_\infty^{\gamma(e)}(T)$ . En un rayo, las aristas pueden ser enumeradas con  $\mathbb{N}$  partiendo de la arista incidente a la hoja del rayo. Con esto, se define una función  $t : \mathbb{N} \rightarrow \{\gamma : \gamma < \xi\}$  que asocia a cada arista indexada con  $i$  el ordinal  $t(i)$  para el cual la arista ya no pertenece a  $C_\infty^{t(i)}(T)$ .

Notemos primero que para las aristas de  $R$  un rayo que pertenezca a  $w_I$ , el supremo  $\sup\{t(i) : i \in \mathbb{N}\}$  es igual a  $\xi$ . De lo contrario, en el ordinal  $\sup\{t(i) : i \in \mathbb{N}\} = \xi'$  todo el rayo desaparece. Es decir, el end  $w_I$  no pertenece a  $C_\infty^{\xi'}(T)$ . Pero esto no puede ser, ya que  $w_I$  pertenece a  $I$ . Por lo mismo, un rayo de un end distinto a  $w_I$  debe tener un supremo menor a  $\xi$ .

Además, notemos que  $t$  debe ser creciente para cualquier rayo de  $w_I$ . Para demostrar esto, si existen índices  $i < j < k$  tales que  $t(i) > t(j) < t(k)$  para algún rayo de  $w_I$ , entonces  $C_\infty^{t(j)}(T)$  es desconexo; dado que se borra una arista del único camino entre las aristas  $i$  y  $k$  de  $R$  (que aún están en  $C_\infty^{t(j)}(T)$ ). Además, para todo índice  $j$  existe un índice  $k$  mayor a  $j$  tal que  $t(j) < t(k)$ , esto porque siempre existe una porción del rayo en todo  $C_\infty^\gamma(T)$  ya que  $w_I$  está en su intersección. Luego, no puede existir  $i < j$  tal que  $t(i) > t(j)$ . Con esto,  $t$  debe ser creciente para cualquier rayo de  $w_I$ .

Por último, gracias al Lema 6.5, para todo endomorfismo  $\phi$  de  $T$  se tiene que  $\phi(C_\infty^\beta(T))$  es subgrafo de  $C_\infty^\beta(T)$ . Con esto, para cualquier endomorfismo y en particular para  $\phi$ , siempre se tendrá entonces que  $t(\phi(e))$  es mayor o igual a  $t(e)$ . De lo contrario, si  $t(\phi(e)) < t(e)$  entonces en  $C_r^{t(\phi(e))}(T)$ ,  $e$  será una arista incluida, pero  $\phi(e)$  no; lo que contradice el Lema 6.5. Nótese entonces que  $\xi \leq \sup\{t(\phi(i)) : i \in \mathbb{N}\} \leq \xi$ , y esto para cualquier endomorfismo. Luego el end generado por la imagen vía  $\phi$  de los rayos en  $w_I$ , que denotamos por  $\phi(w_I)$ , debe ser igual a  $w_I$ . Por Lema 2.23 para cada rayo  $R$  en  $w_I$ , existe  $R'$  tal que  $\phi(R) \cap R = R'$ .

Necesariamente  $\phi(R') \subseteq R'$  dado que  $t$  es creciente y el crecimiento de  $t$  al aplicar un endomorfismo. Con todo esto, mostramos que si  $\xi$  es ordinal límite, se tiene el caso 1 del teorema.

Si  $\xi$  es ordinal sucesor, para el ordinal  $\xi - 1$  el centro  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  puede ser de dos formas: tener una cantidad finita de ends o tener una cantidad infinita de ends. En el primer caso, si tiene 1 end entonces  $T$  cae en el caso 3, dado que todo endomorfismo induce un endomorfismo en  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  (ver Lema 6.5) y como tiene sólo un end, su end imagen debe ser el mismo end. Si hay exactamente 2 ends, entonces estamos en el caso 4 del teorema, por el mismo argumento de endomorfismos inducido en  $C_\infty^{\xi-1}(T)$ . Si hay finitos y más de dos ends, entonces por lo mostrado en el Lema 5.36 existe un vértice o arista fijo para cualquier endomorfismo, luego estamos en el caso 5.

Si hay infinitos ends, entonces  $C_r(C_\infty^{\beta-1}(T))$  es no vacío para cada  $r$  y por lo tanto  $\{C_r(C_\infty^{\beta-1}(T))\}_{r \in \mathbb{N}}$  es una familia de grafos no vacíos, anidados, cuya intersección es vacía (dado que  $\emptyset = C_\infty(C_\infty^{\beta-1}(T)) = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} C_r(C_\infty^{\beta-1}(T))$ ), pero la intersección de sus completaciones en la topología no es vacía gracias a la compacidad de  $|T|$ . Por los mismos argumentos que en el caso ordinal límite, debe existir un end en la intersección y es único. Haciendo la misma demostración etiquetando aristas ahora con  $t(e)$  el primer  $r \in \mathbb{N}$  donde  $e \notin C_r(C_\infty^{\beta-1}(T))$  se muestra que estamos en el caso 2 del teorema.  $\square$

### 6.3. Demostración Teorema.

A continuación se presenta la demostración de la conjetura para árboles localmente finitos con una cantidad contable de ends. Se usará el Teorema 6.12, separando en 2 casos: un end total y un doble rayo total.

**Teorema 6.13.** *Sea  $T \in \mathcal{T}_o^{\aleph_0}$ . Entonces  $m(T) = 1$  o  $\infty$ .*

Por el Lema 3.15, si  $m(T) > 1$  entonces existe un gemelo propio y luego un endomorfismo propio  $\phi$  de  $T$ . Al ser propio, por Lema 4.11 no puede ser de tipo 5 del Teorema 6.12. Con los otros casos, existe un end o doble rayo total. La demostración del teorema es muy similar al caso de árboles en  $\mathcal{T}_o^1$  o  $\mathcal{T}_o^2$ , sólo que las componentes dadas al usar como base de descomposición cierto rayo o doble rayo pueden ser infinitas.

Caso doble rayo total: En lo que sigue,  $(w_1, w_2)$  son los ends asociados al doble rayo total. Sorprendentemente, la demostración dada para árboles en  $\mathcal{T}_o^2$  funciona para éste caso. Al haber un doble rayo total existe un doble rayo que cumple el rol del doble rayo único  $ZT$ . Nótese que en todos los pasos de esta demostración no se requirió la finitud de componentes de  $[T : ZT]$ , sino solamente que fueran localmente finitas.

Para mostrar que el doble rayo total puede cumplir el rol de  $ZT$  es necesario mostrar el siguiente lema:

**Lema 6.14.** *Sea  $T$  un árbol localmente finito que posee un doble rayo total y sea  $T'$  un gemelo de  $T$ . Entonces  $T'$  también posee un doble rayo total, y ambos doble rayos totales deben mapearse entre sí para cualquier morfismo entre  $T$  y  $T'$ .*

*Demostración.* Por Corolario 6.7, para todo ordinal  $\beta$  y todo natural extendido  $r$  se tiene que  $C_r^\beta(T')$  es gemelo de  $C_r^\beta(T)$ . Pero por el Teorema 6.12, al estar en el caso de un doble rayo total el centro  $C_\infty^{\xi-1}(T)$  tiene dos ends. En general, para un doble rayo  $Z$  siempre se tiene que  $m(Z) = 1$  (pues es regular, ver Lema 5.20). Por Lema 6.7 el grafo  $C_\infty^{\xi-1}(T')$  es gemelo de  $C_\infty^{\xi-1}(T)$ , y como el doble rayo no tiene gemelos propios, entonces el centro  $C_\infty^{\xi-1}(T')$  también será un doble rayo, el cual se denotará como  $Z'$ . Como ambos son fijos para todo endomorfismo, necesariamente deben mapearse entre sí para cualquier par de morfismos  $\psi : T \rightarrow T'$ ,  $\bar{\psi} : T' \rightarrow T$ , de lo contrario alguno de los endomorfismos  $\Psi = \psi \circ \bar{\psi} \circ \bar{\Psi} = \bar{\psi} \circ \psi$  no fijan su doble rayo correspondiente.  $\square$

El lema anterior servirá entonces como un análogo al Lema 5.12. La demostración de la conjetura en este caso sigue así: Si  $T$  no posee endomorfismos propios entonces  $m(T) = 1$ . Si los posee,  $T$  puede ser regular o irregular. Si es regular, la demostración es idéntica al Lema 5.20 por lo que  $m(T) = 1$ . Si es irregular, puede ser acotsup o nacotsup. Si es nacotsup, se tiene entonces que  $m(T) = \aleph_1$  y la demostración es idéntica a la del Lema 5.23. Si es acotsup, se construyen gemelos  $D^w$  del mismo modo que en la demostración en  $\mathcal{T}_o^2$ . Primero se demostraría que  $D^w$  es gemelo con  $T$ . Luego por Lema 6.14 los doble rayos totales hacen de base de descomposición y la demostración sigue igual que la demostración del Lema 5.25 para  $T \in \mathcal{T}_o^2$ . Por simplicidad de éste trabajo no se repetirá la demostración, se ruega al lector corroborar que la demostración aplica para el caso de un doble rayo total.

Caso un end total:

En lo que sigue, sea  $w^*$  el end total de un árbol  $T$ .

La demostración es distinta a la dada para árboles en  $\mathcal{T}_o^1$ , ya que el argumento central para demostrar que  $D^w$  es no isomorfo a  $T$  es la finitud de las componentes  $[T : RT]$ , y esto ya no se tiene si hay infinitos ends. Sin embargo, se mostrará que un árbol tal que  $D^w$  sea isomorfo a  $T$  debe poseer no contable cantidad de ends.

Del mismo modo que en caso 2 ends no se repetirán las partes de la demostración en  $\mathcal{T}_o^1$  que son iguales para éste caso. Primeramente es necesario mostrar el siguiente lema, homólogo a 6.14.

**Lema 6.15.** *Sea  $T$  un árbol localmente finito que posee un end total y sea  $T'$  un gemelo de  $T$ . Entonces  $T'$  también posee un end total, y ambos end totales deben mapearse entre sí para cualquier morfismo entre  $T$  y  $T'$ . Es decir,  $\forall \psi : T \rightarrow T'$  morfismo,  $\forall R \in w \ \psi(R) \in w'$ .*

*Demostración.* Por Corolario 6.7, para todo ordinal  $\beta$  y natural extendido  $r$  se tiene que  $C_r^\beta(T')$  es gemelo de  $C_r^\beta(T)$ . Pero por Teorema 6.12 si hay un end total en  $T$ , entonces  $T$  corresponde al caso 1, 2 o 3. Si  $T$  corresponde al caso 3 entonces  $\xi$  es ordinal sucesor y  $C_r^{\xi-1}(T)$  tiene solo un end, luego  $C_r^\beta(T')$  también tendrá solo un end y esos ends tienen que mapearse entre sí para todo morfismo por Lema 6.5. Por lo tanto este caso cumple el Lema.

Si  $T$  corresponde al caso 1 o 2, se tendrá que  $xi$  es un ordinal límite o un ordinal sucesor tal que  $C_r^{\xi-1}(T)$  posee infinitos ends. Sea  $w_I$  el total end de  $T$  y  $w'_I$  el total end de  $T'$ . Por argumento de compacidad de los espacios topológicos, estos ends son los únicos ends están en la intersección de los centro-end- $\infty$  con ordinal menor si  $\xi$  es un ordinal límite, o en la intersección de los centro-end- $r$  con  $r$  natural si  $\xi$  es ordinal sucesor.

Para un morfismo  $\psi : T \rightarrow T'$ , si la imagen del end  $w_I$  es distinta de  $w'_I$ , entonces en particular existe un rayo  $R \in w_I$  y un ordinal  $\gamma^*$  tal que  $\psi(R) \cap C_{\infty}^{\gamma^*}(T') = \emptyset$ , si  $\xi$  es un ordinal límite; o un natural  $r^*$  tal que  $\psi(R) \cap C_{r^*}(C_{\infty}^{\xi-1}(T')) = \emptyset$  si  $\xi$  es un ordinal sucesor. Pero esto contradice el Lema 6.5 o Lema 6.8, ya que siempre  $R$  tendrá aristas que pertenecen al centro-end- $\infty$  con ordinal mayor a  $\gamma^*$ , o al centro-end- $r$  con  $r$  mayor a  $r^*$ , ya que  $w_I$  está en la intersección de la familia de centros correspondiente.

Aplicando el mismo argumento para un morfismo  $\psi' : T' \rightarrow T$  desde  $T'$  a  $T$ , siempre se tendrá que los ends totales deben mapearse entre sí, para cualquier morfismo entre  $T$  y  $T'$ .  $\square$

Otra diferencia con la demostración dada para  $\mathcal{T}_o^1$  es que un endomorfismo propio de  $T$  no necesariamente posee un rayo maximal respecto a la inclusión sobre todos los rayos que se mapean en sí mismos vía  $\phi$ . En  $\mathcal{T}_o^1$  la existencia de tal rayo está asegurada por el hecho que la no existencia del rayo implica la existencia de un doble rayo, pero  $\mathcal{T}_o^1$  solo hay un end.

El siguiente Lema explica esto en detalle, generando dos subcasos.

**Lema 6.16.** *Sea  $T$  un árbol con un total end y sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T$ . Entonces se tiene uno de los siguientes casos:*

1. *Dentro de todos los rayos que se mapean en sí mismos vía  $\phi$  existe un rayo  $RT$  maximal respecto a la inclusión. Luego, existen  $l$  familias  $\subseteq$ -1cadena indexadas por  $\mathbb{N}$  correspondientes a  $\{([T : RT](r_{p+kl}), r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $l$  natural y  $p$  entre 0 y  $l - 1$ .*
2. *Dentro de todos los rayos que se mapean en sí mismos vía  $\phi$  no existe un rayo  $RT$  maximal respecto a la inclusión. Luego, existe un doble rayo  $ZT$  que incluye a todos los rayos descritos al inicio tal que  $\phi(ZT) = ZT$ ; y existen  $l$  familias  $\subseteq$ -2cadena indexadas por  $\mathbb{Z}$  correspondientes a  $\{([T : ZT](r_{p+kl}), r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , con  $l$  natural y  $p$  entre 0 y  $l - 1$ .*

*Se dirá en ambos casos que  $\phi$  genera las familias  $\{([T : RT](r_{p+kl}), r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{N}}$  o  $\{([T : ZT](r_{p+kl}), r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{Z}}$  según corresponda.*

*Demostración.* Por Corolario 4.12 se tiene la existencia de un rayo  $RT$  que se mapea en sí mismo vía  $\phi$ .

Supongamos que existe un rayo maximal respecto a la inclusión sobre todos los rayos que se mapean en sí mismos vía  $\phi$ . Sea  $RT$  este rayo. En este caso, el endomorfismo  $\phi$  reducido en su dominio a  $V(RT)$  induce un endomorfismo de  $RT$ . Por Lema 4.6, el endomorfismo  $\phi$  reducido en el dominio a  $RT$  es generado por el shift, es decir, existe  $l$  natural mayor

que cero tal que  $\phi|_{RT} = \sigma^l$ . Por Lema 4.23 se tiene que  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : \phi(RT)](\phi(r_i)), \phi(r_i))$ . Pero  $\phi|_{RT} = \sigma^l$ , luego

$$([T : \phi(RT)](\phi(r_i)), \phi(r_i)) = ([T : \phi(RT)](r_{i+l}), r_{i+l}).$$

Por Lema 4.19, para todo índice  $i$  mayor a cero se tiene que  $([T : \phi(RT)](r_{i+l}), r_{i+l})$  es igual a  $([T : RT](r_{i+l}), r_{i+l})$  (Nótese que el vértice  $r_i$  está en la frontera de  $\phi(RT)$  respecto a  $RT$ ) y por lo tanto  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : RT](r_{i+l}), r_{i+l})$ .

Nótese que la componente  $[T : \phi(RT)](r_l)$  contiene a la componente  $[T : RT](r_l)$  y además contiene la parte de  $RT$  que no tiene preimagen vía  $\phi$  y todas las componentes respecto a  $RT$  asociadas a estos vértices de  $RT$ . Luego,  $[T : \phi(RT)](r_l)$  es distinto a  $[T : RT](r_l)$ .

Sin embargo, la imagen de  $V([T : RT](r_0) - \{r_0\})$  no interseca a  $V(RT)$ . Esto porque, de lo contrario, existiría un vértice  $r'$  tal que  $\phi(r') = r_p$  y un camino  $P$  que conecta  $r'$  con  $r_0$ . Como  $\phi(r') = r_p$  es un vértice de  $R$  y  $\phi(r_0) = r_l$  también es un vértice de  $RT$ , el camino  $P$  también debe mapearse en  $RT$ . Agregando  $P$  al inicio de  $RT$  se encontraría un rayo que incluye a  $RT$  y que se mapea dentro de sí mismo vía  $\phi$ , contradiciendo la maximalidad de  $RT$  respecto a la inclusión sobre los rayos con esta propiedad. Luego, la componente  $([T : RT](rt_0), rt_0)$  se mapea en la parte de  $[T : \phi(RT)](r_l)$  que no posee vértices de  $RT$  salvo su raíz, es decir  $([T : RT](rt_0), rt_0)$  es subgrafo de  $([T : RT](r_l), r_l)$ .

Aplicando lo anterior sucesivamente, se obtienen entonces  $l$  familias de grafos  $\subseteq$ -1cadena dados por  $\{[T : RT](r_{p+kl})\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $p$  entre 0 y  $l - 1$ .

Si no existe un rayo maximal, entonces existe una cadena de rayos que se incluyen. Es fácil ver que tal cadena tiene como límite a un doble rayo. Sea  $ZT$  este doble rayo. Como todos los rayos dentro de él se mapean en sí mismos vía  $\phi$ , la imagen de  $V(ZT)$  vía  $\phi$  es  $V(ZT)$ . Con esto,  $\phi$  reducido a  $V(ZT)$  induce un automorfismo del doble rayo. Como  $\phi$  no fija vértices o aristas, el automorfismo inducido debe ser generado por el shift. Como uno de los ends de  $ZT$  es el total end de  $T$ , el corrimiento debe tener el signo asociado para que los rayos de  $ZT$  del end total se mapeen dentro de sí mismos. Sin pérdida de generalidad el signo del corrimiento es positivo. Es decir,  $\phi|_{V(ZT)}(zt_i) = zt_{i+l}$  para algún valor de  $l$  natural. Por Corolario 4.23, las componentes asociadas a  $[T : ZT]$  forman  $l$  familias  $\subseteq$ -2cadena dadas por  $[T : ZT](\sigma^{kl}(zt_{i+p}))$  con  $p$  entre 0 y  $l - 1$ . Note que la frontera de  $\phi(ZT)$  respecto a  $ZT$  es vacía, luego por Lema 4.19 las componentes  $[T : ZT](zt_i)$  y  $[T : \phi(ZT)](\phi(zt_i))$  son iguales.  $\square$

Con esto, el caso de un end total se divide en dos subcasos: en grafos que poseen algún endomorfismo propio que posee un rayo maximal; y su complemento, es decir, grafos que para todo endomorfismo propio no existe un rayo maximal. Se dirá en el primer caso que  $T$  posee un *rayo base-maximal*. En el segundo caso se dirá que  $T$  es *doble rayo base-maximal*.

En el primer caso, la demostración es similar a la demostración dada para árboles en  $\mathcal{T}_o^1$ . El segundo caso, también es similar aunque ahora las bases de descomposición serán dobles rayos. Pero como hay un total end, en el caso que  $D^w$  sea isomorfo a  $T$  los dobles rayos base comparten una cola asociada al end total. Este último caso mezcla elementos de la demostración en  $\mathcal{T}_o^1$  y  $\mathcal{T}_o^2$ .

Este segundo caso fue descubierto en etapas de corrección de la presente memoria, por lo que no se explicará con el mismo detalle que el primero. A continuación se presenta la demostración para el primer caso, y por último se presenta la demostración para el segundo caso.

Entonces la demostración sigue del siguiente modo: Si  $T$  no posee endomorfismos propios entonces  $m(T) = 1$ . Si los posee,  $T$  puede ser acotsup o nacotsup. Si es nacotsup, la demostración es idéntica a la del Lema 5.7 o Lema 5.23 por lo que  $m(T) = \aleph_1$ . Si es acotsup, se construyen gemelos  $D^w$  del mismo modo que en la demostración del Lema 5.8 ( o 5.25 homólogo). Primero se demostraría que  $D^w$  es gemelo con  $T$ . Por Lema 6.15  $D^w$  debe poseer entonces un end total. La demostración continúa, mostrando que  $D^w$  es no isomorfo a  $T$ . El argumento usado en  $\mathcal{T}_o^1$  falla en la condición de finitud de las componentes de  $[T : RT]$ . Ahora pueden ser infinitas y por lo tanto pueden contenerse a sí mismas. Sin embargo, se introducirá el concepto de ecuaciones gráficas, que permitirá reparar el argumento y demostrar de manera similar que  $D^w$  y  $D^{w'}$  son no-isomorfos para dos palabras distintas  $w$  y  $w'$  en ambos casos.

A continuación se presentará el concepto de ecuaciones gráficas en detalle y sus lemas asociados. Luego se demostrará en detalle la idea de demostración dada anteriormente.

### 6.3.1. Ecuaciones gráficas.

**Definición 6.17.** Sean  $(A, a)$  y  $(B, b)$  dos grafos enraizados, y sea  $P \subseteq V(A)$  un subconjunto de vértices de  $A$  al que se llamará *conjunto de enganche*. Se define la *convolución* entre  $(A, a)$  y  $(B, b)$  como el grafo enraizado que se obtiene a partir de  $(A, a)$  y al que se le agrega una copia de  $(B, b)$  en cada vértice de  $P$  (el vértice en  $P$  se identifica con  $b$ ). Se denota por  $(A, P, a) * (B, b)$  el grafo resultante. Formalmente,  $(A, P, a) * (B, b)$  es el grafo  $G$  definido por componentes (ver Observación 4.6), donde  $A$  es base de descomposición, para todo vértice  $v$  en  $P$  se tiene que  $([G : A](v), v) \cong (B, b)$  y para todo vértice  $v$  que no pertenece a  $P$  se tiene que  $([G : A](v), v) \cong (r, r)$ .

**Lema 6.18.** Para todo par de árboles enraizados  $(A, a)$  y  $(B, b)$ , siempre se tendrá que  $(A, a)$  es subgrafo de  $(A, P, a) * (B, b)$ .

**Definición 6.19.** Una *ecuación gráfica* es un grafo conexo  $(G, r)$  y un subconjunto de vértices  $P \subseteq V(G)$  distinto de vacío. Un grafo con raíz  $(X, x)$  es *solución de una ecuación gráfica*  $(G, r)$  si  $(G, P, r) * (X, x)$  es isomorfo a  $(X, x)$ .

**Definición 6.20.** Se define recursivamente  $*^n(G, P, r)$  como  $(G, P, r) * (*^{n-1}(G, P, r))$ , donde  $*^1(G, P, r)$  es  $(G, r)$ . Por Lema 6.18, la familia  $\{ *^n(G, P, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia  $\subseteq$ -1cadena.

**Lema 6.21.** Sea  $((\overline{G}, r), \overline{P})$  una ecuación gráfica donde la raíz  $r$  no pertenece a  $\overline{P}$ , y  $(G, r)$  un subgrafo de  $(\overline{G}, r)$ , conexo y localmente finito. Se denota por  $P$  la intersección entre  $\overline{P}$  y  $V(G)$ . Luego, existe un grafo límite  $(\mathcal{G}, r)$  de la familia  $\{ *^n(G, P, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  y toda solución de  $((\overline{G}, r), \overline{P})$  contiene a este grafo límite como subgrafo.

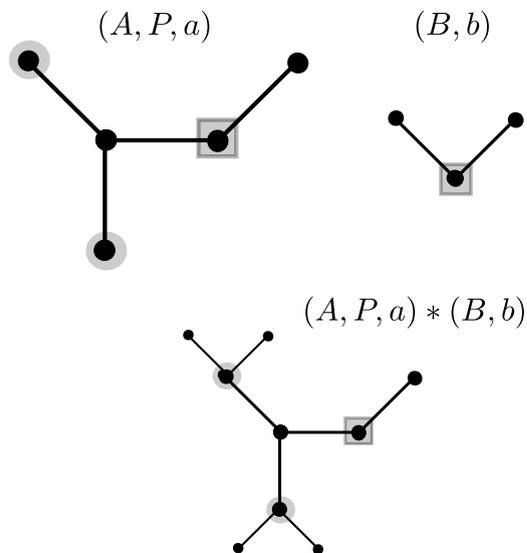


Figura 6.6:  $P$  son los vértices sombreados en círculo.  $a$  y  $b$  son los vértices sombreado en cuadrado respectivamente.

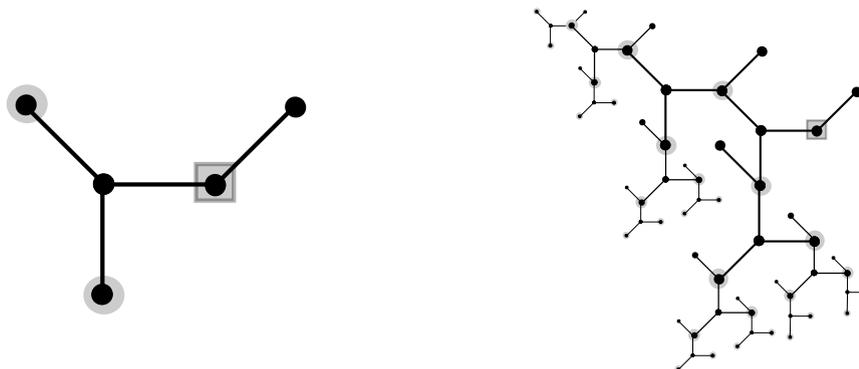


Figura 6.7: A la derecha se muestra un ejemplo de ecuación gráfica.  $P$  es el conjunto de vértices sombreados con círculo, y la raíz es el vértice sombreado con cuadrado. A la izquierda se presenta  $*^4(G, P, r)$ .

*Demostración.* Sea  $(X, x)$  una solución de la ecuación gráfica y sea  $(Y, y) = (\overline{G}, \overline{P}, r) * (X, x)$  la convolución entre  $\overline{G}$  y  $X$ . Como  $X$  es solución, existe un isomorfismo  $\psi : V(Y) \rightarrow V(X)$  entre  $(Y, y)$  y  $(X, x)$ . En particular  $(G, r)$  es subgrafo de  $(Y, y)$ , ya que por la definición de la convolución  $(\overline{G}, r)$  es subgrafo de  $(\overline{G}, \overline{P}, r) * (X, x) = (Y, y)$  y  $(G, r)$  es subgrafo de  $(\overline{G}, r)$ . Luego, existe una copia de  $(G, r)$  en  $(X, x)$  correspondiente a  $\psi((G, r))$ .

En particular  $G$  puede ser usado como base de descomposición de  $Y$ , pues es conexo. Por Lema 4.20 se tiene que  $[Y : G](v)$  es isomorfo vía  $\psi$  con  $[X : \psi(G)](\psi(v))$ . Además, por definición de la operación convolución, si  $v$  pertenece a  $\overline{P}$  entonces  $[Y : \overline{G}](v)$  es isomorfo a  $(X, x)$ .

Usando el Lema 4.19 se tiene que  $([Y : G](v), v) \supseteq ([Y : \overline{G}](v), v)$ . Aplicando esta observación se usará inducción para mostrar que para todo  $n$ , el grafo  $*^n(G, P, r)$  es subgrafo de  $(X, x)$ . El caso base está dado por la imagen de  $(G, r)$  vía  $\psi$ . Para el paso inductivo, suponemos que  $*^n(G, P, r)$  es subgrafo de  $(X, x)$ . Sabemos que en  $(X, x)$  hay una copia de  $(G, r)$ , que es subgrafo de la imagen de  $\overline{G}$  en  $X$ . Usando esta copia como base de descomposición en  $(X, x)$ . Las componentes  $[X : G](v)$  para vértices  $v$  en la imagen de  $P$  justamente contienen nuevas copias de  $(X, x)$  (recuerde que  $(X, x)$  es la imagen de  $[Y : \overline{G}](v)$  vía  $\psi$ , acá se usa que  $([T : \overline{G}](v), v)$  es subgrafo de  $([T : G](v), v)$ ). En particular, aparecen copias de  $*^n(G, P, r)$  en  $[X : G](v)$ . Nótese que  $*^n(G, P, r)$  es subgrafo enraizado de  $[X : G](v)$ , luego en la primera copia de  $G$  aparecen colocadas en sus vértices de enganche copias de  $*^n(G, P, r)$ . Pero esto justamente corresponde con la definición de  $(*^{n+1}(G, P, r), r)$ , la convolución de  $(G, P, r)$  con  $*^n(G, P, r), r$ . Luego  $(*^{n+1}(G, P, r), r)$  es subgrafo enraizado de  $(X, x)$ . La contención en cada paso es “anidada”, es decir,  $*^n(G, P, r), r \subseteq *^{n+1}(G, P, r), r$  siempre con la misma raíz. Notemos también que para cada  $n$ , el grafo  $(*^n(G, P, r), r)$  es localmente finito. Además, la familia  $\{*^n(G, P, r)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es expansiva: como  $r$  no pertenece a  $P$ , existe una distancia  $d$  mayor estricto de cero, la menor distancia de vértices en  $P$  a la raíz. En cada paso los vértices que se agregan en el paso  $n + 1$  están a distancia mayor estricto a la distancia de su vértice de enganche a la raíz. Por inducción, los vértices que se agregan en el paso  $n + 1$  están al menos a distancia  $(n + 1)d$  respecto a la raíz. Luego, para todo  $k$  existe un  $N$  tal que  $Nd > k$ , en este  $N$  se tendrá que  $*^N(G, P, r)|_k$  contiene a todos los vértices de la familia anidada que están a distancia a lo más  $k$  de la raíz, y por lo tanto  $*^i(G, P, r)|_k$  para índices superiores tiene la misma cantidad de vértices que  $\phi_{N_i}(*^N(G, P, r), r)|_k$ , para  $\{\phi_{i, i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$  una familia cualquiera de semimorfismos asociados a la anidación de la familia  $\{*^n(G, P, r)\}_{n \in \mathbb{N}}$  (mismo rol que en la demostración del Lema 4.14). Como  $\phi_{N_i}$  es inyectiva, la igualdad de cantidad de vértices implica que también es epiyectiva y por lo tanto  $*^i(G, P, r), r|_k$  es isomorfo a  $*^N(G, P, r), r|_k$ . Con esto, por el Lema 4.14 existe un grafo límite  $(\mathcal{G}, r)$  localmente finito que está contenido en cualquier grafo que pueda contener a todos los elementos de la familia que lo define. En particular  $(X, x)$  cumple esto, luego el grafo límite es subgrafo de  $(X, x)$ , con lo que se tiene el lema.  $\square$

**Lema 6.22.** *Sea  $((\overline{G}, r), \overline{P})$  una ecuación gráfica donde la raíz  $r$  no pertenece a  $\overline{P}$ , y  $(G, r)$  un subgrafo de  $(\overline{G}, r)$ , conexo y localmente finito. Se denota por  $P$  la intersección entre  $\overline{P}$  y*

$V(G)$ . Supongamos que existen grafos  $(X, x)$  e  $(Y, y)$  tal que

$$((\overline{G}, r), \overline{P}) * (Y, y) \cong (X, x)$$

y tal que  $(X, x)$  sea subgrafo enraizado de  $(Y, y)$ . Entonces, el grafo límite  $(\mathcal{G}, r)$  de la familia  $\{ *^n(G, P, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  es subgrafo de  $(X, x)$ .

*Demostración.* Sea  $(Z, z) = ((\overline{G}, r), \overline{P}) * (Y, y)$ . Por Lema 6.18  $(G, r)$  es subgrafo enraizado de  $(Z, z)$ . Como  $(X, x)$  es isomorfo a  $(Z, z)$ , entonces  $(G, r)$  también es subgrafo de  $(X, x)$ .

Del mismo modo que en la demostración del lema anterior, se demostrará por inducción que  $*^n(G, P, r)$  es subgrafo enraizado de  $(X, x)$  para todo  $n$  natural. El caso base ya está mostrado. Para el paso inductivo, si  $*^n(G, P, r)$  es subgrafo enraizado de  $(X, x)$  y  $(X, x)$  es subgrafo de  $(Y, y)$  entonces  $(Y, y)$  también tiene como subgrafo enraizado a  $*^n(G, P, r)$ . Pero en  $(Z, z)$  entonces  $*^n(G, P, r)$  es parte de las componentes conexas asociadas a los vértices del conjunto  $P$ . Luego el grafo  $(G, P, r) * *^n(G, P, r)$  es subgrafo de  $(Z, z)$ . Pero  $(G, P, r) * *^n(G, P, r)$  es igual a  $*^{n+1}(G, P, r)$ . Luego  $*^{n+1}(G, P, r)$  es subgrafo de  $(Z, z)$  y por lo tanto subgrafo de  $(X, x)$  pues son isomorfos.

Usando el Lema 4.14 se tiene entonces que el grafo límite de la familia  $\{ *^n(G, P, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  es subgrafo de  $(X, x)$ , con lo que se tiene el Lema. (En el lema anterior ya se mostró que la familia  $\{ *^n(G, P, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  es expansiva y localmente finita).  $\square$

Serán llamados *niveles* de  $(\mathcal{G}, r)$  las nuevas partes que se agregan en cada paso de su construcción recursiva. El nivel 1 es la copia de  $G$  con raíz en  $r$ , el nivel 2 son las copias de  $G$  que se colocan al nivel 1, y así sucesivamente. A continuación se demostrará que bajo ciertas condiciones  $(\mathcal{G}, r)$  posee no contable cantidad de ends. Éste lema será la base para demostrar la conjetura en el caso que falta.

**Lema 6.23.** *Sea  $((G, r), P)$  una ecuación gráfica tal que su raíz  $r$  no pertenece a  $P$ ; y tal que  $P$  posee dos o más vértices. Entonces el grafo límite  $(\mathcal{G}, r)$  de la familia  $\{ *^n(G, r) \}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene  $\aleph_1$  ends.*

*Demostración.* Para cada elemento en  $L = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  se encontrará un end y un rayo de él, distinto entre elementos distintos de  $L$ . Como  $L$  tiene cardinal  $\aleph_1$ , se tendría el lema. Sean  $p_0, p_1$  dos vértices de  $P$ . Por conexidad de  $G$  hay un camino entre  $r$  y  $p_0$  y otro entre  $r$  y  $p_1$ . Como  $r$  no pertenece a  $P$ , estos caminos son no triviales. Para cada elemento de  $l \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , se escoge un rayo que parte de  $r$  y pasa por  $p_{l(i)}$  en cada nivel. Sea  $l_1$  y  $l_2$  dos elementos distintos de  $L$ , y sea  $k$  el primer índice donde  $l_1(k) \neq l_2(k)$ . Borrando en grafo  $*^k(G, r)$  el camino que conecta  $p_{l_1(k)}$  del nivel  $n$  con  $p_{l_2(k)}$ , como los rayos asociados a  $l_1$  y  $l_2$  tienen índice distinto en su término  $k$ , en el nivel  $k$  se separan y siguen por componentes distintas de  $[\mathcal{G} : *^k(G, r)]$ . Luego,  $V(*^k(G, r))$  es un separador finito y por lo tanto los rayos pertenecen a ends distintos, con lo que se tiene el lema.

Para cada separador finito, tendrá un nivel máximo y a partir de él dos rayos cualquiera quedan en componentes distintas. Luego todos los rayos están en clases de equivalencia distintas y son ends distintos.  $\square$

## 6.4. Fin de la demostración.

A continuación se presenta la demostración para el caso de un end total. Se repetirán trozos de la demostración dada para árboles en  $\mathcal{T}_o^1$ , solo para mostrar que la demostración aplica del mismo modo y poder entender en qué parte el argumento cambia. Las definiciones de regular, acotsup y acotinf son las mismas que para el caso en  $\mathcal{T}_o^1$ . Se presenta primeramente el subcaso de árboles con un endomorfismo propio que tiene un rayo maximal base, luego el complemento.

### 6.4.1. Primer caso: Árboles con un total end y que poseen un rayo base-maximal.

**Lema 6.24.** *Sea  $T$  un árbol localmente finito que posee un end total, un endomorfismo propio y un rayo base maximal. Si  $T$  es nacotsup, entonces  $m(T) = \aleph_1$ .*

*Demostración.* Si  $T$  es nacotsup entonces posee un endomorfismo propio tal que  $T - \phi(T)$  posee infinitas componentes conexas: basta con tomar el rayo  $RT$  del Lema 6.16 que induce  $l$  familias  $\subseteq$ -1cadena. Como  $T$  es nacotsup posee una cantidad infinita de vértices en  $\mathbb{N}$  donde  $([T : RT](rt_i), rt_i) \subsetneq ([T : RT](rt_{i+l}), rt_{i+l})$ , luego en esos vértices se generaran componentes conexas (no vacías) al eliminar  $\phi(T)$  de  $T$ . Por Corolario 3.14 se tiene que  $m(T) = \aleph_1$ .  $\square$

**Lema 6.25.** *Sea  $T$  localmente finito que posee un end total, un endomorfismo propio y un rayo base-maximal. Si  $T$  es acotsup distinto de un rayo, entonces  $m(T) = \aleph_0$ .*

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{T}_o^1$  acotsup distinto de un rayo. Sea  $\phi$  endomorfismo propio de  $T$ , escogido entre todos los endomorfismos propios, que genere la mínima cantidad de familias. Sea  $l$  esta cantidad. Sea  $RT$  el rayo del total end de  $T$ , maximal respecto a la inclusión, tal que  $\phi(RT) \subseteq RT$ . Sea  $k$  el índice de regularidad superior de  $T$  y  $\phi$ . Nótese que a partir del vértice  $rt_k$  las componentes de  $[T : RT]$  son todas igual al grafo límite en su familia. Sea  $\mathcal{L}$  el conjunto de sus componentes límites de cada familia y  $(L_p, r)$  el grafo límite de la familia  $p$ , para  $p$  en  $\{0, 1, \dots, l-1\}$ .

Sea  $T'$  el grafo que se obtiene al quitar de  $T$  los vértices de las componentes  $[T : RT](rt_i)$  con  $i$  menor a  $k$ . Este grafo posee un rayo  $RT' \subseteq RT$  respecto al cual las componentes  $[T' : RT']$  son los grafos límites de cada familia en  $T$ . Por definición, siempre se tendrá que  $T'$  es subgrafo de  $T$ . Además, si se toma un  $m$  suficientemente grande tal que para todo natural  $i$  se tenga que  $ml + i$  sea mayor o igual a  $k$ , entonces  $([T : RT](rt_{ml+i}), rt_{ml+i})$  será el grafo límite en su familia y por lo tanto isomorfo a  $[T' : RT'](rt'_{ml+i-k})$ . Recordar además que siempre se tiene que  $([T : RT](rt_i), rt_i)$  es subgrafo de  $([T : RT](rt_{ml+i}), rt_{ml+i})$ , pues son parte de una misma familia. Tomando un morfismo entre  $RT$  y  $RT'$  dado por  $\phi(i) = i + ml - k$ , por el Lema 4.23 se tiene entonces que  $T$  es subgrafo de  $T'$  y por lo tanto  $T$  y  $T'$  son gemelos. Por la transitividad de la relación gemelos, basta encontrar  $\aleph_0$  gemelos de  $T'$  para mostrar el lema.

La idea de esta construcción es modificar las componentes de  $RT'$  para generar gemelos. La modificación consiste en reemplazar ciertas componentes por una componente que sea no isomorfa pero aún esté contenida en su sucesor de la  $\subseteq$ -1cadena donde pertenece. Sea  $\phi$  un endomorfismo propio de  $T'$  que genera la menor cantidad de familias. Sea  $l$  esta cantidad. Notar que este  $l$  puede diferir de el valor dado para  $T$  (ver Figura 5.2).

Como  $T$  es distinto del rayo, alguna de las componentes límites de  $[T : RT]$  debe ser distinta del árbol trivial. Luego, debe existir alguna familia tal que su grafo límite sea distinto de  $(r, r)$  y por lo tanto posea un subgrafo no-isomorfo a él (siempre se puede tomar el grafo  $(r, r)$ ). Sea  $p$  la menor modularidad  $l$  de las familias en  $T'$  tal que  $[T' : RT'](rt'_p)$  posee un subgrafo propio. Sea  $[T' : RT'](rt'_p)^*$  un subgrafo propio de  $[T' : RT'](rt'_p)$ . Sea  $L_p^*$  el grafo  $[T' : RT'](rt'_p)^*$ .

Sea  $w$  una palabra del lenguaje  $00 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ . Se denota  $w(i)$  el caracter  $i$ -ésimo de  $w$ , donde  $w(0)$  es su primer caracter. Se asume que para un índice fuera de su tamaño (mayor a  $|w|$ ) siempre se tiene que  $w(i) = 0$ .

Se define el grafo  $D^w$  a partir de un rayo que será llamado  $RD^w$  y sus componentes  $[D^w : RD^w](rd_j^w)$ , usando la Observación 4.6 que permite definir correctamente un grafo de este modo. Se definen las componentes  $([D^w : RD^w](rd_j^w), rd_j^w)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  de la siguiente forma: (Ver Figura 5.3)

$$([D^w : RD^w](rd_j^w), rd_j^w) \cong \begin{cases} ([T' : RT'](rt'_j), rt'_j) & \text{si } j \not\equiv p \pmod{l} \\ ([T' : RT'](rt'_j), rt'_j) & \text{si } j \equiv p \pmod{l}, j = rl + p \text{ y } w(r) = 0. \\ ([T' : RT'](rt'_p)^*, rt'_p)^* & \text{si } j \equiv p \pmod{l}, j = rl + p \text{ y } w(r) = 1. \end{cases} \quad (6.5)$$

Para probar la conjetura se demostrarán las siguientes tres proposiciones: cada  $D^w$  es gemelo de  $T'$ , todos los gemelos  $D^w$  generados son no-isomorfos con  $T'$ , y entre ellos son no isomorfos entre sí. Como el cardinal de las palabras en el lenguaje dado es infinito contable, la familia de gemelos  $\{D^w\}_{w \in 00 \cdot \{0,1\}^* \cdot 1}$  sería testigo de la existencia de contable cantidad de gemelos, luego  $m(T) \geq \aleph_0$ .

Primero: Para todo  $w$  en  $00 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ , el grafo  $D^w$  es gemelo de  $T'$ . El endomorfismo inducido por el morfismo que mapea  $rd_i^w$  en  $rt'_i$  cumple las hipótesis de 4.23, por construcción de  $D^w$ . También, al quitar las componentes de los vértices en  $RT'$  con índice menor o igual a  $|w|l$  se reobtiene  $T'$ , luego  $T' \subseteq D^w$ , y por lo tanto son gemelos.

Dado esto, por Lema 6.15 se tiene entonces que  $D^w$  también posee un total end. Notar que ese total end debe ser el end correspondiente a  $RD^w$ , ya que existe un morfismo que mapea el rayo  $RT'$  en  $RD^w$ . Luego, si no es el total end, se viola el Lema 6.15.

Segundo: Para todo  $w$  en  $00 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ , el grafo  $D^w$  no es isomorfo a  $T'$ . Supongamos que son isomorfos. Sea  $\rho : V(T') \rightarrow V(D^w)$  un isomorfismo entre  $D^w$  y  $T'$ . Sea  $R'$  la imagen de  $RT'$  vía  $\rho$ , sea  $R^* = RD^w$ . Por Lema 4.20 se tiene que, para todo  $i$  natural,  $([T' : RT'](r_i), r_i)$

es isomorfo a  $([D^w : R'](\rho(r_i)), \rho(r_i))$ .

$$R' = \rho(RT'), \quad R^* = RD^w \quad (6.6)$$

Como  $T'$  y  $D^w$  tienen un end total, por Lema 6.15 el rayo  $R'$  debe pertenecer al end total de  $T'$  y por Lema 2.23 deben entonces  $R'$  y  $R^*$  compartir una cola. Sea  $R^\cap$  el rayo maximal respecto a la inclusión que está en la intersección de  $V(R')$  y  $V(R^*)$ . Notemos que  $R^\cap$  tiene tres enumeraciones, una heredada por  $R^w$ , otra heredada de  $R'$  y la propia natural tomando vértice 0 su hoja. Sea  $\nu^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la función que asocia la numeración de  $R^\cap$  con  $R^*$ , y  $\nu'$  lo mismo pero con  $R'$  (ver Figura 6.8). En particular  $\nu^*(0)$  es el índice en  $R^*$  del primer vértice o vértice 0 de  $R^\cap$ . Nótese que por Lema 4.19, para todo índice  $i$  estrictamente mayor a 0 se tiene que

$$[D^w : R^\cap](r_i^\cap) = [D^w : R'](r_{\nu'(0)+i}^{\prime}) = [D^w : R^*](r_{\nu^*(0)+i}^*). \quad (6.7)$$

De la ecuación anterior es posible concluir que  $L_{\nu'(0)+i \bmod(l)}$  es isomorfo a  $L_{\nu^*(0)+i \bmod(l)}$ , ya que después de cierto índice en  $R'$  y en  $R^*$  las componentes de  $[D^w : R']$  y  $[D^w : R^*]$  son elementos de  $\mathcal{L}$ . Sea  $\Delta = \nu'(0) - \nu^*(0) \bmod(l)$ . Si  $\Delta$  es distinto de 0, tomando  $i = Nl - \nu^*(0)$  y  $N$  suficientemente grande se tendrá que  $L_\Delta \cong L_0$ . En general tomando  $i = Nl - \nu^*(0) + k\Delta + r$  se tendrá que  $L_{(k+1)\Delta+r \bmod(l)} \cong L_{k\Delta+r \bmod(l)}$ , con  $r \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ . Con esto, el endomorfismo inducido por  $\sigma^\Delta : V(RT') \rightarrow V(RT')$  en  $T'$  también es un endomorfismo válido. Pero se buscó un endomorfismo que generara una mínima cantidad de familias  $\subseteq$ -1cadena, esa cantidad es  $l$ . Es decir, se encontró un endomorfismo que genera una menor cantidad que esa mínima cantidad, lo cual es una contradicción. Necesariamente  $\Delta$  debe ser cero y por lo tanto  $\nu'(0)$  tiene la misma modularidad  $l$  que  $\nu^*(0)$ .

$$\nu'(0) \equiv \nu^*(0) \bmod(l) \quad (6.8)$$

La primera componente en  $R^\cap$  es especial. Notemos que  $[D^w : R'](r_{\nu'(0)}^{\prime})$  contiene todos los vértices de  $R^*$  que no están en  $R'$ , ya que estos vértices se conectan a  $r_{\nu'(0)}^{\prime}$  a través de la parte del rayo  $R^*$  que es disjunto a  $R'$ . Del mismo modo,  $[D^w : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$  contiene los vértices de  $R'$  que no pertenecen a  $R^*$ . Nótese además que las componentes respecto a  $R'$  deben ser elementos de  $\mathcal{L}$ , ya que respecto a  $R'$  el grafo es isomorfo a  $T'$ . Por Lema 4.19, se tiene igualdad entre  $[D^w : R'](v)$  y  $[D^w : R^\cap](v)$  para vértices que no están en la frontera de  $R^\cap$  respecto a  $R'$ . Estos vértices son todos salvo la hoja de  $R^\cap$ . Luego todas las componentes  $[D^w : R^\cap](v)$  para vértices  $v$  interiores de  $R^\cap$  son elementos que pertenecen a  $\mathcal{L}$ .

Las componentes modificadas en  $R^*$ , isomorfas a  $[T' : RT'](rt_p^{\prime})^*$ , podrían ser isomorfas al grafo límite de una familia  $q$  en  $T'$ , con  $q$  distinto de  $p$ . Sin embargo, si un vértice de  $R^*$  cuya componente es isomorfa a  $[T' : RT'](rt_p^{\prime})^*$  es un vértice interior de  $R^\cap$ , por (6.8) deberá ser isomorfa al grafo límite en su misma familia, lo cual contradice que  $[T' : RT'](rt_p^{\prime})^*$  sea subgrafo propio de  $[T' : RT'](rt_p^{\prime}) = L_p$ . Nótese que todas las palabras de  $00 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$  terminan en 1, luego la última componente es una componente modificada. Con todo esto, el ultimo nodo en  $R^*$  tal que su componente es una componente modificada no puede ser un

vértice interior de  $R^\cap$ . Es decir, el índice  $\nu^*(0)$  debe ser mayor que el índice de este vértice. Es decir,

$$\nu^*(0) \geq (|w| - 1)l + p. \quad (6.9)$$

Nótese que no se tiene desigualdad estricta, ya que nada impide a priori que la componente  $[D^w : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$  sea isomorfa a  $[T' : RT'](rt'_p)^*$ .

Como  $R'$  es la imagen de  $RT'$  vía  $\rho$ , por Lema 4.20 la componente  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  es un elemento de  $\mathcal{L}$ . Luego, siempre existirá un  $q \in \{0, 1, \dots, l - 1\}$  tal que

$$(L_q, r) \cong [D^w : R'](r'_{\nu'(0)}). \quad (6.10)$$

Sea  $Q$  el conjunto de índices  $i$  tal que  $i$  es menor o igual a  $\nu^*(0)$  y  $[T' : R^*](r_i^*)$  es isomorfo a  $(L_q, r)$ ; y sea  $\overline{Q}$  el conjunto de índices  $i$  tal que  $i$  es menor o igual a  $\nu^*(0)$  y  $[T' : R^*](r_i^*)$  es no-isomorfo a  $(L_q, r)$ .

Nótese entonces que  $(L_q, r)$  satisface la ecuación gráfica definida por el grafo inducido en  $D^w$  por los vértices

$$V(R^*) \cup \left( \bigcup_{i \in \overline{Q}} (V([T' : R^*](r_i^*) - r_i^*)) \right) - (V(R^\cap) - r_0^\cap). \quad (6.11)$$

El conjunto de enganche sería  $Q$  y la raíz el vértice  $r^\cap(0)$ . Por el lenguaje usado para escoger  $w$  siempre hay dos ceros al inicio. Luego, para cualquier posibilidad de  $p$  siempre se tendrá que  $|Q|$  tiene más de dos elementos.

En el vértice  $r_0^\cap$  puede que exista una porción de la ecuación gráfica que esté en  $W = [T' : R'](r'_{\nu'(0)}) \cap [T' : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$  y que contenga una copia enraizada de  $(L_q, r)$ . En este caso  $r_0^\cap$  pertenecería a  $Q$ . Sin embargo, para usar el Lema 6.22 basta considerar *un subgrafo* de la ecuación gráfica. Tomando un subgrafo que no considere  $[T' : R'](r'_{\nu'(0)}) \cap [T' : R^*](r_{\nu^*(0)}^*)$ , se puede usar el Lema 6.22 y por Lema 6.23 la componente  $(L_q, r)$  tiene  $\aleph_1$  ends, lo cual es una contradicción pues el número de ends en  $T$  es contable (ver Figura 6.8).

Tercero: Para todo par de palabras distintas  $w$  y  $w'$  en  $00 \cdot \{0, 1\}^* \cdot 1$ , los grafos  $D^w$  y  $D^{w'}$  son no-isomorfos. Del mismo modo que en la demostración anterior, supongamos que son isomorfos. Sea  $\rho : V(D^{w'}) \rightarrow V(D^w)$  isomorfismo. Sea  $R'$  la imagen de  $RD^{w'}$  vía  $\rho$ , sea  $R^* = RD^w$ . Por Lema 4.20  $([D^{w'} : RD^{w'}](rd_i^{w'}), rd_i^{w'})$  es isomorfo a  $([D^w : R'](\rho(rd_i^{w'})), \rho(rd_i^{w'}))$  para todo vértice  $i$  de  $RD^{w'}$ . Como  $T'$  tiene solo un end, por Lema 2.23 siempre se tendrá que  $R'$  y  $R^*$  comparten una cola. Sea  $R^\cap$  el rayo maximal respecto a la inclusión que está en la intersección de  $R'$  y  $R^*$ . Del mismo modo que en la demostración anterior, se define  $\nu^* : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la función que asocia la numeración de  $R_\cap$  con  $R^*$ , y  $\nu'$  lo mismo para  $R'$ . Para  $i$  índice mayor estricto a 0 se tiene que

$$[D^w : R_\cap](r_i^\cap) = [D^w : R'](r'_{\nu'(0)+i}) = [D^w : R^*](r_{\nu^*(0)+i}^*).$$

Igual que en el punto segundo,  $\nu'(0)$  debe ser igual en módulo  $l$  a  $\nu^*(0)$ . Nuevamente  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  contiene los vértices de  $R^*$  que no están en  $R'$  y sus respectivas componentes

respecto a  $R^*$  ( los vértices de  $R^*$  se conectan a  $r'_{\nu'(0)}$  a través del rayo  $R^*$  que es disjunto a  $R'$  por maximalidad de  $R_{\cap}$ ) y del mismo modo  $[D^w : R^*](r_{\nu^*(0)})$  contiene los vértices de  $R'$  que no pertenecen a  $R^*$  y sus respectivas componentes respecto a  $R'$ .

Sea  $m$  el menor valor tal que  $w(|w| - m) \neq w'(|w'| - m)$ . Las palabras  $w$  y  $w'$  son iguales a partir de los índices  $|w| - m$  y  $|w'| - m$  respectivamente. Luego  $\nu^*(0)$  es mayor o igual a  $(|w| - m)l$  y  $R_{\cap}$  puede tener componentes modificadas para una cantidad finita de vértices iniciales. Luego  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  puede ser un elemento de  $\mathcal{L}$  o una componente modificada. Es decir, existe  $q$  tal que

$$(L_q, r) \cong [D^w : R'](r'_{\nu'(0)}) \vee (L_p, r)^* \cong [D^w : R'](r'_{\nu'(0)}) \quad (6.12)$$

Sea  $Q$  el conjunto de índices  $i$  tal que  $i$  es menor o igual a  $\nu^*(0)$  y  $[D^w : R^*](r_i^*)$  es isomorfo a  $(L_q, r)$ ; y sea  $\bar{Q}$  el conjunto de índices  $i$  tal que  $i$  es menor o igual a  $\nu^*(0)$  y  $[D^w : R^*](r_i^*)$  es no-isomorfo a  $(L_q, r)$ .

Nótese que que  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)})$  satisface la ecuación gráfica del grafo inducido por los vértices

$$V(R^*) \cup \left( \bigcup_{i \in \bar{Q}} (V([D^w : R^*](r_i^*)) - r_i^*) \right) - (V(R^{\cap}) - r_0^{\cap}). \quad (6.13)$$

El conjunto de enganche sería  $Q$  y la raíz el vértice  $r_0^{\cap}$ . Por el lenguaje usado para escoger  $w$  siempre hay dos ceros al inicio. Luego, para cualquier posibilidad de  $p$  siempre se tendrá que  $|P|$  tiene más de dos elementos (el último uno puede corresponder al vértice inicial de  $R^{\cap}$ , luego no sería considerado en  $P$ ).

En el vértice  $r_0^{\cap}$  puede que exista una porción de la ecuación gráfica que esté en  $W = [T' : R'](r_{\nu'(0)}) \cap [T' : R^*](r_{\nu^*(0)})$  y que contenga una copia enraizada de  $(L_q, r)$ . En este caso  $r$  pertenecería a  $P$ . Sin embargo, para usar el Lema 6.22 basta considerar un subgrafo. Tomando un subgrafo que no considere  $[D^w : R'](r'_{\nu'(0)}) \cap [D^w : R^*](r_{\nu^*(0)})$ , se puede usar el Lema 6.22 y por Lema 6.23 la componente  $(L_q, r)$  (o  $(L_p, r)^*$ ) tiene  $\aleph_1$  ends; lo cual es una contradicción pues el número de ends en  $T$  es contable. □

*Demostración. (caso total end)* Si  $T$  no posee endomorfismos propios,  $m(T) = 1$ . Si posee y es acotsup, entonces por Lema 6.25 posee  $\aleph_0$  gemelos. Si es nacotsup, entonces por Lema 6.24 posee  $\aleph_1$  gemelos. En todos los casos se tiene la conjetura. □

### 6.4.2. Segundo caso: Árboles con un total end y doble rayo base-maximal.

Para los grafos que poseen un end y son doble rayo base-maximal, se define regular, acotsup y nacotsup del mismo modo que en las Definiciones 5.16 y 5.19. Note que  $T$  debe

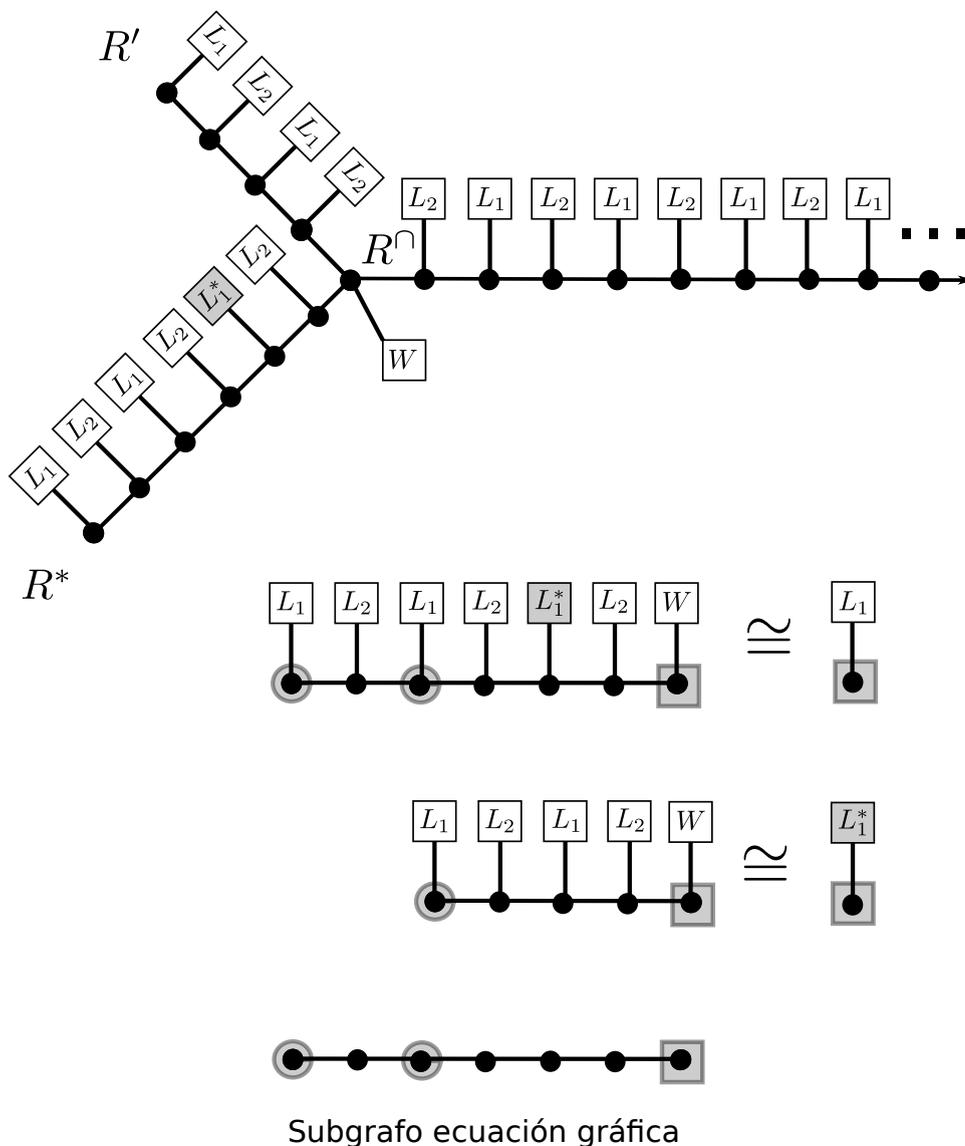


Figura 6.8: Figura para  $D^w$  con  $w = 0011$ . En la figura  $\nu'(0) = 4, \nu^*(0) = 6$ . La componente  $L_1$  satisface la ecuación gráfica descrita en la demostración. Los vértices achurados por un círculo son el conjunto de enganche, y el achurado por cuadrado la raíz. Nótese que en este ejemplo la última componente modificada corresponde al vértice donde se inicia  $R^\cap$ . Esto puede pasar pero no afecta la demostración. El grafo de la parte inferior es el subgrafo de la ecuación gráfica que es usado para demostrar que  $L_1$  tiene no contable cantidad de ends.

ser irregular, pues si es regular entonces existe un endomorfismo que no respeta la condición de total end del doble rayo base-maximal. Por Corolario 3.14 en el caso nacotsup se tiene la conjetura; por lo que, al igual que en el resto de las otras demostraciones, es posible reducirse al caso de árboles acotsup.

Se construyen gemelos  $D^w$  del mismo modo que en la demostración para dos ends, modificando el grafo con palabras en lenguaje  $001\{0, 1\}^*010$ . Mostrar que estos grafos modificados son gemelos con  $T$  es igual al caso con dos ends. Para mostrar que son no isomorfos respecto a  $T$ , se procede por contradicción. Sea  $\psi$  un isomorfismo entre ellos. Si son isomorfos, entonces  $D^w$  posee un doble rayo asociado a la imagen de  $ZT$ . Como  $T$  tiene un total end, por Lema 6.15 los grafos  $D^w$  también lo tienen y por lo tanto  $\psi(ZT)$  en  $D^w$  es un doble rayo con uno de sus ends en el total end. Por Lema 2.23 el doble rayo imagen  $\psi(ZT)$  comparte una cola con  $ZD^w$ .

¿En qué vértice se enganchan ambos doble rayos? Nóte que el lenguaje usado tiene la combinación 010. Esta seguidilla de componentes nunca es vista en  $T$ , ya que se escoge el vértice de regularidad superior como grafo asociado a 0 y su antecesor asociado a 1, y por definición ambos grafos son no-isomorfos. Como son grafos localmente finitos, si el antecesor contiene al sucesor, serían gemelos enraizados y por Teorema 3.11 serían isomorfos. Note además que, similarmente a la demostración para un total end, la modularidad de los vértices de  $ZD^w$  y  $\psi(ZT)$  debe calzar. Esto porque si no calzara entonces se encuentra un endomorfismo que genera menos familias que el mínimo (se debe tomar un endomorfismo que genere la menor cantidad de familias, en la demostración dada para  $\mathcal{T}_0^2$  esto no era necesario).

Luego, los vértices asociados a la combinación 010 final no pueden ser vértices de  $\psi(ZT)$  a la vez. Es decir, el rayo debe engancharse a partir del vértice asociado al primer 0 en adelante.

En el vértice de enganche se genera una ecuación gráfica similar a la encontrada para el caso de total end y un rayo maximal. Ver Figura 6.9 para entender la ecuación gráfica satisfecha. Como el lenguaje parte con al menos dos ceros, entonces se tienen las hipótesis del Lema 6.23 y por lo tanto una de las componentes de  $T$  respecto a  $ZT$  posee no contable cantidad de ends, lo cual contradice la pertenencia de  $T$  a  $\mathcal{T}_o^{\aleph_0}$ .

Para mostrar que entre ellos los grafos modificados son no-isomorfos, se procede de manera similar. Del mismo modo se tendrá que un isomorfismo entre algún par de gemelos implica que  $T$  no tiene contable cantidad de ends.

*Demostración.* (Teorema 6.13) Si  $T$  posee un gemelo propio, por Lema 3.15 posee un endomorfismo propio  $\phi$ . Por Teorema 6.12 y Lema 4.11  $\phi$  debe tener un end total o un doble rayo total. En ambos casos se demostró que se tiene la conjetura.  $\square$

Durante el proceso de escritura de esta memoria se conoció de la existencia de un paper escrito por Polat y Sabidussi que demuestra el Teorema 6.12 para automorfismos en árboles con una cantidad contable de ends (incluso para árboles con vértices de grado infinito). La demostración se basa en una forma de rankear ends en árboles con una cantidad contable de

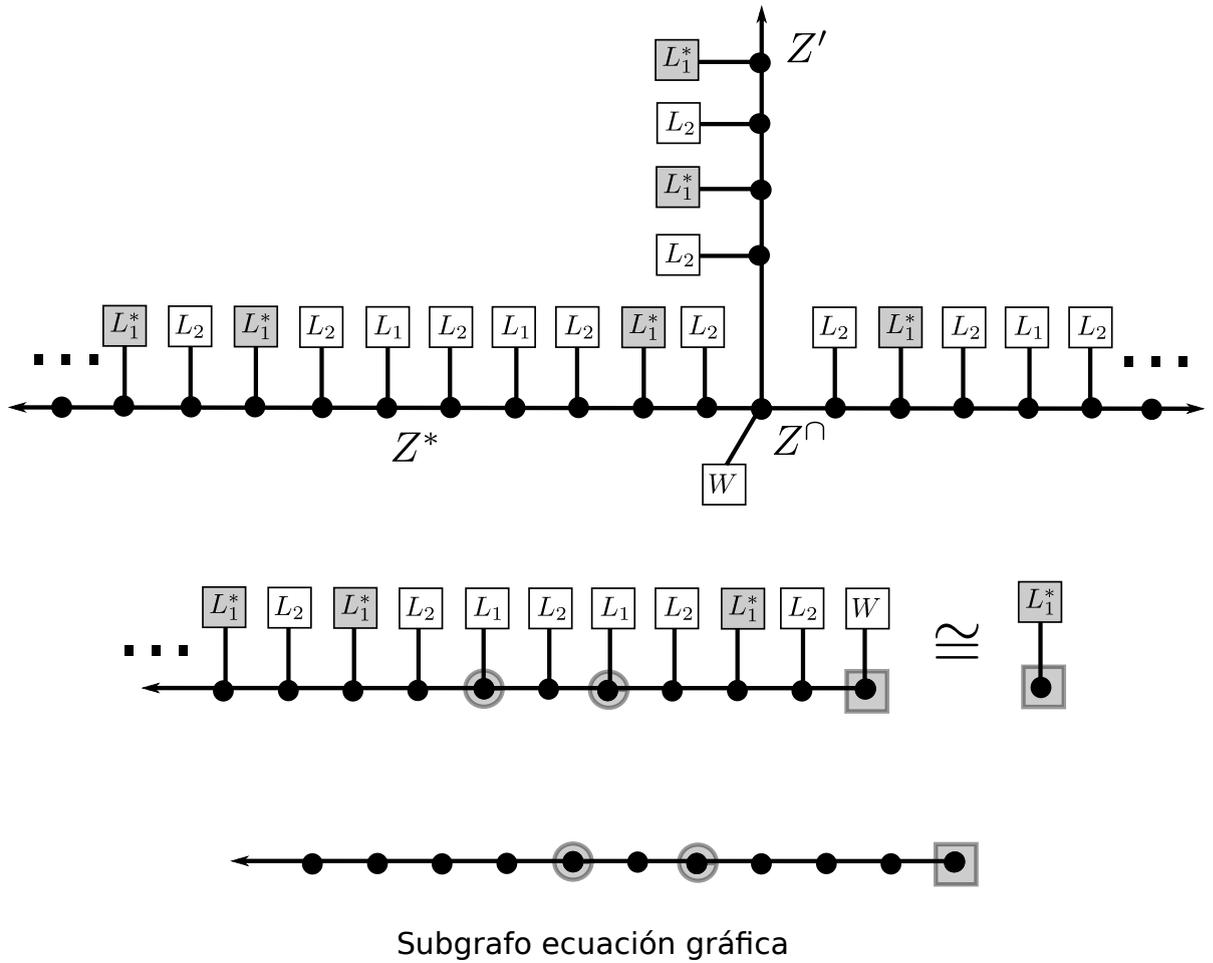


Figura 6.9: Figura para  $D^w$  con  $w = 001010$ . La ecuación gráfica que se satisface se muestra al medio. Nóte que se está usando el Lema 6.22 y el Lema 6.23 para concluir que  $L_1^*$  posee no contable cantidad de ends.

ends, usando una definición muy distinta a el concepto de centro-end. Al parecer, el concepto de centro-end también rankea los ends de un árbol con contable cantidad de ends. También durante el proceso de escritura de esta memoria se obtuvo una demostración propia del Teorema de Polat y Sabidussi para árboles con vértices de grado infinito, usando Lema 2.21 (star-comb lemma) en vez de un argumento de compacidad. Por razones de tiempo no se agregaron estos resultados en la presente memoria.

# Capítulo 7

## Conclusiones.

En el presente trabajo se demostró la conjetura de alternativa en árboles para árboles localmente finitos con un número contable en ends. Primeramente se demostró la conjetura para árboles con una cantidad finita de ends, separando en 3 casos: un end, dos ends y más de dos ends. En el primer y segundo caso se mostró que los grafos con uno o dos ends pueden tener 1, al menos  $\aleph_0$  o  $\aleph_1$  gemelos dependiendo de su estructura. Para mostrar que un grafo tiene al menos  $\aleph_0$  gemelos se desarrolló una técnica para generar gemelos, basado en la modificación de componentes de un grafo. En el último caso se demostró que los grafos con más de dos ends no pueden tener gemelos propios.

Luego, se extendió el resultado a árboles con una cantidad infinita contable de ends. Se introdujo el concepto de *centro-end* de un grafo y se mostró que todo árbol con un número contable de ends posee un subgrafo que es estable bajo endomorfismos y posee una cantidad finita de ends. En particular, existe siempre un vértice, arista, end o doble rayo que es fijo para cualquier endomorfismo. Gracias a esto, es posible mostrar que modificaciones de un grafo  $T$  con contable cantidad de ends que posea un endomorfismo propio generan grafos que son gemelos y son no isomorfos entre sí y respecto al original. Esto último resulta más difícil de demostrar, dada la existencia de grafos que, al ser modificados removiendo hojas, no dejan de ser el grafo original (el árbol de Tyomkyn). En este trabajo se muestra que un grafo que posea esta propiedad debería tener una cantidad no numerable de ends. Luego, la condición número contable de ends basta para mostrar la conjetura de alternativa en árboles para grafos de este tipo. Para mostrar esto se introdujo el concepto de *ecuación gráfica*, el cual posee aristas aun no estudiadas en profundidad en esta memoria.

Las ideas desarrolladas en este trabajo permiten la posibilidad de ser extendidas a casos no estudiados, como árboles con un  $\aleph_1$  ends o árboles localmente finitos. Al final del desarrollo de esta memoria se encontró una demostración alternativa a la extensión del teorema de Halin sobre elementos fijos, para árboles con un número contable de ends que no requiere la compacidad de  $|T|$ , usando el Lema 2.21 (star-comb lemma). Como para la compacidad se necesita grado finito en cada vértice (localmente finito), entonces con la nueva demostración será posible extender el teorema a grafos no localmente finitos. No se desarrolló esto en la presente memoria por razones de tiempo, pero se espera poder redactar estos resultados y

ser mandados a alguna revista sobre el tema, en donde se extenderá el teorema al caso no localmente finito.

Una línea abierta de investigación que aparece en el presente trabajo es la demostración de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones gráficas. Para  $(G, P, r)$  una ecuación gráfica, el grafo  $(\mathcal{G}, P, r)$  es un candidato a ser solución. ¿En qué casos lo es? ¿Es la única solución?

Además, ¿qué otras operaciones existirán que permitan definir una ecuación gráfica? Solamente se estudió la operación convolución. Un resultado interesante, no profundizado en la presente memoria, es que el árbol de Tyomkyn al parecer satisface cierto “sistema de ecuaciones” gráfico. Este sistema se define al suponer que un árbol con un doble rayo de base de descomposición, al que se le modifican ciertas componentes como en las demostraciones de este trabajo, sigue siendo isomorfo al original usando un segundo doble rayo como base de descomposición, que no intersecta al doble rayo inicial.

Una pregunta abierta en el presente trabajo fue la imposibilidad de demostrar que para árboles acotsup solamente existe una cantidad contable de gemelos. Es decir, no se pudo demostrar que estos árboles no poseen un conjunto no-contable de gemelos. En general, respecto a la conjetura, las condiciones para determinar el cardinal exacto de los gemelos de un grafo no han sido estudiadas en profundidad. Conjeturamos que efectivamente en árboles con finita cantidad de ends y acotsup, se tiene que no hay más de contable cantidad de gemelos. Si hay infinitos ends, en particular las componentes respecto a un rayo de un end total o un doble rayo total pueden ser infinitas, y por lo tanto pueden existir infinitas no contable formas de encontrar un subgrafo que sirva para modificar las componentes. Luego, la condición acotsup no debería ser suficiente como condición en general para todo tipo de árboles.

Otra pregunta abierta es la existencia de alguna solución con no contable cantidad de ends o no localmente finita de las ecuaciones gráficas de la demostración del Teorema 6.13. Al parecer, la existencia de la componente  $W$  podría permitir que cierto grafo no localmente finito efectivamente satisfaga las ecuaciones.

# Bibliografía

- [1] Anthony Bonato, Henning Bruhn, Reinhard Diestel, and Philipp Sprüssel. Twins of rayless graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 101(1):60–65, January 2011.
- [2] Anthony Bonato and Claude Tardif. Mutually embeddable graphs and the tree alternative conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(6):874–880, November 2006.
- [3] Claude Bonato, Anthony y Tardif. Large families of mutually embeddable vertex-transitive graphs. *Journal of Graph Theory*, 43(2):99–106, June 2003.
- [4] Reinhard Diestel. Graph theory. 4rd. ed. vol. 173. *Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg: Springer-Verlag*, 2010.
- [5] Hans Freudenthal. Über die enden topologischer Räume und Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 33(1):692–713, 1931.
- [6] Rudolf Halin. Über unendliche Wege in Graphen. *Mathematische Annalen*, 157(2):125–137, 1964.
- [7] Rudolf Halin. Automorphisms and endomorphisms of infinite locally finite graphs. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volume 39, pages 251–283. Springer, 1973.
- [8] Rudolf Halin. Fixed configurations in graphs with small number of disjoint rays. *Contemporary Methods in Graph Theory, Bibliographisches Inst., Mannheim*, pages 639–649, 1990.
- [9] Norbert Polat and Gert Sabidussi. Fixed elements of infinite trees. *Discrete Mathematics*, 130(1-3):97–102, July 1994.
- [10] Richard Rado. Universal graphs and universal functions. *Acta Arith*, 9(3):2, 1964.
- [11] Rüdiger Schmidt. Ein ordnungsbegriff für graphen ohne unendliche Wege mit einer Anwendung auf  $n$ -fach zusammenhängende Graphen. *Archiv der Mathematik*, 40(1):283–288, 1983.

- [12] Atsushi Tateno. Mutually embeddable trees and a counterexample to the tree alternative conjecture. Trabajo no concluído, 2008.
- [13] Mykhaylo Tyomkyn. A locally finite tree that behaves like an infinite star. December 2008.
- [14] Mykhaylo Tyomkyn. A proof of the rooted tree alternative conjecture. *Discrete Mathematics*, 309(20):5963–5967, October 2009.