



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MEDIDAS DE RIESGO Y SU APLICACIÓN A RUTEO EN REDES BAJO
INCERTIDUMBRE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ALFREDO IGNACIO TORRICO PALACIOS

PROFESOR GUÍA:
ROBERTO COMINETTI COTTI-COMETTI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
DANIEL GONZÁLEZ ESPINOZA
ARIS DANILIDIS
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
FERNANDO ORDÓÑEZ PIZARRO

Agradece financiamiento de Fondecyt a través de
los proyectos 1100046 y 1130564. También al
Proyecto ICM/FIC P10-024-F
Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes.

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2013

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: ALFREDO TORRICO PALACIOS
FECHA: 04/10/2013
PROF. GUÍA: ROBERTO COMINETTI C.

MEDIDAS DE RIESGO Y SU APLICACIÓN A RUTEO EN REDES BAJO INCERTIDUMBRE

Esta memoria aborda el problema de ruteo en redes bajo condiciones de incertidumbre, mediante el uso de funcionales no lineales que permiten cuantificar el riesgo de una ruta. En el caso determinista, el problema combinatorial de camino mínimo puede ser abordado desde dos enfoques: de forma dinámica, donde se busca en cada nodo la mejor opción para moverse hacia el siguiente vértice, o bien, de manera global, donde se busca el camino de menor costo desde el origen al destino. En este caso ambas ópticas coinciden, lo cual se ve reflejado en las ecuaciones de Bellman para encontrar caminos mínimos. Ambas perspectivas motivan el presente trabajo que trata el caso no determinista. El modelo general considera un grafo $G = (N, A)$ con nodos terminales $s, d \in N$, donde cada arco $a \in A$ tiene asociado un tiempo de viaje aleatorio τ_a .

En el Capítulo 2 se entregan las herramientas necesarias para los siguientes capítulos: medidas de riesgo; consistencia temporal y medidas de riesgo condicionales; procesos de Markov controlados; y por último, las teorías de elección bajo incertidumbre.

En el Capítulo 3 se estudia un enfoque dinámico del problema utilizando la noción de medidas de riesgo condicionales, las cuales permiten satisfacer la condición de *consistencia temporal*. Usando los *procesos de Markov controlados* y el *Average Value-at-Risk condicional*, se aborda el problema de ruteo con aversión al riesgo. Se muestra que, bajo independencia de los tiempos de viaje, el problema se reduce a un modelo determinista en que el costo de cada arco corresponde al AVaR. Más aún, esta solución es consistente temporal. Sin embargo, mediante un contraejemplo con variables aleatorias normales se muestra que aún existen inconsistencias.

En el Capítulo 4 se desarrolla un enfoque global en base a las teorías de elección, identificando la condición de *consistencia aditiva* como la propiedad que evita las inconsistencias temporales en las preferencias de los usuarios. De la *teoría de desutilidad esperada*, se obtiene la medida de riesgo entrópica como la única medida de riesgo que satisface su axiomatización. En el caso de la *teoría dual de elección*, la consistencia aditiva entrega al valor esperado como única solución. Por último, mediante la consistencia aditiva y la *teoría de desutilidad rango-dependiente esperada* –una combinación de las dos anteriores–, se obtiene nuevamente la medida de riesgo entrópica como única solución.

Finalmente, en el Capítulo 5 se estudian modelos de equilibrio bajo incertidumbre para juegos de congestión no-atómicos y discretos. Para el caso independiente se tiene la existencia de equilibrios de Wardrop y Nash, respectivamente.

*A mi madre,
Blanca.*

AGRADECIMIENTOS

Cada persona en esta vida tiene al menos un pilar fundamental, alguien que si no hubiese estado presente en los momentos claves, quizás las condiciones serían totalmente distintas. Esos pilares, sin pedir nada a cambio, te entregan cariño, consejos o incluso palabras de apoyo. En mi caso, mi madre reúne las tres anteriores y más. Ella por lejos es la persona más importante en todo este proceso, ya sea académico o de vida. Por ello, aunque sean sólo palabras, mi agradecimiento se enfoca completamente en ella: la persona que se esforzó incansablemente por entregarme lo mejor posible, la persona que me enseñó los valores esenciales en esta vida y que siempre estuvo en aquellos momentos más difíciles. Mi madre, Blanca Palacios, se merece estas palabras y mucho más. Creo que nunca podría terminar de agradecerle. Sólo me queda decirte que te amo vieja. Agradecer también a mi padre quien siempre me enseñó los valores para ser una persona correcta, además de incentivar mi gusto por la historia.

Agradecer a mi profesor guía, Roberto Cominetti, por motivar el gusto hacia la optimización, por esas extensas jornadas de trabajo donde aprendí muchísimo, por su apoyo y paciencia en momentos en donde siempre fui un tanto pesimista, pero que al final de cuentas siempre resultaba algo. El ámbito personal no queda de lado, ya que siempre tuvo la disposición para conversar otros temas no académicos y entregarme su visión de las cosas, muchas gracias por eso. Agradecer también a los miembros de la comisión: Daniel Espinoza, Aris Daniilidis, Fernando Ordóñez y Alejandro Jofré, por su disposición.

Siempre he pensado que los amigos son una parte esencial del ser humano, los cuales se encargan, a veces inconcientemente, de entregarte enseñanzas. Primero, debo agradecer infinitamente a la Vale por nuestra gran amistad, por darme siempre todo su apoyo, por esas largas conversaciones donde cada uno presenta sus problemas y el otro intenta resolverlos, por su voz chillona que siempre me va a dar risa, entre muchas otras razones; gracias por enseñarme como debe ser una persona humilde y con buenos valores. Agradecer al Mauro, por su gran amistad, confianza y preocupación, por estar siempre cuando necesitaba algo, por esos tremendos viajes y las distintas jornadas deportivas que hemos hecho; gracias por enseñarme como debe ser una persona correcta y de buena disposición. Al Kiko por nuestra amistad y apoyo en momentos claves, por todos esos carretes y el vocabulario del Alcázar pem; gracias por enseñarme como debe ser una persona responsable y organizada. Al Daniel, por nuestra amistad desde el colegio, su preocupación e innumerables visitas a mi casa en las cuales me compartía sus vivencias; gracias por enseñarme como debe ser una persona espontánea y sin tapujos. Muchas gracias a los cuatro.

Agradecer también a grandes amigos de otras carreras, quienes marcaron hitos importantes en mi estadía en esta universidad: Tania, Leo y Belén, siempre fueron un gran apoyo. A los amigos de la 435: Toño, Víctor, Tish, Ricardo, Bastián, Nacho y Niko, muchas gracias por esas eternas jornadas de estudio y por los momentos chistosos que se generaban en ese ambiente. A mis amistades de plan común: Cami Leiva, Manu, Cami Paniagua, Pamish, Cheketere, Pepe, Emilio y a la Pollo, gracias por los buenos momentos sobre todo en primer año.

Finalmente, agradecer a las instituciones que financiaron este trabajo, específicamente, a Fondecyt a través de los proyectos 1100046 y 1130564, y también, al Proyecto ICM/FIC P10-024-F Núcleo Milenio Información y Coordinación en Redes.

Tabla de contenido

Tabla de contenido	v
1. Introducción	1
1.1. Estructura del trabajo	5
2. Marco teórico	7
2.1. Medidas de riesgo	7
2.1.1. Ejemplos de medidas de riesgo	9
2.2. Consistencia temporal y medidas de riesgo condicionales	11
2.3. Procesos de Markov controlados	14
2.3.1. Medidas de riesgo Markovianas	15
2.4. Teorías de elección bajo incertidumbre	19
2.4.1. Teoría de desutilidad esperada	19
2.4.2. Teoría dual de elección	21
2.4.3. Teoría de desutilidad rango-dependiente esperada	23
3. Modelo Markoviano para el problema de ruteo	25
3.1. Motivación: inconsistencia temporal	25
3.2. Resultados previos para el AVaR condicional	27
3.3. AVaR condicional aplicado al problema de ruteo	29
3.3.1. Modelo y algunos ejemplos	30
3.3.2. Ecuaciones de Bellman	39
3.4. Contraejemplo y comentarios	42
4. Medidas de riesgo derivadas de las teorías de elección	45
4.1. Motivación: preferencia consistente	45
4.2. Medidas de riesgo derivadas de la teoría de desutilidad esperada	47
4.2.1. Paradoja de Allais	52
4.3. Medidas de riesgo derivadas de otras teorías de elección	53
4.3.1. Teoría dual de elección	53
4.3.2. Teoría de desutilidad rango-dependiente esperada	57
4.4. Comentarios y conclusiones	60
5. Modelos de equilibrio	62
5.1. Caso no-atómico	62
5.1.1. Tiempos de viaje de tipo modelo mean-risk	63
5.1.2. Tiempos de viaje independientes a pares	66

5.2. Juego de ruteo discreto bajo incertidumbre	68
6. Conclusiones y trabajo futuro	69
Bibliografía	72

Capítulo 1

Introducción

Muchos coinciden que la realidad es incierta debido a que está compuesta en su mayoría de innumerables eventos supuestamente aleatorios. La existencia de ciertas variables que son casi imposibles de definir, modelar, determinar o incluso controlar, dificulta el proceso de entendimiento del mundo que nos rodea, y por ende la comprensión de él. Esto no sólo se da en la naturaleza, sino que también durante el día a día de las miles de millones de personas que habitan este planeta. Claro ejemplo de aquello es el mundo de las finanzas, en el cual los índices económicos se revolucionan inmediatamente ante una mínima decisión que se ha tomado en algún lugar ajeno al afectado, y en ocasiones sin conocimiento, su determinación ha influido indirectamente en la economía. Las inversiones, los índices macroeconómicos, los precios inmobiliarios, entre otros, son más ejemplos de lo mismo.

De la misma forma, el tráfico en las grandes urbes está siendo afectado constantemente por diversas razones. Nuevos planes de transporte público, vías en malas condiciones, aumento en los precios del peaje, condiciones ambientales, los vaivenes del precio del combustible, o la creación de autos más económicos. Todo lo anterior afecta de una u otra manera la congestión vehicular en las capitales más importantes, claro ejemplo es el continuo intento de China por mejorar su sistema de transporte público. Con esto en consideración, se sabe que los tiempos de viaje se comportan aleatoriamente, por lo que los usuarios deben ser capaces de tener claro las rutas que prefieren o de alguna forma saber lidiar con este tipo de incertidumbre. Algunos casos son: tratar de llegar a la hora para no perder una reunión de negocios o entrevista de trabajo, los bomberos al momento de enfrentarse con la alarma de incendios deben ser capaces de obtener la mejor ruta para llegar a tiempo al destino, no recibir sanciones en los lugares de trabajo por atrasos o incluso el caso más simple de un estudiante que quiere llegar temprano a una prueba. Estos usuarios tendrán distintos comportamientos para estos tiempos de viaje aleatorios.

Conductas como aversión al riesgo, en donde se prefiere el valor esperado ante la incertidumbre caracterizan a una persona que teme arriesgarse. Otras totalmente contrarias como aquellos que buscan el riesgo, los cuales en vez de salir con más tiempo y esperar en el destino, prefieren dejar de lado eso y arriesgar un poco más. Por último, existen aquellos que son neutrales, donde la indiferencia hacia el riesgo es la principal característica.

Por lo tanto, es necesario destacar y señalar que el foco principal de este trabajo es el ruteo con aversión al riesgo, donde la incertidumbre está presente en los tiempos de viaje. Además, no sólo se restringe al contexto de transporte, ya que puede ser posible extenderlo a temas como telecomunicaciones o logística de una empresa.

El marco de ruteo bajo incertidumbre ya ha sido tratado anteriormente desde distintas

perspectivas, por lo cual existe variada literatura sobre este tópico. Primero, gracias a estudios experimentales se ha modelado las preferencias de los usuarios mediante el enfoque mean-risk el cual caracteriza la aversión al riesgo mediante una variabilidad agregada al valor esperado. Uno de los primeros en tratar con este tipo de modelos de aversión al riesgo fue Markowitz en [34], donde se plantea como variabilidad a un factor de la varianza, y a su vez se discute el caso de la desviación estándar. En el ámbito de ruteo este último caso es tratado profundamente por Fosgerau et al. en [21]. Situaciones de asignación de tráfico en juegos de congestión, tanto no-atómicos como atómicos, bajo el mismo modelo mean-risk es tratado por Nikolova y Stier-Moses [41]. Cabe destacar que existen una serie de algoritmos para resolver este tipo de problemas como por ejemplo los tratados en [39, 40], donde lo más destacable es el algoritmo exacto de orden $n^{O(\log n)}$ dado por Nikolova para el modelo mean-risk.

Un modelo similar al anterior es entregado por Ordóñez y Stier-Moses en [44], donde la aversión al riesgo es tratada a través de una variabilidad agregada al valor esperado que puede ser un α -percentil, una función ϕ que represente la aversión o bien un enfoque más robusto, todo en el marco de un modelo de equilibrio para un problema de asignación de tráfico. Con la premisa de que la obtención directa de equilibrios para el caso α -percentil es complicada, se busca aproximar lo anterior mediante los equilibrios que resultan de los otros dos modelos tratados. Como conclusión se tiene que ambas aproximaciones son mejor que la entregada por el modelo clásico de Wardrop.

Un segundo enfoque es tratar el ruteo con aversión al riesgo minimizando la probabilidad de llegar tarde a destino. En términos simples, se busca la ruta de tal forma de minimizar la probabilidad de que el tiempo de viaje esté por sobre cierto umbral. Este contexto está profundamente tratado por Nie y Wu en [38], en donde se analiza en particular la optimalidad de subrutras, y como una ruta óptima debe o no poseer necesariamente subrutras optimales. Esto es muy similar al concepto de *consistencia temporal* que se comentará más adelante. Cabe señalar que este modelo coincide con mean-risk cuando las variables consideradas son normales. En [40] se entrega un enfoque algorítmico para este problema, donde justamente las variables normales son parte del modelo. Todo lo anterior está intimamente ligado al concepto de dominancia estocástica, lo cual motiva a considerar ciertos caminos sobre otros bajo un orden estocástico de manera de generar consistencia en las elecciones. En [36, 65] se trata en detalle el problema de ruteo donde se considera la dominancia estocástica, ya sea como restricción o como condición general de consistencia, considerando a su vez distintas funciones objetivos entre las cuales está la probabilidad de llegar a tiempo, mean-risk, utilidad esperada, entre otras. Por último, en [37] se estudian los juegos de congestión en los cuales se buscan aquellos equilibrios de tipo percentil.

Por último, es importante mencionar el enfoque que utiliza el valor esperado de alguna función de costo. En torno a este tema existe una extensa literatura, por ejemplo se puede comentar el trabajo hecho por Murthy y Sarkar en [35] para funciones cóncavas lineales a trozos. Lo más importante que se debe enfatizar de este marco es que utiliza una herramienta ampliamente conocida para modelar el problema de ruteo: la utilidad esperada. Una visión que hace ya varias décadas viene tratando con la aversión al riesgo. Lo más probable es que existan otros enfoques, o mezclas de los anteriores, que se utilizan para resolver el tema de transporte, de modo que no se darán más detalles sobre esto.

Dado lo anterior, durante este trabajo el objetivo principal será enfretar y estudiar

el problema de ruteo de una forma alternativa, mediante dos herramientas que nacieron de distintas motivaciones, pero que en ocasiones se combinan para desarrollar un mejor concepto sobre aversión al riesgo: la axiomatización de las medidas de riesgo y las teorías de elección bajo incertidumbre. Estos dos enfoques son distintos en cierta medida a los mencionados anteriormente, y no existe mucha literatura aplicada a transporte. Aún así mantienen una relación cercana con la dominancia estocástica, la probabilidad de llegar a tiempo y los modelos mean-risk. Mediante estas nuevas herramientas se destaca el uso de funcionales no lineales para el problema de ruteo, lo cual se diferencia de los modelos de valor esperado ampliamente usados y estudiados.

Por un lado, con la necesidad de cuantificar riesgo de una manera axiomática y distinta a lo realizado durante años, se comienza a desarrollar a fines de los 90's la teoría de las medidas de riesgo. Primeramente, gracias a Artzner et al. en [3] se proponen, bajo el supuesto de un conjunto finito de eventos, dos formas de enfrentar esta axiomatización: una mediante un set de propiedades asociadas a los conjuntos de *aceptabilidad*, y otra mediante el cumplimiento de ciertas condiciones básicas por parte de funcionales que representarán numéricamente el riesgo. En esta misma referencia nace una clase de medidas de riesgo que se considerará esencial y sumamente importante en el mundo financiero y económico: las medidas de riesgo *coherentes*. Posteriormente, Delbaen et al. en [10] extienden el concepto dado en [3] a un espacio de eventos no finito, y por ende a espacios generales de probabilidad. De este contexto surgen dos funcionales que marcarán el posterior desarrollo en este ámbito: el *Value-at-Risk* y el *Average Value-at-Risk*. Este último, al ser coherente, puede ser expresado mediante su representación dual. Cabe destacar que la optimización de este funcional coherente es estudiado por Rockafeller en [48], y luego para distribuciones más generales en [49]; en ambos es llamado como *Conditional Value-at-Risk*.

El modelo mean-risk también ha sido tratado como medida de riesgo en conjunto con los distintos tipo de dominancia estocástica. Ogryczak y Ruszczyński en [42, 43] han obtenido resultados relacionado con lo anterior, en donde se considera como variabilidad, agregada al valor esperado, a la semidesviación estándar. Lamentablemente, el uso del modelo mean-risk que considera la desviación estándar no es del todo convincente en ruteo porque no satisface una propiedad esencial en las medidas de riesgo: monotonía, lo cual será tratado durante la presente memoria.

Diversas críticas a la propiedad de *homogeneidad positiva* y el uso restrictivo de las medidas de riesgo llevó a estudiar una clase más débil de estos funcionales: las *medidas de riesgo convexas*, cuya principal característica es reemplazar las condiciones de *subaditividad* y *homogeneidad positiva* por la propiedad de *convexidad*. Föllmer y Schied enfocan en gran parte el estudio hacia esta clase, principalmente en su artículo [18] donde tratan la representación dual de las medidas de riesgo convexas bajo supuestos de continuidad. En su libro [20] se presenta esta teoría de forma más detallada, donde además se tratan otra clase de funcionales como las integrales de Choquet, y la propiedad de *comonotonía* que junto a la dominancia estocástica juegan un rol importante en ciertas investigaciones sobre aversión al riesgo en finanzas, por ejemplo en [13]. Por otra parte, en [19] se estudian las *medidas de riesgo monetarias*, y se enfatiza su uso en el mundo económico. Finalmente, los procesos de optimización que utilizan medidas de riesgo convexas son estudiados por Shapiro y Ruszczyński en [56], donde además se obtienen resultados de subdiferenciabilidad y dualidad.

Todo lo anterior tiene como objetivo de estudio un sólo período de riesgo. Sin embargo,

los procesos que se estudian habitualmente en finanzas, economía, transporte, telecomunicaciones, etcétera, son dinámicos e involucran más de una etapa. En este contexto se busca satisfacer una propiedad de gran interés llamada *consistencia temporal* que suele definirse de distintas formas. Desde un punto de vista local se interpreta como “la optimalidad hasta cierto período no debe considerar información del futuro”. Por otra parte, desde una perspectiva global se puede expresar como “el óptimo obtenido para el proceso entre 0 y T , donde T es la etapa final, se compone de soluciones óptimas de cada subproceso entre t y T con $t \leq T$ ”. Lamentablemente, las medidas de riesgo a un período son en su mayoría inconsistentes temporalmente. Así lo plantea Artzner et al. en [4], y más específicamente el estudio realizado por Cheridito y Stadje para el Value-at-Risk en [9]. Dado esto, surgen las llamadas medidas de riesgo condicionales o dinámicas, para lo cual existe una extensa literatura asociada, en donde además se expresa en términos formales la propiedad de consistencia temporal, entre ellos está [4, 30, 47, 60, 7, 9, 5, 59, 55, 54]. Especialmente relevantes en este contexto son los trabajos de Shapiro y Ruszczyński en [55, 54] que se enfocan en procesos de Markov controlados que básicamente buscan políticas óptimas que sean Markovianas, lo cual es una característica intuitiva en transporte, no así quizás en telecomunicaciones o logística. En estas últimas referencias también se trata con una clase especial de medidas de riesgo condicionales llamadas *Markovianas* que interpretan esta actitud habitual en ruteo. Además, es importante señalar que la definición de consistencia temporal dada en [54] representa cabalmente los intereses de esta memoria, aún así existen otras definiciones como por ejemplo las entregadas en [52, 8, 4, 5]. Es este contexto dinámico que será útil para algunos de los resultados entregados en este trabajo, en particular la idea de aplicar el concepto de consistencia temporal en el ámbito de ruteo, donde quizás no es intuitiva la noción de etapa o período, pero que de todas formas puede ser planteado como un proceso dinámico de decisión.

Antes de la axiomatización de las medidas de riesgo, ya hace varios años la condición de aversión al riesgo había sido tratada por estudios realizados en el ámbito de finanzas y economía. Específicamente, modelar las preferencias de los usuarios a través de un orden y una serie de axiomas que lo caracterizan. A esto habitualmente se le llama teoría de elección bajo incertidumbre, donde la medida de probabilidad es conocida por los agentes, a diferencia de otro tipo de teoría de elección que se basa en una probabilidad subjetiva. Durante el siglo XVIII ya había sido comentado por Nicolas Bernoulli, pero no fue hasta 1947 donde von Neumann y Morgenstern en [62] plantearon la teoría de utilidad esperada—caso discreto y sobre loterías— la cual en términos generales dice que la relación de orden entre las preferencias puede ser cuantificada a través de una representación numérica—el valor esperado de cierta función de utilidad—. Junto con ello, hay varias propiedades que se le exigen a este funcional, en especial la aversión al riesgo. De forma paralela se debe mencionar el trabajo hecho por Fishburn en [16, 17] sobre teoría de utilidad. Por último, sobre esta parte se debe enfatizar que los resultados entregados en esta memoria se basan más en el caso continuo y sobre variables aleatorias, estudiado por Dentcheva y Ruszczyński en [11].

Lamentablemente, a través de los años, si bien se avanzó en el desarrollo para el caso continuo, surgieron diversas críticas a la teoría de von Neumann-Morgenstern, en especial al *axioma de independencia*. Paradojas como las de Allais [1] o Ellsberg [15] muestran que en ciertas ocasiones los usuarios no siguen las preferencias que predice el axioma de independencia. Al alero de esto surgen teorías de elección alternativas, como la presentada

por Yaari en [66], llamada teoría dual de elección, en donde se reemplaza el axioma de independencia por el *axioma dual de independencia*. Contemporáneamente aparecen otras opciones: Quiggin en [46] presenta la teoría de utilidad anticipada, Wakker en [64] propone la teoría de utilidad rango-dependiente esperada, de la misma forma lo hace Chateauneuf en [6]. Por otro lado, se tiene la teoría planteada por Schmeidler en [57], pero que se enfoca en medidas de probabilidad subjetivas. Sin embargo, ambos enfoques coinciden bajo ciertas condiciones, las cuales sorprendentemente son de dominancia estocástica como se plantea en [63].

Otro enfoque que considera la aversión al riesgo y que utiliza funciones de utilidad es el tratado por Arrow en [2] y Pratt en [45], donde en general se trabaja con coeficientes de aversión al riesgo que interpretan la actitud de los agentes. Cabe destacar también que los dos enfoques, medidas de riesgo y teorías de elección, han sido utilizados de manera simultánea obteniendo resultados a través del concepto de *premium principle*, por ejemplo, ver lo realizado por Goovaerts y et al. en [23, 24], por Denuit et al. en [12], o bien por Tsanakas y Desli en [61], entre otros.

1.1. Estructura del trabajo

A través de las dos herramientas nombradas anteriormente, medidas de riesgo y teorías de elección, el siguiente trabajo se organizará de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se entregarán todas las herramientas sobre medidas de riesgo, medidas de riesgo condicionales, consistencia temporal, procesos de Markov controlados y teorías de elección, en donde se destaca el Teorema 2.9 que entrega un algoritmo para resolver problemas de decisión dinámicos, el cual será útil en el capítulo siguiente.

El problema combinatorial de camino mínimo puede ser tratado desde dos perspectivas: por un lado se puede ver de forma dinámica, donde en cada nodo se escoge la mejor opción, o bien, de manera global buscando la mejor alternativa directamente desde el nodo origen hacia el destino. Para el caso determinista –tiempos de viaje constantes– se sabe que ambos métodos coinciden, y queda expresado a través de las ecuaciones de Bellman para caminos mínimos. Sin embargo, en el caso no determinista ambos enfoques parecieran a simple vista dar lugar a modelos distintos. En este trabajo se utilizarán las medidas de riesgo como herramientas para resolver las dos perspectivas.

El Capítulo 3 se concentra en el método dinámico, más específicamente, se utilizan los procesos de Markov controlados con el fin de modelar el problema de ruteo con aversión al riesgo. Además, el contraejemplo para el modelo mean-risk planteado por la figura 3.1, el cual muestra un cambio en las preferencias de ruta al momento de considerar un tiempo de viaje aleatorio común, motiva el uso de estos procesos con la idea de satisfacer la propiedad de consistencia temporal. Gracias al algoritmo entregado por el Teorema 2.9, y asumiendo independencia entre las variables aleatorias, se obtiene el resultado más importante de este capítulo: el Teorema 3.3, donde se muestra que esta óptica dinámica se reduce al caso determinista que puede ser resuelto mediante un algoritmo polinomial de tipo Dijkstra. Finalmente, se entrega un contraejemplo en el cual se muestra que al considerar variables aleatorias normales como tiempos de viaje, la propiedad de consistencia temporal no se satisface.

El Capítulo 4 aborda la perspectiva global del problema de ruteo a través de las teorías de elección bajo incertidumbre. Primero, se plantea una propiedad llamada *consistencia*

aditiva la cual busca plasmar la idea de consistencia temporal, pero en el ámbito de transporte. Luego, considerando la invarianza bajo traslación como condición fundamental de un funcional de riesgo, se demuestra el Teorema 4.5 donde se obtiene la medida de riesgo entrópica como único mapeo que deriva de la teoría de von Neumann-Morgenstern. Posteriormente, en los Teoremas 4.14 y 4.16 se identifican aquellas medidas de riesgo que satisfacen la consistencia aditiva, resultando como solución la esperanza y la medida de riesgo entrópica, respectivamente. Gracias a los tres resultados anteriores se concluye que el problema de ruteo bajo el supuesto de independencia se reduce nuevamente al caso determinista, pero esta vez desde una perspectiva global. Lamentablemente, quedará demostrado con un contraejemplo que la paradoja de Allais también es aplicable a ruteo, con lo que dicha propiedad de consistencia aditiva no es del todo convincente, lo que plantea algunas interrogantes sin aparente respuesta inmediata.

En el Capítulo 5 se estudiarán modelos de equilibrio bajo incertidumbre para juegos de congestión no-atómicos y discretos, considerando un enfoque similar al mean-risk, o bien usando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta memoria y el trabajo que queda para futuras investigaciones.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se entregan los conceptos y herramientas necesarias para el modelamiento de un problema de ruteo con aversión al riesgo: medidas de riesgo, medidas de riesgo condicionales, consistencia temporal, procesos de Markov controlados, y las teorías de elección.

2.1. Medidas de riesgo

Cuantificar el riesgo de un evento ha sido uno de los temas más complicados y controversiales en el área de optimización, finanzas y economía, y ha generado una intensa investigación hasta el día de hoy. El problema más simple con respecto al riesgo no es teórico, sino más bien subjetivo, ya que cada usuario o agente tiene su propia percepción sobre el riesgo y lo que es más adecuado para él. Junto a eso, hasta ahora la mayoría de los funcionales que miden el riesgo no son del todo convincentes, y cada uno posee un rango limitado de aplicación. Como ya se ha mencionado anteriormente, en esta memoria el objetivo principal es plantear un modelo para un problema de ruteo mediante el uso de medidas de riesgo.

Para fijar ideas, en lo que sigue se dará la intuición teórica de lo que es una medida de riesgo. Usualmente, se tiene un conjunto de eventos fijos denotado Ω y la incertidumbre de un valor futuro se representa mediante una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; por lo tanto, en general se tiene un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde \mathcal{F} es una σ -álgebra, \mathbb{P} es una medida de probabilidad conocida, y por consiguiente X es una variable aleatoria. Por ejemplo, X puede representar un tiempo de viaje, costos, utilidades o la suma de algún capital económico. Se denotará por \mathcal{X} a un conjunto apropiado de dichas variables, al cual habitualmente se le exige que sea un espacio lineal conteniendo las constantes, tales como $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para $p \in [1, +\infty]$. Una medida de riesgo es un funcional $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que asigna un valor real a cada variable aleatoria. Además, con el fin de satisfacer ciertas intuiciones dependiendo del contexto, deberá cumplir algunos axiomas básicos, los cuales se detallarán más adelante.

Uno de los primeros en introducir la axiomatización de medidas de riesgo en el área de finanzas fue Artzner et al. en [3] quienes proponen dos enfoques, los que resultan ser equivalentes bajo condiciones apropiadas. En el primero de ellos se considera un conjunto de aceptación $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ al que se le exige que satisfaga ciertos axiomas, y mediante el cual se define una medida de riesgo $\rho_{\mathcal{A}}$ en \mathcal{X} , la cual para el caso de utilidades aleatorias

está dada por $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf \{m \in \mathbb{R} : X + m \in \mathcal{A}\}$. Las propiedades de \mathcal{A} determinarán directamente las características del funcional, por ejemplo, convexidad, invarianza bajo traslación, subaditividad, entre otros. Inversamente, en el segundo enfoque se define una medida de riesgo como una función $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, a la cual se le asocian propiedades tales como “si el costo futuro es menor, entonces el riesgo de dicho valor decrece”. Esta medida de riesgo determina un conjunto de aceptación \mathcal{A}_{ρ} , el cual en el caso de utilidades está dado por $\mathcal{A}_{\rho} = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$. Los atributos de este conjunto dependen de la medida en cuestión, por ejemplo, si ρ es un mapeo positivo homogéneo, \mathcal{A}_{ρ} será un cono en \mathcal{X} . Finalmente, Artzner et al. proponen una clase particular de medidas de riesgo que satisfacen cuatro axiomas básicos llamadas *medidas de riesgo coherentes*, las cuales se definirán más adelante. Para más detalles ver [3].

A diferencia de lo que se plantea en [3], Föllmer y Schied en [19] proponen una medida monetaria de riesgo $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que cumple dos propiedades fundamentales: invarianza bajo traslación y monotonía. Basados en la interpretación dada en [19], y dado que en el contexto de ruteo los tiempos de viaje más bajos son preferidos, en esta memoria se considerará la siguiente definición para una medida de riesgo, donde \mathcal{X} es un espacio como $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $p \in [1, +\infty]$.

Definición 2.1 (Medida de riesgo). Una función $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se dice *medida de riesgo* si $\rho(0)$ es finito y además satisface los dos siguientes axiomas para todo $X, Y \in \mathcal{X}$.

- **Invarianza bajo traslación:** Para todo $m \in \mathbb{R}$, $\rho(X + m) = \rho(X) + m$.
- **Monotonía:** Si $X \leq Y$ c.s., entonces $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

En transporte, la interpretación para cada una de las propiedades es clara. La primera equivale a decir que si al tiempo de viaje se le añade una cantidad libre de riesgo, entonces el riesgo es aumentado en la misma cantidad. La segunda es aún más intuitiva: si el tiempo de viaje aumenta, entonces el riesgo también. Para el desarrollo de los resultados posteriores en los Capítulos 3 y 4 de esta memoria, se tendrá en cuenta el caso $\rho(0) = 0$, lo cual es válido en el contexto de ruteo. Lo anterior se adapta fácilmente al contexto original dado por Artzner, Föllmer y Schied, en donde se trabaja con ganancias aleatorias por ende las cantidades más altas son preferidas. Esta memoria se acerca más al trabajo de Rockafeller, Ruszczyński, Shapiro, en los cuales las variables son tratadas como costos por lo cual los valores menores son preferidos.

En finanzas o economía es común exigir otros dos axiomas básicos para una medida de riesgo, los cuales han resultado ser los más controversiales y discutibles. Estas propiedades son las siguientes:

- **Homogeneidad positiva:** Para todo $\lambda \geq 0$, $X \in \mathcal{X}$ se tiene $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.
- **Subaditividad:** Para todo $X, Y \in \mathcal{X}$ se tiene $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

En el contexto mencionado en el párrafo anterior, la interpretación para cada una de las propiedades es clara: la homogeneidad positiva equivale a decir que la magnitud de la variable aleatoria influye proporcionalmente en el riesgo, lo cual en términos económicos se ve reflejado, por ejemplo, en el tipo de cambio que se aplica sobre una ganancia. Por su parte, la subaditividad es un poco más simple, ya que se interpreta como “la mezcla no genera riesgo extra”, es decir, si una empresa enfrenta ganancias o costos de dos orígenes distintos, entonces no se produce riesgo adicional al sumar ambas partes.

Dado los cuatro axiomas básicos anteriores, en [3] se define la siguiente clase de medidas de riesgo:

Definición 2.2 (Medida de riesgo coherente). Una medida de riesgo que satisface los axiomas de homogeneidad positiva y subaditividad, es llamada *medida de riesgo coherente*.

En un principio, este tipo de funcionales calzaban con la mayoría de las hipótesis necesarias en el mundo financiero, por lo cual existe una extensa literatura. Una de las medidas coherentes más conocida y usada es el *Average Value at Risk* –AVaR–, que se detallará en la Sección 2.1.1. Sin embargo, con el paso de los años muchos investigadores cuestionaron dichos axiomas pues en determinadas ocasiones resultaron demasiado fuertes. Las propiedades de homogeneidad positiva y subaditividad son las más cuestionadas, y han generado una amplia discusión sobre el uso adecuado de ellas, en función del contexto en que se utilicen y la percepción de riesgo que tenga el usuario.

Lo explicado anteriormente lleva a la conclusión de que las medidas de riesgo coherentes generan una variedad de problemas y restricciones. Es por esto, que Föllmer y Schied en [18, 19, 20] presentan un tipo de funcional más débil, llamado medida de riesgo convexa.

Definición 2.3 (Medida de riesgo convexa). Una medida de riesgo se dirá *convexa* si para todo $X, Y \in \mathcal{X}$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

La intuición de esta propiedad es similar al de subaditividad: “la diversificación no genera riesgo extra”. Claramente, esta clase de medidas de riesgo es más débil que las coherentes, ya que no satisfacen los axiomas de homogeneidad positiva ni subaditividad; por el contrario, toda medida de riesgo coherente es a su vez convexa. Finalmente, el axioma de convexidad da la posibilidad de encontrar una representación dual para aquellos funcionales que no son coherentes.

Por último, cabe destacar una propiedad deseada en varios ámbitos. Los principales resultados presentados en esta memoria, ya sea en el Capítulo 3 y 4, llevan a la siguiente definición:

Definición 2.4 (Medida de riesgo aditiva). Una medida de riesgo se dirá *aditiva* si para todo par de variables aleatorias independientes $X, Y \in \mathcal{X}$ se tiene $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Este axioma se interpreta como: si dos costos o ingresos no están correlacionados, entonces el riesgo de cada uno no debería influir en el otro. Lamentablemente, la hipótesis de independencia es cuestionable ya que de alguna u otra forma al modelar la realidad se encuentran estructuras de correlación entre las variables. Aún así, obtener o trabajar con medidas de riesgo aditivas facilita el cálculo de un óptimo.

2.1.1. Ejemplos de medidas de riesgo

En esta sección se presentarán algunos de los ejemplos más comunes de medidas de riesgo. Primero, un enfoque utilizado frecuentemente en finanzas es el *modelo Markowitz*, el cual hace uso de un funcional, que si bien en estricto rigor no es una medida de riesgo según la Definición 2.1, es usado con ese objetivo. Dicha función es la siguiente:

$$\rho^{var}(X) = \mu(X) + \gamma\sigma^2(X), \quad (2.1)$$

donde $\mu(X)$ corresponde a la media, $\sigma^2(X)$ representa la varianza y $\gamma \in \mathbb{R}$ es un coeficiente de aversión al riesgo. Lamentablemente, este funcional no es del todo satisfactorio al no ser consistente con los órdenes estocásticos; para más detalles ver [42]. Con el objetivo de resolver lo anterior, la investigación en torno a los *modelos mean-risk* –que corresponde a una versión general del modelo Markowitz– se ha centrado en utilizar funciones adecuadas que acompañen a la media, valor que representa una posición neutral ante el riesgo. Una de éstas es la desviación estándar, la cual ilustra el siguiente ejemplo de funcionales ocupados para medir riesgo:

$$\rho^{std}(X) = \mu(X) + \gamma\sigma(X), \quad (2.2)$$

donde $\sigma(X)$ corresponde a la desviación estándar. Al igual que ρ^{var} , el mapeo ρ^{std} no es una medida de riesgo según la Definición 2.1, ya que ambas no satisfacen la propiedad de monotonía. Por ejemplo, tomando una variable X uniforme en el intervalo $[0, 1]$ e $Y = \frac{1+X}{2}$, se puede observar que para γ suficientemente grande se tiene $\rho^{std}(Y) < \rho^{std}(X)$, a pesar de que $X \leq Y$ c.s. De todas formas, como se comentó en el Capítulo 1, el uso de ρ^{std} es frecuente en materia de ruteo y modelos de equilibrio. Finalmente, cabe mencionar otras funciones que se usan en modelos de tipo mean-risk tales como la semi-desviación estándar o semi-desviación estándar absoluta –ver [42, 43]–.

Uno de los primeros ejemplos de medidas de riesgo es el célebre *Value-at-Risk*, el cual toma la siguiente forma para un nivel $\alpha \in [0, 1]$:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf \{m \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq m) \geq 1 - \alpha\}. \quad (2.3)$$

Si bien este funcional satisface propiedades como invarianza bajo traslación, monotonía y homogeneidad positiva, este funcional no es subaditivo y por lo tanto, tampoco convexo –ver contraejemplo en [3]–. Por último, cabe destacar que para variables aleatorias normales, la función VaR coincide con ρ^{std} para un cierto $\gamma \in \mathbb{R}$ que depende del nivel α .

La siguiente medida de riesgo es una de las más conocidas y usadas, ya que posee una característica relevante: es coherente. Se le denomina *Average Value-at-Risk* y fue presentada por primera vez en [3]. Para $\alpha \in [0, 1]$ se define de la siguiente forma:

$$\text{AVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}_\nu(X) d\nu. \quad (2.4)$$

En ocasiones también se le llama *Conditional Value-at-Risk*, *Expected Shortfall* o *Tail Value-at-Risk*. El principal atributo de este funcional es ser coherente, pero al mismo tiempo hace su uso más restrictivo, aún así se utiliza en muchas áreas de optimización –de una o más etapas– y finanzas. Además, al igual que el VaR, cuando se trabaja con variables aleatorias normales, es sabido que el Average Value-at-Risk coincide con el modelo mean-risk que utiliza la desviación estándar para cierto parámetro $\gamma \in \mathbb{R}$ que depende del nivel α . Por último, cabe destacar dos cosas: primero, debido a que el AVaR es una función convexa, bajo ciertas hipótesis de continuidad se tiene la representación dual

$$\text{AVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \inf_{z \in \mathbb{R}} \{\alpha z + \mathbb{E}(X - z)_+\}, \quad (2.5)$$

y en segundo lugar, para variables aleatorias continuas lo anterior coincide con el *Tail Conditional Expectation*, otra medida de riesgo definida como

$$\text{TCE}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]. \quad (2.6)$$

Finalmente, como se comentó antes, las medidas de riesgo coherentes no son del todo satisfactorias, y por ende se recurre a una clase más débil como las medidas de riesgo convexas. Un ejemplo de esto –ver más detalles en [18, 56, 19, 20]– es el siguiente funcional llamado *medida de riesgo entrópica*:

$$\rho_{\beta}^{\text{ent}}(X) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E} (e^{\beta X}), \quad (2.7)$$

donde $\beta > 0$ representa un coeficiente de aversión al riesgo. Esta función se obtiene en [18] mediante el uso de un conjunto de aceptación derivado de una función de costo –o utilidad, dependiendo el objetivo–. Los atributos principales de la medida de riesgo entrópica son que satisface los axiomas de convexidad y de aditividad. Este funcional puede ser obtenido con enfoques distintos al mencionado previamente, por ejemplo: en [22] se trabaja calculando premium principles aditivos, mientras que en la teoría de utilidad esperada –ver [2, 45]– se obtiene mediante el uso de funciones de utilidad y un coeficiente constante absoluto de aversión al riesgo –CARA–. Por último, sólo queda comentar que la medida de riesgo entrópica resulta ser clave¹ en los resultados del Capítulo 4.

2.2. Consistencia temporal y medidas de riesgo condicionales

Una de las principales apremiantes en el área de optimización en multi-etapas es el tema de *consistencia temporal*, el cual se ha definido de distintas maneras durante el proceso de investigación en esta materia. Dos de las intuiciones más simples son:

- De forma local según Shapiro en [59]: “La búsqueda en cada etapa de una solución óptima que no involucre información sobre estados o períodos futuros”,
- De forma global según Boda y Filar en [5]: “La solución óptima del proceso completo entre los períodos 0 y T , donde T es la etapa final, se compone de óptimos para cada subproceso entre t y T con $t \leq T$ ”.

En el Capítulo 1 se comentaba la existencia de una extensa literatura sobre medidas de riesgo en el área de optimización o decisión en varios períodos, como por ejemplo, [4, 30, 47, 60, 7, 9, 5, 59, 55], entre otros. El objetivo de esta sección es entregar una definición precisa de la consistencia temporal, específicamente la planteada en [54], para lo cual se debe exponer primeramente la noción de medidas de riesgo condicionales.

Como es sabido, en [9, 4] se presentan los problemas de consistencia temporal del VaR y AVaR, respectivamente. Luego, en [60] se muestra que en general las medidas de riesgo coherentes –en un período– no satisfacen la propiedad de consistencia temporal. Dado lo anterior, el proceso de investigación giró hacia las medidas de riesgo dinámicas tratadas en [47], las cuales presuponen un conjunto finito de eventos Ω . A partir de esa definición surgen otras, las cuales se basan en un Ω cualquiera, tales como las *medidas monetarias de riesgo dinámicas* presentadas por Cheridito et al. en [7], o bien el enfoque de esta sección: las *medidas de riesgo condicionales* planteadas en [55] y de manera aplicada en [54].

¹Ruszczynski, A. Reunión privada, 2012

Para ir fijando ideas, se trabajará en un contexto dinámico, en donde la información, decisiones y costos están asociados a etapas $t = 1, \dots, T$. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, donde Ω es un conjunto de eventos cualquiera, \mathcal{F} una σ -álgebra y \mathbb{P} una medida de probabilidad conocida. Además, se considerará una filtración $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ con \mathcal{F}_1 la σ -álgebra trivial, y el espacio lineal $\mathcal{Z}_t = L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ donde $p \in [1, +\infty]$.

Definición 2.5 (Medida de riesgo condicional). Se dirá que la función $\rho_t : \mathcal{Z}_{t+1} \rightarrow \mathcal{Z}_t$ es una *medida de riesgo condicional* si se cumplen las siguientes propiedades:

- **Convexidad:** Si $\lambda \in [0, 1]$ y $X, Y \in \mathcal{Z}_{t+1}$, entonces se tiene de manera casi segura que $\rho_t(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho_t(X) + (1 - \lambda)\rho_t(Y)$.
- **Monotonía:** Si $X, Y \in \mathcal{Z}_{t+1}$ son tales que $X \leq Y$ c.s., entonces $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ c.s.
- **Invarianza previsible:** Si $Y \in \mathcal{Z}_{t+1}$ y $X \in \mathcal{Z}_t$, entonces $\rho_t(Y + X) = \rho_t(Y) + X$.

Así, para cada $X \in \mathcal{Z}_t$ se tiene que $\rho_t(X)$ es una función de Ω en \mathbb{R} , es decir, es una variable aleatoria en el espacio \mathcal{Z}_t . Se puede observar que lo anterior generaliza la Definición 2.3; más aún, si \mathcal{F}_t es la σ -álgebra trivial, entonces coincide con ella. Estos funcionales nacen de la necesidad de extender el concepto de esperanza condicional $\mathbb{E}(X|F_t)$, de ahí el nombre de medidas de riesgo condicionales. Por último, aparte de las propiedades dadas en la Definición 2.5 se puede agregar la siguiente característica:

- **Homogeneidad positiva:** Si $\lambda \geq 0$ y $X \in \mathcal{Z}_{t+1}$, entonces $\rho_t(\lambda X) = \lambda \rho_t(X)$.

Una medida de riesgo condicional que cumple los cuatro atributos anteriores generaliza el concepto de medidas de riesgo coherentes de la Definición 2.2. Para un desarrollo más detallado de esta teoría, tales como la representación dual de esta clase de medidas de riesgo o su representación mediante esperanza condicional, se recomienda ver [55].

Ejemplos

Algunos ejemplos de la clase de medidas de riesgo antes descrita son:

1. Sea $Z_{t+1} = L^p(\Omega, \mathcal{F}_{t+1}, \mathbb{P})$ con $p \in [1, +\infty)$, e $Y \in \mathcal{Z}_{t+1}$. La versión condicional del modelo *mean-risk* está dada por:

$$\rho_t(Y) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) + \gamma \sigma_p(Y|\mathcal{F}_t), \quad (2.8)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\sigma_p(Y|\mathcal{F}_t)$ es la *semidesviación condicional superior* definida como

$$\sigma_p(Y|\mathcal{F}_t) = \left(\mathbb{E} \left[(Y - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t])_+^p | \mathcal{F}_t \right] \right)^{1/p}.$$

2. Sea $Z_{t+1} = L^1(\Omega, \mathcal{F}_{t+1}, \mathbb{P})$ e $Y \in \mathcal{Z}_{t+1}$. Entonces, la versión condicional del *Average Value-at-Risk* para un nivel $\alpha \in [0, 1]$ está dado por

$$\text{AVaR}_\alpha^t(Y) = \frac{1}{\alpha} \inf_{U \in \mathcal{Z}_t} \{ \alpha U + \mathbb{E}[(Y - U)_+ | \mathcal{F}_t] \}. \quad (2.9)$$

Consistencia Temporal

Siguiendo la línea de estudio de [55, 54] es necesario agregar un par de elementos antes de dar la definición de consistencia temporal. Sea $\mathcal{Z}_t = L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ con $p \in [1, +\infty]$ y se denotará $\mathcal{Z}_{t,T} := \mathcal{Z}_t \times \mathcal{Z}_{t+1} \times \cdots \times \mathcal{Z}_T$. Dado $(X_t, \dots, X_T) \in \mathcal{Z}_{t,T}$, se define la función $\tilde{\rho}_{t,T} : \mathcal{Z}_{t,T} \rightarrow \mathcal{Z}_t$ como

$$\tilde{\rho}_{t,T}(X_t, \dots, X_T) := X_t + \rho_t [X_{t+1} + \rho_{t+1} (X_{t+2} + \cdots + \rho_{T-2} [X_{T-1} + \rho_T(X_T)])], \quad (2.10)$$

donde ρ_t es una medida de riesgo condicional que satisface homogeneidad positiva. Dado que se toma \mathcal{F}_1 como la σ -álgebra trivial, entonces la función $\tilde{\rho}_{1,T}$ es a valores reales. Además, gracias a la propiedad de invarianza bajo traslación previsible, la ecuación (2.10) se reduce a

$$\tilde{\rho}_{t,T}(X_t, \dots, X_T) = \rho_t (\rho_{t+1} [\cdots \rho_T (X_t + \cdots + X_T)]). \quad (2.11)$$

Cabe destacar que debido a que cada ρ_t es positiva homogénea, entonces se cumple que $\tilde{\rho}_{t,T}$ también lo es. Más aún, si $X, Y \in \mathcal{Z}_{t,T}$ son vectores tal que $X \leq Y$ c.s. componente a componente, por monotonía se satisface que

$$\tilde{\rho}_{t,T}(X) \leq \tilde{\rho}_{t,T}(Y) \quad \text{c.s.},$$

de hecho gracias a la ecuación (2.11), se cumple c.s. que

$$\sum_{\tau=t}^T X_\tau \leq \sum_{\tau=t}^T Y_\tau \Rightarrow \tilde{\rho}_{t,T}(X_t, \dots, X_T) \leq \tilde{\rho}_{t,T}(Y_t, \dots, Y_T).$$

Con estos preliminares es posible definir consistencia temporal para un proceso de optimización en T períodos.

Definición 2.6 (Consistencia Temporal). Una secuencia de medidas de riesgo condicionales $\{\rho_t\}_{t=1}^T$ satisface la propiedad de *consistencia temporal* si para todo $1 \leq \tau < \theta \leq T$ y todo par de secuencias de costos $(Z_\tau, \dots, Z_T), (W_\tau, \dots, W_T) \in \mathcal{Z}_{\tau,T}$ tales que

$$Z_k = W_k, \quad k = \tau, \dots, \theta - 1 \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_{\theta,T}(Z_\theta, \dots, Z_T) \leq \tilde{\rho}_{\theta,T}(W_\theta, \dots, W_T),$$

entonces

$$\tilde{\rho}_{\tau,T}(Z_\tau, \dots, Z_T) \leq \tilde{\rho}_{\tau,T}(W_\tau, \dots, W_T).$$

Se puede observar que esta definición traduce la intuición local dada al comienzo de esta sección en contextos en donde el objetivo es minimizar el riesgo de un proceso dinámico estocástico. Otras caracterizaciones para consistencia temporal –algunas análogas– se pueden ver en [52, 8, 4, 5]. En la siguiente sección se tratará el marco teórico para procesos de decisión multi-etapas con aversión al riesgo, utilizando medidas de riesgo condicionales y a la vez cumpliendo la condición de consistencia temporal.

2.3. Procesos de Markov controlados

En esta sección se presentará la base teórica para la obtención de los resultados del Capítulo 3 que se centran en el contexto de interés en esta memoria: ruteo con aversión al riesgo. El estudio se enfocará básicamente en un tipo de proceso estocástico de decisión Markoviano –tratado en [54]–, el cual se utiliza en problemas de optimización en varias etapas con aversión al riesgo. Para esto, se considerará la base teórica descrita en la Sección 2.2.

En lo que sigue se entrega el marco general y los conceptos principales de un modelo de Markov controlado. Sean \mathcal{X} y \mathcal{U} dos espacios de Borel –espacios Polish² con sus σ -álgebras borelianas $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ –, y se considerará una multifunción medible $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$. Se dirá que \mathcal{X} es el *espacio de estados*, \mathcal{U} el *espacio de controles* y $U(\cdot)$ el *conjunto de controles*; además, se define el grafo de U como

$$\text{Gr}(U) = \{(x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} : u \in U(x)\}.$$

El conjunto de medidas de probabilidad en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ se denotará por \mathcal{P} y se le dotará de la topología débil³. Se llama *kernel controlado* a toda función medible $Q : \text{Gr}(U) \rightarrow \mathcal{P}$, es decir, para todo $x \in \mathcal{X}$ y cualquier $u \in U(x)$ se tiene que $Q(x, u)$ es una medida de probabilidad en $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, por lo que se denotará por $Q(B|x, u)$ el valor para un conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$ y $u \in U(x)$. Por último, una *función de costo* será una función medible $c : \text{Gr}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Un *modelo de Markov controlado* queda definido por un espacio de estados \mathcal{X} , un espacio de controles \mathcal{U} , una secuencia de conjuntos de control U_t , kernels controlados Q_t , y funciones de costos c_t para $t = 1, 2, \dots$

Para $t = 1, 2, \dots$ se denotará por $\mathcal{H}_t = \mathcal{X}^t$ al espacio de estados admisibles hasta la etapa t . Una *política determinista* es una secuencia de mapeos medibles $\pi_t : \mathcal{H}_t \rightarrow \mathcal{U}$, tal que $\pi_t(x_1, \dots, x_t) \in U_t(x_t)$ para todo historial $(x_1, \dots, x_t) \in \mathcal{H}_t$. Una *política Markoviana determinista* es una secuencia de funciones medibles $\pi_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $\pi_t(x) \in U_t(x)$ para cualquier $x \in \mathcal{X}$, es decir, los funcionales π_t son selecciones medibles de U_t que dependen del estado actual solamente. Finalmente, una política Markoviana es *estacionaria* si para todo $t = 1, 2, \dots$, se tiene $\pi_t = \pi_1$.

En esta sección y en el desarrollo del Capítulo 3 se considerará el espacio canónico $\Omega = \mathcal{X}^\infty$ dotado de la σ -álgebra producto \mathcal{F} . Sea \mathbb{P}_1 la distribución inicial del estado $x_1 \in \mathcal{X}$, se sabe que dado una secuencia de políticas $\Pi = \{\pi_t\}_{t=1}^\infty$ el Teorema de Ionescu-Tulcea afirma que existe un única medida de probabilidad \mathbb{P}^Π en (Ω, \mathcal{F}) , tal que para cualquier conjunto medible $B \subset \mathcal{X}$ y para todo historial $h_t \in \mathcal{H}^t$ con $t = 1, 2, \dots$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\Pi(x_1 \in B) &= \mathbb{P}_1(B), \\ \mathbb{P}^\Pi(x_{t+1} \in B|h_t) &= Q_t(B|x_t, \pi_t(h_t)), \end{aligned}$$

donde x_1 es un estado fijo. El mismo resultado es válido para problemas con horizonte finito.

²Espacio topológico completo separable y metrizable.

³Topología generada por la convergencia débil de las medidas de probabilidad, la cual es posible caracterizar como μ_n converge débilmente a μ si $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ para toda función f acotada y continua.

Problemas de control en horizonte finito

El objetivo de los procesos de Markov controlados es modelar aquellos problemas dinámicos que involucran decisiones en cada etapa, las cuales deben depender exclusivamente del estado actual del proceso. Por otra parte, se debe tomar en cuenta que las acciones que se eligen en cada período son de usuarios o agentes con aversión al riesgo, es por esto que el marco teórico sobre medidas de riesgo condicionales y consistencia temporal, tratados en la Sección 2.2, será de suma importancia. Con el fin de abordar el problema de ruteo tratado en esta memoria –específicamente en el Capítulo 3–, se considerará el siguiente esquema general para un proceso dinámico Markoviano: sea $x_1 \in \mathcal{X}$ un estado inicial fijo y una secuencia de estados $x_t \in \mathcal{X}$ para $t = 2, \dots, T + 1$. Cada una de las etapas está asociada a una decisión, por lo que se considerará una secuencia de políticas $\Pi = \{\pi_t\}_{t=1}^T$, las cuales eventualmente dependerán del estado actual. Estas políticas resultan en una secuencia de costos $Z_t = c_t(x_t, \pi_t)$ para $t = 1, \dots, T$ y un costo final $Z_{T+1} = c_{T+1}(x_{T+1})$. Con el fin de satisfacer la condición de consistencia temporal y modelar el efecto de aversión al riesgo, se usará la expresión (2.10) para plantear la siguiente función objetivo:

$$J(\Pi, x_1) = \tilde{\rho}_{1,T+1}(Z_1, \dots, Z_{T+1}) = c_1(x_1, \pi_1) + \rho_1 \left[c_2(x_2, \pi_2) + \rho_2 (c_3(x_3, \pi_3) + \dots + \rho_{T-1} [c_T(x_T, \pi_T) + \rho_T (c_{T+1}(x_{T+1}))]) \dots \right], \quad (2.12)$$

donde $\rho_t : Z_{t+1} \rightarrow Z_t$ son medidas condicionales de riesgo que satisfacen la propiedad de homogeneidad positiva. Usando la expresión (2.12) se busca resolver el siguiente problema para $T \geq 1$ fijo y $x_1 \in \mathcal{X}$:

$$\min_{\Pi} J(\Pi, x_1). \quad (2.13)$$

Debido a que se busca obtener como óptimo una secuencia de políticas Markovianas, se debe tener en cuenta una dificultad que es necesario resolver: como los mapeos $\rho_t(\cdot)$ son funciones \mathcal{F}_t -medibles, éstas pueden depender de toda la historia del proceso; por ejemplo, el nivel α en (2.9) podría ser un funcional medible, tal que en cada etapa t dependiese del historial (x_1, \dots, x_t) . Para encontrar soluciones que no dependan de todo el pasado, es necesario considerar el concepto de medidas de riesgo Markovianas tratado en la siguiente sección.

2.3.1. Medidas de riesgo Markovianas

Como se mencionó anteriormente, para reformular el problema (2.13) desde una perspectiva Markoviana, ya no es conveniente trabajar directamente con el espacio de eventos Ω , sino que se debe partir por construir un marco teórico en el espacio de estados \mathcal{X} , ya que las funciones medibles en cuestión, tales como los funcionales de costos, tienen argumentos en dicho espacio.

Sea el espacio de estados \mathcal{X} dotado de la σ -álgebra de Borel $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Además, se asumirá la existencia de una medida de probabilidad fija \mathbb{P}_0 sobre el espacio $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Por otra parte, se define $\mathcal{V} = L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ e $\mathcal{Y} = L^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$, donde a este último se le asociará el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ m \in \mathcal{Y} : \int_{\mathcal{X}} m(x) \mathbb{P}_0(dx) = 1, m \geq 0 \right\}, \quad (2.14)$$

que corresponde al conjunto de densidades de aquellas medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a \mathbb{P}_0 . Así, cada $m \in \mathcal{M}$ tiene asociada una medida de probabilidad en $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Además, se asumirá que los espacios \mathcal{V} e \mathcal{Y} están dotados de las topologías de la norma⁴ –fuerte– y débil-*, respectivamente. De esta forma, ambos se convierten en un par dual topológico, al cual se le asocia el producto de dualidad para $v \in \mathcal{V}$ y $m \in \mathcal{M}$

$$\langle v, m \rangle = \int_{\mathcal{X}} v(x)m(x)\mathbb{P}_0(dx).$$

En este contexto funcional se puede introducir la siguiente definición:

Definición 2.7 (Funcional de Riesgo de Transición). Se dice que una función medible $\sigma : \mathcal{V} \times \mathcal{X} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es un *funcional de riesgo de transición* asociado al kernel controlado $Q : \text{Gr}(U) \rightarrow \mathcal{M}$ si

- (i) Para cada $x \in \mathcal{X}$ y cada $u \in U(x)$ el funcional $v \mapsto \sigma(v, x, Q[x, u])$ es una medida coherente de riesgo sobre \mathcal{V} .
- (ii) Para cada $v \in \mathcal{V}$ y cada selección medible $u(\cdot)$ de $U(\cdot)$, el funcional definido como $x \mapsto \sigma(v, x, Q[x, u(x)])$ es un elemento de \mathcal{V} .

Siguiendo la construcción dada en [54], si para todo $x \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathcal{M}$ el funcional de riesgo de transición es semicontínuo inferior con respecto a su primer argumento, entonces gracias al resultado obtenido en [56] se puede obtener por dualidad la siguiente representación para todo $v \in \mathcal{V}$

$$\sigma(v, x, m) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}(x, m)} \langle v, \mu \rangle, \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{A}(x, m) \subset \mathcal{M}$ es un subconjunto convexo cerrado. Para otros resultados más técnicos ver [54]. Cabe mencionar algunos funcionales de riesgo de transición análogos a los ejemplos de medidas de riesgo condicionales presentados en la Sección 2.2.

1. El análogo para la medida de riesgo mean-risk que utiliza la semidesviación como acompañante de la media es

$$\sigma(v, x, m) = \langle v, m \rangle + \kappa(x) \left(\langle [(v - \langle v, m \rangle)_+]^r, m \rangle \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (2.16)$$

donde $r \geq 1$ y $\kappa : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ es una función medible que denota un coeficiente de aversión al riesgo, la cual podría depender del estado actual.

2. El análogo para el *Average Value-at-Risk* dinámico es

$$\sigma(v, x, m) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha(x)} \langle (v - z)_+, m \rangle \right\}, \quad (2.17)$$

donde $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ es una función medible que denota el nivel, que eventualmente podría depender del estado actual.

⁴También se le puede dotar de la topología débil.

De ahora en adelante se asumirá que los kernels controlados Q_t , asociados al proceso dinámico de Markov, toman valores en el conjunto \mathcal{M} , es decir, son absolutamente contínuos con respecto a \mathbb{P}_0 y poseen una densidad asociada $q_t \in \mathcal{M}$. Además, se toma como espacio $\mathcal{Z}_t = L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{\Pi})$, donde $\Omega = \mathcal{X}^{T+1}$, \mathcal{F}_t es la σ -álgebra producto hasta t , y \mathbb{P}^{Π} es el resultado del Teorema de Ionescu-Tulcea junto con los kernels controlados que modelan el proceso en cuestión. Con todo lo anterior, es posible definir lo siguiente:

Definición 2.8 (Medida de Riesgo Markoviana). Una medida de riesgo condicional $\rho_t : \mathcal{Z}_{t+1} \rightarrow \mathcal{Z}_t$ se dice que es una *medida de riesgo Markoviana* asociada a un proceso de Markov controlado $\{x_t\}_{t=1}^{T+1}$, si existe un mapeo de transición de riesgo $\sigma_t : \mathcal{V} \times \mathcal{X} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $v \in \mathcal{V}$ y para toda selección medible $u_t \in U(x_t)$ se tiene

$$\rho_t[v(x_{t+1})] = \sigma_t(v, x_t, Q_t[x_t, u_t]).$$

Para aclarar la definición anterior se puede observar que gracias a que $x_{t+1} : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ es una función \mathcal{F}_{t+1} -medible y $v : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo \mathcal{B} -medible, se sigue que $v[x_{t+1}(\cdot)] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional \mathcal{F}_{t+1} -medible. Además, dado que $v \in \mathcal{V}$ y \mathbb{P}^{Π} es una medida de probabilidad absolutamente contínua con respecto a \mathbb{P}_0 , se tiene que $v(x_{t+1}) \in \mathcal{Z}_{t+1}$. Por otro lado, con el mismo argumento anterior, como $x_t \mapsto \sigma_t(v, x_t, Q_t[x_t, \pi_t])$ es un elemento de \mathcal{V} , entonces vista como función de Ω en \mathbb{R} pertenece a \mathcal{Z}_t .

Dada la Definición 2.8, junto con la expresión (2.15) obtenida anteriormente, se puede concluir que una medida de riesgo Markoviana es posible representarla como

$$\rho_t[v(x_{t+1})] = \sup_{\mu \in \mathcal{A}(x_t, Q_t[x_t, \pi_t])} \langle v, \mu \rangle. \quad (2.18)$$

Finalmente, se desea obtener un método de programación dinámica para resolver el problema (2.13); por lo tanto, siguiendo el esquema de demostración del Teorema 2 en [54], y con el objetivo de utilizarlo durante el Capítulo 3, se obtiene el siguiente resultado para el caso en que el conjunto de controles U_t en cada etapa es finito:

Teorema 2.9. *Se asumirá que se satisfacen las siguientes hipótesis:*

1. Las medidas de riesgo condicionales ρ_t , $t = 1, \dots, T$ son Markovianas.
2. Para toda selección medible $\pi_t(\cdot) \in U_t(\cdot)$, las funciones $x \mapsto c_t(x, \pi_t(x))$, $t = 1, \dots, T + 1$, son elementos de \mathcal{V} ;
3. Para cada $x \in \mathcal{X}$ los conjuntos $U_t(x)$, $t = 1, \dots, T$, son finitos y las multiaplicaciones $U_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, T + 1$ son medibles.

Entonces, el problema (2.13) tiene una solución óptima, y su valor óptimo $v_1(x)$ es la solución de las siguientes ecuaciones de programación dinámica:

$$v_{T+1}(x) = c_{T+1}(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (2.19)$$

$$v_t(x) = \min_{u \in U_t(x)} \{c_t(x, u) + \sigma_t(v_{t+1}, x, Q_t[x, u])\}, \quad x \in \mathcal{X}, \quad t = T, \dots, 1, \quad (2.20)$$

donde

$$\sigma_t(v, x, Q_t[x, u]) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}(x, Q_t[x, u])} \langle \mu, v \rangle, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.21)$$

Mas aún, existe una política Markoviana óptima $\hat{\Pi} = \{\hat{\pi}_t\}_{t=1}^T$ la cual satisface las ecuaciones

$$\hat{\pi}_t(x) \in \operatorname{argmin}_{u \in U_t(x)} \{c_t(x, u) + \sigma_t(v_{t+1}, x, Q_t[x, u])\}, \quad x \in \mathcal{X}, \quad t = T, \dots, 1. \quad (2.22)$$

Recíprocamente, cada solución medible de las ecuaciones (2.19)-(2.22) define una política óptima Markoviana $\hat{\pi}$.

Demostración. En virtud de la monotonía de la función ρ_t para cada $t = 1, \dots, T$, el problema (2.13) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \min_{\pi_1, \dots, \pi_{T-1}, \pi_T} \left\{ c_1(x_1, \pi_1) + \rho_1 \left(c_2(x_2, \pi_2) + \dots + \rho_{T-1} \left(c_T(x_T, \pi_T) + \rho_T(c_{T+1}(x_{T+1})) \right) \right) \right\} \\ = & \min_{\pi_1, \dots, \pi_{T-1}} \left\{ c_1(x_1, \pi_1) + \rho_1 \left(c_2(x_2, \pi_2) + \dots + \rho_{T-1} \left(\min_{\pi_T} [c_T(x_T, \pi_T) + \rho_T(c_{T+1}(x_{T+1}))] \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

donde el mínimo se entiende de manera puntual. A lo anterior se le suele llamar *propiedad fundamental de intercambiabilidad* –ver [55]–, y está sumamente ligada a la propiedad de consistencia temporal 2.6. Ahora se considerará el problema de minimización interno $\min_{\pi_T} [c_T(x_T, \pi_T) + \rho_T(c_{T+1}(x_{T+1}))]$, el cual gracias a la estructura Markoviana de la medida de riesgo condicional ρ_T , puede ser escrito como

$$\min_{\pi_T} [c_T(x_T, \pi_T) + \sigma_T(v_{T+1}, x_T, Q_T[x_T, \pi_T(h_T)])].$$

Recordar que $v_{T+1}(x) = c_{T+1}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Por otro lado, para cada historial $h_T \in \mathcal{H}^T$ el problema interno puede ser considerado con $u_T = \pi_T(h_T)$. Más aún, la dependencia de h_T es sólo vía x_T , ya que ρ_t es una función Markoviana; por lo tanto, el conjunto de soluciones óptimas \hat{U}_T será una función de x_T . Entonces, el problema queda como

$$\min_{u_T \in U_T(x_T)} [c_T(x_T, \pi_T) + \sigma_T(v_{T+1}, x_T, Q_T[x_T, u_T])],$$

el cual es equivalente al problema (2.20) para $t = T$, y su solución está dada por (2.22). Como el conjunto $U_t(x)$ es finito para cada $x \in \mathcal{X}$ y $U_t(\cdot)$ es una multiaplicación medible, entonces para $t = T$ y cualquier $x \in \mathcal{X}$ el problema (2.20) tiene una solución óptima $u_T = \hat{\pi}_T(x)$, la cual es una función medible de x –ver Teorema 14.37 en [50]–. Gracias a la segunda hipótesis, junto con la Definición 2.7, se concluye que la función v_T es un elemento de \mathcal{V} . Por consiguiente, el problema (2.13) es equivalente a

$$\min_{\pi_1, \dots, \pi_{T-1}} \left\{ c_1(x_1, \pi_1) + \rho_1 \left(c_2(x_2, \pi_2) + \dots + \rho_{T-1}(v_T(x_T)) \right) \right\},$$

en el cual el horizonte ha sido disminuido en uno, y el costo terminal ahora es $v_T(x_T)$. Procediendo de manera inductiva para $t = T, T-1, \dots, 1$ se obtiene el resultado. \square

Observación 2.10. Este resultado es menos general que el obtenido por Ruszczynski en el Teorema 2 en [54], ya que los espacios que se utilizan como hipótesis en el Teorema 2.9 son $\mathcal{Z}_t = L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{\Pi})$ y $\mathcal{V} = L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$, mientras que en [54] se utilizan espacios como $\mathcal{Z}_t = L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^{\Pi})$ y $\mathcal{V} = L^p(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ para $p \in [1, +\infty]$. Aún así, la demostración de

Ruszczyński no está del todo correcta, pues no deja en claro cómo definir las medidas de riesgo Markovianas –sobre todo la igualdad con la medida de riesgo de transición– para el caso de espacios más generales. Por otro parte, el resultado presentado anteriormente requiere la finitud de los conjuntos de control y de los estados. Dado esto, el resultado se aplica básicamente a problemas finitos de decisión, como el que será tratado más adelante.

2.4. Teorías de elección bajo incertidumbre

En esta sección se describe un enfoque totalmente distinto a los anteriores, pero que es motivado por la necesidad de resolver los problemas de consistencia temporal, además de otras complicaciones. Se trata de una teoría frecuentemente utilizada en el área de finanzas y economía, la *teoría de elección*, la cual busca en términos simples modelar las preferencias de los agentes mediante la optimización de ciertos funcionales de preferencia, como por ejemplo, la utilidad esperada.

En el contexto del ruteo con aversión al riesgo, es claro que cada usuario prioriza las rutas que de cierta forma presentan un tiempo de viaje menor. El objetivo de esta sección y el Capítulo 4 es mostrar que el comportamiento de dichos agentes puede ser modelado minimizando cierto funcional, el cual traduce las preferencias en términos cuantitativos. En lo que sigue se presentarán varias teorías de elección: la teoría de utilidad esperada de von Neumann-Morgensten, la teoría dual de elección presentada por Yaari y por último la teoría de utilidad rango-dependiente esperada presentada por varios investigadores; cada una de las cuales intenta superar las limitaciones de la anterior. Además, se debe recordar que nuestro contexto trabaja con costos positivos, donde los valores más bajos son preferidos.

2.4.1. Teoría de desutilidad esperada

Desde antes del Siglo XX ya existía la hipótesis sobre cuantificar las preferencias de los usuarios, pero no es hasta 1947 cuando Von Neumann y Morgensten fueron los pioneros en esta área al introducir la teoría de utilidad esperada en su libro sobre teoría de juegos [62]. En esta sección se tratará el caso en que los agentes se enfrentan a costos positivos, es por esto que se le llama teoría de desutilidad esperada. El enfoque será desde el punto de vista continuo y con variables aleatorias, a diferencia del trabajo de Von Neumann-Morgensten el cual se enfoca en loterías sobre un conjunto de eventos discreto. La teoría de utilidad esperada de Von Neumann-Morgensten, que utiliza ganancias aleatorias, puede ser fácilmente adaptada a partir de lo que se expondrá en esta sección.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad estándar –ver [51]– sin átomos y \mathcal{X} un espacio lineal de variables aleatorias acotadas que contenga a las constantes, en otras palabras, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En este contexto cada $X \in \mathcal{X}$ representa un costo aleatorio que en el Capítulo 4 se tratará de un tiempo de viaje aleatorio, por lo cual los valores más bajos son preferidos. Para caracterizar las preferencias de los usuarios se supone la existencia de un orden \preceq en \mathcal{X} , donde $X \preceq Y$ es entendido como “ X es preferido ante Y ”, $X \sim Y$ se traduce en que el usuario es indiferente a ambos costos, y por último, $X \triangleleft Y$ denota preferencia estricta. Asumiendo que el orden \preceq satisface ciertos axiomas razonables, se tendrá la existencia de un funcional $C(\cdot)$ que cuantifica las preferencias, es decir,

$$X \preceq Y \Leftrightarrow C(X) \leq C(Y).$$

Con la idea anterior, en lo que sigue se desarrollará la teoría que lleva a la desutilidad esperada como funcional de preferencia. Se sabe que cada $X \in \mathcal{X}$ define una medida en \mathbb{R} mediante su función de distribución F_X de soporte compacto. Dado que el espacio de probabilidad en el que se trabaja es estándar y sin átomos, entonces cada función de distribución con soporte compacto en \mathbb{R} puede ser generada por elementos de \mathcal{X} . Esto gracias al Teorema 11.7.5 en [14] el cual se aplica a cualquier distribución en \mathbb{R} , y en particular a las de soporte compacto, por lo tanto, las variables deben ser acotadas para generar esta clase de distribuciones. Por otra parte, se asumirá el siguiente axioma:

A1. (Invarianza bajo ley) La relación de preferencia \preceq en \mathcal{X} se dice *invariante bajo ley* si para todo par $X, Y \in \mathcal{X}$ tal que $F_X = F_Y$, se tiene $X \sim Y$.

Bajo este supuesto, es posible construir un relación de preferencia equivalente \preceq sobre el espacio de distribuciones con soporte compacto \mathcal{D}_b , mediante

$$X \preceq Y \Leftrightarrow F_X \preceq F_Y.$$

La construcción inversa partiendo desde el orden \preceq hacia \preceq es análoga. Dado esto, los resultados obtenidos para cualquier axiomatización hecha en (\mathcal{D}_b, \preceq) pueden ser traducidos a una axiomatización en (\mathcal{X}, \preceq) .

Se asumirá que el espacio \mathcal{X} está dotado de la topología dada por la convergencia en distribución⁵, lo cual se traduce como: la sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a X si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$. Por último, para cada $\alpha \in [0, 1]$ y todo par $X, Y \in \mathcal{X}$ se denotará por $\mathcal{L}(\alpha; X; Y)$ a la lotería generada por X e Y , es decir, es la variable aleatoria cuya distribución está dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $\alpha F_X(x) + (1 - \alpha)F_Y(x)$. Finalmente, con todo el contexto anterior se consideran los siguientes axiomas:

A2. (Orden débil) La relación de orden \preceq satisface completitud⁶ y transitividad.

A3. (Continuidad débil) Los conjuntos $\{Y \in \mathcal{X} : Y \preceq X\}$ y $\{Y \in \mathcal{X} : X \preceq Y\}$ son cerrados para la topología con que se dotó a \mathcal{X} .

A4. (Independencia) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ y cualquier $\alpha \in [0, 1]$ tal que $X \preceq Y$, se cumple que $\mathcal{L}(\alpha; X; Z) \preceq \mathcal{L}(\alpha; Y; Z)$.

Con estos supuestos es posible obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.11 (von Neumann y Morgenstern, 1947). *Sea \preceq una relación de preferencia sobre \mathcal{X} . La relación de orden \preceq satisface los axiomas A1-A4 si y sólo si existe una función de desutilidad continua $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ –única bajo transformación afín positiva– tal que \preceq tiene la siguiente representación numérica para todo $X \in \mathcal{X}$:*

$$C(X) = \int_{\mathbb{R}} c(x) dF_X(x) = \mathbb{E}[c(X)].$$

⁵La teoría original es con respecto a \mathcal{D}_b . Éste al no ser un subespacio cerrado para la convergencia débil, ésta debe ser restringida a cada soporte compacto como se plantea en el Corolario 2.29 en [20].

⁶Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}$ se tiene $X \preceq Y$ o bien $Y \preceq X$.

La demostración original para el caso discreto dada en [62] por von Neumann-Morgensten es con respecto al espacio de distribuciones, pero existen otras demostraciones alternativas en [20, 11].

Por último, es necesario señalar un par de definiciones extras sobre el orden \preceq , lo cual tendrá consecuencias en los atributos de la función de desutilidad.

Definición 2.12 (Monotonía estricta). La relación de preferencia \preceq se dirá *estrictamente monótona* si para todo par $X, Y \in \mathcal{X}$ tal que $X < Y$ c.s., se tiene $X \triangleleft Y$.

De esta última definición se puede concluir que la función de desutilidad $c(\cdot)$ es estrictamente creciente si, y sólo si, \preceq es estrictamente monótona. Existen otras definiciones alternativas para monotonía, como por ejemplo con respecto a la función de distribución: para todo par de variables $X, Y \in \mathcal{X}$ tales que $F_X(x) \geq F_Y(x)$ y además existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(\bar{x}) > F_Y(\bar{x})$, se tiene $X \triangleleft Y$.

Definición 2.13 (Aversión al riesgo). La relación de preferencia \preceq se dirá *aversa al riesgo* si para todo $X \in \mathcal{X}$ se tiene $\mathbb{E}(X) \preceq X$.

Con esta definición de aversión al riesgo es posible demostrar que la función de desutilidad $c(\cdot)$ es convexa si y sólo si la relación de preferencia \preceq es aversa al riesgo. Para los detalles de la demostración ver [11].

2.4.2. Teoría dual de elección

Diversos estudios en el área de economía y finanzas comenzaron a evidenciar que la teoría presenta por von Neumann y Morgensten no representaba a cabalidad las preferencias de los usuarios. Diversas críticas surgieron hacia los axiomas de continuidad e independencia, sobre todo a éste último, ya que parecían ser muy fuertes, o bien no plasaban el comportamiento ni las tendencias de los agentes. Claro ejemplo de lo anterior son las paradojas de Allais –ver [1, 33]– y Ellsberg –ver [15]–, las cuales muestran que en la práctica las personas tienden a seguir otros patrones de preferencia y no los planteados por el axioma de independencia. En el Capítulo 4 se discutirá un ejemplo de la paradoja de Allais en el contexto de ruteo con aversión al riesgo. Cabe mencionar que se ha intentado trabajar sin el axioma de independencia, por ejemplo el trabajo realizado por Machina en [32].

Dada las críticas planteadas, comienzan a aparecer diversas teorías alternativas a la de von Neumann-Morgensten con el objetivo de abordar las paradojas y/o mejorar los planteamientos sobre como cuantificar las preferencias. Una de ellas es la teoría dual de elección planteada en [66] por Yaari, la cual es el objetivo de esta sección.

Para fijar el contexto se considerará un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ estándar sin átomos, y además un espacio lineal \mathcal{X} de variables aleatorias con soporte en el intervalo $[0, 1]$ que contenga a las constantes; con esto se sabe que cualquier función de distribución en $[0, 1]$ puede ser generada con elementos de \mathcal{X} . Para continuar se necesita la siguiente definición:

Definición 2.14 (Comonotonía). Dos variables aleatorias X e Y en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se dicen *comonótonas* si, y sólo si, para todo $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ se tiene

$$[X(\omega) - X(\omega')][Y(\omega) - Y(\omega')] \geq 0$$

Es posible que la definición anterior no sea muy útil en la práctica, pero ciertas caracterizaciones como la siguiente si lo son.

Proposición 2.15 ([20]). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Dos variables aleatorias X e Y son comonótonas si y sólo si existe una tercera variable Z y funciones crecientes f y g a valores reales tales que $X = f(Z)$ e $Y = g(Z)$.*

Junto con la definición anterior, se asumirá la existencia de un orden \preceq sobre \mathcal{X} , y además este espacio será dotado de la topología dada por la norma en $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se consideran los siguientes axiomas:

- A3*.** (**Continuidad en L^1**) Los conjuntos $\{Y \in \mathcal{X} : Y \preceq X\}$ y $\{Y \in \mathcal{X} : X \preceq Y\}$ son cerrados para la topología de la norma L^1 .
- A4*.** (**Independencia dual directa**) Para $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ variables aleatorias comonótonas a pares y $\alpha \in [0, 1]$ tal que $X \preceq Y$, se tiene $\alpha X + (1 - \alpha)Z \preceq \alpha Y + (1 - \alpha)Z$.
- A5*.** (**Monotonía de primer orden estocástico**) La relación de preferencia \preceq se dirá *monótona con respecto al primer orden estocástico* si para todo par $X, Y \in \mathcal{X}$ tal que $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, se tiene $X \preceq Y$.

En el axioma de independencia dual, la combinación convexa que se tiene en la conclusión es entendida como una nueva variable aleatoria. Este axioma es una versión más débil que el axioma A4 presentado en la Sección 2.4.1. Por otra parte, se seguirá asumiendo que la relación de orden \preceq satisface los axiomas A1 y A2 de la sección anterior. Con todo esto, se tiene la siguiente representación numérica obtenida por Yaari en 1987.

Teorema 2.16 (Yaari, 1987). *Sea \preceq una relación de preferencia sobre \mathcal{X} . Un orden \preceq satisface los axiomas A1, A2, A3*, A4* y A5* si y sólo si existe una función continua no-decreciente $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ –única bajo transformación afín positiva– con $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ tal que \preceq tiene la siguiente representación cuantitativa para todo $X \in \mathcal{X}$:*

$$C(X) = \int_0^1 h(1 - F_X(x)) dx.$$

La función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ se conoce usualmente como *función de distorsión*, ya que cumple con el rol de alterar la función de distribución exagerando la probabilidad de los eventos adversos, a diferencia de la teoría de utilidad esperada la cual introduce la aversión al riesgo mediante la exageración de los costos de eventos inesperados. La demostración original del Teorema 2.16 se puede ver en [66], en donde además se encontrará una discusión más detallada acerca del uso y los problemas que surgen con ciertas paradojas. Para una demostración alternativa en base a otras hipótesis –por ejemplo, en vez de trabajar con las variables con soporte en $[0, 1]$ se utilizan variables acotadas– se recomienda ver los resultados de Dentcheva y Ruzsyczynski en [11]. En el caso que una variable sea solamente acotada, el funcional de preferencia toma la siguiente forma:

$$C(X) = \int_{-\infty}^0 [h(1 - F_X(x)) - 1] dx + \int_0^{\infty} h(1 - F_X(x)) dx.$$

Una de las propiedades de este funcional de preferencia, cualquiera sea su versión, es que para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$ satisface claramente que $C(k) = k$. Para simplificar la

notación en la representación numérica entregada por Yaari, dado un mapeo de distorsión h y $X \in \mathcal{X}$, se denotará por X^h a la variable aleatoria cuya función de distribución está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ como $\mathbb{P}(X^h \leq x) = 1 - h(\mathbb{P}(X > x))$. Con esta definición, el funcional de Yaari queda expresado de manera más simple como

$$C(X) = \mathbb{E}(X^h). \quad (2.23)$$

Por último, cabe comentar que la aversión al riesgo de \preceq también puede generar efectos sobre la función de distorsión que se obtiene en el Teorema 2.16, pero es necesario definirlo de otra manera –ver [11]– más general que la Definición 2.13.

2.4.3. Teoría de desutilidad rango-dependiente esperada

Al igual que Yaari en 1987, otros investigadores desarrollaron teorías alternativas a la de von Neumann-Morgensten, cada una de las cuales tiene su propia axiomatización, pero que en su mayoría son análogas, sobre todo en el resultado obtenido. Autores como Quiggin en 1982 [46], Schmeidler en 1989 [57], Wakker en 1994 [64], y Chateauneuf en 1998 [6], presentan un marco distinto en donde se intenta obtener un funcional de preferencia de manera de cuantificar las elecciones de los agentes. Schmeidler, a diferencia del resto, desarrolla la llamada *teoría de utilidad esperada de Choquet* en la cual se asume que no se tiene conocimiento a priori de una medida de probabilidad en el espacio (Ω, \mathcal{F}) . El resto de los autores desarrollan la conocida *teoría de utilidad rango-dependiente esperada* que presupone la existencia de una medida de probabilidad –Quiggin la llama *teoría de utilidad anticipada*–. Dada la gran diversidad de axiomatizaciones, las cuales se pueden encontrar en las referencias antes mencionadas, el objetivo de esta sección es presentar el funcional de preferencia que obtienen ya sea Quiggin, Wakker o bien Chateauneuf. Por último, en esta memoria se llamará *teoría de desutilidad rango-dependiente esperada* dado que el interés se enfoca en costos más que en utilidades.

Formalmente, se asumirá que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ estándar sin átomos cuya medida de probabilidad es conocida; junto con un espacio lineal \mathcal{X} de variables aleatorias con soporte en un intervalo compacto común que contiene a las constantes. Suponiendo que la relación de orden \preceq satisface ciertos axiomas, como por ejemplo los propuestos por Wakker en [64], se obtiene una representación numérica para todo $X \in \mathcal{X}$ de la forma

$$C(X) = \int_{-\infty}^0 [h(1 - F_{c(X)}(x)) - 1] dx + \int_0^{\infty} h(1 - F_{c(X)}(x)) dx, \quad (2.24)$$

donde $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de desutilidad continua estrictamente creciente y $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función estrictamente creciente llamada función de distorsión. Además, suponiendo que se satisface algún axioma adecuado de continuidad, h resulta ser continua. Como se puede observar, el funcional (2.24) integra ambas perspectivas: intenta exagerar la probabilidad de los eventos adversos por medio de la función de distorsión h , y por otro lado, trata de inducir la aversión al riesgo por medio de la teoría de desutilidad esperada. Para simplificar la notación, al igual que en la Sección 2.4.2, dada la definición de la variable X^h , una expresión más simple para (2.24) es

$$C(X) = \mathbb{E}[c(X^h)]. \quad (2.25)$$

Como se comentaba anteriormente, esta teoría combina ambos enfoques, por lo que los resultados presentados más adelante en esta memoria son consecuencia de lo que se obtendrá de forma separada, tanto para la teoría de desutilidad esperada como para la teoría dual de elección. Todo lo anterior será motivo de estudio en el Capítulo 4.

Capítulo 3

Modelo Markoviano para el problema de ruteo

En este capítulo se hará uso del marco estudiado durante las Secciones 2.2 y 2.3, con el fin de aplicarlo a un problema de ruteo. Esto motivado con la idea de “Markovianidad” que se da usualmente en este ámbito, y además con el fin de satisfacer la propiedad de consistencia temporal.

Tras entregar una motivación para el uso de este tipo de procesos, se presentan algunos resultados previos para la medida de riesgo condicional que se utilizará: AVaR condicional. Posteriormente, se presenta el marco para el problema de ruteo, para lo cual se analizarán un par de ejemplos. Gracias a estos, se obtiene un resultado general aditivo, el cual es similar a las ecuaciones de Bellman. Finalmente, se plantea un contraejemplo para el caso donde los tiempos de viaje son variables normales, y se cuestiona el uso de este tipo de enfoque.

3.1. Motivación: inconsistencia temporal

El problema de ruteo no determinista ha sido abordado con distintos tipos de enfoques, cada uno definido por una función objetivo a optimizar, por ejemplo: minimizar la probabilidad de que el tiempo de llegada esté por debajo de cierto umbral; minimizar el valor esperado del tiempo de viaje; el uso del modelo mean-risk tratado en la Sección 2.1; entre otros. Modelando la red como un grafo, y siguiendo la intuición del caso determinista, se puede tratar localmente como problema dinámico de decisión en cada vértice. Es por esto que también puede ser tratado como un proceso de optimización en varias etapas, lo cual es el objetivo de este capítulo además de solucionar la problemática de inconsistencia temporal –ver definición en la Sección 2.2–.

Con respecto a lo último, se sabe que el uso de medidas de riesgo no condicionales, incluso coherentes, lamentablemente conduce a que la propiedad de consistencia temporal no se satisfaga, y el contexto de ruteo no es la excepción a la regla. En efecto, para ejemplificar esto se considerará el siguiente grafo:

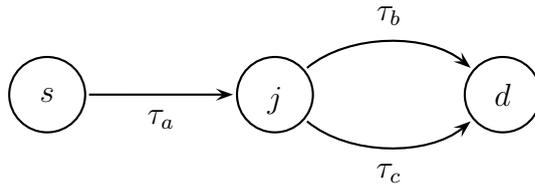


Figura 3.1: Motivación para el modelo Markoviano.

Donde $\tau_b \sim N(10,4)$, $\tau_c \sim N(10.9,1)$ y $\tau_a \sim N(10,1)$ son variables aleatorias normales. Dado algún nivel α , la función objetivo a considerar será la medida de riesgo coherente AVaR dada en los ejemplos durante la Sección 2.1.1. Se sabe que para variables normales el AVaR coincide con el modelo mean-risk de la desviación estándar, es por esto que se escogerá un nivel $\bar{\alpha}$ de tal forma que el coeficiente de aversión al riesgo $\gamma_{\bar{\alpha}}$ del modelo mean-risk sea igual a uno, con lo cual la medida de riesgo es

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(X) = \mu(X) + \sigma(X).$$

Así, el camino dado por los arcos a y b posee un riesgo asociado

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_a + \tau_b) = \mu(\tau_a + \tau_b) + \sigma(\tau_a + \tau_b) = 20 + \sqrt{5},$$

mientras que el valor asociado a la ruta a - c es

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_a + \tau_c) = \mu(\tau_a + \tau_c) + \sigma(\tau_a + \tau_c) = 20.9 + \sqrt{2}.$$

Por lo tanto, viendo el proceso desde el nodo s hacia el nodo d la ruta óptima está dada por a - b . Sin embargo, uno podría pensar que el arco común a es obligado, y por ende la variable τ_a no debería tener influencia sobre la elección; lamentablemente, eso no se cumple. Al momento de tomar una decisión parado en j se tiene por un lado que

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_b) = \mu(\tau_b) + \sigma(\tau_b) = 12,$$

mientras que por otro lado para el arco c se observa que

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_c) = \mu(\tau_c) + \sigma(\tau_c) = 11.9,$$

obteniéndose así que el camino con menos riesgo está dado por el arco c . Con esto se concluye que viendo el proceso desde el vértice j hacia d la política óptima cambia, lo cual es equivalente a una inconsistencia temporal, ya que se había mostrado anteriormente que la mejor ruta comprendía los arcos a y b .

Este ejemplo muestra que incluso en procesos como el de escoger la mejor alternativa para llegar un destino, se producen inconsistencias temporales al usar medidas de riesgo no condicionales. Esto motiva el uso de aquéllas que son condicionales, como los ejemplos dados en la Sección 2.2, con el fin de resolver la inconsistencia. Además, el uso de medidas de riesgo Markovianas y el modelamiento mediante el marco de procesos de Markov controlados toma en cuenta una de las características usuales en problemas de ruteo: la decisión sólo depende del estado actual.

3.2. Resultados previos para el AVaR condicional

Antes de modelar el problema de ruteo como un proceso de Markov controlado, es necesario obtener algunos resultados relacionados con el AVaR condicional: se debe encontrar su representación dual (2.18), y por otro lado se debe mostrar que efectivamente corresponde a una medida de riesgo Markoviana.

Se considerará el marco dado en la Sección 2.3.1, de acuerdo a lo cual un funcional de riesgo de transición $\sigma(v, x, m)$ al ser semicontínuo inferior en su primer argumento se puede obtener su representación dual

$$\sigma(v, x, m) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}(x, m)} \langle v, \mu \rangle.$$

El objetivo es obtener la representación para el funcional

$$\sigma(v, x, m) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha(x)} \langle (v - z)_+, m \rangle \right\},$$

donde $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ es una función medible que representa al nivel en $(0, 1)$.

Lema 3.1. *Para todo $x \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{A}(x, m)$ asociado al funcional (2.17) es*

$$\mathcal{A}(x, m) = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : 0 \leq \mu(\cdot) \leq \frac{m(\cdot)}{\alpha(x)} \text{ ctp} \right\}.$$

Demostración. Con el fin de reducir la notación y dado que se trabajará solamente en la variable $v \in \mathcal{V}$, durante la demostración se denotará $\sigma(v) := \sigma(v, x, m)$. Por lo tanto, para obtener el resultado se calculará la conjugada de Fenchel del funcional de riesgo de transición $\sigma(\cdot)$ definido en la ecuación (2.17). Como se sabe que $\sigma(\cdot)$ es una función convexa sublineal, entonces se tiene que su conjugada $\sigma^*(\cdot)$ corresponde a la indicatriz de algún conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, es decir, $\sigma^*(\mu) = 0$ si $\mu \in \mathcal{A}$ o $\sigma^*(\mu) = +\infty$ en caso contrario. Por lo tanto, se tiene que $\mu \in \mathcal{A}$ si y sólo si $\sigma^*(\mu) < +\infty$. Con ello, solamente resta obtener \mathcal{A} para concluir la representación (2.18).

Ahora bien, para $\mu \in \mathcal{Y}$ se tiene

$$\begin{aligned} \sigma^*(\mu) &= \sup_{v \in \mathcal{V}} \{ \langle v, \mu \rangle - \sigma(v) \} \\ &= \sup_{v \in \mathcal{V}, z \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} v(y) \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) - z - \frac{1}{\alpha(x)} \int_{\mathcal{X}} [v(y) - z]_+ m(y) \mathbb{P}_0(dy) \right\}, \end{aligned}$$

luego haciendo un cambiando de variables $w(y) = v(y) - z$ se observa que

$$\begin{aligned} \sigma^*(\mu) &= \sup_{w \in \mathcal{V}, z \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} [w(y) + z] \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) - z - \frac{1}{\alpha(x)} \int_{\mathcal{X}} [w(y)]_+ m(y) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \sup_{w \in \mathcal{V}, z \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} w(y) \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) + z \left(\int_{\mathcal{X}} \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha(x)} \int_{\mathcal{X}} [w(y)]_+ m(y) \mathbb{P}_0(dy) \right\}. \end{aligned}$$

De esta última igualdad es claro que si $\int_{\mathcal{X}} \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) \neq 1$, se puede hacer crecer z o decrecer, dependiendo del valor de la integral—provocando que $\sigma^*(\mu) = +\infty$. Para el caso en que $\int_{\mathcal{X}} \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma^*(\mu) &= \sup_{w \in \mathcal{V}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} w(y) \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) - \frac{1}{\alpha(x)} \int_{\mathcal{X}} [w(y)]_+ m(y) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \sup_{w \in \mathcal{V}} \int_{\mathcal{X}} \left(w(y) \mu(y) - \frac{1}{\alpha(x)} [w(y)]_+ m(y) \right) \mathbb{P}_0(dy). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Esta última expresión vuelve a ser $+\infty$ a menos que $\mu \geq 0$ ctp. En efecto, si no se tiene lo anterior existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0$ donde $A_\varepsilon = \{y \in \mathcal{X} : \mu(y) < -\varepsilon\}$. Tomando la función $w(y) = -\lambda \mathbf{1}_{\{y \in A_\varepsilon\}}$ con $\lambda > 0$ en (3.1) se tiene

$$\sigma^*(\mu) \geq \int_{\mathcal{X}} -\lambda \mathbf{1}_{\{y \in A_\varepsilon\}} \mu(y) \mathbb{P}_0(dy) > \lambda \varepsilon \mathbb{P}_0(A_\varepsilon)$$

y haciendo $\lambda \rightarrow \infty$ se concluye $\sigma^*(\mu) = +\infty$. Esto muestra que $\sigma^*(\mu) = +\infty$ para $\mu \notin \mathcal{M}$, por lo que sólo resta calcular para $\mu \in \mathcal{M}$.

Volviendo a (3.1) se observa nuevamente que es $+\infty$ a menos que $\mu(\cdot) \leq \frac{m(\cdot)}{\alpha(x)}$ ctp. En efecto, si no se tiene esto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(A_\varepsilon) > 0$ donde $A_\varepsilon = \{y \in \mathcal{X} : \mu(y) > \varepsilon + \frac{m(y)}{\alpha(x)}\}$. Análogamente, definiendo $w(y) = \lambda \mathbf{1}_{\{y \in A_\varepsilon\}}$ con $\lambda > 0$, en (3.1) se tiene

$$\sigma^*(\mu) \geq \int_{\mathcal{X}} \lambda \mathbf{1}_{A_\varepsilon}(y) \left(\mu(y) - \frac{m(y)}{\alpha} \right) \mathbb{P}_0(dy) > \lambda \varepsilon \mathbb{P}_0(A_\varepsilon),$$

y haciendo $\lambda \rightarrow \infty$ se concluye $\sigma^*(\mu) = +\infty$.

Por último, analizando el caso $\mu(\cdot) \leq \frac{m(\cdot)}{\alpha(x)}$ ctp se observa que si $w(y) \geq 0$, en (3.1) el óptimo se alcanza cuando la función $w(\cdot)$ se anula. Lo mismo sucede cuando $w(y) \leq 0$, ya que anteriormente se concluyó que la expresión (3.1) es finita si $\mu \geq 0$ ctp. En resumen se tiene que

$$\sigma^*(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \in \mathcal{M} \text{ y } \mu(\cdot) \leq \frac{m(\cdot)}{\alpha(x)} \text{ ctp,} \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto soporte para cada $x \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathcal{M}$ es

$$\mathcal{A}(x, m) = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : 0 \leq \mu(\cdot) \leq \frac{m(\cdot)}{\alpha(x)} \text{ ctp} \right\}.$$

□

Por último, sólo queda demostrar la igualdad dada en la Definición 2.8 para el caso del AVaR. Se considerará un proceso de Markov controlado $\{x_t\}_{t=1}^{T+1}$ cuyos kernels controlados Q_t poseen densidad $q_t \in \mathcal{M}$. Además, se debe recordar que se toma como espacio $\mathcal{Z}_t = L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}^\Pi)$, donde $\Omega = \mathcal{X}^{T+1}$, \mathcal{F}_t es la σ -álgebra producto hasta t y \mathbb{P}^Π es el resultado del Teorema de Ionescu-Tulcea junto con los kernels controlados que modelan el proceso en cuestión.

Lema 3.2. *La medida de riesgo condicional AVaR es Markoviana para el proceso de Markov controlado descrito anteriormente, y tiene asociada como funcional de riesgo de transición la ecuación (2.17).*

Demostración. De la Definición 2.8 sólo resta comprobar la igualdad para el caso del AVaR condicional y su respectivo funcional de riesgo de transición, es decir,

$$\rho_t[v(x_{t+1})] = \sigma_t(v, x_t, Q_t[x_t, u_t]),$$

donde $v \in \mathcal{V}$, $x_{t+1} \in \mathcal{X}$, Q_t tiene densidad en \mathcal{M} y $u_t \in U(x_t)$. Además se sabe que

$$\begin{aligned} \rho_t[v(x_{t+1})] &= \inf_{U \in \mathcal{Z}_t} \left\{ U + \frac{1}{\alpha(x_t)} \mathbb{E} [(v(x_{t+1}) - U)_+ | \mathcal{F}_t] \right\}, \\ \sigma_t(v, x_t, Q_t[x_t, u_t]) &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha(x_t)} \int_{\mathcal{X}} [v(y) - z]_+ q_t(y|x_t, u_t) \mathbb{P}_0(dy) \right\}, \end{aligned}$$

donde q_t es la densidad asociada al kernel controlado Q_t . Para simplificar la demostración se asumirá que la función $\alpha(x_t) \equiv \alpha$, el caso no constante es análogo. Además, mediante el Teorema de Ionescu Tulcea se obtiene fácilmente que para cualquier vector $(x_1, \dots, x_t) \in \mathcal{H}_t$ y $U \in \mathcal{Z}_t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} ([v(x_{t+1}) - U(x_1, \dots, x_t)]_+ | \mathcal{F}_t) \\ = \int_{\mathcal{X}} [v(y) - U(x_1, \dots, x_t)]_+ q_t(y|x_t, u_t(x_t)) \mathbb{P}_0(dy). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Con esta igualdad se observa sin problemas que se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} U(x_1, \dots, x_t) + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} [(v(x_{t+1}) - U(x_1, \dots, x_t))_+ | \mathcal{F}_t] \\ \geq \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v(y) - z]_+ q_t(y|x_t, u_t) \mathbb{P}_0(dy) \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, para demostrar la desigualdad restante sólo basta notar que para cualquier constante en $z \in \mathcal{Z}_t$ se tiene

$$\begin{aligned} \inf_{U \in \mathcal{Z}_t} \left\{ U + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} [(v(x_{t+1}) - U)_+ | \mathcal{F}_t] \right\} \\ \leq z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v(y) - z]_+ q_t(y|x_t, u_t) \mathbb{P}_0(dy), \end{aligned}$$

en donde además se utilizó la ecuación (3.2). Con lo cual se ha demostrado la igualdad $\rho_t[v(x_{t+1})] = \sigma_t(v, x_t, Q_t[x_t, u_t])$ para el caso del AVaR condicional, demostrándose así que es una medida de riesgo Markoviana. \square

Con estos resultados será posible el desarrollo de la siguiente sección en la cual se hace uso de la medida de riesgo AVaR condicional para modelar el problema de ruteo, ya que satisface la propiedad de consistencia temporal y es coherente.

3.3. AVaR condicional aplicado al problema de ruteo

En el marco de transporte, los problemas de ruteo son usualmente procesos Markovianos en donde en cada estado o etapa se debe tomar una decisión la cual debe optimizar cierta función objetivo. Es por esto que los procesos de Markov controlados, descritos y

motivados durante la Sección 2.3, calzan perfectamente para modelar situaciones en las que se busca encontrar la mejor ruta. Para esto, es esencial utilizar el algoritmo entregado por el Teorema 2.9, lo cual es el objetivo durante esta sección. Además, para ello se hará uso de una medida de riesgo condicional coherente llamada Average Value-at-Risk, la cual soluciona otra problemática importante: la inconsistencia temporal de políticas óptimas. Es por ello que los resultados obtenidos en la sección anterior permiten el uso de este funcional. Al término de esta sección, se entrega un resultado importante, bajo condiciones de independencia, asociado a la característica que debe satisfacer en el ámbito de ruteo una medida de riesgo Markoviana que es consistente temporal: *aditividad*.

3.3.1. Modelo y algunos ejemplos

Con el fin de encontrar una política óptima consistente temporal para el problema de horizonte finito (2.13) en el caso de transporte, es necesario modelar el marco en donde se trabajará y definir las herramientas asociadas a los procesos de Markov controlados.

Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido en donde $s, d \in N$ denotan al nodo inicial y terminal, respectivamente. Además, se supondrá que cada arco $a \in A$ tiene asociado un tiempo de viaje aleatorio τ_a continuo el cual satisface las siguientes propiedades:

- Para todo $a \in A$ se cumple que $\tau_a \geq 0$ c.s.
- Existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier $a \in A$ se tiene $\tau_a \leq M$ c.s.
- Los tiempos de viaje τ_a son variables aleatorias independientes entre si.

La segunda condición es bastante intuitiva, ya que en la realidad un usuario nunca se verá enfrentado a un viaje cuyo tiempo sea infinito, es por ello que asumir que existe una cota común es razonable. La tercera condición es el pilar fundamental del estudio tratado en este capítulo, se asumirá que no existen correlaciones lo cual en ciertos temas de telecomunicaciones es razonable. Por otra parte, se denotará por T^∞ a la cantidad de vértices asociada al camino simple más largo entre los vértices de inicio y destino. Por lo tanto, dentro de este marco se desea encontrar la ruta óptima entre s y d considerando además la aversión al riesgo, es decir, minimizando el riesgo de dicha política. Para esto, se ajustará un modelo de proceso de Markov controlado con el fin de resolver el problema (2.13).

Se considera como espacio de estados a

$$\mathcal{X} = N \times [0, M] \cup \{\omega^*\},$$

donde ω^* denota un estado terminal absorbente cuyo objetivo es captar el primer momento en que se llega al destino d . Un estado cualquiera $x \in \mathcal{X}$ –distinto de ω^* – se escribe como un par ordenado $x = (i, \tau_{ki})$, donde $i \in N$ es un nodo y $\tau_{ki} \in [0, M]$ es el tiempo que se demoró en llegar el usuario desde el vértice k al nodo i . El estado inicial del proceso será $x_1 = (s, 0)$.

Por otra parte, el espacio de controles estará dado por

$$\mathcal{U} = A \cup \{\emptyset\},$$

donde el control \emptyset estará asociado al estado extra ω^* y se interpreta como no hacer nada. Más específicamente, para cada estado de la forma $x = (i, \tau_{ki})$ con $i \neq d$ se tiene el

conjunto de controles $U(x) = \delta^+(i)$, es decir, es el conjunto de todas las aristas que salen desde i . Mientras que para los estados $x = \omega^*$ y $x = (d, \tau_{kd})$ se tiene $U(x) = \emptyset$. Las transiciones entre los distintos estados vienen dadas por:

- El usuario se encuentra en el nodo $i \neq d$, al cual llegó con un tiempo τ_{ki} desde un vértice k , y decide escoger la arista (i, j) para alcanzar el nodo j , la cual posee un tiempo de viaje aleatorio τ_{ij} . Esto corresponde a la transición entre los estados (i, τ_{ki}) y (j, τ_{ij}) mediante el control (i, j) .

$$(i, \tau_{ki}) \xrightarrow{(i,j)} (j, \tau_{ij}).$$

- El usuario se encuentra en el nodo destino d , al cual llegó con un tiempo de viaje τ_{kd} , por lo que no sigue buscando la mejor ruta y pasa al estado absorbente ω^* a través del control \emptyset .

$$(d, \tau_{kd}) \xrightarrow{\emptyset} \omega^*.$$

- El usuario llegó al destino d antes de que el proceso de T etapas finalice, y luego de pasar al estado absorbente ω^* debe seguir en él, mediante el control \emptyset , hasta que no hayan más iteraciones.

$$\omega^* \xrightarrow{\emptyset} \omega^*.$$

Cabe notar que los espacios \mathcal{X} y \mathcal{U} son claramente espacios Polish, los cuales tienen asociado su respectiva σ -álgebra boreliana, por ejemplo, se denotará por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ a los borelianos del espacio de estados. Por último, se debe considerar una medida de probabilidad fija \mathbb{P}_0 , la cual estará dada por la medida uniforme, en otras palabras, para cada conjunto $B \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\mathbb{P}_0(B) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\omega^* \in B\}} + \frac{1}{2M|N|} \sum_{j \in N} \lambda(B_j) \mathbf{1}_{\{\omega^* \notin B\}},$$

donde $|N|$ denota la cantidad de nodos, $B_j = B \cap (\{j\} \times [0, M])$ la fibra del conjunto B , $\mathbf{1}$ es la función indicatriz y $\lambda(\cdot)$ es la medida de Lebesgue en $[0, M]$.

Con estas herramientas es posible construir el marco dado durante la Sección 2.3. Para ello se denotará $\mathcal{V} = L^1(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ e $\mathcal{Y} = L^\infty(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_0)$ a los espacios que conforman el par dual topológico, es decir, se les dotará de la topología fuerte y débil-*, respectivamente. El resto de la notación se hereda de la sección en la cual se trató este marco teórico, por ejemplo, se asocia a $\mathcal{M} \subset \mathcal{Y}$ al conjunto de densidades cuyas medidas de probabilidad son absolutamente continuas con respecto a \mathbb{P}_0 , y además $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto de dualidad entre los espacios \mathcal{V} e \mathcal{Y} .

Continuando con el modelamiento, queda mencionar los kernels controlados, los cuales deberán ser absolutamente continuos con respecto a \mathbb{P}_0 , y además pertenecer al conjunto \mathcal{M} . Por lo tanto, bajo el supuesto de independencia entre los tiempos de viaje, se considerarán para todo conjunto $B \in \mathcal{B}$ los siguientes kernels controlados dependiendo de cada estado:

- Si el estado es de la forma $x = (i, \tau_{ki})$ con $i \neq d$ y $u(x) = (i, j)$, entonces el kernel estará dado por

$$Q(B|x, u(x)) = \mathbb{P}(\tau_{ij} \in B_j),$$

donde \mathbb{P} se obtiene a partir de la función de distribución de τ_{ij} . Se observa que bajo la hipótesis de independencia el kernel anterior no depende del tiempo τ_{ki} .

- Si el estado es $x = (d, \tau_{kd})$ con $u(x) = \emptyset$, o bien $x = \omega^*$ con $u(x) = \emptyset$, entonces el kernel será

$$Q(B|x, u(x)) = \delta_{\omega^*}(B),$$

donde δ denota la delta de Dirac.

En efecto, cada una de las medidas antes mencionadas son absolutamente continuas con respecto a \mathbb{P}_0 , para ello sólo basta tomar un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbb{P}_0(B) = 0$, entonces se satisface inmediatamente que $\omega^* \notin B$, y además $\lambda(B_j) = 0$ para todo vértice $j \in N$, por lo que para cualquier estado $x \in \mathcal{X}$ y control $u(x) \in U(x)$ se tiene $Q(B|x, u(x)) = 0$. Sumado a lo anterior, las densidades respectivas para cada kernel controlado son las siguientes

- Si el estado es de la forma $x = (i, \tau_{ki})$ con $i \neq d$ y $u(x) = (i, j)$, entonces la densidad estará dada por

$$q(y|x, u(x)) = \begin{cases} \bar{f}_{ij}(\tau_{ij}) & \text{si } y = (j, \tau_{ij}) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

donde

$$\bar{f}_{ij}(\tau_{ij}) = 2|N|M f_{ij}(\tau_{ij}),$$

y f_{ij} denota la función de densidad de la variable aleatoria τ_{ij} . Se sabe que f_{ij} es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} , pero para dejar más en claro que corresponde a la variable τ_{ij} , se escribirá en los cálculos posteriores como $f_{ij}(\tau_{ij})$.

- Si el estado es $x = (d, \tau_{kd})$ con $u(x) = \emptyset$, o bien $x = \omega^*$ con $u(x) = \emptyset$, entonces la densidad será

$$q(y|x, u(x)) = \begin{cases} 2 & \text{si } y = \omega^* \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

Para evitar el abuso de notación, de aquí en adelante se asumirá que $T = T^\infty$ y que $\bar{M} = MT$. Por lo tanto, en el problema de ruteo se busca obtener secuencia de estados $\{x_t\}_{t=1}^T \subset \mathcal{X}$ y una secuencia de políticas óptimas $\{\pi_t\}_{t=1}^T \subset \mathcal{U}$, las cuales pueden ser caminos simples o aquellas rutas que contengan ciclos. Se puede observar que este proceso constará de T períodos, en cada uno de los cuales habrá un conjunto de controles U_t , y además un kernel controlado Q_t , ambos descritos anteriormente. Finalmente, para terminar con este modelo del proceso de Markov controlado se requiere especificar las funciones de costos asociadas al problema, las cuales jugarán un rol importante al momento de resolver el problema (2.13). Para cada $t = 1, \dots, T$ los funcionales de costos son

$$c_t(x_t) = \begin{cases} \tau_{ki} & \text{si } x_t = (i, \tau_{ki}) \text{ con } i \in N \\ 0 & \text{si } x_t = \omega^* \end{cases}.$$

Además, se considerará un costo terminal cuyo objetivo es penalizar aquellas rutas no óptimas que habitualmente contienen ciclos,

$$c_{T+1}(x_{T+1}) = \begin{cases} \bar{M} & \text{si } x_{T+1} = (i, \tau_{ki}) \text{ con } i \in N \\ 0 & \text{si } x_{T+1} = \omega^* \end{cases}.$$

En efecto, si el estado siguiente al final no es ω^* significa que x_T fue distinto de d , lo cual implica que la ruta no alcanzó el destino, en otras palabras, el proceso quedó estancado en

un ciclo. Cabe notar que estos costos recién descritos no dependen del control que se tome en cada etapa, lo cual simplificará los cálculos al momento de hacer uso del algoritmo entregado por el Teorema 2.9.

Es directo verificar que las hipótesis del Teorema 2.9 son efectivamente satisfechas en el modelo anterior. Primero, los funcionales de costos claramente son elementos de \mathcal{V} , ya que los tiempos de viajes son uniformemente acotados de manera casi segura. Segundo, para cada etapa $t = 1, \dots, T$ y para cualquier estado $x \in \mathcal{X}$, los conjuntos de control $U_t(x)$ son finitos, ya que sólo se componen de los arcos que conectan a los nodos, por ejemplo, $U_t(x) = \delta^+(i)$ o bien $U_t(\omega^*) = \{\emptyset\}$. Por último, la medibilidad de las multiaplicaciones se tiene directamente gracias a que sólo dependen del conjunto discreto de nodos N . Sumado a todos esos supuestos, se hará uso de la medida de riesgo AVaR condicional como parte de la función objetivo, la cual se demostró en la sección anterior que corresponde justamente a una medida de riesgo Markoviana. Por lo tanto, las hipótesis necesarias para el teorema son satisfechas, con lo cual se obtiene un algoritmo de programación dinámica para resolver el problema de ruteo (2.13) cuya solución óptima satisface la propiedad de consistencia temporal.

En lo que sigue se tratarán un par de ejemplos del funcionamiento del algoritmo, mediante los cuales se analizará un factor de sumo interés: la *independencia* entre tiempos de viaje. Esto último dará la intuición para el posterior desarrollo de un resultado general. Los ejemplos utilizan el funcional de riesgo de transición dado por la ecuación (2.17), en el cual se considera un nivel constante en $(0, 1)$, es decir, se tomará $\alpha(x) = \alpha$ para todo $x \in \mathcal{X}$. Por último, cada vez que se denote un funcional como AVaR se entenderá el entregado por la ecuación (2.5).

Ejemplo N°1

El primer ejemplo de un problema de ruteo está dado por el siguiente grafo:

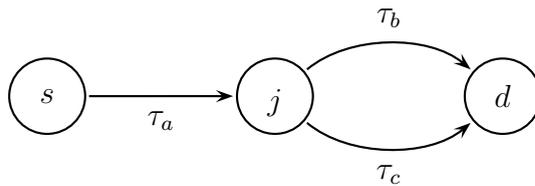


Figura 3.2: Ejemplo N°1 del algoritmo de programación dinámica.

Donde τ_a, τ_b, τ_c son tiempos de viaje aleatorios no-negativos y acotados uniformemente como fue supuesto al principio de esta sección. Los subíndices a, b, c indican los arcos correspondientes a cada variable. Por otra parte, se asumirá que los tiempos son independientes a pares. Claramente, el camino simple más largo posee tres nodos, por lo tanto el proceso constará de $T = 3$ etapas. Además, se debe recordar que la medida de probabilidad fija está dada por

$$\mathbb{P}_0(A) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{\omega^* \in A\}} + \frac{1}{2M|N|} \sum_{j \in N} \lambda(A_j) \mathbf{1}_{\{\omega^* \notin A\}},$$

la cual es usada en los cálculos. En lo que sigue se procederá a aplicar el algoritmo entregado por el Teorema 2.9.

Primero, se debe definir el funcional que representará el costo en la etapa $T + 1 = 4$ y luego se irá resolviendo la iteración de programación dinámica, en este caso, hacia la etapa $t = 1$. Entonces, se tiene

$$v_4(x) = c_4(x) = \begin{cases} \overline{M} & \text{si } x = (i, \tau) \\ 0 & \text{si } x = \omega^* \end{cases},$$

donde τ indica algún tiempo en el que se alcanzó el nodo i . El desarrollo del algoritmo es el siguiente

Para $t = 3$ se calculará $v_3(\cdot)$.

- Para el estado $x = \omega^*$ se puede observar que

$$v_3(\omega^*) = \min_{u \in U_3(\omega^*)} \{c_3(\omega^*) + \sigma_3(v_4, \omega^*, Q_3[\omega^*, u])\},$$

pero $U_3(\omega^*) = \{\emptyset\}$ y $c_3(\omega^*) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} v_3(\omega^*) &= \sigma_3(v_4, \omega^*, Q_3[\omega^*, \emptyset]) \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ q_3(y|\omega^*, \emptyset) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ 2\mathbf{1}_{\{y=\omega^*\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} [v_4(\omega^*) - z]_+ \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} [-z]_+ \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{z_-}{\alpha} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Sea $x = (d, \tau)$, de modo que

$$v_3(x) = \min_{u \in U_3(x)} \{c_3(x) + \sigma_3(v_4, x, Q_3[x, u])\},$$

En este caso $U_3(x) = \{\emptyset\}$ y $c_3(x) = \tau$, y similarmente al cálculo anterior se satisface que

$$\begin{aligned} v_3(x) &= \tau + \sigma_3(v_4, x, Q_3[x, \emptyset]) \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ q_3(y|x, \emptyset) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ 2\mathbf{1}_{\{y=\omega^*\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} [v_4(\omega^*) - z]_+ \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} [-z]_+ \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{z_-}{\alpha} \right\} \\ &= \tau \end{aligned}$$

- Para el caso $x = (j, \tau)$ se observa que

$$v_3(x) = \min_{u \in U_3(x)} \{c_3(x) + \sigma_3(v_4, x, Q_3[x, u])\},$$

pero además se debe considerar que $U_3(x) = \{b, c\}$ y $c_3(x) = \tau$, por lo tanto

$$\begin{aligned} v_3(x) &= \tau + \min_{u=b,c} \{\sigma_3(v_4, x, Q_3[x, u])\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ q_3(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [v_4(y) - z]_+ \bar{f}_u \mathbf{1}_{\{y=(j, \tau_u)\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [v_4(j, \tau_u) - z]_+ f_u(\tau_u) \lambda(d\tau_u) \right\} \right\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [\bar{M} - z]_+ f_u(\tau_u) \lambda(d\tau_u) \right\} \right\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{[\bar{M} - z]_+}{\alpha} \right\} \right\} \\ &= \tau + \min_{u=b,c} \{\bar{M}\} = \tau + \bar{M}. \end{aligned}$$

- Por último, se tiene el caso $x = (s, \tau)$ en donde

$$v_3(x) = \min_{u \in U_3(x)} \{c_3(x) + \sigma_3(v_4, x, Q_3(x, u))\},$$

pero $U_3(x) = \{a\}$ y $c_3(x) = \tau$, entonces haciendo un cálculo análogo al punto anterior se obtiene que

$$v_3(x) = \tau + \min_{u \in U_3(x)} \{\sigma_3(v_4, x, Q_3[x, u])\} = \tau + \sigma_3(v_4, x, Q_3[x, a]) = \tau + \bar{M}.$$

Para $t = 2$ se calculará $v_2(\cdot)$.

- Para $x = \omega^*$ el cálculo es análogo a la etapa $t = 3$, con lo cual se obtiene $v_2(\omega^*) = 0$.
- Para $x = (d, \tau)$ el cálculo es análogo a la etapa anterior, con lo cual se obtiene $v_2(x) = \tau$.
- Para el estado $x = (j, \tau)$ se cumple que

$$v_2(x) = \min_{u \in U_2(x)} \{c_2(x) + \sigma_2(v_3, x, Q_2[x, u])\},$$

pero $U_2(x) = \{b, c\}$ y $c_2(x) = \tau$, entonces considerando $v_3(d, \tau') = \tau'$ se obtiene

$$\begin{aligned}
v_2(x) &= \tau + \min_{u=b,c} \{ \sigma_2(v_3, x, Q_2[x, u]) \} \\
&= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_3(y) - z]_+ q_2(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_3(y) - z]_+ \bar{f}_u \mathbf{1}_{\{y=(j, \tau_u)\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [v_3(j, \tau_u) - z]_+ f_u(\tau_u) \lambda(d\tau_u) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u=b,c} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [\tau_u - z]_+ f_u(\tau_u) \lambda(d\tau_u) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u=b,c} \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_u) \} \\
&= \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \},
\end{aligned}$$

donde el funcional AVaR corresponde al entregado por la ecuación (2.5).

- Para el caso $x = (s, \tau)$ se satisface que

$$v_2(x) = \min_{u \in U_2(x)} \{ c_2(x) + \sigma_2(v_3, x, Q_2[x, u]) \},$$

pero $U_2(x) = \{a\}$ y $c_2(x) = \tau$, con lo cual

$$\begin{aligned}
v_2(x) &= \tau + \sigma_2(v_3, x, Q_2[x, a]) \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_3(y) - z]_+ q_2(y|x, a) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_3(y) - z]_+ \bar{f}_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{y=(j, \tau_a)\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [v_3(j, \tau_a) - z]_+ f_a(\tau_a) \lambda(d\tau_a) \right\} \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [\tau_a + \bar{M} - z]_+ f_a(\tau_a) \lambda(d\tau_a) \right\} \\
&= \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \bar{M}.
\end{aligned}$$

Para $t = 1$ se calculará $v_1(\cdot)$.

- Para $x = \omega^*$ el cálculo es el mismo que antes, lo que dá $v_1(\omega^*) = 0$.
- Para $x = (d, \tau)$ el cálculo es análogo a la etapa $t = 3$, obteniéndose $v_1(x) = \tau$.
- Para $x = (j, \tau)$ se obtiene el mismo resultado que el punto anterior

$$v_1(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \}.$$

- Por último para $x = (s, \tau)$ se tiene

$$v_1(x) = \min_{u \in U_1(x)} \{ c_1(x) + \sigma_1(v_2, x, Q_1[x, u]) \},$$

pero $U_2(x) = \{a\}$ y $c_1(x) = \tau$, entonces

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= \tau + \sigma_1(v_2, x, Q_1[x, a]) \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_2(y) - z]_+ q_1(y|x, a) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_x [v_2(y) - z]_+ \bar{f}_{\tau_a} \mathbf{1}_{\{y=(j, \tau_a)\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\
&= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [v_2(j, \tau_a) - z]_+ f_a(\tau_a) \lambda(d\tau_a) \right\} \\
&= \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{mín} \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene gracias a que $\text{mín} \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \}$ se comporta como una constante para la variable τ_a .

Finalmente, el valor óptimo está dado por la evaluación del estado $(s, 0)$ en la función $v_1(\cdot)$, es decir,

$$v_1(s, 0) = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{mín} \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \}.$$

De este último resultado se puede observar que es equivalente a calcular el camino mínimo en un grafo dirigido cuyos costos en cada arco son

$$d_a = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a), \quad d_b = \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) \quad \text{y} \quad d_c = \text{AVaR}_\alpha(\tau_c).$$

Por último, cabe destacar que no habrían cambios en el resultado anterior si se considerase como nivel α una función medible que dependa exclusivamente del nodo en el que se encuentra el usuario, es decir, $\alpha(x_t) = \alpha(i)$. Por el contrario, si se escoge una función medible más general, la cual dependa de todas las componentes del estado x_t , el supuesto de independencia no tendría utilidad, ya que se estaría en presencia de alguna estructura de correlación. Aún así, el resultado más rescatable es el comportamiento del algoritmo, el cual es muy similar a los del tipo Dijkstra.

Ejemplo N°2

Finalmente, se analizará el siguiente ejemplo:

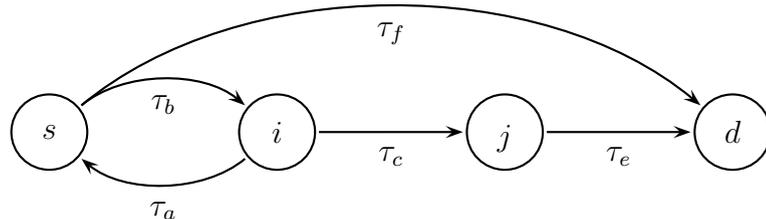


Figura 3.3: Ejemplo N°2 del algoritmo de programación dinámica.

Donde $\tau_a, \tau_b, \tau_c, \tau_e, \tau_f$ son variables aleatorias no-negativas y acotadas uniformemente por $M > 0$, las cuales representan los tiempos de viaje en cada arco a, b, c, e, f , respectivamente. Nuevamente se asumirá que existe independencia a pares entre las variables.

Este grafo posee la particularidad que el camino simple más largo tiene tres arcos al igual que uno conteniendo a un ciclo. Por consiguiente, la cantidad de períodos será $T = 4$.

De manera análoga al ejemplo anterior se tiene $v_5(x) = c_5(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Asimismo, se observa que para $x = \omega^*$ y $t \in \{1, \dots, 5\}$ se satisface que $v_t(\omega^*) = 0$, mientras que para $x = (d, \tau)$ y cualquier etapa $t \in \{1, \dots, 5\}$ se tiene $v_t(x) = \tau$. En lo que sigue se entregarán de manera resumida los resultados del algoritmo para cada período.

- Para $t = 4$ se calculará $v_4(\cdot)$.

Si el estado posee la forma $x = (i, \tau)$ con $i \neq d$, entonces se cumple que

$$v_4(x) = \tau + \overline{M}.$$

- Para $t = 3$ se calculará $v_3(\cdot)$.

Si $x = (j, \tau) \Rightarrow v_3(x) = \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e)$.

Si $x = (i, \tau) \Rightarrow v_3(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \overline{M}, \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \overline{M} \}$
 $= \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_a), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \} + \overline{M}.$

Si $x = (s, \tau) \Rightarrow v_3(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_f), \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) + \overline{M} \}$
 $= \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f).$

- Para $t = 2$ se calculará $v_2(\cdot)$.

Si $x = (j, \tau) \Rightarrow v_2(x) = \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e)$

Si $x = (i, \tau) \Rightarrow v_2(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e), \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \}$

Si $x = (s, \tau) \Rightarrow v_2(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_a), \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \} + \overline{M}, \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \}$
 $= \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f)$

- Para $t = 1$ se calculará $v_1(\cdot)$.

Si $x = (j, \tau)$

$\Rightarrow v_1(x) = \tau + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e)$.

Si $x = (i, \tau)$

$\Rightarrow v_1(x) = \tau + \min \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e), \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \}.$

Si $x = (s, \tau)$

$\Rightarrow v_1(x) = \tau + \min \left\{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) + \min \left\{ \begin{array}{l} \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e) \\ \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \end{array} \right\}, \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \right\}.$

Finalmente, el valor óptimo está dado por la evaluación del estado $(s, 0)$ en la función $v_1(\cdot)$, es decir,

$$v_1(s, 0) = \min \left\{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) + \min \left\{ \begin{array}{l} \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e) \\ \text{AVaR}_\alpha(\tau_a) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \end{array} \right\}, \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \right\}.$$

Gracias a la no-negatividad de las variables aleatorias, el camino compuesto por las aristas b - a - f no será mejor que la ruta únicamente conformada por el arco f , por lo tanto la expresión para el óptimo se reduce a

$$v_1(s, 0) = \text{mín} \{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_b) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) + \text{AVaR}_\alpha(\tau_e), \text{AVaR}_\alpha(\tau_f) \}.$$

Nuevamente se puede observar que este resultado corresponde a calcular el camino simple de costo mínimo cuyos valores en cada arco son

$$\begin{aligned} d_a &= \text{AVaR}_\alpha(\tau_a), \quad d_b = \text{AVaR}_\alpha(\tau_b), \quad d_c = \text{AVaR}_\alpha(\tau_c) \\ d_e &= \text{AVaR}_\alpha(\tau_e), \quad d_f = \text{AVaR}_\alpha(\tau_f). \end{aligned}$$

Con este resultado, es intuitivo que aquellos caminos con ciclos no serán parte del óptimo gracias a la no-negatividad de las variables, o bien debido a la penalización dada por la constante $\bar{M} > 0$, incluso si dichas rutas con ciclos coinciden en la cantidad de aristas con algún camino simple. Por último, al igual que el ejemplo anterior, no habrían cambios en el resultado si se considerase como nivel α una función medible que dependa exclusivamente del nodo en el que se encuentra el usuario, es decir, $\alpha(x_t) = \alpha(i)$; por el contrario, si se considera una función medible más general se obtiene una estructura de correlación, por lo que el supuesto de independencia no sería suficiente.

A partir de estos dos ejemplos quizás sea posible obtener un resultado más general con respecto a la búsqueda de la solución óptima. Esto será tratado en la siguiente sección, en donde bajo ciertos supuestos ya conocidos, se logra demostrar que la ruta óptima se obtiene mediante el uso de las ecuaciones de Bellman, o en otras palabras, utilizando un algoritmo de tipo Dijkstra.

3.3.2. Ecuaciones de Bellman

Los ejemplos de la sección anterior sugieren que la solución al problema de ruteo determinado por la ecuación (2.13) está dada por el cálculo de un camino mínimo donde el costo de cada arco $a \in A$ es $d_a = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a)$, siempre y cuando los tiempos τ_a sean variables aleatorias independientes, y el nivel definido por el mapeo medible $\alpha(x)$ sea constante, o bien, $\alpha(x) = \alpha(i)$ donde el estado tiene la forma $x = (i, \tau)$. Lo anterior queda establecido concretamente en el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *Si en el marco del problema de ruteo dado en la Sección 3.3.1 se consideran tiempos de viaje en cada arco τ_a como variables aleatorias continuas independientes a pares, entonces la solución al problema (2.13) se obtiene mediante el uso de un algoritmo de camino mínimo donde los costos para cada arco $a \in A$ es $d_a = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a)$, en los cuales α es constante, o bien, una función medible que sólo depende del nodo en el que se encuentra el usuario.*

Demostración. Para demostrar el resultado se considerará la siguiente recurrencia

$$\phi_i^0 = \begin{cases} \bar{M} & \text{si } i \neq d \\ 0 & \text{si } i = d \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_i^{T-t} = \text{mín}_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_u) + \phi_{j_u}^{T-t-1} \right\},$$

y además para cada $x \in \mathcal{X}$ se definirá las siguientes funciones para cada $t \in \{1, \dots, T\}$

$$V_{T+1}(x) = \begin{cases} \bar{M} & \text{si } x = (i, \tau) \\ 0 & \text{si } x = \omega^* \end{cases} \quad \text{y} \quad V_t(x) = \begin{cases} \tau + \phi_i^{T-t} & \text{si } x = (i, \tau) \text{ con } i \neq d \\ \tau & \text{si } x = (d, \tau) \\ 0 & \text{si } x = \omega^* \end{cases}, \quad (3.3)$$

donde j_u denota el nodo terminal del arco u . Se puede observar claramente que la recurrencia satisfecha por ϕ corresponde a las ecuaciones de Bellman. En adelante se asumirá que α es constante, ya que el otro caso es análogo. Por lo tanto, sólo bastaría demostrar que las funciones $V_{T+1}(\cdot)$ y $V_t(\cdot)$ cumplen respectivamente las ecuaciones (2.19) y (2.20) del Teorema 2.9, con lo cual se obtendría que $V_t = v_t$ para todo t .

En efecto, de manera directa se puede notar que la ecuación (2.19) es satisfecha, ya que para todo $x \in \mathcal{X}$ se tiene

$$V_{T+1}(x) = c_{T+1}(x).$$

Por otra parte, se hará uso del método de inducción para probar que se satisface la ecuación (2.20). Por lo tanto, para $t = T$ se tiene lo siguiente

- Si el estado es de la forma $x = \omega^*$, entonces

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\} \\ &= c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, \emptyset]) \\ &= 0 + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{T+1}(y) - z]_+ q_T(y|x, \emptyset) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{T+1}(y) - z]_+ 2\mathbf{1}_{\{y=\omega^*\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{[-z]_+}{\alpha} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (3.3) se obtiene que

$$V_T(x) = 0 = \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\}.$$

- Si el estado es $x = (d, \tau)$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\} \\ &= c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, \emptyset]) \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{T+1}(y) - z]_+ q_T(y|x, \emptyset) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{T+1}(y) - z]_+ 2\mathbf{1}_{\{y=\omega^*\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \\ &= \tau + \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{[-z]_+}{\alpha} \right\} \\ &= \tau. \end{aligned}$$

Nuevamente usando (3.3) se obtiene que

$$V_T(x) = \tau = \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\}.$$

- Por último, para $x = (i, \tau)$ con $i \neq d$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{T+1}(y) - z]_+ q_T(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [\bar{M} - z]_+ q_T(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{[\bar{M} - z]_+}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} q_T(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{[\bar{M} - z]_+}{\alpha} \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \{ \bar{M} \} \\
&= \tau + \bar{M}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando (3.3) se sabe que $V_T(i, \tau) = \tau + \phi_i^0 = \tau + \bar{M}$ con lo cual se prueba que

$$V_T(x) = \min_{u \in U_T(x)} \left\{ c_T(x) + \sigma_T(V_{T+1}, x, Q_T[x, u]) \right\}.$$

En resumen, la función $V_T(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$ coincide con

$$V_T(x) = \begin{cases} \tau + \phi_i^0 & \text{si } x = (i, \tau) \\ 0 & \text{si } x = \omega^* \end{cases} = \begin{cases} \tau & \text{si } x = (i, \tau) \text{ con } i = d \\ \tau + \bar{M} & \text{si } x = (i, \tau) \text{ con } i \neq d \\ 0 & \text{si } x = \omega^* \end{cases}$$

En lo que sigue se analizará el paso inductivo:

- De manera análoga al caso base se muestra para todo $t \in \{1, \dots, T-1\}$ que se cumple $V_t(x) = 0$ cuando $x = \omega^*$ y $V_t(x) = \tau$ cuando $x = (d, \tau)$.
- Si el estado toma la forma $x = (i, \tau)$ para cualquier $i \neq d$, entonces para todo $t \in \{1, \dots, T-1\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
& \min_{u \in U_t(x)} \left\{ c_t(x) + \sigma_t(V_{t+1}, x, Q_t[x, u]) \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \sigma_t(V_{t+1}, x, Q_t[x, u]) \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{t+1}(y) - z]_+ q_t(y|x, u) \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{X}} [V_{t+1}(y) - z]_+ \bar{f}_u \mathbf{1}_{\{y=(j_u, \tau_u)\}} \mathbb{P}_0(dy) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \inf_{z \in \mathbb{R}} \left\{ z + \frac{1}{\alpha} \int_0^M [\tau_u + \phi_{j_u}^{T-t-1} - z]_+ f_u(\tau_u) \lambda(d\tau_u) \right\} \right\} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_u + \phi_{j_u}^{T-t-1}) \right\} \tag{3.4} \\
&= \tau + \min_{u \in \delta^+(i)} \left\{ \text{AVaR}_\alpha(\tau_u) + \phi_{j_u}^{T-t-1} \right\} \\
&= \tau + \phi_i^{T-t},
\end{aligned}$$

donde la igualdad después de (3.4) se tiene gracias a la invarianza bajo traslación del AVaR. Finalmente, dada la ecuación (3.3) se sabe que $V_t(i, \tau) = \tau + \phi_i^{T-t}$ con lo cual se prueba que

$$V_t(x) = \min_{u \in U_t(x)} \left\{ c_t(x) + \sigma_t(V_{t+1}, x, Q_t[x, u]) \right\}.$$

Con esto se termina por demostrar que la solución dada por el Teorema 2.9 en las ecuaciones (2.19) y (2.20) coincide con las de tipo Bellman. \square

Observación 3.4. Si se desea calcular la ruta de mínimo riesgo en un grafo donde los tiempos son variables aleatorias continuas independientes a pares, y además cuyas soluciones óptimas –Markovianas– satisfagan la propiedad de consistencia temporal, entonces basta aplicar un algoritmo polinomial de tipo Dijkstra donde el costo en cada arco $a \in A$ es $\text{AVaR}_\alpha(\tau_a)$.

Observación 3.5. El resultado es suficientemente general, ya que se puede adaptar a cualquier medida de riesgo condicional que sea Markoviana. Sin embargo, cuando la función α es de la forma $\alpha(i, \tau)$, se tiene que la expresión $\phi_{j_u}^{T-t-1}$ en (3.4) es una variable aleatoria, y por lo tanto la igualdad posterior no se tendría al no ser éste un término constante. En este caso existe una dependencia entre las etapas t y $t + 1$, lo cual es una estructura de correlación que queda para un trabajo futuro.

3.4. Contraejemplo y comentarios

En esta capítulo se trató la aversión al riesgo en el contexto de ruteo mediante el enfoque de los procesos de Markov controlados, los cuales modelan las decisiones de los usuarios a través de un conjunto de controles en cada etapa. Este método permitió ver desde una perspectiva distinta el problema de transporte, ya que usualmente no es del todo claro el concepto de etapa en este ámbito al no ser un problemática “lineal”, en otras

palabras, no posee una estructura secuencial de períodos a lo largo del tiempo debido a que en cada vértice surgen más opciones generándose así un “árbol de decisiones”. No obstante, con la motivación de ver el proceso de forma dinámica, se logró forzar la definición de etapa para el problema de ruteo obteniéndose de esta manera un resultado que contribuye a la literatura existente sobre medidas de riesgo, el cual básicamente muestra que bajo ciertos supuestos de independencia y de no-negatividad de los tiempos de viaje, el problema del camino de mínimo riesgo se puede calcular fácilmente a través de un algoritmo de tipo Dijkstra, es decir, es equivalente a resolver el siguiente problema

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \sum_{u \in P} \text{AVaR}_\alpha(\tau_u), \quad (3.5)$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de todos los caminos posibles desde s a d en el grafo, α es constante –o también puede depender del nodo–, y AVaR es la medida de riesgo definida en el Capítulo 2. Un resultado equivalente es posible obtener cuando las variables son *comonótonas* entre sí –ver Definición 2.14–, ya que ello asegura que medidas de riesgo que se basan en percentiles sean aditivas –ver Lema 4.84 en [20]–, aun así la comonotonía no es una hipótesis evidente en el caso de tiempos de viaje, dado que dichas variables podrían crecer o decrecer de manera distinta en un mismo espacio de probabilidad.

Sin embargo, aunque la hipótesis de no-negatividad parece ser un supuesto intuitivo es a la vez demasiado fuerte, debido a que si no es considerado surgen inmediatamente contraejemplos para el resultado obtenido durante este capítulo. En efecto, basta considerar el siguiente ejemplo

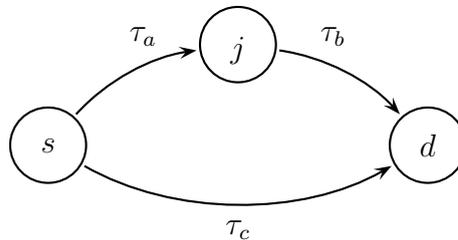


Figura 3.4: Contraejemplo para las medidas de riesgo condicionales.

Donde se considerará las variables aleatorias $\tau_a \sim N(10, 1)$, $\tau_b \sim N(10, 1)$ y $\tau_c \sim N(20, 3)$. Como ya se comentó, para variables aleatorias normales el funcional AVaR coincide con el modelo mean-risk que hace uso de la desviación estándar, en el cual el coeficiente de aversión γ_α dependerá del nivel. Se asumirá cierto nivel $\bar{\alpha}$ de tal forma que se tenga $\gamma_{\bar{\alpha}} = 1$.

Se observa que la solución entregada por el algoritmo tratado en este capítulo es el camino conformado por la arista c solamente, ya que

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_c) = 20 + \sqrt{3},$$

mientras que para la otra ruta dada por las aristas a y b el algoritmo entrega

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_a) + \text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_b) = 22.$$

Por otra parte, si el proceso es observado solamente desde el nodo inicial s y no como un proceso de programación dinámica se debe comparar $\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_c)$ con

$$\text{AVaR}_{\bar{\alpha}}(\tau_a + \tau_b) = 20 + \sqrt{2},$$

en cuyo caso las preferencias cambian, ya que ahora la ruta conformada por las aristas $a-b$ tiene menor riesgo que la otra.

Este simple ejemplo muestra que el uso de medidas de riesgo markovianas y procesos de Markov controlados es un tanto limitada en el contexto de transporte, ya que el resultado está dado para variables independientes y además no-negativas, que si bien son supuestos sumamente intuitivos al momento de pensar en ruteo, en ciertas ocasiones la no-negatividad dificulta el uso de variables aleatorias más “cómodas” o que usualmente encajan con los modelos más comunes, por ejemplo, las variables normales. Más aún, aunque el contraejemplo está dado para estas variables, no es claro si es posible construir otro en donde la variable tenga la estructura de una normal pero trasladada hacia el octante positivo, y además truncada de tal forma que la probabilidad de que sea negativa sea muy pequeña.

Todo lo anterior plantea dos cosas que están fuertemente relacionadas. Primero, el modelamiento a través de procesos dinámicos en donde los períodos tienen un desarrollo de forma secuencial y “lineal” no es completamente convincente para implementarlo en el área de transporte, ya que como se explicaba antes, dicha estructura no es clara en ellos. Y segundo, el concepto de consistencia temporal que se tienen en aquellos procesos puede no ser directamente aplicable al problema de ruteo, por el mismo motivo dado en el punto anterior: la estructura de un grafo no deja en claro el uso de etapas. Es por esto que quizás se debería tratar desde otro enfoque este tema, quizás definiendo cierta “consistencia espacial” la cual considere la topología del grafo en cuestión, y que además traduzca las mismas ideas de consistencia temporal, pero aplicadas de una forma distinta. Esto último seguramente es motivo para un trabajo posterior.

Sumado a los dos comentarios anteriores, también se observa que la función objetivo (2.13) no posee una interpretación directa en términos del riesgo del camino seleccionado, ya que el conjunto de políticas factibles podría considerar secuencias que no son necesariamente caminos. Por lo cual no queda claro lo que se está minimizando, a diferencia del caso determinista que busca claramente la ruta con menor costo. Aún así, en el siguiente capítulo se intenta dar un enfoque global al problema de ruteo mediante las teorías de elección, las cuales pretenden modelar las preferencias de los usuarios a través de axiomas sobre una relación de orden.

Capítulo 4

Medidas de riesgo derivadas de las teorías de elección

Motivados por los problemas que surgen en el capítulo anterior, y con la idea de plasmar en el contexto de transporte una propiedad intuitiva similar a la consistencia temporal, se utilizarán las herramientas entregadas por las teorías de elección. Además, se recurre a estas teorías con el fin de tratar el problema de ruteo con aversión al riesgo desde una perspectiva global y no dinámica, analizando las preferencias desde el nodo origen y resolviendo

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \rho \left(\sum_{a \in P} \tau_a \right),$$

donde ρ es una medida de riesgo con esta propiedad intuitiva que se analiza más adelante.

Durante este capítulo se presentan diversos resultados para cada una de las teorías señaladas en el Capítulo 2, junto con ello se analiza la paradoja de Allais en contexto de ruteo. Finalmente, se hace una crítica a este marco teórico identificando ciertas limitaciones.

4.1. Motivación: preferencia consistente

Análogo al capítulo anterior se comienza por establecer una motivación para el uso de las teorías de elección en el marco del problema de ruteo. Cabe destacar que se obtuvo una solución para la problemática que plantea la consistencia temporal en el ejemplo de la figura 3.1 mediante la estructura de los procesos de Markov controlados. No obstante, el contraejemplo presentado en la Sección 3.4 deja en claro que el modelamiento en multi-etapas no es del todo intuitivo ni satisfactorio. Dado esto, la intención es generalizar la motivación dada en el Capítulo 3 con el objetivo de utilizar todas las herramientas entregadas por las teorías de elección, dejando de lado al mismo tiempo la propiedad de consistencia temporal, ya que como se comentó anteriormente al parecer no tiene interpretación directa en grafos.

En el resto de este capítulo se consideran las siguientes hipótesis generales planteadas en la Sección 2.4: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ denota un espacio de probabilidad estándar no atómico, y \mathcal{X} un espacio lineal de variables aleatorias que contiene a las constantes. Para dar la motivación se considerará nuevamente el grafo:

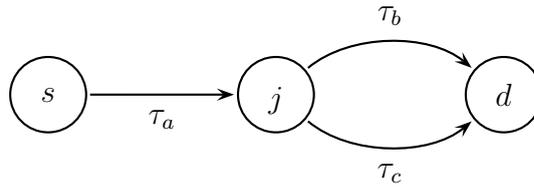


Figura 4.1: Motivación para el modelo de teorías de elección.

donde $\tau_a, \tau_b, \tau_c \in \mathcal{X}$ son variables aleatorias no-negativas que indican el tiempo de viaje en los arcos a, b , y c , respectivamente, y además τ_a es independiente de τ_b y τ_c . Sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una medida de riesgo cualquiera tal que $\rho(0) = 0$, la cual además satisface monotonía e invarianza bajo traslación. En analogía con la propiedad de consistencia temporal se busca plasmar lo siguiente mediante el funcional de riesgo: si τ_b es preferido a τ_c , entonces al ser a un arco común es intuitivo que se conserven las preferencias, en otras palabras, $\tau_a + \tau_b$ debería ser preferido a $\tau_a + \tau_c$. En términos numéricos de riesgo lo anterior se traduce

$$\rho(\tau_b) \leq \rho(\tau_c) \Rightarrow \rho(\tau_a + \tau_b) \leq \rho(\tau_a + \tau_c).$$

La propiedad de invarianza bajo traslación muestra que la implicancia anterior se tiene automáticamente en el caso cuando τ_a es una constante.

La representación numérica de las preferencias puede ser obtenida mediante el uso de las teorías de elección donde, en términos generales, ellas obtienen como resultado un funcional de preferencia el cual cuantifica las opciones que escogen los usuarios. A partir de estos funcionales de preferencia, en este capítulo se buscará caracterizar las medidas de riesgo que sean equivalentes con dicha representación. Toda esta intuición que se tiene en el contexto de transporte, la cual se observa claramente en el caso de τ_a constante, queda generalizada en la siguiente definición de *consistencia aditiva* en la cual se relaja la hipótesis de no-negatividad:

Definición 4.1 (Consistencia Aditiva). Una función $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *consistente aditiva* si para todo par de variables aleatorias $X, Y \in \mathcal{X}$ y para $Z \in \mathcal{X}$ independiente de X e Y se tiene la implicancia

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \Rightarrow \rho(X + Z) \leq \rho(Y + Z).$$

La definición está dada para cualquier funcional que intente cuantificar el riesgo de una variable aleatoria, no necesariamente una medida de riesgo. Por el contrario, si efectivamente ρ es una medida de riesgo se obtiene el siguiente lema:

Lema 4.2. Sea ρ una medida de riesgo tal que $\rho(0) = 0$. Entonces, *consistencia aditiva* es equivalente a la *propiedad de aditividad*.

Demostración. Recordando la Definición 2.4 para aditividad es claro que ésta implica la consistencia aditiva. Recíprocamente, para todo $X \in \mathcal{X}$ se tiene $\rho(X) = \rho(\rho(X))$, de modo que si Z es independiente de X , tomando $Y = \rho(X)$ en la Definición 4.1 se obtiene

$$\rho(X + Z) = \rho(\rho(X) + Z),$$

y dado que ρ es invariante bajo traslación se sigue que

$$\rho(X + Z) = \rho(X) + \rho(Z).$$

□

Las propiedades de *invarianza bajo traslación* y *consistencia aditiva* serán claves durante el desarrollo de este capítulo, ya que determinarán la forma de las medidas de riesgo que se obtengan. Finalmente, es necesario comentar que si bien la aditividad de una medida de riesgo es útil para el cálculo algorítmico de rutas óptimas, también es una hipótesis restrictiva.

4.2. Medidas de riesgo derivadas de la teoría de desutilidad esperada

El objetivo de esta sección es encontrar aquellas medidas de riesgo que derivan de la teoría de von Neumann-Morgenstern entregada en la Sección 2.4.1. Asumiendo el mismo marco dado en ese momento, se sabe que el funcional de preferencia que caracteriza las preferencias en un espacio \mathcal{X} –de variables acotadas– asociado a un orden \preceq es

$$C(X) = \mathbb{E}[c(X)],$$

donde $X \in \mathcal{X}$, y además $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de desutilidad continua. Esta representación numérica cuantifica las preferencias de los usuarios, es decir,

$$X \preceq Y \Leftrightarrow C(X) \leq C(Y).$$

Por lo tanto, dado que en el contexto de ruteo los usuarios en general prefieren algunas rutas por sobre otras, se busca a través de la teoría de von Neumann-Morgenstern poder caracterizar aquellas medidas de riesgo que sean consistentes con la relación de orden \preceq establecida en \mathcal{X} , en otras palabras, las preferencias en el ámbito de transporte deberán cumplir con el set de axiomas entregados durante el marco teórico de la teoría de desutilidad esperada. Aquellos funcionales derivados de esta teoría serán denotadas por ρ_c , donde $c(\cdot)$ representa la función de desutilidad obtenida en el Teorema 2.11.

Sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera tal que $\rho(0) = 0$, la cual representa una relación de orden \preceq_ρ . Además se considerarán las siguientes propiedades para dicho funcional:

- B1. (Invarianza bajo ley)** Si para todo par de variables $X, Y \in \mathcal{X}$ se tiene que $F_X = F_Y$, entonces se cumple $\rho(X) = \rho(Y)$.
- B2. (Monotonía estricta)** Si para todo par de variables $X, Y \in \mathcal{X}$ se tiene que $X < Y$ c.s., entonces se satisface $\rho(X) < \rho(Y)$.
- B3. (Continuidad débil)** Si X_n converge en distribución a X , entonces se cumple que $\rho(X_n) \rightarrow \rho(X)$.

Se observa que ρ aún no representa una medida de riesgo al no ser invariante bajo traslación. Es necesario dar una definición extra con el fin de adaptar el marco a la teoría de desutilidad esperada.

Definición 4.3 (Independencia). Sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se dirá que ρ satisface la propiedad de independencia si para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ y cualquier $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \Rightarrow \rho(\mathcal{L}(\alpha; X; Z)) \leq \rho(\mathcal{L}(\alpha; Y; Z)).$$

Retomando, un funcional derivado de la teoría de von Neumann-Morgenstern será denotado por $\rho_c(X) = c^{-1}[\mathbb{E}c(X)]$, el cual no necesariamente satisface invarianza bajo traslación. El siguiente resultado relaciona las propiedades mostradas anteriormente con este tipo de funciones.

Proposición 4.4. *Sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. El funcional ρ satisface $\rho(m) = m$ para todo $m \in \mathbb{R}$, las propiedades B1, B2, B3 e independencia, si y sólo si existe una función $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente continua tal que $\rho = \rho_c$.*

Demostración. La demostración de la implicancia recíproca es inmediata, por lo que se procederá a demostrar la implicancia directa. Claramente, un mapeo $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ con aquellas propiedades induce una relación de preferencia \preceq_ρ en el espacio \mathcal{X} dada para todo $X, Y \in \mathcal{X}$ por

$$X \preceq_\rho Y \Leftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y).$$

Más aún, dicha relación de orden satisface los axiomas A1-A4 entregados en la Sección 2.4.1, y además es un operador binario estrictamente monótono. Por consiguiente, el Teorema 2.11 entrega como resultado un funcional de preferencia dado por

$$C(X) = \mathbb{E}[c(X)],$$

donde $c(\cdot)$ es una función estrictamente creciente continua. Por otro lado, esta representación numérica es consistente con ρ , concretamente para todo $X, Y \in \mathcal{X}$

$$X \preceq_\rho Y \Leftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \Leftrightarrow C(X) \leq C(Y).$$

Dado que la función $c^{-1}(\cdot)$ es también un mapeo creciente, se sigue que

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \Leftrightarrow c^{-1}(C(X)) \leq c^{-1}(C(Y)).$$

Sumado a eso, se sabe que $\rho(X) = \rho(\rho(X))$ lo cual se traduce en que un agente es indiferente a elegir entre $\rho(X)$ y la variable X , es decir, $\rho(X) \sim X$. Por lo tanto, $C(X) = C(\rho(X))$ con lo cual se obtiene

$$c^{-1}[C(X)] = c^{-1}[C(\rho(X))] = c^{-1}[\mathbb{E}c(\rho(X))] = \rho(X).$$

Por consiguiente, una función ρ que satisface $\rho(m) = m$, las propiedades B1, B2, B3 e independencia, es de la forma

$$\rho(X) = \rho_c(X) = c^{-1}[\mathbb{E}c(X)],$$

donde c es una función estrictamente creciente continua. □

Con este resultado se está en condiciones de presentar el resultado más importante de esta sección, en el cual se caracterizará a las medidas de riesgo de la forma ρ_c .

Teorema 4.5. *Las únicas medidas de riesgo que satisfacen $\rho(0) = 0$, B1-B3 e independencia, son*

$$\rho_\beta^{ent}(X) = \begin{cases} \mathbb{E}(X) & \text{si } \beta = 0 \\ \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}(e^{\beta X}) & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases}.$$

Demostración. Por invarianza bajo traslación y $\rho(0) = 0$ se tiene que $\rho(m) = m$ para todo $m \in \mathbb{R}$. En virtud de la Proposición 4.4 se sabe que toda función que cumple $\rho(m) = m$, B1-B3 e independencia, es de la forma $\rho_c(X) = c^{-1}[\mathbb{E}c(X)]$ donde c es una función estrictamente creciente. Por otra parte, para ser una medida de riesgo debe satisfacer invarianza bajo traslación, por consiguiente para todo $X \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathbb{R}$ se tiene

$$c^{-1}[\mathbb{E}c(X + m)] = c^{-1}[\mathbb{E}c(X)] + m. \quad (4.1)$$

Se considerará una variable aleatoria $X = zB_p$, donde $z \in \mathbb{R}$ y B_p denota una variable Bernoulli¹ de parámetro p , es decir, $\mathbb{P}(B_p = 1) = p$. En el lado izquierdo de la ecuación (4.1) se obtiene que

$$c^{-1}[\mathbb{E}c(zB_p + m)] = c^{-1}[pc(z + m) + (1 - p)c(m)],$$

mientras que en el lado derecho se tiene

$$c^{-1}[\mathbb{E}c(zB_p)] + m = c^{-1}[pc(z) + (1 - p)c(0)] + m.$$

Por lo tanto, si se considera $c(0) = 0$ se observa que

$$c^{-1}[\mathbb{E}c(zB_p)] + m = c^{-1}[pc(z)] + m.$$

Con esto, la ecuación (4.1) es equivalente a

$$c^{-1}[pc(z + m) + (1 - p)c(m)] = c^{-1}[pc(z)] + m,$$

por lo que reordenando se concluye que

$$c(z + m) - c(m) = \frac{c(c^{-1}[pc(z)] + m) - c(m)}{p}. \quad (4.2)$$

Como c es una función estrictamente creciente, entonces si $z \neq 0$ se tiene que $c(z) \neq 0$. Por lo que (4.2) se puede escribir como

$$c(z + m) - c(m) = \left(\frac{c(c^{-1}[pc(z)] + m) - c(m)}{c^{-1}[pc(z)]} \right) \left(\frac{c^{-1}(pc(z))}{pc(z)} \right) c(z).$$

Gracias a que c es monótona, se tiene que es diferenciable ctp. Por lo tanto, considerando en la última ecuación $m^* \neq 0$ tal que $c'(m^*) > 0$ existe, y tomando $p \rightarrow 0^+$, se sigue que

$$c(z + m^*) - c(m^*) = c'(m^*) \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{c^{-1}[pc(z)]}{pc(z)} \right) c(z).$$

Más aún, como se sabe que $c(z) \neq 0$ y $c(z + m^*) - c(m^*) \neq 0$, por ende se concluye que el límite $\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{c^{-1}(pc(z))}{pc(z)}$ existe. En otras palabras, esto significa que $(c^{-1})'(0^+)$ existe, y al mismo tiempo es distinto de cero. Por consiguiente, normalizando $(c^{-1})'(0^+) = 1$, se obtiene que ctp $z \neq 0$ y $m^* \neq 0$

$$c(z + m^*) - c(m^*) = c'(m^*)c(z). \quad (4.3)$$

¹Aunque se trabaje en un espacio de probabilidad no atómico, se puede generar una variable Bernoulli mediante variables continuas.

En esta última ecuación, dividiendo por $z \neq 0$ y tomando $z \rightarrow 0$, como $c'(m^*)$ existe, se observa que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{c(z)}{z} = c'(0) = 1.$$

Regresando a la ecuación (4.2), y reordenando de otra forma, se logra obtener la siguiente ecuación:

$$c(z+m) - c(z) = c(m) \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{c(c^{-1}[pc(z)] + m) - c(c^{-1}(pc(z)))}{p}. \quad (4.4)$$

Sea $z^* \in \mathbb{R}$ tal que $c'(z^*)$ existe. Dividiendo en (4.4) por $m \neq 0$ y haciendo $m \rightarrow 0$, se obtiene de forma equivalente que

$$c'(z^*) = c'(0) \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \lim_{m \rightarrow 0} \frac{c(c^{-1}[pc(z^*)] + m) - c(c^{-1}(pc(z^*)))}{m}. \quad (4.5)$$

Por lo tanto, el límite de la derecha existe y es igual a $c'(c^{-1}[pc(z^*)])$. De esta forma en (4.5) se sigue que

$$c'(z^*) = 1 + \frac{c'(c^{-1}(pc(z^*))) - 1}{p},$$

lo cual es equivalente a

$$c'(z^*) = 1 + \left(\frac{c'(c^{-1}[pc(z^*)]) - 1}{c^{-1}[pc(z^*)]} \right) \left(\frac{c^{-1}[pc(z^*)]}{pc(z^*)} \right) c(z^*).$$

Gracias a que $(c^{-1})'(0^+)$ existe, entonces tomando $p \rightarrow 0^+$ en la ecuación de arriba se concluye que

$$c'(z^*) = 1 + \left(\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{c'(c^{-1}[pc(z^*)]) - 1}{c^{-1}[pc(z^*)]} \right) c(z^*).$$

Por ende, el límite a la derecha existe y será igual a $c''(0^+) = \beta$. En consecuencia,

$$c'(z) = 1 + \beta c(z) \quad \text{ctp } z \in \mathbb{R}.$$

Con lo anterior se tienen los siguientes casos:

- Si $\beta = 0$, entonces se sabe que la única solución continua estrictamente creciente, tal que $c(0) = 0$ y $c'(0) = 1$, de la ecuación diferencial anterior es $c(z) = z$, por consiguiente

$$\rho_c(X) = \mathbb{E}(X) = \rho_0^{ent}(X).$$

- Por otra parte, si $\beta \neq 0$ la única solución de la ecuación diferencial que es continua estrictamente creciente con $c(0) = 0$ y $c'(0) = 1$ es $c(z) = \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta}$. Considerando esta función de desutilidad que tiene forma exponencial con $\beta \neq 0$, la medida de riesgo resultante es

$$\rho_c(X) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}(e^{\beta X}) = \rho_\beta^{ent}(X).$$

□

Observación 4.6. Se observa que para el caso $\beta > 0$, la función c es convexa de modo que la propiedad de aversión al riesgo 2.13 se tiene como consecuencia. Por otro lado, cuando $\beta < 0$ se está en presencia de un mapeo cóncavo lo que se traduce en agentes llamados “risk-seekers”.

Observación 4.7. Cabe destacar que para obtener el resultado del teorema anterior se hizo uso de la propiedad quizás más intuitiva en el contexto de ruteo: invarianza bajo traslación, la cual fue planteada durante la Sección 4.1 donde se señaló que corresponde al caso simple cuando los tiempos de viaje en algunos arcos suelen ser constantes. Por lo tanto, como la medida de riesgo entrópica es invariante bajo traslación se observa que satisface la condición indicada al principio de este capítulo: consistencia aditiva.

Observación 4.8. Cuando $\beta = 0$ el modelo se ve enfrentado a usuarios que tienen un comportamiento neutral hacia el riesgo, de modo que ellos son indiferentes entre el valor esperado y la variable aleatoria. En resumen, dichos agentes toman sus decisiones en base a un funcional que no considera la aversión al riesgo: $\mathbb{E}(X)$. Por último, es necesario enfatizar que esta función es homogénea positiva lo cual es una propiedad discutible en áreas de finanzas y/o economía.

Observación 4.9. Generalmente, existen usuarios que poseen un comportamiento excesivamente precavido los cuales son modelados a través del funcional $\rho_{\beta}^{ent}(X) = \text{ess sup } \{X\}$ donde $\beta = +\infty$, pero lamentablemente este mapeo no es una medida de riesgo derivada de la teoría de desutilidad esperada, ya que no puede ser obtenido como resultado de un funcional que tenga la forma ρ_c dado que no satisface el axioma de monotonía estricta. No obstante, es importante mencionar que este es un caso particular de la medida de riesgo entrópica, la cual además es homogénea positiva.

Observación 4.10. Es importante mencionar que la función de costo obtenida como consecuencia en la demostración del Teorema 4.5 es infinitamente diferenciable. Por el contrario, un resultado análogo presentado por Gerber en [22] está fuertemente basado en el supuesto de una función de utilidad al menos dos veces diferenciable, por lo que las hipótesis presentadas en el teorema anterior son más débiles, ya que las condiciones de regularidad de la función son obtenidas a posteriori. Sumado a esto, Gerber presupone la independencia entre las variables aleatorias, lo cual es más fuerte que la propiedad de invarianza bajo traslación asumida en el Teorema 4.5.

Observación 4.11. Un resultado similar sobre medidas de riesgo entrópicas es obtenido por Goovaerts et al. en [26], pero se basan en el supuesto de comonotonía, que es distinto a la invarianza bajo traslación usado en este teorema.

Problema de ruteo

Retomando el tema principal de esta memoria, es necesario tener en claro cuáles son las consecuencias del resultado obtenido en el Teorema 4.5 para el problema de ruteo. Para ello, se considerará el siguiente marco similar al dado durante el Capítulo 3: sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido que posee dos nodos especiales $s, d \in V$, los cuales indican el origen y destino, respectivamente. Además, cada arco $a \in A$ tiene asociado un tiempo aleatorio de viaje continuo $\tau_a \geq 0$ acotado c.s., los cuales son independientes a pares.

Por otro lado, se considerará una medida de riesgo $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\rho(0) = 0$, donde \mathcal{X} es un espacio de “opciones”, el cual junto con ρ satisfacen las hipótesis presentadas en

el Teorema 4.5. Dado esto, el problema de ruteo plantea en términos generales resolver lo siguiente:

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \rho \left(\sum_{a \in P} \tau_a \right), \quad (4.6)$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de todos los caminos posibles entre los vértices s y d en el grafo G . Con estos supuestos se puede asegurar, gracias al teorema presentado anteriormente, que $\rho = \rho_\beta^{ent}$, en particular el caso de aversión al riesgo $\beta \in (0, \infty)$. Por lo tanto, dado que la medida de riesgo entrópica es un funcional aditivo, resolver el problema (4.6) es equivalente a:

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \sum_{a \in P} \rho_\beta^{ent}(\tau_a). \quad (4.7)$$

Finalmente, debido a que los tiempos de viaje son variables aleatorias no-negativas acotadas, es posible utilizar un algoritmo polinomial de tipo Dijkstra con el fin de resolver numéricamente un problema como el (4.7).

4.2.1. Paradoja de Allais

La teoría de von Neumann-Morgenstern, a pesar de ser ampliamente utilizada en el contexto de finanzas y economía, ha sido criticada por muchos investigadores, específicamente en relación al supuesto del axioma de independencia. Con ello han surgido paradojas como la de Allais –ver [1]– o Ellsberg –ver [15]– las cuales muestran situaciones donde los usuarios tienden a no seguir las preferencias predichas por el axioma de independencia, en otras palabras, las elecciones de las personas y las predicciones de la teoría de desutilidad esperada no concuerdan. Lo anterior se mostró experimentalmente a través del trabajo realizado por Tversky y Kahneman en [29]. Lamentablemente, el contexto de transporte no se escapa de esto y la siguiente situación muestra que el axioma de independencia puede violarse en determinadas ocasiones. Para ello se considera el siguiente grafo:

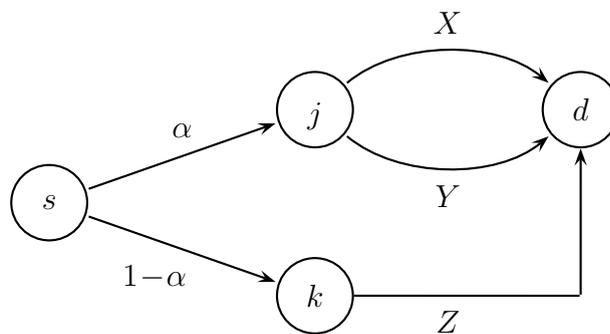


Figura 4.2: Paradoja de Allais y el axioma de independencia.

El grafo anterior busca analizar las preferencias de un usuario que busca la mejor ruta entre s y d . Se asume que en el nodo s el usuario se enfrenta a un puente el cual estará abierto con probabilidad α . Si se encuentra abierto, la persona se dirige hacia j donde tiene dos caminos alternativos con tiempos de viaje aleatorios X e Y . Por otro lado, si el

puede estar cerrado –con probabilidad $1 - \alpha$ – la persona opta por un camino alternativo hacia d cuyo tiempo de viaje es Z . En otras palabras, el usuario se ve enfrentado en s a una lotería. Las variables X , Y y Z están dadas por

$$X = 50, Y = \begin{cases} 35 & \text{con probabilidad } 0,8 \\ 100 & \text{con probabilidad } 0,2 \end{cases}, Z = 100.$$

Cuando $\alpha = 1$, el usuario descarta el camino dado por Z y se sitúa en j donde tiene dos opciones mejores: X e Y . Entre estas alternativas, la respuesta comúnmente sería $X \preceq Y$, ya que las personas por lo general prefieren irse a la segura, y no escoger aquella variable que asigna probabilidad positiva a un tiempo muy alto, incluso si tiene un valor esperado menor –48 en este caso–.

Cuando $\alpha = 0,25$ el usuario se enfrenta a una lotería en s que está dada por las siguientes variables aleatorias

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha; X; Z) &= \begin{cases} 50 & \text{con probabilidad } 0,25 \\ 100 & \text{con probabilidad } 0,75 \end{cases}, \\ \mathcal{L}(\alpha; Y; Z) &= \begin{cases} 35 & \text{con probabilidad } 0,2 \\ 100 & \text{con probabilidad } 0,8 \end{cases}. \end{aligned}$$

En este caso, los usuarios generalmente preferirán $\mathcal{L}(\alpha; Y; Z)$ a $\mathcal{L}(\alpha; X; Z)$, lo cual concuerda al comparar los valores esperados o los valores de la medida de riesgo entrópica para $\beta = 1$. Sin embargo, el axioma de independencia A4 indica que los usuarios debiesen comportarse de otra forma, escogiendo $\mathcal{L}(\alpha; X; Z)$ en vez de $\mathcal{L}(\alpha; Y; Z)$. Este hecho empírico muestra la inconsistencia entre las predicciones del axioma en cuestión y las elecciones de los usuarios, lo cual cuestiona el modelo de comportamiento planteado por von Neumann-Morgenstern. Como se comentó durante la Sección 2.4.2 este tipo de paradojas han servido de base para cuestionar el axioma de independencia y motivaron el desarrollo de nuevas teorías de elección, lo cual será motivo de estudio en las siguientes secciones.

4.3. Medidas de riesgo derivadas de otras teorías de elección

Motivados por la paradoja planteada anteriormente, el objetivo principal de esta sección es obtener medidas de riesgo derivadas de teorías de elección alternativas a la entregada por von Neumann-Morgenstern.

4.3.1. Teoría dual de elección

Análogamente a la Sección 4.2 el objetivo de esta parte es obtener medidas de riesgo derivadas de la teoría presentada por Yaari en 1987. El Teorema 2.16 entrega una representación numérica que caracteriza las preferencias en un espacio \mathcal{X} asociado a una relación de orden \preceq , la cual está dada por

$$C(X) = \mathbb{E}(X^h),$$

donde $X \in \mathcal{X}$ indica un costo, y $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una función de distorsión continua.

En lo que sigue se asumirán las mismas hipótesis para el espacio de probabilidad entregadas durante la Sección 2.4.2. Para fijar ideas, sea \mathcal{X} un espacio lineal de variables aleatorias con valores en un intervalo compacto común $[0, M]$ que además contiene a las constantes. Se considerará $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera que satisface invarianza bajo traslación, $\rho(0) = 0$ y los siguientes axiomas:

B4*. (**Continuidad L^1**) Si la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ converge en L^1 a $X \in \mathcal{X}$, entonces $\rho(X_n) \rightarrow \rho(X)$.

B5*. (**Monotonía de primer orden estocástico**) Si $X, Y \in \mathcal{X}$ son tales que $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Con B5* e invarianza bajo traslación, ρ claramente es una medida de riesgo. Aparte de lo anterior, se supondrá que ρ cumple el axioma B1 de la Sección 4.2. Por último, se considerará la siguiente propiedad para ρ con el fin de adaptar el marco entregado en la Sección 2.4.2:

Definición 4.12 (Independencia dual directa). Sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se dirá que ρ satisface la propiedad de independencia dual directa si para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}$ comonótonas a pares y cualquier $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \Rightarrow \rho(\alpha X + (1 - \alpha)Z) \leq \rho(\alpha Y + (1 - \alpha)Z).$$

Con todas estas propiedades, la medida de riesgo ρ induce una relación de orden \preceq_ρ sobre \mathcal{X} :

$$X \preceq_\rho Y \Leftrightarrow \rho(X) \leq \rho(Y),$$

la cual satisface los axiomas A1, A2, A3*, A4* y A5*. Por consiguiente, Yaari garantiza el funcional de preferencia $\mathbb{E}(X^h)$, donde h es una función de distorsión. Como esta representación numérica cumple con $C(k) = k$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces la medida de riesgo coincide con

$$\rho_h(X) = \mathbb{E}(X^h).$$

Es fácil observar que este mapeo es invariante bajo traslación y además homogéneo positivo. A este funcional se le conoce como medida de riesgo distorsionada –ver [58]–.

Antes de presentar el resultado más importante de esta sección, se demostrará el siguiente lema técnico:

Lema 4.13. Sea $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua y $0 < p < 1$. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(px)}{x} \text{ existe} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} \text{ existe.}$$

Demostración. Por continuidad se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x) - h(p^{k+1}x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{h(p^j x) - h(p^{j+1}x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h(p^j x) - h(p^{j+1}x)}{x} \end{aligned}$$

Más aún, se sabe que existe una constante $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que para cualquier $0 < y < \delta$ se tiene

$$L - \varepsilon \leq \frac{h(y) - h(py)}{y} \leq L + \varepsilon. \quad (4.8)$$

Se probará entonces que para todo $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ de tal modo que para cualquier $0 < x < \delta'$ se tenga

$$L' - \varepsilon' \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h(p^l x) - h(p^{l+1} x)}{x} \leq L' + \varepsilon', \quad (4.9)$$

donde $L' \in \mathbb{R}$ es el límite a determinar. Se comenzará por considerar un $\varepsilon' > 0$ arbitrario y $\varepsilon = (1-p)\varepsilon'$. Dado esto, se sabe que existe $\delta > 0$ tal que cualquier $0 < y < \delta$ satisface (4.8). Sea $\delta' = \delta$ e $y = p^j x$ con $j \geq 0$, donde $0 < x < \delta'$. Por lo tanto, en la ecuación (4.8) se observa que

$$L - (1-p)\varepsilon' \leq \frac{h(p^j x) - h(p^{j+1} x)}{p^j x} \leq L + (1-p)\varepsilon', \quad \forall j \geq 0, \forall 0 < x < \delta'.$$

Multiplicando por p^j y sumando sobre todo $j \geq 0$, en esta última ecuación se obtiene que

$$[L - (1-p)\varepsilon'] \sum_{j=0}^{\infty} p^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h(p^j x) - h(p^{j+1} x)}{x} \leq [L + (1-p)\varepsilon'] \sum_{j=0}^{\infty} p^j, \quad \forall 0 < x < \delta',$$

de donde

$$[L - (1-p)\varepsilon'] \frac{1}{1-p} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h(p^j x) - h(p^{j+1} x)}{x} \leq [L + (1-p)\varepsilon'] \frac{1}{1-p}, \quad \forall 0 < x < \delta'.$$

Finalmente, se concluye la ecuación (4.9) tomando $L' = \frac{L}{1-p}$. \square

Teorema 4.14. *Las únicas funciones $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ invariantes bajo traslación que satisfacen $\rho(0) = 0$, B1, B2, B4*, B5*, independencia dual directa y consistencia aditiva, son las medidas de riesgo $\rho_h(X) = \mathbb{E}(X)$, lo cual corresponde a $h(p) = p$.*

Demostración. Primero, es claro que la esperanza satisface invarianza bajo traslación, $\rho(0) = 0$, B1, B2, B4*, B5*, independencia dual directa y consistencia aditiva. Recíprocamente, se sabe que una función ρ que posea estas propiedades es una medida de riesgo de la forma $\rho = \rho_h$, donde h es una función de distorsión continua no-decreciente. Por lo tanto, sean B_p y B_q dos variables aleatorias Bernoulli de parámetros p y q , respectivamente. Como ρ_h es consistente aditiva, entonces se tiene aditividad

$$\rho_h(B_p + B_q) = \rho_h(B_p) + \rho_h(B_q).$$

En el lado izquierdo de la última ecuación se obtiene que

$$\begin{aligned} \rho_h(B_p + B_q) &= \int_0^{\infty} h(\mathbb{P}(B_p + B_q > x)) dx \\ &= \int_0^1 h(\mathbb{P}(B_p + B_q > x)) dx + \int_1^2 h(\mathbb{P}(B_p + B_q > x)) dx \\ &\quad + \int_2^{\infty} h(\mathbb{P}(B_p + B_q > x)) dx \\ &= h(1 - \bar{p}\bar{q}) + h(pq), \end{aligned}$$

donde $\bar{p} = 1 - p$ y $\bar{q} = 1 - q$. En el otro lado se cumple para $\rho_h(B_p)$ que

$$\begin{aligned}\rho_h(B_p) &= \int_0^\infty h(\mathbb{P}(B_p > x)) dx \\ &= \int_0^1 h(\mathbb{P}(B_p > x)) dx + \int_1^\infty h(\mathbb{P}(B_p > x)) dx \\ &= h(p).\end{aligned}$$

Igualando ambas partes resulta la siguiente ecuación analítica

$$h(1 - \bar{p}\bar{q}) + h(pq) = h(p) + h(q). \quad (4.10)$$

Reordenando y dividiendo por q , la ecuación (4.10) es equivalente a

$$\frac{h(q) - h(pq)}{q} = \frac{h(p + q(1 - p)) - h(p)}{q}.$$

Como h es un mapeo no decreciente, entonces es diferenciable ctp. Sea $0 < p^* < 1$ tal que $h'(p^*)$ existe, por lo tanto

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{h(p^* + q(1 - p^*)) - h(p^*)}{q(1 - p^*)} (1 - p^*) = h'(p^*)(1 - p^*) < \infty.$$

De esto se sigue que $\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{h(q) - h(p^*q)}{q}$ existe, y usando el Lema 4.13 se concluye que

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{h(q) - h(0)}{q} = h'(0^+) < \infty.$$

Volviendo a la ecuación (4.10), y asignando $h(0) = 0$, se obtiene que

$$\frac{h(q) - h(0)}{q} - \frac{h(pq) - h(0)}{pq} p = \frac{h(p + q(1 - p)) - h(p)}{q}.$$

Tomando límite cuando $q \rightarrow 0^+$ resulta

$$h'(p) = h'(0^+) \text{ ctp } p \in (0, 1).$$

Finalmente, si se considera $h(1) = 1$ y $h(0) = 0$, la única solución continua a la ecuación diferencial anterior es la identidad, es decir, $h(p) = p$ para todo $p \in [0, 1]$. Por lo tanto, la única medida de riesgo distorsionada que satisface la propiedad de consistencia aditiva es $\rho_h(X) = \mathbb{E}(X)$. \square

Observación 4.15. Es importante comentar que este resultado ya había sido obtenido por Luan en [31], y posteriormente por Heilpern en [28], los cuales difieren en las hipótesis de regularidad sobre la función de distorsión. Por un lado, Luan asume la existencia de $h'(0)$, mientras que Heilpern se basa fuertemente en que la función h es al menos dos veces diferenciable. A diferencia de ellos, el resultado presentado anteriormente obtiene como consecuencia la diferenciabilidad de h , y además se hace a través de una demostración alternativa y más simple.

4.3.2. Teoría de desutilidad rango-dependiente esperada

Al igual que la teoría dual de elección, esta teoría –presentada por diversos autores– intenta solucionar las paradojas como la de Allais. Como se comentó durante la Sección 2.4.3, existen variadas axiomatizaciones para las preferencias, pero en esta parte se tendrá en cuenta la entregada por Wakker en [64]. Con lo anterior, se está interesado más en caracterizar las medidas de riesgo derivadas desde el funcional de preferencia de esta teoría, que adaptar los axiomas presentados en [64], por lo que el espíritu de esta sección es de complementar los resultados presentados previamente. Por lo tanto, a diferencia de las secciones anteriores, no se presentarán explícitamente las hipótesis sobre la relación de orden \preceq . De todas formas, se asumirá de aquí en adelante que el espacio lineal \mathcal{X} se compone de variables aleatorias con soporte en un intervalo compacto común $[0, M]$, y que además considera a las constantes.

Para fijar ideas, sea $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\rho(m) = m$ con $m \in \mathbb{R}$ y consistente con la axiomatización dada por Wakker. Haciendo un cálculo análogo a la Sección 4.2 y 4.3.1, es posible concluir que todo funcional derivado de la teoría de desutilidad rango-dependiente esperada tiene la forma

$$\rho_{c,h}(X) = c^{-1} \{ \mathbb{E}[c(X^h)] \},$$

donde asumiendo cierta continuidad –ver Teorema 25 en [64]– se tiene que $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de costo estrictamente creciente continua, y h es una función de distorsión continua. Dado esto, se pasará a presentar el resultado más importante de esta sección el cual combina los resultados demostrados en los Teoremas 4.5 y 4.14.

Teorema 4.16. *Las únicas medidas de riesgo $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho(0) = 0$ y que satisfacen la axiomatización de la teoría de utilidad rango-dependiente esperada son de la forma $\rho_{c,h}(X) = c^{-1} \{ \mathbb{E}[c(X^h)] \}$ donde la función de costo c tiene forma exponencial. Más aún, si se asume consistencia aditiva, entonces h es la identidad.*

Demostración. Se sabe que las funciones que cumplen con los axiomas entregados, por ejemplo, por Wakker en [64] son de la forma

$$\rho_{c,h}(X) = c^{-1} \{ \mathbb{E}[c(X^h)] \},$$

donde c es una función continua estrictamente creciente, y h es continua no decreciente. Dado que en el espacio \mathcal{X} en el que se trabaja está compuesto por variables no negativas y además considerando que una medida de riesgo es invariante bajo traslación, entonces para todo $X \in \mathcal{X}$ y $m \in \mathbb{R}_+$ se debe tener que

$$c^{-1} \left(\int_0^\infty h[\mathbb{P}(c(X+m) > x)] dx \right) = c^{-1} \left(\int_0^\infty h[\mathbb{P}(c(X) > x)] dx \right) + m. \quad (4.11)$$

Sea $X = zB_p$ donde $z > 0$ y B_p denota a una variable aleatoria Bernoulli de parámetro p .

Por lo tanto, para el primer término en el lado derecho de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
c^{-1} \left(\int_0^\infty h[\mathbb{P}(c(X) > x)] dx \right) &= c^{-1} \left(\int_0^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right) \\
&= c^{-1} \left(\int_0^{c(z)} h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{c(z)}^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right) \\
&= c^{-1} \left(\int_0^{c(z)} h(p) dx + \int_{c(z)}^\infty h(0) dx \right) \\
&= c^{-1} (h(p)c(z)).
\end{aligned}$$

Por otra parte, en el lado izquierdo de (4.11) resulta

$$\begin{aligned}
c^{-1} \left(\int_0^\infty h[\mathbb{P}(c(X+m) > x)] dx \right) &= c^{-1} \left(\int_0^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x) - m}{z} \right) \right] dx \right) \\
&= c^{-1} \left(\int_0^{c(m)} h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x) - m}{z} \right) \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{c(m)}^{c(m+z)} h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x) - m}{z} \right) \right] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{c(m+z)}^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p > \frac{c^{-1}(x) - m}{z} \right) \right] dx \right) \\
&= c^{-1} \left(\int_0^{c(m)} h(1) dx + \int_{c(m)}^{c(z+m)} h(p) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{c(z+m)}^\infty h(0) dx \right) \\
&= c^{-1} (c(m) + h(p)[c(z+m) - c(m)]).
\end{aligned}$$

Igualando ambas partes y reordenando se obtiene

$$h(p)[c(z+m) - c(m)] = c(c^{-1}(h(p)c(z)) + m) - c(m).$$

Tomando $h(p) \rightarrow 0^+$ y de manera análoga a la demostración del Teorema 4.5, la ecuación anterior es equivalente a

$$c(z+m^*) - c(m^*) = c'(m^*)c(z), \quad \text{ctp } m^* \geq 0 \quad (4.12)$$

y como ya se sabe, la única solución continua estrictamente creciente, tal que $c(0) = 0$ y $c'(0) = 1$, es

$$c(z) = \begin{cases} z & \text{si } \beta = 0 \\ \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta} & \text{si } \beta \neq 0 \end{cases},$$

donde se cumple que $\beta = c''(0^+)$. En lo que sigue se analizará la segunda parte del teorema para el caso en que la función c tiene forma exponencial, ya que la identidad ya fue demostrado en el Teorema 4.14.

Se probará entonces que h debe ser la identidad cuando $\rho_{c,h}$ satisface la condición de consistencia aditiva. Sean B_p y B_q dos variables aleatorias Bernoulli con parámetros p y q , respectivamente. Asumiendo consistencia aditiva, se tiene para $z > 0$ que

$$\rho_{c,h}(zB_p + zB_q) = \rho_{c,h}(zB_p) + \rho_{c,h}(zB_q). \quad (4.13)$$

El lado derecho de (4.13) es equivalente a

$$\rho_{c,h}(zB_p) + \rho_{c,h}(zB_q) = c^{-1}(h(p)c(z)) + c^{-1}(h(q)c(z)).$$

Para el otro lado como se trabaja con variables no-negativas se obtiene que

$$\begin{aligned} \rho_{c,h}(zB_p + zB_q) &= c^{-1} \left(\int_0^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p + B_q > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right) \\ &= c^{-1} \left(\int_0^{c(z)} h \left[\mathbb{P} \left(B_p + B_q > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right. \\ &\quad + \int_{c(z)}^{c(2z)} h \left[\mathbb{P} \left(B_p + B_q > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \\ &\quad \left. + \int_{c(2z)}^\infty h \left[\mathbb{P} \left(B_p + B_q > \frac{c^{-1}(x)}{z} \right) \right] dx \right) \\ &= c^{-1} \left(\int_0^{c(z)} h(1 - \bar{p}\bar{q}) dx + \int_{c(z)}^{c(2z)} h(pq) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{c(2z)}^\infty h(0) dx \right) \\ &= c^{-1}(c(z)h(1 - \bar{p}\bar{q}) + [c(2z) - c(z)]h(pq)), \end{aligned}$$

donde $\bar{p} = 1 - p$ y $\bar{q} = 1 - q$. Regresando a la ecuación (4.13) y reordenando, se puede concluir que

$$c(z)h(1 - \bar{p}\bar{q}) + [c(2z) - c(z)]h(pq) = c(c^{-1}\{h(p)c(z)\} + c^{-1}\{h(q)c(z)\}). \quad (4.14)$$

Anteriormente, se asumió que $c(z) = \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta}$ con $\beta \neq 0$, de modo que si se reemplaza esta función en el lado izquierdo de la ecuación (4.14) se obtiene

$$c(z)h(1 - \bar{p}\bar{q}) + [c(2z) - c(z)]h(pq) = \left(\frac{e^{\beta z} - 1}{\beta} \right) h(1 - \bar{p}\bar{q}) + \left(\frac{e^{2\beta z} - e^{\beta z}}{\beta} \right) h(pq),$$

mientras que en el lado derecho se tiene

$$c(c^{-1}\{h(p)c(z)\} + c^{-1}\{h(q)c(z)\}) = \frac{e^{\beta z} - 1}{\beta} [h(p) + h(q) + h(p)h(q)(e^{\beta z} - 1)].$$

Por consiguiente, la ecuación (4.14) es equivalente a

$$h(pq) - h(p)h(q) = e^{-\beta z} (h(p) + h(q) - h(p)h(q) - h(1 - \bar{p}\bar{q})).$$

Tomando límite cuando $z \rightarrow +\infty$ resulta para todo $p, q \in [0, 1]$ que

$$\begin{aligned} h(pq) &= h(p)h(q), \\ h(p) + h(q) &= h(p)h(q) + h(1 - \bar{p}\bar{q}). \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene

$$h(p) + h(q) = h(pq) + h(p + q(1 - p)).$$

Por lo tanto, haciendo el mismo análisis de la demostración del Teorema 4.14 se concluye que h es la identidad.

En resumen se tiene que las únicas medidas de riesgo que satisfacen la axiomatización dada por Wakker o Chateauneuf, y que además satisfacen consistencia aditiva, son

$$\rho_{\beta}^{ent}(X) = \begin{cases} \mathbb{E}(X) & \text{si } \beta = 0 \\ \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}(e^{\beta X}) & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases}$$

□

Observación 4.17. Es importante mencionar que este resultado ya había sido obtenido por Goovaerts en [25], pero se debe hacer énfasis en que se basa fuertemente en el supuesto que la función de utilidad puede ser expresada como una serie de Taylor, sumado a eso, se asumen las hipótesis de Heilpern en [28] para la función de distorsión. A diferencia de esto, en el resultado demostrado anteriormente se obtiene como consecuencia la diferenciabilidad de ambos mapeos, y además cabe destacar que se hace uso de un esquema alternativo de demostración que combina los Teoremas 4.5 y 4.14.

4.4. Comentarios y conclusiones

En este capítulo se caracterizaron aquellas medidas de riesgo que satisfacían las distintas axiomatizaciones de las teorías de elección, principalmente: la teoría de desutilidad esperada de von Neumann-Morgenstern, la teoría dual de elección presentada por Yaari, y por último, la teoría de desutilidad rango-dependiente esperada desarrollada por distintos autores.

Para la primera de ellas se obtuvo, a través de la *invarianza bajo traslación*, la medida de riesgo entrópica, la cual coincide con el valor esperado cuando se escoge el parámetro $\beta = 0$. La principal característica de la medida de riesgo entrópica es ser aditiva para variables aleatorias independientes, lo cual facilita el cálculo en el contexto de ruteo. Sin embargo, el caso de la esperanza no es muy útil ya que representa un comportamiento neutral hacia el riesgo de parte de los usuarios, lo cual no va con el interés de esta memoria.

Por otra parte, dada la paradoja de Allais surgen otras teorías de elección. Para el marco presentado por Yaari, y gracias a la propiedad *consistencia aditiva*, se obtuvo como funcional de riesgo a la esperanza, lo cual nuevamente no se ajusta a las necesidades del contexto de ruteo con aversión al riesgo. Por último, para la axiomatización de Wakker o Chateauneuf que combina los esquemas de las dos teorías anteriores, se obtuvo el mismo resultado que para la teoría de desutilidad esperada, pero esta vez no sólo debido a la *invarianza bajo traslación*, sino que también gracias a la *consistencia aditiva*.

Es necesario enfatizar que los resultados mostrados por los Teoremas 4.14 y 4.16 también son aplicables al esquema de ruteo mostrado al final de la Sección 4.2. Es decir, cuando los tiempos de viaje son variables aleatorias continuas independientes a pares pertenecientes al compacto $[0, M]$, entonces la solución para el problema (4.6) se obtiene mediante un algoritmo polinomial de tipo Dijkstra, gracias a la aditividad de la medida de riesgo entrópica, o bien de la esperanza.

Lamentablemente, como se mostró en el ejemplo de la Sección 4.2.1, la paradoja de Allais cuestiona el principal axioma de la teoría de von Neumann-Morgenstern: el *axioma de independencia*, y el contexto de ruteo no se escapa de esto. Si bien la desutilidad esperada y la medida de riesgo entrópica satisfacen la axiomatización de dicha teoría, existen determinadas situaciones experimentales donde el comportamiento de los usuarios no concuerda con las predicciones dadas por von Neumann-Morgenstern. Nuevamente, captar las preferencias de las personas en el contexto de transporte se hace una tarea complicada. Sin embargo, se podría pensar que las teorías alternativas a la de von Neumann-Morgenstern solucionarían esto gracias a la propiedad de consistencia aditiva, pero otra vez ambos resultados son la esperanza y la medida de riesgo entrópica, ambas consistentes con el axioma de independencia, y por ende paradojas como la de Allais siguen siendo aplicables.

Por lo tanto, el uso de la medida de riesgo entrópica en transporte, obtenida gracias a la invarianza bajo traslación y consistencia aditiva, es discutible debido a que satisface el axioma de independencia. Esto cuestiona la consistencia aditiva como intuición en el contexto de ruteo con aversión al riesgo. Entonces, ¿cuál es la mejor forma de captar las preferencias de las personas en un problema de ruteo? ¿Cuál es esa propiedad intuitiva? ¿Será una especie de “consistencia espacial” que a su vez capte la idea de consistencia temporal y/o consistencia aditiva?

Capítulo 5

Modelos de equilibrio

En este capítulo se discuten brevemente los modelos de equilibrio para problemas de asignación de tráfico considerando un flujo no-atómico o discreto. Para ello se analizará un caso similar al mean-risk, y además posteriormente se utilizarán los resultados aditivos obtenidos en los capítulos anteriores para concluir existencia de equilibrios de Wardrop.

5.1. Caso no-atómico

En esta sección se tratará el problema de asignación de tráfico para flujos no atómicos. Para ello se utilizará el enfoque tratado principalmente en [44, 41] y los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Se considera un marco general de un juego de ruteo con usuarios aversos al riesgo donde el flujo es no-atómico. Formalmente, sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido que posee dos nodos especiales s y t , los cuales denotan el vértice inicial y de destino, respectivamente. Además, se denotará por \mathcal{P} al conjunto de todos los caminos posibles que unen s y t , entre los cuales existe una demanda total de tráfico $g > 0$. Dado lo anterior, se sabe que cualquier flujo factible $w \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{P}|}$ deberá satisfacer la siguiente condición: $\sum_{P \in \mathcal{P}} w_P = g$. Por otra parte, una carga cualquiera sobre los arcos $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$ estará definida para todo $a \in A$ como $l_a = \sum_{P \in \mathcal{P}: P \ni a} w_P$. Debido a que se está interesado en tratar con usuarios aversos al riesgo, entonces se asumirá que cada arco posee un tiempo de viaje aleatorio que eventualmente podría depender del flujo en el arco. Formalmente, cada arco $a \in A$ estará asociado a una variable aleatoria τ_a definida como

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R}_+^{|A|} \times \Omega &\rightarrow [0, M] \\ (l, \omega) &\mapsto \tau_a(l, \omega). \end{aligned}$$

Se observa que a su vez se está asumiendo que los tiempos de viajes son variables no-negativa c.s. y acotadas uniformemente. Sumado a lo anterior, se asumirá de manera general que para cada $\omega \in \Omega$ la función $\tau_a(\cdot, \omega)$ es continua. Finalmente, para evitar el abuso de notación, durante esta sección se denotará simplemente como $\tau_a(l)$ al tiempo aleatorio para el arco $a \in A$ y $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$.

En lo que sigue se presentarán un par de casos de estudios en los cuales variará la forma e hipótesis sobre los tiempos de viaje en cada arco. Primero, se tratará un enfoque similar al tratado en [44, 41], pero utilizando el AVaR como medida de riesgo, para lo

cual se analizarán dos casos: varianza constante y varianza no constante. En la última parte, se comentará el caso independiente, es decir, utilizando los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4 se busca derivar algunas conclusiones para juegos de congestión no atómicos.

5.1.1. Tiempos de viaje de tipo modelo mean-risk

Siguiendo la línea de análisis de [44, 41] se supondrá que a cada arco $a \in A$ se le asocia un tiempo de viaje $\tau_a(l) \sim F_a[\mu_a(l), \sigma_a(l)]$, donde la distribución F_a dependerá de la carga $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$ a través de la media $\mu_a(l)$ y la varianza $\sigma_a(l)$. Dado esto, se asumirá que μ_a , vista componente a componente, es una función continua no decreciente, y además que el mapeo $(\mu_a)_{a \in A}$ es estrictamente monótono¹. Por otro lado, la función que denota la varianza $\sigma_a : \mathbb{R}_+^{|A|} \rightarrow \mathbb{R}_+$ podrá depender o no de $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$, lo cual será motivo de estudio más adelante.

Como el valor esperado es lineal se observa que la media de un camino $P \in \mathcal{P}$ está dado por $\mu_P(l) = \sum_{a \in P} \mu_a(l)$. De la misma forma, el tiempo aleatorio para una ruta $P \in \mathcal{P}$ estará definido como $\tau_P(l) = \sum_{a \in P} \tau_a(l)$. Con estos supuestos se busca analizar la existencia de equilibrios para el problema de congestión dado por

$$\tau_{opt}(l) := \min_{P \in \mathcal{P}} \rho \left(\sum_{a \in P} \tau_a(l) \right),$$

donde $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida de riesgo y \mathcal{X} un espacio lineal apropiado. Durante esta sección se trabajará con $\rho(X) = \text{AVaR}_\alpha(X)$ para cierto nivel $\alpha \in (0, 1)$, y $\mathcal{X} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ el espacio de las variables integrables.

Finalmente, cabe señalar que en adelante sólo se analizará el caso en que los tiempos de viaje posean la forma

$$\tau_a(l) = \mu_a(l) + \sigma_a(l)X_a, \quad (5.1)$$

donde cada X_a es una variable con soporte en $[-1, 1]$ y media cero. Por lo tanto, gracias a la invarianza bajo traslación del Average Value-at-Risk, el problema de minimización toma la siguiente forma

$$\tau_{opt}(l) := \min_{P \in \mathcal{P}} \left\{ \sum_{a \in P} \mu_a(l) + \text{AVaR}_\alpha \left(\sum_{a \in P} \sigma_a(l)X_a \right) \right\},$$

lo cual en términos simples puede ser expresado como

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \{ \mu_P(l) + \delta_P(l) \}, \quad (5.2)$$

donde $\delta_P(l) := \text{AVaR}_\alpha \left(\sum_{a \in P} \sigma_a(l)X_a \right)$.

¹Una función $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice estrictamente monótona si para todo $x, y \in U$ se tiene $(x - y)^T (F(x) - F(y)) > 0$

Caso Exógeno: varianza constante

En este caso se considerará una varianza constante para cada arco $a \in A$, en otras palabras, $\sigma_a(l) = \sigma_a$. Con esta hipótesis se puede observar que el término $\delta_P(l) = \delta_P$, por lo tanto, se obtiene un planteamiento similar al dado en [44], en donde se define lo siguiente:

Definición 5.1 (Equilibrio de Wardrop con tiempos de viaje aleatorios). Un flujo w es llamado un *equilibrio de Wardrop con tiempos de viaje aleatorios* si, y sólo si,

$$\mu_P(l) + \delta_P \leq \mu_Q(l) + \delta_Q,$$

para todo $P, Q \in \mathcal{P}$ con $w_P > 0$.

En otras palabras corresponde a un equilibrio de Wardrop, pero con costos para cada ruta dados por $c_P(l) = \mu_P(l) + \delta_P$. Finalmente, con esto es posible entregar el siguiente resultado sobre existencia de equilibrios gracias a [44], en el cual se hará abuso de notación denotando $\mu_P(w) := \mu_P(l)$ para un flujo w .

Proposición 5.2 (Ordoñez, Stier-Moses [44]). *Un flujo w será un equilibrio si, y sólo si, se tiene lo siguiente*

$$\begin{aligned} w_P > 0 &\Rightarrow \mu_P(w) + \delta_P - u = 0, \text{ o bien} \\ \mu_P(w) + \delta_P - u > 0 &\Rightarrow w_P = 0, \end{aligned}$$

para todo $P \in \mathcal{P}$, y donde u es una variable libre que en general representa el valor de la función objetivo mínimo para los usuarios. Más aún, un equilibrio existe y es esencialmente único.

Antes de continuar se definirá lo siguiente

Definición 5.3 (AVaR $_\alpha$ -equilibrio). Se llamará *AVaR $_\alpha$ -equilibrio* a un equilibrio de Wardrop con tiempos de viaje aleatorios de la forma $\tau_P(l) = \mu_P(l) + \delta_P$ con δ_P de la forma AVaR $_\alpha$ ($\sum_{a \in P} \sigma_a X_a$).

A partir de esta definición y usando directamente la Proposición 5.2 se obtiene lo siguiente

Corolario 5.4. *En un juego de congestión no-atómico siempre existe un AVaR $_\alpha$ -equilibrio y es esencialmente único, es decir, dos equilibrios distintos producen el mismo valor en el costo.*

Por último, cabe comentar que si se considera el caso separable donde $\mu_a(l) = \mu_a(l_a)$, entonces el equilibrio puede ser calculado –para más detalles ver [44]– minimizando sobre el conjunto de flujos factibles el siguiente funcional

$$\sum_{a \in A} \int_0^{l_a} \mu_a(z) dz + \sum_{P \in \mathcal{P}} \delta_P w_P.$$

Lamentablemente, en el peor de los casos el tamaño de este problema es exponencial debido al conjunto de rutas y arcos. Es importante agregar que en [44] son tratados otros

tipos de equilibrio como el α -percentil –que vendría a ser equivalente a usar el VaR_α –, ϕ -variabilidad-agregada, Γ -robusto Wardrop, entre otros. En donde además se deja en claro que los dos últimos equilibrios intentan aproximar al primero, ya que el equilibrio α -percentil aparte de ser complicado su cálculo por el tamaño exponencial del problema, también es difícil computacionalmente obtener los percentiles cuando la distribución de las variables no es clara. Análogamente, para el caso separable del AVaR_α -equilibrio, el cálculo en sí del AVaR sería complicado, lo cual agregaría una dificultad para obtener algorítmicamente el equilibrio. Sin embargo, si se asumiera que las variables X_a son normales de media cero y varianza uno, entonces el problema se reduce al presentado en [41] para el caso exógeno, el cual se sabe que puede ser resuelto en tiempo $n^{O(\log n)}$ –ver además [39, 40]–, esto dado que es ampliamente conocido que el AVaR coincide con el modelo mean-risk que usa la desviación estándar cuando las variables son normales. Finalmente, cabe destacar que el resultado anterior puede ser adaptado de manera natural a un contexto de múltiples pares de origen y destino.

Caso Endógeno: varianza no constante

Siguiendo la línea de análisis dada en [41] se busca obtener algún resultado de existencia de equilibrios para el caso donde la varianza no es constante. Para ello se asumirá que la función $\sigma_a : \mathbb{R}_+^{|A|} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es continua tal que $\sigma_a(0) = \sigma_0 > 0$, y además que para todo $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$ y $a \in A$ los tiempos de viaje τ_a están acotados uniformemente por una constante $M > 0$ para la norma en L^1 .

Lema 5.5. *Para cada $P \in \mathcal{P}$ la función $T : \mathbb{R}_+^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada vector $\sigma := (\sigma_a)_{a \in P}$ el valor $T(\sigma) = \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma, \tau \rangle)$ es Lipschitz, donde $\tau := (\tau_a)_{a \in P}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto en $\mathbb{R}^{|P|}$.*

Demostración. En efecto, sea $P \in \mathcal{P}$ un camino cualquiera y $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^{|P|}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\sigma^1) - T(\sigma^2) &= \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^1 - \sigma^2, \tau \rangle + \langle \sigma^2, \tau \rangle) - \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^2, \tau \rangle) \\ &\leq \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^1 - \sigma^2, \tau \rangle) + \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^2, \tau \rangle) - \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^2, \tau \rangle) \\ &= \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^1 - \sigma^2, \tau \rangle) \\ &\leq \text{AVaR}_\alpha(|\langle \sigma^1 - \sigma^2, \tau \rangle|) \\ &\leq \text{AVaR}_\alpha(\|\sigma^1 - \sigma^2\| \|\tau\|) \\ &= \|\sigma^1 - \sigma^2\| \text{AVaR}_\alpha(\|\tau\|) \\ &\leq \overline{M} \|\sigma^1 - \sigma^2\|. \end{aligned}$$

Intercambiando los roles entre σ^1 y σ^2 se obtiene que

$$\text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^2, \tau \rangle) - \text{AVaR}_\alpha(\langle \sigma^1, \tau \rangle) \leq \overline{M} \|\sigma^1 - \sigma^2\|,$$

mediante lo cual se puede concluir el resultado, es decir,

$$\|T(\sigma^1) - T(\sigma^2)\| \leq \overline{M} \|\sigma^1 - \sigma^2\|.$$

□

Antes de presentar el resultado de existencia, se debe mencionar el siguiente teorema:

Teorema 5.6 (Hartman, Stampacchia [27]). *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexo compacto y $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo contínuo. Entonces, existe un vector $x \in K$ tal que*

$$F(x) \cdot (x - y) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Corolario 5.7. *Para el juego de ruteo no-atómico con $\delta_P(l) = AVaR_\alpha \left(\sum_{a \in \mathcal{P}} \sigma_a(l) X_a \right)$, y $X_a \in [-1, 1]$ c.s. con media cero, existe un equilibrio de Wardrop estocástico.*

Demostración. Se sabe que cada flujo factible w , y su correspondiente carga l , deben pertenecer al compacto K dado por las restricciones

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} w_P = g \quad \text{y} \quad l_a = \sum_{P \in \mathcal{P}: P \ni a} w_P.$$

Se definirá para cada $P \in \mathcal{P}$ la función $Q_P : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $Q_P(l) = \mu_P(l) + \delta_P(l)$ con $\delta_P(l) = AVaR_\alpha \left(\sum_{a \in \mathcal{P}} \sigma_a(l) X_a \right)$. Además, haciendo un abuso de notación se denotará $Q_P(w) := Q_P(l)$ y $Q(w) = (Q_P(w))_{P \in \mathcal{P}}$. Dado esto, se sabe que un equilibrio de Wardrop estocástico existe si un flujo w satisface la inecuación variacional

$$Q(w) \cdot (w - w') \leq 0,$$

para todo $w' \in K$. Por lo tanto, dado el Lema 5.5 se concluye que el operador Q es contínuo, y gracias al Teorema 5.6 se demuestra la existencia de un equilibrio de Wardrop estocástico. \square

Cabe mencionar que si las variables aleatorias X_a fueran normales de media cero y varianza uno, entonces el resultado anterior coincide con el obtenido en [41], en donde además se estudia la unicidad y se demuestra que no es un juego potencial. Aún así el modelo mean-risk con la desviación estándar no es del todo convincente en ruteo, ya que es un funcional de riesgo que no es monótono como se comentó durante la Sección 2.1. Además, es importante señalar que el resultado 5.7 puede ser usado tanto para el caso separable como para el no separable, aún así la unicidad no es clara a simple vista, pero es muy probable que se puedan adaptar los resultados obtenidos en [41]. Finalmente, el resultado anterior puede ser adaptado de manera natural a un contexto de múltiples pares de origen y destino.

5.1.2. Tiempos de viaje independientes a pares

En ambos Capítulos 3 y 4 se obtuvieron resultados en base a la hipótesis de independencia entre las variables aleatorias, lo cual llevó a una solución aditiva. A partir de este contexto, se está interesado en comentar algunos resultados para juegos de congestión con flujos no-atómicos.

Se considerará que para cada arco se tiene un tiempo de viaje aleatorio $\tau_a(l_a)$ que dependerá de la carga l_a . Además se supondrá que para cualquier carga $l \in \mathbb{R}_+^{|A|}$ las variables son independientes entre si. Como ya se sabe, la expresión general para la solución, tanto en el Capítulo 3 como durante el Capítulo 4, es

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \sum_{a \in P} \rho(\tau_a),$$

donde $\rho = \text{AVaR}_\alpha$ o bien $\rho = \rho_\beta^{\text{ent}}$, respectivamente. En otras palabras, se está presente ante un problema aditivo, por lo que si se considera un problema de asignación de tráfico análogo a lo anterior sería de la forma

$$\tau_{\text{opt}}(l) = \min_{P \in \mathcal{P}} \sum_{a \in P} c_a(l_a), \quad (5.3)$$

donde los costos están dados por $c_a(l_a) = \rho(\tau_a(l_a))$. Dado esto, es posible obtener un equilibrio de Wardrop siempre y cuando las funciones de costos $c_a(\cdot)$ sean crecientes para cada $a \in A$, junto con eso la formulación variacional se obtiene directamente. Para ello bastaría asumir –considerando la continuidad de las variables– alguna de las siguientes hipótesis de monotonía:

- **Primer orden estocástico:** Si se tiene $l_a \leq l'_a$ tal que² $\tau_a(l_a) \leq_{st} \tau_a(l'_a)$, entonces

$$c_a(l_a) \leq c_a(l'_a),$$

donde $c_a(l_a) = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a(l_a))$, o bien $c_a(l_a) = \rho_\beta^{\text{ent}}(\tau_a(l_a))$.

- **Stop-loss order:** Si se tiene $l_a \leq l'_a$ tal que³ $\tau_a(l_a) \leq_{sl} \tau_a(l'_a)$, entonces

$$c_a(l_a) \leq c_a(l'_a),$$

donde $c_a(l_a) = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a(l_a))$, o bien $c_a(l_a) = \rho_\beta^{\text{ent}}(\tau_a(l_a))$. Se puede demostrar que este orden es equivalente al segundo orden estocástico⁴.

- **Orden casi seguro:** Si se tiene $l_a \leq l'_a$ tal que $\tau_a(l_a) \leq \tau_a(l'_a)$ c.s., entonces

$$c_a(l_a) \leq c_a(l'_a),$$

donde $c_a(l_a) = \text{AVaR}_\alpha(\tau_a(l_a))$, o bien $c_a(l_a) = \rho_\beta^{\text{ent}}(\tau_a(l_a))$. Esto se tiene gracias a la propiedad de monotonía de las medidas de riesgo.

En cualquier de los tres casos anteriores la existencia de un equilibrio de Wardrop está garantizada. Más aún, se obtiene una formulación para encontrar dicho equilibrio. Formalmente, sea K el conjunto compacto de flujos factibles, entonces $(w^*, l^*) \in K$ es un equilibrio de Wardrop si, y sólo si, (w^*, l^*) es solución óptima del problema de optimización

$$\min_{(w,l) \in K} \sum_{a \in A} \int_0^{l_a} c_a(z) dz.$$

Cabe señalar que si (w, l) y (w', l') son dos soluciones del problema anterior, entonces $c_a(l_a) = c_a(l'_a)$. Además, la unicidad sólo se puede garantizar cuando las funciones de costo $c_a(\cdot)$ son estrictamente crecientes. Por último, el resultado anterior puede ser adaptado de manera natural a un contexto de múltiples pares de origen y destino.

² $X \leq_{st} Y$ si, y sólo si, $F_X(x) \geq F_Y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

³ $X \leq_{sl} Y$ si, y sólo si, $\mathbb{E}((X - d)_+) \leq \mathbb{E}((Y - d)_+)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

⁴ X domina a Y en segundo orden estocástico si, y sólo si, para toda función u convexa no decreciente se tiene $\mathbb{E}(u(X)) \leq \mathbb{E}(u(Y))$.

5.2. Juego de ruteo discreto bajo incertidumbre

Antes de hacer algunos comentarios para este caso, se explicará brevemente el marco general para este tipo de juego de congestión en redes en donde se considera un flujo discreto. Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido el cual posee dos vértices particulares s y t que denotarán el nodo inicial y terminal, respectivamente. En este problema de asignación de tráfico los recursos serán los arcos $a \in A$, mientras que para todo jugador $i = 1, \dots, m$, las estrategias admisibles P_i corresponderán a los subconjuntos $p_i \subseteq A$ cuyas aristas conforman un camino entre s y t . Se denotará por $n_a(p) = |\{i : a \in p_i\}|$ al número de jugadores que ocupan el arco $a \in A$. Al igual que en la Sección 5.1 se asumirá que a cada arco $a \in A$ se le asocia un tiempo de viaje aleatorio que eventualmente podría depender del número de jugadores que ocupan a , dicha variable aleatoria estará dada por

$$\begin{aligned} \tau_a : \{1, \dots, m\} \times \Omega &\rightarrow [0, M] \\ (n_a, \omega) &\mapsto \tau_a(n_a, \omega). \end{aligned}$$

Se observa que los tiempos son variables no-negativas c.s., y además están acotadas uniformemente por $M > 0$. Además, se asumirá que para cada $\omega \in \Omega$ la función $\tau_a(\cdot, \omega)$ es continua. Finalmente, para evitar el abuso de notación, durante esta sección se denotará simplemente como $\tau_a(l_a)$ al tiempo aleatorio para el arco $a \in A$ y $l_a \in \mathbb{R}_+$.

Caso independiente

Para presentar brevemente un resultado en el caso atómico se asumirá que para todo $n_a \in \{1, \dots, m\}$ las variables aleatorias $\tau_a(n_a)$ son independientes entre sí. Con esto supuestos, y análogamente a lo realizado en la Sección 5.1.2, se tiene gracias a los resultados obtenidos durante los Capítulos 3 y 4 un modelo aditivo, en el cual para cada $n_a \in \{1, \dots, m\}$ los costos en cada arco $a \in A$ estarán dados por $c_a(n_a) = \rho(\tau_a(n_a))$, donde $\rho = \text{AVaR}_\alpha$ o bien $\rho = \rho_\beta^{\text{ent}}$. Por lo tanto, el costo para cada jugador $i \in \{1, \dots, m\}$ será de la siguiente forma:

$$C_i(p) = \sum_{a \in p_i} c_a(n_a(p)) = \sum_{a \in p_i} \rho(\tau_a(n_a(p)))$$

Por consiguiente, si se desea demostrar la existencia de un potencial sólo bastaría asumir una de las tres hipótesis de monotonía vistas en en la Sección 5.1.2, de modo que las funciones de costo en cada arco $c_a(\cdot)$ sean no decrecientes. Con ello se sabe que el problema se reduce al modelo considerado por Rosenthal en [53] donde se muestra que el potencial para este juego de congestión está dado por

$$\varphi(p_1, \dots, p_m) = \sum_{a \in A} \sum_{k=1}^{n_a(p)} c_a(k).$$

Finalmente, es posible concluir la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias puras, lo cual está asociado a la formulación variacional mencionada en la ecuación anterior.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Son muchas las situaciones de incertidumbre durante el día a día, en las cuales hay que tomar la mejor decisión bajo cierto propósito hasta la siguiente etapa. Claro ejemplo son las situaciones en la banca, en las inversiones, en el mercado mundial y en temas generales de economía, en los cuales las variables cada vez son más inciertas, y por ende difíciles de modelar. El tema tratado durante esta memoria no queda exento, los problemas en el tráfico originados por distintos motivos: ambientales, accidentes, hechos fortuitos, el horario, entre otros, provocan que los tiempos de viaje se comporten aleatoriamente. Ante lo cual, un usuario buscará minimizar el riesgo de las rutas que lo llevan a destino, con diversos propósitos, como por ejemplo llegar a la hora al trabajo. Es por esto que el objetivo principal de la presente memoria fue intentar modelar esta problemática a través de las medidas de riesgo.

Para lo anterior se trataron dos enfoques con perspectivas distintas: uno de forma dinámica y el otro de manera global. La motivación entregada por la propiedad de consistencia temporal mostrada en la figura 3.1, condición que usualmente se considera en problemas de optimización en multi-etapas, llevó a utilizar estos procesos dinámicos para modelar el problema de ruteo. Junto con lo anterior, se usaron las medidas de riesgo condicionales con el fin de adaptar la definición de consistencia temporal entregada en 2.6. Posteriormente se utiliza el marco de los procesos de Markov controlados con el objetivo de solucionar el problema a horizonte finito (2.13). El resultado más importante obtenido durante el Capítulo 3 fue el Teorema 3.3, el cual en términos simples dice que para que la solución óptima sea consistente temporal, cuando los tiempos de viaje son independientes entre si, se debe resolver el clásico problema combinatorial de camino mínimo; en otras palabras, obtener un óptimo para el problema (3.5) se puede hacer a través de un algoritmo polinomial de tipo Dijkstra.

Lamentablemente, con el contraejemplo mostrado en la Sección 3.4 queda claro que la hipótesis de no-negatividad de los tiempos de viajes es sumamente importante. Si se consideran variables normales, entonces se observa que surgen inconsistencias con las preferencias. Usualmente, se trabaja con variables más “cómodas” que no tienen restricciones de signo, lo cual deja en jaque el uso de medidas de riesgo condicionales. Además, la adaptación de las etapas en un grafo para un modelo dinámico de ruteo no queda del todo claro, en ese sentido el modelamiento tratado durante ese capítulo parece un tanto forzado. Un grafo al no tener una estructura “lineal”, hace complicado el trabajo de adecuarse a los procesos de Markov controlados. Finalmente, con todo lo anterior surge el cuestionamiento hacia la propiedad de consistencia temporal y su uso directo en los problemas de

ruteo, quizás sea otra condición la que deba implementarse en este contexto. Esto último motiva de cierta manera el uso de las teorías de elección bajo incertidumbre, abordadas en el Capítulo 4.

Tratando de hacer una analogía con la consistencia temporal y la invarianza bajo traslación, y viendo el problema de forma global, el marco tratado en el Capítulo 4 fue motivado a través de la figura 4.1 mediante la cual se presenta una condición para la consistencia entre las preferencias, llamada *consistencia aditiva*. A través de ésta se obtienen diversos resultados, utilizando al mismo tiempo la axiomatización de las distintas teorías de elección. El resultado más importante de la teoría de desutilidad esperada fue el Teorema 4.5, el cual concluye que toda medida de riesgo consistente con la teoría de von Neumann-Morgenstern será de la forma ρ_{β}^{ent} . Esto suena prometedor para el contexto de ruteo, ya que la medida de riesgo entrópica es aditiva. Sin embargo, las constantes críticas hacia el axioma de independencia se ven reflejadas a través de la paradoja de Allais, la cual puede ser fácilmente adaptada al tópico tratado en esta memoria. En términos simples, mediante este contraejemplo se muestra que las predicciones del axioma de independencia y las elecciones de los usuarios no concuerdan. Esta situación particular coloca nuevamente en jaque la posibilidad de modelar de manera consistente las preferencias de las personas en el contexto de ruteo con aversión al riesgo, y considerando que se utilizó simplemente la invarianza bajo traslación.

Incentivados por solucionar este tipo de paradojas, surgen diversas teorías de elección alternativas. Una de ellas es la teoría planteada por Yaari, mediante la cual se demostró el Teorema 4.14, donde bajo la hipótesis de consistencia aditiva, se entrega como medida de riesgo derivada a la esperanza. Nuevamente, este último resultado no es prometedor, ya que el valor esperado no capta el comportamiento de aversión al riesgo de los usuarios. En ese mismo capítulo se trata con la teoría de desutilidad rango-dependiente esperada que combina los dos planteamientos anteriores, con lo cual se obtiene el Teorema 4.16 que bajo los supuestos de invarianza bajo traslación y consistencia aditiva entrega como resultado a la medida de riesgo entrópica. Si bien esta medida de riesgo es de gran utilidad al ser aditiva, es a su vez consistente con el axioma de independencia, de modo que la paradoja de Allais es aplicable aún. Sin embargo, no queda del todo claro que se pueda adaptar esta paradoja a variables aleatorias continuas lo cual modela de mejor forma la realidad, ya que las rutas usualmente no se comportan como una Bernoulli.

Se debe destacar que la propiedad de consistencia aditiva fue utilizada sólo con variables aleatorias Bernoulli, lo cual deja abierta la posibilidad de debilitar esta condición en un trabajo futuro. Es natural preguntarse si bajo ciertas condiciones no tan fuertes, la consistencia aditiva para Bernoulli's sea equivalente a la versión general.

Por lo tanto, luego de esta memoria una de las preguntas que queda pendiente se refiere a cómo enfrentar y modelar las preferencias de los usuarios en el contexto de ruteo con aversión al riesgo, de tal forma de preservar cierta consistencia en ellas. Como se comentó durante la Sección 4.4 surgen además ciertas dudas naturales, las cuales quedan en el aire para su discusión, y por supuesto su intención principal es motivar futuras investigaciones en esta área. Interrogantes como: ¿Cuál es esa propiedad “intuitiva” que preserva la elección de las personas? ¿Será una especie de “consistencia espacial” que a su vez capte la idea de *consistencia temporal* y/o *consistencia aditiva*? ¿Existen otras medidas de riesgo no derivadas de la teoría de elección que satisfagan consistencia aditiva?

Las preguntas anteriores resumen de cierto modo las dudas que aparecieron durante

el desarrollo de esta memoria. Una vez resueltas esas preguntas, es posible ir un poco más allá y tratar con el caso dependiente entre los tiempos de viaje, lo cual parece ser una tarea de mayor dificultad, pero que a su vez modela de mejor forma el contexto de transporte que se da en la realidad. Aún así, la intuición indica que la dependencia es sólo Markoviana, aunque puede que haya otros casos de interés.

Otro factor que queda para una investigación posterior es la dependencia entre las preferencias de los usuarios aversos al riesgo y la topología de un grafo. Es natural pensar que una persona elegirá el camino que posea más alternativas para llegar a destino. Un claro ejemplo de lo anterior se ve reflejado en la siguiente figura:

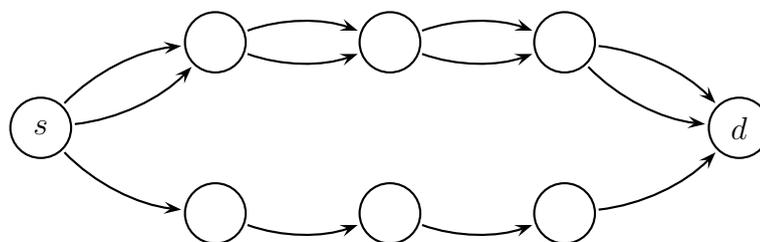


Figura 6.1: Relación entre la topología de la red y las preferencias de un usuario.

Se puede observar que si las opciones poseen tiempos de viaje con distribuciones similares, un usuario generalmente elegirá la opción de arriba ya que posee más alternativas, de modo que ante un evento imprevisto, el riesgo de no llegar a la hora a destino será menor.

Por otro lado, tratar directamente con la distribución de las variables aleatorias tal vez no sea lo mejor, ante lo cual el método de elección discreta –que utiliza muestreos de las variables– surge como una alternativa para hacer modelos de ruteo bajo incertidumbre.

Finalmente, durante el Capítulo 5 se trata el problema de asignación de tráfico en juegos de congestión, ya sea para un flujo no-atómico, o bien el modelo discreto. Los principales resultados: Corolario 5.4, Corolario 5.7 y el caso independiente, prueban la existencia, bajo ciertas condiciones, de equilibrios para flujos no-atómicos. Luego, se presentan brevemente unos comentarios acerca del caso discreto.

Por lo tanto, tratando de no dejar de lado esta área para un trabajo futuro, quedan aún algunas preguntas por resolver. Por ejemplo, está pendiente tratar el caso de los juegos de ruteo con flujo atómico, en donde seguramente se pueden adaptar ciertos resultados obtenidos en [41]. Por otro lado, el cálculo del precio de la anarquía para estos juegos de congestión también queda pendiente.

Bibliografía

- [1] ALLAIS, M. Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'École Américaine. *Econometrica* 21, 4 (Oct. 1953), 503–546.
- [2] ARROW, K. J. *Aspects of the theory of risk bearing*. Yrjö Jahnssonin Saatio, Helsinki, 1965.
- [3] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., AND HEATH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9, 3 (1999), 203–228.
- [4] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D., AND KU, H. Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman's principle. *Annals of Operations Research* 152, 1 (2007), 5–22.
- [5] BODA, K., AND FILAR, J. Time consistent dynamic risk measures. *Mathematical Methods of Operations Research* 63, 1 (2006), 169–186.
- [6] CHATEAUNEUF, A. Comonotonicity axioms and rank-dependent expected utility theory for arbitrary consequences. *Journal of Mathematical Economics* 32, 1 (1999), 21 – 45.
- [7] CHERIDITO, P., DELBAEN, F., AND KUPPER, M. Dynamic monetary risk measures for bounded discrete-time processes. *Electron. J. Probab.* 11 (2006), no. 3, 57–106.
- [8] CHERIDITO, P., AND KUPPER, M. Composition of time-consistent dynamic monetary risk measures in discrete time. *International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF)* 14, 01 (2011), 137–162.
- [9] CHERIDITO, P., AND STADJE, M. Time-inconsistency of var and time-consistent alternatives. *Finance Research Letters* 6, 1 (March 2009), 40–46.
- [10] DELBAEN, F. Coherent risk measures on general probability spaces. In *Advances in Finance and Stochastics*. Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 1–37.
- [11] DENTCHEVA, D., AND RUSZCZYNSKI, A. Common mathematical foundations of expected utility and dual theories. *Preprint* (March 2012).
- [12] DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M., KAAS, R., AND LAEVEN, R. Risk measurement with equivalent utility principles. Tech. rep., 2006.

- [13] DHAENE, J., VANDUFFEL, S., TANG, Q., GOOVAERTS, M., KAAS, R., AND VYNCKE, D. Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review. Open Access publications from Katholieke Universiteit Leuven urn:hdl:123456789/85435, Katholieke Universiteit Leuven, 2004.
- [14] DUDLEY, R. M. *Real Analysis and Probability*, vol. 74 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] ELLSBERG, D. Risk, ambiguity and the savage axioms. Levine's Working Paper Archive 7605, David K. Levine, Dec. 2000.
- [16] FISHBURN, P. C. Utility theory. *Management Science* 14, 5 (1968), 335–378.
- [17] FISHBURN, P. C. In *Utility theory for decision making*. Publication in Operations Research, No. 18. John Wiley and Sons Inc., New York, 1970.
- [18] FÖLLMER, H., AND SCHIED, A. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics* 6, 4 (2002), 429–447.
- [19] FÖLLMER, H., AND SCHIED, A. Robust preferences and convex measures of risk. In *Advances in Finance and Stochastics*. Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 39–56.
- [20] FÖLLMER, H., AND SCHIED, A. *Stochastic finance: An introduction in discrete time*. Berlin, Gruyter Studies in Mathematics, 2002.
- [21] FOSGERAU, M., HJORTH, K., BREMS, C., AND FUKUDA, D. *Travel time variability*. Technical University of Denmark, Transport, 2008.
- [22] GERBER, H. On additive premium calculation principles. *ASTIN Bulletin* 7, 3 (1974), 215–222.
- [23] GOOVAERTS, M., KAAS, R., DHAENE, J., AND TANG, Q. A unified approach to generate risk measures. Tech. rep., Katholieke Universiteit Leuven, Nov. 2003.
- [24] GOOVAERTS, M., KAAS, R., AND LAEVEN, R. Decision principles derived from risk measures. Open Access publications from Katholieke Universiteit Leuven urn:hdl:123456789/278383, Katholieke Universiteit Leuven, Dec. 2010.
- [25] GOOVAERTS, M. J., KAAS, R., AND LAEVEN, R. J. A note on additive risk measures in rank-dependent utility. *Insurance: Mathematics and Economics* 47, 2 (2010), 187 – 189.
- [26] GOOVAERTS, M. J., KAAS, R., LAEVEN, R. J., AND TANG, Q. A comonotonic image of independence for additive risk measures. Tinbergen Institute Discussion Papers 04-030/4, Tinbergen Institute, 2004.
- [27] HARTMAN, P., AND STAMPACCHIA, G. On some non-linear elliptic differential-functional equations. *Acta Mathematica* 115, 1 (1966), 271–310.
- [28] HEILPERN, S. A rank-dependent generalization of zero utility principle. *Insurance: Mathematics and Economics* 33, 1 (August 2003), 67–73.

- [29] KAHNEMAN, D., AND TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 2 (March 1979), 263–91.
- [30] KUPPER, M., AND SCHACHERMAYER, W. Representation results for law invariant time consistent functions. *Mathematics and Financial Economics* 2, 3 (2009), 189–210.
- [31] LUAN, C. Insurance premium calculations with anticipated utility theory. *ASTIN Bulletin* 31, 1 (2001), 27–39.
- [32] MACHINA, M. J. Expected utility analysis without the independence axiom. Levine’s Working Paper Archive 7650, David K. Levine, Dec. 1982.
- [33] MACHINA, M. J. Choice under uncertainty: Problems solved and unsolved. *Journal of Economic Perspectives* 1, 1 (Summer 1987), 121–54.
- [34] MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance* 7, 1 (1952), 77–91.
- [35] MURTHY, I., AND SARKAR, S. Stochastic shortest path problems with piecewise-linear concave utility functions. *Manage. Sci.* 44, 11 (Nov. 1998), 125–136.
- [36] NIE, Y., WU, X., AND HOMEM-DE MELLO, T. Optimal path problems with second-order stochastic dominance constraints. *Networks and Spatial Economics* 12, 4 (December 2012), 561.
- [37] NIE, Y. M. Multi-class percentile user equilibrium with flow-dependent stochasticity. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 10 (2011), 1641 – 1659.
- [38] NIE, Y. M., AND WU, X. Shortest path problem considering on-time arrival probability. *Transportation Research Part B: Methodological* 43, 6 (2009), 597 – 613.
- [39] NIKOLOVA, E. Approximation algorithms for reliable stochastic combinatorial optimization. In *Proceedings of the 13th international conference on Approximation, and 14 the International conference on Randomization, and combinatorial optimization: algorithms and techniques* (Berlin, Heidelberg, 2010), APPROX/RANDOM’10, Springer-Verlag, pp. 338–351.
- [40] NIKOLOVA, E., KELNER, J. A., BRAND, M., AND MITZENMACHER, M. Stochastic shortest paths via quasi-convex maximization. In *Proceedings of the 14th conference on Annual European Symposium - Volume 14* (London, UK, UK, 2006), ESA’06, Springer-Verlag, pp. 552–563.
- [41] NIKOLOVA, E., AND STIER-MOSES, N. A mean-risk model for the stochastic traffic assignment problem. *Columbia Working Paper # DRO-2011-03* (December 2011).
- [42] OGRYCZAK, W., AND RUSZCZYNSKI, A. From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research* 116, 1 (July 1999), 33–50.
- [43] OGRYCZAK, W., AND RUSZCZYNSKI, A. Dual stochastic dominance and related mean-risk models. *SIAM Journal on Optimization* 13, 1 (2002), 60–78.

- [44] ORDÓÑEZ, F., AND STIER-MOSES, N. E. Wardrop equilibria with risk-averse users. *Transportation Science* 44, 1 (2010), 63–86.
- [45] PRATT, J. W. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica* 32, 1/2 (1964), 122–136.
- [46] QUIGGIN, J. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior & Organization* 3, 4 (1982), 323 – 343.
- [47] RIEDEL, F. Dynamic coherent risk measures. *Stochastic Processes and their Applications* 112, 2 (2004), 185 – 200.
- [48] ROCKAFELLAR, R. T., AND URYASEV, S. Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk* 2 (2000), 21–41.
- [49] ROCKAFELLAR, R. T., AND URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance* 26, 7 (2002), 1443 – 1471.
- [50] ROCKAFELLAR, R. T., AND WETS, R. J.-B. *Variational Analysis*. Springer, 1998.
- [51] ROKHLIN, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. *Mat. Sb. (N.S.)* 25(67) (1949), 107–150.
- [52] ROORDA, B., AND SCHUMACHER, J. Time consistency conditions for acceptability measures, with an application to tail value at risk. *Insurance: Mathematics and Economics* 40, 2 (March 2007), 209–230.
- [53] ROSENTHAL, R. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria. *International Journal of Game Theory* 2, 1 (1973), 65–67.
- [54] RUSZCZYNSKI, A. Risk-averse dynamic programming for Markov decision processes. *Math. Program.* 125, 2 (Oct. 2010), 235–261.
- [55] RUSZCZYNSKI, A., AND SHAPIRO, A. Conditional risk mappings. *Mathematics of Operations Research* 31, 3 (2006), 544–561.
- [56] RUSZCZYNSKI, A., AND SHAPIRO, A. Optimization of convex risk functions. *Mathematics of Operations Research* 31, 3 (2006), 433–452.
- [57] SCHMEIDLER, D. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica* 57, 3 (May 1989), 571–87.
- [58] SEREDA, E., BRONSHTEIN, E., RACHEV, S., FABOZZI, F., SUN, W., AND STOYANOV, S. Distortion risk measures in portfolio optimization. In *Handbook of Portfolio Construction*, J. Guerard, JohnB., Ed. Springer US, 2010, pp. 649–673.
- [59] SHAPIRO, A. On a time consistency concept in risk averse multistage stochastic programming. *Operations Research Letters* 37, 3 (2009), 143 – 147.
- [60] SHAPIRO, A. Time consistency of dynamic risk measures. *Operations Research Letters* 40, 6 (2012), 436 – 439.

-
- [61] TSANAKAS, A., AND DESLI, E. Risk measures and theories of choice. *British Actuarial Journal* 9 (10 2003), 959–991.
- [62] VON NEUMANN, J., AND MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [63] WAKKER, P. Under stochastic dominance Choquet-expected utility and anticipated utility are identical. *Theory and Decision* 29, 2 (1990), 119–132.
- [64] WAKKER, P. Separating marginal utility and probabilistic risk aversion. *Theory and Decision* 36, 1 (1994), 1–44.
- [65] WU, X., AND NIE, Y. M. Modeling heterogeneous risk-taking behavior in route choice: A stochastic dominance approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 45, 9 (2011), 896 – 915.
- [66] YAARI, M. E. The dual theory of choice under risk. *Econometrica* 55, 1 (January 1987), 95–115.