



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PERTURBACIONES PEQUEÑAS DE FLUJOS HAMILTONIANOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

MARCO ANTONIO HERNÁNDEZ CADIS

PROFESOR GUÍA:
PATRICIO FELMER AICHELE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN DÁVILA BONCZOS
SALOMÉ MARTÍNEZ SALAZAR

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Centro de Modelamiento Matemático
de la Universidad de Chile

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: MARCO HERNÁNDEZ CADIS
FECHA: 30/07/2013
PROF. GUÍA: PATRICIO FELMER

PERTURBACIONES PEQUEÑAS DE FLUJOS HAMILTONIANOS

En esta memoria se estudia el comportamiento asintótico de un problema elíptico singularmente perturbado que presenta diversos fenómenos de interés, entre los cuales destacan la formación de *boundary layers* y homogeneización. Este tipo de problemas aparece en el estudio de perturbaciones estocásticas pequeñas de sistemas Hamiltonianos, así como también en el contexto de fenómenos de transporte en fluidos sujetos a velocidades de advección de gran magnitud. Ambos tipos de problemas han sido estudiados anteriormente bajo distintas hipótesis estructurales, y en este trabajo se presentan nuevos resultados que permiten relacionar los distintos comportamientos exhibidos por el sistema.

Por un lado, la aparición de *boundary layers* en este sistema ha sido estudiada en detalle en trabajos anteriores, habiéndose obtenido una descripción completa, si bien no menos compleja, en términos de la geometría del dominio y su relación con el término de advección, que es la fuente de la perturbación. En este trabajo se extienden los resultados mencionados a problemas no lineales, y se profundiza en la descripción de este fenómeno, particularmente en términos de la convergencia.

Por otro lado, el origen de la perturbación singular en sistemas Hamiltonianos ha sido explotado extensivamente mediante técnicas probabilísticas. Recientemente nuevos resultados han sido obtenidos mediante la introducción de técnicas de ecuaciones en derivadas parciales, las que han permitido establecer una caracterización explícita en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias del fenómeno de homogeneización que exhibe este problema. Además de la introducción de no linealidad en el sistema, en este trabajo se presenta una descripción detallada de la relación que existe entre la homogeneización y la formación de *boundary layers*.

Finalmente, se describe un problema de otra naturaleza, relacionado con la ecuación de Fisher no local. Este problema ha suscitado considerable interés recientemente debido a la complejidad y diversidad de comportamientos que exhibe, particularmente en cuanto se refiere a las propiedades de las ondas viajeras presentes en el sistema.

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. Coordenadas Locales	11
2. Comportamiento Asintótico en los <i>Boundary Layers</i>	14
3. Homogeneización	23
4. Aplicación a un Problema Periódico	32
5. Ondas viajeras en Fisher no Local, Problemas Abiertos	35
Conclusión	37
Bibliografía	39

Índice de figuras

1.	Dominio estudiado en [7]	2
2.	Dominio estudiado en [10]	4
3.	El dominio Ω	5
4.1.	Solución numérica de (4.1)	34

Introducción

En este trabajo se estudia el comportamiento asintótico, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de las soluciones u^ε del problema

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + \varepsilon^{-1}b \cdot Du^\varepsilon = f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Aquí $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial de la forma $b = \overline{DH} = (H_{x_2}, -H_{x_1})$, con $H \in C^4(\mathbb{R}^2)$ una función cuyos puntos críticos son no degenerados, y la frontera del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ está formada por curvas de nivel de H .

Formalmente, si al tomar $\varepsilon \rightarrow 0$ las soluciones u^ε de (1) convergen localmente uniformemente a una función u , y adicionalmente $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon f^\varepsilon(x, u^\varepsilon(x)) = 0$, entonces u es una solución, en el sentido viscoso, de la ecuación

$$b \cdot Du = 0.$$

Ahora bien, cuando Ω es una vecindad de un conjunto de nivel regular de H , se puede ver que todas las soluciones viscosas de esta ecuación son constantes sobre las curvas de nivel de H en Ω . Así, bajo estas condiciones, el límite debe ser de la forma $\tilde{u} \circ H$.

En esta dirección, la misma conclusión vale también cuando Ω es una vecindad de un conjunto de nivel crítico de H . Más precisamente, Ishii y Souganidis [7] estudian la ecuación

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(MDu^\varepsilon) + (b_0 + \varepsilon^{-1}b) \cdot Du^\varepsilon = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

cuando H tiene un punto silla en el origen, y Ω es una vecindad del nivel crítico correspondiente.

Introduciendo la notación

$$\mathcal{L}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = c\}$$

para los conjuntos de nivel de H , y suponiendo sin pérdida de generalidad que $H(0) = 0$, el dominio queda descrito naturalmente como $\Omega = \mathcal{L}(0) \cup \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$, donde

$$\Omega_i \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : h_i < H(x) < 0\} \quad \text{para } i = 1, 2$$

$$\text{y } \Omega_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < H(x) < h_3\},$$

con $h_1, h_2 < 0$ y $h_3 > 0$ (ver Figura 1).

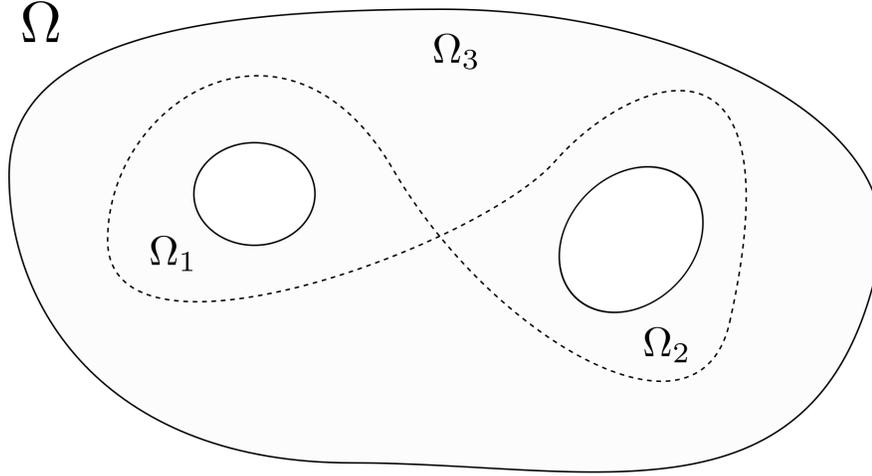


Figura 1: Ilustración del dominio Ω estudiado en [7]. La línea punteada corresponde al nivel crítico $\{H = 0\}$.

La matriz $M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se supone semi-definida positiva y tal que, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y $h \in H(\Omega_i) =: I_i$, existe un $x_{ih} \in \mathcal{L}(h) \cap \Omega_i$ con $M(x_{ih})DH(x_{ih}) \cdot DH(x_{ih}) > 0$. Esta forma débil de no degeneración resulta útil cuando se estudia (2) en el contexto de perturbaciones estocásticas de sistemas Hamiltonianos, como es el caso estudiado por Freidlin y Weber [6]. Por último, la condición de borde g^ε se supone uniformemente convergente sobre cada porción del borde $\mathcal{L}(h_i) \cap \partial\Omega_i$ a constantes k_i , $i = 1, 2, 3$.

Bajo estas hipótesis se tiene el siguiente resultado, demostrado en [7]:

Teorema 0.1 (Ishii - Souganidis, 2012) *Existen funciones $u_i \in C^1(\bar{I}_i) \cap C^2(I_i)$ tales que $u^\varepsilon \rightarrow u_i \circ H$ uniformemente en $\bar{\Omega}_i$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Más aún, las funciones $\{u_i\}_{i=1,2,3}$ están únicamente determinadas por el sistema

$$\begin{cases} -(A_i u_i')' + B_i u_i' = F_i & \text{en } I_i, \\ A_3(0)u_3'(0) = A_1(0)u_1'(0) + A_2(0)u_2'(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) & \text{y } u_i(h_i) = k_i, \end{cases}$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{cases} A_i(h) = \int_{\mathcal{L}(h) \cap \Omega_i} \frac{MDH \cdot DH}{|DH|} dl, \\ B_i(h) = \int_{\mathcal{L}(h) \cap \Omega_i} \frac{b_0 \cdot DH}{|DH|} dl, \\ F_i(h) = \int_{\mathcal{L}(h) \cap \Omega_i} \frac{f}{|DH|} dl. \end{cases}$$

De acuerdo a este teorema, se tiene que, como se comentó antes, las soluciones de (1) se vuelven constantes sobre las curvas de nivel de H incluso cuando éstas contienen puntos

críticos, al menos en el caso lineal. Más aún, el límite queda completamente determinado por una ecuación diferencial ordinaria obtenida al promediar (1) sobre las curvas de nivel de H .

La existencia de puntos críticos de H sobre la frontera de Ω permitiría que un nivel crítico de H pudiera estar contenido tanto en $\partial\Omega$ como en Ω . Un ejemplo en que esta situación ocurre, que es estudiado en mayor detalle en el Capítulo 4, está dado por

$$\Omega = (0, 2) \times (0, 2),$$

$$\text{y } H(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

En este caso el conjunto de nivel $\mathcal{L}(0) \cap \bar{\Omega}$ es todo $\partial\Omega$, junto con los segmentos $\{x = 1, 0 < y < 2\}$ y $\{0 < x < 2, y = 1\}$.

Para este tipo de dominios es posible imponer una condición de borde g^ε no constante sobre $\partial\Omega$, forzando entonces que u^ε no pueda volverse constante sobre el conjunto de nivel correspondiente. Bajo estas condiciones no es claro qué ocurre con u^ε al interior del dominio, particularmente cerca del conjunto de nivel crítico en cuestión.

Novikov, Papanicolaou y Ryzhik [10] estudian la ecuación (1) en un dominio de este tipo, en el caso particular en que $f^\varepsilon \equiv 0$. En dicho artículo se considera un dominio Ω tal que $\partial\Omega \subset \mathcal{L}(0)$ y $\Omega \cap \mathcal{L}(0) \neq \emptyset$, con una condición de borde $g^\varepsilon = g$ no constante a lo largo de $\partial\Omega$. Se supone también que el conjunto de nivel $\mathcal{L}(0)$ contiene puntos críticos tanto en la frontera como en el interior del dominio.

Bajo estas condiciones, en [10] se presentan numerosos resultados de interés, tanto desde el punto de vista matemático como del punto de vista físico. El siguiente teorema resume los resultados de [10] que dicen relación con la convergencia y formación de *boundary layers*, que son aquellos que se relacionan más directamente con los problemas abordados en esta memoria.

En lo que sigue denotamos por $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ a la familia de componentes conexas de $\Omega \setminus \mathcal{L}(0)$ (llamadas *celdas de flujo* por la naturaleza del problema), donde \mathcal{I} es un conjunto finito de índices.

Teorema 0.2 (Novikov - Papanicolaou - Ryzhik, 2005) *Sea u^ε una solución de (1) con $f^\varepsilon \equiv 0$ y $g^\varepsilon = g$ no constante y suficientemente regular. Se tiene entonces que*

1. *Para cada $i \in \mathcal{I}$ existe $K_i \in \mathbb{R}$ tal que $u^\varepsilon \rightarrow K_i$ localmente uniformemente en C_i cuando $\varepsilon \rightarrow 0$,*
2. *Existen $C > 0$ y $h_0 > 0$ tales que, para todo $\varepsilon > 0$, $i \in \mathcal{I}$ y $0 < h < h_0$,*

$$\int_{\{|H|>h\} \cap C_i} |Du^\varepsilon|^2 dx \leq C \left(\frac{\varepsilon}{h^2} \right)^{3/8},$$

$$\text{y } \text{osc}_{\{|H|>h\} \cap C_i} u^\varepsilon \leq C \left(\frac{\varepsilon}{h^2} \right)^{3/4},$$

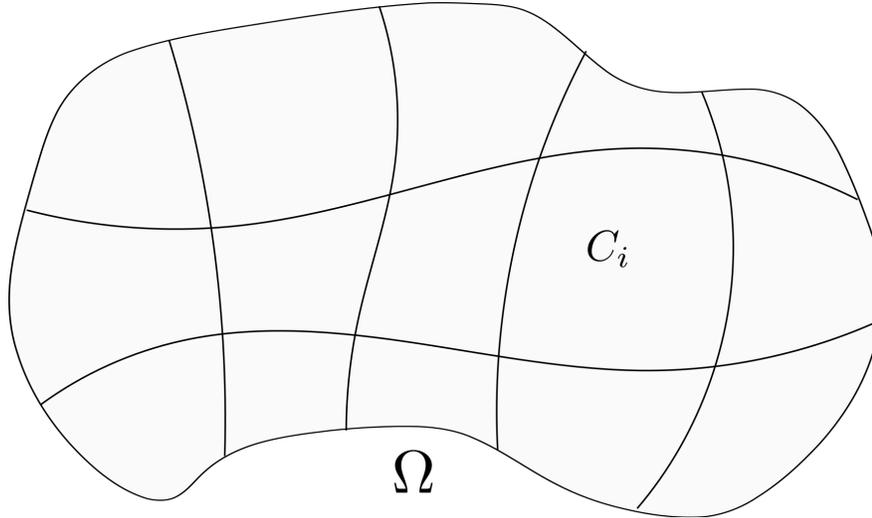


Figura 2: Ilustración del dominio Ω estudiado en [10]. La línea continua, al interior y sobre la frontera de Ω , corresponde al nivel crítico $\{H = 0\}$.

3. Existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C\sqrt{\varepsilon}} \leq \int_{\Omega} |Du^{\varepsilon}|^2 dx \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Estos resultados muestran que el comportamiento asintótico de u^{ε} lejos del nivel crítico $\mathcal{L}(0)$ está bien controlado: hay convergencia hacia constantes al interior de cada celda, y ésta se produce con una tasa conocida tanto en L^{∞} como en H^1 . Por otro lado, cerca del nivel crítico, deben producirse *boundary layers*, cuya escala crítica, de acuerdo a los puntos 2 y 3 del teorema, es de orden $\sqrt{\varepsilon}$.

Además de estos resultados, en [10] se presenta un estudio detallado del comportamiento en los *boundary layers* basado en la construcción de sistemas de coordenadas locales cerca de $\mathcal{L}(0)$, y en una serie de aproximaciones preliminares de u^{ε} en esta región. Los resultados obtenidos en esta dirección no son enunciados aquí, puesto que requieren introducir numerosas construcciones preliminares, en su mayoría similares a las utilizadas más adelante en los teoremas 0.4 y 0.5. Más aún, los resultados obtenidos en [10] son similares a los de los teoremas mencionados, salvo que la convergencia encontrada en dicho artículo es en norma H^1 en lugar de L^{∞} .

En esta memoria el dominio Ω bajo estudio es similar al utilizado en [10], salvo que aquí permitimos que existan agujeros en el dominio en ciertos niveles regulares de H . Esta extensión es introducida con el fin de hacer un paralelo más natural entre este problema y el estudiado en [7].

Más precisamente, para construir Ω , consideramos primero un dominio $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\partial\Omega' \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\}$, y denotamos por $\{C_i\}_{i \in I}$ a la familia de componentes conexas de $\{x \in \Omega' : H(x) \neq 0\}$. Suponemos que H tiene un y sólo un punto crítico x_i en cada C_i , que es necesariamente un extremo local, y denotamos por \mathcal{I}_+ e \mathcal{I}_- a los subconjuntos de \mathcal{I} tales que $H(x_i) = \max_{C_i} H$ y $H(x_i) = \min_{C_i} H$, para $i \in \mathcal{I}_+$ e $i \in \mathcal{I}_-$, respectivamente.

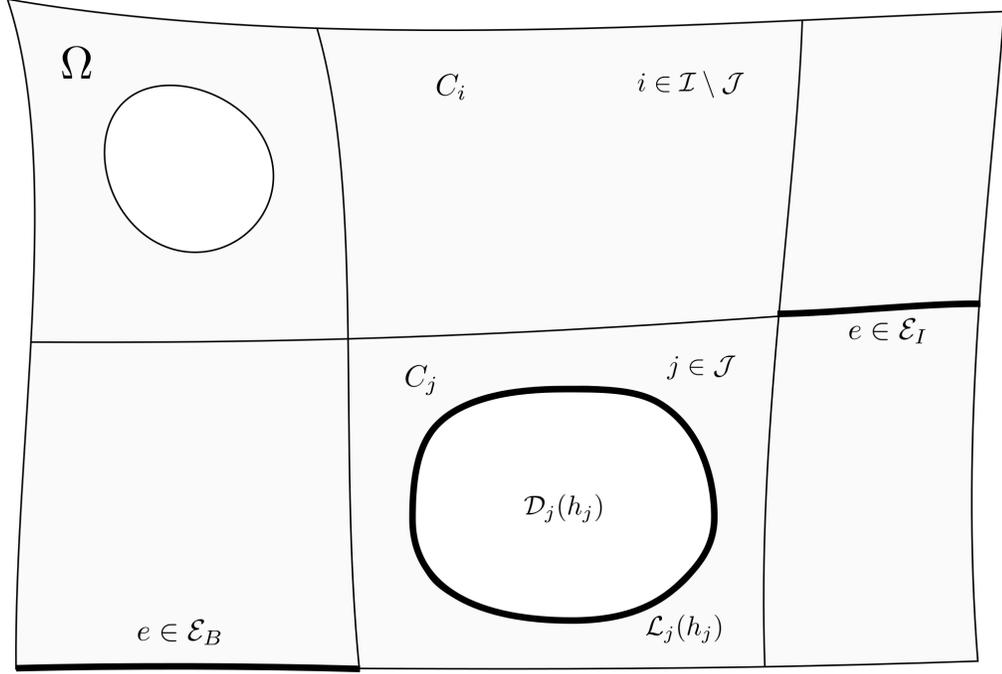


Figura 3: Ilustración del dominio Ω y sus componentes.

Así, el dominio Ω se construye a partir de Ω' como

$$\Omega = \Omega' \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{x \in C_j : |H(x)| \geq |h_j|\},$$

donde $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, y $h_j \in H(C_j \setminus \{x_j\})$ para cada $j \in \mathcal{J}$. Gráficamente esto significa que, para cada $j \in \mathcal{J}$, la celda C_j es perforada en el nivel de energía $H = h_j$.

Para cada $i \in \mathcal{I}_\pm$ y $h \in H(C_i)$ definimos $\mathcal{D}_i(h) = \{x \in C_i : \pm(H(x) - h) \geq 0\}$ y $\mathcal{L}_i(h) = \partial\mathcal{D}_i(h) = \{x \in C_i : H(x) = h\}$. Con esta notación se tiene que $\Omega = \Omega' \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \overline{\mathcal{D}_j(h_j)}$ y $\partial\Omega = \partial\Omega' \cup \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{L}_j(h_j)$.

Las hipótesis sobre el comportamiento asintótico de $g^\varepsilon \in C(\partial\Omega)$ y $f^\varepsilon \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ son las siguientes:

1. Existe $g \in C(\partial\Omega) \cap C^{2,\gamma}(\partial\Omega \setminus \{x \in \partial\Omega : DH(x) = 0\})$ tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g^\varepsilon = g$ uniformemente sobre $\partial\Omega$,
2. Existe $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon = f$ localmente uniformemente en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$,
3. f^ε y $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial s}$ están uniformemente acotadas con respecto a $\varepsilon > 0$ en $L^\infty(\Omega \times [-R, R])$ para cada $R > 0$,
4. Para cada $i \in \mathcal{I}$ existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max_{(\Omega \cap C_i) \times \mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) = \max_{\Omega \cap C_i} \frac{\partial f}{\partial s}(x, 0) = \lambda_i < \lambda(\Omega \cap C_i),$$

donde $\lambda(V)$ denota el valor propio principal de $-\Delta$ correspondiente a un dominio acotado $V \subset \mathbb{R}^2$, con condición de borde Dirichlet nula sobre ∂V .

La existencia de una solución u^ε de (1) puede garantizarse con diversas hipótesis adicionales sobre f^ε . Podemos, por ejemplo, suponer que $\sup_{\Omega \times \mathbb{R}} |f^\varepsilon(x, s)| < \infty$, o más en general, que $s \mapsto f^\varepsilon(x, s)$ tiene crecimiento estrictamente sublineal, pues entonces una aplicación estándar de la teoría de puntos fijos basta para garantizar existencia. Ahora bien, independiente de cómo se argumente la existencia de u^ε , las estimaciones de Schauder usuales garantizan que, en cualquier caso, toda solución de (1) satisface $u^\varepsilon \in C^3(\Omega)$, para cada $\varepsilon > 0$. Por otro lado, aunque la unicidad de u^ε podría garantizarse requiriendo que se cumpla la hipótesis 4 con Ω en lugar de $\Omega \cap C_i$ (notar que $\lambda(\Omega) < \lambda(\Omega \cap C_i)$) y con f^ε en lugar de f , esto no es necesario para los resultados que se presentan a continuación. En otras palabras, el énfasis está en que el comportamiento asintótico es el mismo para cualquier familia de soluciones de (1), independiente de la unicidad.

Una última hipótesis que se utiliza a lo largo de este trabajo es la existencia de una cota uniforme sobre $\|u^\varepsilon\|_\infty$, esto es, $M = \sup_{\varepsilon \in (0,1)} \|u^\varepsilon\|_\infty < \infty$. Aunque el origen de esta condición no es esencial para los resultados que presentamos, vale la pena notar que esta hipótesis puede garantizarse, por ejemplo, si suponemos que la no linealidad f^ε es de tipo Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov, es decir,

$$f^\varepsilon > 0 \text{ en } \Omega \times (0, 1),$$

$$f^\varepsilon \equiv 0 \text{ en } \Omega \times ((-\infty, 0] \cup [1, \infty)),$$

y la condición de borde satisface $0 \leq g^\varepsilon \leq 1$.

Alternativamente, la cota uniforme se puede obtener mediante un argumento tipo *blow-up* similar al utilizado en [7], si suponemos adicionalmente que $s \rightarrow f^\varepsilon(x, s)$ tiene crecimiento estrictamente sublineal, uniformemente en $\varepsilon > 0$ y $x \in \Omega$.

Para presentar los resultados de esta memoria es necesario primero introducir algunas definiciones adicionales, cuyo fin es describir de manera concisa el conjunto de nivel crítico $\mathcal{L}(0)$.

Con este fin, consideramos el grafo compuesto por las fronteras de las celdas C_i y cuyos vértices son los puntos críticos de H sobre $\mathcal{L}(0)$. El conjunto de arcos del grafo \mathcal{E} está dado explícitamente por la colección de componentes conexas de $\{x \in \bar{\Omega} : H(x) = 0, DH(x) \neq 0\}$. Denotamos por $\mathcal{E}_B = \{e \in \mathcal{E} : e \subset \partial\Omega\}$ a los arcos que se encuentran sobre la frontera de Ω y por $\mathcal{E}_I = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_B$ a los arcos al interior del dominio.

Para describir el comportamiento de u^ε sobre el grafo construimos sistemas de coordenadas locales en torno a cada $e \in \mathcal{E}$, cuya existencia está dada por el siguiente lema, que demostramos en el Capítulo 1:

Lema 0.3 *Existe $\bar{h} > 0$ tal que, para cada $e \in \mathcal{E}$, existen $T_e > 0$ y un difeomorfismo X_e de clase C^3 de $(0, T_e) \times (-\bar{h}, \bar{h})$ en una vecindad de e en \mathbb{R}^2 , tal que $H(X_e(t, h)) = h$ para todo $(t, h) \in (0, T_e) \times (-\bar{h}, \bar{h})$.*

Notar que, para $e \in \mathcal{E}_B$, el conjunto $X_e((0, T_e) \times (-\bar{h}, \bar{h})) \cap \Omega$ se reduce a $X_e((0, T_e) \times (0, \bar{h}))$ o bien a $X_e((0, T_e) \times (-\bar{h}, 0))$. Se denota $e \in \mathcal{E}_{B^+}$ en el primer caso y $e \in \mathcal{E}_{B^-}$ en el segundo. Finalmente, para cada $e \in \mathcal{E}$ se define

$$v_e^\varepsilon(t, s) = u^\varepsilon(X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s)), \quad (3)$$

donde $t \in (0, T_e)$, $s \in (-\varepsilon^{-1/2}\bar{h}, \varepsilon^{-1/2}\bar{h})$ si $e \in \mathcal{E}_I$, $s \in [0, \varepsilon^{-1/2}\bar{h})$ si $e \in \mathcal{E}_{B^+}$, y $s \in (-\varepsilon^{-1/2}\bar{h}, 0]$ en otro caso. Notar que la continuidad de u^ε permite extender sin ambigüedad el dominio de definición de $v_e^\varepsilon(\cdot, s)$ al intervalo cerrado $[0, T_e]$, por lo que el comportamiento de u^ε sobre el grafo queda completamente descrito por los v_e^ε .

Los primeros resultados dicen relación con la formación de *boundary layers* en el nivel crítico $\{x \in \bar{\Omega} : H(x) = 0\}$.

Estos teoremas complementan los de [10], pues en dicho artículo se encuentran resultados análogos, en los cuales la convergencia es en norma H^1 , mientras que aquí la convergencia es en norma L^∞ , y éstas no son comparables en dimensión 2. Más aún, además de permitir un término no lineal en la ecuación, aquí trabajamos directamente con las soluciones de (1), mientras que en [10] se utiliza una serie de aproximaciones preliminares.

Teorema 0.4 *Para cada $e \in \mathcal{E}_I$ (respectivamente, $e \in \mathcal{E}_{B^\pm}$) existe $v_e \in C^2([0, T_e] \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\})$ (respectivamente, $v_e \in C^2([0, T_e] \times \bar{\mathbb{R}}_\pm \setminus \{(0, 0)\})$) tal que $v_e^\varepsilon \rightarrow v_e$ localmente uniformemente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, lejos de $(t, s) = (0, 0)$ y $(t, s) = (T_e, 0)$.*

Más aun, v_e es una solución acotada de la ecuación del calor $v_{e,ss} = v_{e,t}$ en $(0, T_e) \times \mathbb{R}$ (respectivamente, en $(0, T_e) \times \bar{\mathbb{R}}_\pm$).

El siguiente resultado provee una caracterización más precisa del comportamiento asintótico de u^ε en esta región, describiendo cómo se relacionan las funciones v_e entre sí y con las condiciones de borde.

Teorema 0.5 *La familia $\{v_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ de soluciones acotadas de la ecuación del calor dada por el Teorema 0.4 está únicamente determinada por las siguientes propiedades:*

1. (Compatibilidad) *Para cada $i \in \mathcal{I}_\pm$ y todo par de arcos $e, e' \subset \partial\mathcal{C}_i$ tales que $X_e(T_e^-, 0) = X_{e'}(0^+, 0)$, se cumple que*

$$v_e(T_e, s) = v_{e'}(0, s), \quad \text{para todo } \pm s > 0,$$

2. (Condiciones de Borde) *Para cada $e \in \mathcal{E}_B$*

$$v_e(t, 0) = g(X_e(t, 0)), \quad \forall t \in (0, T_e),$$

3. (Promedio) *Para cada $i \in \mathcal{I}_\pm$, el límite*

$$K_i = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} v_e(t, s)$$

existe uniformemente en $t \in [0, T_e]$, es independiente de $e \subset \partial\mathcal{C}_i$, y satisface

$$K_i = \frac{\sum_{e \subset \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e(t, 0) dt}{\sum_{e \subset \mathcal{C}_i} T_e}.$$

Estos resultados establecen convergencia de la familia $\{v_\varepsilon^e\}$ sobre todo el grafo salvo en los puntos críticos de H . Mediante una aplicación al problema modelo estudiado en el Capítulo 4 veremos que, en efecto, es posible elegir una condición de borde de manera tal que las condiciones de compatibilidad del teorema anterior no se cumplan en algunos de los vértices del grafo. Esto muestra que la convergencia uniforme no puede, en general, incluir a estos puntos, y por lo tanto la región de convergencia encontrada es, en este sentido, óptima.

En analogía con lo ocurrido en el nivel crítico $\{H = 0\}$, en las porciones de $\partial\Omega$ contenidas al interior las celdas C_j , $j \in \mathcal{J}$, también se espera que se produzcan *boundary layers* cuando la condición de borde correspondiente no es constante.

Para estudiar este comportamiento, consideramos un sistema de coordenadas sobre estas curvas, cuya existencia y propiedades se resumen en el siguiente lema, demostrado en el Capítulo 1.

Lema 0.6 *Existe $\bar{h} > 0$ tal que, para cada $j \in \mathcal{J}$, existen $T_j > 0$ y una función $X_j : \mathbb{R} \times (h_j - \bar{h}, h_j + \bar{h}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^3 tal que*

1. $H(X_j(t, h)) = h$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $h \in (h_j - \bar{h}, h_j + \bar{h})$,
2. $X_j([0, T_j], h_j) = \mathcal{L}_j(h_j)$,
3. $X_j(\cdot, h)$ es T_j -periódico para todo $h \in (h_j - \bar{h}, h_j + \bar{h})$.

Los resultados que se presentan a continuación se refieren a la versión de u^ε reescalada en una vecindad de $\mathcal{L}_j(h_j)$ en Ω , para cada $j \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}_\pm$, de la siguiente manera

$$v_j^\varepsilon(t, s) = u^\varepsilon(X_j(t, h_j \pm \sqrt{\varepsilon}s)), \quad t \in \mathbb{R}, s \in [0, \varepsilon^{-1/2}\bar{h}]. \quad (4)$$

Teorema 0.7 *Para cada $j \in \mathcal{J}$ existe $v_j \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ tal que $v_j^\varepsilon \rightarrow v_j$ localmente uniformemente en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Más aún, v_j es una solución acotada, T_j -periódica en t , de la ecuación del calor $v_{j,ss} = v_{j,t}$ en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.*

Las propiedades de estas funciones, análogas a las encontradas en el Teorema 0.5, son las siguientes:

Teorema 0.8 *La familia $\{v_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ de soluciones acotadas de la ecuación del calor dada por el Teorema 0.7 está únicamente determinada por las siguientes propiedades:*

1. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $v_j(t, 0) = g(X_j(t, h_j))$,
2. El límite $k_j = \lim_{s \rightarrow \infty} v_j(t, s)$ existe uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, y satisface

$$k_j = \frac{1}{T_j} \int_0^{T_j} g(X_j(t, h_j)) dt.$$

Finalmente, se presenta un resultado análogo al encontrado en [7], que provee una conexión entre el comportamiento en los *boundary layers* y la homogeneización que ocurre al interior de las celdas $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$.

Para enunciar este teorema se introduce la notación $I_i = H(\Omega \cap C_i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$, y se define

$$A_i(h) = \int_{\mathcal{L}_i(h)} |DH(x)| dl, \quad \text{y} \quad F_i(h, r) = \int_{\mathcal{L}_i(h)} \frac{f(x, r)}{|DH(x)|} dx.$$

Teorema 0.9 *Para cada $i \in \mathcal{I}$ existe $u_i \in C^1(\bar{I}_i) \cap C^2(I_i)$ tal que $u^\varepsilon \rightarrow u_i \circ H$ localmente uniformemente en $\Omega \cap C_i$. Más aún,*

1. Si $i \in \mathcal{J}$, entonces u_i es la única solución de

$$\begin{cases} (A_i u_i')' + F_i(h, u_i) = 0 & \text{en } I_i, \\ u_i(0) = K_i, \\ u_i(h_i) = k_i, \end{cases} \quad (5)$$

2. Si $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$, entonces u_i es la única solución con derivada acotada de

$$\begin{cases} (A_i u_i')' + F_i(h, u_i) = 0 & \text{en } I_i, \\ u_i(0) = K_i, \end{cases} \quad (6)$$

donde las constantes K_i y k_i son las dadas por los Teoremas 0.5 y 0.8.

Los valores de las constantes K_i dependen únicamente de H y la condición de borde límite g sobre el nivel crítico $\{H = 0\}$, y dicha relación está dada por el Teorema 0.5. Esto permite, en particular, determinar los K_i resolviendo el problema correspondiente a (1) en que f^ε es reemplazada por cero, y $\mathcal{J} = \emptyset$, el cual no es sino el problema estudiado en [10].

Recíprocamente, cuando $f^\varepsilon \equiv 0$ y $\mathcal{J} = \emptyset$, la única solución con derivada acotada de (6) es $u_i \equiv K_i$, con lo que recuperamos el resultado de convergencia a constantes al interior de las celdas encontrado en [10].

La condición de borde $u_i(h_i) = k_i$ en (5) es una extensión del resultado encontrado en [7], en tanto, aún sin requerir que g_i sea constante sobre $\mathcal{L}_i(h_i)$, se cumple la igualdad considerando el promedio de g_i sobre dicha curva. No obstante lo anterior, cuando g_i es efectivamente constante (e igual a k_i , por definición), podemos recuperar el resultado de [7] en este contexto:

Proposición 0.10 *Si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g^\varepsilon(x) = k_j$ uniformemente sobre $\mathcal{L}(h_j)$ para algún $j \in \mathcal{J}$, entonces $u^\varepsilon \rightarrow u_j \circ H$ localmente uniformemente en $(\Omega \cap C_j) \cup \mathcal{L}_j(h_j)$.*

En el Capítulo 1 se presenta en detalle la construcción de los sistemas de coordenadas locales utilizados en los principales teoremas de esta memoria. En el Capítulo 2 se estudia la convergencia de las familias $\{v_\varepsilon^e\}_{e \in \mathcal{E}}$ y $\{v_\varepsilon^j\}_{j \in \mathcal{J}}$ y sus respectivas propiedades. Con el fin de demostrar los teoremas correspondientes se utilizan técnicas de la teoría de soluciones viscosas de ecuaciones elípticas (ver [4]), siendo central para ello la obtención de cotas sobre las derivadas de v_ε^e independientes de ε . En el Capítulo 3 demostramos el Teorema 0.9, completando con ello la descripción del comportamiento asintótico de u^ε en todo Ω .

En el Capítulo 4 se aplican los teoremas presentados a un problema periódico, con el cual ilustramos cómo estos resultados permiten obtener una descripción cualitativa y cuantitativa

precisa de la relación entre la homogeneización y la formación de *boundary layers* en este tipo de problemas.

Finalmente, en el Capítulo 5, el objeto de estudio es la ecuación de Fisher no local, que toma la forma

$$u_t - \Delta u = \mu u(1 - \phi * u),$$

donde $\phi \geq 0$, $\int \phi = 1$ y $\mu > 0$ es un parámetro del problema.

En este capítulo resumimos algunos de los resultados ya conocidos sobre las soluciones de esta ecuación, particularmente en lo que se refiere a la existencia y propiedades de las soluciones tipo ondas viajeras.

El objetivo central de esta sección es presentar algunos problemas abiertos relacionados con las propiedades cualitativas de las ondas viajeras. En particular, se discute cómo la relación entre la rapidez de estas ondas y el valor del parámetro $\mu > 0$ puede determinar propiedades del sistema, tales como la monotonía de las soluciones y la posibilidad de conectar los estados homogéneos $u \equiv 0$ y $u \equiv 1$.

En esta dirección se propone un programa de estudio que pretende explorar la relación que podría existir entre las propiedades de estas ondas y el fenómeno de concentración observado por Perthame y Génieys [11].

Capítulo 1

Coordenadas Locales

Para establecer el resultado del Lema 1 se construye primero X_e explícitamente, para luego establecer las propiedades desadas.

Dada la regularidad de H , se sabe que, para cada $e \in \mathcal{E}$ y $p \in e$, el problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} Y'(t) = \frac{b(Y(t))}{|b(Y(t))|^2}, \\ Y(t_0) = p, \end{cases} \quad (1.1)$$

tiene una solución única definida en una vecindad de $p \in e$.

Se sigue de la teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias que una solución Y de (1.1) partiendo en cualquier punto $p_0 \in e$ está definida para todo t en un intervalo maximal $I = (t_1, t_2) \ni t_0$, tal que $|Y'(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_1$ o t_2 , a menos que el intervalo sea no acotado. Más aún, dado que (1.1) tiene una solución única en torno a cualquier $p \in e$, es claro que $e \subset Y(I)$. Por otro lado, dado que b es un campo vectorial tangente a e en todo punto, se sigue necesariamente que $Y(I) = e$.

Así, en vista de que Y' está acotado lejos de cero y $\overline{Y(I)}$ es un conjunto compacto, se sigue que ambos t_1 y t_2 deben ser finitos. De aquí en adelante suponemos que t_0 es elegido de manera tal que $t_1 = 0$, y se denota $T_e = t_2$ cuando Y_e es la solución de (1.1) correspondiente a esta elección.

A continuación, para el mismo $e \in \mathcal{E}$ escogido antes, y para $t \in (0, T_e)$ arbitrario, se define $X_e(t, \cdot)$ como la solución del problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} X_h(t, h) = \frac{DH(X(t, h))}{|DH(X(t, h))|^2}, \\ X(t, 0) = Y_e(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

En vista de que H es de clase C^4 , se tiene que X_e está bien definido y es de clase C^3 en ambas coordenadas, al menos para h en una vecindad suficientemente pequeña $J_t \ni 0$, cuyo tamaño podría en principio depender de t .

Más aun, se sigue de (1.1) y (1.2) que

$$(H(X_e(t, h)))_h = 1, \quad \text{y} \quad (H(Y_e(t)))_t = 0$$

de donde $H(X_e(t, h)) \equiv h$.

Diferenciando esta identidad con respecto a t se tiene que $X_{e,t} \cdot DH(X_e) = 0$ y consecuentemente $X_{e,t} = \frac{X_{e,t} \cdot b(X_e)}{|DH(X_e)|^2} b(X_e)$.

Por otro lado, el que $H(X_e(t, h)) = h$ para todo $t \in (0, T_e)$ implica que $|X_{e,h}(t, h)|$ no puede ser no acotado cuando $h \rightarrow \hat{h} \in \partial J_t$, a menos que \hat{h} sea un valor crítico no nulo de H . Luego, J_t puede de hecho ser elegido independiente de t , siempre y cuando no contenga valores críticos de H distintos de cero. Así, para todo $e \in \mathcal{E}$ y $t \in (0, T_e)$ consideramos el intervalo $J_t = (-\bar{h}, \bar{h})$, donde $\bar{h} < \min_{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}, j \in \mathcal{J}} \{|H(x_i)|, |h_j|\}$, de modo tal que para todo $e \in \mathcal{E}_I$ se tenga $X_e((0, T_e) \times (-\bar{h}, \bar{h})) \subset \Omega$, y para $e \in \mathcal{E}_B$, $X_e((0, T_e) \times (0, \bar{h})) \subset \Omega$ o bien $X_e((0, T_e) \times (-\bar{h}, 0)) \subset \Omega$.

Es claro que $\det DX_e = \frac{X_{e,t} \cdot b(X_e)}{|DH(X_e)|^2}$. Para ver que $\det DX_e > 0$, basta notar que

$$(X_{e,t} \cdot b(X_e))_h = \frac{\Delta H(X_e)}{|DH(X_e)|^2} (X_{e,t} \cdot b(X_e))$$

Luego, utilizando la identidad $X_{e,t}(t, 0) \cdot b(X_e(t, 0)) = 1$, se sigue que

$$X_{e,t}(t, h) \cdot b(X_e(t, h)) = \exp \int_0^h \frac{\Delta H(X_e(t, s))}{|DH(X_e(t, s))|^2} ds > 0$$

Así, X_e es un difeomorfismo local, de donde, mediante argumentos de unicidad usuales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se sigue también que es inyectivo, lo que concluye la construcción.

Con el fin de estudiar el comportamiento asintótico de $v_e^\varepsilon(t, s) = u^\varepsilon(X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s))$, notamos primero que v_e^ε resuelve la ecuación diferencial

$$-\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho_e} v_{e,t}^\varepsilon\right)_t - \left(\frac{\rho_e}{\sqrt{\varepsilon}} v_{e,s}^\varepsilon\right)_s + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} v_{e,t}^\varepsilon = \frac{\sqrt{\varepsilon} \rho_e}{|DH(X_e)|^2} f^\varepsilon(X_e, v_e^\varepsilon), \quad (1.3)$$

donde $\rho_e = X_{e,t} \cdot b(X_e)$ y X_e es evaluado en $(t, \sqrt{\varepsilon}s)$. Esto puede ser escrito también de la forma

$$\varepsilon v_{e,tt}^\varepsilon + A_e^\varepsilon v_{e,ss}^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} C_e^\varepsilon v_{e,s}^\varepsilon - D_e^\varepsilon v_{e,t}^\varepsilon = F_e^\varepsilon(t, s, v_e^\varepsilon), \quad (1.4)$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} A_e^\varepsilon(t, s) &= \rho_e(t, \sqrt{\varepsilon}s)^2 = 1 + O(\varepsilon) \\ C_e^\varepsilon(t, s) &= \frac{1}{2}(\rho_e^2)_h(t, \sqrt{\varepsilon}s) = O(1), \\ D_e^\varepsilon(t, s) &= \rho_e(t, \sqrt{\varepsilon}s) + \varepsilon \log(\rho_e)_t(t, \sqrt{\varepsilon}s) = 1 + O(\varepsilon), \\ F_e^\varepsilon(t, s, r) &= -\varepsilon |X_{e,t}(t, \sqrt{\varepsilon}s)|^2 f^\varepsilon(X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s), r) = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Todas estas funciones son de clase C^1 , y están localmente uniformemente acotadas con respecto a ε en norma C^1 . Más aún, dado que su dependencia en s es a través de $\sqrt{\varepsilon}s$, sus

derivadas parciales con respecto a s son, localmente, $O(\sqrt{\varepsilon})$. Notando que $\rho_\varepsilon(t, 0) = 1$, es fácil ver que el límite formal de (1.4) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es la ecuación del calor.

Siguiendo la estrategia anterior, se realiza una construcción análoga para las coordenadas locales del Lema 2 en una vecindad de $\mathcal{L}_j(h_j)$, $j \in \mathcal{J}$. La construcción es similar, salvo que la ausencia de puntos críticos de H en esta región simplifica el trabajo.

En efecto, dado que no hay puntos críticos sobre el conjunto de nivel $H = h_j$, se tiene que la solución Y_j del problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} Y'(t) &= \frac{b(Y(t))}{|b(Y(t))|^2}, \\ Y(t_0) &= p \in \mathcal{L}_j(h_j) \end{cases}$$

está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, y es de hecho una función T_j -periódica que circula a lo largo de $\mathcal{L}_j(h_j)$.

Consecuentemente, la solución $X_j(t, \cdot)$ de

$$\begin{cases} X_h(t, h) &= \frac{DH(X(t, h))}{|DH(X(t, h))|^2}, \\ X(t, h_j) &= Y_j(t) \end{cases}$$

es una función de clase C^3 , definida para todo $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathcal{J}$ y $|h - h_j| < \bar{h}$, con $\bar{h} > 0$ suficientemente pequeño.

A continuación, recordar que v_j^ε está definido, para $j \in \mathcal{J} \cap \mathcal{I}_\pm$, como

$$v_j^\varepsilon(t, s) = u^\varepsilon(X_j(t, h_j \pm \sqrt{\varepsilon}s)) \quad (1.5)$$

Luego, se sigue que v_j^ε es una solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \varepsilon v_{j,tt}^\varepsilon + A_j^\varepsilon v_{j,ss}^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} C_j^\varepsilon v_{j,s}^\varepsilon - D_j^\varepsilon v_{j,t}^\varepsilon = F_j^\varepsilon(t, s, v_j^\varepsilon) \\ v_j^\varepsilon(t, 0) = g_j^\varepsilon(X_j(t, h_j)), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.6)$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} A_j^\varepsilon(t, s) &= \rho_j(t, \sqrt{\varepsilon}s)^2 \\ C_j^\varepsilon(t, s) &= \frac{1}{2}(\rho_j^2)_h(t, \sqrt{\varepsilon}s) \\ D_j^\varepsilon(t, s) &= \rho_j(t, \sqrt{\varepsilon}s) + \varepsilon \log(\rho_j)_t(t, \sqrt{\varepsilon}s) \\ F_j^\varepsilon(t, s, r) &= -\varepsilon |X_{j,t}(t, h_j \pm \sqrt{\varepsilon}s)|^2 f^\varepsilon(X_j(t, h_j \pm \sqrt{\varepsilon}s), r) \\ \rho_j(t, h) &= X_{j,t}(t, h_j \pm h) \cdot b(X_j(t, h_j \pm h)) \end{aligned}$$

Notar que v_j^ε es T_j -periódica en t , y los coeficientes de (1.6) convergen localmente uniformemente a los de la ecuación del calor, con derivadas parciales con respecto a s de orden $O(\sqrt{\varepsilon})$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Capítulo 2

Comportamiento Asintótico en los *Boundary Layers*

A continuación se estudia el comportamiento asintótico de u^ε en el contexto de los Teoremas 0.4 y 0.5 - los Teoremas 0.7 y 0.8 se prueban utilizando exactamente los mismos argumentos, por lo que sus demostraciones son omitidas.

La demostración de los Teoremas 0.4 y 0.5 es hecha en tres etapas. En primer lugar se prueba la unicidad enunciada en el Teorema 0.5, lo que permite entonces reducir la demostración del Teorema 0.4 al estudio de subsucesiones de u^ε . Luego se prueba, en concordancia con lo anterior, que para cada $e \in \mathcal{E}$ la familia $\{v_e^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ es localmente uniformemente Hölder continua. Finalmente, utilizando estos resultados se muestra que, salvo subsucesiones, los límites de las funciones $\{v_e^\varepsilon\}_{e \in \mathcal{E}}$ satisfacen las propiedades del Teorema 0.5, lo que permite entonces concluir la veracidad de ambos teoremas, en vista de la unicidad ya mencionada.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 0.5 - UNICIDAD. Considerando la diferencia de dos soluciones posiblemente distintas es posible asumir, sin pérdida de generalidad, que las propiedades (1) y (3) se mantienen de acuerdo a lo enunciado en el Teorema, mientras que la propiedad (2) es $v_e(t, 0) = 0, \forall t \in (0, T_e)$ y $e \in \mathcal{E}_B$.

Sea $M = \max_{e \in \mathcal{E}} \sup v_e$ y supongamos que $M > 0$. El principio del máximo fuerte y la unicidad de las soluciones acotadas de la ecuación del calor implican que, si $v_e(t_0, s_0) = M$ para algún $e \in \mathcal{E}$ y $t_0 \in (0, T_e]$, entonces todos los v_e son constantes, y dadas las condiciones de borde son entonces idénticamente nulos, en virtud de (1) y (2), por lo que $M > 0$ no es posible.

Si v_e tiene una sucesión maximizante acumulando en algún punto $(t_0, s_0) = (0, s_0)$, entonces, dado que $v_e(0, \cdot)$ es continuo en todas partes salvo tal vez en $s = 0$, la propiedad (1) implicaría que $M = v_{e'}(T_{e'}, s_0)$ para algún $e' \in \mathcal{E}$ si $s_0 \neq 0$, y por el argumento anterior esto es posible únicamente cuando $M = 0$. Luego, esta posibilidad queda descartada.

Por otro lado, las condiciones (1) y (3) implican que, para todo $i \in \mathcal{I}_\pm$ y $\pm s > 0$,

$$\sum_{e \in \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e(t, s) dt = \sum_{e \in \mathcal{C}_i} T_e K_i,$$

así que, de la condición (1), se deduce que $v_{e(s)}(t(s), s) = K_i$ para algún $e(s) \subset \partial\mathcal{C}_i$, $t(s) \in (0, T_{e(s)})$ y todo $\pm s > 0$. Así, la condición (3) y la discusión anterior descartan también esta posibilidad, por lo que $M > K_i = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} v_e(\cdot, s)$ para cada $i \in \mathcal{I}_\pm$ y $e \subset \partial\mathcal{C}_i$, y por lo tanto $M = \limsup_{t \rightarrow 0^+, s \rightarrow 0} v_{\bar{e}}(t, s)$ para algún $\bar{e} \in \mathcal{E}$.

Finalmente, si $\bar{e} \in \mathcal{E}_I$ (el caso $\bar{e} \in \mathcal{E}_B$ puede ser tratado de manera análoga), entonces se tiene del principio del máximo débil (la condición inicial $v_{\bar{e}}(0, \cdot)$ puede ser discontinua) que

$$\sup_{(0, \delta) \times (-r, r)} v_{\bar{e}}(t, s) \leq \max \left\{ \sup_{(-r, 0)} v_{e^-}(T_{e^-}, s), \sup_{(0, r)} v_{e^+}(T_{e^+}, s), \sup_{(0, \delta)} v_{\bar{e}}(t, \pm r) \right\}$$

para algún $e^-, e^+ \in \mathcal{E}$. Luego, tomando $\delta \rightarrow 0$, se tiene que

$$M = \limsup_{t \rightarrow 0, s \rightarrow 0} v_{\bar{e}}(t, s) \leq \max \left\{ \max_{[-r, 0]} v_{e^-}(T_{e^-}, s), \max_{[0, r]} v_{e^+}(T_{e^+}, s) \right\} \leq M$$

de donde el resultado se sigue □

La demostración de la Hölder continuidad uniforme en ε está basada en el siguiente resultado, que es básicamente una particularización de los teoremas de Berestycki y Hamel [2]. La dependencia en ε de las funciones involucradas en el siguiente Teorema es omitida con el fin de simplificar la presentación.

Teorema 2.1 *Sea $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y $u \in C^3(\mathcal{U})$ una solución de la ecuación diferencial elíptica*

$$\mathfrak{L}u = \varepsilon u_{tt} + au_{xx} + 2\sqrt{\varepsilon}bu_{xt} + cu_x - du_t = f(x, t, u)$$

donde a, b, c, d están acotados en norma $C^1(\bar{\mathcal{U}})$, f y f_r están acotadas en norma $L^\infty(\mathcal{U} \times B_{\|u\|_\infty})$, y $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}d_x$ y u están acotados en norma $L^\infty(\mathcal{U})$, todo lo anterior uniformemente con respecto a $\varepsilon > 0$.

Si adicionalmente se cumple que $d \geq \gamma$ y $a - b^2 \geq \gamma$ en $\bar{\mathcal{U}}$ para algún $\gamma > 0$, entonces para cada $\mathcal{V} \subset\subset \mathcal{U}$ existe una constante $C > 0$ independiente de ε tal que

$$\|u_x\|_{\infty, \mathcal{V}} + \|u_t\|_{2, \mathcal{V}} \leq C \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

para algún $\varepsilon_0 > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean \mathcal{W} tal que $\mathcal{V} \subset\subset \mathcal{W} \subset\subset \mathcal{U}$ y $\chi \in C_0^2(\mathcal{U})$ tal que $\chi = 1$ en \mathcal{W} . Sean también $\alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\|b\|_{\infty, \mathcal{U}}^2 + 1}$ (de modo tal que $a - \alpha b^2 \geq \frac{\gamma}{2}$ y $1 - \frac{1}{\alpha} > 0$) y

$$M = \sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \left[\|a\|_{C^1} + \|b\|_{C^1} + \|c\|_{C^1} + \|d\|_{C^1} + \|f\|_{C^1(\mathcal{U} \times B_{\|u\|_\infty})} + \|\chi\|_{C^2} + \varepsilon^{-1/2} \|d_x\|_\infty + \|u\|_\infty \right]$$

Diferenciando la ecuación se verifica que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\chi^2 u_x^2 + \lambda u^2) &= [2\lambda a + \mathfrak{L}\chi^2 + 2\chi^2(f_s - c_x)] u_x^2 + 2\varepsilon\chi^2 u_{xt}^2 + 2a\chi^2 u_{xx}^2 + 2\lambda\varepsilon u_t^2 \\
&+ 4\sqrt{\varepsilon}(2\sqrt{\varepsilon}\chi_t + 2b\chi_x - b_x\chi)\chi u_x u_{xt} + 2(4a\chi_x + 2\sqrt{\varepsilon}b\chi_t - a_x\chi)\chi u_x u_{xx} \\
&+ 4\sqrt{\varepsilon}b\chi^2 u_{xt} u_{xx} + 2(2\lambda\sqrt{\varepsilon}b + \chi^2 d_x)u_x u_t + 2\chi^2 f_x u_x + 2\lambda u f \\
&\geq [2\lambda a + \mathfrak{L}\chi^2 + 2\chi^2(f_s - c_x)] u_x^2 + 2\varepsilon\chi^2(1 - \frac{1}{\alpha})u_{xt}^2 + \gamma\chi^2 u_{xx}^2 + 2\lambda\varepsilon u_t^2 \\
&+ 4\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{2\varepsilon}\chi_t + 2b\chi_x - b_x\zeta)\chi u_x u_{xt} + 2(4a\chi_x + 2\sqrt{\varepsilon}b\chi_t - a_x\chi)\chi u_x u_{xx} \\
&+ 2(2\sqrt{\varepsilon}b + \chi^2 d_x)u_x u_t + 2\chi^2 f_x u_x + 2\lambda u f \\
&\geq \left[2\lambda a + \mathfrak{L}\chi^2 + 2\chi^2(f_s - c_x) - 2\alpha(2\sqrt{\varepsilon}\chi_t + 2b\chi_x - b_x\chi)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma}(4a\chi_x + 2\sqrt{\varepsilon}b\chi_t - a_x\chi)^2 - 2\left(b + \chi^2 \frac{d_x}{\lambda\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 - 4\chi^4 \right] u_x^2 \\
&\quad - f_x^2 + 2\lambda u f \\
&\geq (2\gamma\lambda - C_0 M^4)u_x^2 - M^2(1 + \lambda)
\end{aligned}$$

La primera desigualdad es consecuencia de $aX^2 + 2\sqrt{\varepsilon}bXY + \varepsilon Y^2 \geq \frac{\gamma}{2}X^2 + \varepsilon(1 - \frac{1}{\alpha})Y^2$, y la siguiente se sigue de la desigualdad $|2ab| \leq a^2 + b^2$. En la última desigualdad C_0 es una constante numérica.

Eligiendo $\lambda = \gamma^{-1}C_0 M^4$ se tiene de lo anterior que

$$\mathfrak{L}(\chi^2 u_x^2 + \lambda u^2) \geq -M^2(1 + 2\lambda)$$

Sea ahora $P = \chi^2 u_x^2 + \lambda u^2 + \rho e^{\kappa x}$, con $\kappa = \frac{1}{\gamma}(1 + \|c\|_\infty)$ and $\rho = \kappa^{-1}M^2(1 + 2\lambda)e^{\kappa \text{diam}\mathcal{U}}$. Con esta elección de constantes se verifica la desigualdad

$$\mathfrak{L}P \geq \kappa\rho e^{\kappa x}(a\kappa + c) - M^2(1 + 2\lambda) \geq 0$$

de donde, por el principio del máximo y la elección de χ , se sigue que $\|u_x\|_{\infty, \mathcal{W}}^2 \leq \max_{\partial\mathcal{U}} P \leq C_1^2$ para algún $C_1 > 0$ independiente de $\varepsilon \in (0, 1)$.

Para la cota de u_t en L^2 , sean $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{V} \subset\subset \mathcal{Z} \subset\subset \mathcal{W}$, y $\eta \in C_0^2(\mathcal{W})$ tal que $\eta = 1$ en \mathcal{Z} . Entonces, multiplicando $\mathfrak{L}u$ por $\eta^2 u$ e integrando por partes se sigue que

$$\int_{\mathcal{W}} 2(\varepsilon u_t^2 + a u_x^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b u_x u_t)\eta^2 - \varepsilon(\eta^2)_{tt}u^2 + (a\eta^2)_x(u^2)_x + 2\sqrt{\varepsilon}(b\eta^2)_t(u^2)_x + [(c\eta^2)_x - (d\eta^2)_t]u^2 + f(x, t, u)u\eta^2 = 0$$

Usando que $a u_x^2 + 2\sqrt{\varepsilon}b u_x u_t + \varepsilon u_t^2 \geq \frac{\gamma}{2}u_x^2 + \varepsilon(1 - \frac{1}{\alpha})u_t^2 \geq \varepsilon(1 - \frac{1}{\alpha})u_t^2$ en el primer paréntesis se obtiene

$$\varepsilon \int_{\mathcal{W}} u_t^2 \eta^2 \leq (M^2 + C_1^2)\|\eta\|_{C^2}^2 \leq C_2$$

para algún $C_2 > 0$ independiente de ε .

En particular, $\sqrt{\varepsilon}\|u_t\|_{2, \mathcal{Z}}$ está acotado uniformemente en ε .

Finalmente, sea $\zeta \in C_0^2(\mathcal{Z})$ tal que $\zeta = 1$ en \mathcal{V} . Entonces, integrando $\zeta^2 u_t \mathfrak{L}u$ sobre \mathcal{Z} se obtiene

$$-\varepsilon \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta \zeta_t + \int_{\mathcal{Z}} u_x^2 (a\zeta^2)_t - \int_{\mathcal{Z}} u_x u_t (a\zeta^2)_x - \sqrt{\varepsilon} \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 (b\zeta^2)_x + \int_{\mathcal{Z}} c u_x u_t \zeta^2 - \int_{\mathcal{Z}} d u_t^2 \zeta^2 = \int_{\mathcal{Z}} f(t, x, u) u_t \zeta^2$$

Las primeras dos integrales están acotadas uniformemente con respecto a ε , mientras que las restantes se pueden estimar como

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{Z}} u_x u_t (a\zeta^2)_x \right| &\leq \delta \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta^2 + \frac{C_1^2 M^2}{\delta} \|\zeta\|_{C^2}^2 \\ \left| \int_{\mathcal{Z}} c u_x u_t \zeta^2 \right| &\leq \delta \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta^2 + \frac{C_1^2 M^2}{\delta} \|\zeta\|_{C^2}^2 \\ \left| \int_{\mathcal{Z}} f(x, t, u) u_t \zeta^2 \right| &\leq \delta \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta^2 + \frac{M^2}{\delta} \|\zeta\|_{C^2}^2 \end{aligned}$$

donde $\delta > 0$ se escogerá a continuación.

Para la cuarta integral se tiene

$$\sqrt{\varepsilon} \left| \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 (b_x \zeta^2 + 2b\zeta\zeta_x) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|b_x\|_{\infty} \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta^2 + \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 |2\sqrt{\varepsilon} b\zeta_x \zeta|$$

pero $|2\sqrt{\varepsilon} b\zeta_x \zeta| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} |b|^2 |\zeta_x|^2 + \delta \zeta^2$, así que

$$\sqrt{\varepsilon} \left| \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 (b_x \zeta^2 + 2b\zeta\zeta_x) \right| \leq (\delta + \sqrt{\varepsilon} M) \int_{\mathcal{Z}} u_t^2 \zeta^2 + \frac{1}{\delta} M C_2 \|\zeta\|_{C^2}$$

Así, juntando estas cotas y tomando $\delta = \frac{\gamma}{8}$, se obtiene

$$\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\varepsilon} M \right) \int_{\mathcal{Z}} \zeta^2 u_t^2 \leq C_3$$

para algún C_3 independiente de ε . Tomando $\varepsilon_0 < \frac{\gamma^2}{4M^2}$ la demostración queda completa. \square

La Hölder continuidad es una consecuencia directa del Teorema 2.1 y el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [12].

Teorema 2.2 (Desigualdad de Morrey Anisotrópica) *Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio rectangular y $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ tal que $1 \leq p_1 \leq p_2 \dots p_n \leq \infty$. El espacio de Sobolev anisotrópico $W^{\vec{p}}(\mathcal{R})$ se define como*

$$W^{\vec{p}}(\mathcal{R}) = \left\{ u \in L^{p_1}(\mathcal{R}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}(\mathcal{R}) \text{ for } i = 1, \dots, n \right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{\vec{p}}(\mathcal{R})} = \|u\|_{L^{p_1}(\mathcal{R})} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{p_i}(\mathcal{R})}.$$

Si \vec{p} satisfice

$$\alpha = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} > 0,$$

entonces $W^{\vec{p}}(\mathcal{R}) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\mathcal{R})$ con

$$0 < \beta = \frac{\alpha}{n/p_1 + \alpha} \leq 1.$$

Más aún, existe C tal que para todo $u \in W^{\vec{p}}(\mathcal{R})$

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\mathcal{R})} \leq C \|u\|_{W^{\vec{p}}(\mathcal{R})}.$$

Como se comentó al inicio del capítulo, la demostración del Teorema 0.4 a continuación es hecha probando que $v_e^{\varepsilon_j} \rightarrow v_e$ localmente uniformemente para alguna sucesión $\varepsilon_j \rightarrow 0$, y alguna familia $\{v_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ que, *a fortiori*, satisface las propiedades del Teorema 0.5.

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 0.4 Y 0.5. Los Teoremas 2.1 y 2.2 implican, mediante el Teorema de Arzela-Ascoli y un argumento diagonal estándar, que existe una familia $\{v_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ de funciones continuas acotadas y una sucesión $\varepsilon_j \rightarrow 0$ tal que $v_e^{\varepsilon_j} \rightarrow v_e$, localmente uniformemente en $(0, T_e) \times \mathbb{R}$ para $e \in \mathcal{E}_I$ y en $(0, T_e) \times \mathbb{R}_\pm$ para $e \in \mathcal{E}_{B^\pm}$. Dado que la ecuación (1.4) es elíptica para cada $\varepsilon \geq 0$, se sigue que v_e es una solución viscosa de la ecuación del calor $v_{e,ss} = v_{e,t}$, y por lo tanto es también una solución clásica.

Para extender la convergencia hasta el borde $s = 0$ cuando $e \in \mathcal{E}_B$, estudiamos los límites semi-relajados [4]

$$v_e^+(x) = \limsup^* v_e^{\varepsilon_j}(x) = \limsup_{j \rightarrow \infty, y \rightarrow x} v_e^{\varepsilon_j}(y) \quad \text{y} \quad v_e^-(x) = \liminf_* v_e^{\varepsilon_j}(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty, y \rightarrow x} v_e^{\varepsilon_j}(y),$$

cuya utilidad proviene de que, donde sea que $v_e^+ = v_e^-$, $v_e^{\varepsilon_j}$ es localmente uniformemente convergente.

Fijamos ahora $s_0 > 0$ y $[t_1, t_2] \subset (0, T_e)$. Tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño, de modo tal que $[t_1 - \delta, t_2 + \delta] \subset (0, T_e)$, y definimos $w_0 \in C^2([t_1 - \delta, t_2 + \delta] \times [0, s_0])$ como la solución de

$$\begin{cases} \partial_t w_0 = \partial_{ss} w_0 \\ w_0(t_1 - \delta, s) = M \\ w_0(t, 0) = \tilde{g}(t) \\ w_0(t, s_0) = M \end{cases}$$

donde $M = \sup_{\varepsilon \in (0,1)} \|v_e^\varepsilon\|_\infty$, $\tilde{g}(t) = M\eta(t) + (1 - \eta(t))g(X_e(t, 0))$, y $\eta \in C^\infty([t_1 - \delta, t_2 + \delta]; [0, 1])$ es una función tal que

$$\eta \equiv 0 \text{ en } [t_1, t_2] \quad \text{y} \quad \eta(t) = 1 \text{ para } t \in [t_1 - \delta, t_1 - \delta/2] \cup [t_2 + \delta/2, t_2 + \delta].$$

Esta construcción se hace con el fin de que w_0 esté globalmente acotada en $[t_1 - \delta, t_2 + \delta] \times [0, s_0]$ en norma C^2 , lo cual es cierto en virtud de que g (y por lo tanto también \tilde{g}) es de clase $C^{2,\gamma}$, y además \tilde{g} satisface las condiciones de compatibilidad de segundo orden requeridas por las estimaciones de Schauder parabólicas (ver Lieberman [8]).

Luego, tomamos un $q \in C^2([t_1 - \delta, t_2 + \delta])$ no negativo y no decreciente tal que $q \equiv 0$ en $[t_1 - \delta, t_2]$ y $q(t_2 + \delta) = 2M$.

Fijamos $\alpha > 0$ y definimos finalmente $w^\varepsilon(t, s) = \alpha s(s_0 - s) + w_0(t, s) + \|g^\varepsilon - g\|_\infty + q(t)$.

Se sigue de esta construcción que $w^\varepsilon \geq v_e^\varepsilon$ en $\partial([t_1 - \delta, t_2 + \delta] \times [0, s_0])$, puesto que

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t_1 - \delta, s) &\geq w_0(t_1 - \delta, s) \geq M \geq v_e^\varepsilon(t_1 - \delta, s), \\ w^\varepsilon(t, s_0) &\geq w_0(t, s_0) \geq M \geq v_e^\varepsilon(t, s_0), \\ w^\varepsilon(t_2 + \delta, s) &\geq w_0(t_2 + \delta, s) + q(t_2 + \delta) \geq -\|w_0\|_\infty + 2M \geq v_e^\varepsilon(t_2 + \delta, s), \\ \text{y } w^\varepsilon(t, 0) &\geq w_0(t, 0) + \|g^\varepsilon - g\|_\infty \geq M\eta + (1 - \eta)g + g^\varepsilon - g \geq v_e^\varepsilon(t, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\mathfrak{L}_\varepsilon(v_\varepsilon) = F_\varepsilon^\varepsilon(t, s, v_\varepsilon) = O(\varepsilon)$, se tiene también que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathfrak{L}_\varepsilon(w^\varepsilon) = -2\alpha A^\varepsilon + \alpha\sqrt{\varepsilon}B^\varepsilon(s_0 - 2s) + \varepsilon q'' - D^\varepsilon q' + \mathfrak{L}_\varepsilon(w_0) = -\alpha + O(\sqrt{\varepsilon}) < \mathfrak{L}_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

Así, del principio del máximo se obtiene $w^\varepsilon \geq v_\varepsilon$ en $[t_1 - \delta, t_2 + \delta] \times [0, s_0]$. En particular, para todo $t \in (t_1, t_2)$ y $s \in [0, s_0]$,

$$v_\varepsilon^\varepsilon(t, s) \leq \alpha s(s_0 - s) + w_0(t, s) + \|g^\varepsilon - g\|_\infty.$$

De esta manera, tomando $\varepsilon_j \rightarrow 0$, tenemos que $v_e^+(t, s) \leq \alpha s(s_0 - s) + w_0(t, s)$, y por lo tanto $v_e^+(t, 0) \leq g(X_e(t, 0))$ para todo $t \in (t_1, t_2)$.

Una construcción similar lleva a la desigualdad complementaria $v_e^-(t, 0) \geq g(X_e(t, 0))$, de donde la convergencia uniforme hasta el borde se sigue. Más aún, este argumento también muestra que la familia obtenida satisface la propiedad (2) del Teorema 0.5.

A continuación establecemos la propiedad (1) del Teorema 0.5, esto es, las condiciones de compatibilidad sobre los bordes $t = 0$ y $t = T_e$, lejos de $s = 0$. El argumento que utilizaremos permitirá mostrar, adicionalmente, que la convergencia uniforme puede llevarse hasta esta región y por lo tanto establece que la región de convergencia es efectivamente la postulada en el Teorema 0.4.

Sean e y e' dos arcos satisfaciendo las condiciones correspondientes a esta propiedad, esto es, $e, e' \subset \partial C_i$ para algún $i \in \mathcal{I}_+$ y $X_e(T_e^-, 0) = X_{e'}(0^+, 0)$.

Se sigue de la teoría de Morse que, en una bola suficientemente pequeña $B_r(p)$, es posible elegir un sistema de coordenadas tal que $H(\Phi(x, y)) = \tilde{H}(x, y) = xy$, con $\Phi : B_{r'}(0) \rightarrow B_r(p)$ un difeomorfismo de clase C^4 que preserva la orientación. Si fijamos h_0 aún más pequeño de ser necesario, podemos también suponer que

$$X_e((0, \delta) \times (0, h_0)) \cup X_{e'}((T_{e'} - \delta, T_{e'}) \times (0, h_0)) \subset \Phi^{-1}(B_{r'}(0) \cap \{x > 0, y > 0\})$$

para algún $\delta > 0$.

Definimos ahora $\tau, \sigma^\varepsilon : B_{r'}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad \text{y} \quad \sigma^\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{H}(x, y)$$

Es claro que la función $(\tau, \sigma^\varepsilon) : B_{r'}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local en torno a cada punto $(x, y) \in B_{r'}(0) \cap \{x > 0, y > 0\}$.

Luego, fijamos $s_0 > 0$ y tomamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que $s_0 \in (0, \frac{h_0}{\sqrt{\varepsilon}})$. Pretendemos probar en lo que sigue que $w^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi \circ (\tau, \sigma^\varepsilon)^{-1}$, definida en una vecindad de $(0, s_0)$, satisface las hipótesis del Teorema 2.1. De ser cierto esto, el Teorema 2.2 daría la existencia de una constante C tal que, para todo (t, s) en una vecindad de $(0, s_0)$ y (t', s) en una vecindad de $(T_{e'}, s_0)$,

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon^\varepsilon(t, s) - v_\varepsilon^\varepsilon(t', s)| &= |w^\varepsilon((\tau, \sigma^\varepsilon) \circ \Phi^{-1} \circ X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s)) - w^\varepsilon((\tau, \sigma^\varepsilon) \circ \Phi^{-1} \circ X_{e'}(t', \sqrt{\varepsilon}s))| \\ &\leq C|(\tau, \sigma^\varepsilon) \circ \Phi^{-1} \circ X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s) - (\tau, \sigma^\varepsilon) \circ \Phi^{-1} \circ X_{e'}(t', \sqrt{\varepsilon}s)|^{1/3} \end{aligned}$$

Sin embargo, por construcción se sabe que $\sigma^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}H \circ \Phi$ y $H \circ X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s) = H \circ X_{e'}(t', \sqrt{\varepsilon}s) = \sqrt{\varepsilon}s$, así que

$$\sigma^\varepsilon \circ \Phi^{-1} \circ X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s) - \sigma^\varepsilon \circ \Phi^{-1} \circ X_{e'}(t', \sqrt{\varepsilon}s) = 0$$

En consecuencia, la estimación anterior lleva a

$$|v_e^\varepsilon(t, s) - v_{e'}^\varepsilon(t', s)| \leq C \|D\tau\|_\infty \|D\Phi^{-1}\|_\infty |X_e(t, \sqrt{\varepsilon}s) - X_{e'}(t', \sqrt{\varepsilon}s)|^{1/3}.$$

Y así, tomando $\varepsilon = \varepsilon_j \rightarrow 0$, obtenemos

$$|v_e^\pm(t, s) - v_{e'}^\mp(t', s)| = o(1) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+ \text{ y } t' \rightarrow T_{e'}^-,$$

de donde se deduce directamente la condición de compatibilidad y la convergencia uniforme hasta $t = 0$ y $t = T_{e'}$, lejos de $s = 0$.

Para ver que w^ε cumple las condiciones postuladas notamos primero que, por definición, $u^\varepsilon(\Phi(x, y)) = w^\varepsilon(\tau(x, y), \sigma^\varepsilon(x, y))$ para (x, y) en una vecindad de $(\tau, \sigma^\varepsilon)^{-1}(0, s)$. En lo que sigue, dado que todas las funciones consideradas dependen de ε , omitimos este índice para simplificar la presentación.

En las coordenadas (x, y) , la ecuación que resuelve w^ε toma la forma

$$\operatorname{div}(AD\tau w_t + AD\sigma w_s) - \varepsilon^{-1}|D\tau|^2 w_t = -\det D\Phi f(\Phi(x, y), w)$$

donde $A = \det D\Phi(D\Phi)^{-1}(D\Phi^t)^{-1}$ y w es evaluado en (τ, σ) .

Esto puede ser escrito en las coordenadas (t, s) como

$$\varepsilon w_{tt} + a w_{ss} + 2\sqrt{\varepsilon} b w_{ts} + c w_s - d w_t = \bar{f}(t, s, w) \quad (2.1)$$

donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{AD\tilde{H} \cdot D\tilde{H}}{AD\tau \cdot D\tau} \circ (\tau, \sigma)^{-1} \\ b &= \frac{AD\tilde{H} \cdot D\tau}{AD\tau \cdot D\tau} \circ (\tau, \sigma)^{-1} \\ c &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\operatorname{div}(AD\tilde{H})}{AD\tau \cdot D\tau} \circ (\tau, \sigma)^{-1} \\ d &= \frac{|D\tau|^2}{AD\tau \cdot D\tau} \circ (\tau, \sigma)^{-1} - \varepsilon \frac{\operatorname{div}(AD\tau)}{AD\tau \cdot D\tau} \circ (\tau, \sigma)^{-1} \\ \bar{f}(t, s, r) &= -\frac{\varepsilon \det D\Phi}{AD\tau \cdot D\tau} f((\tau, \sigma)^{-1}, r) \end{aligned}$$

Notar que $D\tau \cdot D\tilde{H} = 0$ y $|D\tau| = \sqrt{\varepsilon}|D\sigma| = |D\tilde{H}|$, así que, si denotamos por $\lambda, \Lambda > 0$ a las constantes tales que $\lambda|\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$, se sigue que $\frac{\lambda}{\Lambda} \leq a \leq \frac{\Lambda}{\lambda}$ y $|b| \leq \frac{\Lambda}{\lambda}$, y entonces vemos que estos coeficientes están acotados y a es uniformemente positivo. Por otro lado, la descomposición espectral de la matriz A y la ortogonalidad de $D\tau$ y $D\sigma$ llevan a la cota $a - b^2 \geq \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$.

Para el resto de los coeficientes, notamos primero que $|D\tau(x, y)|^2 = x^2 + y^2 = 2\sqrt{\tau^2 + \varepsilon\sigma^2}$, de donde se obtiene

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|D\tau \circ (\tau, \sigma)^{-1}|^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon s^2} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2s}.$$

Esto implica que c , d y \bar{f} están acotados si s se mantiene lejos de cero, y muestra adicionalmente que $d \geq \frac{1}{2\Lambda}$ para ε suficientemente pequeño.

Ahora bien, dado que las coordenadas $(\tau, \sigma^\varepsilon)$ introducen una dependencia en ε adicional en los coeficientes, no es directo que sus derivadas se mantengan localmente acotadas. Sin embargo, esta transformación puede verse secuencialmente como $(x, y) \rightarrow (\tau, \tilde{H})$ y $(t, \tilde{h}) \rightarrow (t, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{h})$, así que en realidad toda la dependencia en s es a través de $\sqrt{\varepsilon}s$. Por lo tanto, las derivadas con respecto a t se mantendrán acotadas, mientras que las derivadas con respecto a s contienen un factor $\sqrt{\varepsilon}$ adicional, tal y como se requiere en el Teorema 2.1. Así, (2.1) satisface las hipótesis necesarias y la propiedad (1) queda establecida.

Finalmente, para establecer la propiedad (3), fijamos $i \in \mathcal{I}_+$ (el caso $i \in \mathcal{I}_-$ es análogo) y definimos $T = \sum_{e \in \mathcal{C}_i} T_e$. Construimos ahora $w : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ pegando las funciones $v_e(t, s)$, $e \in \mathcal{C}_i$, en las curvas $t = 0$ y $t = T_e$ de acuerdo a la propiedad (1) ya demostrada. De esta manera la regularidad y unicidad de las soluciones acotadas de la ecuación del calor junto con la propiedad (1) implican que w es una función suave y T -periódica en t , lejos de $s = 0$.

Ahora bien, dado que w es una solución de la ecuación del calor acotada y periódica en el tiempo, sabemos que sus derivadas de todos los órdenes están acotadas lejos de $s = 0$. Luego, es válido identificar a w con su serie de Fourier en t , esto es,

$$w(t, s) = \frac{a_0(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cos(\beta_n t) + b_n(s) \sin(\beta_n t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, s > 0 \quad (2.2)$$

donde

$$a_n(s) = \frac{2}{T} \int_0^T w(t, s) \cos(\beta_n t) dt, \quad b_n(s) = \frac{2}{T} \int_0^T w(t, s) \sin(\beta_n t) dt, \quad \beta_n = \frac{2n\pi}{T}.$$

Así, dado que la convergencia de la serie es uniforme lejos de $s = 0$, imponemos que (2.2) resuelva la ecuación del calor para obtener las relaciones

$$a_0'' = 0, \quad y \quad a_n'' = \beta_n b_n, \quad b_n'' = -\beta_n a_n \quad \forall n \geq 1,$$

de donde, dado que w es acotada, se sigue que a_0 es constante y

$$w(t, s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c_n(s-s_0)} [a_n(s_0) \cos(\beta_n t - c_n(s-s_0)) + b_n(s_0) \sin(\beta_n t - c_n(s-s_0))],$$

donde $c_n = \sqrt{\frac{\beta_n}{2}}$ y $s_0 > 0$ está fijo.

De esta manera, dado que $a_n(s_0)$ y $b_n(s_0)$ decaen polinomialmente con n , deducimos que

$$|w(t, s) - K_i| = O(e^{-c_1 s}) \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty.$$

uniformemente en $t \in [0, T]$, donde hemos definido

$$K_i = \frac{a_0}{2} = \frac{\sum_{e \in \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e(t, 0) dt}{\sum_{e \in \mathcal{C}_i} T_e},$$

lo que concluye la demostración. □

Capítulo 3

Homogeneización

El Teorema 0.9 es una extensión de los resultados de Ishii y Souganidis [7], por un lado en tanto en este contexto permitimos que el lado derecho $f^\varepsilon(x, u^\varepsilon)$ tenga dependencia en u^ε , y por otro lado en tanto se establece una conexión (dada por las condiciones de borde en las ecuaciones (5) y (6)) entre la homogeneización que ocurre al interior de los conjuntos $C_i \cap \Omega$ y la formación de *boundary layers* en sus frontetas.

Primero establecemos la convergencia al interior de $C_i \cap \Omega$ y lejos del punto crítico $x_i \in C_i$. Aún cuando las técnicas utilizadas en [7] aplican a pesar de la no linealidad (pues sólo se requiere que f^ε sea acotada), presentamos aquí una demostración alternativa, más simple, que explota la uniforme elipticidad del Laplaciano.

Lema 3.1 *Para cada $i \in \mathcal{I}$ y $U \subset\subset C_i \cap \Omega$ existe $C > 0$ tal que*

$$\int_U |Du^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |b \cdot Du^\varepsilon|^2 dx \leq C.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijamos primero dos abiertos V y W tales que $U \subset\subset V \subset\subset W$, y consideramos una función $\zeta \in C_0^2(W)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ y $\zeta \equiv 1$ en V . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\zeta = \varphi \circ H$ para alguna función suave φ , y que ∂V y ∂W están formadas por curvas de nivel de H , de modo tal que la normal a dichas curvas sea proporcional a DH .

Multiplicando (1) por $\zeta^2 u^\varepsilon$ e integrando sobre W obtenemos

$$\int_W \zeta^2 |Du^\varepsilon|^2 dx + 2 \int_W \zeta u^\varepsilon D\zeta \cdot Du^\varepsilon dx = \int_W \zeta^2 f^\varepsilon u^\varepsilon dx,$$

donde hemos usado que

$$\int_W b \cdot Du^\varepsilon u^\varepsilon \zeta^2 dx = \int_{\partial W} \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} \zeta^2 b \cdot \hat{n} dl - \int_W \frac{(u^\varepsilon)^2}{2} ((\varphi^2)' \circ H b \cdot DH + \varphi^2 \circ H \operatorname{div}(b)) dx = 0,$$

pues $b \cdot \hat{n} = \operatorname{div}(b) = b \cdot DH = 0$.

Se sigue de lo anterior que

$$\int_V |Du^\varepsilon|^2 dx \leq C \int_W \zeta^2 f^\varepsilon u^\varepsilon + |D\zeta|^2 dx.$$

Tomamos ahora un $\zeta \in C_0^2(V)$ que, como antes, suponemos sin pérdida de generalidad de la forma $\zeta = \varphi \circ H$ para algún φ suave.

Multiplicando (1) por $v = \zeta^2 b \cdot Du^\varepsilon$ e integrando sobre V se obtiene

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_V \zeta^2 |b \cdot Du^\varepsilon|^2 dx + \int_V Du^\varepsilon \cdot Dv dx = \int_V \zeta^2 f^\varepsilon b \cdot Du^\varepsilon dx.$$

La integral en el lado derecho se puede acotar por $\|\zeta f^\varepsilon\|_{L^2(V)} \|\zeta b \cdot Du^\varepsilon\|_{L^2(V)}$, mientras que la segunda integral en el lado izquierdo se puede escribir como

$$\int_V \zeta^2 Db Du^\varepsilon \cdot Du^\varepsilon dx + 2 \int_V \zeta b \cdot Du^\varepsilon D\zeta \cdot Du^\varepsilon dx + \int_V \zeta^2 D^2 u^\varepsilon b \cdot Du^\varepsilon =: I_1 + I_2 + I_3.$$

Tenemos que $|I_1| \leq \|D^2 H\|_\infty \|Du^\varepsilon\|_{L^2(V)}$, $|I_2| \leq 2 \|D\zeta\|_\infty \|Du^\varepsilon\|_{L^2(V)} \|\zeta b \cdot Du^\varepsilon\|_{L^2(V)}$, y

$$I_3 = \int_V \zeta^2 b \cdot D \left(\frac{|Du^\varepsilon|^2}{2} \right) dx = \int_{\partial V} \zeta^2 b \cdot \hat{n} \frac{|Du^\varepsilon|^2}{2} - \int_V \frac{|Du^\varepsilon|^2}{2} (D(\zeta^2) \cdot b + \zeta^2 \operatorname{div}(b)) dx = 0.$$

Así, vemos que $X = \|\zeta b \cdot Du^\varepsilon\|_{L^2(V)}$ satisface la desigualdad

$$\frac{1}{\varepsilon} X^2 \leq C(1 + X)$$

para alguna constante $C > 0$, lo que concluye la demostración. □

Con este resultado podemos proceder con la

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 0.9. Una consecuencia directa del Lema anterior, junto a las estimaciones elípticas usuales, es que para cada $U \subset\subset C_i \cap \Omega$, existe un $C > 0$ tal que $\|u^\varepsilon\|_{H^2(U)} \leq C\varepsilon^{-1/2}$. Utilizando las inclusiones de Sobolev e interpolación entre L^2 y L^p esto permite obtener, para cada $\alpha \in (0, 1/2)$ y $2 < p < \infty$, una cota de la forma $\|b \cdot Du^\varepsilon\|_{L^p(U)} \leq C\varepsilon^\alpha$.

A continuación introducimos un difeomorfismo local similar al de [7]. Fijamos un $x_0 \in \Omega \cap C_i \setminus \{x_i\}$ y definimos una función Φ de una vecindad de $(0, H(x_0))$ en una vecindad de x_0 por medio del problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(t, h)}{dt} = b(\Phi(t, h)), \\ \Phi(0, h) = Y(h), \end{cases}$$

con condición inicial $Y(h)$ dada por la solución de la EDO

$$\begin{cases} \frac{dY(h)}{dh} = \frac{DH(Y(h))}{|DH(Y(h))|^2}, \\ Y(H(x_0)) = x_0. \end{cases}$$

Es directo que $\Phi(0, H(x_0)) = x_0$ y $\det D\Phi = 1$, así que Φ es efectivamente un difeomorfismo local, digamos $\Phi : V = (-\delta, \delta) \times (H(x_0) - \delta, H(x_0) + \delta) \rightarrow U \ni x_0$, con $U \subset\subset \Omega \cap C_i \setminus \{x_i\}$.

Definiendo $v^\varepsilon = u^\varepsilon \circ \Phi$ en una vecindad de $(0, H(x_0))$ tenemos, por lo comentado antes, que

$$\int_V |v_h^\varepsilon|^2 dt dh \leq |D\Phi|_\infty^2 \int_U |Du^\varepsilon|^2 dx \leq C,$$

y

$$\int_V |v_t^\varepsilon|^p dt dh \leq \int_U |b \cdot Du^\varepsilon|^p dx \leq C\varepsilon^{p\alpha},$$

de donde, en virtud del Teorema 2.2, deducimos que $\|v^\varepsilon\|_{C^\beta(V)} \leq C$ con $\beta \in (0, 1/3)$, y entonces también $\|u^\varepsilon\|_{C^\beta(U)} \leq C$.

Así, igual que en la demostración del Teorema 0.4, tenemos que existe un $\varepsilon_j \rightarrow 0$ tal que u^{ε_j} converge localmente uniformemente en cada $\Omega \cap C_i \setminus \{x_i\}$. Más aún, dado que u^ε está acotada en $H^1(U)$ y $\|b \cdot Du^\varepsilon\|_L^2(U) \rightarrow 0$, se tiene entonces que el límite satisface $b \cdot Du = 0$ en L^2 y también en el sentido viscoso, así que necesariamente se tiene que el límite puede escribirse como función de H .

La convergencia en el punto crítico x_i (que está en Ω sólo cuando $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$) será estudiada por separado en un Lema posterior.

Ahora bien, dada la compacidad de u^ε , la convergencia de la familia completa será consecuencia de la unicidad una vez que se haya establecido que cualquier límite localmente uniforme de u^ε necesariamente satisface (5) o (6), según corresponda. Procedemos entonces a estudiar el problema límite y su unicidad.

Supongamos primero que $i \in \mathcal{J}$, de modo tal que $\Omega \cap C_i \setminus \{x_i\} = \Omega \cap C_i$. Sea $u_i \circ H = \lim_{j \rightarrow \infty} u^{\varepsilon_j}$ en $\Omega \cap C_i$.

Se tiene que, para cada $\phi \in C_0^\infty(I_i)$, luego de multiplicar (1) por $\phi \circ H$ e integrar sobre $\Omega \cap C_i$,

$$- \int_{\Omega \cap C_i} \Delta u^\varepsilon \phi \circ H dx = \int_{\Omega \cap C_i} f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \phi \circ H dx$$

Pero dado que $\phi \in C_0^\infty(I_i)$, es claro que $\phi \circ H \equiv 0$ cerca de $\partial(\Omega \cap C_i)$, así que integrando por partes

$$- \int_{\Omega \cap C_i} u^\varepsilon \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{\Omega \cap C_i} f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \phi \circ H dx$$

Ahora bien, sabemos que u^{ε_j} y $f^{\varepsilon_j}(\cdot, u^{\varepsilon_j}(\cdot))$ son acotadas y localmente uniformemente convergentes en $\Omega \cap C_i$ hacia $u_i \circ H$ y $f(\cdot, u_i \circ H(\cdot))$, respectivamente, por lo que se tiene que

$$- \int_{\Omega \cap C_i} u_i \circ H \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{\Omega \cap C_i} f(x, u_i \circ H) \phi \circ H dx,$$

lo que puede ser escrito como

$$- \int_{\Omega \cap C_i} u_i \circ H \phi'' \circ H |DH|^2 + u_i \circ H \phi' \circ H \Delta H dx = \int_{\Omega \cap C_i} f(x, u_i \circ H) \phi \circ H dx.$$

Utilizando la fórmula de coarea, esto puede ser reescrito como

$$- \int_{I_i} A_i u_i \phi'' + B_i u_i \phi' dh = \int_{I_i} F_i(h, u_i) \phi dh$$

donde

$$B_i(h) = \int_{\mathcal{L}_i(h)} \frac{\Delta H}{|DH|} dl.$$

Ahora bien, para $i \in \mathcal{I}_\pm$, la normal unitaria exterior a $\mathcal{L}_i(h) = \partial \mathcal{D}_i(h)$ está dada por $\mp \frac{DH}{|DH|}$, así que

$$A_i(h) = \mp \int_{\partial \mathcal{D}_i(h)} \frac{\partial H}{\partial n} dl = \mp \int_{\mathcal{D}_i(h)} \Delta H dx$$

De donde se sigue que $A_i(h) = O(|\mathcal{D}_i(h)|) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \bar{h}_i = H(x_i)$.

Por otro lado, para cada $[h_-, h_+] \subset H(C_i)$, de la fórmula de coarea se tiene

$$\int_{h_-}^{h_+} B_i(h) dh = \int_{\mathcal{D}_i(h_+) \setminus \mathcal{D}_i(h_-)} \Delta H dx = \mp (A_i(h_+) - A_i(h_-)).$$

Notando que $A_i(\bar{h}_i) = 0$, se obtiene $B_i \in L^1(J_i)$ y $A_i' = B_i$ en $H(C_i)$.

Volviendo a u_i , esta última identidad implica que

$$- \int_{I_i} u_i (A_i \phi')' dh = \int_{I_i} F_i(h, u_i) \phi dh \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I_i)$$

Y entonces, dado que A_i es de clase C^1 y positiva en I_i , se sigue que $u_i \in C^2(I_i)$ y resuelve

$$(A_i u_i')' + F_i(h, u_i) = 0 \quad \text{en } I_i. \tag{3.1}$$

Para establecer que $u_i \in C^1(\bar{I}_i)$, consideramos un intervalo $[h_-, h_+] \subset I_i$ cualquiera e integramos (3.1) para encontrar que

$$A_i(h_+) u_i'(h_+) - A_i(h_-) u_i'(h_-) = - \int_{\mathcal{D}_i(h_+) \setminus \mathcal{D}_i(h_-)} f(x, u_i \circ H) dx.$$

Ahora bien, dado que $i \in \mathcal{J}$, se tiene que A_i es estrictamente positiva en \bar{I}_i , y entonces, dado que u_i es continuo y acotado en I_i , el lado derecho de la identidad anterior se mantiene acotado, y es de hecho convergente, cuando $h \rightarrow \hat{h} \in \partial I_i$. Así, vemos que u_i tiene una extensión C^1 única a \bar{I}_i .

Para $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ el mismo argumento usado antes sirve para establecer la regularidad C^1 hasta el borde $h = 0$. Sin embargo, aunque u_i se mantiene acotado cuando $h \rightarrow \bar{h}_i$, la función A_i se anula en dicho borde, así que no es posible deducir de (3.1) únicamente si acaso u'_i converge cuando $h \rightarrow \bar{h}_i$. Para sobrellevar esta dificultad, fijamos $i \in \mathcal{I}_\pm$, $h \in I_i$ y tomamos un $\phi \in C^\infty(\bar{I}_i)$ tal que $\phi'(h) = \phi'(\bar{h}_i) = \phi(\bar{h}_i) = 0$ y $\phi'(h) = 1$. Usando integración por partes deducimos de (1) que

$$-\int_{\partial \mathcal{D}_i(h)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} dl - \int_{\mathcal{D}_i(h)} u^\varepsilon \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{\mathcal{D}_i(h)} f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \phi \circ H dx$$

Luego, en virtud del Teorema de Green, podemos reescribir la primera integral como

$$-\int_{\partial \mathcal{D}_i(h)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} dl = -\int_{\mathcal{D}_i(h)} \Delta u^\varepsilon dx = \int_{\mathcal{D}_i(h)} f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) dx,$$

y así, tomando $\varepsilon_j \rightarrow 0$, obtenemos

$$\int_{\mathcal{D}_i(h)} f(x, u_i \circ H) dx \pm \int_{\bar{h}_i}^h u_i (A_i \phi')' dh = \mp \int_{\mathcal{D}_i(h)} f(x, u_i \circ H) \phi \circ H dx.$$

Usando integración por partes en la segunda integral y recordando (3.1), la identidad anterior se puede escribir como

$$A_i(h) u'_i(h) = \pm \int_{\mathcal{D}_i(h)} f(x, u_i \circ H) dx.$$

Así, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, concluimos que $u_i \in C^1(\bar{I}_i)$, con

$$\Delta H(x_i) u'_i(\bar{h}_i) + f(x_i, u_i(\bar{h}_i)) = 0.$$

En particular tenemos que u_i es uniformemente continuo hasta el punto crítico x_i , un hecho que será relevante para estudiar la convergencia de u^ε en dicho punto.

Para deducir las condiciones de borde en (5) y (6) consideramos sólo el caso $i \in \mathcal{I}_- \cap \mathcal{J}$, pues el resto se puede estudiar de manera completamente análoga.

Sea $\phi \in C^\infty(\bar{I}_i)$ tal que $\phi(h_i) = \phi(0) = 0$. Usando integración por partes tenemos que

$$\int_{\partial(\Omega \cap \mathcal{C}_i)} u^\varepsilon \phi' \circ H \frac{\partial H}{\partial n} dl - \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} u^\varepsilon \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} f^\varepsilon(x, u^\varepsilon) \phi \circ H dx$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\Omega \cap \mathcal{C}_i)} u^\varepsilon \phi' \circ H \frac{\partial H}{\partial n} dl &= \phi'(0) \int_{\partial \mathcal{C}_i} u^\varepsilon |DH| dl - \phi'(h_i) \int_{\mathcal{L}_i(h_i)} g_i^\varepsilon |DH| dl \\ &= \phi'(0) \sum_{e \in \partial \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e^\varepsilon(t, 0) dt - \phi'(h_i) \int_0^{T_i} v_i^\varepsilon(t, 0) dt \end{aligned}$$

Así que, tomando $\varepsilon_j \rightarrow 0$ y aludiendo a los Teoremas 0.4 y 0.7 obtenemos

$$\phi'(0) \sum_{e \subset \partial \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e(t, 0) dt - \phi'(h_i) \int_0^{T_i} v_i(t, 0) dt - \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} u_i \circ H \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} f(x, u_i \circ H) \phi \circ H dx$$

Ahora bien, la tercera integral en el lado izquierdo puede escribirse como

$$\int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} u_i \circ H \Delta(\phi \circ H) dx = \int_{h_i}^0 u_i (A_i \phi')' dh = A_i u_i \phi' \Big|_{h_i}^0 + \int_{h_i}^0 (A_i u_i')' \phi dh$$

Así, la integral en el lado derecho se cancela gracias a (3.1), y puesto que $\phi'(0)$ y $\phi'(h_i)$ son arbitrarios, deducimos de los Teoremas 0.5 y 0.8, que

$$A_i(0)u_i(0) = \sum_{e \subset \partial \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} v_e(t, 0) dt = \sum_{e \subset \partial \mathcal{C}_i} T_e K_i \quad \text{y} \quad A_i(h_i)u_i(h_i) = \int_0^{T_i} v_i(t, 0) dt = T_i k_i$$

Pero $A_i(0) = \int_{\mathcal{L}_i(0)} |DH| dl = \sum_{e \subset \partial \mathcal{C}_i} \int_0^{T_e} dt = \sum_{e \subset \partial \mathcal{C}_i} T_e$, y análogamente $A_i(h_i) = T_i$, así que concluimos que $u_i(0) = K_i$ y $u_i(h_i) = k_i$, como se quería.

Finalmente establecemos la unicidad. Para esto, fijamos $i \in \mathcal{J}$ y definimos $w = u - v$, donde $u, v \in C^2(I_i) \cap C^1(\bar{I}_i)$ son dos soluciones de (5). Integrando (5) sobre I_i vemos que

$$\int_{I_i} A(w')^2 dh = \int_{I_i} [F_i(h, u) - F_i(h, v)] w dh. \quad (3.2)$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\int_{I_i} A(w')^2 dh = \int_{I_i} \int_{\mathcal{L}_i(h)} |DH(x)| w'(h)^2 dl dh = \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} |DH|^2 (w')^2 \circ H dx = \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} |D(w \circ H)|^2 dx$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{I_i} [F_i(h, u) - F_i(h, v)] w dh &= \int_{I_i} \int_{\mathcal{L}_i(h)} |DH|^{-1} [f(x, u(h)) - f(x, v(h))] w(h) dl dh \\ &= \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} \partial_r f(x, r(x)) w^2 \circ H dx, \end{aligned}$$

para algún $r(x) \in [u(H(x)), v(H(x))]$. Luego,

$$\int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} |D(w \circ H)|^2 - \partial_r f(x, 0) w^2 \circ H dx = \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} [\partial_r f(x, r(x)) - \partial_r f(x, 0)] w^2 \circ H dx$$

Pero $\max_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} \partial_r f(x, 0) = \lambda_i < \lambda(\Omega \cap \mathcal{C}_i)$, así que la desigualdad de Poincaré permite estimar

$$\int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} |D(w \circ H)|^2 - \partial_r f(x, 0) w^2 \circ H dx \geq \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda(\Omega \cap \mathcal{C}_i)}\right) \int_{\Omega \cap \mathcal{C}_i} |D(w \circ H)|^2 dx,$$

mientras que el hecho de que $\partial_r f(x, r) \leq \partial_r f(x, 0)$ para todo $x \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$ implica que

$$\int_{\Omega \cap C_i} [\partial_r f(x, r(x)) - \partial_r f(x, 0)] w^2 \circ H dx \leq 0,$$

y entonces $\int_{\Omega \cap C_i} |D(w \circ H)|^2 dx = 0$ así que $u = v$ en I_i .

La demostración para el caso en que $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ es completamente análoga, salvo que (3.2) debe ser deducida con mayor cuidado. En efecto, de (6) se tiene que

$$\int_{I_i} [F_i(h, u) - F_i(h, v)] w dh = -Aw'w \Big|_{\partial I_i} + \int_{I_i} A(w')^2 dh.$$

Ahora bien, aunque $w(\bar{h}_i)$ no necesariamente es cero (en contraste con el caso anterior), lo que sí sabemos es que $w'(h)$ se mantiene acotado cuando $h \rightarrow \bar{h}_i$, y también tenemos que $A_i(\bar{h}_i) = 0$, así que en cualquier caso $Aw'w \Big|_{\partial I_i} = 0$. Con esta observación el resto de la demostración se sigue igual que antes. \square

A continuación concluimos la demostración del Teorema 0.9 estableciendo la convergencia localmente uniforme de u^ε hasta el punto crítico x_i .

Lema 3.2 *Para cada $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ existe una vecindad $V \subset C_i$ de x_i tal que u^ε converge uniformemente en V .*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a lo ya demostrado, sabemos que u^ε converge localmente uniformemente en $V \setminus \{x_i\}$, para cada vecindad V de x_i . Consideramos entonces los límites

$$u^+ = \limsup^* u^{\varepsilon_j} \quad \text{and} \quad u^- = \liminf_* u^{\varepsilon_j},$$

en términos de los cuales la conclusión del lema se sigue si $u^+(x_i) = u^-(x_i)$.

Fijemos $i \in \mathcal{I}_-$ tal que $\Delta H(x_i) > 0$ y $\bar{h}_i = H(x_i) < 0$ (el resto de los casos son análogos). Dado que x_i es un punto crítico no degenerado, se sigue que $V_\delta = \{x \in C_i : H(x) < \bar{h}_i + \delta\}$ es una vecindad de x_i para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Fijamos ahora un $\delta_0 > 0$ tan pequeño que $[\bar{h}_i, \bar{h}_i + \delta_0) = H(V)$. Para cada $\delta \in (0, \delta_0)$ definimos $\phi^{j, \delta} \in C^\infty([\bar{h}_i, \bar{h}_i + \delta_0))$ como

$$\phi^{j, \delta}(h) = C(\delta + \bar{h}_i - h) + v(\bar{h}_i) + \max_{H(x)=\bar{h}_i+\delta} |u^{\varepsilon_j}(x) - u_i(\bar{h}_i + \delta)| + |u_i(\bar{h}_i + \delta) - u_i(\bar{h}_i)|,$$

donde C es una constante a ser escogida.

Notar que, por construcción, $\phi^{j, \delta}(H(x)) \geq u^{\varepsilon_j}(x)$ en ∂V_δ y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \phi^{j, \delta}(H(x)) = \phi^\delta(H(x)) := C(\delta + \bar{h}_i - H(x)) + u_i(\bar{h}_i) + |u_i(\bar{h}_i) - u_i(\bar{h}_i + \delta)|,$$

uniformemente en V_δ , para cada $\delta \in (0, \delta_0)$. Más aún, dado que u_i es uniformemente continuo, $\phi^\delta(\bar{h}_i) = u_i(\bar{h}_i) + o(1)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Así, si logramos establecer que $\phi^{j,\delta} \circ H \geq u^{\varepsilon_j}$ en \bar{V}_δ , se tendrá entonces que $\phi^\delta \circ H \geq u^+$ en \bar{V}_δ , de donde vemos, evaluando primero en x_i y tomando luego $\delta \rightarrow 0$, que $u^+(H(x_i)) \leq u_i(\bar{h}_i)$. Una construcción similar permitiría entonces establecer la desigualdad complementaria $u^-(H(x_i)) \geq u_i(\bar{h}_i)$, de donde el resultado se sigue.

Para establecer que $\phi^{j,\delta} \circ H \geq u^{\varepsilon_j}$ en \bar{V}_δ pretendemos utilizar el principio del máximo, por lo que basta probar que

$$-\Delta(\phi^{j,\delta} \circ H) + \varepsilon^{-1}b \cdot D(\phi^{j,\delta} \circ H) \geq f^{\varepsilon_j}(x, u^{\varepsilon_j}) \quad \text{en } V_\delta,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Ahora, $b \cdot D(\phi \circ H) = \phi' \circ Hb \cdot DH = 0$ y $\Delta(\phi \circ H) = \phi' \circ H\Delta H + \phi'' \circ H|DH|^2$, así que

$$-\Delta(\phi^{j,\delta} \circ H) + \varepsilon^{-1}b \cdot D(\phi^{j,\delta} \circ H) = C\Delta H,$$

y entonces, dado que $\Delta H(x_i) > 0$, se puede escoger $\delta_0 > 0$ tal que $\Delta H \geq \alpha$ en V_δ para algún $\alpha > 0$ y todo $\delta \in (0, \delta_0)$, y entonces, escogiendo C suficientemente grande el resultado se sigue. \square

Concluimos con la demostración de la convergencia hasta el borde $\mathcal{L}_j(h_j)$ cuando la condición de borde límite es constante en dicha región.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 0.10. Sea $j \in \mathcal{J}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $H \leq 0$ en C_j .

Definimos para cada $\lambda > 0$ la función

$$\phi_\lambda(h) = \lambda(e-1)(h-h_j) - e^{\lambda(h-h_j)} + 1.$$

Se verifica que $\phi_\lambda(h_j) = \phi_\lambda(h_j + \lambda^{-1}) = 0$. Además,

$$-\Delta(\phi_\lambda \circ H) + \varepsilon^{-1}b \cdot D(\phi_\lambda \circ H) = \lambda^2 e^{\lambda(H-h_j)} |DH|^2 + \lambda [e^{\lambda(H-h_j)} - e + 1] \Delta H$$

Luego, si denotamos $A = \mathcal{D}(h_j, h_j + \lambda^{-1})$, $m = \inf_A |DH|^2$ y $M = \sup_A |\Delta H|$, se tiene que

$$-\Delta(\phi_\lambda \circ H) + \varepsilon^{-1}b \cdot D(\phi_\lambda \circ H) \geq m\lambda^2 - 2M\lambda \quad \text{en } A,$$

y entonces, para $\lambda \geq \lambda_0$, con

$$\lambda_0 = \frac{M}{m} + \sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 + 1},$$

se tiene que $-\Delta(\phi_\lambda \circ H) + \varepsilon^{-1}b \cdot D(\phi_\lambda \circ H) \geq 1$ en A .

Se sigue que la función

$$v^{\varepsilon,\lambda}(x) = \|f^\varepsilon\|_\infty \phi_\lambda \circ H + \max\{|u^\varepsilon(x) - u_j(H(x))| : x \in \partial A\} + u_j(h_j) + |u_j(h_j + \lambda^{-1}) - u_j(h_j)|$$

satisface

$$-\Delta v^{\varepsilon, \lambda} + \varepsilon^{-1} b \cdot Dv^{\varepsilon, \lambda} \geq -\Delta u^\varepsilon + \varepsilon^{-1} b \cdot Du^\varepsilon \quad \text{en } A$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y $\varepsilon > 0$, y además por construcción $v^{\varepsilon, \lambda} \geq u^\varepsilon$ sobre ∂A , así que del principio del máximo tenemos que $u^\varepsilon \leq v^{\varepsilon, \lambda}$ en \overline{A} .

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene entonces que $u^+(x) \leq u_j(h_j) + |u_j(h_j) - u_j(h_j + \lambda^{-1})|$ para $x \in \mathcal{L}_j(h_j)$, y esto es válido para todo $\lambda \geq \lambda_0$, así que tomando $\lambda \rightarrow \infty$ y usando la continuidad de u_j concluimos que $u^+(x) \leq u_j(h_j)$ sobre $\mathcal{L}_j(h_j)$. La desigualdad complementaria se obtiene de manera análoga. \square

Capítulo 4

Aplicación a un Problema Periódico

En esta sección estudiamos el comportamiento asintótico de un problema de reacción-difusión estacionario, en el cual existe advección de magnitud grande, modelada por $\varepsilon^{-1}b \cdot Du^\varepsilon$. En este contexto el campo vectorial b describe un flujo periódico celular con potencial de velocidad $H(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, y el problema a estudiar se sitúa en el cilindro infinito $\Omega = (0, 2n) \times \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Más precisamente, suponemos que $f \in C^{1,\gamma}(\mathbb{R})$ es una no-linealidad de tipo KPP y u^ε es una solución del problema con condiciones de borde

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + \varepsilon^{-1}b \cdot Du^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{en } \Omega, \\ u^\varepsilon(x, y + 2) = u^\varepsilon(x, y) & \forall (x, y) \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \{0\} \times \mathbb{R} \\ u^\varepsilon = 1 & \text{sobre } \{2n\} \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

La finalidad de estudiar este problema es mostrar, por un lado, que gracias al Teorema 0.5 es posible encontrar las constantes límite sin necesidad de resolver el problema de la ecuación del calor asociado, sino que explotando la independencia de dichas constantes sobre la no linealidad de la ecuación. Por otro lado, este ejemplo nos permitirá verificar que la región de convergencia dada por el Teorema 0.4 es óptima, pues en este problema las funciones límite v_e son discontinuas en algunos de los puntos críticos de H , lo que impide que la convergencia uniforme pueda incluirlos.

Una aplicación estándar del principio del máximo y el Lema de Hopf permite mostrar que $0 < u^\varepsilon < 1$ en Ω , para todo $\varepsilon > 0$. Más aún, las estimaciones de Schauder muestran que $u^\varepsilon \in C^{3,\gamma}(\overline{\Omega})$, y entonces la regularidad y la cota en L^∞ para u^ε se satisfacen de acuerdo a lo que se ha estudiado.

Las celdas en este contexto son los cuadrados $C_{i,j} = (i-1, i) \times (j-1, j)$, con $i \in \{1, \dots, 2n\}$ y $j \in \mathbb{Z}$, y el valor propio principal de $-\Delta$ en cada uno de estos dominios es $2\pi^2$, por lo que las hipótesis adicionales $f'(0) < 2\pi^2$ y f cóncava son suficientes para garantizar la validez de los resultados obtenidos antes en este contexto. Notar que, aunque el dominio en este contexto

no es acotado, la periodicidad de este problema permite sobrellevar esta dificultad, pues para describir el comportamiento de u^ε basta estudiar lo que ocurre en una cantidad finita de celdas.

Para estudiar el comportamiento asintótico de u^ε al interior de las celdas, consideramos primero el problema en que f es reemplazada por la función nula, el cual sabemos, en virtud del Teorema 0.5, comparte las mismas propiedades que u^ε cerca del nivel crítico $\{H = 0\}$. Así, consideramos la solución v^ε del problema

$$\begin{cases} -\Delta v^\varepsilon + \varepsilon^{-1}b \cdot Dv^\varepsilon = 0 & \text{en } \Omega, \\ v^\varepsilon(x, y + 2) = v^\varepsilon(x, y) & \forall (x, y) \in \Omega, \\ v^\varepsilon = 0 & \text{sobre } \{0\} \times \mathbb{R} \\ v^\varepsilon = 1 & \text{sobre } \{2n\} \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2)$$

Se sigue del principio del máximo que (4.2) tiene una única solución $v^\varepsilon \in C^3(\overline{\Omega})$, incluso si reemplazamos n por cualquier otro entero positivo. En particular, si w^ε es la solución de (4.2) para $n = 1$, en virtud de la unicidad tenemos que v^ε puede ser descrita como

$$v^\varepsilon(x, y) = \frac{p}{2n} + \frac{1}{n}w^\varepsilon(x - p, y) \quad \text{para } (x, y) \in [p, p + 2] \times \mathbb{R}.$$

Ahora bien, en lo que concierne al comportamiento asintótico de w^ε , tenemos que para cada $(i, j) \in \mathcal{I}$ la solución de (6) está dada por $w_{(i,j)}(h) \equiv \tilde{K}_{(i,j)}$, donde $\tilde{K}_{(i,j)}$ es la constante dada por el Teorema 0.4. Así, w^ε (y por lo tanto también v^ε) converge localmente uniformemente hacia constantes en cada una de las celdas.

Por otro lado, utilizando que $H(x + p, y + q) = (-1)^{p+q}H(x, y)$ para $p, q \in \mathbb{Z}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos las relaciones de simetría $w^\varepsilon(2 - x, y) + w^\varepsilon(x, y) = 1$, $w^\varepsilon(x + 1, y + 1) = \frac{1}{2} + w^\varepsilon(x, y)$ y $w^\varepsilon(x, 1 - y) = w^\varepsilon(x, 1 + y)$. Así, tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ vemos que las constantes $\tilde{K}_{(i,j)}$ satisfacen $\tilde{K}_{(1,j)} + \tilde{K}_{(2,j)} = 1$, $\tilde{K}_{(2,j+1)} = \frac{1}{2} + \tilde{K}_{(1,j)}$ y $\tilde{K}_{(i,j)} = \tilde{K}_{(i,j')}$ para todo $j, j' \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2$. Esto a su vez implica que $\tilde{K}_{(1,j)} = \frac{1}{4}$ y $\tilde{K}_{(2,j)} = \frac{3}{4}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, y en consecuencia las constantes correspondientes a v^ε , denotadas por $K_{(i,j)}$, satisfacen

$$K_{(i,j)} = \frac{2i - 1}{4n} \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\}, j \in \mathbb{Z}$$

Ahora bien, dado que sabemos que u^ε y v^ε comparten el mismo comportamiento asintótico en el nivel crítico $\{H = 0\}$, esto implica que las constantes $K_{(i,j)}$ encontradas son las mismas que da el Teorema 0.5 para u^ε , y por lo tanto el comportamiento asintótico de u^ε en cada celda $C_{(i,j)}$ queda completamente determinado al resolver (6) con las constantes encontradas antes como condiciones de borde.

Como ya mencionamos, la familia $\{v_e\}_{e \in \mathcal{E}}$ dada por el Teorema 0.4 es la misma para ambos u^ε y v^ε , puesto que comparten las mismas condiciones de borde sobre $\partial\Omega$. Consecuentemente, para estudiar el comportamiento asintótico de u^ε cerca de $\{H = 0\}$, basta con estudiar el problema análogo para w^ε , el cual, dadas sus simetrías, es considerablemente más sencillo.

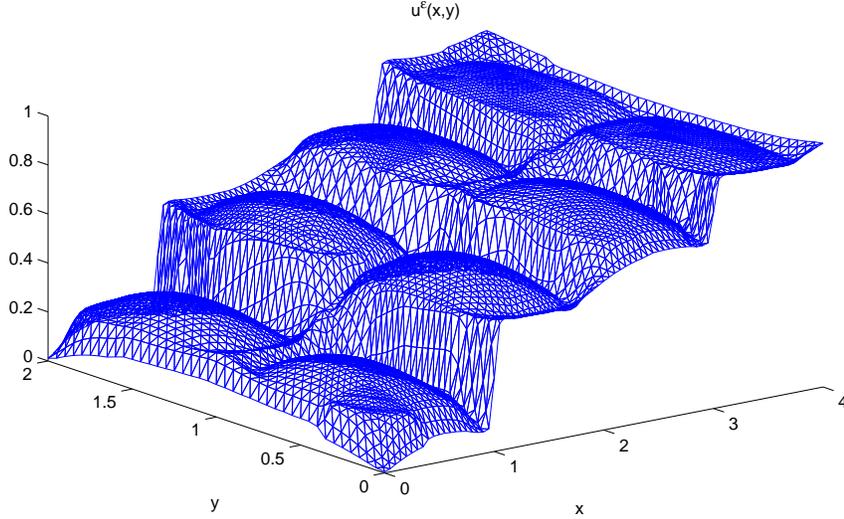


Figura 4.1: Solución numérica de (4.1) con $\varepsilon = 10^{-3}$, $f(u) = 10u(1 - u)$ y $n = 2$.

En términos de u^ε , la convergencia hacia constantes de w^ε al interior de cada celda permite predecir la formación de *boundary layers* de tamaño $\frac{1}{2n}$ entre cada par de celdas contiguas $C_{(i,j)}$ y $C_{(i+1,j)}$ (en el eje x), y de tamaño $\frac{1}{4n}$ sobre $\partial\Omega$, en $x = 0$ y $x = 2n$. Por otro lado, aunque cada par de celdas contiguas $C_{(i,j)}$ y $C_{(i,j+1)}$ (en el eje y) comparten el mismo valor de $K_{(i,j)}$, a continuación mostraremos que entre ellas también se producen *boundary layers*. Sin embargo, a diferencia del resto de las celdas, el tamaño de estos *boundary layers* varía a lo largo $e \in \mathcal{E}$.

Sea $\{w_e\}_{e \in \tilde{\mathcal{E}}}$ la familia dada por el Teorema 0.5 correspondiente a w^ε . Dada la simetría del problema, basta considerar los arcos sobre el borde de $[0, 1] \times [0, 1]$, que enumeramos por $\{1, 2, 3, 4\}$, donde 1 y 3 son los arcos izquierdo y derecho, y 2 y 4 son los arcos superior e inferior, respectivamente. Las relaciones de simetría de w^ε permiten ver que $w_2(t, \cdot)$ y $w_4(t, \cdot)$ son funciones pares que satisfacen $w_4(t, s) = \frac{1}{2} - w_2(t, s)$, mientras que w_1 y w_3 satisfacen $w_1(t, s) = \frac{1}{2} - w_3(t, s)$, con las condiciones de borde $w_1(t, 0) = 0$ y $w_3(t, 0) = \frac{1}{2}$. Más aún, el Teorema 0.5 dice que $\lim_{s \rightarrow \infty} w_i(t, s) = \frac{1}{4}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Ahora bien, dado que $w_4(0, \cdot) \geq 0$ y $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} w_4(0, s) = \frac{1}{4} > 0$, se sigue que $w_4(t, \cdot) > 0$, y por lo tanto $w_2(t, \cdot) < \frac{1}{2}$ para todo $t > 0$. En particular, vemos que $w_1(0, \cdot)$ y $w_3(0, \cdot)$ tienen una discontinuidad de salto en $s = 0$ de tamaño $1 - 2w_2(T_2, 0) > 0$, mientras que las condiciones de compatibilidad muestran que $w_2(0, \cdot)$ y $w_4(0, \cdot)$ son continuas en todas partes. Esto muestra de paso que efectivamente la convergencia localmente uniforme del Teorema 0.4 no puede, en general, incluir a los puntos críticos de H sobre $\{H = 0\}$.

Así, la restricción $w^\varepsilon \circ X_2(\cdot, 0)$ es localmente uniformemente a una función continua cuyo valor es cero en $t = 0$, por lo que necesariamente debe haber un *boundary layer* sobre este arco, cuyo tamaño es $\frac{1}{4}$ en $t = 0$ y decrece cerca de este punto. A partir de esto deducimos que, para el caso de u^ε , existen *boundary layers* entre cada par de celdas contiguas $C_{(i,j)}$ y $C_{(i,j+1)}$, a pesar de que las constantes correspondientes coincidan.

Capítulo 5

Ondas viajeras en Fisher no Local, Problemas Abiertos

El objetivo de este capítulo es describir varios problemas abiertos relacionados con la ecuación de Fisher no local

$$u_t - \Delta u = \mu u(1 - \phi * u), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.1)$$

donde el núcleo ϕ es una función no negativa integrable y tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = 1$.

La ecuación (5.1) es una extensión de la ecuación de Fisher clásica, que toma la forma

$$u_t - \Delta u = \mu u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (5.2)$$

Es sabido que las únicas soluciones estacionarias, acotadas y no negativas de esta ecuación son los estados homogéneos $u \equiv 0$ y $u \equiv 1$, y que para $c \geq 2\sqrt{\mu}$ la ecuación (5.2) admite soluciones tipo ondas viajeras de la forma $u(t, x) = U(x - ct)$, con condiciones de borde $U(-\infty) = 1$, $U(+\infty) = 0$ y un perfil $U(x)$ estrictamente decreciente (ver Aronson [1]).

Numerosos resultados anteriores indican que, cuando μ es suficientemente pequeño, las soluciones de (5.1) se comportan cualitativamente de la misma manera que las de (5.2). Adicionalmente, estudios numéricos sugieren que cuando el valor de μ crece, si bien las soluciones tipo ondas viajeras persisten, su monotonía se pierde, dando origen a soluciones que conectan el estado $u \equiv 0$ con un estado periódico distinto de $u \equiv 1$. En esta dirección, Perthame y Genieys [11] estudian el comportamiento de las soluciones de (5.1) en el límite $\mu \rightarrow \infty$ (con un escalamiento adecuado en la variable temporal), encontrando evidencia de concentración en masas de Dirac para ciertos núcleos ϕ , cuya transformada de Fourier, $\hat{\phi}$, cambia de signo.

Berestycki, Nadin, Perthame y Ryzhik [3] establecen rigurosamente la no existencia de soluciones estacionarias no triviales, así como la existencia de soluciones de tipo ondas viajeras y algunas de sus propiedades. Las hipótesis adicionales requeridas sobre el núcleo son que

$\phi(0) > 0$, $\phi' \in C_b(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} x^2 \phi(x) dx < \infty$. Bajo estas condiciones, se tiene el siguiente teorema, que establece un paralelo entre la trivialidad de las soluciones estacionarias de (5.1) y (5.2):

Teorema 5.1 (Berestycki-Nadin-Perthame-Ryzhik, 2009) *Para todo ϕ existe $\mu_0 > 0$ tal que, para $0 < \mu \leq \mu_0$, las únicas soluciones estacionarias, acotadas y no negativas de (5.1) son $u \equiv 0$ y $u \equiv 1$.*

Más aún, si $\hat{\phi} > 0$ en \mathbb{R}^d , entonces lo anterior vale para todo $\mu > 0$.

En cuanto a la existencia de ondas viajeras, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.2 (Berestycki-Nadin-Perthame-Ryzhik, 2009) *Para cada $c \geq c^*(\mu) = 2\sqrt{\mu}$ existe $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$\begin{cases} u'' + cu' + \mu u(1 - \phi * u) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \\ \liminf_{x \rightarrow -\infty} u(x) > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Además, para cada ϕ existe un $\mu_0 > 0$ tal que, para $0 < \mu \leq \mu_0$, la solución de (5.3) satisface $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$.

Más aún, si $\hat{\phi} > 0$ entonces lo anterior vale para todo $\mu > 0$.

La condición de borde débil $\liminf_{x \rightarrow -\infty} u(x) > 0$ es necesaria puesto que la evidencia numérica presentada por Nadin, Perthame y Tang [9] sugiere que existen soluciones que no convergen a 1 sino que se comportan como una perturbación periódica de dicho estado homogéneo.

En esta dirección, también en [3] se muestra que, en efecto, bajo ciertas condiciones las soluciones de (5.3) no pueden ser monótonas y simultáneamente satisfacer $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$:

Teorema 5.3 (Berestycki-Nadin-Perthame-Ryzhik, 2009) *Si $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \phi(x) dx < \infty$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existe $\bar{c}(\mu)$ tal que, para $c < \bar{c}(\mu)$, las soluciones de (5.3) no pueden satisfacer $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ y ser al mismo tiempo monótonas en algún intervalo $(-\infty, -R)$.*

Esto quiere decir que la monotonía de la onda viajera está íntimamente relacionada con la rapidez con que se mueve. De hecho, Fang y Zhao [5] prueban que la recíproca también es cierta:

Teorema 5.4 (Fang-Zhao, 2011) *Para cada ϕ tal que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \phi(x) dx < \infty$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe una función $\bar{c} : [\mu_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que (5.3) admite una solución monótona decreciente $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ con $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ si y sólo si $c \geq \max\{\bar{c}(\mu), c^*(\mu)\}$.*

La función \bar{c} en este teorema está dada implícitamente como la inversa de la función $c \geq 0 \mapsto \bar{\mu}(c) = \sup_{s>0} \frac{s(c+s)}{\Phi(s)}$, con $\Phi(s) = \int e^{-sx} \phi(x) dx$. Se tiene que \bar{c} es cóncava, Lipschitz continua y asintóticamente lineal cuando $\mu \rightarrow \infty$.

Con estos resultados se tiene un cuadro parcialmente completo de las soluciones de (5.3),

quedando abierto el problema de describir comportamiento de las ondas viajeras en la región del espacio de parámetros $c^*(\mu) \leq c < \bar{c}(\mu)$.

Por ejemplo, cuando $\hat{\phi} > 0$, sabemos que existen ondas viajeras tales que $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$, pero por el teorema anterior, si $c^*(\mu) \leq c < \bar{c}(\mu)$, salvo la falta de monotonía, el comportamiento asintótico de $u(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$ es desconocido.

Aún más drástico es el caso cuando $\hat{\phi}$ cambia de signo, pues allí se desconoce si acaso las soluciones de (5.3) satisfacen siquiera $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$ cuando μ es grande y $c^*(\mu) \leq c < \bar{c}(\mu)$.

Esto último plantea la pregunta de si acaso existe un tercer umbral $c^{**}(\mu) < \bar{c}(\mu)$ tal que, cuando $\hat{\phi}$ cambia de signo, y $c^{**}(\mu) < c < \bar{c}(\mu)$, sea posible al menos garantizar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$, aún cuando en esta región es imposible que u sea monótona. Un hipotético umbral c^{**} de esta forma tendría, por fuerza, que satisfacer $c^{**} \equiv c^*$ cuando $\hat{\phi} > 0$.

El programa propuesto para explorar estas preguntas consiste en estudiar, en analogía con lo hecho por Perthame y Génieys [11], el comportamiento asintótico de $u = u(\mu, c)$ cuando se recorre el espacio de parámetros (μ, c) en la región $c^*(\mu) < c < \bar{c}(\mu)$ y se toma $\mu \rightarrow \infty$.

Más precisamente, se propone estudiar el comportamiento asintótico, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de las soluciones u_ε de la ecuación

$$u_\varepsilon'' + c(\varepsilon)u_\varepsilon' + \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(1 - \phi * u_\varepsilon) = 0$$

donde $c(\varepsilon)$ satisface $2 \leq \varepsilon c(\varepsilon) \leq \varepsilon \bar{c}(\varepsilon^{-2})$.

Una forma de estudiar esta ecuación es considerar la función $w_\varepsilon(x) = \varepsilon \log u_\varepsilon(x)$, que resuelve la ecuación

$$\varepsilon w_\varepsilon'' + |w_\varepsilon'|^2 + \varepsilon c(\varepsilon)w_\varepsilon' + 1 - \phi * u_\varepsilon = 0.$$

Se conjetura que, en este régimen, un fenómeno de concentración en masas de Dirac similar al observado en [11] podría ocurrir si el crecimiento de $c(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es suficientemente lento.

Conclusión

Además de la unificación de los principales resultados de convergencia de Ishii y Souganidis [7] con los de Novikov, Papanicolaou y Ryzhik [10] en un cuadro común, las demostraciones presentadas en este trabajo son significativamente más simples, siendo esenciales en este respecto las técnicas de la teoría de soluciones viscosas de ecuaciones elípticas, junto a los resultados de Berestycki y Hamel [2].

En cuanto a la extensión de los resultados obtenidos en esta memoria a ecuaciones que involucren un operador elíptico general como el de Ishii y Souganidis [7], es de esperar que, con los argumentos utilizados por dichos autores, la convergencia al interior de las celdas siga siendo cierta, con las modificaciones correspondientes al problema homogeneizado. Por otro lado, también es de esperar que la convergencia sobre los bordes $\mathcal{L}_j(h_j)$ y el estudio del problema de la ecuación del calor sobre el grafo pueda ser demostrada con los argumentos presentados aquí, si el operador se supone uniformemente elíptico en estas regiones. Por otro lado, aún cuando es posible recuperar la convergencia uniforme hasta las porciones de la frontera $\mathcal{L}_j(h_j)$ cuando la condición de borde límite es constante, no se ha podido establecer si acaso lo mismo vale sobre el grafo. Es de esperar que un resultado de este tipo sea cierto, pero la demostración es un problema abierto.

Novikov, Papanicolaou y Ryzhik [10] proveen numerosas estimaciones sobre la tasa de convergencia de u^ε , siendo particularmente interesantes las cotas sobre la norma H^1 de las sucesivas aproximaciones construidas, y las cotas sobre la oscilación de u^ε en las celdas. Por esta razón, aún cuando, al menos cualitativamente, aquí se establece un paralelo con estos resultados, y en un contexto más general, semi-lineal, con estimaciones uniformes en lugar de H^1 , la reducción en la complejidad de los argumentos tiene como consecuencia la pérdida de información cuantitativa que sí es encontrada por estos autores. La obtención de dicha información en este contexto es un problema abierto.

Finalmente, en la presentación de la ecuación de Fisher no local sólo se describe el estado actual de la investigación, junto con posibles formas de abordar los problemas abiertos encontrados. Se espera que las técnicas empleadas por Perthame y Génieys [11] puedan dar luz sobre el comportamiento asintótico del problema singularmente perturbado asociado. Dichos autores estudian el problema de evolución en un dominio periódico, siendo una de las principales dificultades que, dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede o no exhibir

concentración en masas de Dirac. En el contexto del problema propuesto en este trabajo, las condiciones iniciales no juegan ningún rol y por lo tanto es de esperar que los resultados que se puedan obtener en esta dirección sean más conclusivos. No obstante lo anterior, la falta de periodicidad en este contexto impide realizar un paralelo directo entre ambos problemas, lo que plantea la necesidad de utilizar una estrategia distinta para estudiar la convergencia.

Bibliografía

- [1] Donald G Aronson and Hans F Weinberger. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Advances in Mathematics*, 30(1):33–76, 1978.
- [2] Henri Berestycki and François Hamel. Gradient estimates for elliptic regularizations of semilinear parabolic and degenerate elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 30:139–156, 2005.
- [3] Henri Berestycki, Grégoire Nadin, Benoit Perthame, and Lenya Ryzhik. The non-local fisher–kpp equation: travelling waves and steady states. *Nonlinearity*, 22(12):2813, 2009.
- [4] Michael Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc*, 27(1):1–67, 1992.
- [5] Jian Fang and Xiao-Qiang Zhao. Monotone wavefronts of the nonlocal fisherkpp equation. *Nonlinearity*, 24(11):3043–3054, 2011.
- [6] Mark Freidlin and Matthias Weber. Random perturbations of nonlinear oscillators. *The Annals of Probability*, 26(3):925–967, 1998.
- [7] Hitoshi Ishii and Panagiotis Souganidis. A pde approach to small stochastic perturbations of hamiltonian flows. *Journal of Differential Equations*, 252(2):1748 – 1775, 2012.
- [8] Gary Lieberman. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific, 1996.
- [9] Grégoire Nadin, Benoit Perthame, and Min Tang. Can a traveling wave connect two unstable states? the case of the nonlocal fisher equation. *Comptes Rendus Mathématique*, 349(9):553–557, 2011.
- [10] Alexei Novikov, George Papanicolaou, and Lenya Ryzhik. Boundary layers for cellular flows at high pécelet numbers. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(7):867–922, 2005.
- [11] Benoit Perthame and Stephane Génieys. Concentration in the nonlocal fisher equation: the hamilton-jacobi limit. *Math. Model. Nat. Phenom*, 2(4):135–151, 2007.
- [12] Jiri Rákosník. Some remarks to anisotropic sobolev spaces, ii. *Beiträge zur Analysis*,

15:127–140, 1981.

- [13] Richard Sowers. A boundary layer theory for diffusively perturbed transport around a heteroclinic cycle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(1):30–84, 2005.