



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

ESTIMACIÓN MULTIVARIABLE Y SESGO CONDICIONAL
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

DIEGO ROLANDO VERGARA BUSTOS

PROFESOR GUÍA
XAVIER EMERY

MIEMBROS DE LA COMISIÓN
JULIÁN ORTIZ CABRERA
EDUARDO MAGRI VARELA

SANTIAGO DE CHILE
JULIO 2013

RESUMEN EJECUTIVO

El insesgo condicional es una propiedad deseada en un modelo de estimación de recursos. Esta propiedad indica que los recursos (leyes, tonelaje y metal) recuperados sobre cierta ley de corte, son iguales a los recursos estimados. Los estimadores geoestadísticos como el kriging generalmente producen estimaciones condicionalmente insesgados, dependiendo del tamaño y diseño de la vecindad de búsqueda.

Poco se conoce sobre el sesgo condicional en un contexto multivariable, cuando el interés recae en la estimación conjunta de varias especies minerales. Para abordar este problema se analiza un caso de estudio correspondiente a un yacimiento ubicado en el norte de Chile. Los datos consisten en muestras de testigos de sondajes, con información sobre las leyes de cobre y arsénico. Estas leyes se encuentran altamente correlacionadas debido a que la mineralización ocurre principalmente en forma de enargita y tenantita. Además, a diferencia del cobre, falta la información de arsénico en algunos puntos de muestreo, lo que hace que el enfoque multivariable (cokriging) particularmente adecuado para esta estimación de recursos.

La metodología considera los siguientes pasos. Primero las leyes de cobre y de arsénico son simuladas de manera conjunta, para crear modelos de referencias con los cuales se harán las comparaciones. Luego, usando las muestras de sondajes, las leyes serán estimadas separadamente mediante kriging y en conjunto mediante cokriging, usando una vecindad móvil que considera distintos números de datos en cada estimación. También son consideradas estimaciones mediante media de simulaciones y de cosimulaciones. Finalmente, el sesgo condicional es cuantificado aplicando leyes de corte de cobre o de arsénico (o de ambas especies) para mostrar la dependencia entre las variables estimadas. Para cuantificar el sesgo condicional se utilizan dos curvas, la primera muestra la ley media (estimada y real) en función de la ley de corte y la segunda muestra el tonelaje (estimado y real) en función de la ley de corte.

Los resultados indican que el sesgo condicional es considerable cuando la vecindad tiene pocos datos, independiente del tipo de estimación (kriging o cokriging). También se observa una disminución del sesgo condicional cuando se utiliza cokriging en vez de kriging. Las estimaciones realizadas mediante simulación y cosimulación muestran un bajo sesgo condicional.

ABSTRACT

Conditional unbiasedness is a desirable property of an estimated grade model. This property entails that the resources (grades, tonnages and metal contents) actually recovered above any cut-off grade are equal to the estimated resources. Geostatistical estimators such as kriging usually yield conditionally unbiased estimates, provided an adequate design of the kriging neighborhood.

So far, little is known about conditional bias in the multivariate context, when it is of interest to jointly estimate several mineral species. To address this problem, a case study corresponding to a deposit located in northern Chile is considered. The data consist of exploration drill hole samples, with information on copper and arsenic grades. These grades appear to be highly correlated because the mineralisation mainly occurs in the form of enargite and tennantite. Also, contrarily to copper grade, the information of the arsenic grade is missing at some sampling locations, which makes multivariate approaches (cokriging) particularly suited to resources estimation.

The methodology consists of the following steps. First, the copper and arsenic grades are jointly simulated in order to create reference models upon which comparisons will be made. Then, using the drill hole samples, the grades are separately estimated by kriging and jointly estimated by cokriging, using moving neighborhoods that differ by the number of data used in the estimation process. It is also considered estimation by simulation and cosimulation. Finally, conditional bias is quantified by applying cut-off grades on the copper or the arsenic estimates, or on both estimates in order to assess the interdependence between the two variables. For quantifying the conditional bias two different selectivity curves are used, the first shows the cut-off grade versus mean grade (estimated and real); the second curve shows the cut-off grade versus the tonnage (estimated and real).

The results indicate that conditional bias is considerable in the case of neighborhoods with few data, irrespective of whether kriging or cokriging is used. Also, when determining the resources on one variable conditionally to a cut-off on the other variable, conditional bias is reduced when using cokriging instead of kriging. The estimation made by simulation and cosimulation show a low conditional bias.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría agradecer a mis padres y a mi hermana por su apoyo incondicional y eterno cariño, por todo. A mi familia por el cariño que entregan cada vez que nos reunimos. Quisiera agradecer a mis tíos Marcelo y Horacio, estoy seguro de que no hubiese llegado tan lejos sin ustedes. Y un especial agradecimiento a mi abuela, por todo.

A mis amigos, por los buenos recuerdos y los mejores años de mi vida.

A mi comisión, en especial al profesor Xavier Emery y Julián Ortiz, no solo por guiarme en este trabajo, sino que por mostrar su dedicación y compromiso con el trabajo, el departamento y sus alumnos. A Juanita, por ser la mejor secretaria de la Universidad.

A FONDECYT y su proyecto 1090013, por el financiamiento para este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	1
1.3. Alcances.....	2
2. ANTECEDENTES	3
2.1. Conceptos previos.....	3
2.2. Variogramas.....	3
2.3. Kriging.....	5
2.4. Cokriging	9
2.5. Vecindad	10
2.6. Propiedades de los estimadores	11
2.7. Relación entre suavizamiento y sesgo condicional	13
2.8. Simulaciones.....	16
3. METODOLOGÍA	18
4. CASO ESTUDIO	21
4.1. Análisis exploratorio de datos	21
4.2. Generación de caso base	29
4.3. Estimación local	41
4.4. Análisis de sesgo condicional	53
5. CONCLUSIONES	62
6. REFERENCIAS.....	63
ANEXO A: ANÁLISIS VARIOGRÁFICO EN DIRECCIONES PRINCIPALES.....	64
ANEXO B: VALIDACIONES CRUZADAS	66
ANEXO C: PERFIL NORTE-COTA DE ESTIMACIONES	71
ANEXO D: VALIDACIÓN GRÁFICA DE LAS ESTIMACIONES	73
ANEXO E: RESULTADOS DE SESGO CONDICIONAL.....	76
ANEXO F: RESULTADOS DE SESGO CONDICIONAL PARA ESTIMACIONES MEDIANTE MÉTODOS DE SIMULACIÓN.....	82

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Estadísticas básicas muestras	23
Tabla 2: Localización de muestras	24
Tabla 3: Estadísticas datos desagrupados.....	26
Tabla 4: Definición de grilla	29
Tabla 5: Estadística datos normales	30
Tabla 6: Parámetros variogramas experimentales datos gaussianos	35
Tabla 7: Estadística de simulaciones puntuales.....	37
Tabla 8: Parámetros variogramas valores simulados a soporte puntual	38
Tabla 9: Estadística estimación de cobre mediante kriging.....	45
Tabla 10: Estadística estimación de arsénico mediante kriging	45
Tabla 11: Estadística estimación de cobre mediante cokriging	48
Tabla 12: Estadística estimación de arsénico mediante cokriging	48
Tabla 13: Estadística estimación mediante media de simulaciones.....	50
Tabla 14: Estadística estimación mediante media de cosimulaciones	51
Tabla 15: Resumen de datos desagrupados.....	52
Tabla 16: Resumen de estadística para estimación de cobre (kriging y cokriging)	52
Tabla 17: Resumen de estadística para estimación de arsénico (kriging y cokriging) ...	52
Tabla 18: Resumen de estadística para estimación mediante simulaciones	52

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Suavizamiento en la estimación	11
Figura 2: Sesgo condicional	12
Figura 3: Distorsión en estimación	13
Figura 4: Resultados de simulación condicional.....	17
Figura 5: Metodología caso estudio	21
Figura 6: Ubicación de Mina Ministro Hales	22
Figura 7: Unidades geológicas de Mina Ministro Hales.....	23
Figura 8: Vista isométrica de muestras	24
Figura 9: Proyección Norte-Cota de muestras	25
Figura 10: Histograma desagrupado de cobre	26
Figura 11: Histograma acumulado de cobre.....	26
Figura 12: Histograma desagrupado de arsénico.....	27
Figura 13: Histograma acumulado de arsénico	27
Figura 14: Correlación cobre – arsénico	28
Figura 15: Nubes direccionales de cobre	28
Figura 16: Nubes direccionales de arsénico	28
Figura 17: Histograma de variables normales	29
Figura 18: Nube correlación diferida (5 y 20 metros)	31
Figura 19: Comparación entre variograma y madograma	32
Figura 20: Mapa variográfico datos gaussianos de cobre	33
Figura 21: Mapa variográfico datos gaussianos de arsénico	34
Figura 22: Variogramas experimentales variables Gaussianas.....	35
Figura 23: Variogramas modelados	36
Figura 24: Gráficos Cuantil contra cuantil datos simulación puntual	37
Figura 25: Variogramas de simulación a soporte puntual	38
Figura 26: Variogramas cruzados de simulación a soporte puntual	39
Figura 27: Media direccional de cobre	39
Figura 28: Media direccional de arsénico.....	40
Figura 29: Dispersión entre valores de simulación puntual	40
Figura 30: Mapa variográfico datos de cobre	41
Figura 31: Mapa variográfico datos de arsénico.....	42
Figura 32: Variogramas experimentales variables	43
Figura 33: Variogramas modelados	44
Figura 34: Curvas tonelaje – ley de estimación por kriging (Cu)	45
Figura 35: Curvas tonelaje – ley media de estimación por kriging (As).....	46
Figura 36: Histogramas de estimación de cobre mediante kriging.....	46
Figura 37: Histogramas de estimación de arsénico mediante kriging	46
Figura 38 Vecindad para datos con muestreo heterotópico	47
Figura 39: Curvas tonelaje – ley de estimación por cokriging (Cu)	48
Figura 40: Curvas tonelaje – ley media de estimación por cokriging (As)	49
Figura 41: Histogramas de estimación de cobre mediante cokriging	49
Figura 42: Histogramas de estimación de arsénico mediante cokriging.....	49
Figura 43: Curva tonelaje – ley (media de simulaciones).....	50
Figura 44: Histogramas de estimación mediante media de simulaciones	50
Figura 45: Curva tonelaje – ley (media de cosimulaciones)	51
Figura 46: Histogramas de estimación mediante media de cosimulaciones	51
Figura 47: Sesgo condicional univariable de cobre (kriging y cokriging)	54
Figura 48: Sesgo condicional univariable de arsénico (kriging y cokriging)	55

Figura 49: Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico (kriging y cokriging)..	56
Figura 50: Sesgo condicional bivariable cobre (kriging y cokriging)	57
Figura 51: Sesgo condicional bivariable arsénico (kriging y cokriging)	58
Figura 52: Sesgo condicional univariable de cobre (simulación y cosimulación)	59
Figura 53: Sesgo condicional univariable de arsénico (simulación y cosimulación).....	59
Figura 54: Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico (simulación y cosimulación)	60
Figura 55: Sesgo condicional bivariable cobre (simulación y cosimulación)	60
Figura 56: Sesgo condicional bivariable arsénico (simulación y cosimulación).....	61

1. INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

La evaluación de yacimientos es una disciplina que involucra conocimientos de probabilidad, estadística y geología, entre otras áreas científicas. Esta área de estudio surge de la necesidad de caracterizar lo mejor posible un yacimiento tanto cualitativa como cuantitativamente, buscando disminuir la incertidumbre asociada a la estimación de recursos geológicos. El producto final de este proceso se traduce en estimaciones de aspectos de interés como la ley, tonelaje y aspectos geometalúrgicos (entre otros) del yacimiento que luego serán datos de entrada para el proceso de diseño, tanto minero como de la planta de tratamiento.

En la mayoría de los depósitos minerales, existe una mineralización conjunta de varias especies de interés, ya sea económico (como cobre, oro, plata, molibdeno, entre otros) o contaminantes (como arsénico, bismuto, azufre, entre otros). Luego para la estimación de recursos recuperables se incorpora la información que entrega la mineralización conjunta de dichas especies, realizando una estimación de recursos multivariable.

La estimación multivariable adquiere aún más importancia cuando existe un muestreo heterotópico, es decir cuando existe mayor cantidad de sitios con datos de una especie de interés que de otras. Por tanto la información que puede aportar la variable con mayor cantidad de datos ayuda a estimar con más precisión la variable submuestreada.

El cumplimiento de planes de producción y las normativas ambientales, cada vez más exigentes, desafían a la estimación de recursos recuperables a realizar predicciones cada vez más precisas, buscando disminuir la brecha entre los valores estimados y los valores reales, es decir con sesgo global cercano a cero, pero no sólo es necesario tener estimaciones globalmente insesgadas, sino también insesgadas condicionalmente (para aquellos bloques cuya ley estimada supera una ley de corte, se desea que el error promedio sea cercano a cero).

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

El objetivo principal es cuantificar el sesgo condicional univariable y multivariable en un yacimiento, cuyos recursos recuperables (leyes, tonelajes, finos) son estimados mediante kriging y cokriging utilizando distintas vecindades.

1.2.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos son:

- Realizar una extensión al estudio sobre el sesgo condicional para los casos univariable y multivariable.
- Discutir bajo qué condiciones del tipo de estimación (univariable o multivariable) y para qué vecindad implementada (variando la cantidad de datos en la vecindad) se genera un sesgo al imponer condiciones en las variables estimadas.

1.3. ALCANCES

Los alcances de este trabajo están dados básicamente por los siguientes puntos:

- Análisis del sesgo condicional para las distintas vecindades consideradas.
- El caso estudio se realizará considerando una base de datos de dos variables.
- La validación de los resultados se hará con una serie de realizaciones de cosimulación que generan distintos escenarios del yacimiento.

2. ANTECEDENTES

2.1. CONCEPTOS PREVIOS

La geoestadística corresponde al estudio de fenómenos que se extienden en el espacio (regionalizados) y que presentan cierta continuidad espacial. Para describir estos fenómenos y ciertas variables regionalizadas, como por ejemplo la ley de mineral, se utiliza el concepto de función aleatoria.

En este contexto, se interpreta cada valor de la variable regionalizada en un determinado sitio x como una realización de una variable aleatoria $Z(x)$ en un dominio D . El conjunto de variables aleatorias constituye una función aleatoria que está dada por:

$$Z = \{Z(x), x \in D\}$$

Las funciones aleatorias se caracterizan por tener una distribución espacial, formada por el conjunto de funciones de distribución de la siguiente forma:

$$F_{x_1, \dots, x_k}(z_1, \dots, z_k) = Prob\{Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k\} \quad \forall z_1, \dots, z_k \in R$$

La unidad de superficie o volumen sobre el cual se realizan las mediciones y estimaciones de la variable regionalizada se denomina soporte, que pueden corresponder a unidades de extracción en caso de aplicaciones mineras.

Como sólo se tiene una realización de la función aleatoria y ésta sólo es conocida en los puntos de muestreo, no es posible realizar inferencia estadística en forma general. Para ello es necesario asumir la hipótesis de estacionaridad, que postula que los valores que se encuentran en las distintas regiones presentan las mismas características y pueden considerarse realizaciones de la misma f aleatoria. Matemáticamente la hipótesis postula que la distribución espacial de la función aleatoria es invariante por traslación, es decir, que las propiedades de un conjunto de datos no dependen de su posición absoluta en el espacio, sino que solamente de sus posiciones relativas.

2.2. VARIOGRAMAS

Una herramienta común utilizada en los modelos geoestadísticos es el variograma. El variograma es una herramienta que permite analizar el comportamiento espacial de una variable sobre un área definida. A partir de la información proporcionada por el variograma y los sitios muestreados se realizará la estimación por kriging y por cokriging.

2.2.1. Variograma experimental

El variograma experimental de una variable z se define como:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(u_i) - z(u_i + h)]^2$$

Donde $N(h)$ representa el número de pares de datos que se encuentran separados por el vector h . Para el caso multivariable se considera un modelo cruzado para el variograma entre las distintas especies involucradas (z_i y z_j):

$$\hat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{2|N_{ij}(h)|} \sum_{N_{ij}(h)} [z_i(x_\alpha) - z_i(x_\alpha + h)] \cdot [z_j(x_\alpha) - z_j(x_\alpha + h)]$$

2.2.2. Variograma modelado

Luego de haber desarrollado el cálculo experimental de los variogramas es necesario realizar ajustes, ya que éstos son imperfectos (los valores pueden cambiar según las tolerancias usadas como parámetro de entrada) e incompletos (se calcula para algunas direcciones y algunas distancias). Se debe mencionar que el variograma modelado estima el variograma teórico sin sesgo y debe cumplir las siguientes propiedades matemáticas:

- Función positiva: $\gamma(h) \geq 0$
- Función par: $\gamma(h) = \gamma(-h)$
- Nulidad en el origen: $\gamma(0) = 0$
- En el infinito, crece más lentamente que una parábola
- Función de tipo negativo condicional

Para el ajuste del variograma es común utilizar alguno de los siguientes modelos básicos:

Efecto pepita:

$$\gamma(h) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } h = 0 \\ C \text{ en caso contrario} \end{array} \right\}$$

Este modelo se traduce en una ausencia total de correlación en el espacio, es decir, dos variables aleatorias distintas tienen valores independientes.

Modelo esférico:

$$\gamma(h) = \left\{ \begin{array}{l} C \left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) \text{ si } h \leq a \\ C \text{ en caso contrario} \end{array} \right\}$$

El alcance corresponde al parámetro a , la meseta al parámetro C .

Modelo exponencial:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{3h}{a}\right) \right\}$$

Este modelo es similar al esférico, pero asciende más abruptamente, tiene más curvatura y alcanza la meseta C sólo en forma asintótica.

Para obtener modelos más complejos, se puede sumar varios variogramas elementales, y se habla de variogramas anidados los cuales permiten modelar variogramas con un mejor ajuste.

Para ajustar el variograma cruzado entre dos variables existen restricciones adicionales: El ajuste debe ser realizado como combinación lineal de los modelos considerados para el ajuste de los variogramas de cada variable aleatoria, el que escrito en forma matricial debe tener matrices de coeficientes definidas positivas.

2.2.3. Validación cruzada

La validación cruzada es una técnica estadística que permite verificar la adecuación entre los datos y los parámetros adoptados, ya sea para probar el ajuste de un modelo variográfico, vecindad de kriging, u otros. Esta técnica estima mediante kriging cada dato considerando sólo los datos restantes. A partir de lo anterior, se puede calcular el error de estimación utilizando la diferencia entre el valor estimado y el valor real de dicho dato, y realizar un análisis estadístico de los errores cometidos en todos los sitios con datos.

La validación cruzada es presentada usualmente bajo la forma de pruebas gráficas, en especial:

- Nube de correlación entre los valores de los datos y los valores estimados.
- Histograma de errores y errores estandarizados.
- Nube de correlación entre los errores estandarizados y los valores estimados.

El objetivo final de la validación cruzada es poder cuantificar y establecer el posible sesgo en que se puede estar incurriendo, la precisión del estimador y comparar la calidad de diferentes ajustes posibles de distintos modelos variográficos.

A continuación se describen algunos métodos de estimación de recursos, y sus características.

2.3. KRIGING

Para la estimación de recursos es necesario considerar que el muestreo realizado mediante los sondeos es parcial, esto quiere decir que sólo se conoce el valor de la variable de interés en algunas posiciones, haciéndose necesario estimar el valor de la variable en puntos sin muestra. Esta estimación se puede realizar mediante la técnica

de kriging, en la cual se utilizan los valores de los datos muestreados para definir el valor en otros puntos sin muestra considerando los siguientes aspectos:

- Cercanía entre los datos muestreados y el punto a estimar.
- Redundancia de los datos.
- Continuidad espacial de la variable.

El objetivo consiste en encontrar el valor de la variable de interés para los distintos datos considerando los aspectos previamente señalados. Como datos de entrada, utiliza los valores medidos de la variable regionalizada y un modelo variográfico, que mide el contraste entre los valores de las muestras en función de la distancia que los separa. El kriging es, por definición, el estimador lineal insesgado de varianza mínima y existen varios tipos. Dentro de los más importantes se tiene el kriging simple y kriging ordinario, que se explican a continuación.

2.3.1. Kriging simple

Para este tipo de kriging se cuenta con las siguientes hipótesis:

- Se conoce el valor promedio m de la variable regionalizada
- También se conoce el variograma $\gamma(h)$, el cual presenta una meseta: $\gamma(\infty) = \sigma^2$
- Existe una función de covarianza, dada por $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h)$

En este modelo se trata de estimar los valores de la variable en función de los datos medidos utilizando la condición de insesgo y la condición de varianza mínima, realizando el cálculo como sigue.

$$Z^*(x) = a_{ks} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} \cdot Z(x_i)$$

Donde $Z^*(x)$ representa el valor estimado en el sitio x , a_{ks} un factor de adición y λ_i^{ks} son los ponderadores de los sitios con muestras x_i .

Luego para estimar el valor de la variable regionalizada en un punto es necesario estimar el valor de a_{ks} y los ponderadores λ_i^{ks} , los que se calculan considerando la condición de insesgo y de varianza mínima.

De la condición de insesgo se tiene que el error esperado debe ser nulo. Este error esperado es:

$$\begin{aligned} E\{Z^*(x) - Z(x)\} &= a_{ks} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} \cdot E\{Z(x_i)\} - E\{Z(x)\} \\ &= a_{ks} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} \cdot m - m \end{aligned}$$

Para que este valor sea nulo se debe imponer:

$$a_{ks} = (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks}) \cdot m$$

De la condición de varianza de error mínima se tiene una expresión para calcular el valor de los estimadores:

$$\begin{aligned} Var\{Z^*(x) - Z(x)\} &= Var(Z^*(x)) - 2 * Cov(Z^*(x), Z(x)) + Var(Z(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j Cov(Z(x_i), Z(x_j)) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} Cov(Z(x), Z(x_i)) + C(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^{ks} \lambda_j^{ks} C(x_i - x_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} C(x - x_i) + C(0) \end{aligned}$$

Para buscar los ponderadores que minimizan la varianza del error, es necesario derivar parcialmente con respecto a los ponderadores e igualar a cero, obteniendo que:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_i^{ks} C(x_i - x_j) = C(x - x_i) \quad \forall i: 1 \dots n$$

Las ecuaciones anteriores pueden verse de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{ks} \\ \vdots \\ \lambda_n^{ks} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x) \\ \vdots \\ C(x_n - x) \end{pmatrix}$$

El valor de la varianza minimizada (denominada varianza de kriging) está dado por la siguiente expresión:

$$\sigma_{ks}^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ks} C(x_i - x)$$

2.3.2. Kriging ordinario

Este tipo de kriging cuenta con las siguientes hipótesis:

- No se conoce el valor promedio m de la variable regionalizada.
- Sólo se conoce el variograma $\gamma(h)$ o la función de covarianza $C(h)$

Para este modelo se imponen condiciones para asegurar que el estimador sea insesgado y de varianza mínima (óptimo). El estimador tiene la siguiente forma:

$$Z^*(x) = a_{ko} + \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} \cdot Z(x_i)$$

Donde $Z^*(x)$ representa el valor estimado en el sitio x , a_{ko} un factor de adición y λ_i^{ko} son los ponderadores de los sitios con muestras x_i .

Utilizando la condición de insesgo, se tiene que el valor esperado del error de estimación es:

$$\begin{aligned} E\{Z^*(x) - Z(x)\} &= a_{ko} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E\{Z(x_i)\} - E\{Z(x)\} \\ &= a_{ko} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot m - m \end{aligned}$$

El cuál debe tener un valor igual a cero para asegurar insesgo en el estimador. De donde se desprende que:

$$a_{ko} = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} = 1$$

La varianza del error de estimación se expresa en función de la covarianza y se debe minimizar, para la condición de varianza mínima del error:

$$\begin{aligned} Var\{Z^*(x) - Z(x)\} &= Var(Z^*(x)) - 2 * Cov(Z^*(x), Z(x)) + Var(Z(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^{ko} \lambda_j^{ko} Cov(Z(x_i), Z(x_j)) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} Cov(Z(x), Z(x_i)) + C(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^{ko} \lambda_j^{ko} C(x_i - x_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} C(x - x_i) + C(0) \end{aligned}$$

Para el cálculo de los ponderadores es necesario introducir un multiplicador de Lagrange antes de calcular las derivadas parciales con respecto a los ponderadores e igualar a cero, ya que es necesario incorporar la restricción que la suma de los ponderadores debe ser uno.

$$\begin{aligned} &Var\{Z^*(x) - Z(x)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i^{ko} \lambda_j^{ko} C(x_i - x_j) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} C(x - x_i) + C(0) + 2\mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} - 1 \right) \end{aligned}$$

Como resultado de las derivadas parciales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{ko} C(x_i - x_j) + \mu = C(x - x_i) \quad \forall i: 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} = 1$$

El que expresado de forma matricial tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{ko} \\ \vdots \\ \lambda_n^{ko} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x) \\ \vdots \\ C(x_n - x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

La varianza de kriging tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{ko}^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^{ko} C(x_i - x) - \mu$$

2.4. COKRIGING

Muchas veces en los yacimientos coexisten varias especies de interés, tanto de valor comercial como contaminantes, debido a que la ocurrencia de especies se encuentra ligada al mismo proceso (por ejemplo, los procesos de mineralización de pirita y de calcopirita), por tanto las especies que están siendo estudiadas están relacionadas entre sí.

Con el fin de incorporar la relación entre las variables estudiadas surge el cokriging, como una extensión del kriging al caso multivariable, permitiendo una estimación multivariable insesgada y de varianza del error mínima.

Supongamos que se desea estimar la variable Z_1 en el sitio x_0 utilizando las variables $Z_1 \dots Z_N$, la estimación en este caso tiene la siguiente expresión general:

$$Z_1^*(x_0) = a + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i Z_i(x_{\alpha}^i)$$

Donde x_{α}^i representa al α -ésimo punto con dato de la especie i . Para el caso de cokriging simple (con medias conocidas $\{m_i, i = 1 \dots n_i\}$ para cada variable), al exigir la esperanza nula del error de estimación se tiene que:

$$E\{Z^*(x) - Z(x)\} = a + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i \cdot E\{Z(x_{\alpha}^i)\} - E\{Z(x)\}$$

Lo que lleva a:

$$a = \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^1 \right) \cdot m_1 - \sum_{i=1}^N \left[m_i \sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i \right]$$

La condición de varianza mínima genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^{n_j} \lambda_{\beta}^i C_{ij} (x_{\alpha}^i - x_{\beta}^j) = C_{i1} (x_{\alpha}^i - x_0) \quad \forall i: 1 \dots N, \alpha: 1 \dots n_i$$

Para el caso del cokriging ordinario (que supone desconocidas las medias $m_1 \dots m_N$), las condiciones de insesgo y de varianza del error mínima plantean las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^{n_j} \lambda_{\beta}^i C_{ij} (x_{\alpha}^i - x_{\beta}^j) + \mu_i = C_{i1} (x_{\alpha}^i - x_0) \quad \forall i: 1 \dots N, \alpha: 1 \dots n_i$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{\alpha}^1 = 1$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n_i} \lambda_{\alpha}^i = 0 \quad \forall i: 2 \dots N$$

Este tipo de estimación permite utilizar la información de todas las variables consideradas para estimar la variable de interés, lo que permite, por ejemplo, incorporar mayor información para estimar variables que se encuentren sub muestreadas y que estén correlacionadas con otras variables con mayor información. No obstante, el tiempo de cálculo se ve incrementado considerablemente cuando el número de variables es muy grande.

2.5. VECINDAD

La vecindad se define como el dominio del espacio que contiene tanto el sitio a estimar y los datos utilizados en la estimación, lo cual permite varias posibilidades:

Cuando se considera una vecindad única se utilizan todos los datos del dominio, incluidos aquellos que se encuentran muy alejados del sitio a estimar. No obstante, en la práctica la influencia de los puntos muy lejanos será muy baja.

En el caso de una vecindad móvil se utilizan los datos más cercanos al sitio a estudiar. En este tipo de vecindad dos aspectos son importantes: el tamaño y la forma de la vecindad. El tamaño de la vecindad obedece a un equilibrio entre la precisión de la estimación (la precisión aumenta cuando la vecindad es mayor), el aumento de los tiempos de cálculos al considerar vecindades mayores y la menor confiabilidad del

modelo variográfico para grandes distancias. La forma de la vecindad debe considerar la anisotropía de la variable regionalizada, reflejada en su variograma.

Existen métodos de validaciones (validación cruzada o jack-knife) que permite comparar los resultados obtenidos al considerar distintos tamaños de vecindades.

2.6. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

A continuación se presentan dos de las principales propiedades de los estimadores: el suavizamiento y el sesgo condicional.

2.6.1. Suavizamiento

A pesar de ser el mejor estimador lineal insesgado, el kriging genera suavizamiento en la estimación. Esto quiere decir que sobre estima las leyes bajas y sub estima las leyes altas, entregando un rango más estrecho de los valores estimados que el real, haciéndolo inapropiado cuando los valores extremos (leyes altas y bajas) son relevantes lo que muchas veces conduce a estimaciones erróneas.

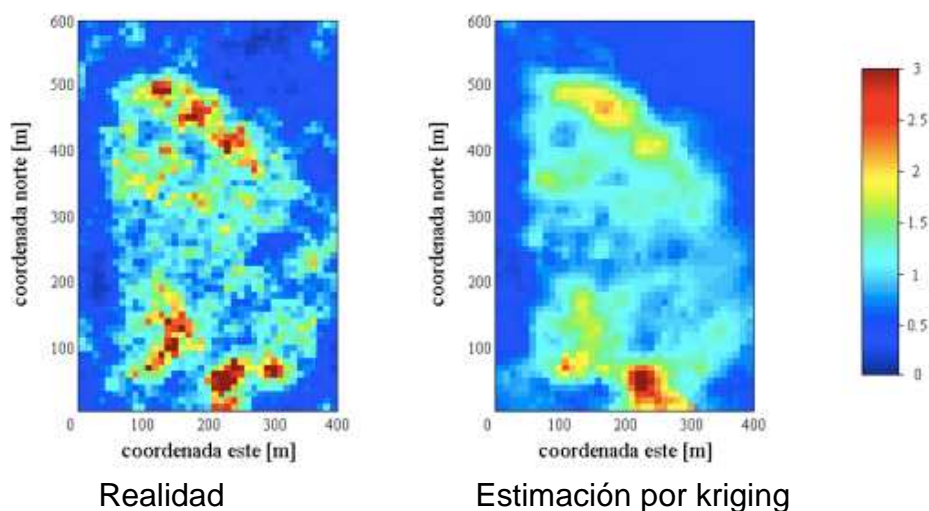


Figura 1: Suavizamiento en la estimación
(Fuente: Apuntes docentes)

En la Figura 1 se aprecia el efecto del suavizamiento al realizar estimación por kriging, que se produce, cuando se aumenta el número de datos en la vecindad de búsqueda para realizar la estimación. En la misma figura se puede constatar que cuando los valores extremos (generalmente las leyes altas) son relevantes, el kriging no entrega una buena estimación. Esto es importante, por ejemplo, para la estimación en vetas. Por el contrario, cuando se estudia un yacimiento muy diseminado, como puede ser el caso de un pórfido cuprífero, su efecto puede no ser tan relevante.

2.6.2. Sesgo condicional

Otra de las propiedades de los modelos de estimación es buscar que la estimación sea globalmente insesgada, es decir que la ley media de los valores estimados sea cercana a la ley real. En términos matemáticos, se busca que el valor esperado del error de estimación sea cero.

No obstante, a pesar de que la estimación sea globalmente insesgada, puede ser sesgada si se aplica una cierta condición. Por ejemplo, en bloques estimados sobre una ley de corte, la ley media estimada no necesariamente coincide con la ley media real sobre dicha ley de corte, lo que lleva errores, generando una distorsión del negocio que ocurre en el momento de la selección estéril/mineral. Otra distorsión ocurre al imponer una condición sobre los bloques (nuevamente bloques con ley estimada superior a cierta ley de corte para una especie de interés), se puede inducir a que la ley media estimada de otra especie no corresponda con la ley media real, afectando la rentabilidad del negocio, porque estas otras especies pueden estar asociadas, por ejemplo, a impurezas.

Luego no sólo es necesario que el valor esperado del error de todos los bloques sea cercano a cero, sino también es importante que los recursos que cumplan con una condición (por ejemplo, superior a una ley de corte) sean iguales a los recursos reales, es decir que sean condicionalmente insesgados. Matemáticamente, el sesgo condicional expresa que la ley media real (Z) sobre cierta ley de corte z , sea igual a la ley media estimada (Z^*) sobre dicha ley de corte.

$$E(Z|Z^* \geq z) = Z^*$$

En la Figura 2 se tienen dos estimaciones globalmente insesgadas. No obstante, la figura de la derecha es sesgada condicionalmente, ya que la ley media estimada es menor (también podría ser mayor) que la ley media real cuando se aplica una ley de corte.

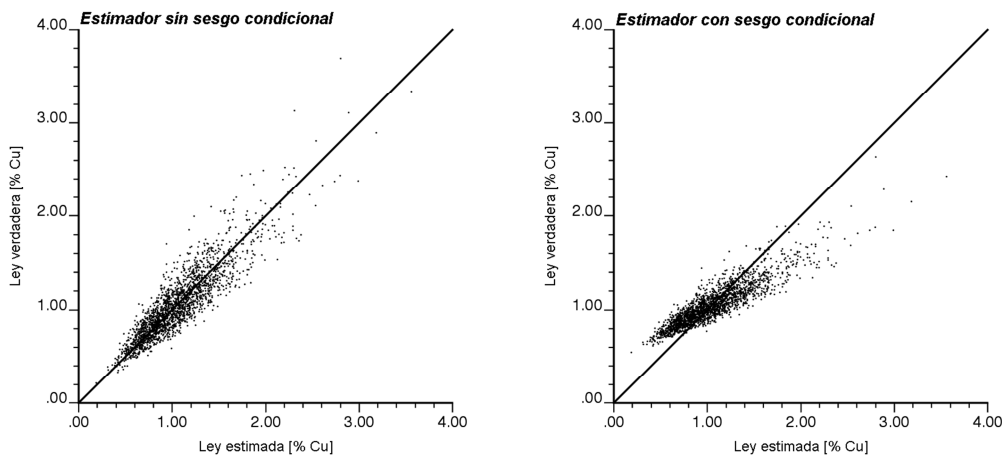


Figura 2: Sesgo condicional
(Fuente: Apuntes docentes)

Además, al tener sesgo condicional, se incurre en una mala apreciación del negocio. La ley media del material enviado a planta (material cuya estimación supera una ley de corte) es inferior a la ley media estimada de este material, mientras que la ley media del material mandado a botadero es superior a la ley media estimada de este material.

2.7. RELACIÓN ENTRE SUAVIZAMIENTO Y SESGO CONDICIONAL

Isaaks (2005) plantea lo que él denomina el oxímoron del kriging, que corresponde a que al realizar una estimación por kriging que minimice el sesgo condicional, necesariamente genera suavizamiento en la estimación. Esto se debe a que para minimizar el sesgo condicional se aumenta el número de datos en la vecindad de búsqueda, que es precisamente lo que genera suavizamiento (el caso recíproco también es cierto: para evitar el suavizamiento disminuye la vecindad generando sesgo condicional). Para reducir estos efectos Isaaks propone realizar dos estimaciones: una estimación global, para conocer las características del yacimiento como un todo, por ejemplo para conocer la ley media del yacimiento y el tonelaje asociado. Y una estimación local, donde el propósito es estimar la ley de los bloques o unidades de extracción, debido a la necesidad conocer la ley en dichas unidades para la selección estéril/mineral.

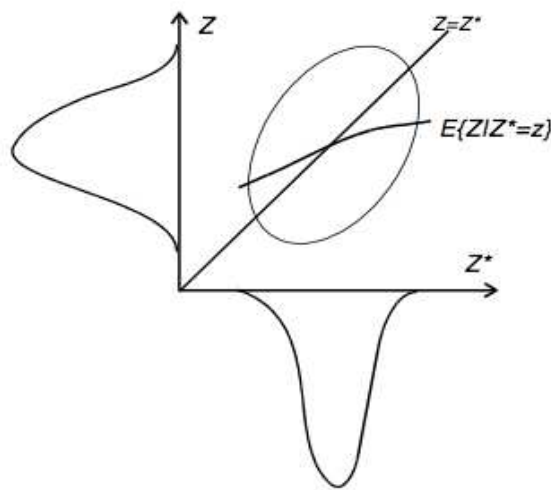


Figura 3: Distorsión en estimación

Fuente: McLennan y Deutsch (2004)

En la Figura 3 se puede observar ambos efectos, el suavizamiento generado en la ley estimada, reduciendo el rango de los valores obtenidos y la presencia de sesgo condicional, que hace que la curva del valor esperado dada una condición se aleje de la diagonal, que corresponde a lo deseado.

Rivoirard (1987) identifica cuales son los parámetros más relevantes en la selección de una vecindad de kriging, los que se detallan a continuación:

1) Pendiente de la regresión entre los valores reales y los estimados, cuya expresión está dada por:

$$\alpha = \frac{cov(Z, Z^*)}{var(Z^*)}$$

La cual debería ser cercana a uno.

2) Ponderador de la media del kriging simple: representa el porcentaje de datos que no está siendo tomados en cuenta por la vecindad, es decir, refleja la falta de información para la vecindad elegida.

Vann et al. (2003) analizan cuáles son los elementos importantes al momento de decidir qué vecindad de búsqueda utilizar en la estimación local mediante kriging. Los autores plantean la necesidad de realizar un análisis comparativo de las vecindades de búsqueda, ya que especificaciones arbitrarias del tamaño de ésta implica aceptar parámetros por defecto, en desmedro de una vecindad correcta.

Vann et al. (2003) plantean que existe una mala concepción de que utilizar como vecindad de búsqueda el alcance del variograma corresponde a una buena estrategia. No obstante, la vecindad de búsqueda debería estar más influenciados por la pendiente del modelo variográfico en los primeros pasos y el efecto pepita relativo que por el alcance del variograma.

Cuando el alcance del variograma se acerca a cero, existe un importante efecto pepita, por tanto para una correcta estimación la vecindad deberá tener un número mayor de datos, ya que no habrá correlación entre cualquier par de sitios, y no estarán correlacionados con la ley real del bloque. Por otro lado cuando el efecto pepa relativo es bajo, los datos se encuentran altamente correlacionados y no existe necesidad de tener una vecindad con un gran número de datos, ya que los datos más cercanos son suficientes para lograr una buena estimación.

La vecindad escogida tiene gran impacto en el resultado de la estimación, en particular si la vecindad es demasiado pequeña (o restrictiva) habrá un sesgo condicional no deseado en la estimación.

El proceso del análisis de la vecindad de búsqueda para kriging busca ajustar la vecindad hasta encontrar una vecindad que permita reducir o eliminar el sesgo condicional. Es importante considerar que necesariamente habrá suavizamiento, como consecuencia del muestreo parcial del yacimiento, que se traduce en que el rango de los valores estimados es menor al rango de los valores reales, por tanto la varianza de los valores estimados será menor a la varianza de los valores reales. En otras palabras, el suavizamiento es necesario para minimizar el sesgo condicional. El análisis de la vecindad de kriging permite determinar cuál es el suavizamiento necesario para asegurar insesgo condicional, con el fin de evitar un suavizamiento que no se traduce en una disminución del sesgo condicional y que no aporta más valor a la estimación.

2.7.1. Pendiente de la regresión

Según lo planteado anteriormente, es posible calcular los parámetros de regresión entre los valores estimados y los reales. Sin embargo, como no se conocen los valores reales, se puede calcular la correlación entre los bloques estimados y los reales. Luego, la pendiente está dada por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{cov(Z, Z^*)}{var(Z^*)} = \rho * \frac{\sigma_v}{\sigma_{v^*}}$$

Dónde:

α : es la pendiente de la regresión.

Z : son los valores reales.

Z^* : son los valores estimados.

σ_v^2 : es la varianza de los valores reales.

$\sigma_{v^*}^2$: es la varianza de los datos estimados.

ρ : es el coeficiente de correlación lineal (Pearson) entre valores reales y estimados.

Idealmente la pendiente de la regresión debería ser lo más cercana a 1 para asegurar insesgo condicional. De la expresión anterior se puede ver que, aunque la pendiente de la regresión sea 1, la correlación puede ser menor que 1, debido al efecto del suavizamiento que queda representado por la razón entre las varianzas (en casos con suavizamiento, la varianza de los valores estimados es menor a la varianza de los valores reales).

2.7.2. Ponderador de la media para kriging simple

En vez de ejecutar una estimación mediante kriging ordinario, donde la suma de los ponderadores corresponde a uno, se puede ejecutar un kriging simple, donde no se considera esa restricción. La diferencia entre uno y la suma de los ponderadores de los datos, corresponde al ponderador de la media en la estimación.

El ponderador de la media para una vecindad entrega una idea clara de la calidad del kriging, debido a que mide el porcentaje de los ponderadores que recae en los valores en la vecindad de estimación. Según Rivoirard (1987), si el ponderador de la media es significativo es necesario escoger una vecindad de mayor tamaño, esto con el fin obtener una estimación que considere principalmente los sitios con datos en la vecindad y que el valor de la estimación no recaiga en la media del kriging.

2.7.3. Distribución de ponderadores del kriging

La vecindad de búsqueda es restrictiva si se puede aumentar su tamaño y encontrar una asignación más distribuida de los ponderadores de estimación. En un resultado optimizado los pesos de kriging deberían ser pequeños, incluso habría una porción negativa. Es decir, los ponderadores se distribuyen entre un gran número de datos en la vecindad y no depende de un número reducido de datos para realizar la estimación.

Es necesario mencionar que obtener ponderadores negativos no acarrea ningún problema si se encuentran en una proporción baja (en torno a un 5%). Vann et al. (2003) señalan estar en contra de modificar los algoritmos de estimación, planteando que no es necesario evitar estimaciones con ponderadores negativos, dado que estas modificaciones suelen producir sesgo condicional.

2.7.4. Varianza de kriging

La varianza en la estimación mediante kriging se denomina varianza de kriging. Al observar la distribución de la varianza de kriging se da una idea de la calidad de la estimación, principalmente en términos de la densidad de los datos y la geometría.

2.8. SIMULACIONES

La estimación mediante kriging posee dos inconvenientes: el suavizamiento, es decir, el rango de los valores estimados es menor al rango real de valores, realizando una sobre estimación de bajas leyes y una sub estimación de las leyes altas. Además, la varianza de la estimación de kriging (que es considerada una medida de precisión) sólo depende de la configuración geométrica de los datos y del modelo del variograma, y no de los valores de las muestras, por lo que no refleja propiedades como el efecto proporcional, ya que se esperaría que la incertidumbre fuera mayor cuando los datos son más dispersos entre sí a cuando tienen valores similares.

Para evitar esto, la simulación construye un modelo numérico, que busca reproducir los valores medidos en los sitios con datos y reproducir las características y variabilidad del yacimiento. Luego el resultado de una simulación puede ser considerado como lo que “podría ser” el yacimiento estudiado y ser manipulado como la realidad. Debido a esto, la estimación mediante kriging o cokriging se complementa con el uso de simulaciones, utilizando kriging o cokriging para realizar la estimación y las simulaciones para cuantificar incertidumbre (por ejemplo, calcular la probabilidad de superar cierto umbral, realizar análisis de riesgo en distintos escenarios)

El propósito de las simulaciones es reproducir la distribución de la función aleatoria estudiada, lo cual es bastante difícil de lograr, porque sólo se cuenta con un número finito de datos. No obstante para el caso de distribuciones multi-gaussianas la distribución queda completamente caracterizada con los dos primeros momentos, esto es su media y su función de covarianza (o su variograma). Como los datos no siempre tienen una distribución multi-gaussiana se realiza un ajuste (anamorfosis), que consiste en deformar el histograma de los datos para transformarlo en el histograma de una distribución normal y luego se supone una hipótesis de multi-gaussianidad.

Existen dos tipos principales de simulaciones: las condicionales y las no condicionales. Las simulaciones condicionales son aquellas que restituyen los valores de los datos en los sitios de muestreo (como se muestra en la Figura 4), mientras que las no condicionales sólo reproducen la variabilidad de los datos.

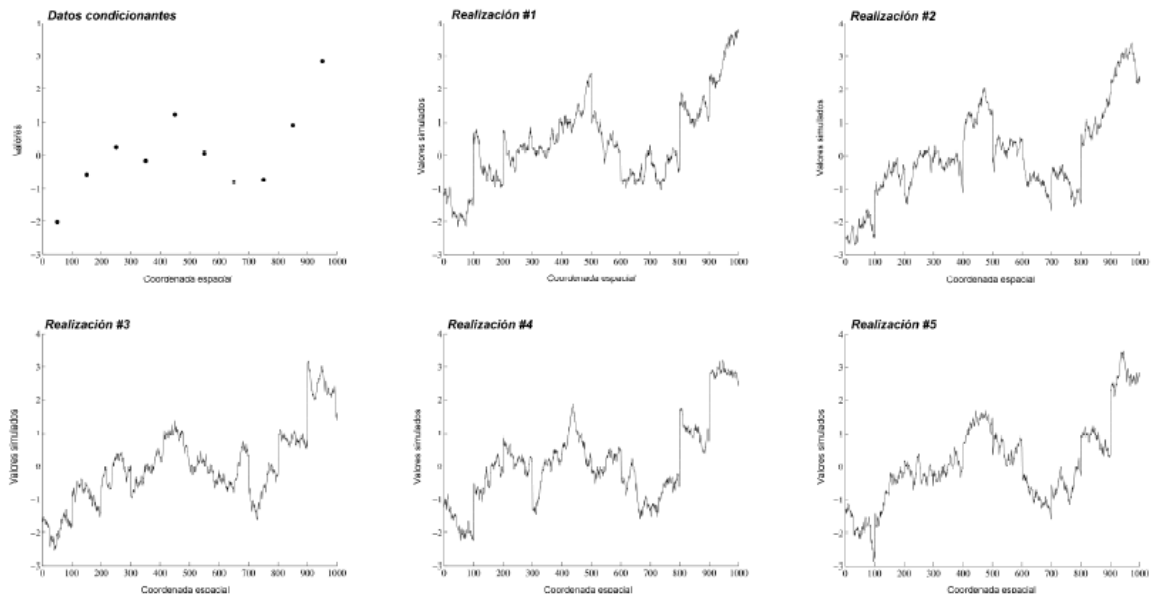


Figura 4: Resultados de simulación condicional
(Fuente: Apuntes docentes)

McLennan y Deutsch (2004) realizaron un estudio acerca del sesgo condicional en las simulaciones, planteando que no es necesario escoger entre suavizamiento y sesgo condicional. Consideran que incrementando el tiempo computacional de manera razonable se puede obtener una solución adecuada. Para ello utiliza el concepto de “probabilidad de mineral” (*probability of ore*) y calculan la ley del mineral utilizando múltiples simulaciones que pueden eliminar el sesgo condicional y el suavizamiento.

La metodología de utilizar simulaciones para estimar los recursos recuperables con bajo sesgo condicional y suavizamiento es:

- 1) Aplicar simulaciones para cuantificar la incertidumbre en las leyes de los bloques y predecir el suavizamiento.
- 2) Calcular la probabilidad de mineral, P_{ore} , para cada bloque con valores simulados y para varias leyes de corte.
- 3) Calcular la ley de mineral considerando los bloques estimados y varias leyes de corte.

Los resultados al calcular la probabilidad de mineral y la ley para todos los bloques deben ser debidamente validados y tienen que ser insesgados condicionalmente para varias leyes de corte.

A pesar de que la estimación de recursos en un contexto multivariable (por ejemplo, depósitos con una mineralización cobre-oro, cobre-molibdeno, oro-plata entre otros) es un problema común, se observa que poco se sabe del sesgo condicional generado en una estimación multivariable. Los antecedentes descritos anteriormente no señalan la causa de un elevado sesgo condicional en un contexto multivariable, donde se busca cuantificar qué sucede con los recursos estimados de una variable de interés cuando se aplica una ley de corte en otra variable o leyes de corte en varias variables. Tampoco

se tiene información si una estimación multivariable de recursos (por ejemplo, mediante cokriging) o una vecindad de búsqueda mayor podrían generar una disminución del sesgo condicional multivariable. Se cree que el sesgo condicional podría ser considerable cuando se utiliza una vecindad de búsqueda pequeña, o cuando se realiza una estimación univariable y se analiza el sesgo condicional multivariable.

3. METODOLOGÍA

El objetivo del presente estudio es cuantificar bajo qué condiciones en la vecindad de búsqueda y tipo de estimación se genera un sesgo condicional, no tan sólo univariable, si no también considerando el sesgo condicional bivariable, el cual es el resultado de imponer una condición de ley de corte sobre una variable y analizar el efecto sobre la otra, o bien imponer condiciones en ambas variables.

El caso estudio considerado corresponde a un yacimiento tipo pórfido cuprífero ubicado en el norte de Chile. Es un depósito de cobre con alto contenido de arsénico. Ambas especies se encuentran correlacionadas debido a que la mineralización ocurre principalmente en forma de enargita y tenantita. Una estimación errada de los recursos recuperables de cobre y arsénico podría generar un incumplimiento de los planes de producción y de normativas ambientales. Por ejemplo, si la ley media de arsénico de los recursos a extraer es demasiado alta podría ser necesario un sistema de abatimiento de arsénico, el cual no necesariamente pudo haber sido considerado de acuerdo a los planes de producción iniciales.

Para el desarrollo del caso estudio se consideran los siguientes pasos:

- 1) Análisis exploratorio de datos: Con el fin de detectar anomalías tales como errores de tipeo, concentraciones de especies que se encuentren fuera de rango (outliers), datos duplicados o muestras que se encuentren muy lejanas al sector que está siendo estudiado (error al ingresar información a la base de datos). El resultado de este análisis es una base de datos que va a ser considerada para las etapas siguientes, y la definición de la grilla de estudio.
- 2) Generación de casos base: Para generar los casos base se consideran cien realizaciones de cosimulaciones a soporte de bloques realizadas mediante el método de bandas rotantes. Cada realización puede ser considerada como una "realidad". El número de realizaciones consideradas busca generar distintos escenarios posibles del yacimiento estudiado. Utilizar cosimulaciones para generar los casos base permite usar toda la información disponible, tanto las muestras como la correlación espacial de las variables estudiadas, y replica la variabilidad de los datos en el espacio. Para la generación de los casos base es necesario:
 - a. Generar datos gaussianos de las variables originales: esto se denomina anamorfosis y consiste en distorsionar el histograma desagrupado de los valores para obtener el histograma de una distribución normal con media cero y varianza uno. Esto se realiza para las dos variables (leyes de cobre y arsénico).

- b. Comprobar el carácter multi gaussiano: el método de las bandas rotantes requiere que la distribución de las variables utilizadas sea multi gaussiana, lo cual no necesariamente corresponde a la transformación normal de cada una de las variables utilizadas. Para comprobar el carácter multi gaussiano se analizan las nubes de correlación diferida entre las variables y la relación entre variogramas y madogramas. Lo anterior permitirá confirmar un comportamiento bigaussiano de las variables.
 - c. Análisis variográfico: Con el fin de detectar direcciones preferenciales de mineralización (anisotropía) se lleva a cabo un análisis variográfico de las variables gaussianas, que consiste principalmente en mapas variográficos y en el cálculo de variogramas experimentales que luego serán ajustados.
 - d. Simulación a soporte puntual: Es necesario realizar una simulación a soporte puntual, previo a la simulación a soporte de bloques, y verificar que la media, la distribución de los valores y los variogramas coincidan entre los valores simulados y los datos. Esto se realiza con el fin de constatar que los parámetros utilizados en el modelo de simulación permiten reproducir el comportamiento de las muestras.
 - e. Simulación a soporte de bloques: Una vez se ha verificado que los parámetros considerados en el modelo de simulación reproducen el comportamiento de las muestras, se realizan cien simulaciones a soporte de bloques utilizadas como casos base. Estas simulaciones no corresponden a un rebloqueo de las simulaciones a soporte puntual, sino que corresponden a nuevas realizaciones.
 - f. Transformación a variable original: La simulación a soporte de bloques se realizan considerando las variables gaussianas, para volver a las variables originales es necesario considerar la función de anamorfosis que fue utilizada para transformar las variables originales a gaussianas.
- 3) Estimaciones mediante kriging y cokriging: Posterior a la generación de casos bases, se realizan las estimaciones mediante kriging y cokriging, para ello es necesario:
- a. Análisis variográfico: Con el fin de detectar direcciones preferenciales de mineralización (anisotropía) se lleva a cabo un análisis variográfico de las variables originales, que consiste en mapas variográficos y en el cálculo de variogramas experimentales que luego serán ajustados.
 - b. Validación del modelo variográfico: Se utiliza para verificar que existe un buen ajuste entre el variograma modelado y las muestras. En esta etapa se realiza una validación cruzada para tres vecindades consideradas (con 4, 16 y 60 datos).
 - c. Realización de estimaciones por kriging y cokriging: Utilizando variogramas directos y cruzado (el cual sólo es utilizado para el caso de cokriging). La estimación se realiza considerando 3 vecindades, considerando 4, 16 y 60 datos respectivamente, esto con el fin de tener varios niveles de suavizamiento. El yacimiento considerado en este estudio tiene un muestreo heterotópico, donde

existen muestras donde sólo se encuentra medido el cobre y no existe información de arsénico. Este muestreo puede generar distorsión al considerar la vecindad como un número fijo de muestras, ya que se pueden dar situaciones donde para estimar la variable menos muestreada se consideran exclusivamente muestras con la variable más muestreada. Para eliminar este inconveniente en la estimación multivariable se considera un número fijo de datos con información de interés de cada variable (por ejemplo, cuatro valores de arsénico y cuatro de cobre, aunque no necesariamente van a corresponder a las mismas muestras).

- 4) Estimaciones mediante simulaciones y cosimulación: Para incorporar estimaciones obtenidas mediante simulaciones es necesario:
 - a. Realización de simulaciones y cosimulaciones: Se realizan cien realizaciones de simulaciones y cosimulaciones utilizando los parámetros (variogramas modelados y función de anamorfosis) que fueron utilizados para la generación de casos bases, estas estimaciones mediante simulaciones buscan reducir el suavizamiento generado. Es necesario señalar que estas realizaciones no corresponden a las que fueron consideradas en los casos bases. La estimación mediante simulaciones y cosimulaciones corresponden al promedio de cien realizaciones de simulaciones y cosimulación, respectivamente.
- 5) Estudio de sesgo condicional: Una vez generados los casos bases y las estimaciones tanto por kriging, cokriging, media de simulaciones y media de cosimulaciones, se realiza el estudio del sesgo condicional que se compone de tres casos:
 - a. Sesgo condicional univariable: Corresponde a observar cuanto difiere la ley media estimada y la ley media real al aplicar una ley de corte en una especie. Este análisis es realizado para cobre y arsénico.
 - b. Sesgo condicional cruzado: Corresponde a observar cuanto difiere la ley media estimada y la ley media real de arsénico al aplicar una ley de cobre.
 - c. Sesgo condicional bivariable: Corresponde a observar cuanto difiere la ley media real y la ley media estimada de cada variable considerada al imponer leyes de corte de cobre y arsénico.

El criterio para determinar que una implementación (tipo de estimación y vecindad considerada) genera mayor o menor sesgo condicional corresponde a las curvas de selectividad ley de corte – ley media y ley de corte – fracción de metal, las cuales permiten visualizar la diferencia entre la ley media (estimada y real) y la fracción de metal (estimada y real), respectivamente.

En la siguiente figura se muestra un esquema que define las principales etapas del estudio, el cual se inicia por análisis exploratorio para lograr una base de datos confiable, para luego generar las distintas estimaciones consideradas en el estudio y diferentes posibles escenarios que constituirán las realidades que se utilizarán para realizar el estudio del sesgo condicional. El sesgo condicional se visualizará con curvas ley de corte – ley media y ley de corte – fracción de metal.

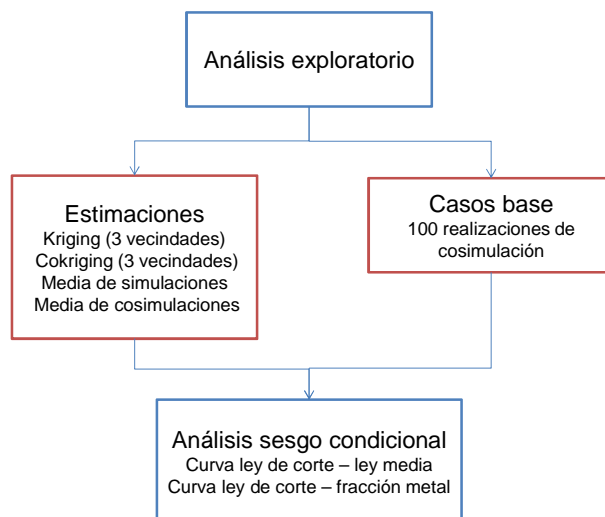


Figura 5: Metodología caso estudio

4. CASO ESTUDIO

4.1. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

La base de datos corresponde al yacimiento Mina Ministro Hales de la compañía Codelco, que corresponde a un depósito tipo pórfido cuprífero. Este yacimiento posee una mineralización de brechas hidrotermales con alta ley de cobre y arsénico. El yacimiento se encuentra ubicado en el norte de Chile, en la Región de Antofagasta, a aproximadamente 10 kilómetros de la ciudad de Calama, como se muestra en la Figura 6. La base consta con 5986 muestras de sondajes de exploración compositadas cada 1.5 metros. Se posee información sobre las leyes de cobre (Cu) y arsénico (As) junto con sus coordenadas geográficas expresadas en metros. La base de datos corresponde a un sector cercano a la superficie, donde se concentra la mayor alternancia de unidades geológicas y las mayores leyes tanto de cobre como de arsénico. Con el fin de preservar la confidencialidad, los valores de los datos han sido multiplicados por una constante.

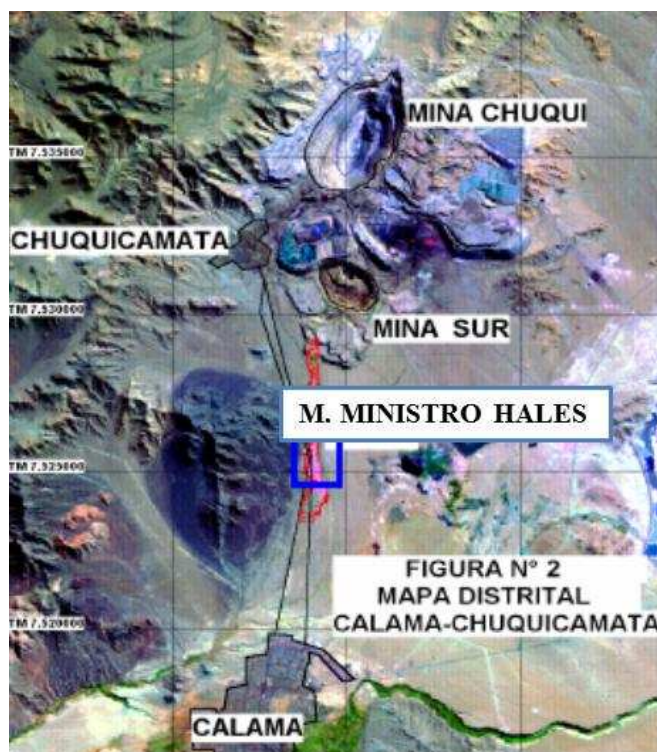


Figura 6: Ubicación de Mina Ministro Hales
(Fuente: Antecedentes de Codelco)

Las unidades geológicas consideradas en la Mina Ministro Hales fueron definidas considerando un criterio principalmente geológico (litología, mineralización, alteración y leyes). Las principales unidades geológicas del yacimiento son:

Brechas: Corresponden a rocas constituidas por clastos con una matriz de cemento, representan un evento tardío en la formación del yacimiento que aportan leyes altas de cobre, de plata y de arsénico. En general las brechas poseen una ley de cobre superior a 2.5% y ley de arsénico superior a 2000 ppm.

Stockwork o C5: Esta unidad corresponde a dos tipos de mineralización diseminada: un evento temprano en la formación del yacimiento, sin presencia de arsénico, y la segunda asociada al evento tardío de las brechas, con presencia de arsénico. Esta unidad geológica tiene, en general, una ley de cobre superior a 0.5%.

C1: Esta unidad representa el límite superior a la mineralización de cobre, con ley superior a 0.1% de cobre. Esta unidad se encuentra diseminada, pero es de poca intensidad.

Estéril: El estéril son todas las rocas que no tienen mineralización de cobre o tienen una ley inferior a 0.1%.

En la Figura 7 se muestran las unidades geológicas consideradas en la Mina Ministro Hales.

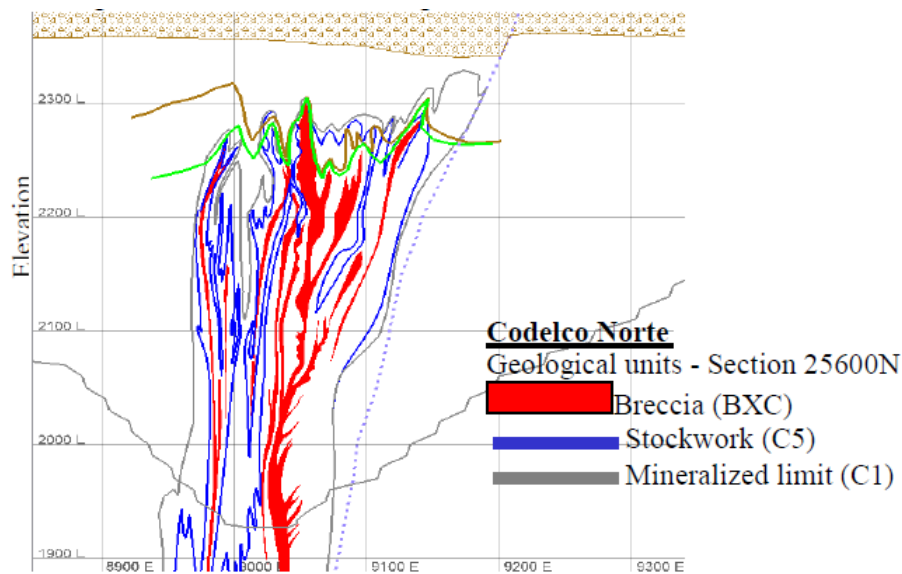


Figura 7: Unidades geológicas de Mina Ministro Hales
(Fuente: Antecedentes de Codelco)

Con esta información, se decide no distinguir según unidades geológicas, debido a que existe gran alternancia de unidades geológicas de pequeño espesor y que existe incertidumbre en la delimitación exacta de las unidades. Además que las fronteras entre unidades no corresponden a fronteras “duras”, sino que existen transiciones graduales de las leyes, y por tanto de unidades geológicas, dada la definición misma de las unidades descritas.

A partir de los datos entregados se puede observar que existe una serie de sitios donde no fueron muestreadas ambas especies, por tanto existe una variable con mayor cantidad de sitios muestreados, que es el cobre y una variable sub muestreada, que corresponde al arsénico.

Tabla 1: Estadísticas básicas muestras

	Cobre [%]	Arsénico [ppm]
Mínimo	0	0
Máximo	24.91	34939
Número datos	5796	3878
Media	1.38	1002
Varianza	4.00	4681452

El dominio a estudiar, que mide aproximadamente 160 x 225 x 200 metros en los sentidos este, norte y cota respectivamente. Esto se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2: Localización de muestras

	Este	Norte	Cota
Mínimo [m]	8979.58	25700.21	2101.31
Máximo[m]	9144.12	25925.96	2299.57
Tamaño[m]	164.54	225.75	198.26

La base de datos con la que se cuenta corresponde a los resultados de sondajes provenientes de túneles. Estos sondajes que generalmente están inclinados para tener mayor información de posibles vetas verticales y horizontales.

En la Figura 8 se tienen vistas isométricas de los sondajes en el espacio con los datos de cobre y arsénico respectivamente. En las figuras se observa una zona con un muestreo preferencial de cobre y arsénico en las cercanías al túnel.

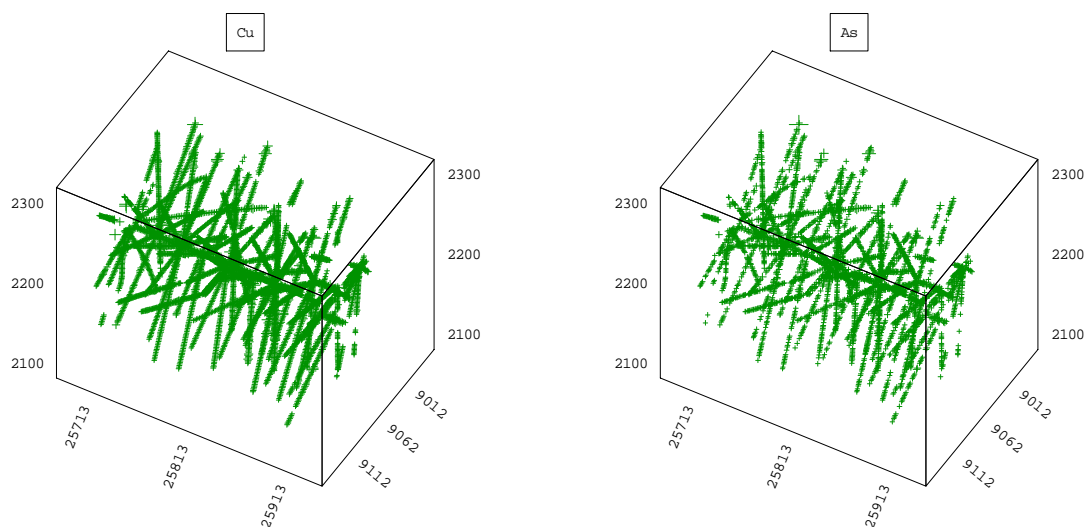


Figura 8: Vista isométrica de muestras

En la Figura 9 se muestra una vista norte-cota de los datos de cobre y de arsénico.

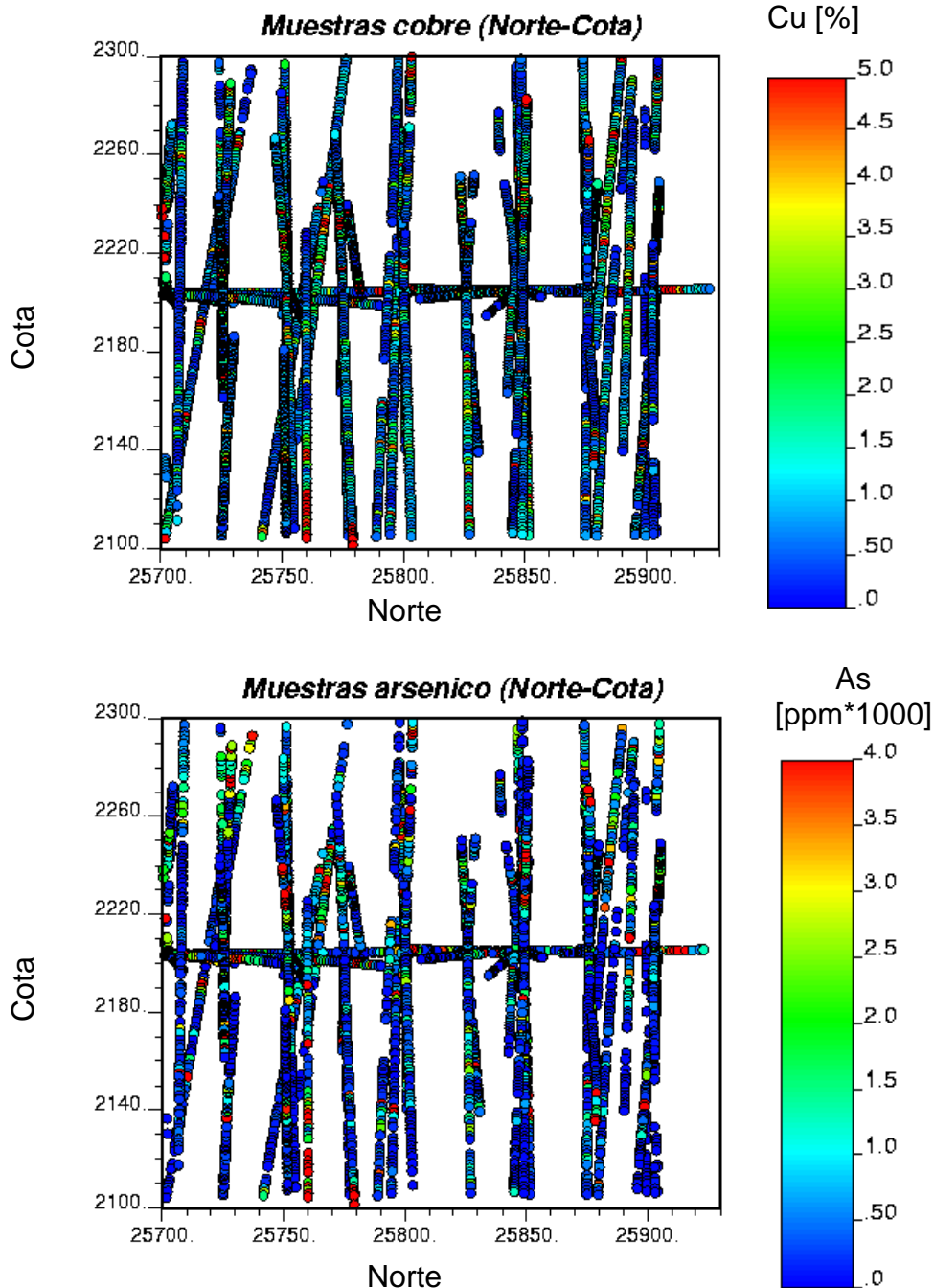


Figura 9: Proyección Norte-Cota de muestras

De las figuras anteriores se puede observar un muestreo irregular. Por tanto para obtener un histograma representativo es necesario desagruparlos por consideraciones geométricas. La siguiente tabla muestra la estadística de los datos desagrupados utilizando el método de las celdas.

Tabla 3: Estadísticas datos desagrupados

	Cobre [%]	Arsénico [ppm]
Mínimo	0	0
Máximo	24.9	34,939
Número datos	5796	3,878
Media	1.36	1,011
Varianza	4.6	5,719,785

En la Figura 10 se muestra el histograma de cobre considerando un 5 % como límite superior que agrupa las leyes altas del conjunto de muestras.

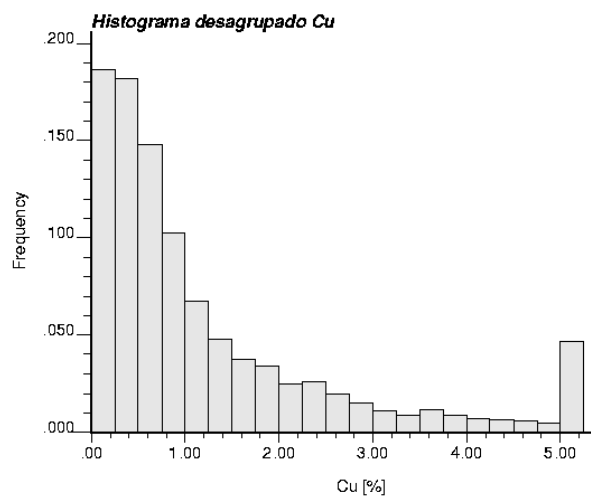


Figura 10: Histograma desagrupado de cobre

También se grafica la frecuencia acumulada de cobre (Figura 11). Para ello se tiene la siguiente figura donde se puede observar que un 80% de los datos tienen leyes de cobre menor o igual a un 2%.

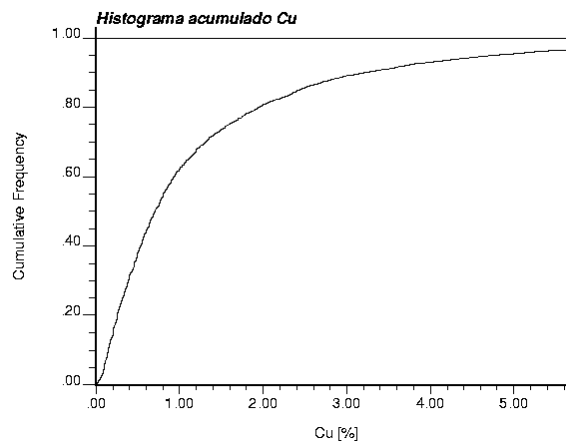


Figura 11: Histograma acumulado de cobre

Con el fin de no inducir errores numéricos o posibles inestabilidades al realizar estimaciones o aproximaciones en futuros cálculos, los datos de arsénico considerados se expresan en [ppm*1000] (o equivalentemente gramos por kilogramo).

En la Figura 12 se muestra el histograma desagrupado de arsénico, también realizando un histograma para valores con un máximo de 4000 ppm de arsénico.

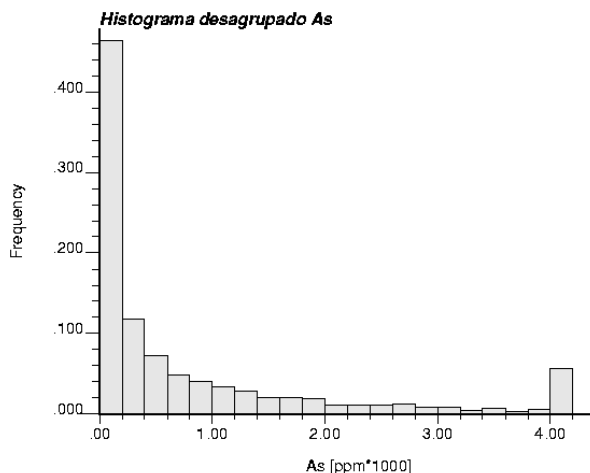


Figura 12: Histograma desagrupado de arsénico

También se puede graficar la frecuencia acumulada de arsénico. Para ello se tiene la Figura 13 donde se puede observar que un 80% de los datos tienen leyes de arsénico menor o igual a un 2000 ppm.

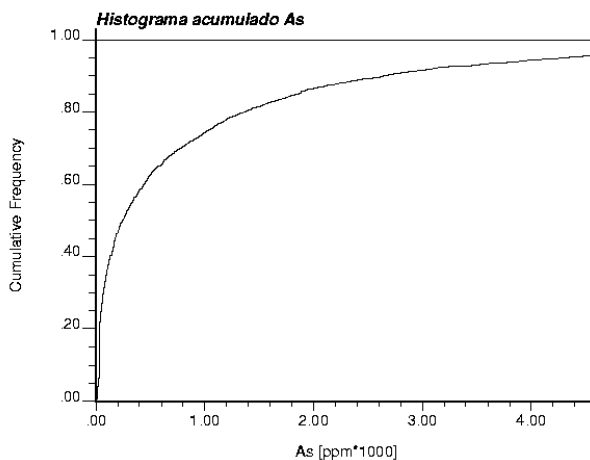


Figura 13: Histograma acumulado de arsénico

Al ser un yacimiento polimetálico, es necesario estimar la correlación entre las variables para ver si la información de un elemento puede ser utilizada en la estimación en la otra variable. En la Figura 14 se observa que la correlación entre las variables es alta, de 0.76 aproximadamente. Esta correlación se explica porque la mineralización ocurre principalmente bajo forma de sulfuros como enargita y tenantita, que contienen ambas especies (cobre y arsénico).

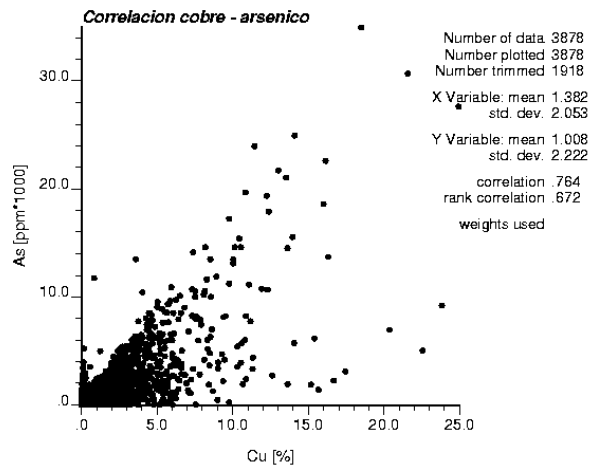


Figura 14: Correlación cobre – arsénico

No se observan datos duplicados, ni datos con problemas de tipeo en la base de datos (por ejemplo, no existen valores demasiado alejados del dominio en estudio). Sin embargo, existen muestras que se encuentran a pequeñas distancias (menos de 1 metro) con leyes muy disímiles entre sí, pero se cree que corresponden a distintas muestras y no a un error en la base de dato, por tanto se utilizan ambas muestras en el estudio.

Es interesante graficar las nubes direccionales (Figura 15 y Figura 16), tanto para cobre como para arsénico, que dan indicios de la distribución espacial de los datos. No se observan cambios de comportamiento de las leyes en el espacio, corroborando la decisión de estudiar los datos en su totalidad, sin distinguir unidades geológicas.

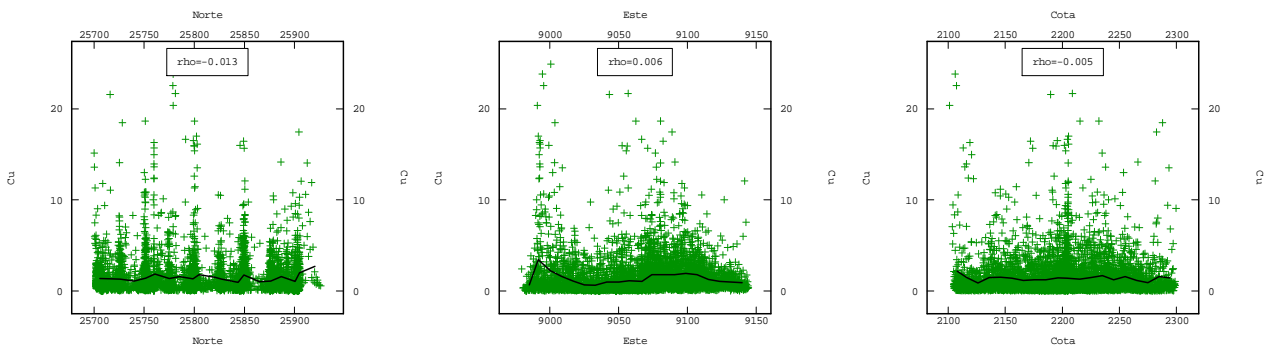


Figura 15: Nubes direccionales de cobre

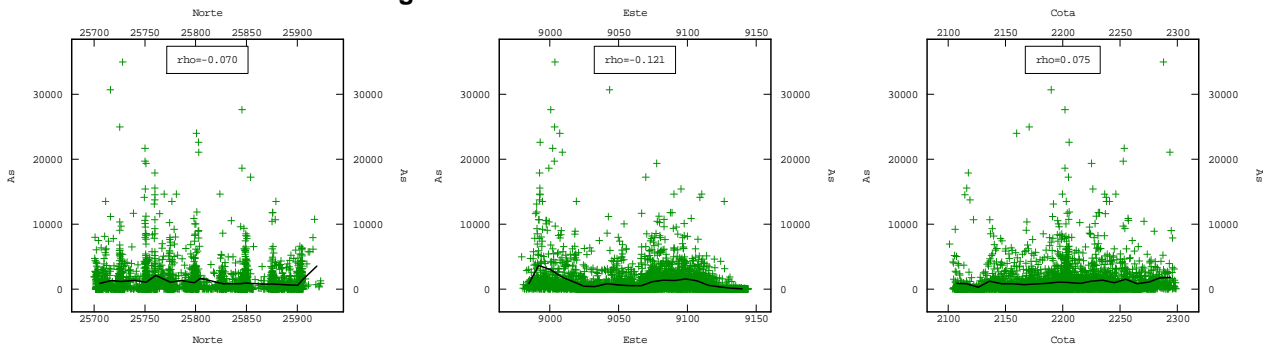


Figura 16: Nubes direccionales de arsénico

4.1.1. Definición grilla

Se define una grilla que contenga las muestras de la base de datos sobre la cual se realizarán tanto las estimaciones como las simulaciones. Las coordenadas de la grilla se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4: Definición de grilla

	Este [m]	Norte [m]	Cota [m]
Mínimo	8970	25690	2100
Máximo	9150	25930	2310
N° bloques	18	24	21

Por tanto, el volumen de estimación corresponde a 9072 bloques de 10 x 10 x 10 metros generando un volumen a estimar de 9072000 m³.

4.2. GENERACIÓN DE CASO BASE

En esta sección se presentan los resultados de generar el caso base que corresponderá a la realidad del yacimiento. Para ello se utilizarán simulaciones condicionales (cosimulación, debido a su carácter multivariable), donde se considera un soporte de los valores a simular correspondiente a un volumen de bloques equivalente a 10 x 10 x 10 metros.

Con el fin de entregar mayor representatividad al análisis se realizarán cien realizaciones de cosimulación, con el propósito de generar una mayor cantidad de escenarios posibles con los cuales se pueda analizar el sesgo condicional.

4.2.1. Anamorfosis

La primera etapa consiste en una anamorfosis gaussiana de las variables a simular. De esta manera se busca transformar en Normales (0,1) las leyes de cobre y arsénico con el fin de realizar simulaciones condicionales sobre éstas. El resultado de la transformación se muestra en la Figura 17 y la estadística en la Tabla 5.

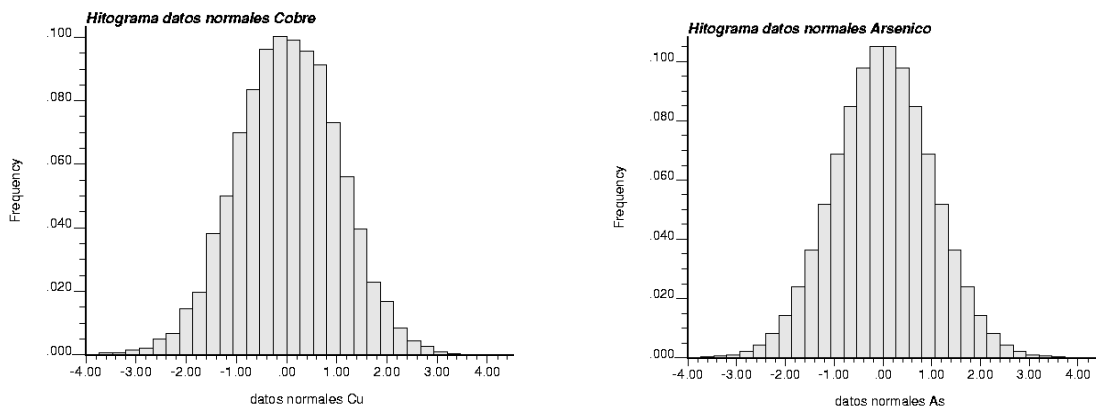


Figura 17: Histograma de variables normales

Tabla 5: Estadística datos normales

Datos normales		
	Cu [%]	As [ppm*1000]
Promedio	0	0
Varianza	0.98	0.96
Mínimo	-3.7	-3.5
Máximo	3.7	3.6
Media cuantil inferior	-0.65	-0.63
Media cuantil superior	0.68	0.67
Número de datos	5796	3878

4.2.2. Bigaussianidad

Una vez realizada la transformación se procede a verificar la hipótesis de multi gaussianidad, aunque para esto sólo se revisa el histograma, las nubes de correlación diferida (dimensión 2) y la relación entre el variograma y el madograma.

4.2.2.1. Nubes correlación diferida

A continuación (Figura 18) se muestran las nubes de correlación diferida, donde los pares se grafican para distintas distancias. En estos gráficos lo relevante es la forma de la nube, para distancias muy grandes, los valores no deben tener correlación (figuras de la derecha), mientras a distancias bajas, se estima que deben estar cerca de la diagonal (figuras de la izquierda), ya que los valores se encuentran correlacionados.

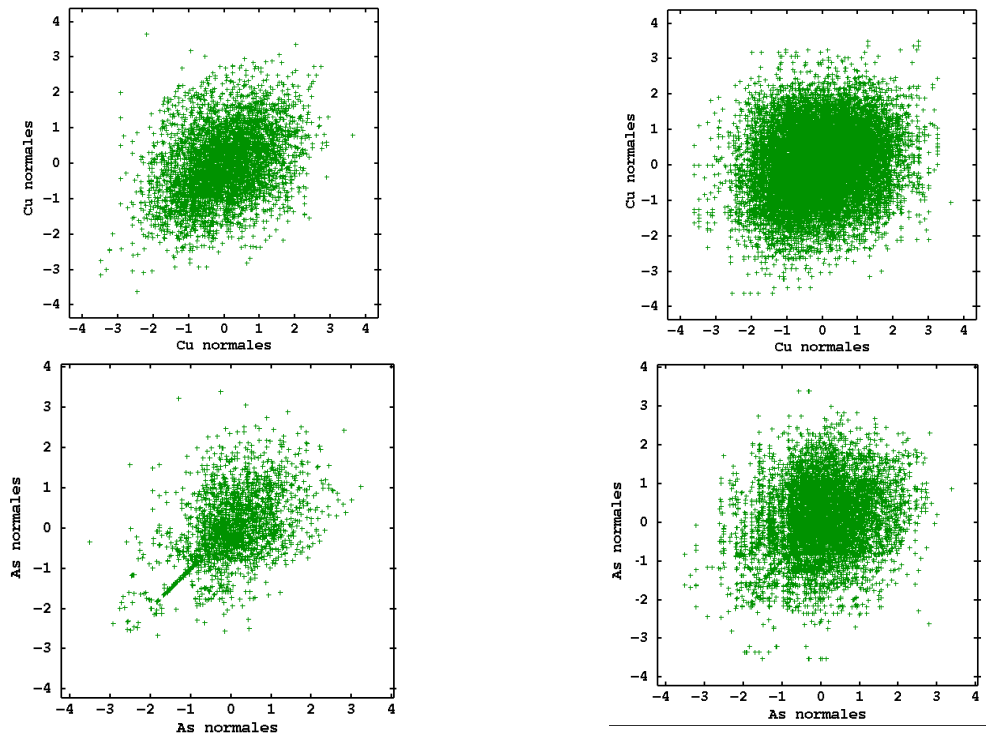


Figura 18: Nube correlación diferida (5 y 20 metros)
 (Izq: nube diferida con 5 metros de distancia. Der: nube diferida con 20 metros)

La forma de elipse de las nubes de correlación es compatible con la hipótesis de multi gaussianidad.

4.2.2.2. Comparación de variograma con madograma

Para constatar la bigaussianidad de los datos, la relación entre el variograma $\gamma(h)$ y el madograma (variograma de orden 1) $\gamma_l(h)$, debe ser tal que:

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_l(h)} = \sqrt{\pi} \approx 1.77$$

En la Figura 19 se puede ver la relación entre el madograma y el variograma, que para distancias superiores a 15 metros se cumple con la condición anterior.

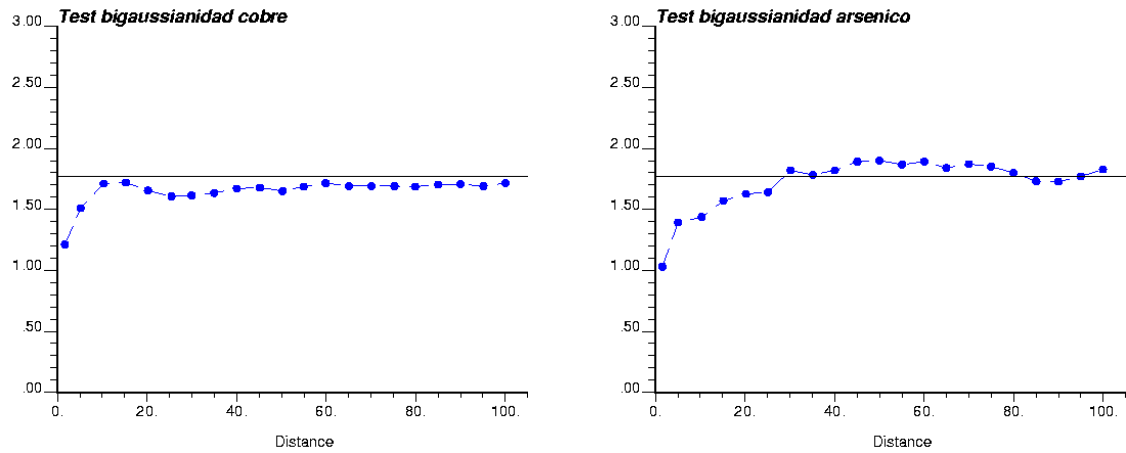


Figura 19: Comparación entre variograma y madograma

Las nubes de dispersión diferidas y la comparación entre el variograma y el madograma apoyan la hipótesis de multi gaussianidad.

4.2.3. Mapas variográficos

A continuación se muestran los mapas variográficos para las variables de cobre y arsénico (Figura 20 y Figura 21 respectivamente).

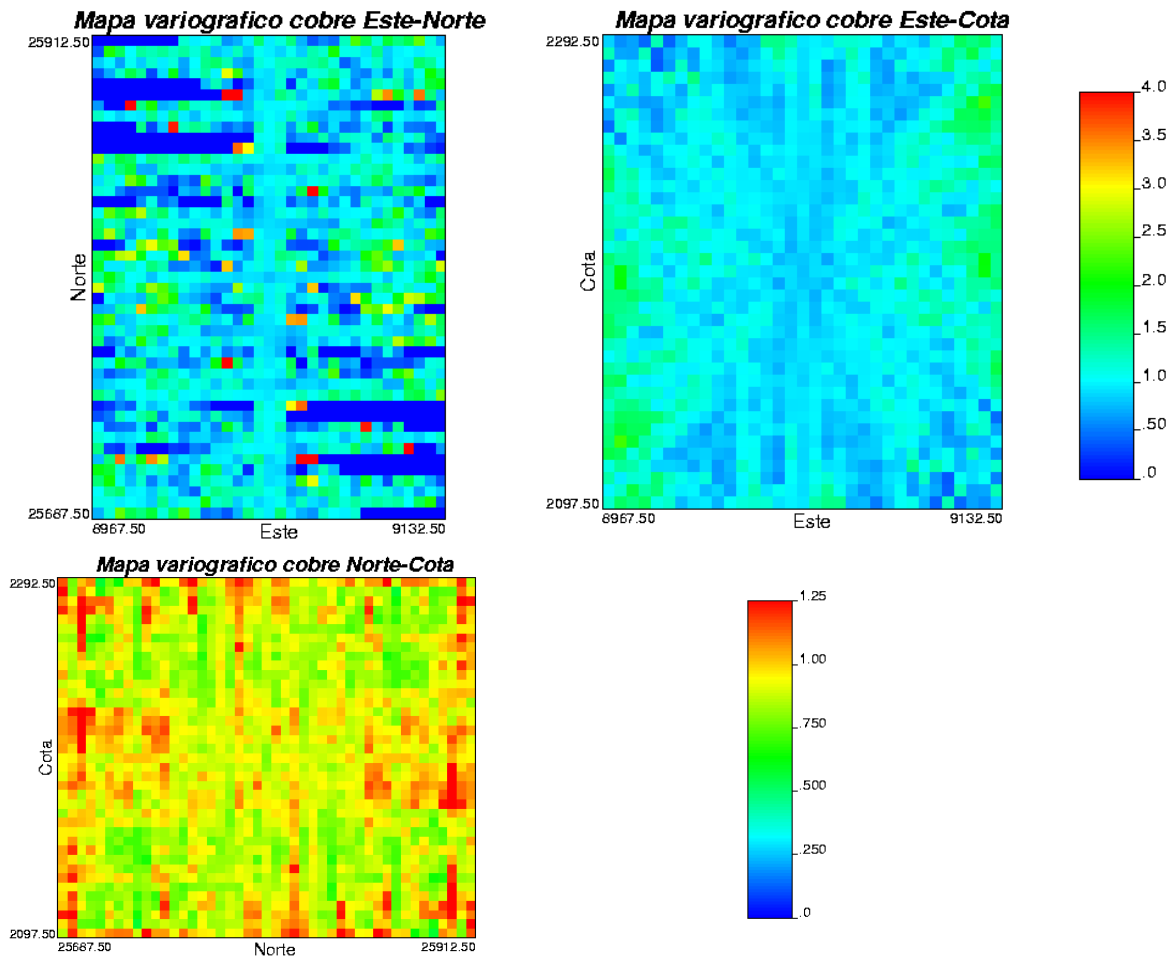


Figura 20: Mapa variográfico datos gaussianos de cobre

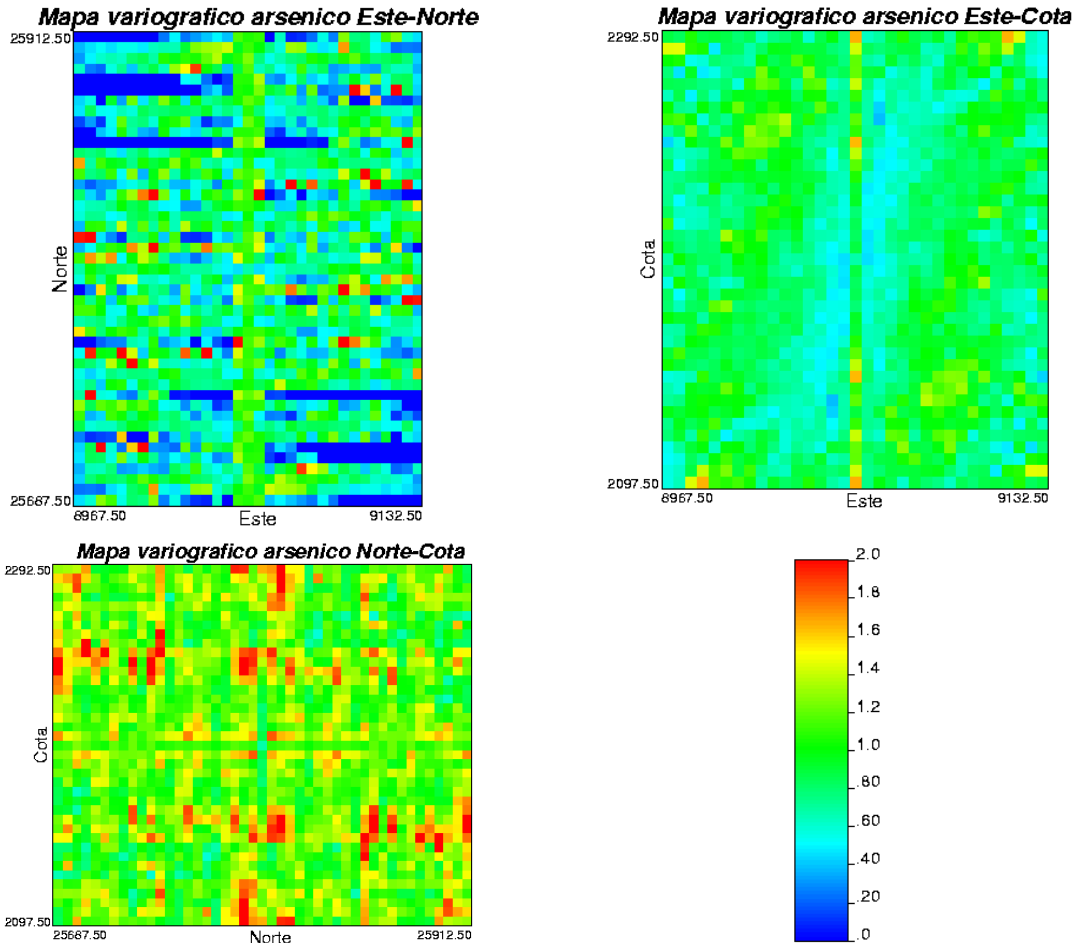


Figura 21: Mapa variográfico datos gaussianos de arsénico

A partir de los mapas variográficos no se detecta la presencia clara de una anisotropía. Sin embargo, se observa mayor regularidad en el plano norte-cota y este-cota.

4.2.4. Variogramas

Preliminarmente se tienen las direcciones norte-cota y este-cota como direcciones principales de anisotropía. Un análisis variográfico más detallado muestra los variogramas en las direcciones norte-sur y vertical tienen un comportamiento similar entre sí, por tanto, las direcciones utilizadas para el variogramas corresponden a las norte-cota (omniplanar) y este-oeste.

A continuación se muestran los variogramas experimentales para los datos Gaussianos, en las dos direcciones consideradas. En la Tabla 6 se muestran los parámetros considerados para el cálculo de los variogramas.

Tabla 6: Parámetros variogramas experimentales datos gaussianos

Variograma	Azimut [°]	Tolerancia Azimut [°]	Ancho de Banda Horizontal [m]	Dip [°]	Tolerancia [°]	Paso [m]	Ancho de Banda Vertical [m]
Rojo	0	20	20	90	90	5	infinito
Azul	90	20	20	0	20	5	20

El variograma en color rojo corresponde a un omniplanar (Norte-Cota) y el variograma en color azul está en la dirección Este-Oeste (E-W).

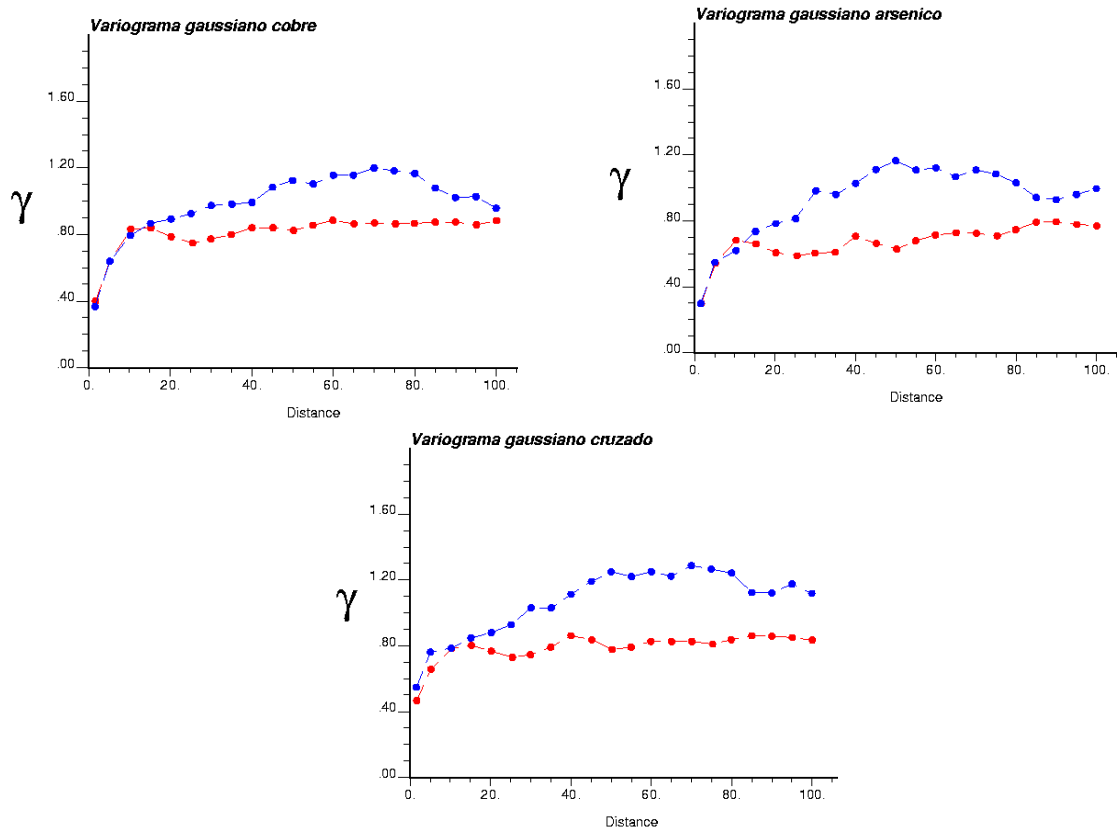


Figura 22: Variogramas experimentales variables Gaussianas

El modelo utilizado para el ajuste del variograma experimental, se encuentra representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Cu} & \gamma_{Cu-As} \\ \gamma_{As-Cu} & \gamma_{As} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.14 \\ 0.14 & 0.2 \end{pmatrix} * pepa + \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.44 & 0.5 \end{pmatrix} * esf(50, 50, 50) + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.24 \\ 0.24 & 0.35 \end{pmatrix} * esf(70, 70, \infty)$$

Donde las matrices que acompañan a cada modelo corresponden a matrices definidas positivas, lo que garantiza una varianza positiva. En la Figura 23 se muestra el ajuste realizado.

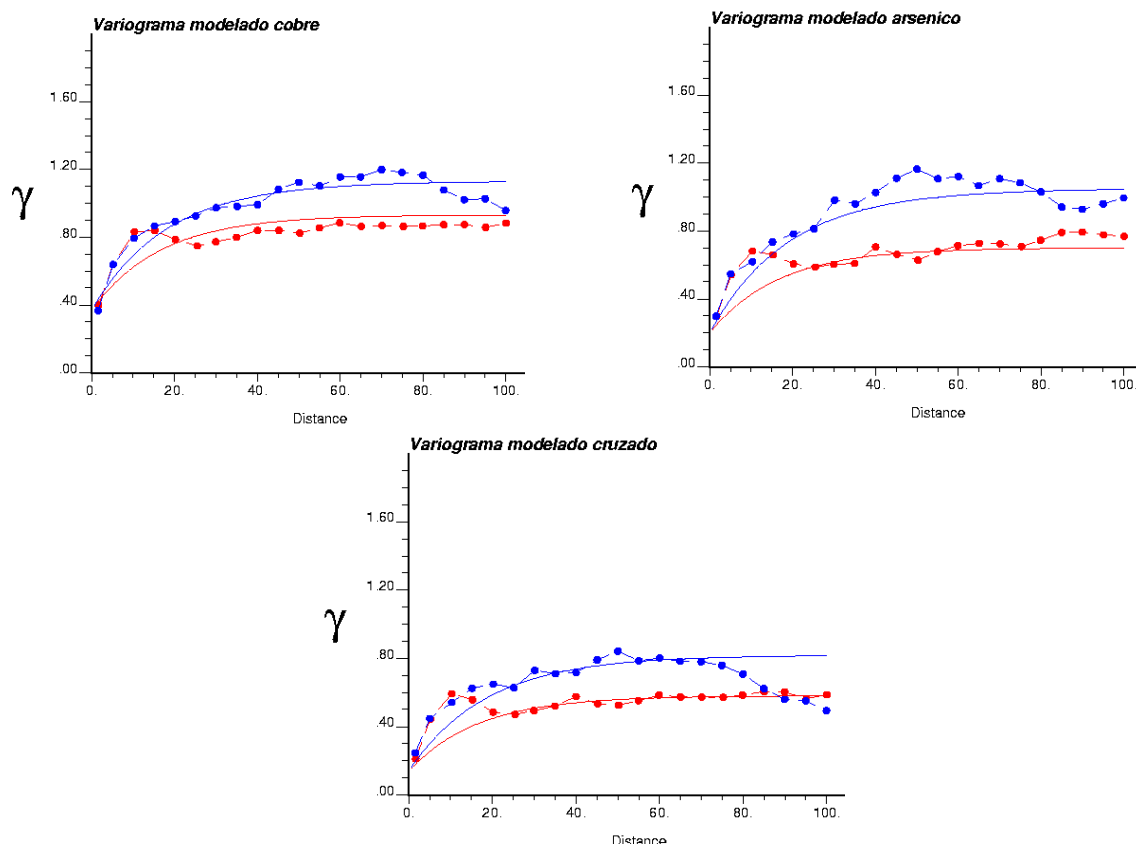


Figura 23: Variogramas modelados

4.2.5. Simulación puntual

Previo a realizar una simulación a soporte de bloques, es necesario realizar una simulación puntual, para analizar si los datos simulados tienen el mismo comportamiento espacial que las muestras.

La simulación puntual corresponde a una simulación conjunta de las leyes de arsénico y cobre (cosimulación), realizada sobre la grilla del estudio mediante el método de bandas rotantes. Esta simulación considera una vecindad móvil de 16 datos, considerando un rango de valores entre 0 y 30 % para cobre y entre 0 y 30000 ppm para arsénico, considerando una discretización de 4 x 4 x 2. Los datos Gaussianos utilizados corresponden a los descritos en la sección anterior (con sus respectivas funciones de anamorfosis) al igual que los variogramas mientras que la grilla considerada corresponde a la definida en la sección 4.1.1. Para realizar estas simulaciones mediante el método de las bandas rotantes se utiliza la implementación propuesta por Emery (2008).

En la Tabla 7 se muestra la estadística básica para la simulación puntual, que muestra la media de las especies.

Tabla 7: Estadística de simulaciones puntuales

	Cobre [%]	Arsénico [ppm*1000]
Promedio	1.32	0.99
Máximo	24.19	34.87
Mínimo	0	0
Varianza	3.76	3.78

A continuación se muestran los gráficos cuantil versus cuantil para comparar las distribuciones de los datos y de los valores simulados. y los variogramas en las direcciones principales para la simulación puntual. Aquí se puede ver que la distribución de los datos muestreados es similar a la distribución de los datos de la simulación puntual.

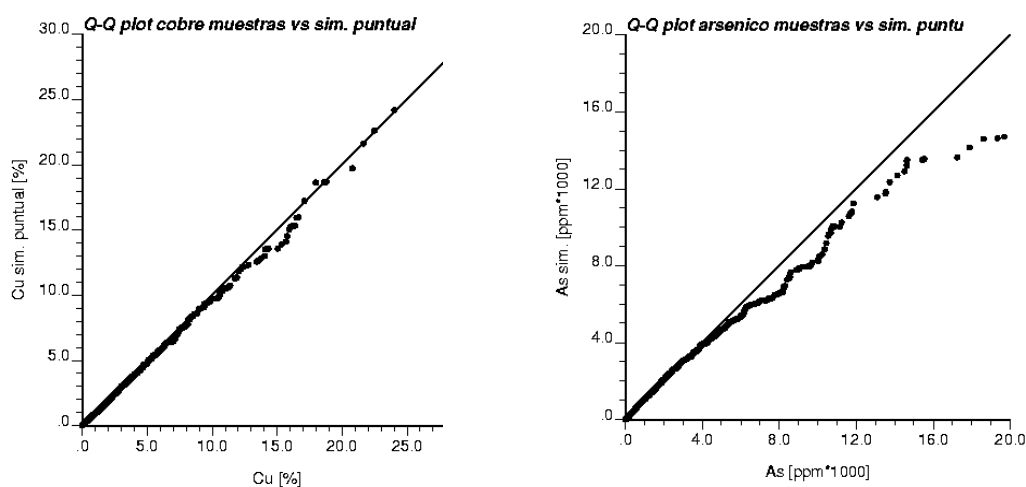


Figura 24: Gráficos Cuantil contra cuantil datos simulación puntual

La figura anterior muestra que los valores simulados de cobre tienen una distribución muy similar a los valores de las muestras. Sin embargo, los valores simulados de arsénico no reproducen los valores de las muestras para valores altos (sobre 8000 ppm). No obstante, la distribución de los valores no hace referencia a la ubicación espacial de los datos. Para lo anterior se utilizan variogramas en las tres direcciones principales (Norte-Sur, Este-Oeste y vertical) para verificar si los valores simulados tienen el mismo comportamiento espacial que los valores de los sitios muestreados.

En la Tabla 8 se muestran los parámetros utilizados para el cálculo de los variogramas. En la Figura 25, en línea punteada se exponen los variogramas de las muestras, y en la línea continua se encuentran los variogramas de los valores simulados. Ambos variogramas consideran un capping de los valores de cobre y arsénico (10% de cobre y 12000 ppm de arsénico). Para los valores de las muestras, lo anterior traduce en modificar 61 datos de cobre correspondientes a un 1 % y 25 de arsénico correspondientes a y 0.6 % de los datos, mientras que para los valores simulados

corresponde a 92 datos de cobre correspondientes a un 1% y 51 datos de arsénico correspondientes a un 0.5 % del total de los valores simulados.

Tabla 8: Parámetros variogramas valores simulados a soporte puntual

Variograma	Azimut [°]	Tolerancia Azimut [°]	Ancho de Banda Horizontal [m]	Dip [°]	Tolerancia [°]	Paso [m]	Ancho de Banda Vertical [m]
Rojo	0	20	20	0	20	5	20
Azul	90	20	20	0	20	5	20
Verde	0	20	20	90	20	5	20

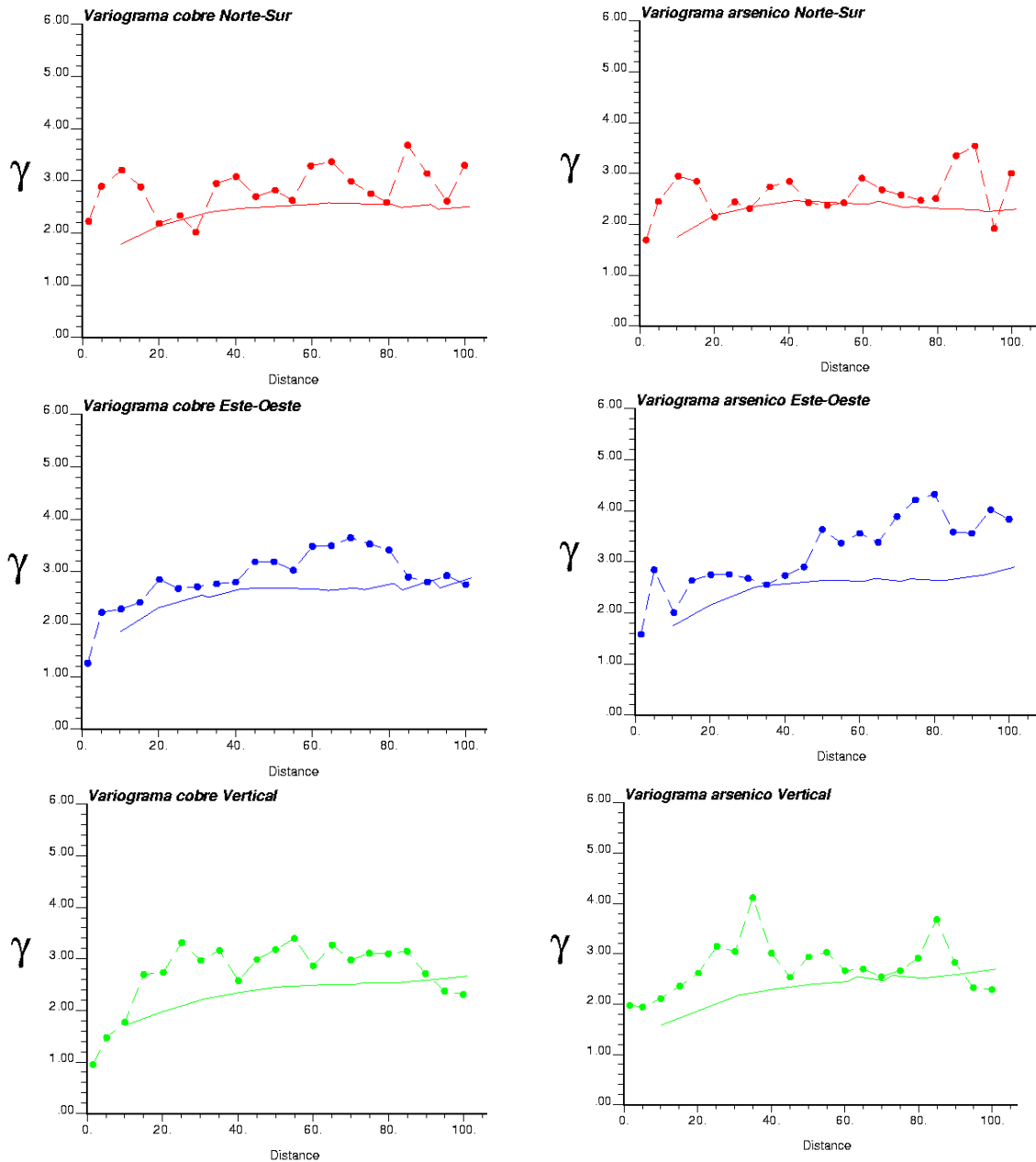


Figura 25: Variogramas de simulación a soporte puntual (Izquierda: cobre, derecha: arsénico)

La siguiente figura muestra los variogramas cruzados entre ambas variables.

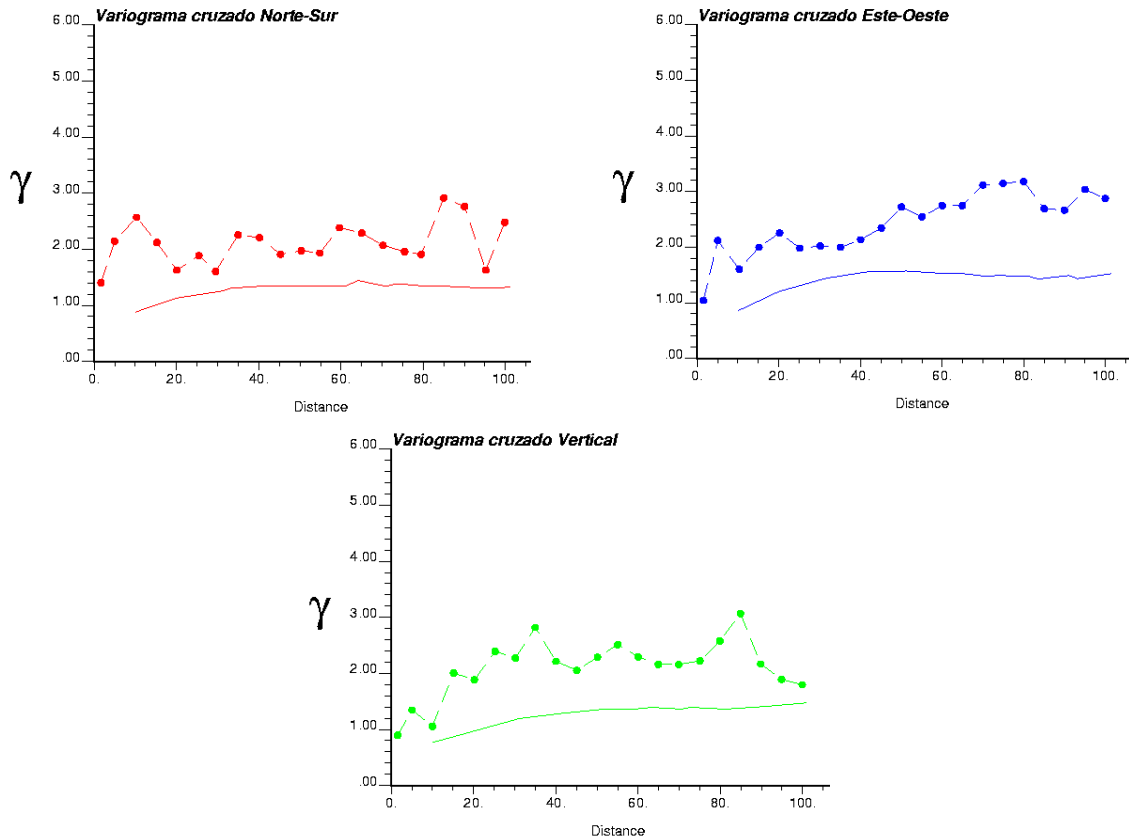


Figura 26: Variogramas cruzados de simulación a soporte puntual

Los variogramas de las simulaciones puntuales de cobre y arsénico son similares a los variogramas de los datos. No obstante, se observa un menor ajuste en los variogramas cruzados.

En la siguiente figura se muestra una validación gráfica de la simulación puntual, que consiste en el cálculo de la media direccional para los sitios estimados y para los valores de las muestras, considerando las direcciones principales. En la figura se puede apreciar que los valores de las medias direccionales son similares. En línea punteada se exponen la media direccional de las muestras, y en la línea continua se encuentra la media direccional de los valores simulados

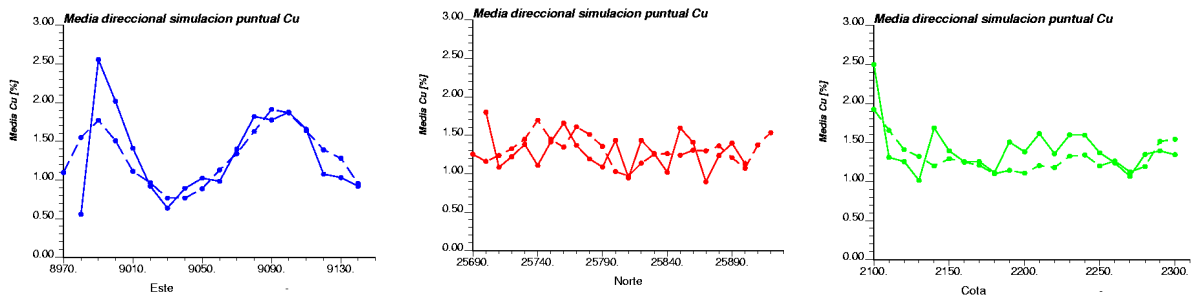


Figura 27: Media direccional de cobre

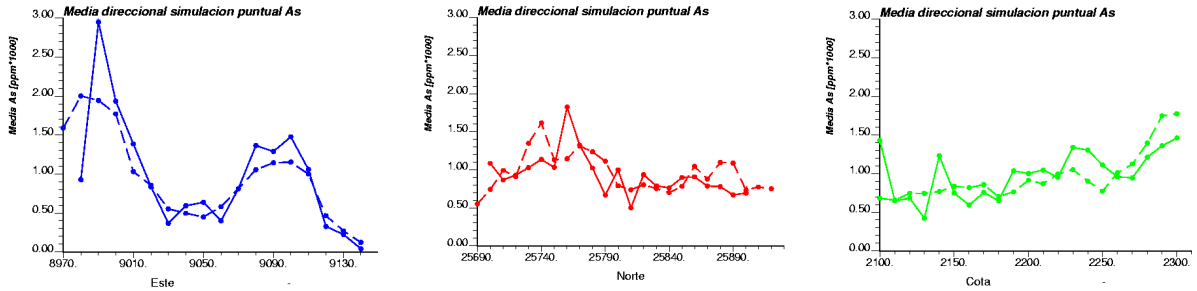


Figura 28: Media direccional de arsénico

Es importante verificar que la cosimulación puntual también reproduzca la relación entre las variables. En la siguiente figura se muestra una nube de dispersión entre el cobre y el arsénico resultado de la simulación puntual, donde se ve que los valores se encuentran correlacionados (coeficiente de correlación de 0.55), aunque no reproducen totalmente la correlación entre los datos originales (0.67), posiblemente debido a una sub estimación del arsénico.

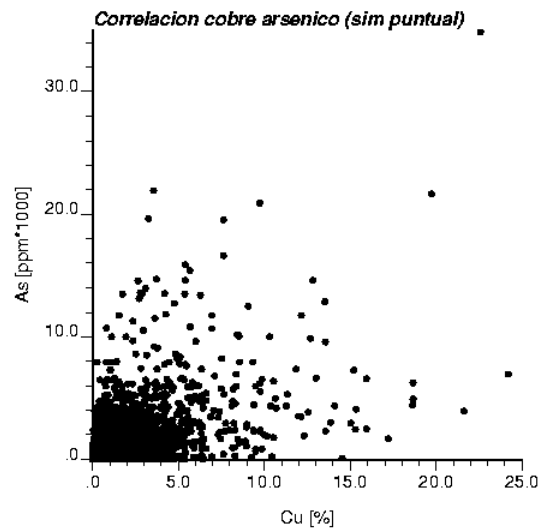


Figura 29: Dispersión entre valores de simulación puntual

Según lo expuesto anteriormente, se puede concluir que el modelo de simulación representa correctamente los datos de las muestras (de manera puntual), por tanto se utilizará para generar cien escenarios a soporte de bloques de 10 x 10 x 10 metros, los cuales constituyen los diversos escenarios posibles del yacimiento.

4.3. ESTIMACIÓN LOCAL

4.3.1. Mapas variográficos

A continuación se muestran los mapas variográficos para las leyes de cobre y arsénico (Figura 30 y Figura 31 respectivamente).

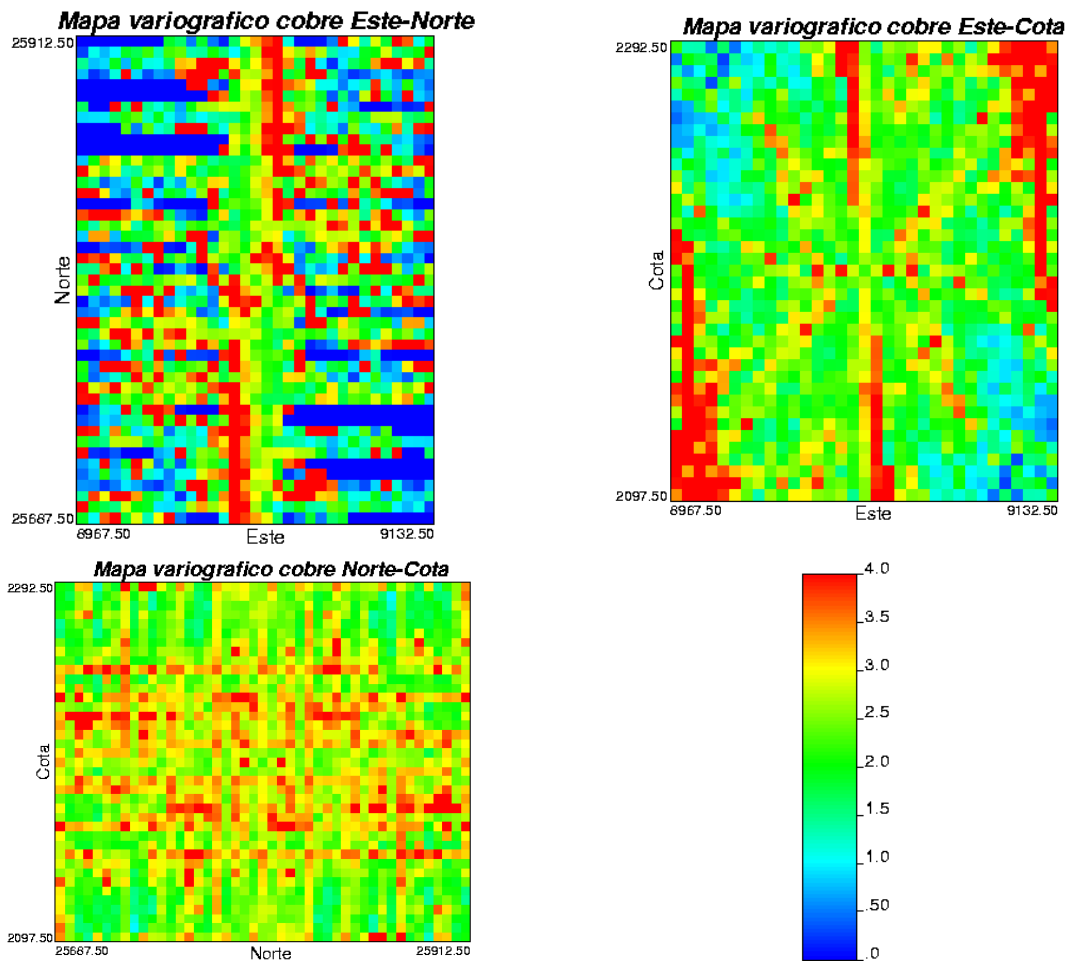


Figura 30: Mapa variográfico datos de cobre

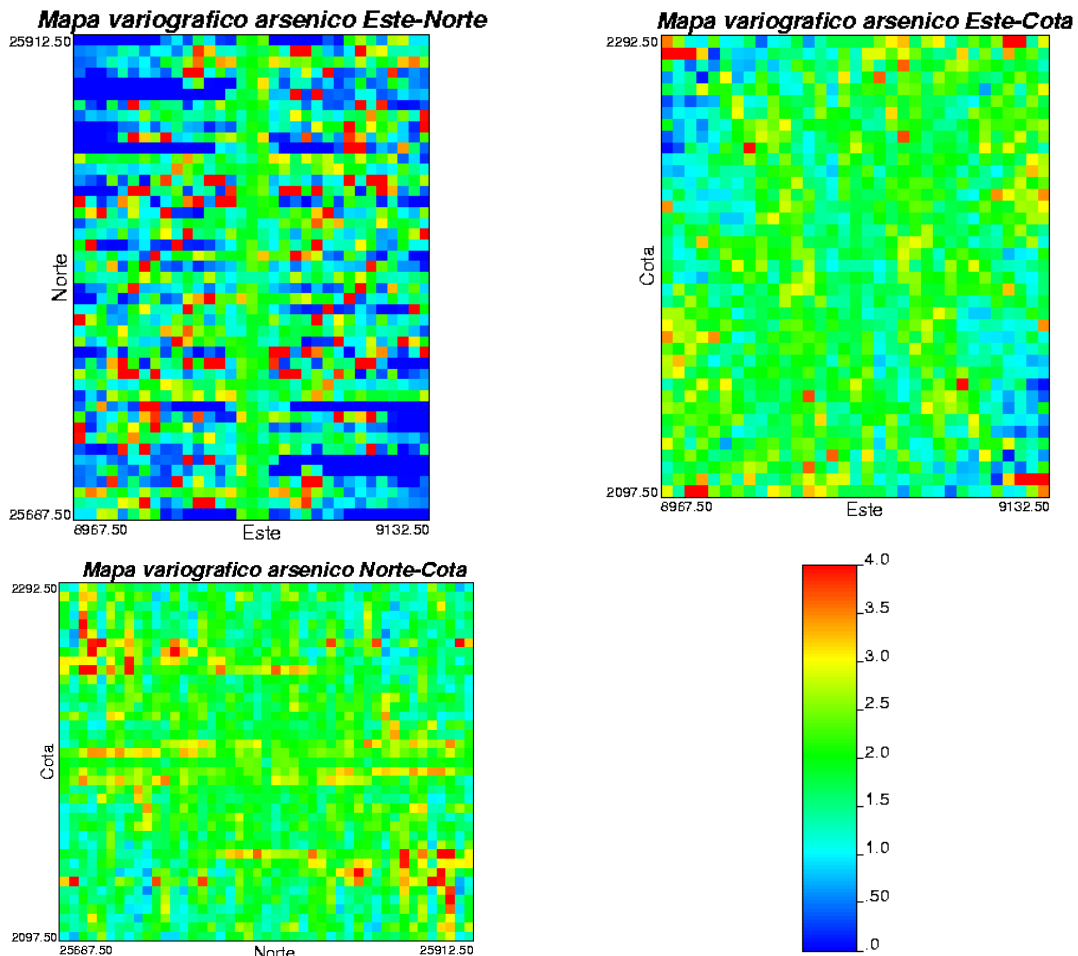


Figura 31: Mapa variográfico datos de arsénico

A partir de los mapas variográficos no se detecta la presencia clara de una anisotropía. Sin embargo, se observa mayor regularidad en el plano norte-cota y este-cota.

4.3.2. Variogramas

Al igual que para los datos Gaussianos, para las variables cobre y arsénico los mapas variográficos muestran que las direcciones de anisotropía son la dirección norte-cota y este-cota. No obstante, un análisis variográfico más detallado (mostrado en anexos) muestra que los variogramas en las direcciones norte-sur y vertical tienen un comportamiento similar, por lo tanto son agrupados en un variograma omniplanar.

A continuación se muestran los variogramas experimentales para los datos, en las dos direcciones consideradas. Los parámetros utilizados para su cálculo corresponden a los mismos utilizados para el cálculo de los variogramas de las variables Gaussianas, mostrados en la Tabla 6. El variograma en color rojo corresponde a un omniplanar (Norte-Cota) y el variograma en color azul está en la dirección Este-Oeste (E-W). Para los efectos del variograma se realizó un capping (se fijaron los valores superiores a un valor umbral de 10% para cobre y 12000 ppm para arsénico, lo que modificó 61 datos de cobre correspondientes a un 1 % y 25 de arsénico correspondientes a y 0.6 % de los datos).

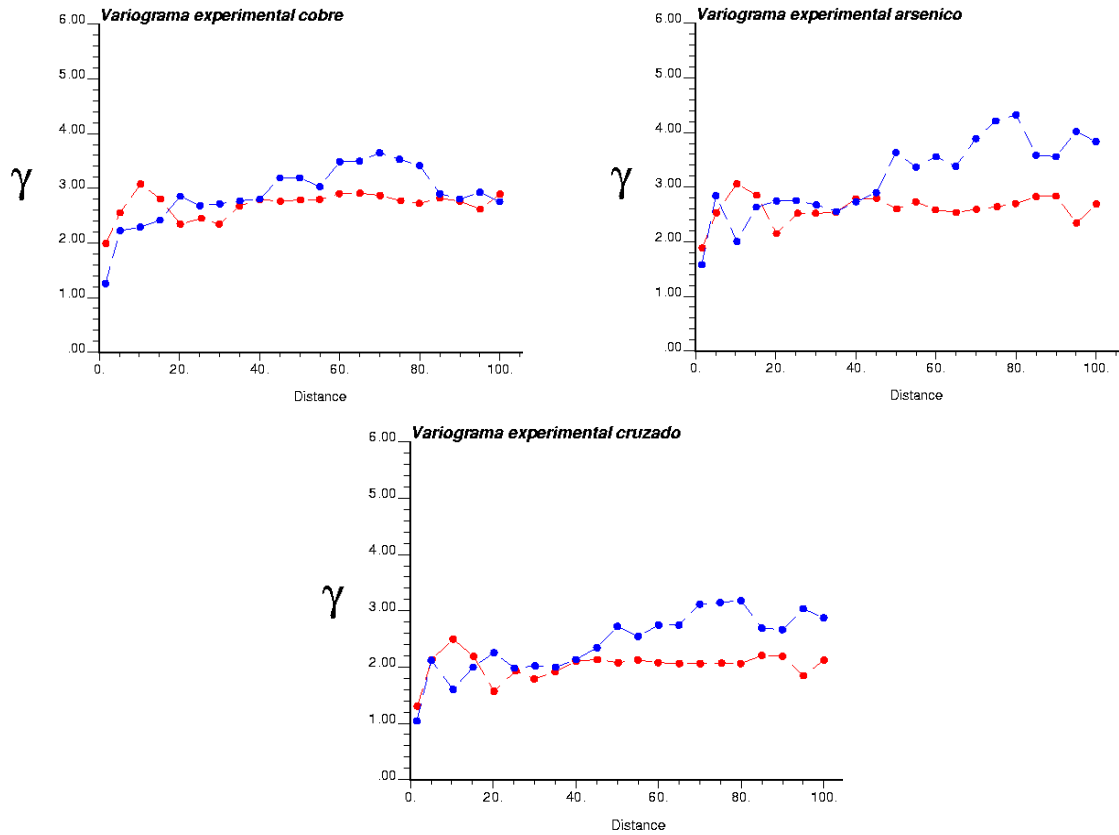


Figura 32: Variogramas experimentales variables

A continuación se presentan los variogramas modelados de las variables de cobre, arsénico y el variograma cruzado (cobre-arsénico).

El modelo utilizado para el ajuste del variograma experimental, se encuentra representado por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{Cu} & \gamma_{Cu-As} \\ \gamma_{As-Cu} & \gamma_{As} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{pmatrix} * pepa + \begin{pmatrix} 1.5 & 1.2 \\ 1.2 & 1.5 \end{pmatrix} * exp(20,20,10) + \begin{pmatrix} 0.95 & 0.8 \\ 0.8 & 1.5 \end{pmatrix} * esf(80,80,300)$$

Las matrices que acompañan a cada modelo corresponden a matrices definidas positivas, lo que garantiza una varianza positiva.

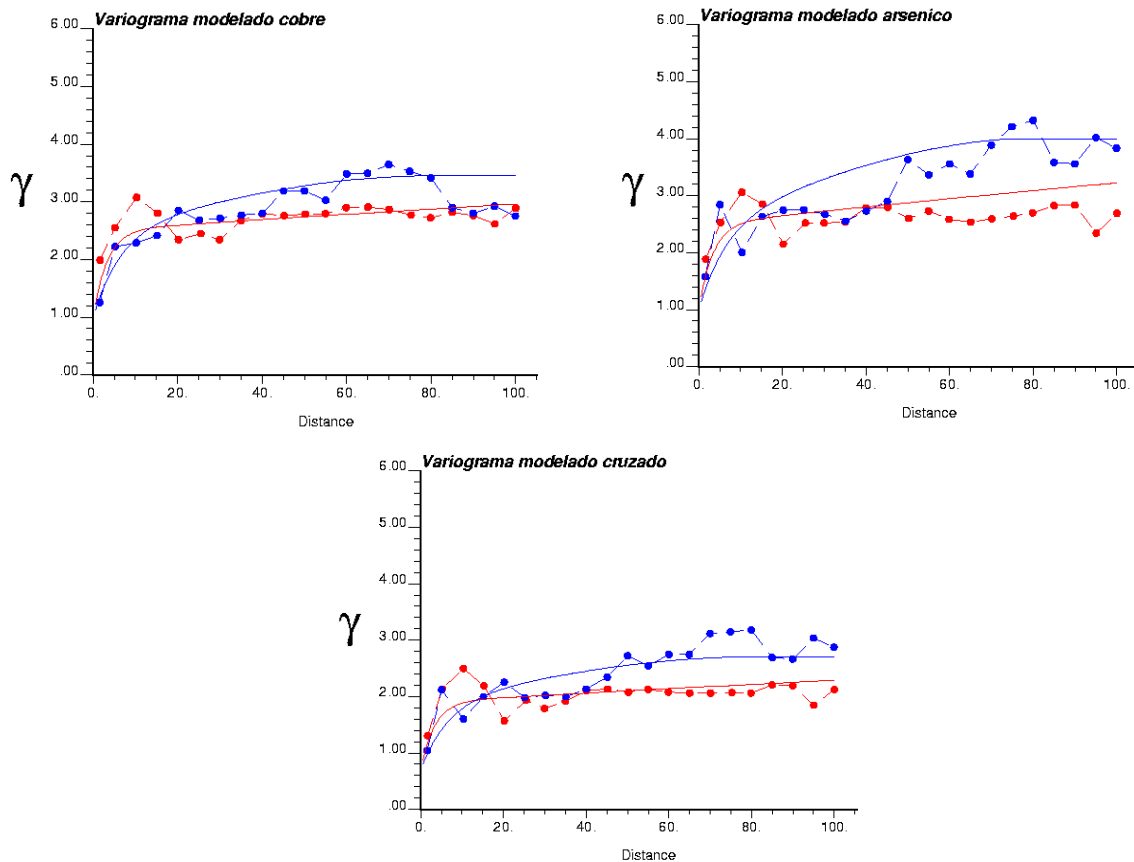


Figura 33: Variogramas modelados

4.3.3. Kriging

Es esta sección se presentan los resultados de la estimación mediante kriging ordinario de los valores de las leyes de cobre y arsénico para el yacimiento, en donde se considera un soporte de los valores a estimar correspondiente a un volumen de 10 x 10 x 10 metros. La estimación mediante kriging se realiza para distintas vecindades a estudiar utilizando el programa propuesto por Emery (2012).

Las vecindades de búsqueda consideradas son 3, a saber: una primera vecindad con 4 valores, otra con 16 y una mayor con 60 valores. La elección de 3 vecindades persigue el objetivo de cuantificar el sesgo condicional en la estimación, que ocurre al elegir una vecindad menor con el fin de disminuir el suavizamiento de los valores.

En la estimación univariable es necesario mencionar la pérdida de información que se podría inferir en los datos de una especie de interés para estimar otra. En otras palabras, se está estimando localmente dos variables regionalizadas del yacimiento de manera independiente, una con mayor cantidad de datos que la otra.

En las siguientes tablas se muestran las estadísticas básicas de los resultados de la estimación de cobre y arsénico mediante kriging, para las tres vecindades consideradas.

Tabla 9: Estadística estimación de cobre mediante kriging

Cobre [%]				
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Muestras desagrupadas
Promedio	1.51	1.43	1.39	1.36
Máximo	15.92	13	9.86	24.91
Mínimo	0	0.04	0.1	0
Varianza	3.75	1.47	0.71	4.6
Número de datos	9072	9072	9072	5796

Tabla 10: Estadística estimación de arsénico mediante kriging

Arsénico [ppm*1000]				
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Muestras desagrupadas
Promedio	1.35	1.21	1.15	1.01
Máximo	23.11	10.64	9.17	34.94
Mínimo	0	0.01	0	0
Varianza	7.14	2.32	1.17	5.72
Número	9072	9072	9072	3878

De las tablas anteriores, se puede observar que para ambas variables el rango de los valores estimados es menor a medida que aumenta el tamaño de la vecindad de búsqueda considerada, debido al suavizamiento que se genera en la estimación al considerar vecindades de búsqueda de mayor tamaño.

En las siguientes figuras se muestran las curvas tonelaje – ley de los valores estimados, considerando las 3 vecindades utilizadas (4, 16 y 60 datos más cercanos) y el histograma con los valores obtenidos (Figura 36 y Figura 37).

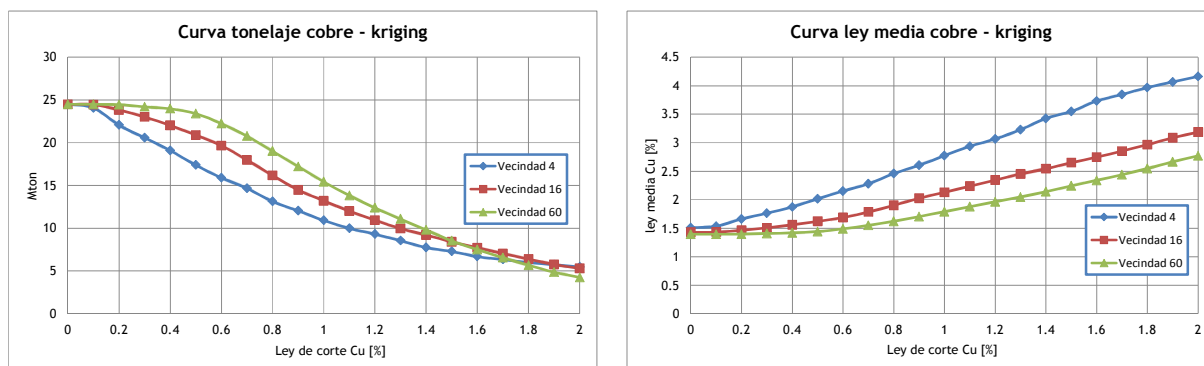


Figura 34: Curvas tonelaje – ley de estimación por kriging (Cu)

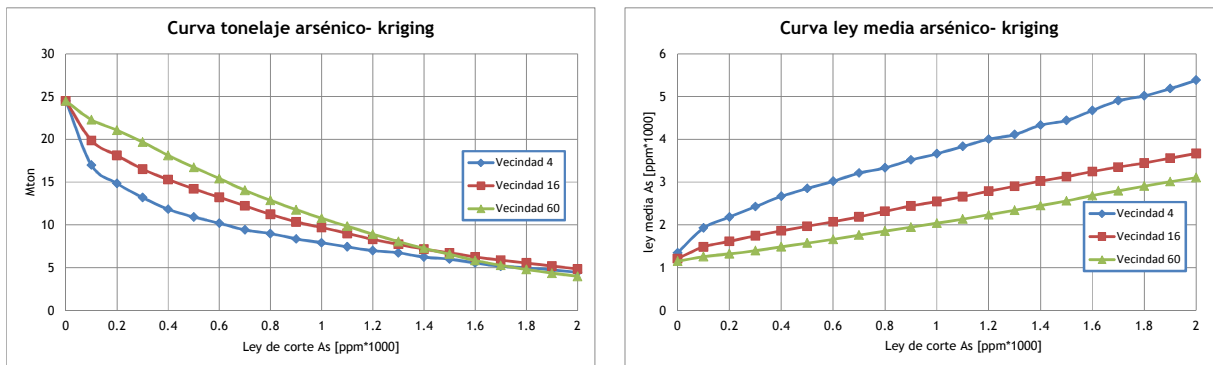


Figura 35: Curvas tonelaje – ley media de estimación por kriging (As)

En las siguientes figuras, se puede observar el histograma de los valores estimados para cada vecindad, donde se aprecia cómo el rango de los valores se hace más estrecho a medida que la vecindad aumenta de tamaño. Este suavizamiento también puede ser observado en los perfiles de la estimación, que se encuentran en el anexo C.

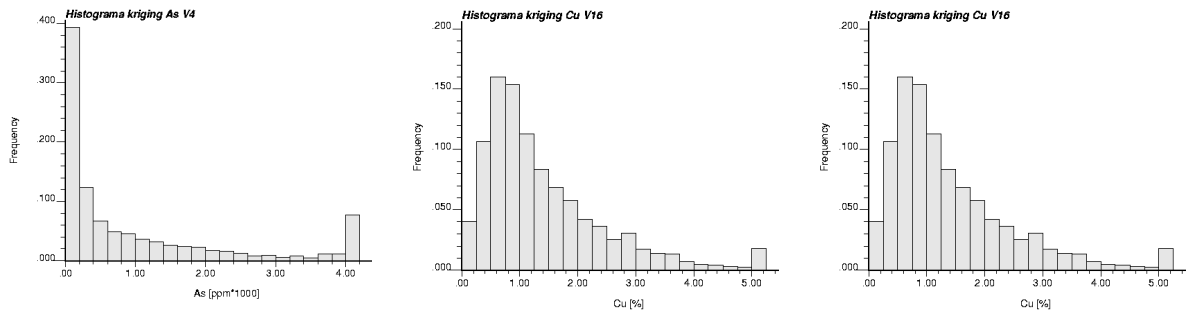


Figura 36: Histogramas de estimación de cobre mediante kriging

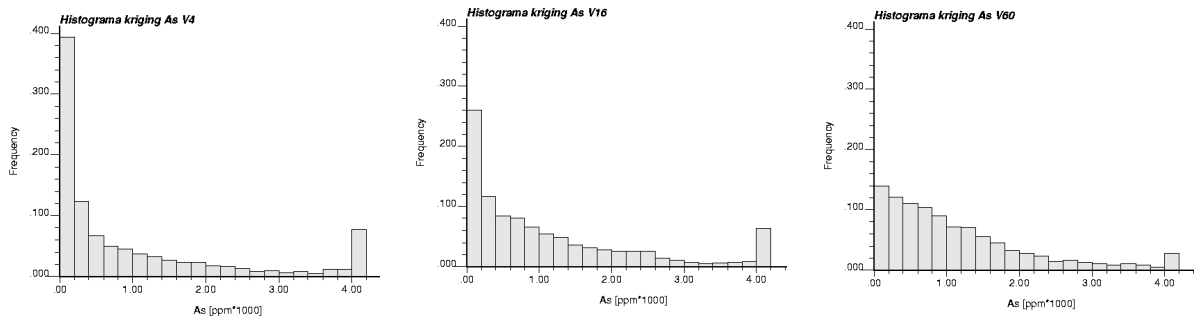


Figura 37: Histogramas de estimación de arsénico mediante kriging

4.3.4. Cokriging

De manera análoga a la sección anterior, aquí se presentan los resultados de la estimación mediante cokriging ordinario de las leyes de cobre y arsénico. La estimación mediante cokriging se realiza para distintas vecindades utilizando el programa propuesto por Emery (2012).

En la estimación multivariable hay que mencionar que se está incorporando información desde los valores de una variable de interés a otra variable (a través del variograma cruzado). Por lo tanto, para estimar una especie de interés no sólo se cuenta con

información de los valores de dicha especie en la vecindad de búsqueda, sino que también hay que considerar la información que aporta la otra variable. Siguiendo esta idea se tiene que en el caso de un muestreo heterotópico se está incorporando más información para la estimación de la variable menos muestreada que la correspondiente a sus propias muestras

Al considerar los puntos medidos más cercanos, independiente de la especie de interés medida en esos puntos, se pueden dar casos que al estimar la variable menos muestreada (arsénico) la vecindad de búsqueda sólo encuentre datos medidos con la información de la variable más muestreada, como se muestra en el esquema (A) de la Figura 38. Luego la estimación mediante cokriging estará exclusivamente basada en los datos de la variable más muestreada (cobre) y la correlación con la variable a estimar, como se muestra en el esquema (B). Para corregir este inconveniente, se considera en la vecindad de búsqueda los valores más cercanos que posean información de la variable a estimar, generando una vecindad variable para cada especie, como se muestra en el esquema (C).

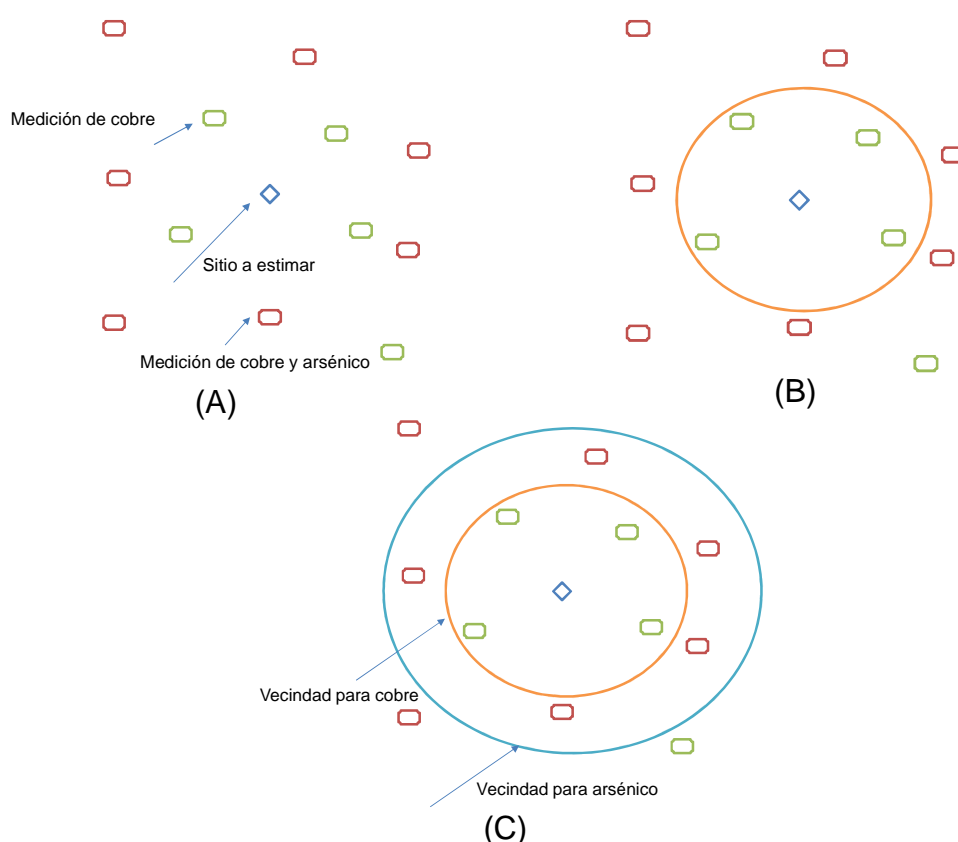


Figura 38 Vecindad para datos con muestreo heterotópico

En las siguientes tablas se muestran las estadísticas básicas de los resultados de la estimación de cobre y arsénico mediante cokriging, para las tres vecindades consideradas.

Tabla 11: Estadística estimación de cobre mediante cokriging

Cobre [%]				
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Muestras desagrupadas
Promedio	1.48	1.4	1.38	1.36
Máximo	15.6	12.42	9.33	24.91
Mínimo	0	0	0.11	0
Varianza	3.36	1.29	0.64	4.6
Número	9072	9072	9072	5796

Tabla 12: Estadística estimación de arsénico mediante cokriging

Arsénico [ppm*1000]				
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Muestras desagrupadas
Promedio	1.26	1.15	1.13	1.01
Máximo	14.15	11.13	8.9	34.94
Mínimo	0	0	0	0
Varianza	4.21	1.65	0.97	5.72
Número	9072	9072	9072	3878

Se puede observar (al igual que en la estimación mediante kriging) que para ambas variables el rango de los valores estimados es menor a medida que aumenta el tamaño de la vecindad de búsqueda considerada.

En las siguientes figuras se muestran curvas tonelaje-ley para las variables estimadas, considerando las 3 vecindades utilizadas (4, 16 y 60 datos más cercanos).

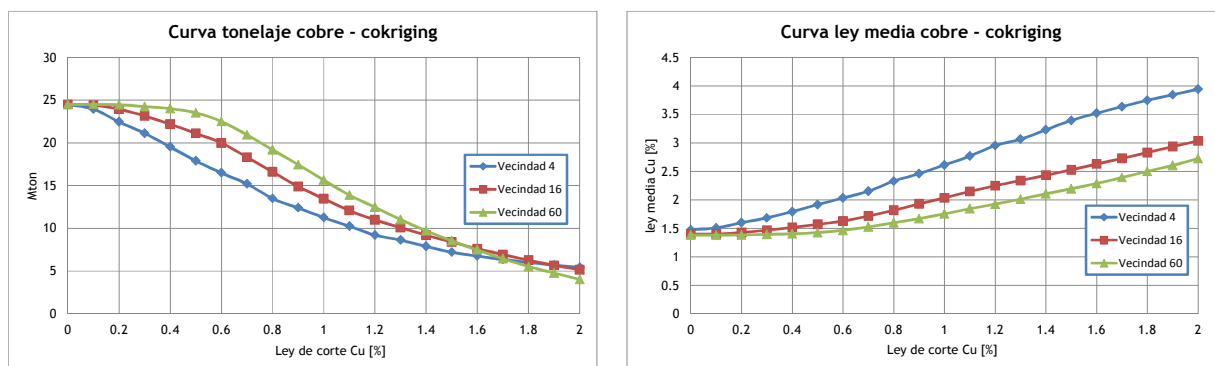


Figura 39: Curvas tonelaje – ley de estimación por cokriging (Cu)

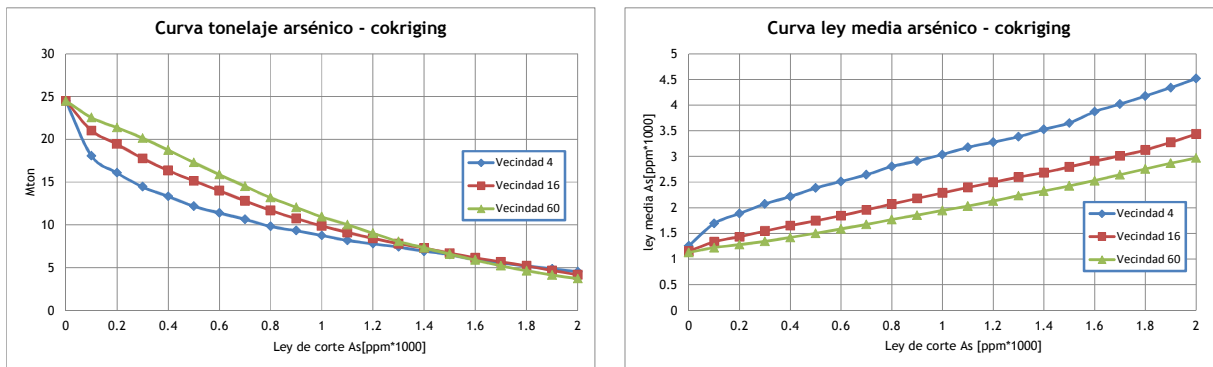


Figura 40: Curvas tonelaje – ley media de estimación por cokriging (As)

En las siguientes figuras, se puede observar el histograma de los valores estimados mediante cokriging para cada vecindad. Al igual que las estimaciones realizadas mediante kriging, a medida que aumenta la vecindad el rango de los valores obtenidos se vuelve más estrecho. En la estimaciones mediante cokriging el suavizamiento se puede visualizar en los perfiles donde se ve la menor presencia de valores extremos cuando la vecindad aumenta de tamaño.

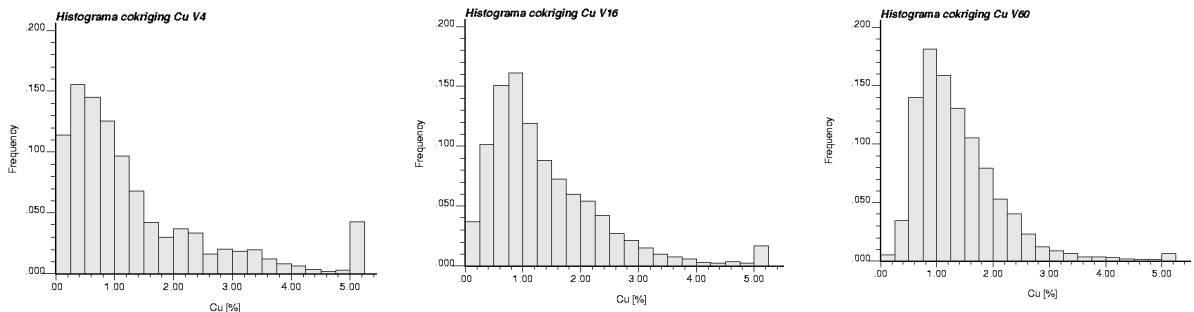


Figura 41: Histogramas de estimación de cobre mediante cokriging

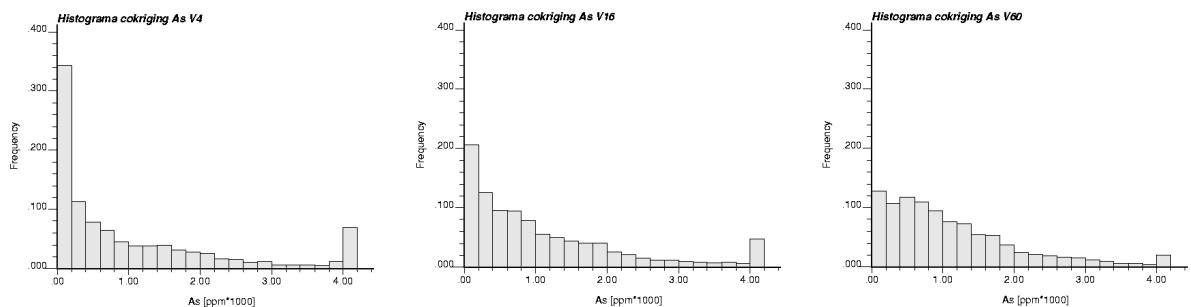


Figura 42: Histogramas de estimación de arsénico mediante cokriging

4.3.5. Media de simulaciones

En esta sección se presentan los resultados de la estimación, mediante simulaciones condicionales univariadas (para cobre y arsénico por separado) para el yacimiento, considerando un soporte de los valores a estimar correspondientes a un volumen de 10 m x 10 m x 10 m. Las simulaciones fueron realizadas mediante el método de bandas rotantes, considerando una vecindad de 16 datos y una discretización de 4 x 4 x 2. La

estimación mediante simulaciones corresponde al promedio de los valores obtenidos en 100 realizaciones (posibles escenarios) para cada bloque. A continuación se muestran estadísticas básicas de esta estimación.

Tabla 13: Estadística estimación mediante media de simulaciones

	Cobre [%]		Arsénico [ppm*1000]	
	Media de simulación	Datos desagrupados	Media de simulación	Datos desagrupados
Promedio	1.39	1.36	1.18	1.01
Máximo	12.11	24.91	10.69	34.94
Mínimo	0.04	0	0.01	0
Varianza	1.13	4.6	1.92	5.72
Número	9072	5796	9072	3878

A continuación se muestra las curvas tonelaje – ley y los histogramas para los resultados obtenidos en esta estimación.

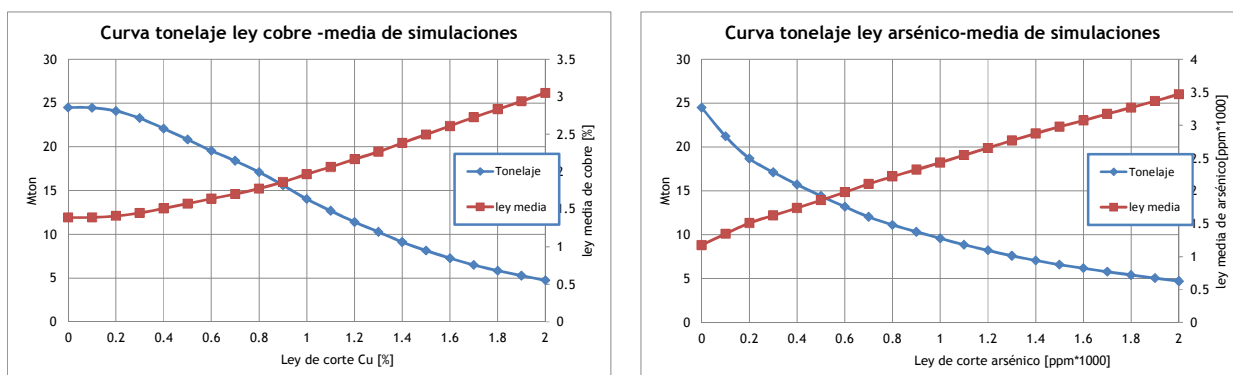


Figura 43: Curva tonelaje – ley (media de simulaciones)

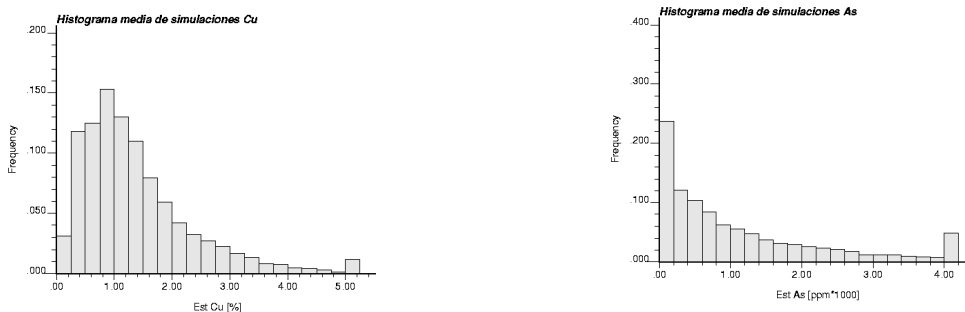


Figura 44: Histogramas de estimación mediante media de simulaciones

4.3.6. Media de cosimulaciones

Al igual que en la sección anterior, aquí se presentan los resultados de la estimación de las variables regionalizadas mediante cosimulaciones. No obstante, en esta sección se utilizó un modelo multivariable que incorpora la correlación entre las variables. Las simulaciones fueron realizadas mediante el método de bandas rotantes, considerando

una vecindad de 16 datos y una discretización de 4 x 4 x 2. La estimación corresponde al promedio de 100 realizaciones de cosimulación. A continuación se muestran estadísticas básicas de esta estimación.

Tabla 14: Estadística estimación mediante media de cosimulaciones

	Cobre [%]		Arsénico [ppm*1000]	
	Media de cosimulación	Datos desagrupados	Media de cosimulación	Datos desagrupados
Promedio	1.39	1.36	1.13	1.01
Máximo	13.1	24.91	10.82	34.94
Mínimo	0.05	0	0.01	0
Varianza	1.19	4.6	1.7	5.72
Número	9072	5796	9072	3878

A continuación se muestra las curvas tonelaje – ley y los histogramas para los resultados obtenidos en esta estimación.

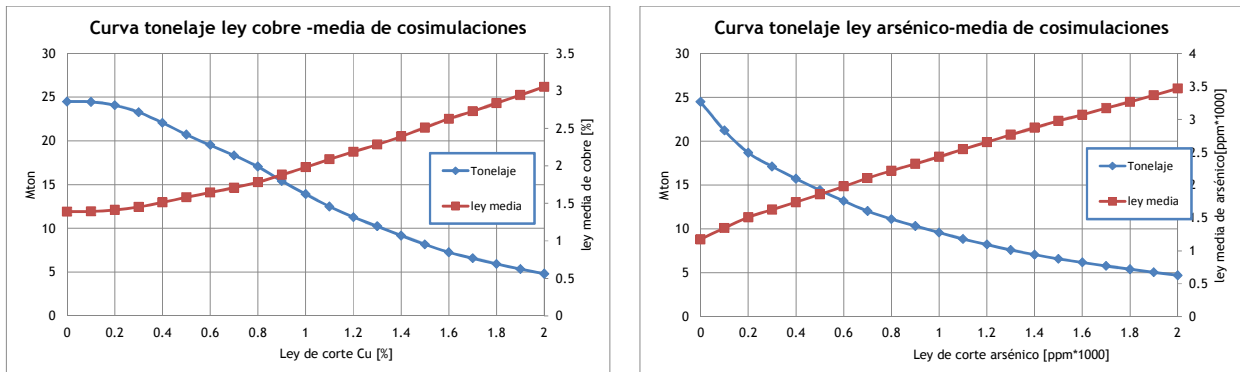


Figura 45: Curva tonelaje – ley (media de cosimulaciones)

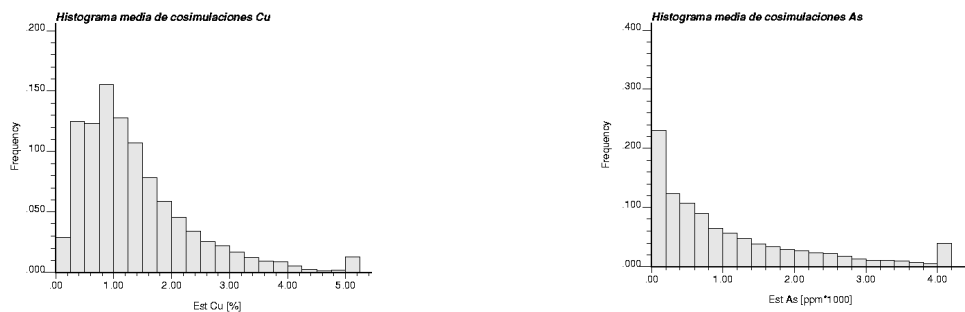


Figura 46: Histogramas de estimación mediante media de cosimulaciones

A continuación se muestra un resumen de las estadísticas considerando los datos de referencias (datos de muestras desagrupadas) y las distintas estimaciones realizadas mediante kriging, cokriging, media de simulaciones y media de cosimulaciones.

Tabla 15: Resumen de datos desagrupados

	Cobre [%]	Arsénico [ppm*1000]
Promedio	1.36	1.01
Máximo	24.91	34.94
Mínimo	0	0
Varianza	4.6	5.72
Número	5796	3878

Tabla 16: Resumen de estadística para estimación de cobre (kriging y cokriging)

	Cobre [%]					
	Kriging			Cokriging		
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60
Promedio	1.51	1.43	1.39	1.48	1.4	1.38
Máximo	15.92	13	9.86	15.6	12.42	9.33
Mínimo	0	0,04	0.1	0	0	0.11
Varianza	3.75	1.47	0.71	3.36	1.29	0.64
Número	9072	9072	9072	9072	9072	9072

Tabla 17: Resumen de estadística para estimación de arsénico (kriging y cokriging)

	Arsénico [ppm*1000]					
	Kriging			Cokriging		
	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60	Vecindad 4	Vecindad 16	Vecindad 60
Promedio	1.35	1.21	1.15	1.26	1.15	1.13
Máximo	23.11	10.64	9.17	14.15	11.13	8.9
Mínimo	0	0.01	0	0	0	0
Varianza	7.14	2.32	1.17	4.21	1.65	0.97
Número	9072	9072	9072	9072	9072	9072

Tabla 18: Resumen de estadística para estimación mediante simulaciones

	Cobre [%]		Arsénico [ppm*1000]	
	Media de simulaciones	Media de cosimulaciones	Media de simulaciones	Media de cosimulaciones
Promedio	1.39	1.39	1.18	1.13
Máximo	12.11	13.1	10.69	10.82
Mínimo	0.04	0.05	0.01	0.01
Varianza	1.13	1.19	1.92	1.7
Número	9072	9072	9072	9072

En las tablas anteriores se puede observar que tanto para kriging como cokriging al aumentar la vecindad disminuye el promedio de los datos, que corresponde a la ley

media del yacimiento, generando variaciones en la estimación de recursos (en este caso ley y cantidad de metal). La disminución de la varianza y del valor máximo muestra el suavizamiento generado al incrementar el tamaño de la vecindad. A continuación se muestra el estudio del sesgo condicional para las distintas estimaciones realizadas.

4.4. ANÁLISIS DE SESGO CONDICIONAL

Para cuantificar el sesgo condicional generado se considerarán las siguientes estimaciones realizadas:

- Estimación mediante kriging en 3 vecindades distintas.
- Estimación mediante cokriging en 3 vecindades distintas.
- Estimación mediante media de simulaciones
- Estimación mediante media de cosimulaciones

El caso base con el cual se evaluará el sesgo condicional corresponde a las cien realizaciones de cosimulación, cada una de las cuales será interpretada como una realidad del yacimiento. El sesgo condicional se cuantificará como la diferencia entre la ley media real y la ley media estimada considerando ciertas condiciones que involucran leyes de corte de cobre y arsénico. Para cada ley de corte considerada se muestra la ley media estimada de los bloques que cumplan con dicha ley de corte. Para esos mismos bloques se calcula la ley media real, en cada uno de los casos base. Con el fin de mostrar un rango entre los cuales varía la ley media real para cada caso, se muestran los percentiles 10, 50 y 90.

Se consideran 4 posibles tipos distintos de sesgo condicional, a saber:

- 1) Sesgo condicional univariable de cobre: En este caso se impone una condición sobre la ley estimada de cobre (superior a cierta ley de corte) y se buscará cuantificar el sesgo condicional generado sobre el cobre.
- 2) Sesgo condicional univariable de arsénico: En este caso se impone una condición sobre la ley estimada de arsénico (superior a cierta ley de corte) y se buscará cuantificar el sesgo condicional generado en el arsénico.
- 3) Sesgo condicional bivariable de cobre sobre el arsénico: En este caso la condición es sobre la ley estimada de cobre (superior a cierta ley de corte), y se buscará cuantificar el sesgo generado sobre el arsénico.
- 4) Sesgo condicional bivariable cobre y arsénico: En este último caso se busca cuantificar el sesgo condicional generado al imponer condiciones que involucren ambas variables (cobre y arsénico).

En los anexos E y D se encuentran los resultados al cuantificar el sesgo condicional mediante la diferencia entre la cantidad de fino (estimado y real) relativo al yacimiento para las estimaciones realizadas mediante kriging y cokriging y como media de realizaciones de simulaciones y cosimulaciones.

4.4.1. Sesgo condicional univariable de cobre (kriging y cokriging)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de cobre en las distintas estimaciones de kriging y cokriging.

Se puede observar que el sesgo condicional depende principalmente de la vecindad considerada y no del tipo de estimación realizada. A medida que aumenta la vecindad, disminuye el sesgo condicional.

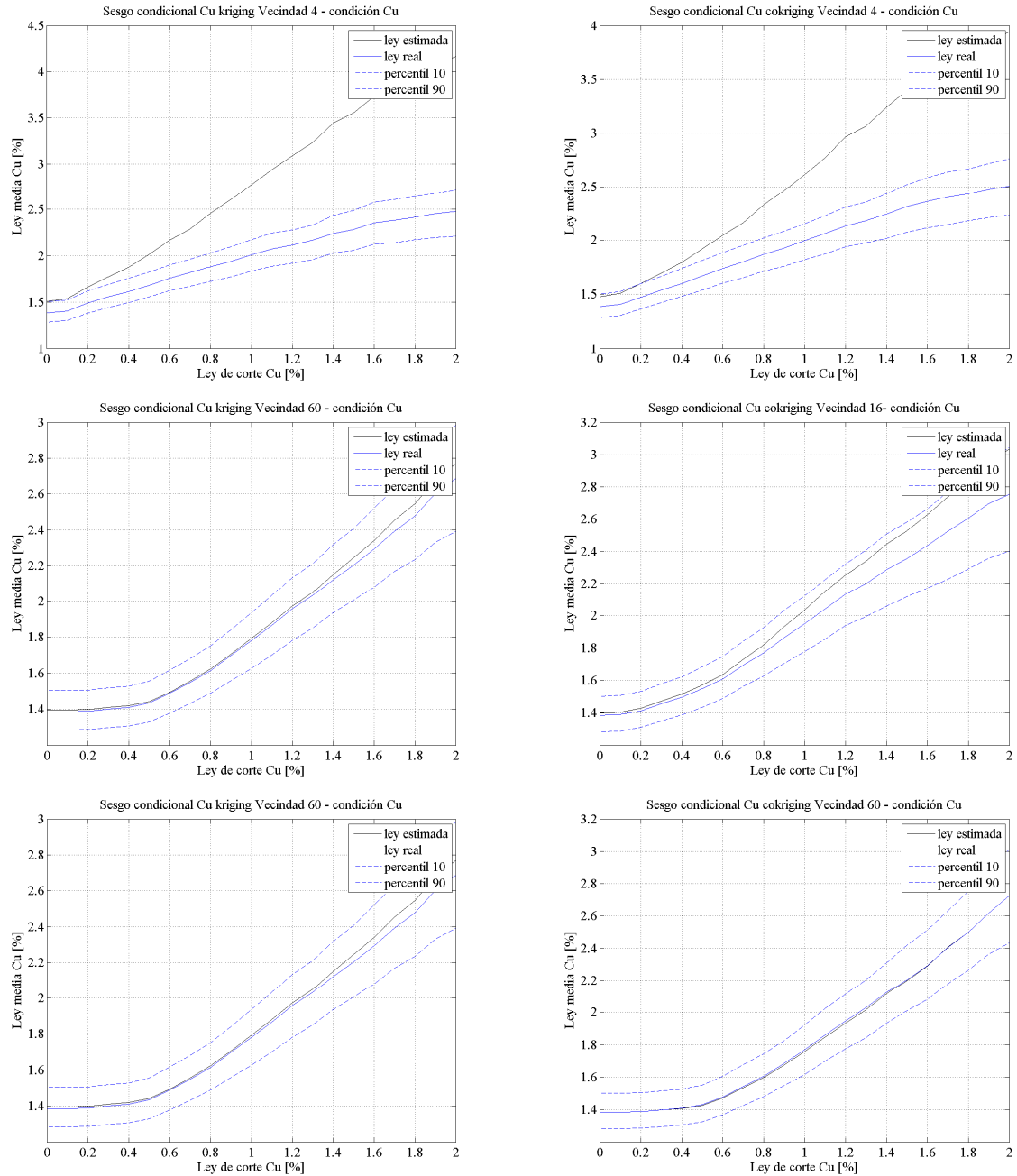


Figura 47: Sesgo condicional univariable de cobre (kriging y cokriging)
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

4.4.2. Sesgo condicional univariable de arsénico (kriging y cokriging)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de arsénico en las distintas estimaciones de kriging y cokriging.

Nuevamente, se puede observar que el sesgo condicional depende principalmente de la vecindad considerada. No obstante, cuando se realiza una estimación multivariable disminuye el sesgo condicional generado, en particular para la vecindad de 16 datos.

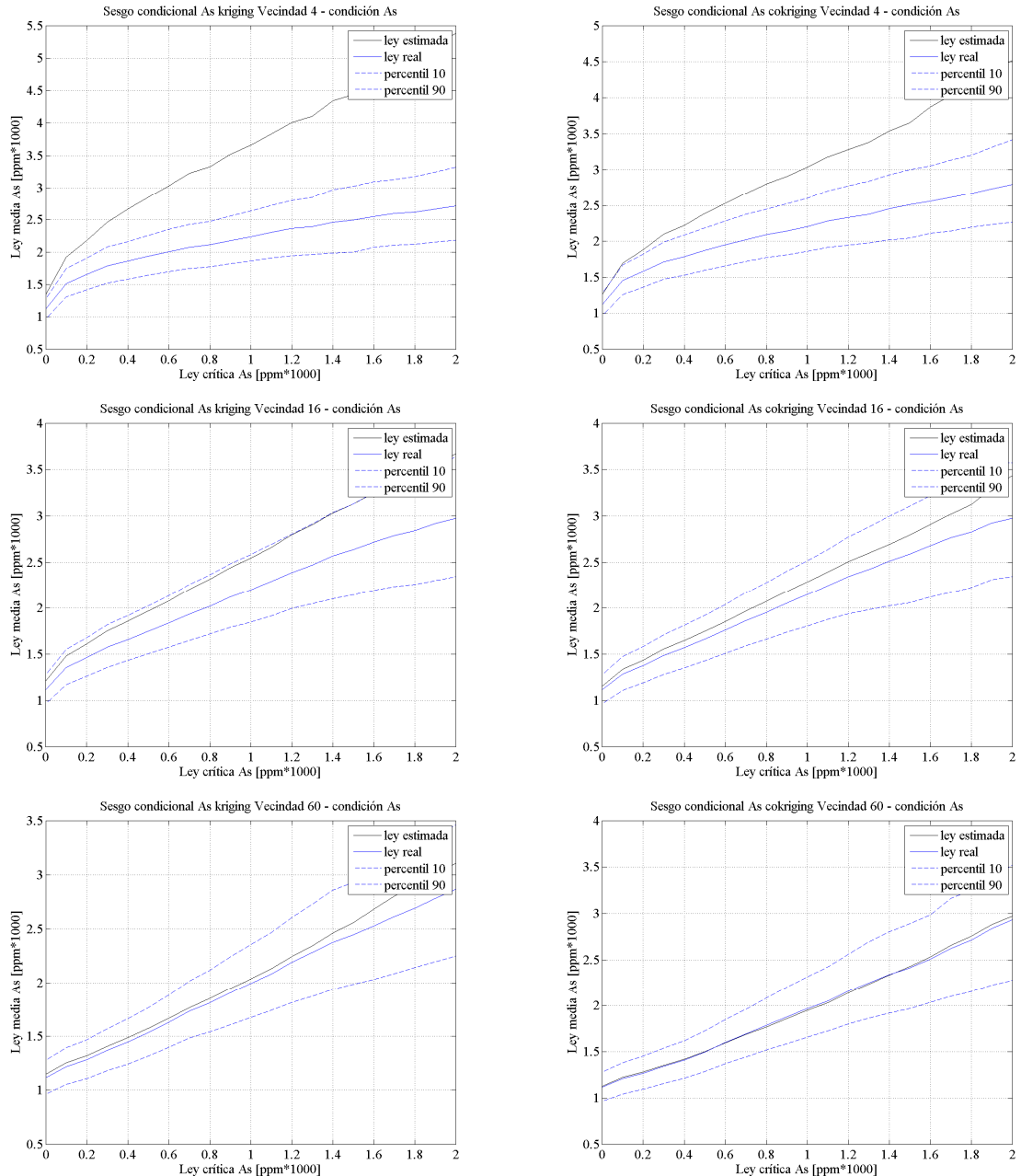


Figura 48: Sesgo condicional univariable de arsénico (kriging y cokriging)
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

4.4.3. Sesgo condicional bivariable de cobre sobre el arsénico (kriging y cokriging)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar ley de corte de cobre y observar el efecto en la estimación de arsénico.

Al igual que en el caso anterior, el sesgo condicional generado depende principalmente de la vecindad. No obstante en este caso se ve una disminución del sesgo condicional cuando se considera una estimación multivariable.

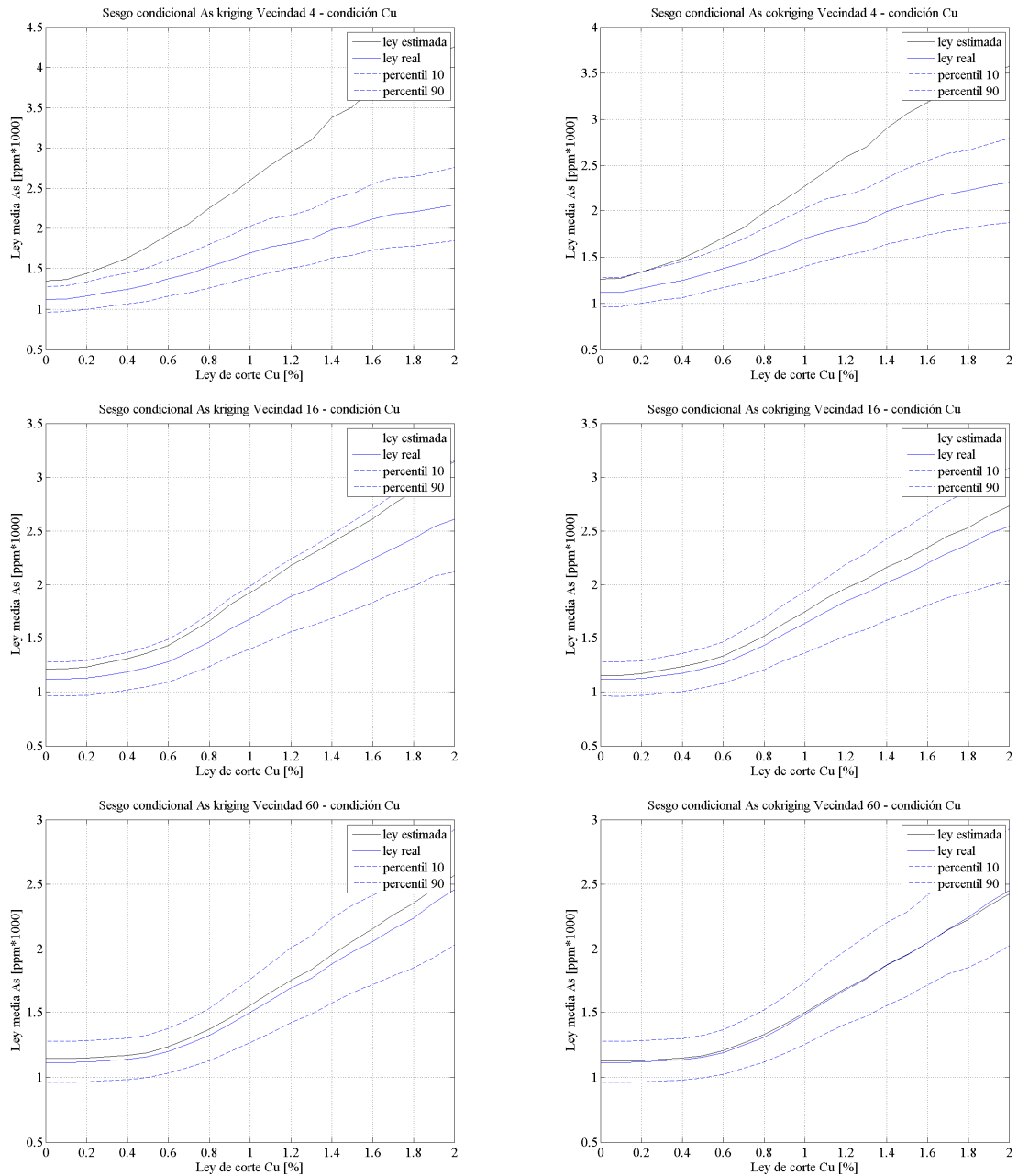


Figura 49: Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico (kriging y cokriging)
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

4.4.4. Sesgo condicional bivariable (kriging y cokriging)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de cobre (variable entre 0 y 2%), y de arsénico (fija en 500 ppm), y observar el efecto en la estimación de las variables para las distintas estimaciones consideradas.

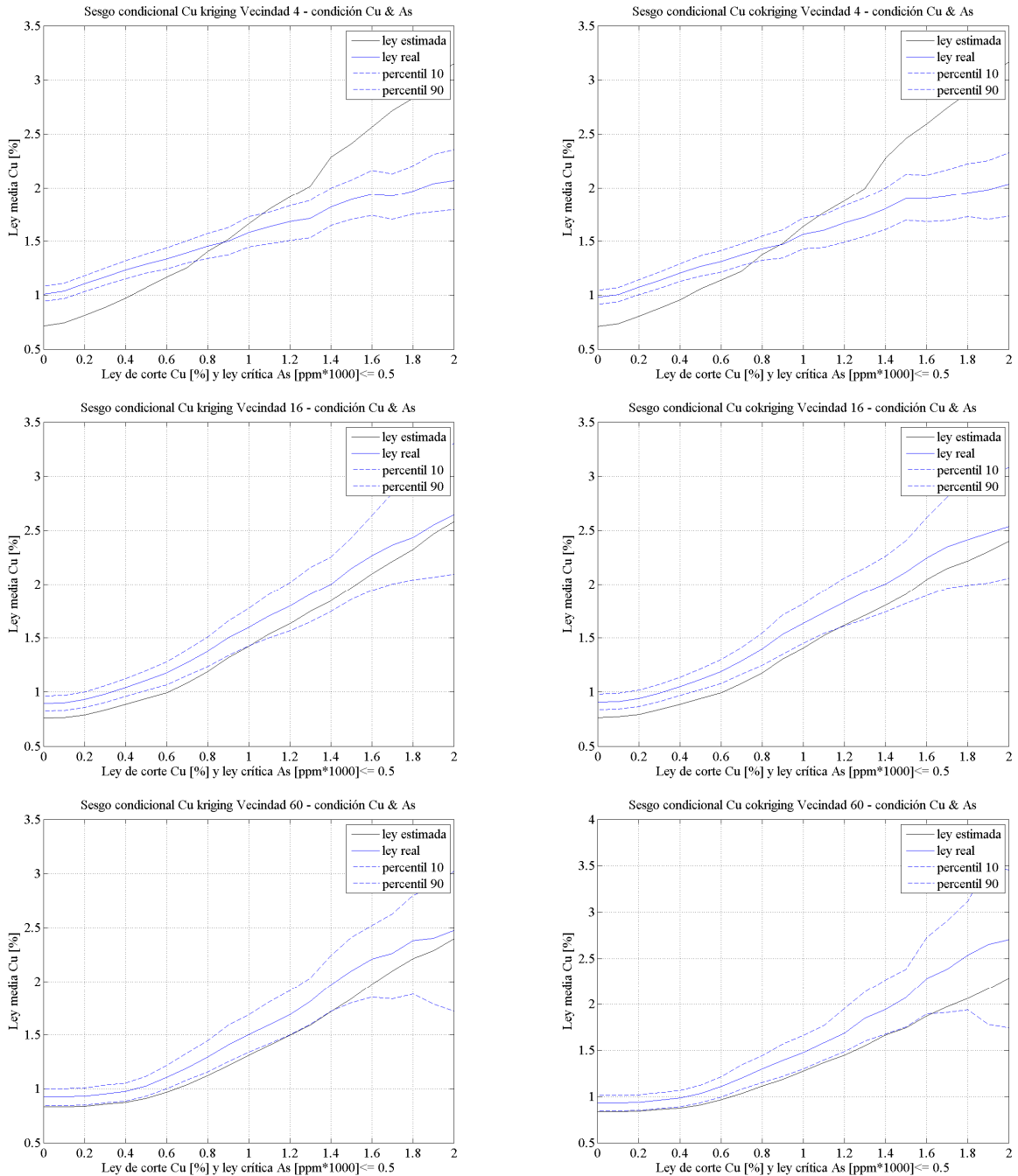


Figura 50: Sesgo condicional bivariable cobre (kriging y cokriging)
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

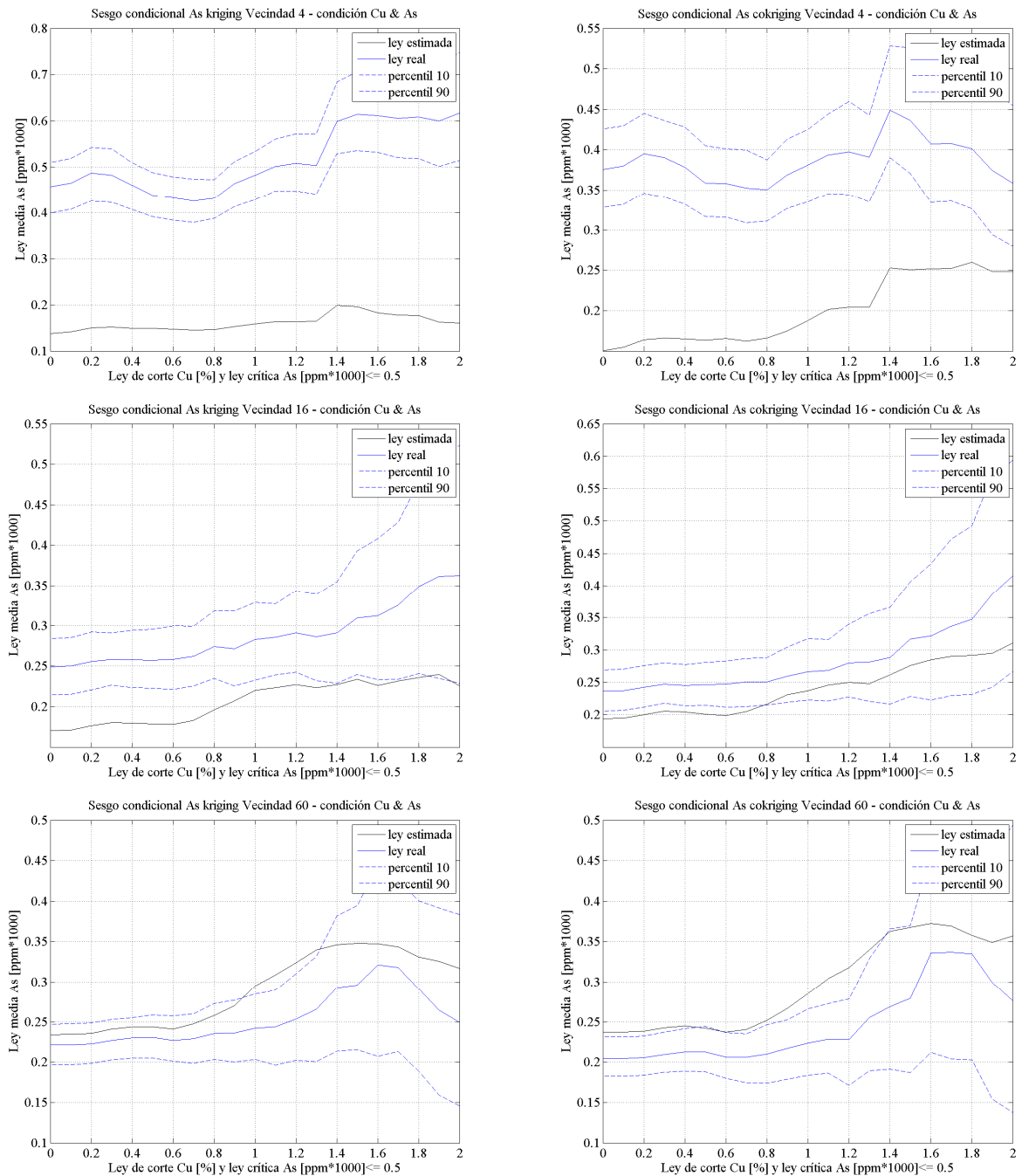


Figura 51: Sesgo condicional bivariable arsénico (kriging y cokriging)
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

Las figuras 50 y 51 muestran un sesgo condicional errático en este caso, donde ni siquiera al considerar una vecindad de gran tamaño se logran resultados satisfactorios.

4.4.5. Sesgo condicional univariable de cobre (simulación y cosimulación)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de cobre en las distintas estimaciones realizadas como media de simulaciones y cosimulaciones.

En la siguiente figura se puede apreciar que prácticamente no existe sesgo condicional entre la estimación y los posibles escenarios, para las dos estimaciones consideradas.

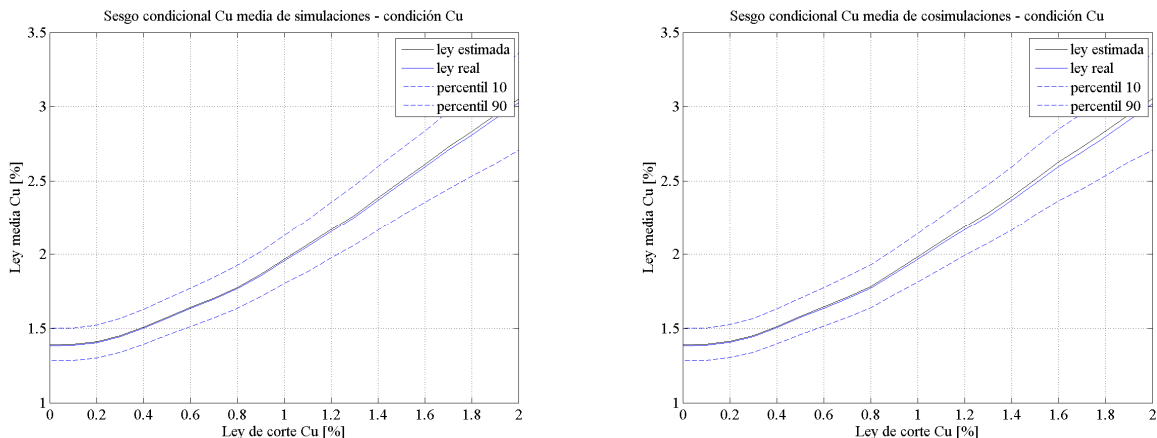


Figura 52: Sesgo condicional univariable de cobre (simulación y cosimulación)
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

4.4.6. Sesgo condicional univariable de arsénico (simulación y cosimulación)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de arsénico en las distintas estimaciones realizadas como media de simulaciones y cosimulaciones.

En la siguiente figura se puede apreciar un leve sesgo condicional cuando se considera la estimación mediante simulaciones. Por el contrario, cuando se considera una estimación multivariable no se observa sesgo condicional.

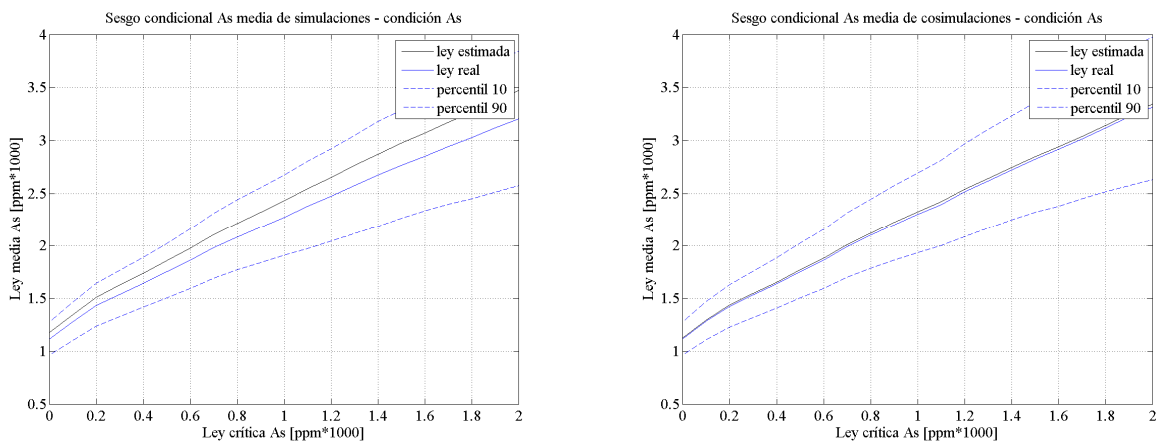


Figura 53: Sesgo condicional univariable de arsénico (simulación y cosimulación)
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

4.4.7. Sesgo condicional bivariable de cobre sobre el arsénico (simulación y cosimulación)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar una ley de corte de cobre y considerar el efecto que produce en la ley media de arsénico cuando se consideran las distintas estimaciones realizadas como media de simulaciones y cosimulaciones.

En la siguiente figura se puede apreciar un leve sesgo condicional cuando se considera la estimación mediante simulaciones. Por el contrario, cuando se considera una estimación multivariable no se observa sesgo condicional.

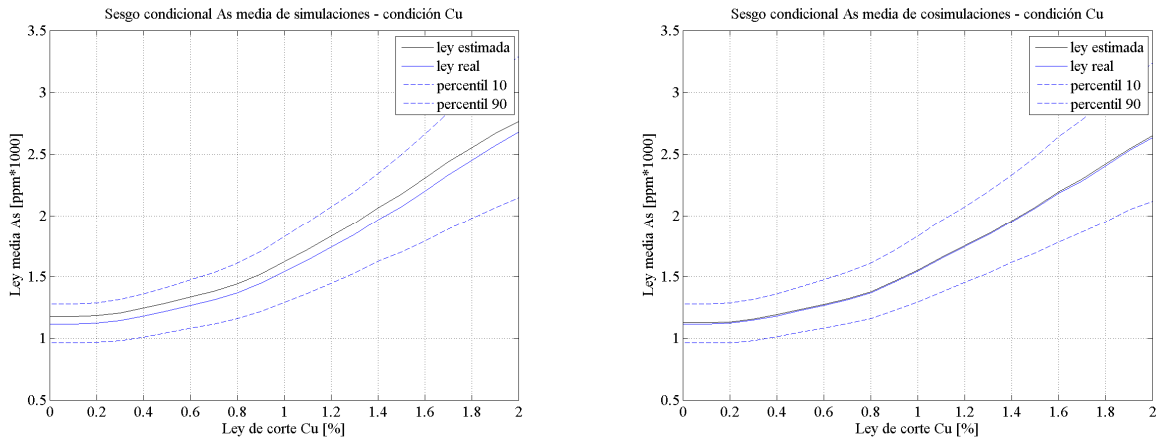


Figura 54: Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico (simulación y cosimulación)
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

4.4.8. Sesgo condicional bivariable (simulación y cosimulación)

En esta sección se muestra el sesgo condicional generado al considerar tanto una ley de corte de cobre como una condición de arsénico (menor a 500 ppm) y considerar el efecto que produce en tanto en la ley media de cobre como en la de arsénico.

En la siguiente figura se puede apreciar un leve sesgo condicional en ambas simulaciones consideradas.

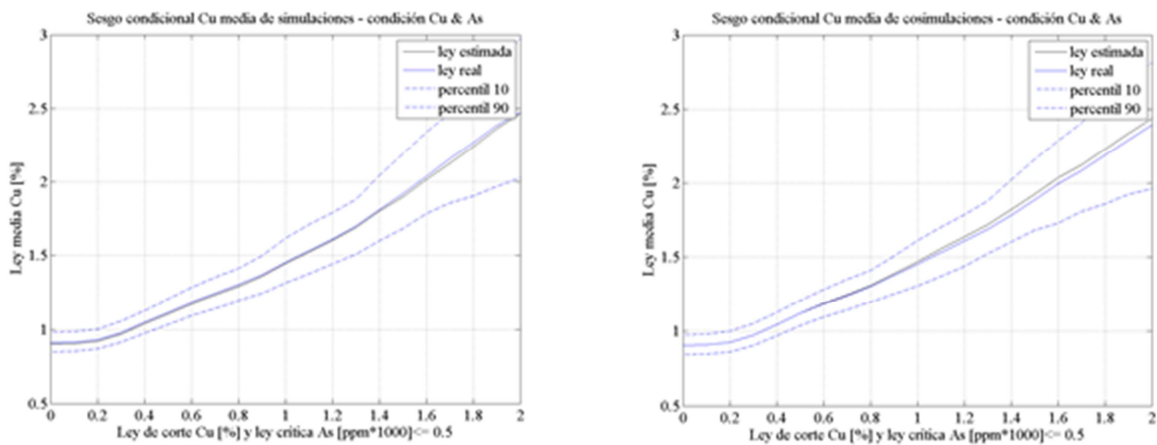


Figura 55: Sesgo condicional bivariable cobre (simulación y cosimulación)
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

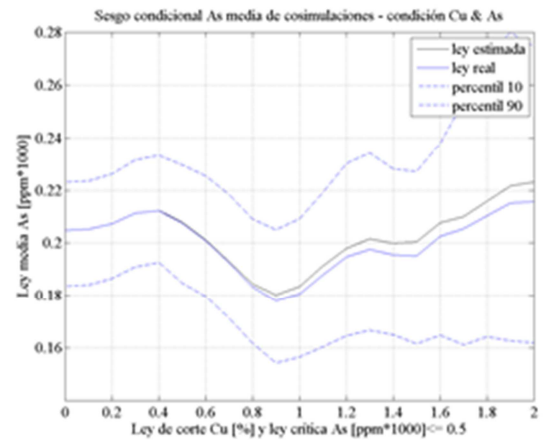
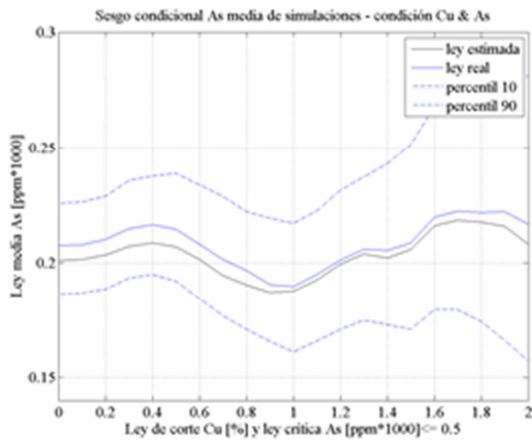


Figura 56: Sesgo condicional bivariable arsénico (simulación y cosimulación)
 (Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

5. CONCLUSIONES

En el presente caso de estudio es posible constatar la presencia del suavizamiento generado en la estimación mediante kriging y la relación que existe con la vecindad de búsqueda. Mientras mayor es el número de datos en la vecindad de búsqueda, mayor es el suavizamiento generado en la estimación. Lo anterior se puede observar en los perfiles de la estimación y en que el rango de los valores estimados se hace cada vez más estrecho. Por tanto, es necesario tener en cuenta este efecto en la estimación mediante kriging, en especial cuando los valores extremos son de interés y no incrementar el tamaño de la vecindad de búsqueda con el único propósito de aumentar la precisión en la estimación.

En relación al sesgo condicional, éste es considerablemente menor cuando se considera un mayor número de datos en la vecindad de búsqueda, independiente del tipo de estimación realizada (univariable o multivariable). No obstante, el sesgo condicional es relativamente menor cuando se realiza una estimación conjunta (multivariable) de las especies de interés, ya que incorpora mayor cantidad de información al momento de realizar la estimación. A pesar de esto, la principal causa del sesgo condicional, tanto univariable como bivariable, radica en el tamaño de la vecindad y no en el tipo de estimación considerada.

En todos los casos de sesgo condicional del caso de estudio, la vecindad de 16 datos presentó resultados satisfactorios de sesgo condicional, sobre todo cuando se realizó una estimación multivariable y se analizó el efecto de una variable sobre otra, siendo innecesario utilizar una vecindad de mayor tamaño, la que generaría un suavizamiento que no se traduciría en una disminución significativa del sesgo condicional. Esto confirma la necesidad de analizar la vecindad de búsqueda considerada en las estimaciones.

Las estimaciones realizadas como media de simulaciones y cosimulaciones son las que presentan el menor sesgo condicional, en todos los casos presentados, aunque, tanto la simulación como la cosimulación utilizan para su realización el mismo modelo variográfico que fue considerado para el caso base.

Como recomendación para trabajos futuros se propone analizar el impacto en el diseño (y posteriormente en una evaluación económica) que genera el sesgo condicional en situaciones como las descritas anteriormente.

6. REFERENCIAS

- Chilès JP, Delfiner P. (2012) Geostatistics: modeling spatial uncertainty. Wiley, New York, 699 p.
- Deutsch C.V, Journel A.G.(1998) GSLIB: Geostatistical software library and user's guide. Oxford University Press, New York, 369 p.
- Emery, X. (2012). Cokriging random fields with means related by known linear combinations. Computers & Geosciences, Vol. 38, n°1, p. 136-144.
- Emery, X. (2008). A turning bands program for conditional co-simulation of cross-correlated Gaussian random fields. Computers & Geosciences, Vol. 34, n°12, p. 1850-1862
- Isaaks E. (2005) The kriging oxymoron: a conditionally unbiased and accurate predictor (2nd edition). In: Leuangthong O, Deutsch CV (eds). Geostatistics Banff 2004. Springer, Dordrecht, pp. 363-374.
- Krige D.G. (1997) A practical analysis of the effects of spatial structure and of data available and accessed, on conditional biases in ordinary kriging. In: Baafi EY, Schofield NA (eds) Geostatistics Wollongong 1996. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 799-810.
- McLennan, J. A. and Deutsch, C.V. (2004) Conditional non bias of geostatistical simulation for estimation of recoverable resources. Canadian inst. of Min and Met. CIM Bulletin.
- Rivoirard J. (1987). Two key parameters when choosing the kriging neighborhood. Mathematical Geology 19(8), 851-856
- Vann J., Jackson S., Bertoli O. (2003) Quantitative kriging neighbourhood analysis for the mining geologist - a description of the method with worked case examples. In: 5th International Mining Geology Conference. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Melbourne, pp. 215-223.

Anexo A: Análisis variográfico en direcciones principales

El objetivo de este anexo es encontrar direcciones de anisotropía para las variables Gaussianas y originales. A continuación se muestran los parámetros de los variogramas de las variables Gaussianas en las direcciones principales (norte-sur, este-oeste y vertical).

Variograma	Azimut [°]	Tolerancia Azimut [°]	Ancho de Banda Horizontal [m]	Dip [°]	Tolerancia [°]	Paso [m]	Ancho de Banda Vertical [m]
Rojo	0	20	20	0	20	5	20
Azul	90	20	20	0	20	5	20
Verde	0	20	20	90	20	5	20

A continuación se muestran los variogramas de las variables Gaussianas y originales en las direcciones principales, donde se puede observar que el comportamiento en las direcciones norte-sur y vertical es similar.

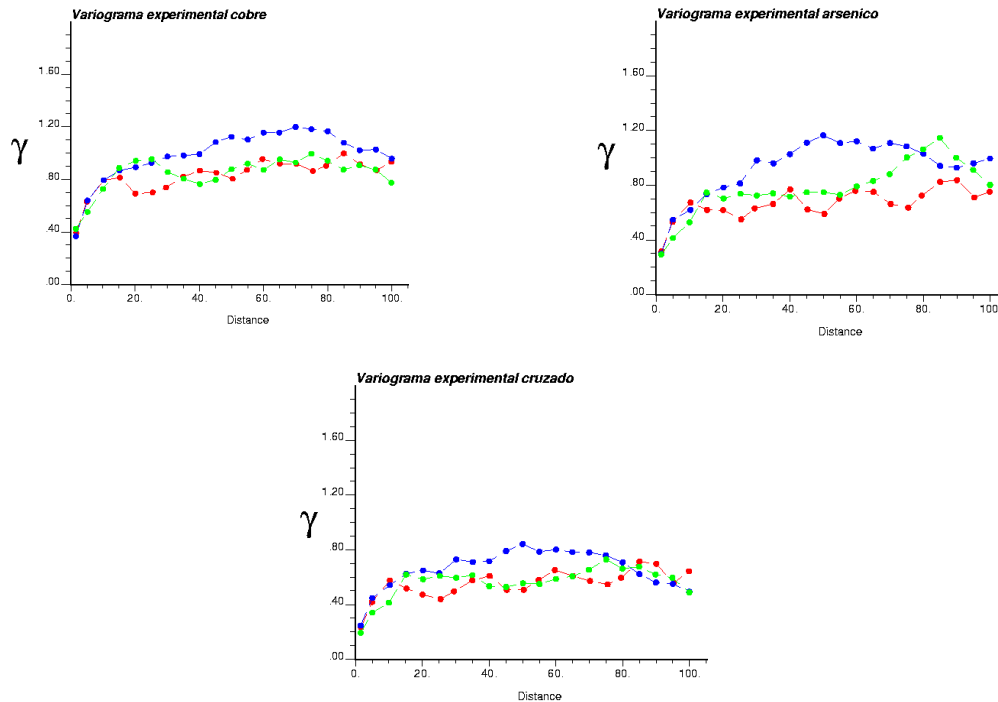


Figura A-1: Variogramas en direcciones principales variables Gaussianas

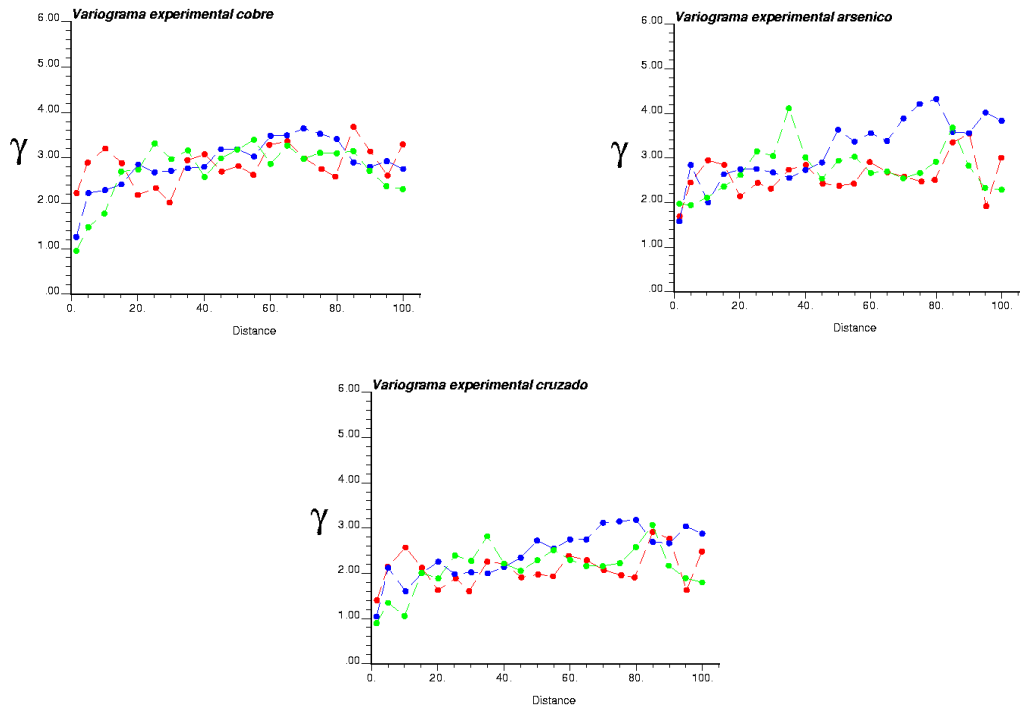


Figura A-2: Variogramas en direcciones principales variables originales

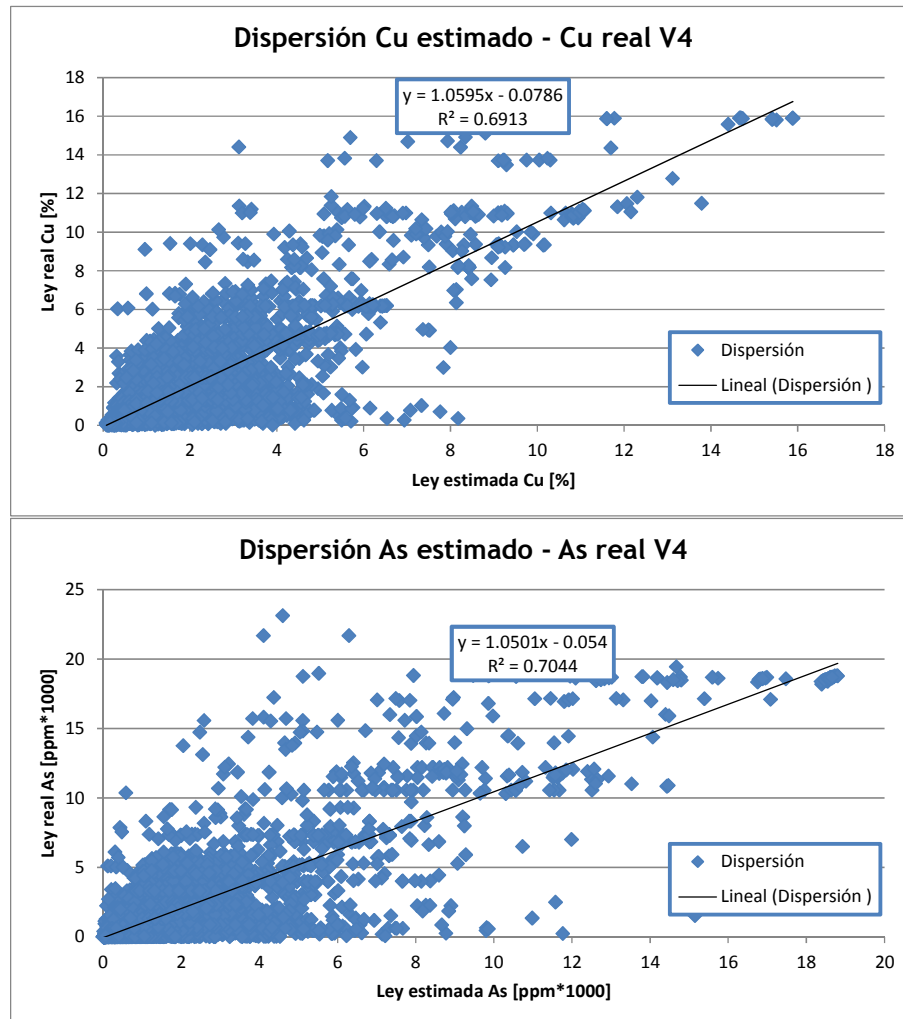
Anexo B: Validaciones cruzadas

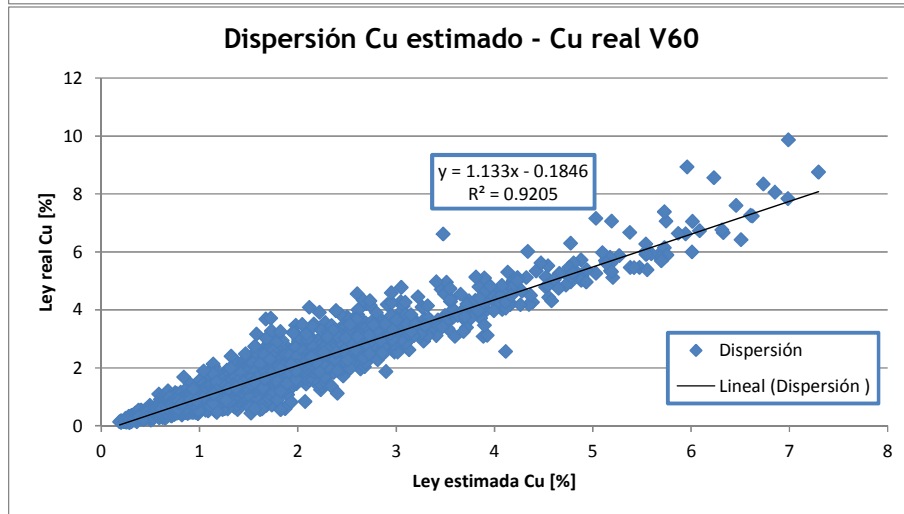
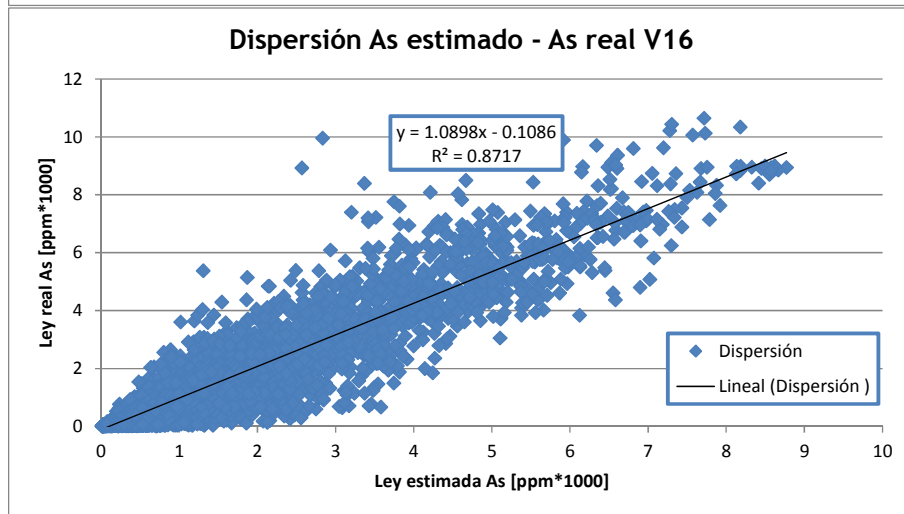
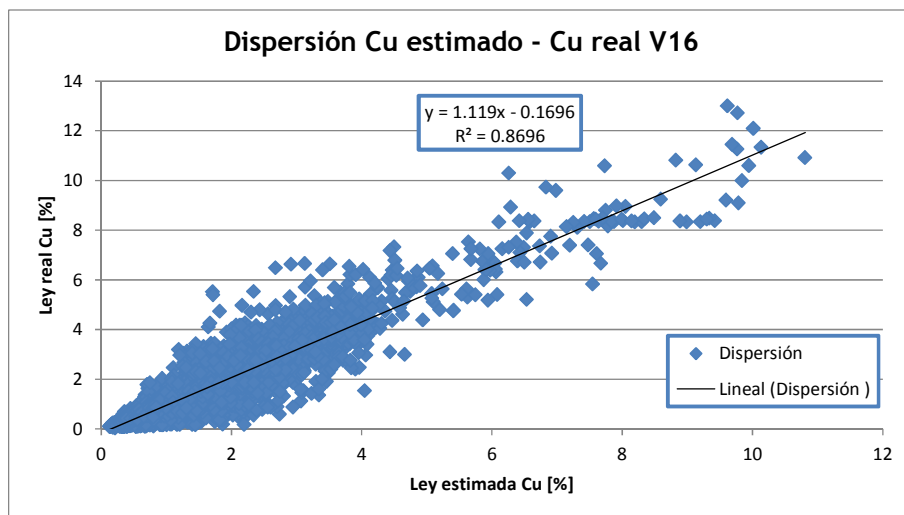
En este anexo se muestran los resultados de la validación cruzada para las tres vecindades consideradas (4, 16 y 60 datos). En la siguiente tabla se observa como la media de los errores estandarizados tiende a 0 al considerar mayor cantidad de muestras para realizar la estimación.

Media de errores estandarizados de estimación

	Cobre	Arsénico
Vecindad 4	-0.0038	-0.0044
Vecindad 16	-0.0002	-0.0001
Vecindad 60	-0.0003	-0.0005

En la siguiente figura se puede observar que la pendiente de la regresión entre valores estimados y valores reales tiende a 1 a medida que se consideran mayor cantidad de datos en la validación.





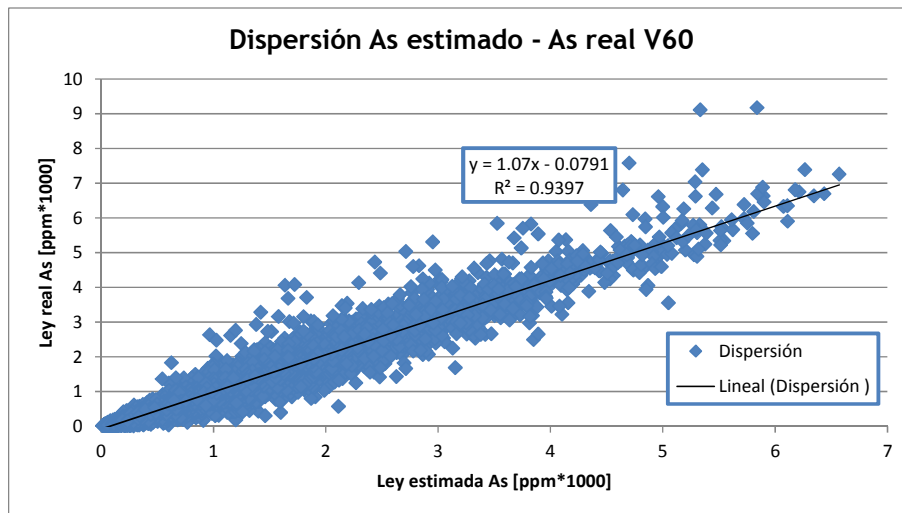
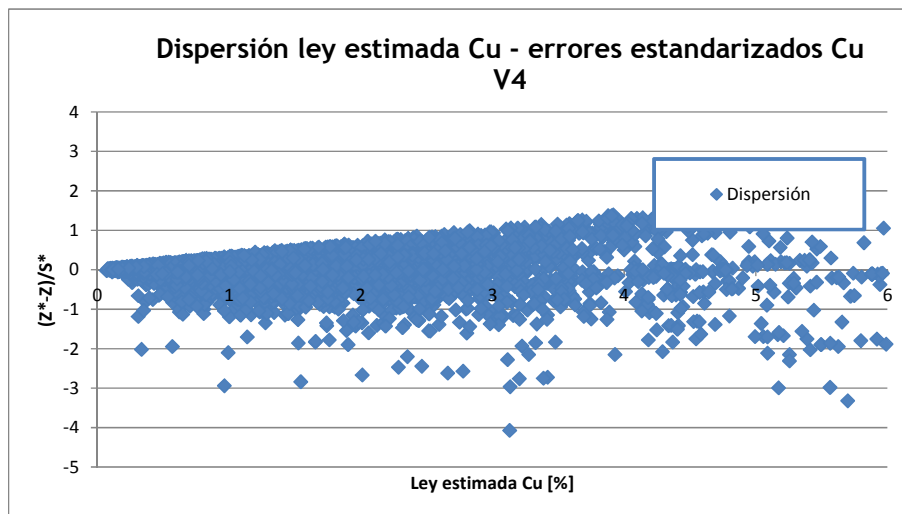
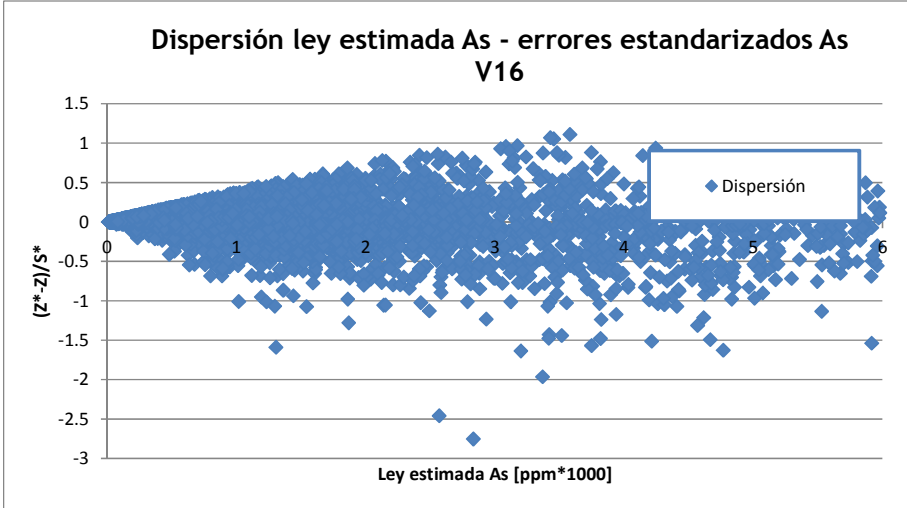
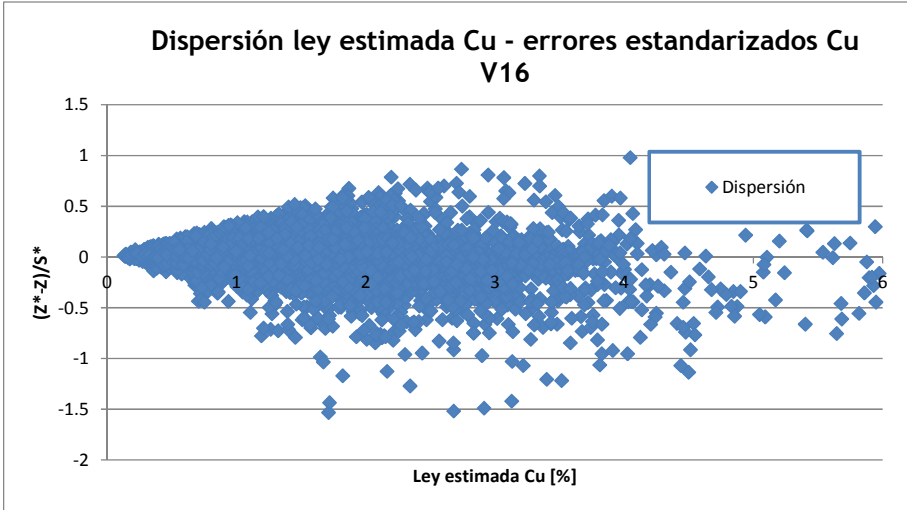
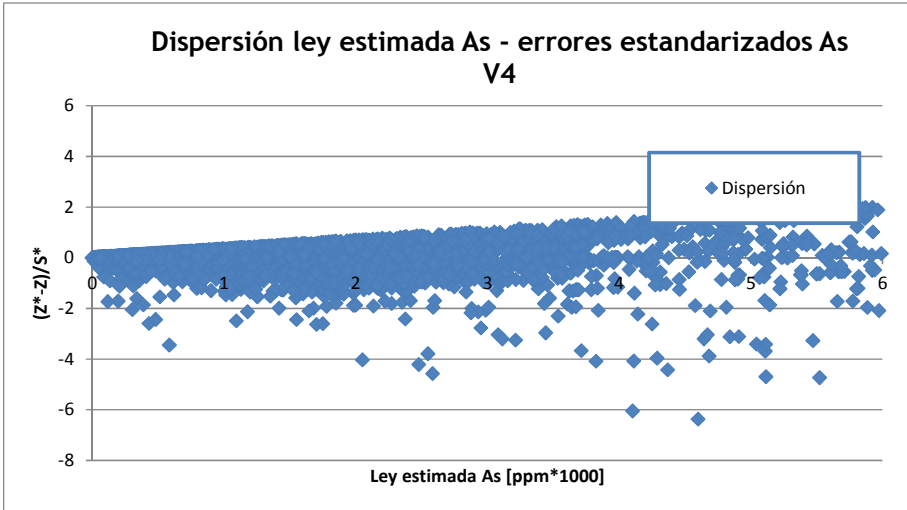


Figura B-1: Dispersión entre valores reales y valores estimados

En la siguiente figura se puede observar la dispersión entre valores estimados y errores estandarizados, donde se aprecia que los errores disminuyen al considerar una vecindad con mayor número de datos. Junto con la figura anterior muestra un buen ajuste del modelo variográfico, sobre todo para vecindades de búsqueda de gran tamaño.





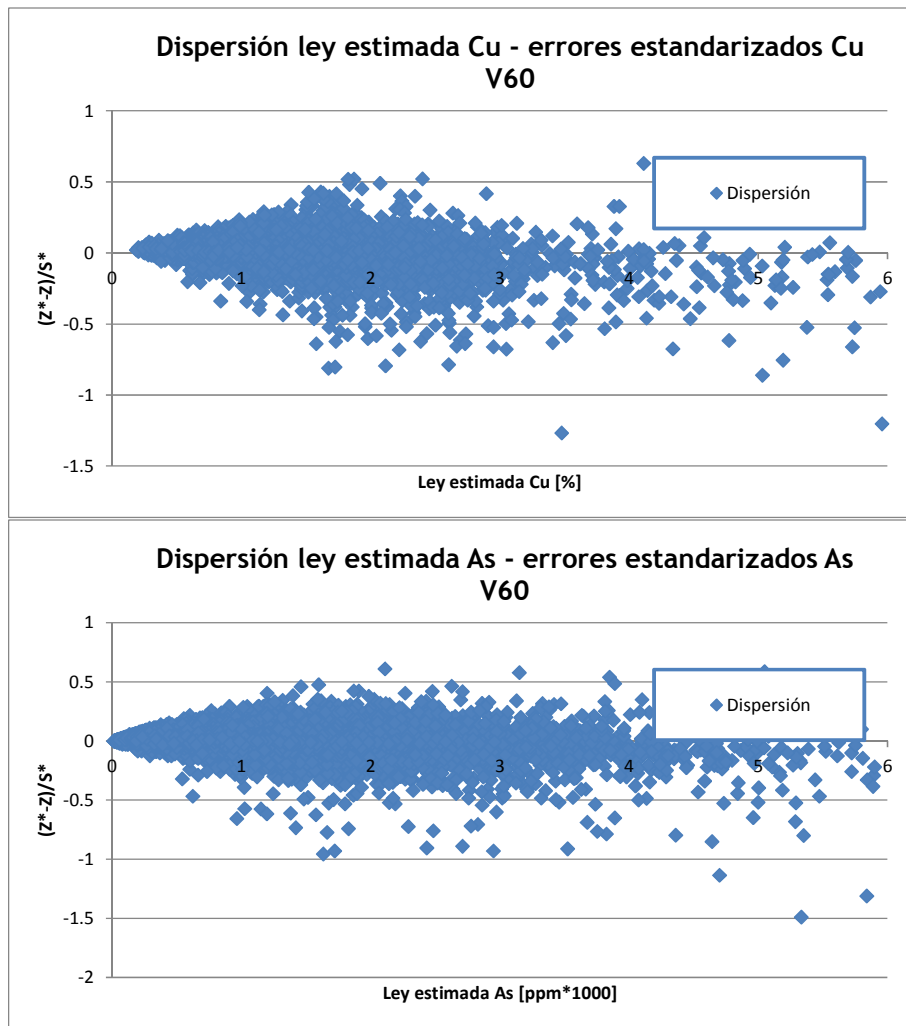


Figura B-2: Dispersión entre valores estimados y errores estandarizados

Anexo C: Perfil Norte-Cota de estimaciones

A continuación se muestran los perfiles Norte-Cota de las estimaciones realizadas mediante kriging o cokriging, para las tres vecindades consideradas en cada caso. En estos perfiles es posible apreciar el suavizamiento que ocurre al incrementar el tamaño de la vecindad de búsqueda en ambos tipos de estimación.

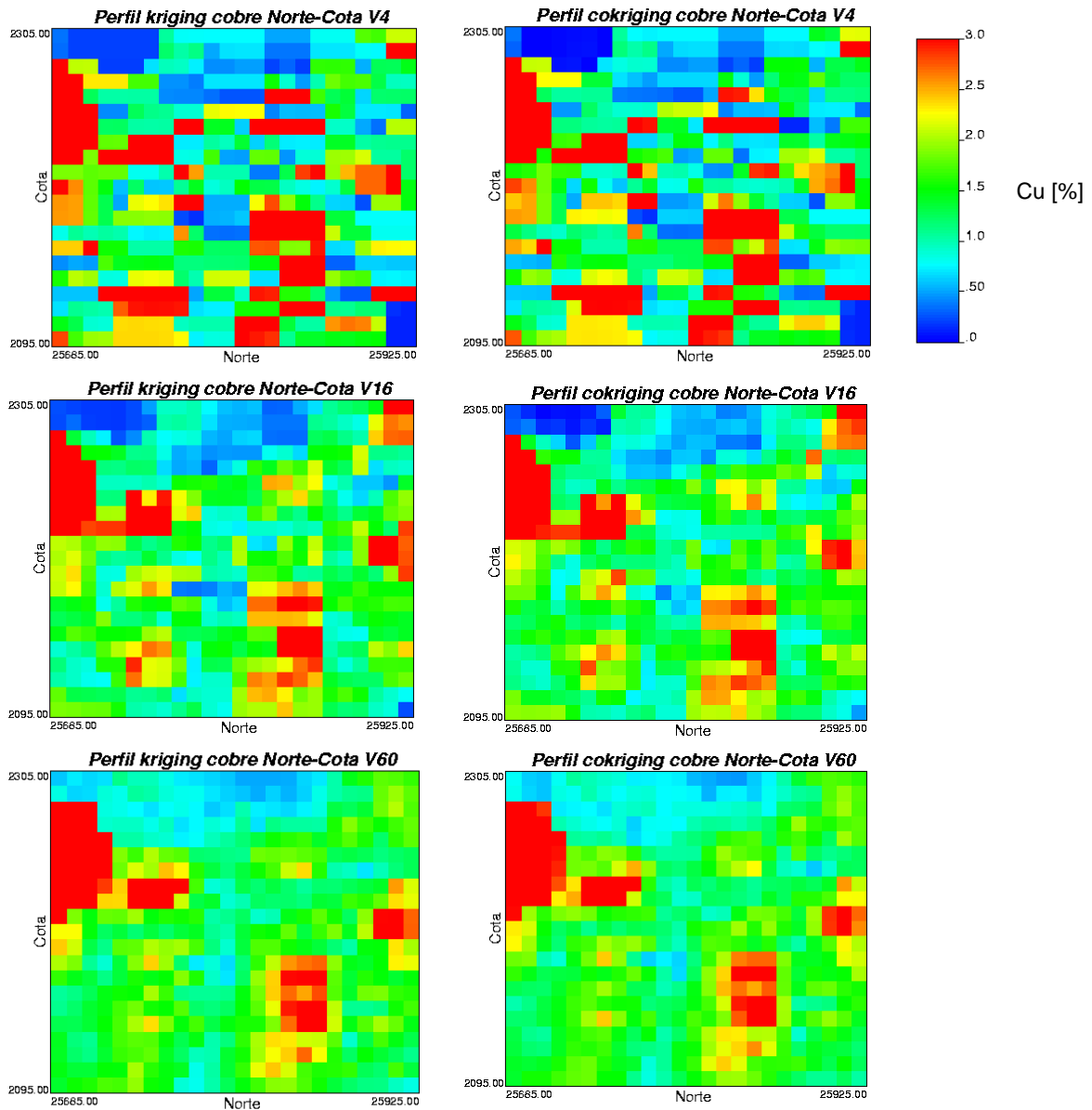


Figura C-1: Perfiles Norte –Cota de cobre

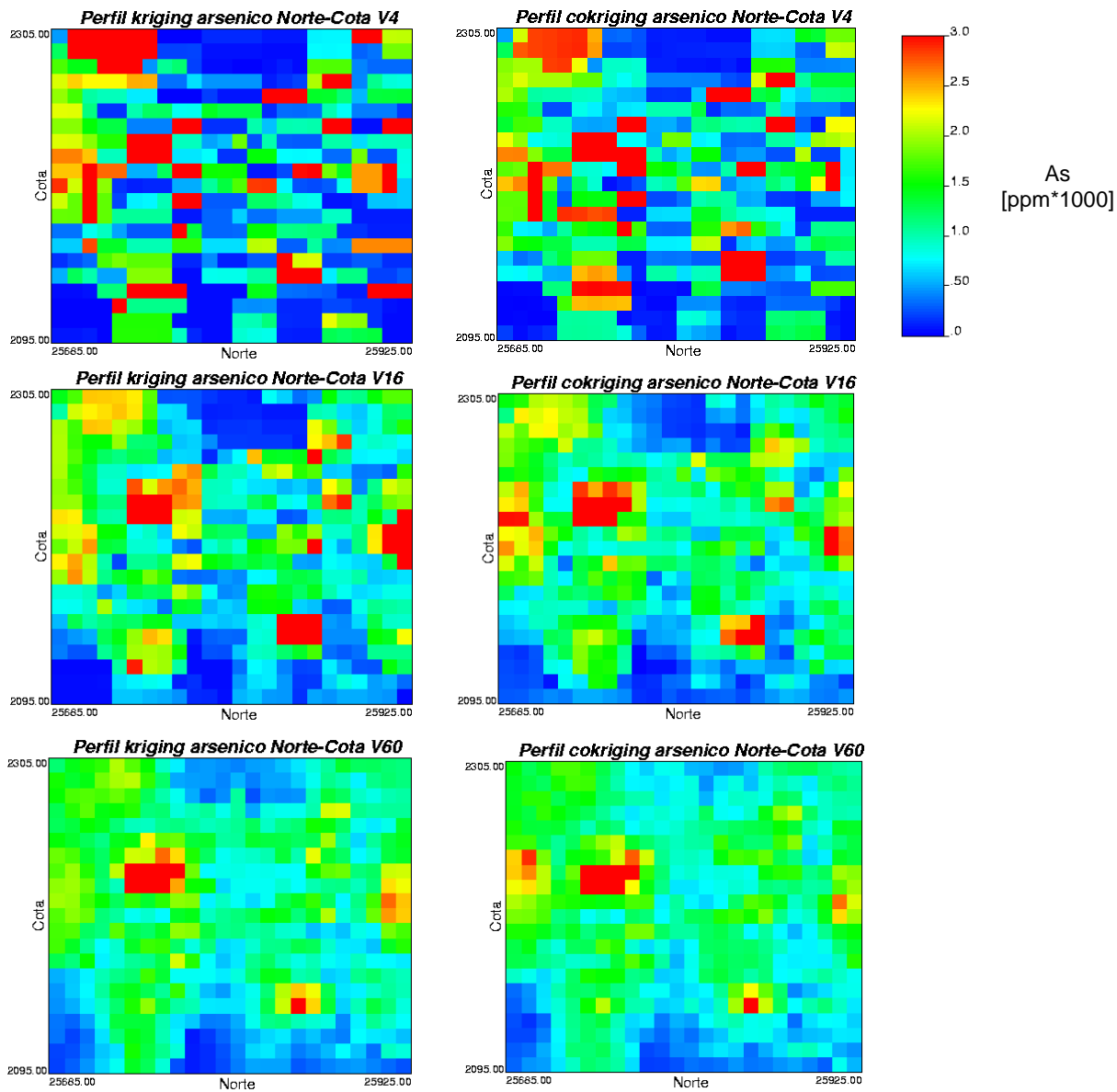


Figura C-2: Perfiles Norte-Cota de arsénico

Anexo D: Validación gráfica de las estimaciones

En este anexo se reportan validaciones gráficas de las estimaciones realizadas (kriging, cokriging, media de simulaciones y media de cosimulaciones). La validación gráfica corresponde al cálculo de la media direccional, donde se visualiza la media direccional de los valores estimados para tres direcciones principales (norte-sur, este-oeste y vertical) y se compara con la media direccional de los datos muestreados, para observar si existe correspondencia entre los valores.

A continuación se muestran los cálculos de media direccional para kriging y cokriging en las tres vecindades consideradas y las dos especies estimadas (cobre y arsénico). Se puede apreciar que las medias direccionales de los valores estimados son similares a las medias direccionales de las muestras. En negro se muestran las medias direccionales de las muestras mientras que las vecindades de 4, 16 y 60 datos son mostradas en azul, rojo y verde, respectivamente.

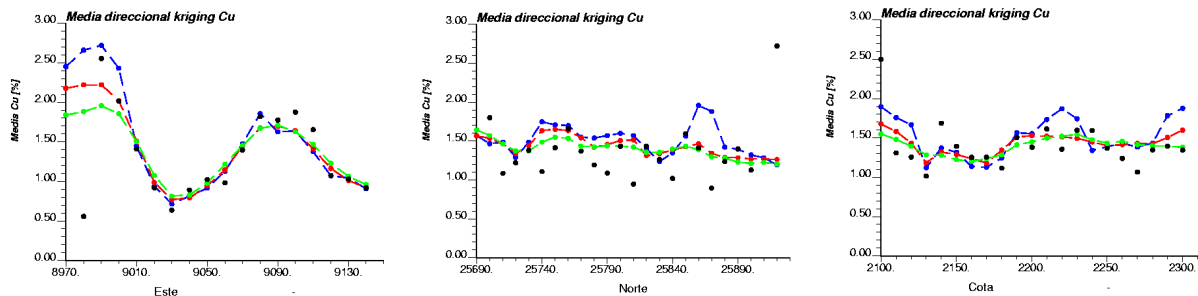


Figura D-1: Media direccional kriging – cobre

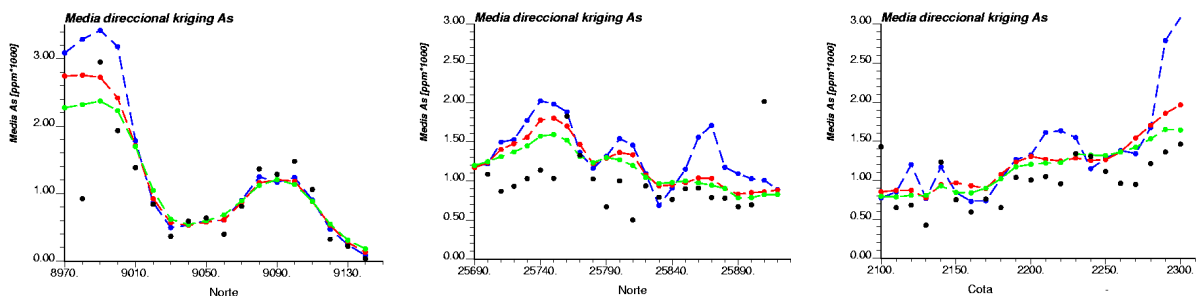


Figura D-2: Media direccional kriging – arsénico

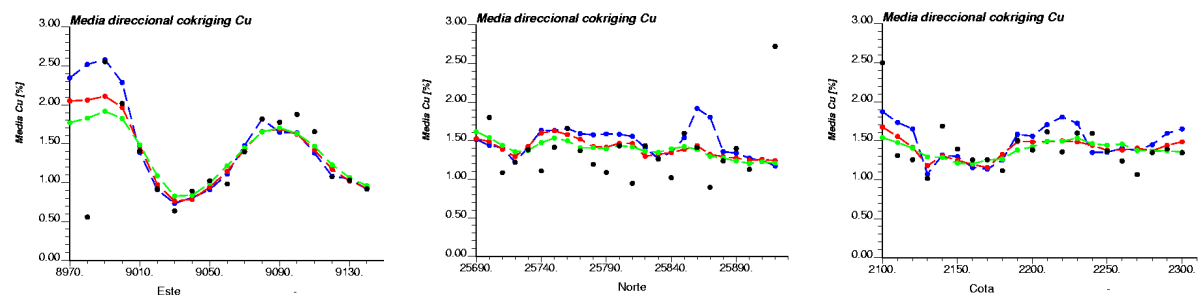


Figura D-3: Media direccional cokriging – cobre

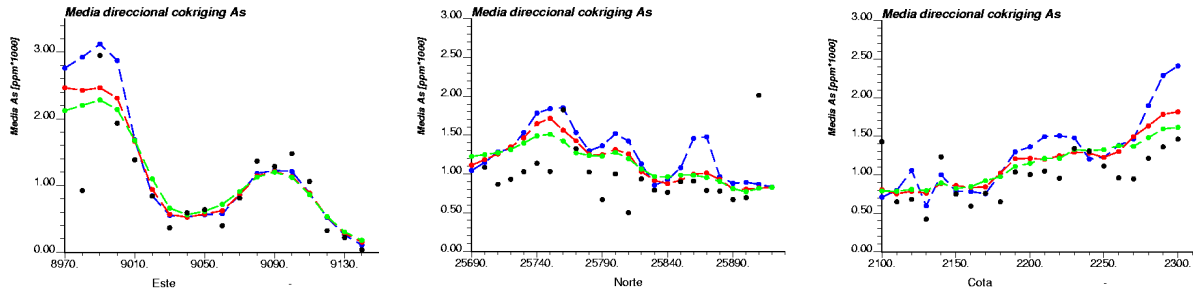


Figura D-4: Media direccional kriging – arsénico

A continuación se muestran los cálculos de media direccional para las estimaciones realizadas como media de simulaciones y de cosimulaciones para las dos especies estimadas (cobre y arsénico). Se puede apreciar que las medias direccionales de los valores estimados son similares a las medias direccionales de las muestras. En negro se muestran las medias direccionales de las muestras mientras que las líneas representan los valores de la media direccional calculados en las direcciones principales.

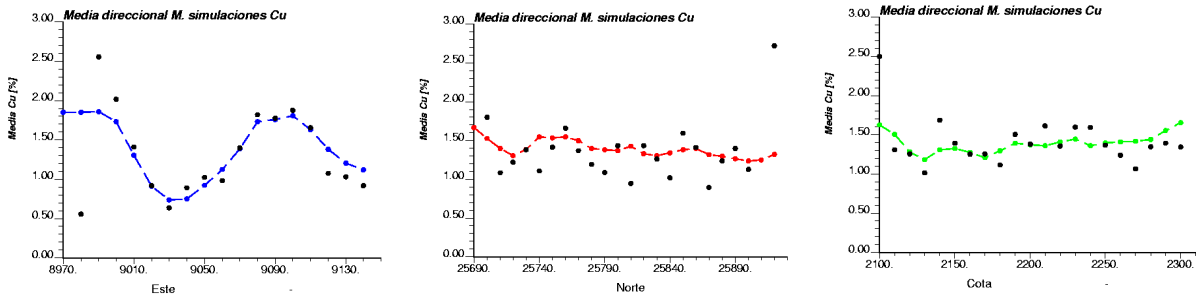


Figura D-5: Media direccional media de simulaciones – cobre

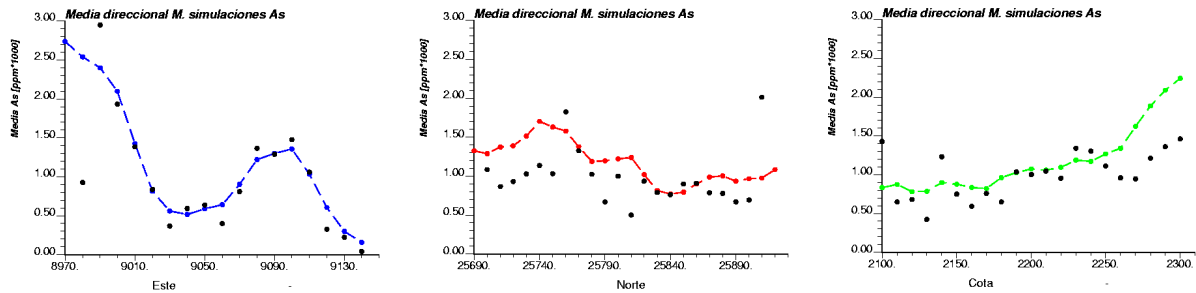


Figura D-6: Media direccional media de simulaciones – arsénico

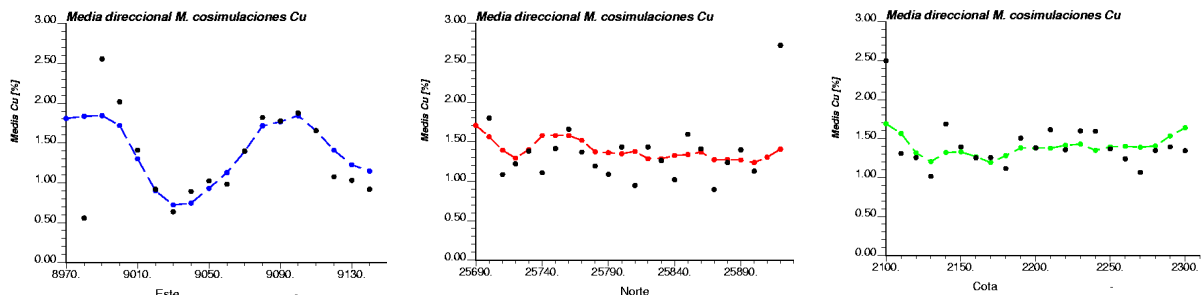


Figura D-7: Media direccional media de cosimulaciones – cobre

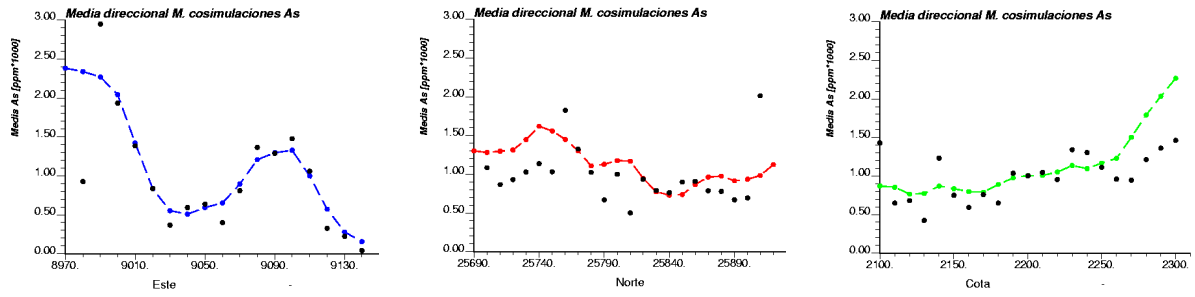


Figura D-8: Media direccional media de cosimulaciones – arsénico

Anexo E: Resultados de sesgo condicional

Existe un inconveniente al cuantificar el sesgo condicional como la diferencia entre la ley media estimada y la ley media real para los bloques que cumplen ciertas condiciones de ley de corte, dado que no es posible apreciar cuál es la diferencia entre el metal estimado y el real. En otras palabras, para leyes de corte altas pueden ser pocos bloques de cobre o de arsénico los que cumplan esta condición. Por tanto, una diferencia significativa entre la ley media y estimada no necesariamente implica una diferencia significativa entre el metal estimado y el real. Para mitigar este efecto, se presenta una evaluación del sesgo condicional considerando la diferencia entre el metal estimado y el metal real considerando cien escenarios como realidad.

Estos resultados confirman las conclusiones obtenidas a partir de las curvas ley de corte – ley media, que muestran que el sesgo condicional depende principalmente de la vecindad considerada y no del tipo de estimación. El sesgo condicional sólo muestra una leve disminución cuando la estimación se realiza de manera conjunta a cuando se hace de manera univariable.

Sesgo condicional univariable de cobre

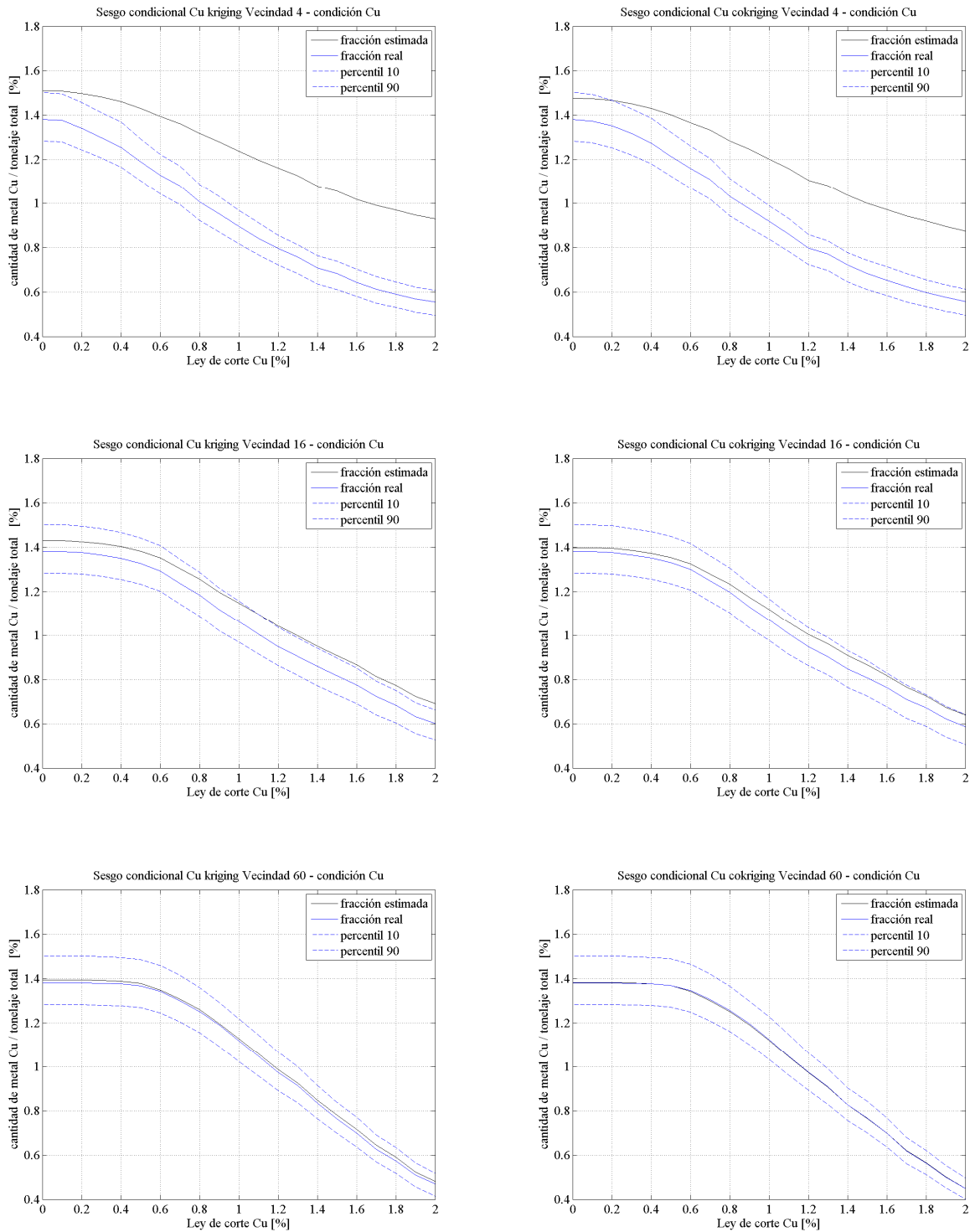


Figura E-1: Sesgo condicional univariable de cobre
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

Sesgo condicional univariable de arsénico

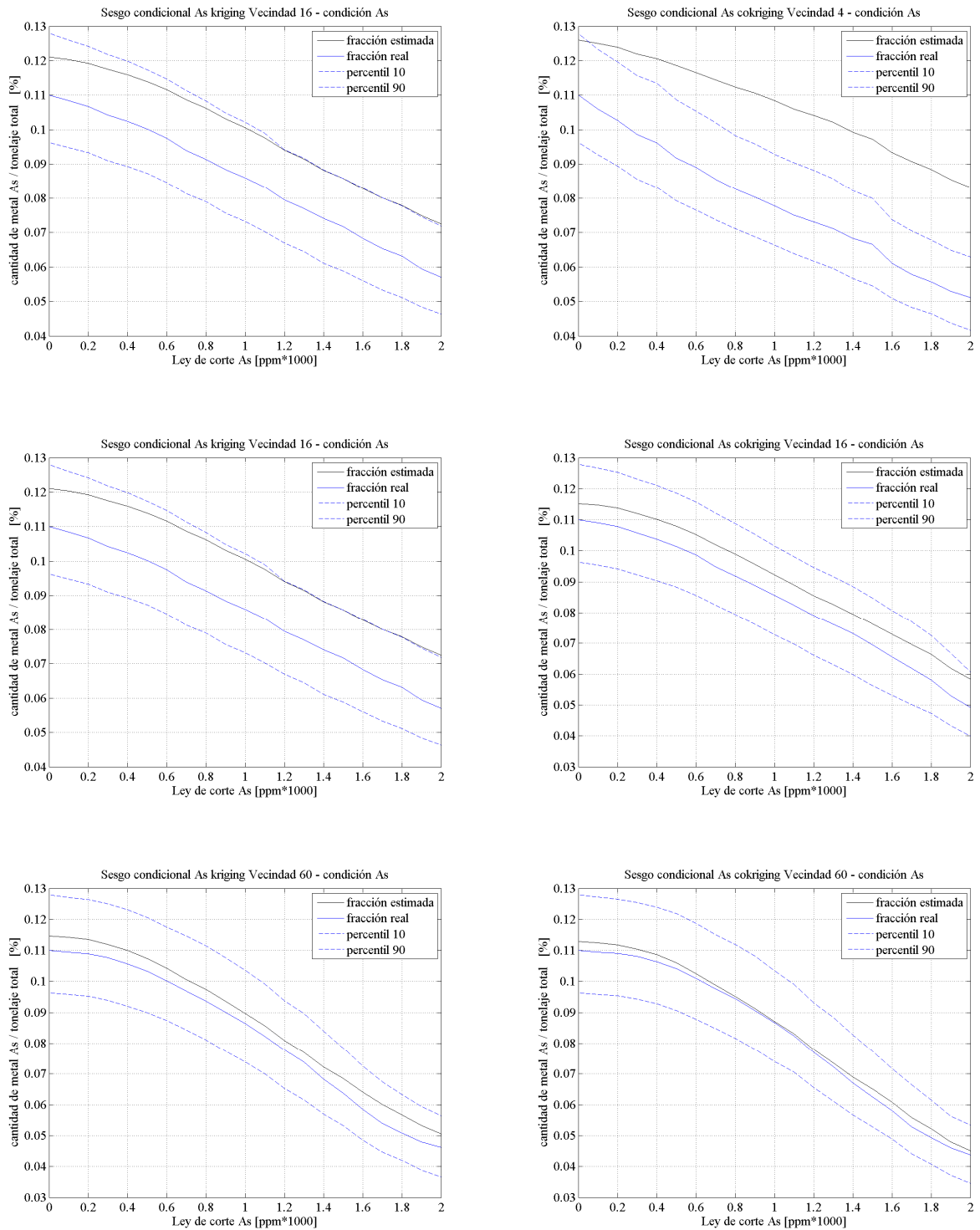


Figura E-2: Sesgo condicional univariable de arsénico
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico

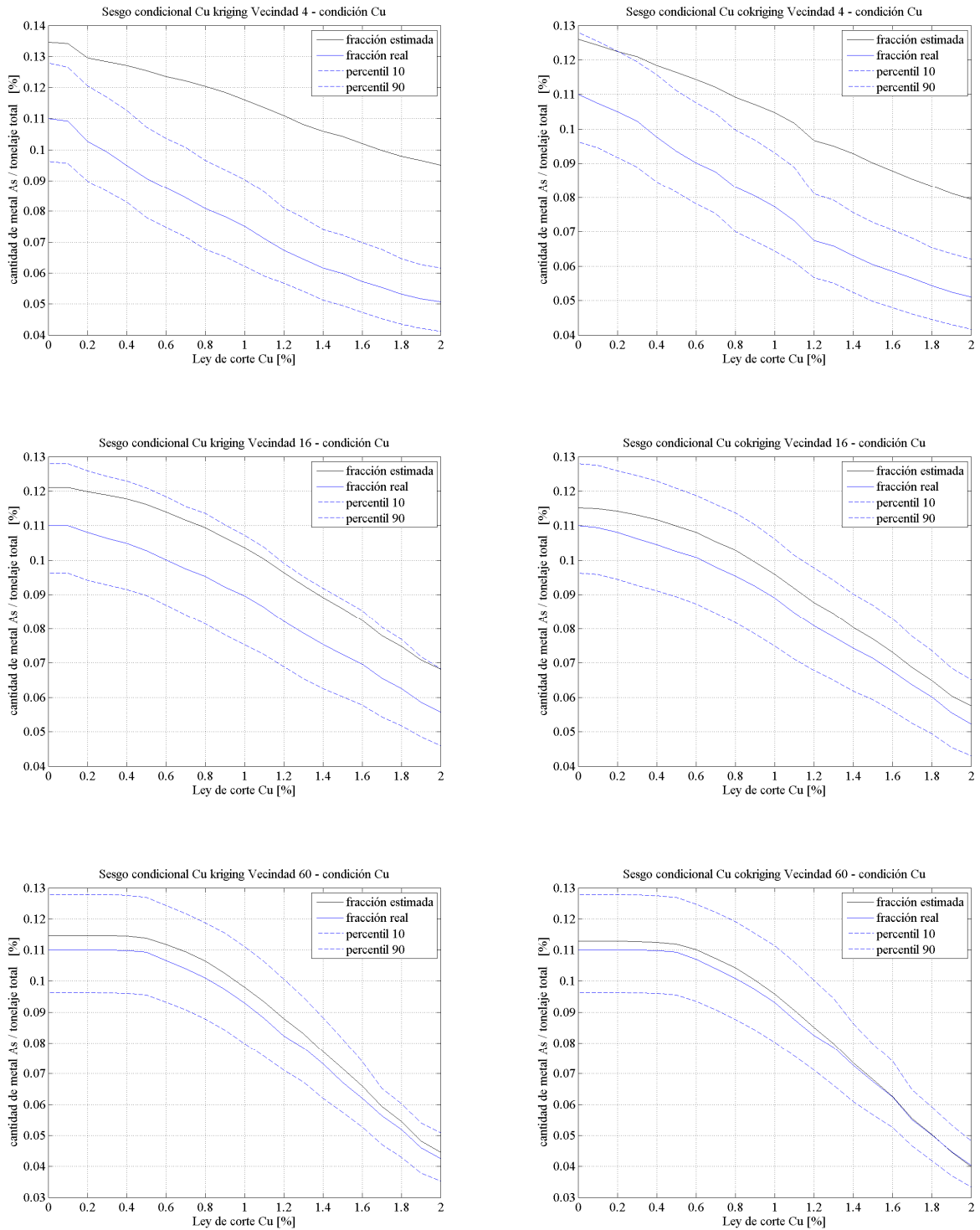


Figura E-3: Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

Sesgo condicional bivariable

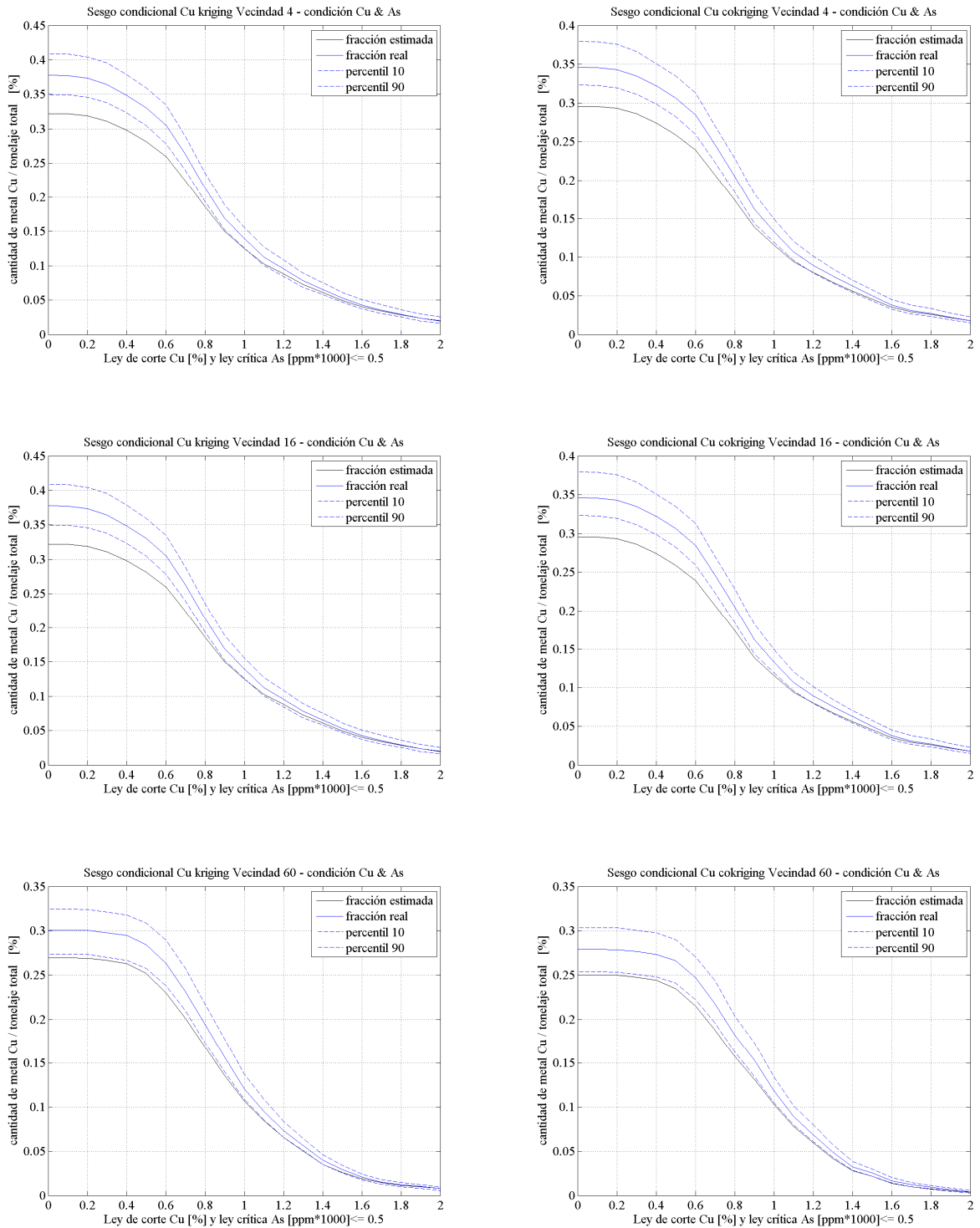


Figura E-4: Sesgo condicional bivariable de cobre
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

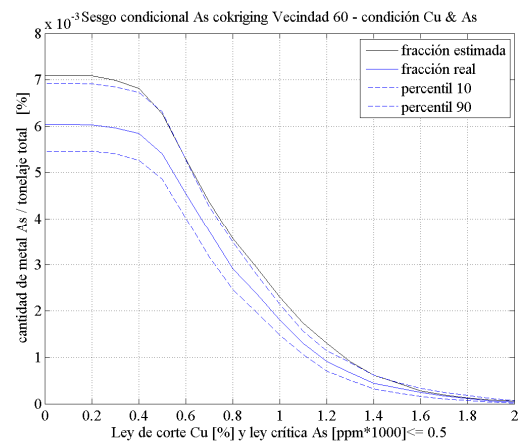
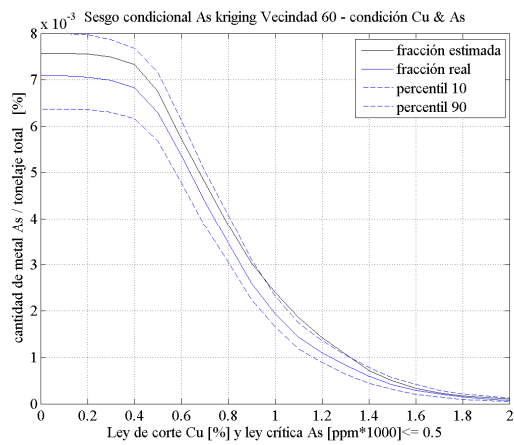
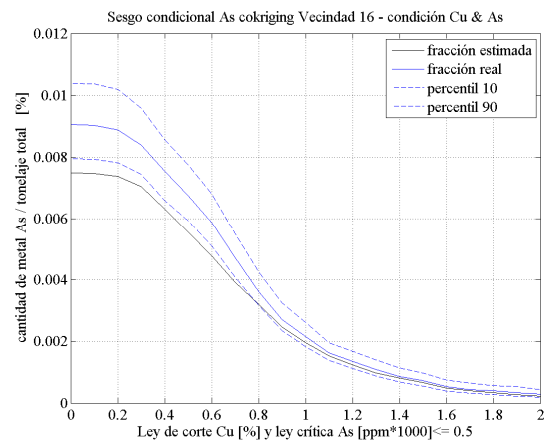
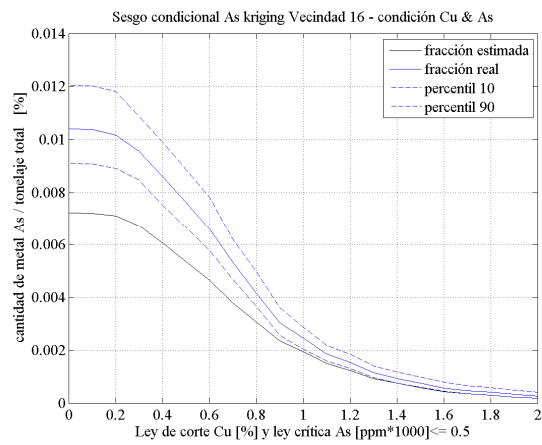
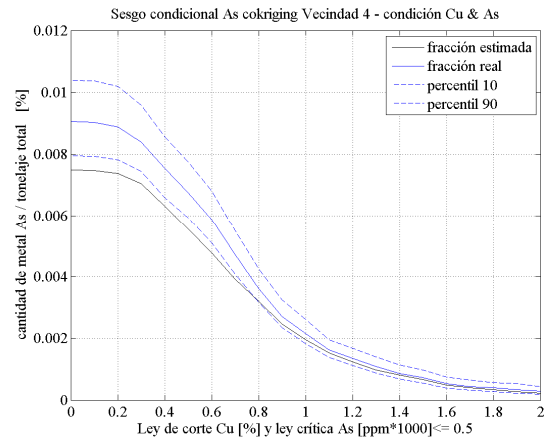
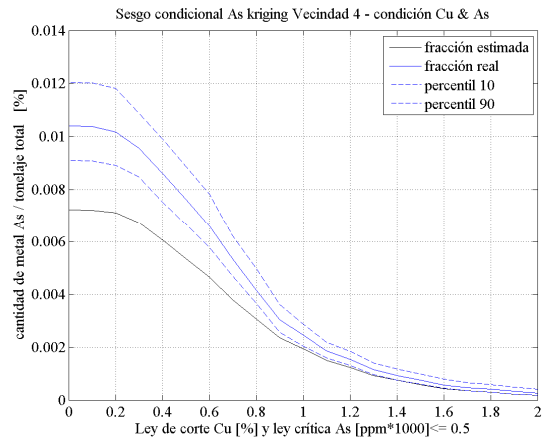


Figura E-5: Sesgo condicional bivariable de arsénico
(Izquierda: kriging, derecha: cokriging)

Anexo F: Resultados de sesgo condicional para estimaciones mediante métodos de simulación

En este anexo se presentan los resultados de análisis condicional correspondiente las estimaciones realizadas mediante simulaciones y cosimulaciones, que corresponden al promedio de cien realizaciones de simulaciones y cosimulaciones respectivamente. En esta sección se muestran los resultados al considerar el sesgo condicional como la diferencia entre la cantidad de metal relativa al yacimiento dada una ley de corte.

Sesgo condicional univariable de cobre

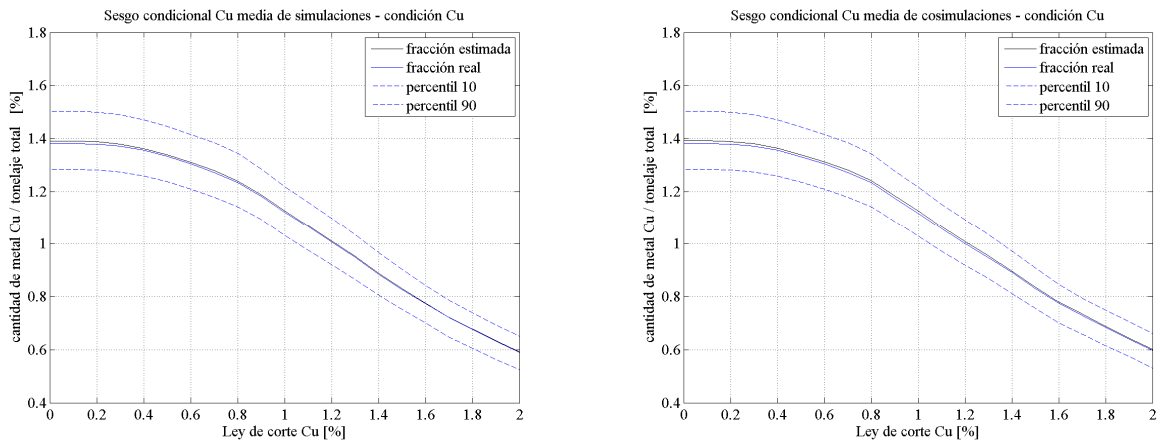


Figura F-1: Gráfico ley de corte de cobre – cantidad de metal de cobre (Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

Sesgo condicional univariable de arsénico

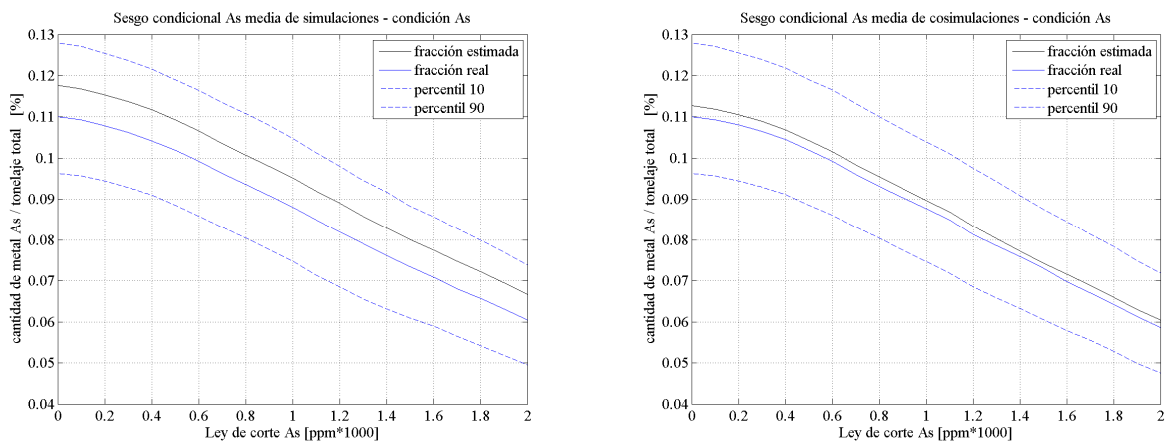


Figura F-2: Gráfico ley de corte de arsénico – cantidad de metal de arsénico (Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

Sesgo condicional bivariable de cobre sobre arsénico

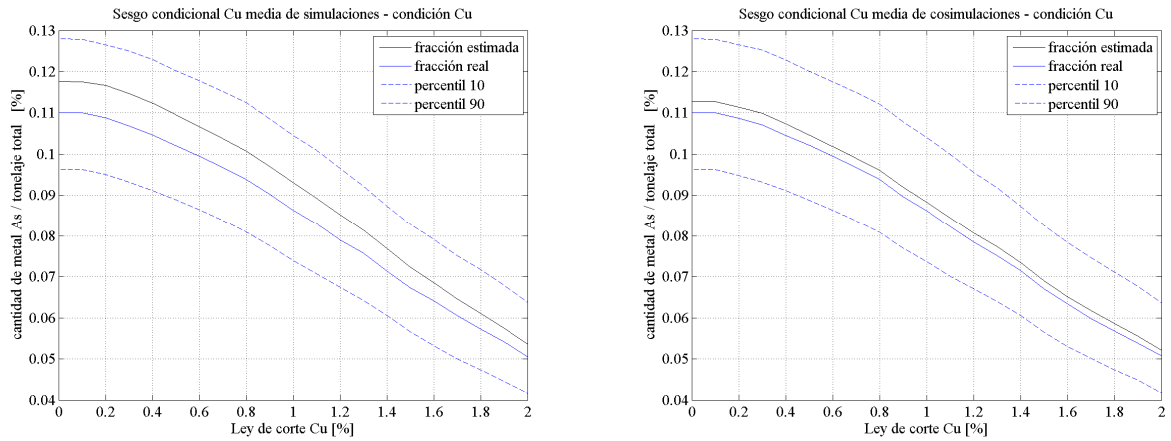


Figura F-3: Gráfico ley de corte de cobre – cantidad de metal de arsénico
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

Sesgo condicional bivariable

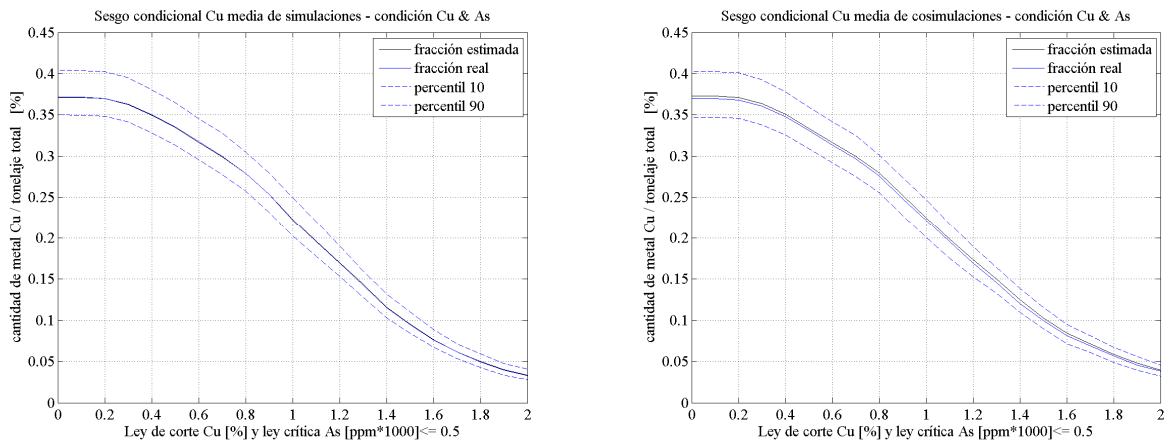


Figura F-4: Gráfico ley de corte de cobre y condición de arsénico – cantidad de metal de cobre
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

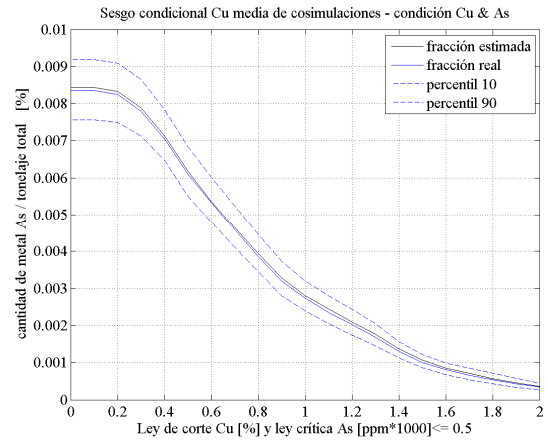
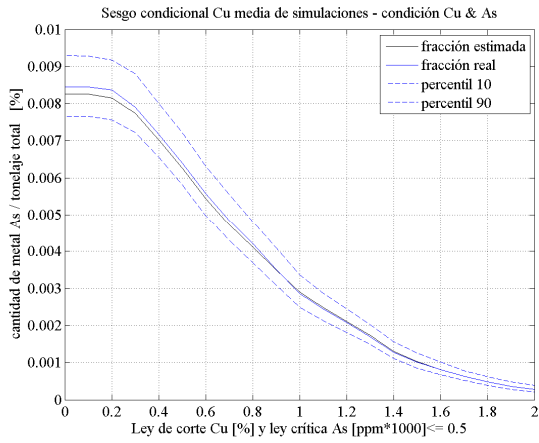


Figura F-5: Gráfico ley de corte de cobre y condición de arsénico – cantidad de metal de arsénico
(Izquierda: simulación, derecha: cosimulación)

En todos los casos mostrados en este anexo, se tiene que las estimaciones realizadas como media de simulaciones y media de cosimulación muestran un bajo sesgo condicional. No obstante, el modelo realizado para realizar estas simulaciones corresponde al mismo modelo utilizado para realizar los casos base.