UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES FRACCIONARIAS NO LINEALES EN $\mathbb{R}^N$

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

IGNACIO ANDRÉS VERGARA SOTO

PROFESOR GUÍA:
PATRICIO FELMER AICHELE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JUAN DÁVILA BONCZOS
ALEXANDER QUAAS BERGER

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto FONDECYT 1110291

SANTIAGO DE CHILE
2013

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: IGNACIO VERGARA
FECHA: 29/07/2013
PROF. GUÍA: PATRICIO FELMER

ECUACIONES FRACCIONARIAS NO LINEALES EN $\mathbb{R}^N$

En la presente memoria se estudia la ecuación

$$(I-\Delta)^\alpha u = f(x,u) \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

con $\alpha \in (0,1)$. Se establece la existencia de una solución débil mediante un resultado del tipo paso de la montaña y usando las propiedades del kernel del operador $(I-\Delta)^{-\alpha}$ se estudia la regularidad de dicha solución. Mediante un argumento de comparación junto con uno de punto fijo se determina que esta solución posee decaimiento exponencial. También se establece la existencia de infinitas soluciones cuando $f(x,u) = |u|^{p-1}u$ utilizando las propiedades del género de Krasnoselskii y finalmente se demuestra una identidad del tipo Pohozaev con la cual se obtiene la no existencia de soluciones positivas en los casos crítico y supercrítico.

Se analizan también las principales propiedades de los operadores $(-\Delta)^\alpha$ y $(I-\Delta)^\alpha$ junto con los núcleos asociados y su relación con el laplaciano.

Finalmente se entrega una breve discusión con respecto a la ecuación

$$(-\Delta)^\alpha u + u = f(x,u) \text{ en } \mathbb{R}^N$$

y se plantea el problema de estudiar el límite cuando $\alpha \to 1^-$. Se discute la posible utilidad de la supersolución usada en el argumento de comparación que determina el decaimiento de la solución.

"Las carreras con uno mismo son
la únicas que vale la pena correr."
- Jaime San Martín

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, los principales responsables de que yo haya sido un estudiante feliz durante todos estos años.

A mi profesor guía Patricio Felmer, por su valioso papel en el desarrollo de esta memoria y por su actitud motivadora, que me permitió disfrutar considerablemente este proceso.

A Pierre Paul Romagnoli, mi profesor en la escuela de verano y quien me inspiró a estudiar esta carrera. Agradezco también a todos los excelentes profesores que tuve a lo largo de estos seis años: Juan Álvarez, Andrés Meza, Rodolfo Carvajal, Jorge San Martín, René Garreaud, Manuel del Pino, Patricio Cordero, Roberto Cominetti, Pablo Dartnell, Jaime San Martín, Marcos Kiwi, Juan Dávila y Fethi Mahmoudi.

A mis compañeros, por todas esas largas horas de estudio, de matraca, handwaving y de "estar en na".

A los profesores que me dieron la oportunidad de desarrollar mis habilidades docentes participando como profesor auxiliar en sus cursos.

Agradezco también a los funcionarios del DIM, mi segunda casa.

A Jorge Llaña y su local *Hare Burger*, mi principal proveedor de almuerzo desde el primer día en Beauchef.

A mi familia, los clásicos, los de siempre.

Finalmente agradezco a mis amigos, por todo.

Tabla de contenido

Capítulo 1

Introducción

La presente memoria está dedicada al estudio de una ecuación fraccionaria no lineal, la cual involucra un operador no local. Esta ecuación será abordada principalmente desde el punto de vista de su formulación variacional, haciendo uso de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^N$. La búsqueda de soluciones positivas del tipo min-max juega un rol fundamental, así como las soluciones radiales.

La ecuación diferencial

$$-\Delta u + u = f(x, u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

ha generado mucho interés y ha sido profundamente estudiada a lo largo de los últimos 30 años. Ver por ejemplo [1]. En esta memoria se estudia una generalización de esta ecuación, reemplazando el laplaciano por un operador no local. Específicamente se considera una potencia de éste, cuya definición más simple es vía transformada de Fourier. Una posibilidad es considerar la ecuación

$$(-\Delta)^\alpha u + u = f(x, u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Felmer, Quaas y Tan [6] determinaron la existencia de una solución de esta ecuación mediante un resultado del tipo paso de la montaña y analizaron sus propiedades más importantes cuando la función f se comporta, en cierto sentido, como u^p con p subcrítico.

En esta memoria se estudia la ecuación

$$(I - \Delta)^\alpha u = f(x, u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

donde I representa la función identidad. Este problema se origina al buscar la onda estacionaria $e^{it}u(x)$ de la ecuación de Schrödinger-Klein-Gordon

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (I - \Delta)^\alpha \psi - \psi - f(x, \psi) \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

Tan, Wang y Yang [17] estudiaron la ecuación (1.2) con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $f = |u|^{p-1}u$ usando un método propuesto por Caffarelli y Silvestre [4], en el cual se reemplaza el problema no local por el siguiente problema diferencial

$$\begin{cases} -\Delta v(x,y) + v(x,y) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = f(v(x,0)), & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.3}$$

En dicho artículo se establece la existencia de una solución positiva, de clase C^2 y con decaimiento exponencial. Se demuestra también la existencia de infinitas soluciones débiles, así como un resultado de no existencia para $p \geq \frac{N+1}{N-1}$.

En el presente trabajo se analiza el caso general $\alpha \in (0,1)$ considerando ciertas hipótesis sobre f, similares a las de [6] y siguiendo un argumento muy similar que no hace uso del problema local (1.3). Específicamente se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.1 *La ecuación (1.2) posee una solución positiva, Hölder-continua y que decae exponencialmente. Si $f(s) = s^p_+$, entonces la solución es además radialmente simétrica y decreciente a partir de cierto punto.*

Para la existencia no es posible aplicar el teorema del paso de la montaña directamente ya que en el caso en que f depende de x no se tienen las propiedades de compacidad adecuadas. Por esta razón se debe utilizar un argumento de comparación con el caso autónomo ideado por Rabinowitz [13]. La regularidad se obtiene utilizando las propiedades del kernel del operador $(I-\Delta)^{-\alpha}$ y el decaimiento mediante un argumento de comparación con una supersolución. La forma de obtener esta supersolución es distinta a la de [6] ya que la convolución del kernel con una cierta función característica no posee las propiedades deseadas. Es por esto que se debe recurrir a un argumento de punto fijo en un espacio de funciones con decaimiento exponencial. La simetría fue demostrada por Ma y Chen [9]. La principal diferencia con la ecuación (1.1) es el decaimiento ya que la solución encontrada en [6] decae como $|x|^{-N-2\alpha}$.

Se demuestra también la existencia de infinitas soluciones.

Teorema 1.2 *Si $N \geq 2$ y $f(s) = |s|^{p-1}s$ con $p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$, entonces la ecuación (1.2) posee infinitas soluciones Hölder-continuas y radialmente simétricas.*

Este resultado se obtiene de una manera muy similar a [17] y hace uso del género de Krasnoselskii. Como el problema está definido en $\mathbb{R}^N$, se debe restringir el estudio a las funciones radiales para ganar compacidad.

La no existencia de soluciones de la ecuación (1.1) fue analizada por Ros-Oton y Serra [14], demostrando una identidad del tipo Pohozaev, pero en el caso de dominios acotados, donde la principal dificultad radica en extender cierta función a la frontera del dominio. En esta memoria se sigue un procedimiento completamente distinto, demostrando primero una identidad en el sentido de las distribuciones, para luego obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.3 *Si $p \geq \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$, $f(s) = |s|^{p-1}s$ y $q \geq 1$, entonces la ecuación (1.2) no posee una solución positiva en $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ y que se anule en el infinito.*

1.1. Organización

En el capítulo 2 se dan las principales definiciones y resultados básicos concernientes a los espacios y operadores utilizados en el estudio de las ecuaciones (1.1) y (1.2). El capítulo 3 está dedicado a la ecuación (1.2). En éste se demuestran los teoremas 1.1, 1.2 y 1.3. El capítulo 4 pretende profundizar un poco el estudio de la ecuación (1.1) para $f = u^p$, y la transición cuando $\alpha \to 1^-$. Finalmente en el capítulo 5 se describen las conclusiones y el trabajo a realizar a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Definiciones básicas

Los operadores fraccionarios estudiados en esta memoria se definen por medio de su transformada de Fourier. Para evitar ambigüedades, en todo lo que sigue utilizaremos la siguiente definición.

Definición 2.1 *Dada $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, definimos su transformada de Fourier*

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} v(x) e^{-i\xi\cdot x} dx.$$

Esta definición se extiende de la manera usual a $L^2(\mathbb{R}^N)$ y al espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)'$ de distribuciones temperadas.

Definición 2.2 *Para $\alpha \geq 0$ y $p \geq 1$ se define el espacio de Sobolev*

$$\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\hat{u}] \in L^p(\mathbb{R}^N)\},$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\hat{u}] \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposición 2.1 *Para todo $\alpha \geq 0$ y todo $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach.*

Observación Si $p = 2$, $\mathcal{L}^2_\alpha(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} \, d\xi.$$

Este espacio se conoce como $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ y se puede caracterizar por

$$H^\alpha(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}.$$

Proposición 2.2 *([16]) Si $\beta \geq \alpha$, entonces $\mathcal{L}^p_\beta(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\|u\|_{p,\alpha} \leq \|u\|_{p,\beta} \qquad \forall u \in \mathcal{L}^p_\beta(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 2.1 *([16]) Si $p \in (1,\infty)$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathcal{L}^p_k(\mathbb{R}^N) = W^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Definición 2.3 *Definimos el espacio*

$$C^0(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : u \text{ es continua en } \mathbb{R}^N\},$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{C^0} = \|u\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)|.$$

Para $k \geq 1$ definimos inductivamente el espacio

$$C^k(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\mathbb{R}^N),\ \forall i \in \{1,...,N\} \right\},$$

con la norma

$$\|u\|_{C^k} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^{k-1}}.$$

Definición 2.4 *Para $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $\mu \in (0,1)$ se define la seminorma*

$$[u]_\mu = \sup_{x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\mu},$$

y el espacio

$$C^{0,\mu}(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N) : [u]_\mu < \infty\},$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{0,\mu} = \|u\|_\infty + [u]_\mu.$$

Para $k \geq 1$ y $\mu \in (0,1)$ definimos de manera inductiva

$$C^{k,\mu}(\mathbb{R}^N) = \{u \in C^k(\mathbb{R}^N) : [D^\beta u]_\mu < \infty \text{ para todo multiíndice } \beta,\ |\beta| = k\},$$

con la norma

$$\|u\|_{k,\mu} = \|u\|_\infty + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{C^{k-1,\mu}}.$$

En lo que sigue, para $\gamma > 0$, $\gamma \notin \mathbb{N}$, escribiremos $C^\gamma(\mathbb{R}^N)$ para referirnos al espacio $C^{k,\mu}(\mathbb{R}^N)$, donde $k = \max\{m \in \mathbb{N} : m < \gamma\}$ y $\mu = \gamma - k$.

Proposición 2.3 *Para todo $\gamma \geq 0$, $C^\gamma(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach.*

2.2. El operador $(I-\Delta)^{\alpha}$

El operador $(I-\Delta)^{\alpha}$ se define a través de su inverso $(I-\Delta)^{-\alpha}$, conocido como potencial de Bessel. Más adelante especificaremos el espacio apropiado para definirlo.

Definición 2.5 *Para $\alpha>0$ se define el kernel del potencial de Bessel*

$$G_{\alpha}(x)=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_0^{\infty}e^{-\pi|x|^2/t}e^{-t/4\pi}t^{(-N+\alpha)/2-1}dt, \tag{2.1}$$

donde

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

Proposición 2.4 *([16]) Para todo $\alpha>0$ se tiene que*

(i) $G_{\alpha}\in L^1(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$\int_{\mathbb{R}^N}G_{\alpha}(x)\,dx=1. \tag{2.2}$$

(ii) G_{α} *satisface*

$$\hat{G}_{\alpha}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.3}$$

(iii) $G_{\alpha}(x)=O(e^{-\frac{|x|}{2}})$ *cuando* $|x|\to\infty$.

Definición 2.6 *Sean $\alpha>0$ y $p\geq 1$. Para $u\in L^p(\mathbb{R}^N)$ se define*

$$(I-\Delta)^{-\alpha}u=G_{2\alpha}*u.$$

Usando (2.2) se demuestra que

$$\|(I-\Delta)^{-\alpha}u\|_p\leq\|u\|_p, \tag{2.4}$$

y a partir de (2.3) observamos que

$$\mathcal{F}((I-\Delta)^{-\alpha}u)(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-\alpha}\hat{u}(\xi).$$

Con todo lo anterior, resulta natural definir el operador $(I-\Delta)^{\alpha}$ en el espacio $\mathcal{L}^p_{2\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

Definición 2.7 *Sean $\alpha>0$ y $p\geq 1$. Para $u\in\mathcal{L}^p_{2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ se define de manera implícita*

$$\mathcal{F}((I-\Delta)^{\alpha}u)(\xi)=(1+|\xi|^2)^{\alpha}\hat{u}(\xi).$$

Proposición 2.5 *([16]) Sean $\alpha,\beta\geq 0$ y $p\geq 1$.*

(i) $(I-\Delta)^{\alpha}$ *es un isomorfismo continuo de* $\mathcal{L}^p_{\beta+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *en* $\mathcal{L}^p_{\beta}(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Si $\beta>0$, $(I-\Delta)^{\alpha}$ *es un isomorfismo continuo de* $C^{\beta+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *en* $C^{\beta}(\mathbb{R}^N)$.

2.3. El operador $(-\Delta)^{\alpha}$

Definición 2.8 *Para $\alpha \geq 0$ y $u \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ definimos $(-\Delta)^{\alpha}u$ de manera implícita*

$$\mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha}u)(\xi) = |\xi|^{2\alpha}\hat{u}(\xi).$$

Observación Bajo esta definición, se tiene

$$(-\Delta)^1 u = -\Delta u,$$

donde Δu denota el laplaciano de u.

Observación La condición $u \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ implica que tanto u como $(-\Delta)^{\alpha}u$ están en $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Observación Cuando u tiene suficiente regularidad, se puede demostrar (ver [11]) que, para $\alpha \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{\alpha}u(x) &= c(\alpha) PV \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2\alpha}} dy \\ &= -\frac{c(\alpha)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}} dy \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde

$$\delta(u)(x,y) = u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)$$

y

$$c(\alpha) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2\alpha}} d\zeta \right)^{-1}.$$

Proposición 2.6 *([11, p. 26])*

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \frac{c(\alpha)}{(1-\alpha)} = \frac{4N}{\omega_{N-1}} = \frac{4}{\nu_N}$$

donde

$$\omega_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

es el área de la esfera unitaria S^{N-1} y ν_N el volumen de la bola unitaria.

Proposición 2.7 *Para toda $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^N$, se tiene*

$$\lim_{\alpha \to 1^-} (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}} dy = \frac{\nu_N}{2} \Delta u(x).$$

Demostración. Sea $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}\, dy = \underbrace{\int_{B(0,1)^c} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}\, dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}\, dy}_{I_2} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}\, dy}_{I_3}$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}(1-\alpha)|I_1| &\leq (1-\alpha)\int\limits_{B(0,1)^c} \frac{|u(x+y)|+|u(x-y)|+2|u(x)|}{|y|^{N+1}}\,dy \\ &\leq (1-\alpha)\int\limits_{B(0,1)^c} \frac{4\|u\|_\infty}{|y|^{N+1}}\,dy \xrightarrow[\alpha\to 1^-]{} 0\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(1-\alpha)|I_2| \leq (1-\alpha)\int\limits_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{4\|u\|_\infty}{|\varepsilon|^{N+2}}\,dy \xrightarrow[\alpha\to 1^-]{} 0$$

Para calcular I_3 notemos que, como u es de clase C^2,

$$\begin{aligned}u(x+y) = u(x) + \nabla u(x)\cdot y + \frac{1}{2}y^t D^2u(x)y + o(|y|^2) \\ u(x-y) = u(x) - \nabla u(x)\cdot y + \frac{1}{2}y^t D^2u(x)y + o(|y|^2)\end{aligned}$$

Así

$$\delta(u)(x,y) = y^tD^2u(x)y + o(|y|^2) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)y_iy_j + o(|y|^2)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}I_3 &= \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \frac{\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)y_iy_j + o(|y|^2)}{|y|^{N+2\alpha}}\,dy \\ &= \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)r\omega_i r\omega_j + o(r^2)}{r^{N+2\alpha}} r^{N-1}\,d\omega dr \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)\int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{\omega_i\omega_j}{r^{2\alpha-1}}\,d\omega dr}_{I_4} + \underbrace{\int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\partial B(0,1)} o(r^{2-2\alpha-1})\,d\omega dr}_{I_5}\end{aligned}$$

Notemos que

$$I_4 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\int\limits_0^\varepsilon r^{1-2\alpha}\,dr \int\limits_{\partial B(0,1)} \omega_i^2\,d\omega = \frac{\omega_{N-1}}{N}\Delta u(x)\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}$$

y así

$$(1-\alpha)I_4 = \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x)\varepsilon^{2-2\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 1^-]{} \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x).$$

Ahora observemos que

$$I_5 = \omega_{N-1} \int_0^{\varepsilon} o(r^{2-2\alpha-1})\, dr.$$

Notando que $\forall c > 0,\ \exists \tilde{\varepsilon} > 0,\ \forall r < \tilde{\varepsilon}$,

$$\frac{|o(r^{2-2\alpha-1})|}{r^{2-2\alpha-1}} \leq c,$$

podemos tomar $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ y observar que

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{\varepsilon} cr^{2-2\alpha-1}\, dr \leq \int_0^{\varepsilon} o(r^{2-2\alpha-1})\, dr \leq \int_0^{\varepsilon} cr^{2-2\alpha-1}\, dr \\
\iff \quad & -c\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \leq \int_0^{\varepsilon} o(r^{2-2\alpha-1})\, dr \leq c\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \\
\iff \quad & -c\omega_{N-1}\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2} \leq (1-\alpha)I_5 \leq c\omega_{N-1}\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2}.
\end{aligned}$$

Juntando todo lo anterior,

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}dy &\leq \limsup_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)I_4 + \limsup_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)I_5 \\
&\leq \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x) + \lim_{\alpha\to 1^-}\ c\omega_{N-1}\frac{\varepsilon^{2-2\alpha}}{2} \\
&= \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x) + \frac{c\omega_{N-1}}{2}
\end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $c > 0$, concluimos que

$$\limsup_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}dy \leq \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x).$$

Repitiendo el argumento para el límite inferior, se tiene que

$$\liminf_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}dy \geq \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x).$$

Y por lo tanto

$$\lim_{\alpha\to 1^-}\ (1-\alpha)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\delta(u)(x,y)}{|y|^{N+2\alpha}}dy = \frac{\nu_N}{2}\Delta u(x).$$

□

Observación Las proposiciones 2.6 y 2.7 permiten concluir que, cuando u es suficientemente regular,

$$\lim_{\alpha\to 1^-}(-\Delta)^\alpha u(x) = -\Delta u(x).$$

La propiedad de la convolución

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

sugiere que se puede escribir el laplaciano fraccionario $(-\Delta)^\alpha u$ como la convolución con una cierta función (o distribución) T tal que $\hat{T} = |\xi|^{2\alpha}$, es decir, $(-\Delta)^\alpha u = T * u$. Por otro lado, la caracterización como integral singular (2.5) también es una especie de convolución con la función $|x|^{-N-2\alpha}$. Lo que sigue formaliza estas nociones. Para más detalles ver [7].

Definición 2.9 *Para $z\in\mathbb{C}$ con $Re(z) > -N$ se define la distribución f_z en $\mathbb{R}^N$,*

$$\langle f_z, \varphi\rangle = A(z)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^z\varphi(x)dx, \qquad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

donde

$$A(z) = \frac{\pi^{\frac{z+N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+N}{2}\right)}.$$

Se puede extender esta definición para $\mathrm{Re}(z)\leq -N$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\langle f_z,\varphi\rangle &= A(z)\int_{|x|>1}|x|^z\varphi(x)dx + \sum_{|\beta|\leq k} b(\beta,z)\langle\partial^\beta\delta_0,\varphi\rangle \\ &+ A(z)\int_{|x|<1}\left[\varphi(x) - \sum_{|\beta|\leq k}\frac{1}{\beta!}\partial^\beta\varphi(0)x^\beta\right]|x|^z dx\end{aligned}$$

donde $k\in\mathbb{N}$ es tal que $\mathrm{Re}(z) > -N-k-1$ y

$$b(\beta,z) = \frac{A(z)}{\beta!(|\beta|+z+N)}\int_{S^{N-1}}\theta^\beta d\theta$$

Cuando el denominador es 0, $b(\beta,z)$ se define por continuidad.

En la definición anterior $\beta = (\beta_1,...,\beta_N)$ representa un multiíndice y

$$\begin{aligned}\beta! &= \beta_1!\cdots\beta_N! \\ \theta^\beta &= \theta_1^{\beta_1}\cdots\theta_N^{\beta_N}.\end{aligned}$$

Teorema 2.2 *([7, p. 128]) Para todo $z\in\mathbb{C}$,*

$$\hat{f}_z = f_{-N-z}$$

Proposición 2.8 *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Si $\alpha \in (0,1)$,*

$$-\pi^\alpha \Gamma(-\alpha) c(\alpha) \langle f_{-N-2\alpha}, \varphi(x+\cdot)\rangle = (-\Delta)^\alpha \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Y para $\alpha = 1$,

$$\frac{4\pi}{\nu_N} \langle f_{-N-2}, \varphi(x+\cdot)\rangle = -\Delta\varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demostración. Para $z = -N - 2\alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, basta tomar $k = 1$. Con esto

$$\begin{aligned}\langle f_{-N-2\alpha}, \varphi\rangle &= \frac{1}{\pi^\alpha \Gamma(-\alpha)} \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{N+2\alpha}} dx \quad + \quad \frac{1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \frac{\omega_{N-1}}{-2\alpha}\varphi(0) \\ &\quad + \frac{1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{|x|<1} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \nabla\varphi(0)\cdot x\right] \frac{1}{|x|^{N+2\alpha}} dx.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\int\limits_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{N+2\alpha}} dx = \int_1^\infty \int\limits_{\partial B} \frac{r^{N-1}}{r^{N+2\alpha}} d\omega dr = \omega_{N-1} \frac{r^{-2\alpha}}{-2\alpha}\Big|_1^\infty = \frac{\omega_{N-1}}{2\alpha}$$

y además, para todo $a > 0$,

$$\int\limits_{|x|>a} \frac{\nabla\varphi(0)\cdot x}{|x|^{N+2\alpha}} dx = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle f_{-N-2\alpha}, \varphi\rangle &= \frac{1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - \nabla\varphi(0)\cdot x}{|x|^{N+2\alpha}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - \nabla\varphi(0)\cdot x}{|x|^{N+2\alpha}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{N+2\alpha}} dx \\ &= \frac{-1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} PV \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(0) - \varphi(x)}{|x|^{N+2\alpha}} dx \\ &= \frac{-1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{c(\alpha)} (-\Delta)^\alpha \varphi(0)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\langle f_{-N-2\alpha}, \varphi(x+\cdot)\rangle = \frac{-1}{\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)c(\alpha)} (-\Delta)^\alpha\varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Si $z = -N - 2$ tomamos $k = 2$. Primero notemos que

$$A(-N-2) = \frac{\pi^{-1}}{\Gamma(-1)} = 0$$

Por otro lado, si $|\beta| = 2$, se tiene

$$\lim_{z\to -N-2} \Gamma\left(\frac{z+N}{2}\right)(|\beta| + z + N) = -2$$

ya que

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\Gamma(z) = -1.$$

Entonces, si $\beta_j = 2$,

$$b(\beta, -N-2) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{S^{N-1}} \theta_j^2 d\theta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_{N-1}}{N} = -\frac{\nu_N}{4\pi}.$$

En todos los otros casos con $|\beta| \leq 2$, $b(\beta, -N-2) = 0$. Por lo tanto

$$\langle f_{-N-2}, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{-\nu_N}{4\pi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(0) = -\frac{\nu_N}{4\pi}\Delta\varphi(0)$$

y de la misma forma que antes

$$\langle f_{-N-2}, \varphi(x+\cdot)\rangle = -\frac{\nu_N}{4\pi}\Delta\varphi(x).$$

$\square$

Observación Lo anterior es consistente con el límite

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \pi^\alpha\Gamma(-\alpha)c(\alpha) = -\frac{4\pi}{\nu_N}.$$

Corolario 2.1 *Si definimos*

$$T = -\pi^\alpha\Gamma(-\alpha)c(\alpha)f_{-N-2\alpha}, \qquad \textit{para } \alpha \in (0,1)$$
$$T = \frac{4\pi}{\nu_N}f_{-N-2}, \qquad \textit{para } \alpha = 1,$$

entonces, para toda $u \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^N)$,

$$(-\Delta)^\alpha u = u * T.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\langle u * T, \varphi\rangle &= \langle u(x), \langle T(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle u, (-\Delta)^\alpha\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^\alpha\varphi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)|\xi|^{2\alpha}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^\alpha u(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \langle(-\Delta)^\alpha u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4. El kernel $\mathcal{K}_\alpha$

Definición 2.10 *Para $\alpha > 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N$ definimos el kernel $\mathcal{H}_\alpha$ de manera implícita*

$$e^{-t|\xi|^\alpha} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_\alpha(\cdot, t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\mathcal{H}_\alpha(x,t)\, d\xi$$

Proposición 2.9 *([2]) $\mathcal{H}_\alpha(\cdot, 1)$ es una función radial, continua y estrictamente positiva. Además se tiene la identidad*

$$\mathcal{H}_\alpha(x,t) = t^{-N/\alpha}\mathcal{H}_\alpha\left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}, 1\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall t > 0. \tag{2.6}$$

Teorema 2.3 *([2]) Para todo $\alpha > 0$*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N+\alpha}\mathcal{H}_\alpha(x,1) = \frac{2^{\alpha-1}\alpha}{\pi^{N/2+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Demostración. Usando el teorema de inversión de Fourier para funciones radiales [3, Cap II] se obtiene

$$\mathcal{H}_\alpha(x,1) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|x|^{N/2-1}} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} t^{N/2} J_{(N-2)/2}(|x|t)\, dt$$

donde J_ν representa la función de Bessel de primera especie de orden ν.
Escribiendo $r = |x|$ y haciendo un cambio de variable,

$$\begin{aligned} |x|^{N+\alpha}\mathcal{H}_\alpha(x,1) &= \frac{r^{N/2+\alpha+1}}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^\infty e^{-t^\alpha} t^{N/2} J_{(N-2)/2}(rt)\, dt \\ &= \frac{r^\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^\infty e^{-(t/r)^\alpha} t^{N/2} J_{(N-2)/2}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes y usando la identidad $\frac{d}{dt}(t^\nu J_\nu(t)) = t^\nu J_{\nu-1}(t)$,

$$\begin{aligned} |x|^{N+\alpha}\mathcal{H}_\alpha(x,1) &= \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^\infty e^{-(t/r)^\alpha} t^{N/2+\alpha-1} J_{N/2}(t)\, dt \\ &= \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re}\left[\int_0^\infty e^{-(t/r)^\alpha} t^{N/2+\alpha-1} H^{(1)}_{N/2}(t)\, dt\right] \end{aligned}$$

donde $H^{(1)}_\nu = J_\nu + iY_\nu$ representa la función de Bessel de tercera especie de orden ν. La última integral en $\mathbb{R}_+$ es igual a la integral en $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ con θ suficientemente pequeño, ya que la integral sobre el arco se va a 0. En efecto,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\theta e^{-(Re^{i\phi}/r)^\alpha} (Re^{i\phi})^{N/2+\alpha-1} H^{(1)}_{N/2}(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi}\, d\phi \right| \\ &\leq \int_0^\theta e^{-(R/r)^\alpha \cos(\alpha\phi)} R^{N/2+\alpha-1} \left| H^{(1)}_{N/2}(Re^{i\phi}) \right| R\, d\phi. \end{aligned}$$

Como $H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp(i(z + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}))$ para $|z|$ grande, podemos tomar $c > 0$ tal que para R suficientemente grande

$$\left| H_{N/2}^{(1)}(Re^{i\phi}) \right| \leq \frac{c}{\sqrt{R}} \left| e^{iRe^{i\phi}} \right| \leq \frac{c}{\sqrt{R}} e^{-R \operatorname{sen} \phi} \leq \frac{c}{\sqrt{R}}.$$

La última desigualdad es válida si $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Además, si $\theta < \frac{\pi}{2\alpha}$,

$$e^{-(R/r)^\alpha \cos(\alpha\phi)} \leq e^{-(R/r)^\alpha \cos(\alpha\theta)}$$

Entonces el módulo de la integral se acota por $\theta e^{-(R/r)^\alpha \cos(\alpha\theta)} R^{N/2+\alpha} \frac{c}{\sqrt{R}}$, que converge a 0 cuando $R \to \infty$. De esta forma,

$$|x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x,1) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty e^{-(te^{i\theta}/r)^\alpha} (te^{i\theta})^{N/2+\alpha-1} H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta}) e^{i\theta} \, dt \right].$$

El término dentro de la integral converge puntualmente a $(te^{i\theta})^{N/2+\alpha-1} H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta}) e^{i\theta}$ cuando $r \to \infty$, por lo que basta acotarlo por una función integrable para obtener la convergencia de la integral. De la misma forma que antes, consideramos $c > 0$ tal que para todo t mayor que un cierto $R > 0$, $|H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta})| \leq \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-t \operatorname{sen} \theta}$. Entonces

$$\left| e^{-(te^{i\theta}/r)^\alpha} (te^{i\theta})^{N/2+\alpha-1} H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta}) e^{i\theta} \right| \leq t^{N/2+\alpha-1} \left| H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta}) \right|$$

Como $H_\nu^{(1)}(z) \sim -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) (\frac{z}{2})^{-\nu}$ cuando $|z|$ es pequeño, lo anterior es integrable en el intervalo $[0, R]$. En (R, ∞) está acotado por $t^{N/2+\alpha-1} \frac{c}{\sqrt{t}} e^{-t \operatorname{sen} \theta}$ que es también integrable. Entonces

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x,1) = \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty (te^{i\theta})^{N/2+\alpha-1} H_{N/2}^{(1)}(te^{i\theta}) e^{i\theta} \, dt \right].$$

Por argumentos similares a los anteriores se puede cambiar el camino de integración por $i\mathbb{R}_+$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{|x| \to \infty} |x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x,1) &= \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty (ti)^{N/2+\alpha-1} H_{N/2}^{(1)}(ti) i \, dt \right] \\
&= \frac{\alpha}{(2\pi)^{N/2}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty (ti)^{N/2+\alpha-1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{i^{N/2+1}} K_{N/2}(t) i \, dt \right] \\
&= \frac{2\alpha}{(2\pi)^{N/2}\pi} \operatorname{Re} \left[i^{\alpha-1} \int_0^\infty t^{N/2+\alpha-1} K_{N/2}(t) \, dt \right] \\
&= \frac{2\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{(2\pi)^{N/2}\pi} \int_0^\infty t^{N/2+\alpha-1} K_{N/2}(t) \, dt.
\end{aligned}$$

$K_\nu(t) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(it)$ es la función de Bessel modificada de segunda especie y toma valores reales para $t > 0$. La última integral se puede calcular como en [5, p. 51],

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} |x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x, 1) &= \frac{2\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{(2\pi)^{N/2}\pi} 2^{N/2+\alpha-2} \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{2^{\alpha-1}\alpha}{\pi^{N/2+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Definamos

$$\ell(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}\alpha}{\pi^{N/2+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{2.7}$$

Usando la identidad (2.6) y el teorema 2.3 vemos que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x, t) = \ell(\alpha) t.$$

Definición 2.11 *Para $\alpha > 0$ definimos el kernel*

$$\mathcal{K}_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-t} \mathcal{H}_\alpha(x, t) dt.$$

Proposición 2.10 *([6]) Para todo $\alpha > 0$,*

$$\hat{\mathcal{K}}_\alpha(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^\alpha},$$

con lo que $\mathcal{K}_\alpha$ resulta ser la solución fundamental del operador $I + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$.

Observación Para $\alpha = 2$ este kernel coincide con el del potencial de Bessel (2.1), es decir,

$$\mathcal{K}_2 = G_2,$$

y el operador asociado es $I - \Delta$.

Proposición 2.11 *Para todo $\alpha > 0$*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{N+\alpha} \mathcal{K}_\alpha(x) = \ell(\alpha).$$

Demostración.

$$|x|^{N+\alpha} \mathcal{K}_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-t} |x|^{N+\alpha} \mathcal{H}_\alpha(x, t)\, dt.$$

La función dentro de la integral converge puntualmente a $\ell(\alpha) t e^{-t}$ cuando $|x| \to \infty$. Además, usando la identidad (2.6) como en [6], se demuestra que

$$|\mathcal{H}_\alpha(x, t)| \leq c \min\{t^{-N/\alpha}, t|x|^{-N-\alpha}\}$$

y por lo tanto

$$e^{-t} |x|^{N+\alpha} |\mathcal{H}_\alpha(x, t)| \leq c e^{-t} \min\{t^{-N/\alpha} |x|^{N+\alpha}, t\} \leq e^{-t} c t.$$

En virtud del teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^\infty e^{-t}|x|^{N+\alpha}\mathcal{H}_\alpha(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\ell(\alpha)t\,dt = \ell(\alpha).$$

$\square$

Proposición 2.12 *$\hat{\mathcal{K}}_{2\alpha}$ converge uniformemente a $\hat{\mathcal{K}}_2$ cuando $\alpha \to 1^-$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que, para todo $\alpha \in (0,1]$,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\mathcal{K}}_{2\alpha}(\xi) = 0.$$

Tomemos $R > 1$ tal que $|\hat{\mathcal{K}}_1(\xi) - \hat{\mathcal{K}}_2(\xi)| < \varepsilon$ para todo $\xi \in B(0,R)^c$. Como

$$|\xi| \le |\xi|^{2\alpha} \le |\xi|^2 \qquad \forall\alpha \in [1/2,1],\ \forall|\xi| > 1,$$

lo anterior implica que $|\hat{\mathcal{K}}_{2\alpha}(\xi) - \hat{\mathcal{K}}_2(\xi)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in [1/2,1]$ y todo $\xi \in B(0,R)^c$. Aplicando el teorema de Dini en $B(0,R) \setminus B(0,1)$ y en $B(0,1)$ se concluye que existe $\alpha^* \in (1/2,1)$ tal que $|\hat{\mathcal{K}}_\alpha(\xi) - \hat{\mathcal{K}}(\xi)| < \varepsilon\ \forall\xi \in B(0,R)\ \forall\alpha \in (\alpha^*,1)$, y por lo tanto la convergencia es uniforme. $\square$

2.5. Inyecciones continuas y compactas

Definición 2.12 *Para $\alpha \in (0,1]$ y $p \ge 1$ se define el exponente crítico de Sobolev*

$$p^* = \frac{Np}{N-\alpha p}.$$

Teorema 2.4 *([6])*

(i) Si $1 < p \le q \le p^* < \infty$, entonces $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ se inyecta continuamente en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Si $1 \le q < 1^*$, entonces $\mathcal{L}^1_\alpha(\mathbb{R}^N)$ se inyecta continuamente en $L^q(\mathbb{R}^N)$.

(iii) Si $\frac{N}{p} < \alpha \le 2$, $\alpha - \frac{N}{p} < 1$ y $0 < \mu \le \alpha - \frac{N}{p}$, entonces $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ se inyecta continuamente en $C^\mu(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.1 *([6]) Sea $p \in [2,2^*]$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_p \le C\|u\|_\alpha \qquad \forall u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N).$$

Si además $p < 2^*$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, entonces toda sucesión acotada en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ tiene una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$.

Lema 2.2 *([6]) Sea $N \ge 2$, $p \in (2,2^*)$ y $\{u_n\}$ una sucesión acotada en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ que satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,R)} u_n(x)^2\,dx = 0$$

para algún $R > 0$. Entonces $u_n \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Definición 2.13 *Para $\alpha \geq 0$ y $p \geq 1$ se define el espacio*

$$R\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N) : u \text{ es radialmente simétrica}\}.$$

Proposición 2.13 *([15][p. 646]) $R\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema 2.5 *([15][p. 656]) Sean $q > p \geq 1$ y $\alpha, \beta \geq 0$. Si $N \geq 2$ y*

$$\alpha - \frac{N}{p} > \beta - \frac{N}{q},$$

entonces $R\mathcal{L}^p_\alpha(\mathbb{R}^N)$ se inyecta de manera compacta en $R\mathcal{L}^q_\beta(\mathbb{R}^N)$.

Capítulo 3

La ecuación $(I - \Delta)^\alpha u = f(x, u)$

3.1. Definición del problema

En este capítulo estudiamos el problema

$$\begin{cases} (I-\Delta)^\alpha u(x) = f(x, u(x)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

con $\alpha \in (0, 1)$ y $1 < p < p^* - 1 = \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$

Consideraremos las siguientes hipótesis para la función f:

(f0) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $s \mapsto f(x, s)$ es continua c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$ y $x \mapsto f(x, s)$ es medible para todo $s \in \mathbb{R}$.

(f1) $f(x, s) \geq 0$ si $s \geq 0$ y $f(x, s) = 0$ si $s \leq 0$, c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

(f2) La función

$$s \mapsto \frac{f(x, s)}{s}$$

es creciente para $s > 0$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

(f3) Existen constantes $p \in \left(1, \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}\right)$ y $C > 0$ tales que

$$f(x, s) \leq C|s|^p$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

(f4) Existe $\theta > 2$ tal que, para todo $s > 0$ y c.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$,

$$0 < \theta F(x, s) \leq s f(x, s),$$

donde

$$F(x, s) = \int_0^s f(t)\, dt.$$

(f5) Existen funciones $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $\bar{f}$ satisface (f0)-(f4) y

$$0 \leq f(x,s) - \bar{f}(s) \leq a(x)(|s| + |s|^p) \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \text{c.t.p. } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} a(x) = 0$$

y

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : f(x,s) > \bar{f}(s)\ \forall s > 0\}| > 0$$

donde $|\cdot|$ representa la medida de Lebesgue.

Un ejemplo de función que satisface estas hipótesis es $f(x,s) = g(x)s_+^p$, donde

$$s_+ = \begin{cases} s & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

y g es una función continua, estrictamente mayor que 1 y tal que $g(x) \to 1$ cuando $|x| \to \infty$. La función $\bar{f}$ asociada es $\bar{f}(s) = s_+^p$.

Definición 3.1 *Decimos que $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ es una solución débil de la ecuación*

$$(I - \Delta)^\alpha u = f(x,u), \tag{3.2}$$

si

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u(x))v(x)\, dx \qquad \forall v \in H^\alpha(\mathbb{R}^N),$$

o equivalentemente, si es un punto crítico del funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u(x))\, dx.$$

Observación Gracias a (f0) y (f3) I está bien definido, y usando la inyección de Sobolev (Teorema 2.4) y las propiedades del operador de Nemytskii, se demuestra que I es de clase C^1 en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$.

Definición 3.2 *Decimos que $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de la ecuación (3.2) si es continua y (3.2) se satisface puntualmente.*

El objetivo principal de las secciones 3.2, 3.3 y 3.4 es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.1 *Si f satisface las hipótesis (f0)-(f5), entonces el problema (3.1) posee una solución clásica que decae exponencialmente. Si $f(s) = s_+^p$, entonces la solución es además radialmente simétrica y decreciente a partir de cierto punto.*

3.2. Existencia

En esta sección estudiaremos la existencia de soluciones débiles. Para esto consideramos la variedad de Nehari

$$\Lambda = \{u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'(u)u = 0\}$$

y definimos

$$c^* = \inf_{u \in \Lambda} I(u)$$

Observación Si $u \in \Lambda$, entonces gracias a (f1), $u_+ \neq 0$. Por otro lado, dado $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_+ \neq 0$, gracias a (f2), la función $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto I(tu)$ posee un único máximo $t(u)$ y $t(u)u \in \Lambda$. De esta forma,

$$c^* = \inf_{u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} I(tu)$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], H^\alpha(\mathbb{R}^N)) : g(0) = 0, I(g(1)) < 0\}.$$

y definamos

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(g(t)).$$

Observación Usando (f2) y (f3) se demuestra que $c > 0$.

Lema 3.1 $c = c^*$.

Demostración. Sea $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ tal que $u_+ \neq 0$. Definamos $g_u(t) = tTu$ con $T > 0$ suficientemente grande de manera que $I(Tu) < 0$. Así $g_u \in \Gamma$ y

$$c \leq \sup_{t \in [0,1]} I(tTu) \leq \sup_{t \geq 0} I(tu).$$

Entonces $c \leq c^*$.
Para la otra desigualdad basta demostrar que para toda $g \in \Gamma$ existe $t \in (0,1)$ tal que $g(t) \in \Lambda$. Primero notemos que si $I'(u)u \geq 0$, entonces gracias a (f4),

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u(x)) u(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u(x))\, dx \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u(x))\, dx \geq 0.$$

Por lo que, si suponemos que $I'(g(t))g(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$, entonces $I(g(t)) \geq 0$ para todo $t \in (0,1)$, lo que contradice que $I(g(1)) < 0$. $\square$

Para $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos $\bar{I}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Gamma}$ y $\bar{c}$ reemplazando f por $\bar{f}$.

Teorema 3.2 *Si $\bar{f}$ satisface (f0)-(f4), entonces $\bar{I}$ tiene un punto crítico con valor crítico $\bar{c}$.*

Demostración. En virtud del principio variacional de Ekeland (ver [10]), existe una sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\bar{I}(u_n) \to c \qquad \text{y} \qquad \bar{I}'(u_n) \to 0.$$

Usando (f4), dado $\varepsilon > 0$, para todo n suficientemente grande

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_\alpha \leq \bar{I}(u_n) - \frac{1}{\theta} \bar{I}'(u_n) u_n \leq c + \varepsilon + \|u_n\|_\alpha.$$

Por lo tanto (u_n) es una sucesión acotada en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Usando el lema 2.1, (u_n) tiene una subsucesión convergente en $L^{p+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y débil en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ a una cierta función u. Para esta subsucesión (que seguimos llamando u_n) y para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\bar{I}'(u_n)\varphi \to \bar{I}'(u)\varphi = 0.$$

Sólo falta ver que $\bar{I}(u) = c$. Usando (f4) nuevamente, para todo $R > 0$,

$$\bar{I}(u_n) - \frac{1}{2}\bar{I}'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\bar{f}(u_n)u_n - \bar{F}(u_n)\right) dx \geq \int_{B(0,R)} \left(\frac{1}{2}\bar{f}(u_n)u_n - \bar{F}(u_n)\right) dx.$$

Tomando límite en n,

$$c \geq \int_{B(0,R)} \left(\frac{1}{2}\bar{f}(u)u - \bar{F}(u)\right) dx.$$

Como esto es válido para todo $R > 0$, también lo es para la integral en todo $\mathbb{R}^N$ y así $\bar{I}(u) \leq c$. Para la otra desigualdad basta ver que $u \neq 0$. Usando el lema 2.2, podemos encontrar una sucesión $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$ y constantes $R > 0$, $\beta > 0$ tales que

$$\int_{B(y_n,R)} u_n(x)^2 \, dx > \beta.$$

En efecto, si suponemos que esto no es cierto, $u_n \to 0$ en $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Pero usando (f3), para n suficientemente grande y cierta constante $A > 0$,

$$\frac{\bar{c}}{2} \leq \bar{I}(u_n) - \frac{1}{2}\bar{I}'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\bar{f}(u_n)u_n - \bar{F}(u_n)\right) dx \leq A \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} \, dx,$$

lo que implica que $\bar{c} = 0$, que sabemos que no es cierto.
Finalmente definimos $\tilde{u}_n(x) = u(y_n + x)$ y repitiendo los argumentos previos concluimos que $u = \text{w-}\lim \tilde{u}_n$ es un punto crítico no trivial de $\bar{I}$, con valor crítico $\bar{c}$. $\square$

Teorema 3.3 *Si f satisface (f0)-(f5), entonces I tiene un punto crítico con valor crítico c. Además $c < \bar{c}$.*

Demostración. Tomemos una sucesión $u_n \in \Lambda$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c.$$

Sea $g_n = g_{u_n}$, definido como en la demostración del lema 3.1. Usando el principio variacional de Ekeland encontramos sucesiones $t_n \in [0, 1]$ y $w_n \in H^\alpha$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} I(w_n) = c, \quad \lim_{n\to\infty} I'(w_n) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \|w_n - g_n(t_n)\|_\alpha = 0. \tag{3.3}$$

Procediendo de manera similar a la demostración del teorema 3.2, encontramos una subsucesión de w_n, que seguimos llamando w_n, que converge débil a w y que satisface

$$\int_{B(y_n,R)} w_n(x)^2 \, dx > \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para ciertos $R, \beta > 0$ e $y_n \in \mathbb{R}^N$. Si (y_n) tiene una subsucesión acotada, lo anterior implica que $w \neq 0$ y se concluye. Supongamos entonces que $|y_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Supondremos además que, dado $r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,r)} w_n(x)^2 \, dx = 0$$

ya que de lo contrario $w \neq 0$. Demostremos primero que $c < \bar{c}$. Sea $\bar{w}$ un punto crítico no trivial de $\bar{I}$ dado por el teorema 3.2. Sea

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x,s) > \bar{f}(s) \ \forall s > 0\}.$$

Usando (f5) y el hecho de que $\bar{w} \neq 0$, podemos encontrar $y \in \mathbb{R}^N$ tal que la función w_y, definida por $w_y(x) = w(x+y)$, satisface

$$|\{x \in A : |w_y(x)| > 0\}| > 0.$$

Así

$$\bar{c} = \bar{I}(w_y) \geq \bar{I}(tw_y) > I(tw_y), \qquad \forall t > 0.$$

Tomando $t^* > 0$ tal que

$$I(t^* w_y) = \sup_{t>0} I(tw_y),$$

se tiene que $t^* w_y \in \Lambda$ y concluimos que

$$\bar{c} > I(t^* w_y) \geq \inf_{v \in \Lambda} = c.$$

De (f5) tenemos que, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} I(tu_n) &= \bar{I}(tu_n) + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\bar{F}(tu_n) - F(x, tu_n)\right) dx \\ &\geq \bar{I}(tu_n) - \int_{\mathbb{R}^N} Ca(x) \left(|tu_n|^2 + |tu_n|^{p+1}\right) dx. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando (f5) y el hecho de que (u_n) es una sucesión acotada en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{B(0,R)^c} Ca(x) \left(|tu_n|^2 + |tu_n|^{p+1}\right) dx \leq \varepsilon,$$

para t acotado. Por otro lado, usando (3.3), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} Ca(x) \left(|tu_n|^2 + |tu_n|^{p+1}\right) dx = 0.$$

Tomando $t = t^*$ tal que

$$\bar{I}(t^* u_n) = \max_{t \geq 0} \bar{I}(tu_n),$$

vemos que $c \geq \bar{c} - \varepsilon$. Si elegimos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, esto contradice que $c < \bar{c}$. $\square$

3.3. Regularidad

Teorema 3.4 *Supongamos que f satisface (f0) y (f3). Sea u una solución débil de la ecuación (3.2). Entonces $u \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N) \cap C^{0,\mu}(\mathbb{R}^N)$ para ciertos $q_0 \in [2,\infty)$ y $\mu \in (0,1)$. Además $|u(x)| \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.*

Demostración. Como $u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$, gracias a la inyección de Sobolev (teorema 2.4), $u \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ con $q_0 = \frac{2N}{N-2\alpha}$. Usando (f3), $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ con $p_1 = \frac{q_0}{p}$ y por lo tanto $(I-\Delta)^{-\alpha} f(\cdot, u(\cdot)) \in \mathcal{L}^{p_1}_{2\alpha}$. Como $(I-\Delta)^{-\alpha} f(\cdot, u(\cdot)) = u$ en el sentido de las distribuciones, lo anterior es equivalente a que $u \in \mathcal{L}^{p_1}_{2\alpha}$. Tenemos tres casos posibles:

$$1)\ p_1 < \frac{N}{2\alpha}, \qquad 2)\ p_1 = \frac{N}{2\alpha}, \qquad 3)\ p_1 > \frac{N}{2\alpha}$$

En el caso 1) usamos nuevamente la inyección de Sobolev para obtener que $u \in L^{q_1}(\mathbb{R}^N)$ con $q_1 = \frac{Np_1}{N-2\alpha p_1}$ y tal como hicimos antes, $u \in \mathcal{L}^{p_2}_{2\alpha}$ con $p_2 = \frac{q_1}{p}$. De nuevo tenemos los tres posibles casos, pero esta vez para p_2. Si $p_2 < \frac{N}{2\alpha}$, entonces $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^N)$ con $q_2 = \frac{Np_2}{N-2\alpha p_2}$. Repitiendo este proceso, podemos definir una sucesión (q_j) tal que

$$\frac{1}{q_{j+1}} = \sum_{i=0}^{j} p^i \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} \right) + \frac{1}{q_1}.$$

Como $1 < p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$, $q_1 > q_0$ y así la expresión del lado derecho se hace negativa para j grande. Sea j el natural más pequeño tal que la suma no es positiva. Entonces $p_{j+1} = \frac{N}{2\alpha}$ o $p_{j+1} > \frac{N}{2\alpha}$.

Si $p_{j+1} > \frac{N}{2\alpha}$, entonces $u \in \mathcal{L}^{p_{j+1}}_{2\alpha}$, y la parte (iii) del teorema 2.4 nos dice que para $0 < \mu < \min\{2\alpha - \frac{N}{p_{j+1}}, 1\}$, $u \in C^{0,\mu}(\mathbb{R}^N)$.

Si $p_{j+1} = \frac{N}{2\alpha}$, entonces $u \in \mathcal{L}^{p_{j+1}}_{2\tilde{\alpha}}$ para $\tilde{\alpha} < \alpha$. Así $p_{j+1} < \frac{N}{2\tilde{\alpha}}$ y podemos hacer otra iteración. Si tomamos $\tilde{\alpha}$ suficientemente cercano a α, obtenemos $p_{j+2} > \frac{N}{2\tilde{\alpha}}$ y concluimos de la misma forma que en el primer caso.

Finalmente observamos que el hecho de que $u \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N) \cap C^{0,\mu}(\mathbb{R}^N)$ implica que $|u(x)| \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. □

Proposición 3.1 *Si u es una solución débil de la ecuación (3.2) y f satisface (f0),(f1) y (f3), entonces u es estrictamente positiva.*

Demostración. Sabemos que u satisface

$$u = (I-\Delta)^{-\alpha} f(\cdot, u(\cdot)) = G_{2\alpha} * f(\cdot, u(\cdot))$$

en el sentido de las distribuciones. Si tomamos u_- como función test,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_-(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(y) f(x-y, u(x-y)) u_-(x)\, dy\, dx \le 0$$

y por lo tanto $u_- = 0$ c.t.p.. Más aún, por el teorema 3.4, u es continua, y por lo tanto

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(y) f(x-y, u(x-y))\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $G_{2\alpha}$ es estrictamente positiva y $u_+ \neq 0$, concluimos que $u > 0$. □

Proposición 3.2 *Si $p > 1$, $q > \frac{Np}{2\alpha}$ y $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ es una solución del problema*

$$\begin{cases} (I-\Delta)^\alpha u = u^p \\ \qquad u \geq 0 \end{cases}$$

Entonces $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \geq 1$ y además existe $\gamma \in (0, 2\alpha)$ tal que $u \in C^{1+\gamma+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Sabemos que $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ implica $u \in \mathcal{L}^{q/p}_{2\alpha}$ y como $\frac{q}{p} > \frac{N}{2\alpha}$, la inyección de Sobolev nos permite concluir que $u \in C^\mu(\mathbb{R}^N)$ para cierto $\mu \in (0, 2\alpha - \frac{Np}{q})$. Esto implica que $u(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, y por lo tanto $u \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \geq q$. Observemos que $u = G_{2\alpha} * u^p$ y $u^p \in L^r$ para todo $r \geq \text{máx}\{1, \frac{q}{p}\}$. Entonces, usando (2.4), $u \in L^r$. Si repetimos este procedimiento, concluimos que $u \in L^r$ para todo $r \geq 1$. Aplicando el teorema del valor medio a la función t^p, obtenemos $u^p \in C^\mu(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $u \in C^{\mu+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Nuevamente iteramos este procedimiento hasta que $\mu + 2k\alpha > 1$. De este forma, $u \in C^{1+\gamma}(\mathbb{R}^N)$ para cierto $\gamma \in (0, 2\alpha)$. Si $p \geq 2$, volvemos a usar el teorema del valor medio y si $p < 2$, observamos que la función t^{p-1} es de clase C^{p-1}. En cualquiera de los dos casos obtenemos $u^p \in C^{1+\gamma}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $u \in C^{1+\gamma+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$. □

3.4. Decaimiento y simetría

Para $q \geq 1$ definimos el siguiente espacio métrico completo

$$X = \left\{ v \in C(\mathbb{R}^N) : v \geq 0 \wedge \|v\|_X := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |e^{\frac{|x|}{2q}} v(x)| < \infty \right\}$$

dotado de la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_X$. Consideremos el operador

$$\begin{array}{rcccc} F_\varphi & : & X & \longrightarrow & X \\ & & v & \longmapsto & G_{2\alpha} * \varphi(v) \end{array}$$

donde φ representa alguna función.

Lema 3.2 *Sea $w \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ una función positiva que se anula en el infinito. Definamos*

$$h(x) = \text{mín} \left\{ w(x), 1, \frac{1}{2} \|G_{2\alpha} * (e^{-\frac{|\cdot|}{2q}})\|_X^{-1} \right\}$$

y

$$\varphi(v) = hv + \chi_{B(0,r)}$$

donde $\chi_{B(0,r)}$ representa la función característica de la bola de radio $r > 0$ y r es suficientemente grande, de manera que $h = w$ en $B(0,r)^c$. Entonces el operador F_φ está bien definido y tiene un único punto fijo $\bar{v}$ que es estrictamente positivo y satisface la ecuación

$$(I-\Delta)^\alpha \bar{v} = h\bar{v} + \chi_{B(0,r)}.$$

Demostración. El operador está bien definido ya que $F_\varphi(v)$ es positiva y continua, y además

$$\begin{aligned}
(e^{\frac{|x|}{2q}}F_\varphi(v)(x))^q &= \left(e^{\frac{|x|}{2q}}\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(x-y)[h(y)v(y)+\chi_{B(0,r)}(y)]dy\right)^q \\
&\leq e^{\frac{|x|}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(x-y)[h(y)v(y)+\chi_{B(0,r)}(y)]^q dy \\
&\leq ce^{\frac{|x|}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(x-y)h(y)^q v(y)^q\,dy + ce^{\frac{|x|}{2}}\int_{B(0,r)} G_{2\alpha}(x-y)\,dy.
\end{aligned}$$

Tomemos $R>0$ tal que $G_{2\alpha}(x)\leq ce^{-\frac{|x|}{2}}$ para $|x|\geq R$. Entonces

$$\begin{aligned}
e^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|\geq R} G_{2\alpha}(x-y)h(y)^q v(y)^q\,dy &\leq ce^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|\geq R} e^{-\frac{|x-y|}{2}}h(y)^q v(y)^q\,dy \\
&\leq ce^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|\geq R} e^{-\frac{|x|}{2}}e^{\frac{|y|}{2}}h(y)^q e^{-\frac{|y|}{2}}(e^{\frac{|y|}{2q}}v(y))^q\,dy \\
&\leq c\|v\|_X^q\|h\|_q^q.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|<R} G_{2\alpha}(x-y)h(y)^q v(y)^q\,dy &\leq c\|v\|_X^q e^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|<R} G_{2\alpha}(x-y)h(y)^q e^{-\frac{|y|}{2}}\,dy \\
&\leq c\|v\|_X^q e^{\frac{|x|}{2}}\int\limits_{|x-y|<R} G_{2\alpha}(x-y)h(y)^q e^{-\frac{|x|}{2}}\,dy \\
&\leq c\|v\|_X^q\|h\|_\infty^q.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$e^{\frac{|x|}{2}}\int_{B(0,r)} G_{2\alpha}(x-y)\,dy \leq \begin{cases} e^{\frac{R+r}{2}} & \text{si } |x|<R+r \\ \int_{B(0,r)} e^{-\frac{|y|}{2}}\,dy & \text{si } |x|\geq R+r \end{cases}$$

Concluimos que $\|F_\varphi(v)\|_X^q<\infty$, es decir, $\|F_\varphi(v)\|_X<\infty$ y por lo tanto F_φ está bien definido. Veamos ahora que F_φ es contractante,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{|x|}{2q}}|F_\varphi(v_1)(x)-F_\varphi(v_2)(x)| &\leq e^{\frac{|x|}{2q}}\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(x-y)h(y)|v_1(y)-v_2(y)|\,dy \\
&\leq \|h\|_\infty\|v_1-v_2\|_X e^{\frac{|x|}{2q}}\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(x-y)e^{-\frac{|y|}{2q}}\,dy \\
&\leq \|h\|_\infty\|v_1-v_2\|_X\|G_{2\alpha}*(e^{-\frac{|\cdot|}{2q}})\|_X \leq \frac{1}{2}\|v_1-v_2\|_X
\end{aligned}$$

Esto implica la existencia de un único punto fijo $\bar{v}$ que satisface

$$\bar{v} = G_{2\alpha}*(h\bar{v}+\chi_{B(0,r)})>0.$$

$\square$

Teorema 3.5 *Sean $p > 1$, $q = \max\{1, (p-1)^{-1}\}$ y $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ una solución positiva de la ecuación (3.2) que se anula en el infinito. Entonces existen constantes $c, R > 0$ tales que*

$$u(x) \leq e^{-\frac{|x|}{2q}} \qquad \forall |x| \geq R.$$

Demostración. Consideremos φ como en el lema 3.2, con

$$w(x) = \frac{f(x, u(x))}{u(x)}$$

y sea v el punto fijo de F_φ. Tenemos

$$(I - \Delta)^\alpha v = hv + \chi_{B(0,r)} \qquad \text{y} \qquad (I - \Delta)^\alpha u = f(x, u)$$

Definamos las funciones $W(x) = u(x) - cv(x)$ y $g(x) = (I - \Delta)^\alpha W(x) - h(x)W(x)$ con $c > 0$ suficientemente grande, de manera que $W \leq 0$ en $B(0,r)$ y $g \leq 0$ en $\mathbb{R}^N$. Como W es continua y se anula en el infinito, si suponemos que $W \nleq 0$ en $B(0,r)^c$, esto implica la existencia de un máximo global positivo $\bar{x} \in B(0,r)^c$. Notemos que

$$W(\bar{x}) = G_{2\alpha} * (g + hW)(\bar{x}) \leq G_{2\alpha} * (hW)(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(\bar{x} - y)h(y)W(y)\, dy.$$

Usando que $\int G_{2\alpha} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_{2\alpha}(\bar{x} - y)(W(\bar{x}) - h(y)W(y))\, dy \leq 0.$$

Como $h \leq 1$, esto contradice el hecho de que $\bar{x}$ es un máximo global. Por lo tanto $W \leq 0$ en $\mathbb{R}^N$ y se concluye el resultado. □

Teorema 3.6 *([9]) Si u es una solución positiva de $u = G_{2\alpha} * u^p$ y $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $q > \max\{p, \frac{N(p-1)}{2\alpha}\}$, entonces u es radialmente simétrica y decreciente a partir de cierto punto.*

Demostración del Teorema 3.1. El teorema 3.3 garantiza la existencia de una solución débil u. Esta solución es clásica y converge a 0 cuando $|x| \to \infty$ gracias al teorema 3.4. Con la proposición 3.1 obtenemos que u es estrictamente positiva y con el teorema 3.5 el decaimiento exponencial. Finalmente, si $f(s) = s_+^p$, el teorema 3.6 asegura que u es radialmente simétrica y decreciente a partir de cierto punto. □

3.5. Existencia de infinitas soluciones

En esta sección nos centraremos en el estudio la siguiente ecuación

$$(I - \Delta)^\alpha u = |u|^{p-1}u \tag{3.4}$$

y determinaremos la existencia de infinitas soluciones usando el método del género de Krasnoselskii. Específicamente, demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.7 *Si $N \geq 2$ y $p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$, entonces la ecuación (3.4) posee infinitas soluciones clásicas radialmente simétricas.*

Para esto seguiremos el argumento utilizado en [17].

Definición 3.3 *Sea $\mathcal{M}$ una variedad en un espacio de Hilbert H y J un funcional de clase C^1 en H. Decimos que $J|_{\mathcal{M}}$ satisface la condición de Palais-Smale positiva ($(PS)^+$) si, dados $0 < c_1 < c_2$, para cada sucesión $\{w_n\} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $c_1 \leq J(w_n) \leq c_2$ y $\|J|'_{\mathcal{M}}(w_n)\| \to 0$, $\{w_n\}$ posee una subsucesión convergente.*

Consideraremos

$$\mathcal{M} = \{v \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N) : \|v\|_\alpha = 1\}$$

y

$$J(v) = \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{p+1}\,dx = \frac{1}{p+1}\|v\|_{p+1}^{p+1}.$$

Lema 3.3 *Para $N \geq 2$, $J|_{\mathcal{M}}$ satisface la condición $(PS)^+$.*

Demostración. Sea $\{u_n\} \subseteq \mathcal{M}$ tal que $0 < c_1 \leq J(u_n) \leq c_2$ y $\|J|'_{\mathcal{M}}(u_n)\| \to 0$. Como $\{u_n\}$ is una sucesión acotada en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$, en virtud del teorema 2.5 podemos extraer una subsucesión convergente en $RL^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ y débil en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ a cierta función u. Seguiremos llamando $\{u_n\}$ a esta subsucesión. Así, $J(u_n) \to J(u)$ y

$$J'(u_n)v - J'(u_n)u_n\langle u_n, v\rangle \to 0 \qquad \forall v \in H^\alpha(\mathbb{R}^N).$$

Tomando $v = u$ obtenemos

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} = \|u\|_{p+1}^{p+1}\|u\|_\alpha^2,$$

lo que implica que $\|u\|_\alpha = 1$, ya que $J(u_n) \geq c_1$. Por lo tanto

$$\|u_n\|_\alpha \to \|u\|_\alpha$$

y concluimos que $\{u_n\}$ converge fuerte a u en $H^\alpha(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Definición 3.4 *Llamemos $\Sigma(\mathcal{M})$ al conjunto de todos los subconjuntos compactos y simétricos de $\mathcal{M}$. Definimos el género $\gamma(A)$ de $A \in \Sigma(\mathcal{M})$ como el menor entero $n \geq 1$ tal que existe una función continua e impar $\phi : A \to S^{n-1}$. Si tal número no existe, $\gamma(A) = \infty$. Para $k \geq 1$ definimos también*

$$\Gamma_k = \{A \in \Sigma(\mathcal{M}) : \gamma(A) \geq k\}.$$

Proposición 3.3 *([1]) Sea $J : H \to \mathbb{R}$ un funcional par de clase C^1. Supongamos que J está acotado superiormente en $\mathcal{M}$ y que $J|_{\mathcal{M}}$ satisface la condición $(PS)^+$. Sea*

$$b_k = \sup_{A \in \Gamma_k} \inf_{v \in A} J(v).$$

Entonces $b_1 \geq b_2 \geq \cdots b_k \geq \cdots$ y b_k es valor crítico de J si $b_k > 0$.

Proposición 3.4 *([1]) Sea*

$$K_b = \{v \in \mathcal{M} : J(v) = b,\ J|'_{\mathcal{M}}(v) = 0\}.$$

Bajo las hipótesis de la proposición 3.3, si $b_k = b_{k+1} = \cdots = b_{k+r-1} = b$, entonces $\gamma(K_b) \geq r$. En particular, si $r \geq 2$, el funcional $J|_{\mathcal{M}}$ posee infinitos puntos críticos con valor crítico b.

Observación Los dos resultados anteriores aseguran que, bajo las hipótesis de la proposición 3.3, siempre existen infinitos puntos críticos de $J|_{\mathcal{M}}$.

Para $k \geq 1$ consideremos el conjunto

$$\pi_{k-1} = \left\{ l = (l_1, ..., l_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} |l_i| = 1 \right\}.$$

Como π_{k-1} es homeomorfo a S^{k-1} vía una función impar, se tiene que $\gamma(\pi_{k-1}) = k$.

Lema 3.4 *([1]) Sea $q \in (2, \frac{2N}{N-2})$. Para todo $k \geq 1$ existe una constante $R = R(k) > 0$ y una función impar y continua $\tau : \pi_{k-1} \to H_0^1(B(0,R))$ tal que*

(i) $\tau(l)$ es una función radial para todo $l \in \pi_{k-1}$ y $0 \notin \tau(\pi_{k-1})$.
(ii) Para toda $v \in \tau(\pi_{k-1})$, $\|v\|_q \geq 1$.

Lema 3.5 *Para todo $k \geq 1$, $b_k > 0$.*

Demostración. Usamos el lema 3.4 con $q = p + 1 < \frac{2N}{N-2\alpha} < \frac{2N}{N-2}$ y las inyecciones

$$H_0^1(B(0,R)) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^\alpha(\mathbb{R}^N).$$

Así, tenemos una función $\varphi : \pi_{k-1} \to H^\alpha(\mathbb{R}^N)$ que satisface las condiciones (i) y (ii) del lema 3.4 y podemos definir una función continua e impar $\psi : \pi_{k-1} \to \mathcal{M}$ de la siguiente forma

$$\psi(l) = \frac{\varphi(l)}{\|\varphi(l)\|_\alpha}.$$

Sea $A_k = \psi(\pi_{k-1})$ y notemos que $A_k \in \Gamma_k$. Como $\varphi(\pi_{k-1})$ es compacto, existe una constante $M > 0$ tal que $\|\varphi(l)\|_\alpha \leq M$ para todo $l \in \pi_{k-1}$, y por lo tanto

$$\inf_{v \in A_k} J(v) = \inf_{l \in \pi_{k-1}} \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(l)(x)|^{p+1}}{\|\varphi(l)\|_\alpha^{p+1}}\, dx \geq \frac{1}{M^{p+1}(p+1)} > 0.$$

Concluimos que $b_k > 0$. □

Lema 3.6 *Si $N \geq 2$ y $p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$, entonces la ecuación (3.4) posee infinitas soluciones débiles.*

Demostración. Gracias a la inyección de Sobolev J está acotado en $\mathcal{M}$. Además, por el lema 3.3, $J|_{\mathcal{M}}$ satisface la condición $(\mathrm{PS})^+$, y por el lema 3.5 y las proposiciones 3.3 y 3.4, posee infinitos puntos críticos. Sea u uno de estos puntos críticos, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1} u(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N),$$

Tomando $u = v$ se obtiene $\lambda > 0$. Reescalando obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\, dx \qquad \forall v \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N),$$

donde hemos seguido llamando u a la función reescalada. Veamos ahora que u es efectivamente una solución débil. Sea $v \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Notemos que podemos escribir $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)$ y $v_2 \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)^\perp$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1}u(x)v_1(x)\, dx.$$

Sea $w = |u|^{p-1}u$. Gracias a la inyección de Sobolev $w, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Sean $w_\varepsilon = \rho_\varepsilon * w$ y $v_\varepsilon = \rho_\varepsilon * v_2$, donde $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ es el núcleo regularizador usual. Notemos que $w_\varepsilon \in RL^2(\mathbb{R}^N)$ al ser convolución de dos funciones radialmente simétricas. Por la misma razón $G_{2\alpha} * w_\varepsilon \in RH^{2\alpha}(\mathbb{R}^N) \subseteq RH^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Por otro lado $v_\varepsilon \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)^\perp$, en efecto, sea $g \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\langle v_\varepsilon, g\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{v}_\varepsilon(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{v}_2(\xi)\overline{\hat{\rho}_\varepsilon(\xi)\hat{g}(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{v}_2(\xi)\overline{\mathcal{F}(\rho_\varepsilon * g)(\xi)}\, d\xi \\
&= \langle v_2, \rho_\varepsilon * g\rangle_\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $v_2 \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)^\perp$ y $\rho_\varepsilon * g \in RH^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Con todo lo anterior vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} v_\varepsilon(x)w_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}_\varepsilon(\xi)\overline{\hat{w}_\varepsilon(\xi)}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{v}_\varepsilon(\xi)\overline{\mathcal{F}(G_{2\alpha} * w_\varepsilon)(\xi)}\, d\xi \\
&= \langle v_\varepsilon, G_{2\alpha} * w_\varepsilon\rangle_\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $w_\varepsilon \to w$ y $v_\varepsilon \to v_2$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_2(x)|u(x)|^{p-1}u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} v_2(x)w(x)\, dx = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\, dx.$$

□

Demostración del Teorema 3.7. El lema 3.6 nos entrega infinitas soluciones débiles de la ecuación (3.4), y como la función $f(x,s) = |s|^{p-1}s$ satisface (f0) y (f3), el teorema 3.4 nos asegura que estas soluciones son clásicas. □

3.6. No existencia en los casos crítico y supercrítico

En esta sección estudiaremos el problema

$$\begin{cases} (I-\Delta)^\alpha u = u^p \quad \text{en } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

y demostraremos una identidad del tipo Pohozaev que permite concluir la no existencia cuando $p \geq \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$.

Proposición 3.5 *Se tiene la siguiente igualdad en el sentido de las distribuciones*

$$(I-\Delta)^\alpha(x\cdot\nabla u) = x\cdot\nabla[(I-\Delta)^\alpha u] + 2\alpha(I-\Delta)^\alpha u - 2\alpha(I-\Delta)^{\alpha-1}u.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha(x\cdot\nabla u))(\xi) &= (1+|\xi|^2)^\alpha \sum_{k=1}^N \mathcal{F}\left(x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \\ &= (1+|\xi|^2)^\alpha \sum_{k=1}^N \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x_k u) - u\right) \\ &= (1+|\xi|^2)^\alpha \left[i\sum_{k=1}^N \xi_k\mathcal{F}(x_k u) - N\hat{u}\right] \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathcal{F}(x_k u) = i\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_k}$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x_k u), \varphi\rangle &= \langle x_k u(x), \hat{\varphi}(x)\rangle \\ &= \langle u(x), x_k\langle e^{-i\xi\cdot x}, \varphi(\xi)\rangle\rangle \\ &= \langle u(x), i\langle \tfrac{\partial}{\partial \xi_k}(e^{-i\xi\cdot x}), \varphi(\xi)\rangle\rangle \\ &= -i\langle u(x), \langle e^{-i\xi\cdot x}, \tfrac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}(\xi)\rangle\rangle \\ &= -i\langle u, \mathcal{F}(\tfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k})\rangle \\ &= -i\langle \hat{u}, \tfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\rangle \\ &= i\langle \tfrac{\partial\hat{u}}{\partial\xi_k}, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha(x\cdot\nabla u))(\xi) = -(1+|\xi|^2)^\alpha(\xi\cdot\nabla\hat{u} + N\hat{u}).$$

Usando el mismo argumento,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x\cdot\nabla[(I-\Delta)^\alpha u])(\xi) &= -(\xi\cdot\nabla\mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha u) + N\mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha u)) \\ &= -(\xi\cdot\nabla[(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u}] + N(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u}) \\ &= -(\xi\cdot[\alpha(1+|\xi|^2)^{\alpha-1}2\hat{u}\xi + (1+|\xi|^2)^\alpha\nabla\hat{u}] + N(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u}) \\ &= -2\alpha(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u} - 2\alpha(1+|\xi|^2)^{\alpha-1}\hat{u} \\ &\quad -(1+|\xi|^2)^\alpha\xi\cdot\nabla\hat{u} - N(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha(x\cdot\nabla u)-x\cdot\nabla[(I-\Delta)^\alpha u])(\xi) &= 2\alpha(1+|\xi|^2)^\alpha\hat{u}\\ &\quad +2\alpha(1+|\xi|^2)^{\alpha-1}\hat{u}\\ &= 2\alpha\mathcal{F}((I-\Delta)^\alpha u)\\ &\quad +2\alpha\mathcal{F}((I-\Delta)^{\alpha-1}u).\end{aligned}$$

Con lo que se concluye el resultado. □

Teorema 3.8 *Si $p\geq\frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$ y $q\geq 1$, entonces el problema (3.5) no tiene solución no trivial en $L^\infty(\mathbb{R}^N)\cap L^q(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Si suponemos que existe tal solución u, la proposición 3.2 y el teorema 3.5 nos aseguran que $u\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap C^{1+\gamma+2\alpha}(\mathbb{R}^N)$ y que tiene decaimiento exponencial. Entonces podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^N}[(I-\Delta)^\alpha u](x\cdot\nabla u)=\int_{\mathbb{R}^N}u^p(x\cdot\nabla u).$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}u^p(x\cdot\nabla u)=\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}(x\cdot\nabla u^{p+1})=-\frac{N}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}u^{p+1}.$$

Definamos $u_\varepsilon=\rho_\varepsilon * u$ donde $\rho_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ es el núcleo regularizador usual. Como u tiene decaimiento exponencial, se tiene que $u_\varepsilon\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)'$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}[(I-\Delta)^\alpha u](x\cdot\nabla u_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^N}u(I-\Delta)^\alpha(x\cdot\nabla u_\varepsilon)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}u[x\cdot\nabla((I-\Delta)^\alpha u_\varepsilon)]\\ &\quad +\int_{\mathbb{R}^N}u[2\alpha(I-\Delta)^\alpha u_\varepsilon-2\alpha(I-\Delta)^{\alpha-1}u_\varepsilon].\end{aligned}$$

Probaremos que esta identidad es también válida si reemplazamos u_ε por u.

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^N}[(I-\Delta)^\alpha u(x)]x\cdot(\nabla u_\varepsilon(x)-\nabla u(x))\,dx\right|\\ &\leq\int_{\mathbb{R}^N}u(x)^p\sum_{i=1}^N|x_i|\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dx\\ &\leq\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}u(x)^p|x_i|\int_{B(0,\varepsilon)}\rho_\varepsilon(y)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y)-\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|dy\,dx\\ &\leq\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}u(x)^p|x_i|\int_{B(0,\varepsilon)}\rho_\varepsilon(y)c|y|^\gamma\,dy\,dx\\ &\leq c\varepsilon^\gamma\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}u(x)^p|x_i|\,dx\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0.\end{aligned}$$

Observemos que $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * G_{2\alpha} * u^p = G_{2\alpha} * \rho_\varepsilon * u^p$, y entonces $(I-\Delta)^\alpha u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u^p$. Así

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)((I-\Delta)^\alpha u_\varepsilon(x) - (I-\Delta)^\alpha u(x))\,dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} u(x)|\rho_\varepsilon * u^p(x) - u(x)^p|\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)|u(x-y)^p - u(x)^p|\,dy\,dx \\
&\leq c\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)x\cdot\nabla(\rho_\varepsilon * u^p(x) - u(x)^p)\,dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\sum_{i=1}^N |x_i| \left|\rho_\varepsilon * \frac{\partial u^p}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u^p}{\partial x_i}(x)\right| dx \\
&\leq p\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} u(x)|x_i| \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y) \left|u(x-y)^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-y) - u(x)^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| dy\,dx \\
&\leq c\varepsilon^\gamma \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} u(x)|x_i|\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)((I-\Delta)^\alpha u_\varepsilon(x) - (I-\Delta)^\alpha u(x))\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)G_{2(1-\alpha)} * (u_\varepsilon - u)(x)\,dx\right| \\
&\leq \|G_{2(1-\alpha)} * (u_\varepsilon - u)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,dx \\
&\leq \|u_\varepsilon - u\|_\infty \|u\|_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} [(I-\Delta)^\alpha u](x\cdot\nabla u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u[x\cdot\nabla((I-\Delta)^\alpha u) + 2\alpha(I-\Delta)^\alpha u - 2\alpha(I-\Delta)^{\alpha-1}u] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u[x\cdot\nabla u^p + 2\alpha u^p - 2\alpha(I-\Delta)^{\alpha-1}u] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} x\cdot\nabla(u^{p+1}) + u^p x\cdot\nabla u + 2\alpha u^{p+1} - 2\alpha u(I-\Delta)^{\alpha-1}u \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -Nu^{p+1} + \frac{N}{p+1}u^{p+1} + 2\alpha u^{p+1} - 2\alpha u(I-\Delta)^{\alpha-1}u.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\left(2\alpha - N + \frac{2N}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u^{p+1} = 2\alpha \int_{\mathbb{R}^N} u(I-\Delta)^{\alpha-1}u = 2\alpha \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{\alpha-1}\hat{u}(\xi)^2 > 0.$$

Lo que implica $2\alpha - N + \frac{2N}{p+1} > 0$, es decir, $p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$. □

Capítulo 4

La ecuación $(-\Delta)^\alpha u + u = u^p$ y el límite cuando $\alpha \to 1^-$

4.1. Definición del problema

En [6] se demuestra que el problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^\alpha u + u = u^p \quad \text{en } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

con $\alpha \in (0,1)$ y $1 < p < \frac{N+2\alpha}{N-2\alpha}$ tiene solución clásica, radialmente simétrica y que decae como $|x|^{-N-2\alpha}$. Por otro lado, los resultados del capítulo 2 de esta memoria permiten concluir que, para $\alpha = 1$, el problema anterior tiene solución clásica, radialmente simétrica y con decaimiento exponencial. Los resultados de decaimiento se obtienen mediante un argumento de comparación con una supersolución adecuada. El objetivo de este capítulo es revisar estos argumentos para obtener una idea de cómo se produce la transición entre el decaimiento polinomial y el exponencial cuando $\alpha \to 1^-$.

Definición 4.1 *Diremos que una función $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una solución clásica de la ecuación*

$$(-\Delta)^\alpha u + u = u^p \tag{4.2}$$

si u es continua y la igualdad (4.2) se satisface puntualmente.

Teorema 4.1 *([6]) El problema (4.1) posee una solución clásica.*

4.2. Supersoluciones y convergencia uniforme

Ahora definiremos las supersoluciones que utilizaremos para comparar. La construcción es muy similar a la de [6], con algunas modificaciones que resultan útiles al considerar $\alpha \in (0,1)$

variable. Para $\varepsilon > 0$ pequeño consideremos una función $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ a valores en [0,1] y tal que

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 \text{ para } |x| \leq 1-\varepsilon \quad \text{y} \quad \chi_\varepsilon(x) = 0 \text{ para } |x| \geq 1.$$

Definamos $w_\alpha(x) = \tilde{w}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right)$ con $\tilde{w}_\alpha(x) = \mathcal{K}_{2\alpha} * \chi_\varepsilon(x)$.

Proposición 4.1 *Para $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ la función w_α satisface*

$$(-\Delta)^\alpha w_\alpha + \frac{1}{2} w_\alpha \geq 0$$

y además

$$0 < w_\alpha \leq \frac{c}{|x|^{N+2\alpha}}.$$

Demostración. Como $\mathcal{K}_{2\alpha}$ es estrictamente positiva, w_α también lo es. Además,

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^\alpha w_\alpha(x) + \frac{1}{2} w_\alpha(x) &= \frac{1}{2^{2\alpha}}(-\Delta)^\alpha \tilde{w}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\tilde{w}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{2^{2\alpha}}\left[(-\Delta)^\alpha \tilde{w}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) + \tilde{w}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2^{2\alpha}}\chi_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$w_\alpha(x) = \mathcal{K}_{2\alpha} * \chi_\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \leq \int_{B(\frac{x}{2},1)} \mathcal{K}_{2\alpha}(y)\, dy \leq c\mathcal{K}_{2\alpha}\left(\frac{x}{2}\right),$$

y se concluye el decaimiento de w_α gracias a la proposición 2.11. □

Proposición 4.2 *w_1 satisface*

$$-\Delta w_1 + \frac{1}{2} w_1 \geq 0$$

y además

$$0 < w_1 \leq c e^{-|x|/2}.$$

Demostración. El argumento es el mismo de la proposición 4.1. □

Teorema 4.2 *Sea $\alpha \in (0,1]$ y sea u una solución clásica del problema (4.1). Entonces existe $c > 0$ tal que*

$$u(x) \leq c w_\alpha(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demostración. Notemos que existe $R > 0$ tal que

$$(-\Delta)^\alpha u + \frac{1}{2} u \leq 0 \qquad \forall x \in B(0,R)^c.$$

Definamos $W = u - cw_\alpha$, donde $c > 0$ es tal que $W \leq 0$ en $\overline{B(0,R)}$. Esto es posible ya que las dos funciones son continuas y estrictamente positivas. Supongamos ahora que existe

$x \in B(0,R)^c$ tal que $W(x) > 0$. Esto implica la existencia de un máximo global positivo $\bar{x}$, y por lo tanto $(-\Delta)^\alpha W(\bar{x}) \geq 0$. Pero

$$(-\Delta)^\alpha W(\bar{x}) \leq -\frac{1}{2}W(\bar{x}) < 0,$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 4.3 *w_α converge uniformemente a w_1 cuando $\alpha \to 1^-$.*

Demostración. Definamos, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\varphi_x(y) = \chi_\varepsilon\left(\frac{x}{2} - y\right).$$

Notemos que $\varphi_x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi_x(y) = \varphi_0(y - \frac{x}{2})$, lo que implica que $\check{\varphi}_x(\xi) = e^{i\xi\cdot x/2}\check{\varphi}_0(\xi)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
|w_\alpha(x) - w_1(x)| &= |(\mathcal{K}_{2\alpha} - \mathcal{K}_2) * \chi_\varepsilon(\tfrac{x}{2})| = |\langle \mathcal{K}_{2\alpha} - \mathcal{K}_2, \varphi_x\rangle| = |\langle \hat{\mathcal{K}}_{2\alpha} - \hat{\mathcal{K}}_2, \check{\varphi}_x\rangle| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{\mathcal{K}}_{2\alpha}(\xi) - \hat{\mathcal{K}}_2(\xi)) e^{i\xi\cdot x/2}\check{\varphi}_0(\xi)\, d\xi \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{\mathcal{K}}_{2\alpha}(\xi) - \hat{\mathcal{K}}_2(\xi)||\check{\varphi}_0(\xi)|\, d\xi \leq \|\hat{\mathcal{K}}_{2\alpha} - \hat{\mathcal{K}}_2\|_\infty \|\check{\varphi}_0\|_1
\end{aligned}$$

Como esta cota es uniforme en x, se concluye el resultado gracias a la proposición 2.12. $\square$

Observación La proposición 4.3 junto con el teorema 4.2 sugieren que también existe algún tipo de convergencia de la solución de la ecuación cuando $\alpha \to 1^-$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En esta memoria se estudiaron tanto las ecuaciones como las propiedades de los operadores involucrados en estas mismas.

El capítulo 2 unifica distintos conceptos y propiedades que están muy dispersos en la literatura, pero que están estrechamente relacionados. Esto se debe a las distintas formas que existen de definir los operadores no locales.

La principal contribución de este trabajo son los resultados del capítulo 3, que generalizan los de [17], válidos para $\alpha = \frac{1}{2}$. Se utilizó una estrategia distinta, basada en [6] y que no hace uso de un problema local equivalente. También se consideró una clase de funciones más general que $|u|^{p-1}u$ para los resultados de existencia, regularidad y decaimiento. Esto deja abierta la pregunta de si es posible demostrar simetría y decrecimiento en contextos más generales.

El capítulo 4 también plantea nuevas interrogantes. Se logró determinar la convergencia uniforme de las supersoluciones utilizadas en el argumento de comparación cuando $\alpha \to 1^-$, pero ¿se traduce esto en algún tipo de convergencia de las soluciones?, ¿cómo se produce la transición de decaimiento polinomial a exponencial?, ¿cómo influye el hecho de que la constante $\ell(2\alpha)$ definida en (2.7) converge a 0 cuando $\alpha \to 1$? Es de esperar que sea posible aprovechar las propiedades del kernel $\mathcal{K}_\alpha$, analizadas en el capítulo 2, para obtener mayor información acerca de esta transición.

Bibliografía

[1] H. Berestycki y P. Lions. *Nonlinear Scalar Field Equations, II Existence of Infinitely Many Solutions*. Arch. Ration. Mech. Anal. 82. 1983.

[2] R. Blumenthal y R. Getoor. *Some Theorems on Stable Processes*. Trans. Amer. Math. Soc. 95. 1960.

[3] S. Bochner y K. Chandrasekharan. *Fourier Transforms*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, 1949.

[4] L. Caffarelli y L. Silvestre. *An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian*. Commun. Partial Differ. Equa. 32. 2007.

[5] A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions, Vol. II*. Bateman Manuscript Project. McGraw-Hill, 1953.

[6] P. Felmer, A. Quaas, y J. Tan. *Positive Solutions of Nonlinear Schrodinger Equation with the Fractional Laplacian*.

[7] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 2008.

[8] S. Hayek. *Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

[9] L. Ma y D. Chen. *Radial Symmetry and Monotonicity for an Integral Equation*. J. Math. Anal. Appl. 342. 2008.

[10] J. Mawhin y M. Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Applied Mathematical Sciences 74. Springer, Berlin, 1989.

[11] E. Di Nezzaa, G. Palatucci, y E. Valdinoci. *Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces*. 2011.

[12] G. Polya. *On the Zeros of an Integral Function Represented by Courier's Integral*. Messenger of Math. vol. 52. 1923.

[13] P. Rabinowitz. *On a Class of Nonlinear Schrodinger Equations*. Math. Phys. 43. Z. Angew, 1992.

[14] X. Ros-Oton y J. Serra. *Fractional Laplacian: Pohozaev Identity an Nonexistence Results*. 2012.

[15] W. Sickel y L. Skrzypczak. *Radial Subspaces of Besov and Lizorkin-Triebel Classes: Extended Strauss Lemma and Compactness of Embeddings*. The Journal of Fourier Analysis and Applications, Volume 6, Issue 6. Birkhauser, Boston, 2000.

[16] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[17] J. Tan, Y. Wang, y J. Yang. *Nonlinear Fractional Field Equations*. Nonlinear Analysis 75. Elsevier, 2012.