UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN EN ESPACIOS CON LA PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DEL SUBDIFERENCIAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

DAVID SEBASTIÁN SALAS VIDELA

PROFESOR GUÍA:
RAFAEL CORREA FONTECILLA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ABDERRAHIM HANTOUTE
ARIS DANIILIDIS

SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE 2013

Resumen

En esta memoria se extiende el resultado de integración de Correa y Hantoute presentado en [8], que dice que si un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nykodým (RNP), entonces para todo par de funciones $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ con f epi-pointed y semicontinua inferior, y tal que $\partial f \subseteq \partial g$, se cumple que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\operatorname{co}}\, f = \overline{\overline{\operatorname{co}}\, g \square \sigma_{\operatorname{dom} f^*}}.$$

Se introduce la noción de funciones integrables, que tienen las condiciones necesarias y suficientes para que la fórmula de integración anterior se cumpla, independiente de la RNP. Además, se definen las funciones cuasi-integrables, que son aquellas funciones f epi-pointed que sólo necesitan para ser integrables que exista un denso D del interior del dominio de f^* donde se satisfaga que

$$\overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**} = \partial f^*(x^*), \quad \forall x^* \in D.$$

Se dan caracterizaciones de la ecuación anterior y luego se define la familia de espacios de Banach donde para toda función f epi-pointed, su conjugada satisface dicha ecuación en un denso del interior de su dominio: Los espacios cuyo dual tiene la propiedad de continuidad del subdiferencial débil (w-SCP). Se muestra que esta es la familia de espacios de Banach más grande donde toda función cuasi-integrable es integrable. Se termina la memoria dando varias caracterizaciones de los espacios cuyo dual tiene la w-SCP y se plantean algunas conjeturas sobre la estructura de los mismos.

A mi hermano. Uno siempre alcanza.

Agradecimientos

Agradecer primero a mi familia: A mi madre que nunca ha dejado que me rinda y que me enseñó a nunca detenerme por miedo; a mi hermano que evitó que me volviera loco y ha sido mi compañero siempre; y a mi padre, que también es mi subdirector, profesor, colega y sobre todo amigo.

También agradecer a los amigos: Nikolas T., Nicolas C., Carlos, Agustina, Andrea, Cristian, Miguel y tantos otros que han estado siempre conmigo. Sobre todo gracias Gianfranco, a quien considero más un hermano que un amigo. Agradecer en general a todos mis compañeros del departamento de matemáticas, mis amigos de la universidad, mis amigos del colegio y a todas esas personas con las que he compartido mis momentos.

Agradecer a mis alumnos, incluyendo a aquellos de quien fui catequista de confirmación, que reafirmaron año tras año mi vocación de académico y que me enseñaron la humildad de descubrir en ellos a las personas más increíbles. También agradecer a todas las mujeres de mi vida: Gracias a ellas soy el hombre que soy.

Agradecer por sobre todas las cosas a mis profesores. Primero a Marcos Becerra, quien me enseñó por primera vez el amor por las matemáticas. A mis profesores de pregrado como Marcos Kiwi, Jorge Amaya, Alejandro Jofré, Maya Stein, Jaime San Martín y Felipe Álvarez: Grandes profesores que formaron mi camino como matemático. Pero por sobre todos, a Rafael Correa, quien más que un profesor y guía de esta memoria, ha sido mi mentor todos estos años y a quien realmente admiro. Gracias por siempre creer en mí, incluso cuando yo no lo hacía.

Gracias también a Abderrahim Hantoute, mi co-guía en esta memoria. Contigo fueron largas tardes de trabajo y sin ti nada de esto hubiese sido posible. También agradecer a Aris Daniilidis, por el impulso que le diste a esta memoria con tus brillantes aportes. Finalmente, agradezco profundamente al profesor Lionel Thibault, por su cálido recibimiento en Montpellier y por el compromiso desde el primer día conmigo y con mi trabajo. Ansío estar allá nuevamente y seguir trabajando con él, ahora como su alumno.

Agradecer a Proyecto Fondecyt regular 1110019, Proyecto Ecos-Conicyt C10E08, Proyecto Basal-CMM y a la Asociación Franco-Chilena de Matemáticas Aplicadas, por el financiamiento que hizo posible todo esto.

Finalmente, gracias a Dios.

Tabla de Contenido

Introducción

En la teoría de espacios de Banach, la familia de espacios con la propiedad de Radon-Nikodým juega un rol muy importante, debido a que son los espacios donde los conjuntos convexos, cerrados y acotados cumplen varias de las propiedades geométricas fundamentales que se observan en este tipo de conjuntos cuando se trabaja en dimensión finita. Más aún, estos espacios tienen implicancias analíticas en sus duales: Todas las funciones conjugadas son Fréchet-Diferenciables en un denso del interior de su dominio.

Gracias a estas propiedades geométricas y analíticas de los espacios con la propiedad de Radon-Nikodým, Correa y Hantoute en [8] logran establecer una fórmula de integración a partir del subdiferencial de Fenchel para funciones no-convexas en estos espacios. Este resultado está basado en la fórmula de integración de Rockafellar (válida en todo espacio de Banach), presentada en [6] en el año 1966. Es natural entonces preguntarse si el resultado de Correa y Hantoute se puede extender de alguna manera a espacios más generales, ya que se sabe que no todo espacio de Banach tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Esta memoria da una primera respuesta a la pregunta del párrafo anterior: *La fórmula de integración no-convexa es válida en todo espacio de Banach cuyo dual tenga la propiedad de continuidad del subdiferencial débil.* Para lograr esto, el trabajo se divide en cinco capítulos: El primero presenta un resumen de los resultados fundamentales del análisis convexo y del cálculo subdiferencial. El segundo hace una introducción a la teoría de los espacios con la propiedad de Radon-Nikodým, enfocándose en los aspectos geométricos y analíticos. El tercero muestra los resultados de integración de Rockafellar y de Correa y Hantoute. El cuarto capítulo da los nuevos resultados de integración y condiciones suficientes para que se pueda aplicar. Finalmente en el quinto capítulo se caracterizan las condiciones necesarias y suficientes para poder aplicar los resultados del cuarto capítulo, se define la propiedad de continuidad del subdiferencial débil y se entregan caracterizaciones de los espacios que tienen dicha propiedad.

Capítulo 1

Marco teórico: Fundamentos del análisis convexo

El objetivo de este capítulo es introducir las nociones y resultados básicos del análisis convexo sobre las cuales se desarrolla esta memoria, así como los teoremas importantes que se utilizan más adelante. Asimismo, se fija gran parte de la notación que se utiliza en los capítulos siguientes.

A lo largo de este capítulo y los siguientes, salvo que se diga lo contrario, X representa un espacio de Banach, con dual X^* y bidual X^{**}. Se denota indistintamente por $\|\cdot\|$ a la norma de X, y a las normas duales de X^* y X^{**}, y por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a los diferentes productos de dualidad. Además, se denota por B_X y S_X a la bola y esfera unitaria de X, respectivamente. Análogamente, se utiliza la notación B_{X^*}, $B_{X^{**}}$, S_{X^*} y $S_{X^{**}}$. Se denota por τ_0 la topología usual en $\mathbb{R}$ y por $\tau_{\|\cdot\|}$ la topología en X (o X^*, X^{**} según corresponda) inducida por $\|\cdot\|$. Finalmente, para un espacio métrico (T, d), se denota por τ_d a la topología inducida por d.

También se usará la notación $\sigma(X, X^*)$ (o simplemente w) para denotar la topología débil sobre X, $\sigma(X^*, X)$ (o simplemente w^*) para denotar la topología débil-* sobre X^* y $\sigma(X^{**}, X^*)$ (o simplemente w^{**}) para denotar la topología débil-** (o débil-* dada por X^*) sobre X^{**}. En general, para dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (o simplemente espacios localmente convexos, *que siempre se asumirán separados*) E y F, la notación $\langle E, F \rangle$ representa que E y F están en dualidad, con producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En tal caso, se tiene que $E^* = F$ y $F^* = E$, cuando el dual está considerado con respecto a las topologías compatibles con la dualidad. En particular, $\langle X, X^* \rangle$ y $\langle X^*, X^{**} \rangle$ denotan la dualidad entre $(X, \|\cdot\|)$ y (X^*, w^*) y la dualidad entre $(X^*, \|\cdot\|)$ y (X^{**}, w^{**}), respectivamente.

Para una espacio topológico (Z, τ) y un conjunto $A \subseteq Z$, se denota por $\mathrm{Int}_\tau(A)$ (o $\mathrm{Int}(A)$ cuando no exista confusión) al interior de A con respecto a τ, y por $\overline{A}^\tau$ (o $\overline{A}$ cuando no exista confusión), a su adherencia. Cuando τ sea la topología débil, débil-* o débil-**, se escribe simplemente $\overline{A}^w$, $\overline{A}^*$ o $\overline{A}^{**}$, respectivamente. Finalmente, se denota por $\mathrm{Fr}_\tau(A)$ (o

Fr(A) cuando no exista confusión) a la frontera de A.

1.1. Funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$

Definición 1.1 (Recta real extendida) *Se define la recta real extendida como el conjunto* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*, dotado de las reglas aritméticas usuales en* $\mathbb{R}$ *y las siguientes reglas nuevas:*

1. $(+\infty) + \alpha = \alpha + (+\infty) = +\infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $(-\infty) + \alpha = \alpha + (-\infty) = -\infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
3. $\alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \alpha = (+\infty)$*, si* $\alpha > 0$*, y* $\alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \alpha = (-\infty)$*, si* $\alpha < 0$.
4. $\alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \alpha = (-\infty)$*, si* $\alpha > 0$*, y* $\alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \alpha = (+\infty)$*, si* $\alpha < 0$.
5. $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0.$
6. $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = (+\infty).$

Además, se define el conjunto $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, dotado de las mismas reglas aritméticas de* $\overline{\mathbb{R}}$ *cuando tenga sentido. También se denota por* $\mathbb{R}_+$ *al intervalo* $[0, +\infty)$.

Si en $\overline{\mathbb{R}}$ se considera la topología generada por τ_0 y los conjuntos de la forma $(\alpha, +\infty] = (\alpha, +\infty) \cup \{+\infty\}$ y $[-\infty, \alpha) = \{-\infty\} \cup (-\infty, \alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\mathbb{R}}$ resulta ser un espacio topológico compacto. No obstante, bajo esta topología la suma y multiplicación definidas anteriormente no son continuas.

Se asume, salvo que se diga lo contrario, que $\overline{\mathbb{R}}$ está dotado de la topología antes descrita y que $\mathbb{R}_\infty$ está dotado de la topología traza correspondiente (de tal manera que $\mathbb{R}_\infty$ sea subespacio topológico de $\overline{\mathbb{R}}$). Esta topología se denotará también por τ_0, ya que es la extensión natural de la topología usual en $\mathbb{R}$, cuando se trabaja en el contexto de análisis convexo.

La necesidad de introducir $\overline{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}_\infty$ radica en que el objeto matemático que se estudia en el análisis convexo son las funciones sobre un espacio de Banach (o un espacio localmente convexo) a valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

Ejemplo 1.2 Algunos ejemplos importantes de funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ son:

(a) Dado $A \subseteq X$, se define la función $I_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

I_A se denomina **función indicatriz de A**.

(b) Dado $A \subseteq X$, se define la función $\sigma_A : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\sigma_A(x^*) = \sup_{x \in A} \langle x^*, x \rangle.$$

σ_A se denomina **función soporte de A**.

(c) Para una familia de funciones $\{f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}\}_{i \in I}$, se define la función supremo $(\sup_i f_i) : X \to \overline{\mathbb{R}}$ por

$$\left(\sup_{i \in I} f_i\right)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x),$$

con la convención de que si $I = \emptyset$, $\sup_I f_i \equiv -\infty$. Análogamente se define la función $\inf_I f_i$ con la convención que si $I = \emptyset$, entonces $\inf_I f_i \equiv +\infty$.

En lo que sigue, se denota por $\underline{\omega}$ a la función idénticamente $-\infty$ y por $\overline{\omega}$ a la función idénticamente $+\infty$, indistintamente del espacio sobre el cual estén definidas.

Cabe destacar que en el ejemplo anterior, si se considera el par en dualidad $\langle X, X^* \rangle$, entonces para un conjunto $A \subseteq X^*$ la función soporte de A estaría definida sobre X y no sobre X^{**}, por lo que el dominio de σ_A depende de las topologías sobre las cuales se está trabajando. De todas maneras, la función soporte siempre se denota igual y dependiendo del contexto se determina el dominio.

Por otro lado, que las funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ sean un objeto central de estudio está motivado por la teoría de optimización, donde se encuentra una gran parte de la motivación de las nociones y resultados del análisis convexo. El problema central de la optimización es resolver

$$\inf_{x \in C} f(x),$$

donde C es el conjunto de los puntos factibles. Cuando C es un subconjunto de X, es posible reescribir el problema anterior como $\inf_X f + I_C$ y por lo tanto, el problema más general corresponde a resolver $\inf_X f$ con f a valores en $\overline{\mathbb{R}}$. Algunas nociones importantes relacionadas con estas funciones son las siguientes:

Definición 1.3 *Dada $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen*

1. *El **epigrafo** de f como el conjunto*

$$\operatorname{epi} f = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq \lambda\}.$$

2. *El **dominio efectivo** de f como el conjunto*

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X \ : \ f(x) < +\infty\}.$$

3. *El **conjunto de nivel inferior** (o subnivel) de parámetro α como el conjunto*

$$\Gamma_\alpha(f) = \{x \in X \ : \ f(x) \leq \alpha\}.$$

4. El ***argmin*** *de f como el conjunto*

$$\operatorname{argmin} f = \left\{ x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(x) = \inf_X f \right\}.$$

Para revisar propiedades y relaciones de estos conjuntos ver [12, Capítulo 1]. Se introduce a continuación dos clases de funciones a valores en $\overline{\mathbb{R}}$, las funciones propias y las funciones convexas.

Definición 1.4 (Función Propia) *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice propia si*

1. $\forall x \in X,\ f(x) > -\infty$*, y además*

2. $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Definición 1.5 (Función Convexa) *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice convexa si para todo $x_1, x_2 \in X$ y para todo $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Asimismo, se dice que f es ***cóncava*** *si $-f$ es convexa.*

Es importante destacar que las definiciones 1.3, 1.4 y 1.5 son algebraicas, no topológicas.

Ejemplo 1.6 (Funciones convexas) Algunos ejemplos importantes de funciones convexas son:

(a) Para $A \subseteq X$, σ_A es convexa. En particular, la norma en X es convexa.

(b) Para $\{f_i\}_{i \in I}$ familia de funciones convexas sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $\sup_I f_i$ es convexa.

(c) Sea Y un espacio vectorial y $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Entonces, la función $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $h(x) = \inf\limits_{y \in Y} g(x,y)$ es convexa.

(d) Para $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, se define su **inf-convolución** como la función $f \square g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$(f \square g)(x) = \inf_{y \in X} \{ f(y) + g(x-y) \}.$$

Si f y g son convexas, entonces $f \square g$ también lo es.

(e) Dado $C \subseteq X$ convexo con $0 \in \operatorname{Int}(C)$, se define la función $p_C : X \to \mathbb{R}_+$ por

$$p_C(x) = \inf\{ \lambda > 0 \ : \ \lambda^{-1} x \in C \}.$$

p_C se denomina **funcional de Minkowski de C**.

Los funcionales de Minkowski son la generalización de las normas en los espacios de Banach y resultan un objeto de estudio central en la teoría de espacios de Banach. Algunas de las propiedades que cumplen son las siguientes.

Proposición 1.7 *Sea $C \subseteq X$ convexo con $0 \in \mathrm{Int}(C)$. Se tiene que*

1. *p_C es un funcional no-negativo, sublineal (i.e. subaditiva y positivamente homogénea) y continuo.*

2. *Para $x \in X$, $p_C(x) = 0$ si y sólo si $\{\lambda x \ : \ \lambda > 0\} \subseteq C$, por lo que si C es acotado, entonces $p_C(x) = 0 \iff x = 0$.*

3. $\mathrm{Int}(C) = \{x \in X \ : \ p_C(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x \in X \ : \ p_C(x) \leq 1\} = \overline{C}$. *Análogamente,*

$$p_{\mathrm{Int}(C)} \equiv p_C \equiv p_{\overline{C}}.$$

4. *p_C es una seminorma (i.e. p_C también satisface $p_C(x) = p_C(-x)$, para todo $x \in X$) si y sólo si $\overline{C}$ (o equivalentemente, $\mathrm{Int}(C)$) es simétrico.*

De la proposición anterior, es fácil ver que todo funcional $p : X \to \mathbb{R}_+$ sublineal y continuo es, de hecho, un funcional de Minkowski: Basta con considerar $C = \{x \in X \ : \ p(x) \leq 1\}$.

1.2. Semicontinuidad inferior

En está sección, se considera una topología τ cualquiera sobre X (no necesariamente la inducida por la norma o la topología débil), de tal forma que (X, τ) sea un espacio topológico. Para un punto $x \in X$, se denota el conjunto de vecindades de x para la topología τ por $\mathcal{V}_\tau(x)$, o simplemente $\mathcal{V}(x)$ cuando no exista confusión.

Definición 1.8 (lím inf y lím sup) *Sea $(\Lambda, \preceq)$ un conjunto dirigido y $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en (X, τ). Se definen el límite inferior de (x_α) y el límite superior de (x_α) como*

1. $\liminf_{\alpha} x_\alpha = \sup_{\alpha \in \Lambda} \inf_{\beta \in \Lambda, \beta \succeq \alpha} x_\beta$.

2. $\limsup_{\alpha} x_\alpha = \inf_{\alpha \in \Lambda} \sup_{\beta \in \Lambda, \beta \succeq \alpha} x_\beta$.

Asimismo, para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in X$ se definen el límite inferior de f cuando x' tiende a x y el límite superior de f cuando x' tiende a x como

1. $\liminf_{x' \to x} f(x') = \sup_{V \in \mathcal{V}(x)} \inf_{x' \in V} f(x')$.

2. $\limsup_{x' \to x} f(x') = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup_{x' \in V} f(x')$.

Definición 1.9 (semicontinuidad inferior y superior) *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice* ***τ-semicontinua inferior*** *[τ-sci.] en $x \in X$ si*

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y).$$

Análogamente, se dice que f es ***τ-semicontinua superior*** *[τ-scs.] en $x \in X$ si*

$$f(x) \geq \limsup_{y \to x} f(y).$$

Si para todo $x \in X$ f es τ-sci. [resp. τ-scs.] en x, se dice simplemente que f es τ-sci. [resp. τ-scs.] sobre X.

Cuando no existe ambigüedad sobre la topología en X, se escribe simplemente sci. o scs. Es claro además que si f es sci. y scs. en un punto, entonces es continua en ese punto. En análisis convexo, la teoría se desarrolla principalmente con funciones convexas sci.

Proposición 1.10 *Para una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *f es τ-sci. sobre X.*
2. *Para todo $x \in X$ se tiene que*
$$\forall \lambda < f(x),\ \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x),\ \forall y \in V,\ f(y) > \lambda.$$
3. *$\operatorname{epi} f$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$ para la topología $\tau \times \tau_0$.*
4. *$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \Gamma_\alpha(f)$ es cerrado en (X, τ).*

Demostración. Ver [12, Proposición 1.2.1]. □

Proposición 1.11 *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de funciones sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ τ-sci., entonces $\sup_{i\in I} f_i$ es τ-sci. Además, si I es un conjunto finito, entonces $\min_I f_i$ y $\sum_I f_i$ son ambas τ-sci.*

Demostración. Ver [12, Proposición 1.2.2]. □

Teorema 1.12 (Principio Variacional de Ekeland) *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ una función propia, sci. y acotada inferiormente (i.e. $\inf_X f > -\infty$). Sean $\varepsilon, \lambda > 0$ cualesquiera y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \leq \inf_X f + \varepsilon$. Entonces existe $\overline{x} \in X$ tal que*

1. *$f(\overline{x}) \leq f(x_0)$.*
2. *$d(x_0, \overline{x}) \leq \lambda$.*
3. *$f(\overline{x}) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \overline{x})$, para todo $x \in X \setminus \{\overline{x}\}$.*

Demostración. Ver [12, Proposición 1.2.4]. □

En ocasiones, para una función $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ no necesariamente sci., es de gran utilidad considerar la función semicontinua inferior que "mejor" aproxima a f.

Definición 1.13 (Clausura de una función) *Para $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, se define la **$\tau$-clausura de f** (también llamada regularizada τ-sci. de f), denotada por $\overline{f}^{\tau}$ (o simplemente $\overline{f}$ cuando no exista confusión), por*

$$\overline{f}^{\tau} = \sup\{g \;:\; g : X \to \mathbb{R}_\infty \text{ es } \tau\text{-sci.}, \, g \leq f\}.$$

Algunas propiedades importantes de la clausura de una función son las siguientes:

Proposición 1.14 *Dada $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, se tiene que*

1. $\operatorname{epi}(\overline{f}^{\tau}) = \overline{\operatorname{epi} f}^{(\tau\times\tau_0)}$. *En particular, $\overline{f}^{\tau}$ es τ-sci.*
2. $\overline{f}^{\tau}(x) = \liminf\limits_{y\to x} f(y)$.
3. *f es τ-sci.* $\iff f \leq \overline{f}^{\tau} \iff f = \overline{f}^{\tau}$.

Demostración. Ver [12, Proposición 1.5.1]. □

Proposición 1.15 *Para $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ y $x \in X$, se tiene que*

$$\overline{f}^{\tau}(x) = \min\left\{\liminf_{d} f(x_d) \;:\; (x_d)_{d\in D} \text{ red convergente a } x\right\}.$$

En particular, si (X, τ) es metrizable

$$\overline{f}^{\tau}(x) = \min\left\{\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \;:\; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión convergente a } x\right\}.$$

Demostración. Ver [12, Proposición 1.5.2]. □

En la proposición anterior, el hecho de que se escriba mínimo y no ínfimo es para explicitar que el ínfimo se alcanza, es decir, que existe una red (o sucesión, en el caso metrizable) $(x_d)_{d\in D}$ convergente a x tal que $\liminf f(x_d) = \overline{f}^{\tau}(x)$.

Se cierra esta sección definiendo el conjunto de funciones que gozan de todas las "buenas propiedades" que se han enunciado hasta esta parte y que concentran gran parte del interés de esta memoria.

Definición 1.16 ($\Gamma_0(X)$) *Se define $\Gamma_0(X, \tau)$ (o simplemente $\Gamma_0(X)$ cuando τ sea la topología inducida por la norma) como el conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ que son convexas, propias y τ-sci.*

1.3. Propiedades de las funciones en $\Gamma_0(X)$

En esta sección se presentan las propiedades más importantes de las funciones en $\Gamma_0(X)$, que se utilizan regularmente a lo largo de esta memoria y que son la base de muchas de las demostraciones de las siguientes secciones de este capítulo.

Teorema 1.17 *Sea $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ convexa con $\text{Int}[\text{dom}\, f] \neq \emptyset$. Las siguientes son equivalentes:*

1. *f es continua en $\text{Int}[\text{dom}\, f]$.*
2. *f es acotada superiormente en un abierto.*
3. *f es localmente Lipschitz en $\text{Int}[\text{dom}\, f]$.*

Demostración. Ver [12, Teorema 2.1.1]. □

Observación Una consecuencia directa del teorema anterior es que $x \in \text{Int}[\text{dom}\, f]$.

Proposición 1.18 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$. Entonces f es continua en $\text{Int}[\text{dom}\, f]$.*

Demostración. Ver [5, Proposición 3.3]. □

Teorema 1.19 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$ y sea $x \in \text{Int}[\text{dom}\, f]$. Se tiene que existe una vecindad U de x contenida en $\text{Int}[\text{dom}\, f]$ y una función $f_x : X \to \mathbb{R}$ convexa y Lipschitz tales que*

$$f_x\big|_U = f\big|_U.$$

Demostración. Ver [5, Lema 2.31]. □

Las proposiciones anteriores muestran que las funciones en $\Gamma_0(X)$ tienen buenas propiedades de continuidad en el interior de su dominio. Junto con esto, también es importante tener presente las propiedades de diferenciabilidad que estas funciones poseen. Para esto, se introduce la siguiente definición:

Definición 1.20 (Derivada direccional) *Sea $f : X \to \mathbb{R}_\infty$. Para $x \in \text{dom}\, f$, se define la **derivada direccional de f en x**, denotada por $f'(x; \cdot)$, como la función (cuando existe) dada por*

$$\begin{aligned} f'(x;\cdot) : X &\to \overline{\mathbb{R}} \\ h &\mapsto f'(x;h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}. \end{aligned}$$

Proposición 1.21 *Sea $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ convexa y propia. Para $x \in \text{dom}\, f$ se tiene que*

$f'(x;\cdot)$ *está bien definida, es una función sublineal y*

$$\forall h \in X,\ f'(x;h) = \inf_{t>0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

Además, si $x \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$*, entonces* $\mathrm{dom}\, f'(x;\cdot) = X$*, y si* f *es continua en* x*, entonces* $f'(x;\cdot)$ *es continua.*

Demostración. Ver [11, Teorema 2.1.13] y [5, Corolario 1.7].. □

La proposición anterior permite generalizar de manera notable la noción de derivada direccional.

Definición 1.22 (ε-derivada direccional) *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa y propia, y sea* $x \in \mathrm{dom}\, f$*. Para* $\varepsilon \geq 0$*, se define la* ε*-derivada direccional de* f *en* x*, denotada por* $f'_\varepsilon(x;\cdot)$*, como la función*

$$\begin{aligned} f'_\varepsilon(x;\cdot) &: X \to \overline{\mathbb{R}} \\ &h \mapsto f'_\varepsilon(x;h) = \inf_{t>0} \frac{f(x+th)-f(x)+\varepsilon}{t}. \end{aligned}$$

Proposición 1.23 *Para* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *convexa y propia,* $x \in \mathrm{dom}\, f$ *y* $\varepsilon > 0$*, se tiene que*

1. $f'_\varepsilon(x;\cdot)$ *es sublineal con* $\mathrm{dom}\, f'_\varepsilon(x;\cdot) = \mathrm{cone}(\mathrm{dom}\, f - x)$*, donde para* $A \subseteq X$

$$\mathrm{cone}(A) = \bigcap \{C \subseteq X \ :\ C \text{ cono y } A \subseteq X\}.$$

2. *Para todo* $h \in X$*,*

$$f'(x;h) = \lim_{\delta \searrow 0} f'_\delta(x;h) = \inf_{\delta>0} f'_\delta(x;h).$$

3. *Si además* $x \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$*, entonces* $\mathrm{dom}\, f_\varepsilon(x;\cdot) = X$*.*

Demostración. Ver [11, Teorema 2.1.14]. □

En lo que sigue, cuando $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sea Gâteaux-Diferenciable en un punto $x \in X$, se escribe que f es G-Diff. en x y el diferencial de Gâteaux de f en x se denota por $df(x)$. Análogamente, si f es Fréchet-Diferenciable en x, se escribe que f es F-Diff. en x y el diferencial de Fréchet de f en x se denota por $Df(x)$.

Corolario 1.24 *Sea* $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ *convexa y propia, y sea* $x \in \mathrm{dom}\, f$*. Si* f *es continua en* x*, entonces* f *es Gâteaux-Diferenciable si y sólo si* $-f'(x;-h) = f'(x;h)$*, para todo* $h \in X$*. En tal caso,* $df(x) = f'(x;\cdot)$*.*

Demostración. Ver [5, Corolario 1.7] y las observaciones después de [5, Definción 1.3]. □

Proposición 1.25 *Sea* $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ *convexa, propia y con* $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f] \neq \emptyset$*. Para* $x \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]$*, se tiene que*

1. f *es F-Diff. en* x *si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x) < t\varepsilon,$$

para todo $y \in S_X$ *y todo* $t \in (0, \delta)$*.*

2. f *es G-Diff. en* x *si y sólo si para todo* $y \in X$*,*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + ty) + f(x - ty) - 2f(x)}{t} = 0.$$

Demostración. Ver [5, Proposición 1.23 y Ejercicio 1.24]. □

Teorema 1.26 *Para* $f \in \Gamma_0(X)$*, el conjunto*

$$G = \{x \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f] \ : \ f \text{ es F-Diff. en } x\}$$

es un G_δ *(eventualmente vacío).*

Demostración. Ver [5, Proposición 1.25]. □

1.4. Conjugada de Fenchel y Subdiferencial

En esta sección, se describen dos de las herramientas fundamentales de esta memoria: La conjugada de Fenchel y el subdiferencial de Fenchel (o simplemente subdiferencial). Para esto es necesario introducir algunas definiciones y notaciones.

Definición 1.27 (Envoltura convexa) *Sea* $A \subseteq X$ *y* τ *una topología sobre* X*. Se define*

1. *La* ***envoltura convexa*** *de* A *como el menor convexo que lo contiene, es decir,*

$$\operatorname{co}(A) = \bigcap \{C \subseteq X \ : \ C \text{ convexo, } A \subseteq C\}.$$

2. *La* ***envoltura convexa*** $\boldsymbol{\tau}$***-cerrada*** *de* A *como el menor convexo* τ*-cerrado que lo contiene, es decir,*

$$\overline{\operatorname{co}}^\tau(A) = \bigcap \{C \subseteq X \ : \ C \text{ convexo } \tau\text{-cerrado, } A \subseteq C\}.$$

Cuando τ es la topología inducida por la norma, se escribe simplemente $\overline{\operatorname{co}}(A)$. Análogamente, si τ es la topología débil, débil-* o débil-** (cuando tenga sentido), se escribe $\overline{\operatorname{co}}^w(A)$, $\overline{\operatorname{co}}^*(A)$ o $\overline{\operatorname{co}}^{**}(A)$, respectivamente.

Observación Es fácil ver que para $A \subseteq X$,

$$\overline{\text{co}}^{\tau}(A) = \overline{\text{co}(A)}^{\tau}.$$

En efecto, la inclusión de izquierda a derecha es directa de la definición de la envoltura convexa cerrada. Para la otra inclusión, basta ver que $\overline{\text{co}}^{\tau}(A)$ es cerrado y contiene a $\text{co}(A)$. Luego, como $\overline{\text{co}(A)}^{\tau}$ es el cerrado más pequeño que contiene a $\text{co}(A)$, se concluye.

Definición 1.28 (Inyección canónica de X en X^{**}) *Se define la función $\hat{\imath} : X \to X^{**}$ dada por $\hat{\imath}(x) = \hat{x}$, donde $\hat{x}$ es el elemento de X^{**} dado por*

$$\langle \hat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle.$$

Para $A \subseteq X$, se denota por $\hat{A}$ al conjunto $\hat{\imath}(A)$.

Se sabe que $\hat{\imath}$ es una inyección continua y que además $\hat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**}. Cuando no exista ambigüedad, se obvia la notación $\hat{A}$ y se escribe A tanto para expresar el conjunto en X como el conjunto $\hat{\imath}(A)$. Uno de los resultados más fuertes con respecto a la topología débil-** es el teorema de Goldstine, enunciado a continuación:

Teorema 1.29 (Goldstine) *B_X es w^{**}-denso en $B_{X^{**}}$.*

Demostración. Ver [3, Teorema 3.96]. □

Con estas nociones sobre conjuntos convexos y la relación entre X y X^{**}, se puede desarrollar el concepto de "funciones duales". Cada función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tiene asociada una función definida sobre X^* a valores en $\overline{\mathbb{R}}$, que se conoce como la conjugada de Fenchel.

Definición 1.30 (Conjugada de Fenchel) *Para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, se define la* ***conjugada de f****, como la función de X^* a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}.$$

Análogamente, se define la ***biconjugada de f****, como la función de X^{**} a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$f^{**} \equiv (f^*)^*.$$

Ejemplo 1.31 Conjugadas de Fenchel que usaremos son

(a) Dado $A \subseteq X$ no vacío, se tiene

$$\sigma_A = (I_A)^* \quad \text{y} \quad (\sigma_A)^* = I_{\overline{\text{co}}^{**}(\hat{A})}.$$

En particular, se tiene que $\sigma_A = \sigma_{\overline{\text{co}}(A)}$.

(b) Para $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $(f \square g)^* = f^* + g^*$.

(c) Para $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexas tales que existe $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ con f **continua** en x, se tiene que $(f+g)^* = f^* \Box g^*$.

La conjugada de Fenchel también se puede introducir en el contexto de espacios localmente convexos en dualidad (ver [11, Sección 2.3]). En tal caso, se dan otras condiciones suficientes para obtener resultados de la forma del ejemplo 1.31.(c) (ver [11, Corolario 2.3.5]).

Proposición 1.32 *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se tiene que*

1. $f^* \in \Gamma_0(X^*, w^*) \cup \{\underline{\omega}, \overline{\omega}\}$. *En particular, si $f \not\equiv +\infty$ y tiene un minorante afín continuo, entonces $f^* \in \Gamma_0(X^*, w^*)$.*

2. $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x^*, x\rangle$, *para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$.*

3. *Si $f \leq g$, entonces $f^* \geq g^*$.*

4. $f^{**}\big|_X \leq \overline{f} \leq f$. *En particular, si $f \in \Gamma_0(X)$, entonces $f^{**}\big|_X = f$.*

5. *Para $h \in \Gamma_0(X^*)$, se tiene que $\left(h^*\big|_X\right)^* = h$ si y sólo si h es w^*-sci.*

Demostración. Ver [10, Proposición 4.4.1 y 4.4.2] □

Observación De la proposición 1.32.5, se concluye directamente que $\Gamma_0(X^*, w^*)$ es el conjunto de todas las funciones $g : X^* \to \mathbb{R}_\infty$ propias y tales que existe una función $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ de la cual son conjugadas, es decir, que satisface que $g = f^*$.

Observación En lo que sigue, salvo que se diga lo contrario, para un conjunto $A \subseteq X^{**}$ se entenderá por σ_A la función soporte de A restringida a X^*. Con esta convención y aplicando la proposición 1.32.5, se tiene que para $A \subseteq X$,

$$\sigma_A = \sigma_{\overline{\operatorname{co}}(A)} = \sigma_{\overline{\operatorname{co}}^{**}(A)}.$$

Así como se define la clausura de una función, también es útil trabajar con la función convexa y semicontinua inferior que "mejor subaproxima" a una función.

Definición 1.33 (Envoltura convexa cerrada de f) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y τ una topología sobre X. Se define la **envoltura convexa τ-cerrada de f**, denotada por $\overline{\operatorname{co}}^\tau f$, como la función sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ dada por*

$$\overline{\operatorname{co}}^\tau f = \sup\{g : \ g : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ convexa y } \tau\text{-sci.}, \ g \leq f\}.$$

Cuando τ es la topología inducida por la norma, se denota simplemente por $\overline{\operatorname{co}}\, f$ a la envoltura convexa cerrada de f. Análogamente, se denota por $\overline{\operatorname{co}}^* f$ y $\overline{\operatorname{co}}^{**} f$ cuando τ es la topología débil-* o débil-**, respectivamente.

Proposición 1.34 *Para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que*

1. $\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}} f) = \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{epi} f)$.

2. $f^* = \left(\overline{f}\right)^* = (\overline{\operatorname{co}} f)^*$.

3. *Si f es propia, entonces* $f^{**}\big|_X = \overline{\operatorname{co}} f$.

Demostración. La demostración de 1. es una aplicación directa del teorema de Hahn-Banach. Para 2. y 3. ver [10, Proposición 4.4.3], con la acotación de que en 3. el caso donde $\overline{\operatorname{co}} f \in \{\underline{\omega}, \overline{\omega}\}$ es directo de la relación $(\underline{\omega})^* = \overline{\omega}$ y $(\overline{\omega})^* = \underline{\omega}$. □

Para funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se introduce una generalización de derivada, el subdiferencial. Este es el objeto de estudio principal del análisis convexo, cuando f rd una función convexa.

Definición 1.35 (Subdiferencial) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in \operatorname{dom} f$. Se dice que $x^* \in X^*$ es un **subgradiente de f en x** si*

$$\forall y \in X,\ \ f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y).$$

*Se define el **subdiferencial de f en x**, denotado por $\partial f(x)$, al conjunto de subgradientes de f en x. Cuando $x \notin \operatorname{dom} f$, se sigue la convención de que $\partial f(x) = \emptyset$.*

Proposición 1.36 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propia, $x \in \operatorname{dom} f$ y $x^* \in X^*$. Se tiene que*

1. $x^* \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle \iff f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle$.

2. *Si $f \in \Gamma_0(X)$, entonces $x^* \in \partial f(x) \iff \hat{x} \in \partial f^*(x^*)$.*

3. *$\partial f(x)$ es un conjunto convexo w^*-cerrado (eventualmente vacío).*

4. *Si $\partial f(x) \neq \emptyset$, entonces $\overline{\operatorname{co}} f = \overline{f} = f$ y $\partial(\overline{\operatorname{co}} f)(x) = \partial\left(\overline{f}\right)(x) = \partial f(x)$. En particular, $f(x) = f^{**}(x)$ y por lo tanto f es propia y sci. en x.*

Demostración. Para 1., 2. y 3. ver [12, Proposición 2.4.1 y 2.4.2]. Para 4. ver [11, Teorema 2.4.1.(ii)]. □

Interesa garantizar cuando el subdiferencial es no vacío. En el caso que se esté trabajando con una función convexa, el siguiente teorema da condiciones suficientes.

Teorema 1.37 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y $x \in \operatorname{dom} f$. Si f es continua en x, entonces $\partial f(x)$ es no-vacio y acotado.*

Demostración. Ver [5, Proposición 1.11]. □

Gracias al teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (ver [3, Teorema 3.37]) se sabe que $A \subseteq X^*$ es w^*-compacto si y sólo si A es w^*-cerrado y acotado. Por lo tanto, bajo las condiciones del teorema anterior, se concluye que $\partial f(x)$ es w^*-compacto.

Definición 1.38 *Para $A, B \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T \subseteq \mathbb{R}$ se definen*

1. $\lambda A = \{\lambda x \ : \ x \in A\}$*, con la convención que* $\lambda \cdot \emptyset = \emptyset$.
2. $T \cdot A = \{\lambda x \ : \ \lambda \in T, \ x \in A\}$*, con la convención que* $\emptyset \cdot A = T \cdot \emptyset = \emptyset$.
3. $A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$*, con la convención que* $A + \emptyset = \emptyset + B = \emptyset$.

Con estas convenciones, el álgebra de subdiferenciales es como sigue:

Proposición 1.39 *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se tiene que*

1. *Para todo $\lambda \geq 0$ y todo $x \in X$, $\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$.*
2. *Para todo $x \in X$, $\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial(f + g)(x)$.*
3. *Si $f, g \in \Gamma_0(X)$ y f es continua en algún punto $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, entonces*
$$\forall x \in X, \partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f + g)(x).$$
4. *Sean $x \in X$ y $x_1, x_2 \in X$ tal que $x = x_1 + x_2$. Se tiene que*
$$\partial(f \square g)(x) = \partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \Longleftrightarrow (f \square g)(x) = f(x_1) + g(x_2).$$
Más aún, si $\partial f(x_1) \cap \partial g(x_2) \neq \emptyset$, entonces se cumple $(f \square g)(x) = f(x_1) + g(x_2)$.

Demostración. 1. y 2. son directas de la definición. Para 3. ver [12, Proposición 2.4.7]. Para 4. ver [11, Corolario 2.4.7]. □

El resultado de la proposición 1.39.3 se conoce como teorema de Moerau-Rockafellar. Un ejemplo importante de subdiferencial es el caso de las indicatrices.

Ejemplo 1.40 Dado $A \subseteq X$ convexo, cerrado y no-vacío, se tiene

$$\partial I_A(x) = \begin{cases} \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \ \forall y \in A\} & \text{si } x \in A. \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

$\partial I_A(x)$ también se conoce como **cono normal de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{x}$** y se denota por $N_A(x)$.

El subdiferencial permite generalizar los resultados de puntos críticos para funciones diferenciables.

Proposición 1.41 *Sean $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in \operatorname{dom} f$. Entonces*

$$0 \in \partial f(x) \Longleftrightarrow x \in \operatorname{argmin} f \qquad \textit{(con } f(x) \textit{ finito).}$$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte es directa de la definición. Para la segunda ver [10, Proposición 2.1.14]. □

Para cerrar esta sección, se introduce la noción de ε-subdiferencial, que, dentro de sus aplicaciones, sirve para caracterizar ε-mínimos.

Definición 1.42 (ε-subdiferencial) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\varepsilon \geq 0$. Para $x \in \operatorname{dom} f$, se define el **$\varepsilon$-subdiferencial de f en x**, denotado por $\partial_\varepsilon f(x)$, como el conjunto de los $x^* \in X^*$ que satisfacen que*

$$\forall y \in X, \;\; f(x) + \langle x^*, y - x\rangle \leq f(y) + \varepsilon.$$

Para $x \notin \operatorname{dom} f$, se asume la convención $\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset$.

Es claro de la definición que $\partial_0 f(x) = \partial f(x)$. Además, se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 1.43 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que*

1. *$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \partial_\delta f(x)$ y $\partial_\varepsilon f(x) = \cap_{\delta > \varepsilon} f(x)$.*
2. *$\partial_\varepsilon f(x)$ es convexo y w^*-cerrado.*
3. *Para todo $x^* \in X^*$, $x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \Longleftrightarrow f(x) + f^*(x^*) \leq \langle x^*, x\rangle + \varepsilon \Longrightarrow x \in \partial_\varepsilon f^*(x^*)$.*
4. *Si $f \in \Gamma_0(X)$, entonces $\partial_\varepsilon f(x) \neq \emptyset$ y se tiene que*
$$x^* \in \partial_\varepsilon f(x) \Longleftrightarrow x \in \partial_\varepsilon f^*(x^*)$$
5. *Si $f \in \Gamma_0(X)$ y f es continua en $x \in \operatorname{dom} f$, entonces $\partial_\varepsilon f(x)$ es acotado (i.e. w^*-compacto).*
6. *x es un ε-mínimo (i.e. $f(x) \leq \inf_X f + \varepsilon$) si y sólo si $0 \in \partial_\varepsilon f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. y 6. son directas de la definición. Para 2. y 3. ver [11, Teorema 2.4.2]. Para 4. ver [10, Proposición 4.1.24] y [11, Teorema 2.4.4.(iv)]. Para 5. ver [11, Teorema 2.4.9]. □

Se cierra esta sección con una aplicación del principio variacional de Ekeland que permite aproximar elementos del ε-subdiferencial por elementos del subdiferencial de una función y un corolario sobre Fréchet-Diferenciabilidad de funciones conjugadas.

Teorema 1.44 (Principio Variacional de Brønsted-Rockafellar) *Sea $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ propia y sci. Sean además $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ y $x_0^* \in \partial_\varepsilon f(x_0)$. Se tiene entonces que existe $x \in \operatorname{dom} f$ y $x^* \in X^*$ tales que*

1. *$x^* \in \partial f(x)$.*
2. *$\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$.*

3. $\|x^* - x_0^*\| \leq \lambda$.

En particular, el conjunto de puntos donde el subdiferencial de f es no-vacío es denso en $\operatorname{dom} f$ *(Este último resultado se conoce como el teorema de Brønsted-Rockafellar).*

Demostración. Ver [5, Teorema 3.17] □

Corolario 1.45 *Sea $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ y $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]$. Si f es F-Diff. en x^*, entonces $\nabla f(x^*) \in \hat{X}$.*

Demostración. Ver [11, Corolario 3.3.4]. □

1.5. Funciones multivaluadas y propiedades del subdiferencial

En lo que sigue de esta sección, (S, σ) y (T, τ) serán dos espacios topológicos separados.

Definición 1.46 (Funciones multivaluadas) *Se dice que R es función multivaluada (o multifunción) de S en T, denotada por $R : S \rightrightarrows T$, si $R(s)$ es un* ***subconjunto*** *de T, para todo $s \in S$.*

En primera instancia, las funciones multivaluadas de S en T no se diferencian de las funciones sobre S a valores en $\mathcal{P}(T)$ (donde $\mathcal{P}(T)$ denota el conjunto potencia de T). Sin embargo, se hace la distinción para introducir las siguientes definiciones que no tendrían sentido para funciones:

Definición 1.47 *Para $R : S \rightrightarrows T$ se definen*

1. *El* ***dominio (o dominio efectivo) de R****, denotado por $D(R)$, como el conjunto*

$$D(R) = \{s \in S \ : \ R(s) \neq \emptyset\}.$$

2. *La* ***multifunción inversa de R****, denotado por R^{-1}, como la función multivaluada $R^{-1} : T \rightrightarrows S$ dada por*

$$R^{-1}(t) = \{s \in S \ : \ t \in R(s)\}.$$

3. *El* ***grafo de R*** *como el conjunto*

$$\operatorname{gph}(R) = \{(s, t) \in S \times T \ : \ t \in R(s)\}.$$

Por otro lado, dado $A \subseteq S$, se define el ***conjunto imagen de A por R*** *como*

$$R(A) = \bigcup_{s \in A} R(s).$$

Cuando $A = T$*, se escribe simplemente* $\mathrm{Im}(R) \equiv R(T)$*. Finalmente, dada otra función multivaluada* $M : S \rightrightarrows T$*, se escribe que* $R \subseteq M$ *si* $\mathrm{gph}(R) \subseteq \mathrm{gph}(M)$*, o equivalentemente si*

$$\forall s \in S, \ R(s) \subseteq M(s).$$

Dado que se está trabajando con espacios topológicos, es natural introducir nociones de continuidad para funciones multivaluadas. En esta memoria, sólo será necesario considerar la semicontinuidad superior de multifunciones.

Definición 1.48 (Semicontinuidad superior de multifunciones) *Sea* $R : S \rightrightarrows T$ *y sea* $s \in S$*. Se dice que*

1. *R es σ-τ semicontinua superior (abreviado σ-τ-scs.) en s si para todo abierto $V \subseteq T$ tal que $R(s) \subseteq V$, existe una vecindad U de s tal que $R(U) \subseteq V$.*

2. *Cuando (T, τ) es un espacio vectorial topológico, se dice que R es σ-τ Hausdorff-semicontinua superior (abreviado **$\boldsymbol{\sigma}$-$\boldsymbol{\tau}$ H-scs.**) en s si para toda vecindad V de 0 en T, existe una vecindad U de s tal que $R(U) \subseteq R(s) + V$.*

3. *Cuando (T, d) es un espacio métrico, se dice que R es **$\boldsymbol{\sigma}$-$\boldsymbol{\tau_d}$ H-scs.** en s si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de s tal que $R(U) \subseteq [R(s)]^\varepsilon$, donde para $D \subseteq T$ se define*
$$D^\varepsilon = \{t \in T \ : \ d(D, t) < \varepsilon\}.$$

En el caso que T sea un espacio vectorial normado, las dos definiciones de Hausdorff-semicontinuidad superior coinciden. Por otro lado, es claro de la definición que si una multifunción es semicontinua superior, entonces (cuando tiene sentido) también es Hausdorff-semicontinua superior.

Ejemplos claros de funciones multivaluadas son el subdiferencial y el ε-subdiferencial, que son multifunciones de X en X^*. En esta memoria, el estudio se concentrará en estas multifunciones, junto con algunas variaciones de las mismas.

Proposición 1.49 *Sea* $R : X \rightrightarrows X^*$ *y* $x \in D(R)$*. Se tiene que*

1. *R es norma-w^*-scs. [resp. norma-norma-scs.] en x si y sólo si para toda sucesión $(x_n) \subseteq D(R)$ convergente a x y todo w^*-abierto [resp. norma-abierto] V en X^* que satisface que $R(x) \subseteq V$, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*
$$\forall n \geq n_0, \ R(x_n) \subseteq V.$$

2. *Si $R(x)$ es un singleton, entonces R es norma-norma-scs. en x si y sólo si*
$$\lim_{\delta \to 0^+} \mathrm{diam}\, R[x + \delta B_X] = 0,$$
donde, para $C \subseteq X$, $\mathrm{diam}\, C = \sup\{\|z_1 - z_2\| \ : \ z_1, z_2 \in C\}$.

Demostración. Ver [5, Ejercicio 2.4]. $\square$

Proposición 1.50 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$. Se tiene que la multifunción $\partial f : X \rightrightarrows X^*$ es norma-w^*-scs. en* $\text{Int}[\text{dom}\, f]$.

Demostración. Ver [5, Proposición 2.5]. □

Proposición 1.51 *Para $f \in \Gamma_0(X)$ y $\varepsilon \geq 0$, la multifunción $\partial_\varepsilon f : X \rightrightarrows X^*$ es **localmente acotada** en* $\text{Int}[\text{dom}\, f]$*, es decir, que para todo $x \in \text{Int}[\text{dom}\, f]$, existe U vecindad de x, tal que $\partial_\varepsilon f(U)$ es acotado.*

Demostración. Ver [11, Teorema 2.4.13]. □

Definición 1.52 (Selección) *Sea $R : S \rightrightarrows T$. Una selección de R es una función φ sobre S a valores en T, tal que $\varphi(s) \in R(s)$ para todo $s \in D(R)$.*

Teorema 1.53 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$ y $x \in \text{Int}[\text{dom}\, f]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es F-Diff. [resp. G-Diff.] en x.*
2. *Toda selección φ de ∂f es continua [resp. norma-w^*-continua] en x.*
3. *Existe una selección φ de ∂f que es continua [resp. norma-w^*-continua] en x.*

Demostración. Ver [5, Proposición 2.8]. □

Un corolario directo del teorema anterior, es la siguiente caracterización de diferenciabilidad para los puntos de continuidad de funciones en $\Gamma_0(X)$.

Corolario 1.54 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$ y $x \in \text{Int}[\text{dom}\, f]$. Se tiene que*

1. *f es G-Diff. en x si y sólo si $\partial f(x)$ es un singleton. En tal caso $\partial f(x) = \{df(x)\}$.*
2. *f es F-Diff. en x si y sólo si $\partial f(x)$ es un singleton y ∂f es norma-norma-scs. en x.*

Demostración. La demostración de 1. puede verse alternativamente en [11, Corolario 2.4.10]. De todas formas es análogo a la demostración de 2. Para demostrar 2., la implicancia de izquierda a derecha está desarrollada en [5, Lema 2.6], por lo que sólo resta ver la implicancia de derecha a izquierda.

Sea entonces φ una selección de ∂f. Como $\partial f(x)$ es un singleton, dígase $\{x^*\}$, entonces necesariamente $\varphi(x) = x^*$. Sea ahora (x_n) una sucesión que converge a x y que, sin perder generalidad, está completamente contenida en $\text{Int}[\text{dom}\, f]$. Como f es norma-norma-scs. en x, se tiene directo de la proposición 1.49.2 que $(\varphi(x_n))$ es sucesión de Cauchy y luego convergente, dígase a $y^* \in X^*$. Además, de la proposición 1.49.1, es claro que $y^* \in \partial f(x)$ y por lo tanto $y^* = \varphi(x)$. Así φ es continua en x, lo que concluye la demostración. □

Se mostrará a continuación como se relacionan el subdiferencial, la derivada direccional y las funciones soporte.

Teorema 1.55 *Sean f convexa y propia, $x \in \operatorname{dom} f$ y $\varepsilon \geq 0$. Se tiene que*

1. $\partial_\varepsilon f(x) = \partial(f'_\varepsilon(x;\cdot))(0)$.

2. *Si además $\varepsilon > 0$, entonces $f'_\varepsilon(x;\cdot) = \sigma_{\partial_\varepsilon f(x)}$, es decir, para todo $h \in X$,*

$$f'_\varepsilon(x;h) = \sup\{\langle x^*, h\rangle \;:\; x^* \in \partial_\varepsilon f(x)\}.$$

En particular, $f'_\varepsilon(x;\cdot)$ es semicontinua inferior.

Demostración. Ver [11, Teorema 2.4.11] y [11, Teorema 2.4.4]. □

Teorema 1.56 *Sea f convexa y propia y $x \in \operatorname{dom} f$. Se tiene que $\partial f(x) \neq \emptyset$ si y sólo si $f'(x;\cdot)$ es norma-sci. en 0. En tal caso,*

$$\overline{f'(x;\cdot)} = \sigma_{\partial f(x)}.$$

Además, si f es continua en x, entonces $f'(x;\cdot)$ es continua y

$$f'(x;h) = \max_{x^* \in \partial f(x)} \langle x^*, h\rangle.$$

Demostración. Ver [11, Corolario 2.4.15] y [5, Proposición 2.24]. □

En el teorema anterior, se puede concluir directamente que si $f \in \Gamma_0(X)$ y $x \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]$, entonces $f'(x;\cdot) = \sigma_{\partial f(x)}$. Otro resultado es la réplica de estos teoremas para funciones en $\Gamma_0(X^*, w^*)$.

Teorema 1.57 *Sea $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ y $x^* \in \operatorname{dom} f$. Se tiene que*

1. *Para todo $\varepsilon > 0$, $f'_\varepsilon(x^*;\cdot) = \sigma_{\hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x^*)}$, es decir, para todo $h^* \in X^*$,*

$$f'_\varepsilon(x^*;h^*) = \sup\left\{\langle x, h^*\rangle \;:\; x \in \hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x)\right\}.$$

En particular, $f'_\varepsilon(x^*;\cdot)$ es w^*-semicontinua inferior.

2. *Se tiene que $\hat{X} \cap \partial f(x^*) \neq \emptyset$ si y sólo si $f'(x^*;\cdot)$ es w^*-sci. en 0. En tal caso,*

$$\overline{f'(x^*;\cdot)}^* = \sigma_{\hat{X} \cap \partial f(x^*)}.$$

Demostración. Basta aplicar [11, Teorema 2.4.11] y [11, Corolario 2.4.15] para la dualidad $\langle X, X^*\rangle$. □

Estos últimos teoremas permiten concluir varias cosas sobre las funciones $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ directamente. Por una parte, como f también está en $\Gamma_0(X^*)$, para $x^* \in \operatorname{dom} f$ se tiene que $\sigma_{\partial_\varepsilon f(x^*)} = f'_\varepsilon(x^*; \cdot) = \sigma_{\hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x^*)}$ y por lo tanto

$$\partial_\varepsilon f(x^*) = \overline{\text{co}}^{**} \left[\hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x^*) \right] = \overline{\hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x^*)}^{**}. \tag{1.1}$$

Por otra, razonando de la misma forma, se tiene que

$$f'(x^*; \cdot) \text{ es } w^*\text{-sci.} \iff \partial f(x^*) = \overline{\text{co}}^{**} \left[\hat{X} \cap \partial f(x^*) \right].$$

De hecho, se sabe $\hat{X} \cap \partial_\varepsilon f(x^*)$ es convexo para todo $\varepsilon \geq 0$, por lo que ne las expresiones anteriores se puede reemplazar $\overline{\text{co}}^{**}$ simplemente por w^{**}-adherencia. Se volverá a trabajar sobre estas observaciones en los capítulos posteriores, pero vale la pena mencionarlos aquí para aclarar mejor las motivaciones de los problemas que se plantearán luego.

Se cierra este capítulo con algunas propiedades sobre las funciones soporte, que han mostrado ser centrales en el desarrollo de esta teoría y que se utilizarán muchas veces a lo largo de esta memoria.

Teorema 1.58 *Para $K \subseteq X$, se tiene que σ_K es una función sublineal y w^*-semicontinua inferior. Recíprocamente, toda función $\sigma : X^* \to \mathbb{R}_\infty$ sublineal y w^*-semicontinua inferior es a la vez la función soporte del conjunto convexo cerrado*

$$K = \{x \in X \ : \ \forall x^* \in X^*, \ \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*)\}.$$

Además, se tiene que

1. *Para $K_1, K_2 \subseteq X$, $\sigma_{\overline{\text{co}}\, K_1 \cup K_2} = \sigma_{K_1 \cup K_2} = \text{máx}\{\sigma_{K_1}, \sigma_{K_2}\}$.*
2. *Para $x^* \in X^*$ y $\lambda > 0$, $\partial \sigma_K(\lambda x^*) = \sigma_K(x^*)$.*
3. *Si $0 \in \overline{\text{co}}\, K$, entonces $\sigma_K \equiv \rho_C$, donde ρ_C es el funcional de Minkowski del conjunto*

$$C = \{x^* \in X^* \ : \sigma_K(x^*) \leq 1\}.$$

Demostración. Para la primera parte del teorema, el hecho que toda función soporte sea sublineal es directa de la definición de función soporte. Que además sea semicontinua inferior es directo pues, al ser conjugada de una función indicatriz, toda función soporte está en $\Gamma_0(X^*, w^*)$. Por otra parte, sea $\sigma : X^* \to \mathbb{R}_\infty$ una función sublineal y w^*-semicontinua inferior y sea

$$K = \{x \in X \ : \ \forall x^* \in X^*, \ \langle x^*, x \rangle \leq \sigma(x^*)\}.$$

Es claro que $\sigma_K \leq \sigma$. Por otro lado, nótese que para $x^{**} \in X^{**}$,

$$\sigma^*(x^{**}) = \sup_{x^* \in X^*} \{\langle x^{**}, x^* \rangle - \sigma(x^*)\} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \exists x^{**} \ \langle x^{**}, x^* \rangle > \sigma(x^*) \\ \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

De lo anterior se concluye que $\sigma^*\big|_X \equiv I_K$ y como σ es w^*-sci., se tiene que

$$\sigma_K = (I_K)^* = \left(\sigma^*\big|_X\right)^* = \sigma,$$

lo que demuestra lo pedido. Ahora, se demostrarán las propiedades enumeradas en la segunda parte del teorema:

1. Basta notar que para $x^* \in X^*$,

$$\sup_{x \in K_1 \cup K_2} \langle x^*, x\rangle = \max \left\{ \sup_{x\in K_1} \langle x^*, x\rangle, \sup_{x \in K_2} \langle x^*, x\rangle \right\},$$

   por lo que $\sigma_{K_1 \cup K_2} = \max\{\sigma_{K_1}, \sigma_{K_2}\}$.

2. Sea $x^* \in X^*$ y $\lambda > 0$. Sin perder generalidad, $x^* \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} x^{**} \in \partial\sigma_K(\lambda x^*) &\iff \langle x^{**}, \lambda x^*\rangle = \sigma_K(\lambda x^*) + I_{\overline{K}^{**}}(x^{**}) \\ &\iff \langle x^{**}, x^*\rangle = \lambda^{-1} \cdot \sigma_K(\lambda x^*) + I_{\overline{K}^{**}}(x^{**}) \\ &\iff \langle x^{**}, x^*\rangle = \sigma_K(x^*) + I_{\overline{K}^{**}}(x^{**}) \\ &\iff x^{**} \in \partial\sigma_K(x^*). \end{aligned}$$

3. Sea $x^* \in X^*$. Como $0 \in \overline{\text{co}}\, K$, se tiene que $\sigma_K(x^*) \geq 0$ y luego, como σ_K es positivamente homogénea,

$$\rho_C(x^*) = \inf\{\lambda > 0 \ : \lambda^{-1}x^* \in C\} = \sigma_K(x^*).$$

$\square$

Capítulo 2

Espacios de Asplund y la propiedad de Radon-Nikodým

Uno de los resultados más impresionantes sobre funciones convexas sobre la recta real, cuya demostración está en [5, Teorema 1.16], es el siguiente:

Teorema 2.1 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces f es F-Diff. en todo punto de D salvo a lo más un conjunto numerable de puntos.*

Para poder extender este teorema a espacios de Banach generales, es necesario hacer las siguientes observaciones: Primero, a diferencia de $\mathbb{R}$, las funciones convexas definidas sobre un abierto de X a valores en $\mathbb{R}$ no son necesariamente continuas; Segundo, si X no es separable, entonces los conjuntos numerables son muy "pequeños" con respecto al espacio, es decir, pedir que una propiedad se tenga salvo un conjunto numerable es "pedir demasiado".

Tomando en cuenta estas consideraciones, la teoría de espacios de Asplund resulta ser la extensión natural del teorema. En este capítulo se hará una exposición de los resultados más importantes en cuanto a espacios de Asplund, junto con introducir la **propiedad de Radon-Nikodým** [**RNP**, por su sigla en inglés]. La RNP entrega, sorprendentemente, una caracterización geométrica de la Frechét-diferenciabilidad de funciones convexas, que es esencialmente una propiedad analítica.

La RNP es motivada originalmente por el teorema de Radon-Nikodým para medidas uniformemente continuas. Es la extensión natural para medidas vectorvaluadas. En esta memoria no se revisará este tema, para eso el lector está invitado a ver [1, Capítulos 1 y 2].

2.1. Espacios de Asplund

Definición 2.2 (Espacio de Asplund) *Un espacio de Banach X se dice **espacio de Asplund** si toda función convexa y continua sobre X a valores en $\mathbb{R}$ es F-Diff. en un conjunto denso de X (que es automáticamente un G_δ denso).*

Hay definiciones alternativas de lo que es un espacio de Asplund (como [5, Definición 1.22]), que varían en la familia de funciones convexas que son F-Diff. en un G_δ denso. La siguiente proposición condensa las posibles variaciones de la definición:

Proposición 2.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es espacio de Asplund.*
2. *Para todo abierto convexo no-vacío $D \subseteq X$ y toda función convexa y continua f definida sobre D, el conjunto de puntos donde f es F-Diff. es un G_δ denso en D.*
3. *Para toda función $f \in \Gamma_0(X)$ con $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$, el conjunto de puntos donde f es F-Diff. es un G_δ denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$.*

Demostración. 2. $\Longrightarrow$ 3. y 3. $\Longrightarrow$ 1. son directas. Para ver 1. $\Longrightarrow$ 2. basta considerar para cada $x \in D$ la extensión f_x dada por el teorema 1.19, aplicar 1. y considerar el conjunto

$$G = \bigcup_{x \in D} G_x \cap U_x,$$

donde G_x es el G_δ denso dado por 1. y U_x es la vecindad de x donde $f\big|_{U_x} = f_x\big|_{U_x}$. G claramente es denso en D y además está contenido en el conjunto de puntos donde f es F-Diff, que ya es un G_δ. Así, el conjunto de puntos donde f es F-Diff. resulta ser un G_δ denso de D. □

Los espacios de Asplund se pueden caracterizar de muchas formas. En esta sección, se enunciarán las más relevantes. La siguiente proposición muestra que los espacios de Asplund son regulares, en el sentido que la propiedad que los define se conserva para subespacios cerrados.

Proposición 2.4 *Si X es espacio de Asplund, entonces todo subespacio cerrado de X también es espacio de Asplund.*

Demostración. Ver [5, Proposición 2.33]. □

Teorema 2.5 (Caracterización de esp. de Asplund I) *X es espacio de Asplund si y sólo si todo **subespacio cerrado separable** de X tiene dual separable.*

Demostración. Ver [5, Teorema 2.34]. □

Del teorema anterior es claro que todo espacio reflexivo es espacio de Asplund.

Ejemplo 2.6 Sea Γ un conjunto cualquiera. Se define $c_0(\Gamma)$ como el conjunto de todas las funciones $x = (x_\gamma)$ sobre Γ a valores en $\mathbb{R}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\Gamma_\varepsilon \subseteq \Gamma$, tal que $|x_\gamma| < \varepsilon$ para todo $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon$. Se tiene que $(c_0(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Asplund, donde

$$\|(x_\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|.$$

La propiedad que define los espacios de Asplund puede ser reducida considerablemente. Para ver que un espacio de Banach es espacio de Asplund, basta estudiar familias mucho más pequeñas de funciones.

Teorema 2.7 (Caracterización de esp. de Asplund II) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es espacio de Asplund.*
2. *Para todo conjunto $C \subseteq X^*$ convexo, w^*-compacto y no-vacío, la función soporte de C restringida a X, $\sigma_C\big|_X$, es F-Diff. en un G_δ denso de X.*
3. *Toda norma equivalente en X es F-Diff. en un G_δ denso de X.*
4. *Toda norma equivalente en X es F-Diff. en al menos un punto.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. y 2. $\Longrightarrow$ 3. son obvias. Para el resto ver [1, Proposición 5.6.13]. $\square$

La demostración de [1, Proposición 5.6.13] se basa en la teoría de los **conjuntos w^*-dentables en X^***. Se da ahora la caracterización de los espacios de Asplund en términos de conjuntos acotados de su dual, la que entrega una intuición de la equivalencia entre 1. y 2. en la proposición anterior.

Para introducir la noción de conjuntos dentables, es necesario primero definir las **slices** de un conjunto.

Definición 2.8 (Slice y w^*-Slice) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto no-vacío, $\alpha > 0$ y $x^* \in X^*$ con x^* no-nulo. Se define la **slice de C dada por α y x^*** como el conjunto*

$$S(x^*, C, \alpha) = \{x \in C \ : \ \langle x^*, x\rangle > \sigma_C(x^*) - \alpha\}.$$

*Si C es un subconjunto no-vacío de X^*, se definen las **w^*-slices** de manera análoga a las slices, pero dadas por **funcionales en X** (en vez de X^{**}).*

Es claro que las slices [resp. w^*-slices] de un conjunto C son conjuntos *no-vacíos y w-abiertos [resp. w^*-abiertos]* en C como espacio topológico con la topología traza inducida por $\sigma(X, X^*)$ [resp. $\sigma(X^*, X)$].

Definición 2.9 (Dentabilidad) *Se dice que un conjunto no-vacío $C \subseteq X$ es **dentable** si para todo $\varepsilon > 0$, existen $x^* \in X^*$ no-nulo y $\alpha > 0$ tales que*

$$\operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) \leq \varepsilon.$$

*Análogamente, se dice que un conjunto no-vacío $C \subseteq X^*$ es **w*-dentable** si para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in X$ no-nulo y $\alpha > 0$ tales que*

$$\operatorname{diam} S(x, C, \alpha) \leq \varepsilon.$$

Con estas definiciones se puede dar una tercera caracterización de los espacios de Asplund que ya da luces sobre la relación analítica-geométrica que tienen estos espacios y sus duales.

Teorema 2.10 (Caracterización de esp. de Asplund III) *X es espacio de Asplund si y sólo si todo conjunto $C \subseteq X^*$ no-vacío y acotado es w^*-dentable.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [5, Lema 2.18]. □

Otra caracterización de los espacios de Asplund es en términos de los **operadores monótonos**, que son funciones multivaluadas que comparten una de las propiedades del subdiferencial de una función convexa: la monotonía.

Definición 2.11 (Operadores monótonos) *Un conjunto $G \subseteq X \times X^*$ se dice **conjunto monótono** si para todo par $(x, x^*), (y, y^*) \in G$, se tiene que*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0.$$

*Una función multivaluada $T : X \rightrightarrows X^*$ se dice **operador monótono** si $\operatorname{gph}(T)$ es un conjunto monótono, es decir,*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in X,\ x^* \in T(x),\ y^* \in T(y).$$

Es claro que existe una relación uno a uno entre los conjuntos monótonos y los operadores monótonos. Además, también es fácil ver que la familia de conjuntos monótonos con el orden de la inclusión resulta ser un orden filtrante y por lo tanto (mediante el lema de Zorn) existen elementos maximales.

Definición 2.12 (Operador Monótono Maximal) *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ un operador monótono. T se dirá maximal si $\operatorname{gph}(T)$ es maximal para la familia de conjuntos monótonos con el orden de la inclusión.*

Proposición 2.13 (Rockafellar) *Sea $f \in \Gamma_0(X)$. Se tiene que ∂f es un operador monótono maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [5, Teorema 3.24]. □

Con este resultado, es claro que los operadores monótonos maximales son una extensión del subdiferencial de las funciones en $\Gamma_0(X)$. Más aún, esta extensión es propia: Existen espacios de Banach X donde hay operadores monótonos maximales que no son el subdiferencial de ninguna función en $\Gamma_0(X)$.

Proposición 2.14 *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$ operador monótono con $W = \operatorname{Int}[D(T)]$ no-vacío. Se tiene que T es localmente acotado en W, es decir, para todo $x \in W$, existe una vecindad V de x tal que $T(V)$ es acotado.*

Demostración. Ver [5, Teorema 2.28]. $\square$

Teorema 2.15 (Caracterización de esp. de Asplund IV) *X es un espacio de Asplund si y sólo si para todo $T : X \rightrightarrows X^*$ operador monótono maximal con $W = \operatorname{Int}[D(T)]$ no-vacío, existe un G_δ denso G de W tal que para todo $x \in G$, $T(x)$ es un singleton y T es norma-norma-scs. en x.*

Demostración. Ver [5, Teorema 2.30]. $\square$

Observación En virtud del corolario 1.54, esta propiedad de los operadores monótonos maximales extiende la propiedad de Fréchet-diferenciabilidad en un G_δ denso de las funciones convexas y continuas en un espacio de Asplund.

Un ejemplo importante en relación a los espacios de Asplund son los espacios *débil-compacto generados.* Esta propiedad es un poco más débil que la separabilidad y por lo tanto es un frecuente caso de estudio cuando se desea generalizar propiedades de espacios separables. Para $K \subseteq X$, se denota por $\operatorname{span}(K)$ al subespacio de X generado por K, es decir,

$$\operatorname{span}(K) = \bigcap \{V \ : \ V \text{ subespacio vectorial de } X,\ K \subseteq V\}.$$

Definición 2.16 (espacios WCG) *Un espacio de Banach X se dice **débil-compacto generado [WCG**, por su sigla en inglés] si existe $K \subseteq X$ w-compacto tal que* $\operatorname{span}(K)$ *es denso en X.*

El conjunto K con el cual se define un espacio WCG puede suponerse, sin perder generalidad, convexo puesto que si K es w-compacto, entonces $\overline{\operatorname{co}}(K)$ también es w-compacto. Además, es claro que todo espacio separable y todo espacio reflexivo es WCG.

Proposición 2.17 *Si X^* es WCG, entonces X es espacio de Asplund.*

Demostración. Ver [5, Teorema 2.43]. $\square$

Además, de los espacios de Asplund, existen otras definiciones interesantes con respecto a la diferenciabilidad de funciones convexas.

Definición 2.18 (Espacios débil-Asplund y w^*-Asplund) *Se dice que X es un espacio* ***débil-Asplund*** *si para toda función $f \in \Gamma_0(X)$ continua, el conjunto*

$$G = \{x \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \ : \ f \textit{ es G-Diff. en } x\},$$

es un G_δ denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$. *A su vez, se dice que X^* es* ***w^*-Asplund*** *si para toda función $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ continua, el conjunto*

$$G = \{x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \ : \ f \textit{ es F-Diff. en } x^*\},$$

es un G_δ denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$.

Cabe destacar que la nomenclatura "débil-Asplund" no tiene que ver con la topología débil, si no que se refiere a la noción de diferencial débil o diferencial de Gâteaux.

2.2. Puntos extremos y la RNP

En esta sección se estudiará la estructura extremal de los conjuntos convexos, cerrados y acotados de X y se enunciará la versión geométrica de la RNP. Al final de la sección se exhibirán las últimas caracterizaciones de los espacios de Asplund, relacionadas precisamente con esta estructura.

Definición 2.19 (Puntos extremos) *Sea $C \subseteq X$ convexo no-vacío. Un punto $x \in C$ se dice* ***punto extremo de C*** *si $C \setminus \{x\}$ sigue siendo un conjunto convexo o, equivalentemente, si x no puede escribirse como combinación convexa de puntos en $C \setminus \{x\}$.*

El conjunto de puntos extremos de C se denota por $\mathrm{ext}(C)$.

Cuando C es un conjunto convexo y compacto, sus puntos extremos juegan un rol fundamental, pues lo definen completamente.

Teorema 2.20 (Krein-Milman) *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo. Para todo $K \subseteq X$ convexo y τ-compacto, se tiene que*

$$K = \overline{\mathrm{co}}^\tau[\mathrm{ext}(K)].$$

Demostración. Ver [3, Teorema 3.65]. □

Análogamente, se tiene una suerte de recíproca del teorema de Krein-Milman, que establece que son necesariamente los puntos extremos los que definen a los conjuntos convexos compactos.

Teorema 2.21 (Milman) *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo y sea $K \subseteq X$ convexo y τ-compacto. Para todo $S \subseteq K$ tal que $K = \overline{\mathrm{co}}^\tau[S]$, se tiene que $\mathrm{ext}(K) \subseteq \overline{S}^\tau$.*

Demostración. Ver [3, Teorema 3.66]. □

Es natural preguntar si sólo los conjuntos convexos compactos satisfacen el teorema de Krein-Milman. La siguiente proposición entrega una condición suficiente (que además es trivialmente necesaria) para que una familia de conjuntos convexos, no necesariamente compactos, se defina a partir de sus puntos extremos.

Proposición 2.22 *Sea $C \subseteq X$ un conjunto convexo cerrado. Si todo subconjunto* ***convexo, cerrado, acotado y no-vacío*** *de C tiene al menos un punto extremo, entonces todo subconjunto convexo, cerrado, acotado y no-vacío de C es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.*

Demostración. Ver [1, Proposición 3.1.1]. □

Si en la proposición anterior se establece $C = X$, entonces se tiene un tipo especial de espacio de Banach, donde todo convexo acotado se recupera a partir de sus puntos extremos.

Definición 2.23 (Propiedad de Krein-Milman) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto convexo cerrado y no-vacío. Se dice que C tiene la* ***propiedad de Krein-Milman (KMP****, por su sigla en inglés) si para todo $K \subseteq C$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío satisface que*

$$K = \overline{\text{co}}[\text{ext}(K)].$$

Consistentemente, se dice que el espacio de Banach X tiene la KMP si la tiene como conjunto.

De la proposición 2.22, una condición suficiente para que X tenga la KMP es que todo conjunto convexo, cerrado, acotado y no-vacío de X tenga al menos un punto extremo.

Ejemplo 2.24 Todo espacio reflexivo tiene la KMP.

Otro tipo de puntos relevantes en la estructura extremal de un conjunto son los puntos soporte.

Definición 2.25 (Puntos Soporte) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto no-vacío y $x \in C$. Se dice que x es un* ***punto soporte de C*** *si existe $x^* \in X^*$ no-nulo tal que x^* alcanza su máximo sobre C en x, o sea, si*

$$\langle x^*, x\rangle = \sigma_C(x^*).$$

En tal caso, se dice que ***x^* soporta a C en x*** *y x^* se denomina* ***funcional soporte de C*** *(no confundir con la función soporte de C, σ_C). Además, el conjunto*

$$H = \{y \in X \ : \ \langle x^*, y\rangle = \sigma_C(x^*)\}$$

se llama ***hiperplano soporte de C****, aludiendo que $C \cap H$ es el conjunto de puntos de C soportados por x^*. El hiperplano soporte de C inducido por x^* se denotará $H(C, x^*)$.*

Es claro que si C es un conjunto convexo cerrado con $\mathrm{Int}(C)$ no-vacío, entonces todo punto de la frontera de C es un punto soporte. Por otro lado, incluso cuando $\mathrm{Int}(C)$ es no-vacío, no es posible asegurar que todo funcional de X^* sea un funcional soporte de C. De hecho, el siguiente teorema caracteriza los conjuntos donde todo funcional alcanza su máximo:

Teorema 2.26 (James) *Sea $C \subseteq X$ convexo cerrado y no-vacío. C es w-compacto si y sólo si todo funcional en X^* alcanza su máximo en C. Consecuentemente, X es reflexivo si y sólo si todo funcional en X^* alcanza su norma. (i.e. para todo $x^* \in X^*$, existe $x \in B_X$ tal que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$).*

Demostración. Ver [10, Teorema 4.1.27]. □

Otra observación importante es que, cuando C es convexo cerrado, los puntos soporte de C se pueden expresar a través del subdiferencial de la función soporte de C, σ_C.

Proposición 2.27 *Sea $C \subseteq X$ convexo cerrado no-vacío y $x^* \in X^*$ no-nulo. Se tiene que el conjunto de puntos de C soportados por x^* es igual a $X \cap \partial\sigma_C(x^*)$.*

Demostración. De la proposición 1.36, se sabe que

$$\begin{aligned}\partial\sigma_C(x^*) &= \left\{x^{**} \in X^* \ : \ \langle x^*, x^{**}\rangle = \sigma_C(x^*) + I_{\overline{\mathrm{co}}^{**}(C)}\right\}\\ &= \{x^{**} \in \overline{\mathrm{co}}^{**}(C) \ : \ \langle x^*, x^{**}\rangle = \sigma_C(x^*)\}\,.\end{aligned}$$

Luego, en vista que $X \cap \overline{\mathrm{co}}^{**}(C) = \overline{\mathrm{co}}(C)$, es directo que

$$X \cap \partial\sigma_C(x^*) = \{x \in \overline{\mathrm{co}}(C) \ : \ \langle x^*, x\rangle = \sigma_C(x^*)\}.$$

Como C es convexo y cerrado, se tiene lo pedido. □

También se pueden relacionar la estructura de puntos soporte con los puntos extremos de un conjunto.

Proposición 2.28 *Sea $C \subseteq X$ un conjunto convexo y H un hiperplano soporte de C. Se tiene que los puntos extremos de $H \cap C$ son también puntos extremos de C.*

Demostración. Ver [10, Lema 2.7.1]. □

La relación entre los puntos soporte y el subdiferencial de la función soporte permite aplicar el teorema de Brønsted-Rockafellar para obtener el siguiente resultado:

Teorema 2.29 (Bishop-Phelps) *Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado y no-vacío. Se tiene que*

1. *El conjunto de puntos soporte de C es denso en* $\mathrm{Fr}(C)$.

2. El conjunto de funcionales soporte de C es denso en el cono de funcionales que son acotados superiormente en C (i.e. el cono de los $x^* \in X^*$ tal que $\sup_{x\in C}\langle x^*, x\rangle < +\infty$).

Demostración. Ver [5, Teorema 3.18]. □

Una aplicación importante de la densidad de los puntos soporte es el siguiente:

Proposición 2.30 *Sea $U \subseteq X^*$ un conjunto abierto, convexo y no-vacío y sea $f : U \to \mathbb{R}$ convexa y w^*-semicontinua inferior. Se tiene que el conjunto*

$$D = \left\{x^* \in U \ : \ \hat{X} \cap \partial f(x^*) \neq \emptyset\right\}$$

es denso en U.

Demostración. Ver [3, Lema 11.2]. □

Definición 2.31 (Puntos fuertemente expuestos) *Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado y no-vacío y sea $x \in C$. Se dice que x es **punto expuesto** de C si existe $x^* \in X^*$ no-nulo tal que*

$$\forall y \in C \setminus \{x\}, \ \langle x^*, x\rangle > \langle x^*, y\rangle.$$

*En tal caso se dice que **x^* expone a x en C**. El conjunto de puntos expuestos de C se denota por* $\exp(C)$.

*Se dice que x es **punto fuertemente expuesto** de C si existe $x^* \in X^*$ tal que x^* expone a x y satisface que para toda sucesión $(x_n) \subseteq C$*

$$\langle x^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle \Longrightarrow x_n \to x.$$

*En tal caso se dice que **x^* fuerte-expone a x en C**. El conjunto de puntos fuertemente expuestos de C se denota por* str-exp(C).

La definición por sucesiones de que x^* fuerte-expone a x es equivalente a decir que el conjunto $\{S(x^*, C, \alpha) \ : \ \alpha > 0\}$ sea una base de vecindades de x para la topología de la norma restringida al conjunto C, o bien, a que x^* exponga a x y además que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) = 0.$$

Definición 2.32 (Puntos w^*-fuertemente expuestos) *Sea $C \subseteq X^*$ convexo, cerrado y no-vacío y sea $x^* \in C$. Se dice que x^* es **punto w^*-fuertemente expuesto** si existe $x \in X$ no-nulo tal que x fuerte-expone a x^* (entendiendo a x como funcional en X^{**}). En tal caso, se dice que **x w^*-fuerte-expone a** x^*. El conjunto de puntos fuertemente expuestos de C se denota por* w^*-str-exp(C).

Con estas definiciones se puede enunciar la versión geométrica de la propiedad de Radon-Nikodým:

Definición 2.33 (Propiedad de Radon-Nikodým) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto convexo cerrado y no-vacío. Se dice que C tiene la* ***propiedad de Radon-Nikodým (RNP****, por su sigla en inglés) si para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado se tiene que*

$$K = \overline{\text{co}}[\text{str-exp}(K)].$$

Consistentemente, se dice que el espacio de Banach X tiene la RNP si la tiene como conjunto.

Es claro que para $C \subseteq X$ convexo y cerrado se tiene que $\text{str-exp}(C) \subseteq \exp(C)$ y además todo punto expuesto C es punto soporte de C. Otra inclusión no tan directa es que $\exp(C) \subseteq \text{ext}(C)$.

Proposición 2.34 *Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado. Se tiene que* $\exp(C) \subseteq \text{ext}(C)$. *En particular, la RNP implica la KMP.*

Demostración. Sean $x \in \exp(C)$, $x^* \in X^*$ un funcional que expone a x en C. En particular, se tiene que x^* soporta a C. Sea entonces H el hiperplano soporte de C dado por x^*. De la definición de punto expuesto, se tiene que $H \cap C = \{x\}$ y por lo tanto x es trivialmente un punto extremo de $H \cap C$. Aplicando la proposición 2.28, se concluye. □

Cuando un conjunto tiene la RNP, entonces los funcionales que fuerte-exponen puntos del conjunto no pueden ser "pocos", como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.35 *Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío. Si C tiene la RNP, entonces el conjunto de funcionales en X^* que fuerte-exponen puntos de C es un G_δ denso en X^*.*

Demostración. Ver [1, Teorema 3.5.4] □

Existen varias caracterizaciones de la RNP, sin embargo sólo se enuncian en esta memoria aquellas más relevantes para la misma.

Teorema 2.36 (Caracterización de la RNP I) *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Todo conjunto convexo, cerrado y acotado de X es dentable.*
2. *X tiene la RNP.*
3. *Todo conjunto convexo, cerrado, acotado y no-vacío de X tiene al menos un punto fuertemente expuesto.*
4. *Todo conjunto convexo, cerrado, acotado y no-vacío de X contiene al menos un punto extremo de su w^*-clausura en X^{**}.*

5. *Para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío, el conjunto de funcionales soporte de K es de segunda categoría en X^*.*

Demostración. Ver [1, Teorema 2.3.6], [1, Corolario 3.7.6] y [1, Corolario 3.5.7]. □

La existencia de puntos fuertemente expuestos en un conjunto es una propiedad geométrica, no obstante se puede reescribir como una propiedad analítica a través de la función indicatriz, como muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.37 *Para $C \subseteq X$ convexo cerrado, $x \in C$ y $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ se tiene*

$$x^* \textit{ fuerte-expone a } x \textit{ en } C \iff \sigma_C \textit{ es F-Diff. en } x^* \textit{ con } D\sigma_K(x^*) = \hat{x}.$$

Demostración. Se puede suponer sin perder generalidad que C es acotado. Si no, basta considerar para $\varepsilon > 0$ cualquiera, el conjunto

$$K = \{y \in C \ : \ \langle x^*, y\rangle \geq \sigma_C(x^*) - \varepsilon\} = X \cap \partial_\varepsilon \sigma_C(x^*).$$

K es acotado con ambas hipótesis y además es claro que

1. x^* fuerte-expone a x en $C \iff x^*$ fuerte-expone a x en K.

2. σ_C es F-Diff. en x^* con $D\sigma_C(x^*) = \hat{x} \iff \sigma_K$ es F-Diff. en x^* con $D\sigma_K(x^*) = \hat{x}$.

donde 2. se obtiene de que existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x^*)$ tal que $\sigma_C\big|_V \equiv \sigma_K\big|_V$. Para la demostración del caso acotado ver [10, Lema 6.6.1]. □

Corolario 2.38 *Para $f \in \Gamma_0(X)$, $x \in \operatorname{dom} f$ y $x^* \in X^*$. Se tiene que*

$$(x^*, -1) \textit{ fuerte-expone a } (x, f(x)) \textit{ en } \operatorname{epi} f \iff f^* \textit{ es F-Diff. en } x^* \textit{ con } Df^*(x^*) = \hat{x}.$$

Demostración. Por la proposición 2.37, basta demostrar que f^* es F-Diff. en x^* con $Df^*(x^*) = \hat{x}$ si y sólo si $\sigma_{\operatorname{epi} f}$ es F-Diff. en $(x^*, -1)$ con $D\sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*, -1) = (\hat{x}, f(x))$. Para esto, nótese primero que

$$\begin{aligned}
x^{**} \in \partial f^*(x^*) &\iff \langle x^{**}, x^*\rangle = f^*(x^*) + f^{**}(x^{**}) \\
&\iff \langle x^{**}, x^*\rangle - f^{**}(x^{**}) = \sup_{y^{**} \in \operatorname{dom} f^{**}} \{\langle y^{**}, x^*\rangle - f^{**}(y^{**})\} \\
&\iff \langle x^{**}, x^*\rangle - f^{**}(x^{**}) = \sup_{(y^{**}, \lambda) \in \operatorname{epi} f^{**}} \{\langle y^{**}, x^*\rangle - \lambda\} \\
&\iff \langle x^{**}, x^*\rangle - f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*, -1) + I_{\operatorname{epi} f^{**}}(x^{**}, f^{**}(x^{**})) \\
&\iff (x^{**}, f^{**}(x^{**})) \in \partial \sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*, -1),
\end{aligned}$$

donde se utiliza implícitamente que $\sigma_{\operatorname{epi} f} = \sigma_{\operatorname{epi} f^{**}}$ en X^*.

$\Rightarrow$) Se tiene inmediatamente que $\partial \sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*, -1) = \{(\hat{x}, f(x))\}$ y que

$$(x^*, -1) \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} \sigma_{\operatorname{epi} f}].$$

Sea entonces $(x_n^*, \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{dom}\partial\sigma_{\operatorname{epi} f}$ convergente a $(x^*, -1)$ y sea $(x_n^{**}, r_n) \in \partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(x_n^*, \lambda_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, $\lambda_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, como

$$\partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(x_n^*, \lambda_n) = \partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(|\lambda_n|^{-1} x_n^*, -1),$$

se puede considerar simplemente que $\lambda_n = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el desarrollo anterior, se tiene que $x_n^{**} \in \partial f^*(x_n^*)$ y por lo tanto, como ∂f^* es norma-norma-scs. en x^*, se concluye que $x^{**} \to \hat{x}$. Además, como $\partial\sigma_{\operatorname{epi} f}$ es norma-w^{**}-scs. en $(x^*, -1)$, se tiene que $r_n \to f(x)$. Luego $(x_n^{**}, r_n) \to (\hat{x}, f(x))$. Aplicando la proposición 1.49 y el corolario 1.54, se concluye.

$\Leftarrow$) Se tiene inmediatamente que $\partial f^*(x^*) = \{\hat{x}\}$ y que $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$. Sea entonces $(x_n^*) \subseteq \operatorname{dom} f^*$ convergente a x^* y $x_n^{**} \in \partial f^*(x_n^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogo al desarrollo de la implicancia anterior, se concluye que $(x^{**}, f^{**}(x^{**})) \to (\hat{x}, f(x))$ y en particular, $x^{**} \to \hat{x}$. Aplicando nuevamente la proposición 1.49 y el corolario 1.54, se concluye.

□

El siguiente teorema relaciona la RNP en el espacio primal con la propiedad de Asplund en el espacio dual, pero sólo para las funciones conjugadas. Esta es la caracterización más importante de la RNP que se utilizará en esta memoria.

Teorema 2.39 (Caracterización de la RNP II) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la RNP.*
2. *X^* es w^*-Asplund.*
3. *Toda norma dual en X^* (i.e. toda norma que se exprese como la función soporte de la bola unitaria con respecto a una norma equivalente en X) es F-Diff. en un G_δ denso de X^*.*
4. *Toda norma dual en X^* es F-Diff. en al menos un punto.*

Demostración. Ver [1, Teorema 5.7.4]. □

A partir de este teorema, es natural preguntarse qué ocurre cuando es el espacio dual X^* quien tiene la RNP. Es claro del teorema 2.10 que si X es espacio de Asplund, entonces X^* tiene la RNP, pues todo conjunto w^*-dentable es en particular dentable. No obstante, este resultado es en realidad una equivalencia, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.40 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es espacio de Asplund.*

2. Para todo $C \subseteq X^*$ convexo y w^*-compacto,

$$C = \overline{\text{co}}^{**}[w^*\text{-}\operatorname{str-exp}(C)].$$

3. X^* tiene la RNP.

Demostración. Ver [1, Teorema 4.2.13] y [5, Teorema 5.7]. $\square$

Análogamente a la RNP en espacios primales, en espacios duales basta con la existencia de puntos w^*-fuertemente-expuestos para garantizar que el espacio tiene la RNP. Además, también los funcionales que w^*-fuerte-exponen puntos son "muchos":

Proposición 2.41 *Si para todo $C \subseteq X^*$ convexo, w^*-compacto y no-vacío se tiene que w^*-str-exp$(C) \neq \emptyset$, entonces X^* tiene la RNP. En tal caso, para todo $C \subseteq X^*$ con las características anteriores, el conjunto de funcionales en X que w^*-fuerte-exponen puntos de C es un G_δ denso en X.*

Demostración. Sea $[\ \cdot\ ]$ una norma equivalente en X, $C = B_{X^*}$ con respecto a la norma dual de $[\ \cdot\ ]$, $x^* \in w^*$-str-exp(C) y x un funcional en X que w^*-fuerte-expone a x^*. Es fácil ver con estas hipótesis que $[\ \cdot\ ]$ es F-Diff. en x (basta aplicar la proposición 2.37 con la norma $[\ \cdot\ ]$ como función definida en el bidual).

Luego, por el teorema 2.7 se tiene que X es espacio de Asplund y así X^* tiene la RNP. Para el resto ver [1, Teorema 3.5.4 (w^*)]. $\square$

Se cierra esta sección con las caracterizaciones de la RNP del interesante artículo de J. Giles [4], donde se muestran resultados poco evidentes que a priori se pensaría que son más débiles que la RNP en sí. Esto, debido a que se aleja un poco de la estructura de puntos fuertemente expuestos.

Definición 2.42 (Conjuntos expuestos y w-expuestos) *Sea $K \subseteq X$ no-vacío. $S \subseteq K$ se dice **expuesto** por $x^* \in X^*$ si para todo $x \in S$,*

$$\langle x^*, x\rangle = \sigma_K(x) > \langle x^*, y\rangle, \quad \forall\ y \in K \setminus S.$$

*Además, S se dice **w-expuesto** por x^* si es expuesto y además para todo $W \in \mathcal{V}_w(0)$, existe $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño tal que*

$$S(x^*, K, \delta) \subseteq S + W,$$

es decir, las slices de K dadas por x^* son una base de vecindades de S para la topología débil restringida a K.

Con esta definición, se puede enunciar el siguiente teorema que resume las caracterizaciones dadas por Giles:

Teorema 2.43 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la RNP.*

2. *Para toda función $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ continua, f es G-Diff. en algún punto $x^* \in \operatorname{dom} f$, con derivada $Df(x^*) \in \hat{X}$.*

3. *Todo funcional de Minkowski $p : X^* \to \mathbb{R}$ w^*-sci. tiene un punto $x^* \in X^*$ que satisface que $\partial p(x^*) \subseteq \hat{X}$.*

4. *Todo conjunto $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío tiene un subconjunto que es w-expuesto y w-compacto.*

Demostración. Ver [4, Teorema 1 y Teorema 2] y [7, Teorema 1] □

Capítulo 3

Fórmulas de integración a partir del subdiferencial de Fenchel

En esta sección se revisarán los resultados de integración a partir del subdiferencial que motivan esta memoria. Se comienza con el resultado clásico de Rockafellar para funciones en $\Gamma_0(X)$ y luego se revisa el resultado de integración para una familia de funciones estrechamente relacionada con $\Gamma_0(X)$: Las funciones *epi-pointed*. Este segundo resultado Finalmente, se revisará la aplicación de la fórmula de integración para funciones epi-pointed en el caso particular de que X posea la RNP.

3.1. Fórmula de Integración de Rockafellar

Se sabe que para $f \in \Gamma_0(X)$, ∂f es operador monótono maximal. No obstante, el subdiferencial de una función en $\Gamma_0(X)$ es aún más regular: Es un operador cíclicamente monótono.

Definición 3.1 (Operadores cíclicamente monótonos) *Uu conjunto $G \subseteq X \times X^*$ se dice **n-cíclicamente monótono** (con $n \geq 2$) si para toda colección $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{n-1} \subseteq G$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_k - x_{k-1} \rangle \geq 0.$$

donde $x_n = x_0$ y $x_n^* = x_0^*$. Un operador $T : X \rightrightarrows X^*$ se dice n-cíclicamente monótono si $\mathrm{gph}(T)$ *lo es. Si además G [resp. T] es n-cíclicamente monótono para todo $n \geq 2$ se dice simplemente que es **cíclicamente monótono**.*

Claramente un operador monótono es un operador 2-cíclicamente-monótono. Además, análogamente a la definición 2.12, se dice que un operador T n-cíclicamente monótono [resp. cíclicamente monótono] es *maximal* si $\mathrm{gph}(T)$ lo es en la familia de los conjuntos n-cíclicamente-monótonos [resp. cíclicamente monótonos] con el orden de la inclusión.

Teorema 3.2 (Rockafellar) *Dada $f \in \Gamma_0(X)$, ∂f es un operador cíclicamente monótono maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si un operador T es monótono maximal y cíclicamente monótono entonces es cíclicamente monótono maximal. Luego, por la proposición 2.13, basta ver que ∂f es cíclicamente monótono. Sea entonces $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=0}^{n-1} \subseteq \text{gph}(\partial f)$. Se tiene que $f(x_i) \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y además que

$$\langle x_k^*, x_k - x_{k-1} \rangle \geq f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, donde $x_n^* = x_0^*$ y $x_n = x_0$. Finalmente,

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x_k^*, x_k - x_{k-1} \rangle \geq \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(x_n) - f(x_0) = 0,$$

lo que concluye la demostración. □

Más aún, los siguientes dos teoremas caracterizan los operadores cíclicamente monótonos, relacionándolos con los subdiferenciales de funciones en $\Gamma_0(X)$.

Proposición 3.3 *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$. Para que exista $f \in \Gamma_0(X)$ tal que*

$$T \subseteq \partial f,$$

es condición necesaria y suficiente que T sea cíclicamente monótono.

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es directa de que los subdiferenciales son operadores cíclicamente monótonos. Para la suficiencia, se asume sin perder generalidad que $\text{gph}(T) \neq \emptyset$. Sea entonces $(x_0, x_0^*) \in \text{gph}(T)$. Se define la función $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ por

$$f(x) = \sup \left\{ \langle x - x_n, x_n^* \rangle + \ldots + \langle x_1 - x_0, x_0^* \rangle \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos de la forma $\{(x_i, x_i^*)\}_{i=1}^{n} \subseteq \text{gph}(T)$. Es claro que $f \in \Gamma_0(X)$ y se demuestra, dado que T es cíclicamente monótono, que $T \subseteq \partial f$. Para los detalles, ver [6, Teorema 1]. □

Teorema 3.4 *Sea $T : X \rightrightarrows X^*$. Se tiene que existe $f \in \Gamma_0(X)$ tal que*

$$T = \partial f,$$

*si y sólo si T es un operador cíclicamente monótono maximal. En tal caso, dicha función f es **única salvo por una constante aditiva**.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [6, Teorema 3]. □

Del teorema anterior se obtiene el siguiente corolario directo, que es la fórmula de integración de Rockafellar:

Corolario 3.5 (Fórmula de integración de Rockafellar I) *Sean $f, g \in \Gamma_0(X)$ tales que*

$$\partial f \subseteq \partial g.$$

Entonces, f y g son iguales salvo una constante aditiva, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$.

Demostración. De la proposición 2.13, ∂f y ∂g son operadores cíclicamente monótonos maximales y por lo tanto es directo que $\partial f = \partial g$. Por otro lado, si se denota por T a dicho operador, es directo del teorema 3.4 que existe una función $h \in \Gamma_0(X)$ tal que $T = \partial h$ y que es única salvo una constante aditiva. Luego, como $T = \partial f = \partial g$, se concluye que $f = h + c_1$ y $g = h + c_2$ (con c_1, c_2 constantes en $\mathbb{R}$), y en particular,

$$\exists c \in \mathbb{R},\ f = g + c.$$

□

En el caso de funciones en el bidual, la fórmula de integración de Rockafellar requiere menos hipótesis, pues se puede estudiar el subdiferencial para la dualidad $\langle X, X^* \rangle$.

Corolario 3.6 (Fórmula de integración de Rockafellar II) *Sean $f, g \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ tales que*

$$\hat{X} \cap \partial f(x^*) \subseteq \hat{X} \cap \partial g(x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

Entonces, f y g son iguales salvo una constante aditiva, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$.

Demostración. Nótese primero que, como $f, g \in \Gamma_0(X^*, w^*)$, existen $\tilde{f}, \tilde{g} \in \Gamma_0(X)$ tales que $(\tilde{f})^* = f$ y $(\tilde{g})^* = g$. Luego, para $x^* \in X^*$ y $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^* \in \partial \tilde{f}(x) &\iff x \in X \cap \partial f^*(x^*) \\ &\implies x \in X \cap \partial g(x^*) \\ &\iff x^* \in \partial \tilde{g}(x). \end{aligned}$$

Así $\partial \tilde{f} \subseteq \partial \tilde{g}$ y, aplicando el corolario 3.5, se tiene que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = \tilde{f} - c$. Finalmente,

$$f = (\tilde{f})^* = (\tilde{g} - c)^* = g + c,$$

lo que concluye la demostración. □

3.2. Fórmula de Integración no-convexa

La gran limitante de la fórmula de integración de Rockafellar es que sólo es aplicable para funciones en $\Gamma_0(X)$. No obstante, Correa y Hantoute en [8] dan una buena generalización para otra familia de funciones: Las funciones *epi-pointed*. El concepto de epi-pointed fue primero introducido por el economista G. Debreu en los 50' para conjuntos, y luego adaptado a funciones por Hiriart-Urruty y Benoist; véase [8].

Este resultado de integración de Correa y Hantoute se obtiene a partir de la fórmula de Rockafellar aplicada al subdiferencial de la función conjugada. En esta sección se revisarán los resultados más importantes de su trabajo, incluyendo, cuando sea relevante, las demostraciones.

Definición 3.7 (Función epi-pointed) *Una función $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ se dice* ***epi-pointed*** *si* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \neq \emptyset$, *o equivalentemente si existe una traslación lineal de f que es fuertemente coerciva, es decir, si existe $x^* \in X^*$ tal que*

$$\liminf_{\|x\|\to+\infty} \frac{f(x) - \langle x^*, x\rangle}{\|x\|} > 0.$$

A priori, las funciones epi-pointed podrían no ser subdiferenciables en muchos puntos ($\partial f(x) = \emptyset$), por lo que es necesario "regularizarlas".

Definición 3.8 *Dado $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, se define la* ***extensión de f a X^{**}*** *como la función $\hat{f} : X^{**} \to \mathbb{R}_\infty$ dada por*

$$\hat{f}(x^{**}) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x^{**} = \hat{x} \in \hat{X}. \\ +\infty & \text{si } x^{**} \in X^{**} \setminus \hat{X}. \end{cases}$$

Además, se denota simplemente por $\overline{f}^{**}$ a la regularizada w^{**}-sci. de $\hat{f}$.

En lo que sigue, para funciones definidas sobre X^{**}, se considerará siempre el subdiferencial y la conjugada de Fenchel con respecto a la topología débil-**, es decir, para $f : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$, se usará, para todo $\varepsilon \geq 0$, que

$$\partial_\varepsilon f(x^{**}) = \{x^* \in X^* \ : \ f(x^{**}) + \langle x^*, y^{**} - x^{**}\rangle \leq f(y^{**}), \ \forall y^{**} \in X^{**}\}.$$

y que f^* será la función definida sobre X^* a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$f^*(x^*) = \sup_{x^{**}\in X^{**}} \langle x^*, x^{**}\rangle.$$

Con esta convención, se tienen los siguientes resultados:

Lema 3.9 *Para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se tiene que:*

1. $\overline{f}^{**}(x^{**}) = \liminf_{\hat{X}\ni x \rightharpoonup^{**} x^{**}} f(x)$, *donde $x \rightharpoonup^{**} x^{**}$ denota la w^{**}-convergencia.*

2. *Si $f \in \Gamma_0$, entonces $\overline{f}^{**} = f^{**}$.*

3. $f^* = \left(\overline{f}^{**}\right)^* = \left(\hat{f}\right)^*$.

4. $\partial_\varepsilon \hat{f} = \partial_\varepsilon f$, *para todo $\varepsilon > 0$.*

5. *El operador subdiferencial de* $\overline{f}^{**}$ *está caracterizado por*

$$\partial\overline{f}^{**}(x^{**}) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0 \\ U\in\mathcal{V}(0,w^{**})}} \bigcup_{\substack{y\in x^{**}+U \\ y\in X}} \partial_\varepsilon f(y).$$

6. *Para todo* $x^* \in X^*$, $\left(\partial\overline{f}^{**}\right)^{-1}(x^*) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{(\partial_\varepsilon f)^{-1}(x^*)}^{**}$.

Demostración. Ver [8, Lema 2]. □

El siguiente lema caracteriza el subdiferencial de la función conjugada con respecto a la regularizada w^{**}-sci., lo que es central para la fórmula de integración deseada.

Lema 3.10 *Para* $f : X \to \mathbb{R}_\infty$ *epi-pointed, se cumple que*

$$\partial f^*(x^*) = N_{\operatorname{dom} f^*}(x^*) + \overline{\operatorname{co}}^{**}\left[(\partial\overline{f}^{**})^{-1}(x^*)\right].$$

Además, se tiene que

$$\operatorname{dom}(\partial f^*) = \operatorname{Im}(\partial\overline{f}^{**}) \quad y \quad \overline{\operatorname{dom} f^*} = \overline{\operatorname{Im}(\partial\overline{f}^{**})}.$$

Demostración. Ver [8, Proposición 3] y [8, Corolario 7]. □

Teorema 3.11 (Correa-Hantoute) *Sean* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *dos funciones, con* f *epi-pointed. Si para todo* $x^{**} \in X^{**}$ *se tiene que*

$$\partial\overline{f}^{**}(x^{**}) \subseteq \partial\overline{f}^{**}(x^{**}),$$

entonces existe $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\overline{\operatorname{co}}\, f = \overline{(\overline{\operatorname{co}}\, g)\Box\sigma_{\operatorname{dom} f^*}} + c,$$

donde $\sigma_{\operatorname{dom} f^*}$ *se está considerando como función definida sobre* X*. Si además alguna de las siguientes condiciones se tiene,*

(i) $g \leq f$.

(ii) $\operatorname{Int}(\operatorname{dom} g^*) \subseteq \overline{\operatorname{dom} f^*}$.

(iii) f *es positivamente homogénea.*

entonces $\overline{\operatorname{co}}\, f$ *y* $\overline{\operatorname{co}}\, g$ *son iguales, salvo por una constante aditiva.*

Demostración. Se desarrollará la demostración enunciando sólo los pasos más importantes. Para detalles, ver [8, Teorema 9].

Sin perder generalidad, se puede suponer que $\overline{g}^{**} \in \Gamma_0(X^{**})$. Además, por el lema 3.9.2 y el lema 3.10, es directo que

$$\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \mathrm{dom}\, \partial f^* \subseteq \mathrm{Im}\, \partial \overline{f}^{**} \subseteq \mathrm{Im}\, \partial \overline{g}^{**} \subseteq \mathrm{dom}\, g^*,$$

y por lo tanto $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, g^*]$, que en particular muestra que g es epi-pointed. Además, es fácil ver que también se tiene

$$\partial \overline{f}^{**}(x^{**}) \subseteq \partial \overline{g}^{**}(x^{**}) \cap \overline{\mathrm{dom}\, f^*}.$$

Luego, aplicando la proposición 1.39.4, se tiene que cuando $\partial \overline{f}^{**}(x^{**}) \cap \overline{\mathrm{dom}\, f^*} \neq \emptyset$,

$$\partial \overline{f}^{**}(x^{**}) \cap \overline{\mathrm{dom}\, f^*} \subseteq \partial \overline{g}^{**}(x^{**}) \cap \overline{\mathrm{dom}\, f^*} = \partial \overline{g}^{**}(x^{**}) \cap \partial \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(0) = \partial(\overline{g}^{**} \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*})(x^{**}).$$

Se define entonces la función $h := \overline{g}^{**} \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}$. Del desarrollo anterior, se tiene que

$$\partial \overline{f}^{**} \subseteq \partial h.$$

Además, es directo que $h^* = g^* + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}$, que $\mathrm{dom}\, h^* = \mathrm{dom}\, g^* \cap \overline{\mathrm{dom}\, f^*} \subseteq \overline{\mathrm{dom}\, f^*}$ y que

$$\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, h^*].$$

Además, como g^* e $I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}$ cumplen las condiciones del ejemplo 1.31(c), se tiene que $h^{**} = h$, por lo que $h \in \Gamma_0(X^{**})$. Por otro lado, se tiene que

$$N_{\mathrm{dom}\, f^*}(x^*) \subseteq N_{\mathrm{dom}\, h^*}(x^*),\ \forall x^* \in \mathrm{dom}\, f^* \cap \mathrm{dom}\, h^*.$$

Así, aplicando el lema 3.9, se tiene que para todo $x^* \in \mathrm{dom}\, f^* \cap \mathrm{dom}\, h^*$

$$\begin{aligned} \partial f^*(x^*) &= N_{\mathrm{dom}\, f^*}(x^*) + \overline{\mathrm{co}}^{**}\left[(\partial \overline{f}^{**})^{-1}(x^*)\right] \\ &\subseteq N_{\mathrm{dom}\, h^*}(x^*) + \overline{\mathrm{co}}^{**}\left[(\partial h)^{-1}(x^*)\right] \\ &= \partial h^*(x^*). \end{aligned}$$

Luego, como f es continua en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$, que está contenido en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, h^*]$, se tiene de la proposición 1.39.3 que para todo $x^* \in X^*$,

$$\partial(f^* + h^*)(x^*) = \partial f^*(x^*) + \partial h^*(x^*) \subseteq \partial h^*(x^*) + \partial h^*(x^*) = \partial(2h^*)(x^*),$$

donde la inclusión se obtiene directa de lo anterior si $x^* \in \mathrm{dom}\, f^* \cap \mathrm{dom}\, h^*$ y si no, entonces es trivial pues $\partial f^*(x^*) + \partial h^*(x^*) = \emptyset$. Finalmente, aplicando el corolario 3.5, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f^* + h^* = 2h^* - c.$$

Luego, se puede concluir que $f^*(x^*) = h^*(x^*) - c = g^*(x^*) + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}(x^*) - c$ para todo $x^* \in \mathrm{dom}\, f^* \cap \mathrm{dom}\, h^*$. Sin embargo, es fácil ver que la igualdad también se cumple para todo $x^* \in \overline{\mathrm{dom}\, f^*} \cap \overline{\mathrm{dom}\, g^*}$ y todo $x^* \notin \overline{\mathrm{dom}\, f^*}$. Luego, usando el hecho que $\overline{\mathrm{dom}\, f^*} \subseteq \overline{\mathrm{dom}\, g^*}$ se tiene que

$$f^*(x^*) = g^*(x^*) + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}(x^*) - c,\ \forall x^* \in X^*,$$

por lo que, aplicando las condiciones de calificación del ejemplo 1.31.(b) y notando que

$$\overline{(\overline{\mathrm{co}}\, g) \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}} = ((\overline{\mathrm{co}}\, g) \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*})^{**}\big|_X = (g^*(x^*) + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}(x^*))^*\big|_X,$$

se concluye $\overline{\mathrm{co}}\, f = \overline{(\overline{\mathrm{co}}\, g) \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}} + c$. Para el resto de las conclusiones, véase la demostración del teorema citado al comienzo. $\square$

El punto clave de la demostración anterior fue chequear que $\partial f^* \subseteq \partial h^*$. No obstante, es posible demostrar que basta con chequear que

$$\forall x^* \in X^*,\ \hat{X} \cap \partial f^*(x^*) = \hat{X} \cap \partial h^*(x^*).$$

Para replicar la demostración con esta nueva condición, es necesario trabajar con la topología débil-* en X^* y considerar el subdiferencial con respecto a esta topología. Este resultado motiva gran parte de la memoria, pero su estudio no es necesario. Además queda fuera del marco teórico el operador subdiferencial para espacios localmente convexos en dualidad. Al lector interesado en esta teoría se le recomienda ver [11, Capítulo 2] y [8, Teorema 9 y Observación 2].

Por otro lado, el teorema 3.11 tiene un gran defecto: Es necesario trabajar con el subdiferencial de funciones en el bidual. Se cierra esta sección mostrando una proposición que reemplaza el subdiferencial de las regularizadas w^{**}-sci. por el ε-subdiferencial de las funciones originales. En la siguiente sección se mostrará que, bajo ciertas hipótesis, es posible reemplazar por el subdiferencial de la función original que es en definitiva el objetivo en cuanto se está tratando de extender la fórmula de integración de Rockafellar.

Proposición 3.12 *Sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones, con f epi-pointed. Si existe $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \alpha]$ se cumple que*

$$\partial_\varepsilon f \subseteq \partial_\varepsilon g,$$

entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\mathrm{co}}\, f = \overline{(\overline{\mathrm{co}}\, g) \square \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}} + c.$$

Si además se cumple alguna de las condiciones (i)-(iii) del teorema 3.11, entonces $\overline{\mathrm{co}}\, f$ y $\overline{\mathrm{co}}\, g$ son iguales, salvo por una constante aditiva.

Demostración. Ver [8, Corolario 10]. $\square$

3.3. Fórmula de Integración no-convexa con la RNP

La fórmula de integración del teorema 3.11 toma una forma mucho más simple cuando X tiene la RNP y, por consiguiente, X^* es w^*-Asplund. El objetivo de esta sección es enunciar el teorema de dicha fórmula y, análogo al teorema 3.11, mostrar los elementos principales de la demostración.

Lema 3.13 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función sci. y epi-pointed. Si X tiene la RNP, entonces*

$$\overline{\mathrm{dom}\, f^*} = \overline{\mathrm{Im}\, \partial f}.$$

Demostración. Ver [8, Corolario 7]. $\square$

Lema 3.14 *Para $C \subseteq X$ cerrado se tiene*

$$\text{str-exp}[\overline{\text{co}}\, C] \subseteq C.$$

Demostración. Sea $x \in \text{str-exp}[\overline{\text{co}}\, C]$. Existe $x^* \in X^*$ no-nulo tal que x^* fuerte-expone a x en $\overline{\text{co}}\, C$. Se tiene entonces que para todo $\alpha > 0$,

$$S(x^*, \overline{\text{co}}\, C, \alpha) \cap C \neq \emptyset.$$

En efecto, si fuera vacío para algún $\alpha > 0$ se tendría que $\sigma_C(x^*) \leq \sigma_{\overline{\text{co}}\, C}(x^*) - \alpha < \sigma_{\overline{\text{co}}\, C}(x^*)$, lo que es una contradicción con la conclusión del ejemplo 1.31.(a). Luego, se puede construir una sucesión $(x_n) \subseteq C$ tal que $x_n \in S(x^*, \overline{\text{co}}\, C, 1/n)$, para todo $n \geq 1$. Es claro entonces que $\langle x^*, x_n \rangle \to \sigma_{\overline{\text{co}}\, C}(x^*) = \langle x^*, x \rangle$ y por lo tanto, como x^* fuerte-expone a x, se tiene que $x_n \to x$. Recordando que C es cerrado, se tiene que $x \in C$ y se concluye el resultado. $\square$

Proposición 3.15 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x^* \in X^*$ un punto tal que f^* es F-Diff. en x^*. Si f es sci. entonces*

$$\partial f^*(x^*) = (\partial f)^{-1}(x^*).$$

Demostración. Nótese primero que, independientemente del hecho de que f^* sea F-Diff. en x^* y de que f sea sci., siempre se tiene que

$$(\partial f)^{-1}(x^*) \subseteq \partial f^*(x^*),$$

por lo que sólo queda demostrar la otra inclusión. Sea entonces $x = Df^*(x^*)$, que es un punto de X por el corolario 1.45. Por el corolario 2.38, se tiene que $(x, \overline{\text{co}}\, f(x))$ es un punto fuertemente expuesto de epi$[\overline{\text{co}}\, f]$. Recordando que epi$[\overline{\text{co}}\, f] = \overline{\text{co}}[\text{epi}\, f]$ y que epi f es cerrado (pues f es sci.), se puede aplicar el lema 3.14, concluyendo que $f(x) = \overline{\text{co}}\, f(x)$. Luego, es fácil ver que $x^* \in \partial f(x)$: En efecto,

$$\begin{aligned} x \in \partial f^*(x^*) &\Longleftrightarrow x^* \in \partial(\overline{\text{co}}\, f)(x) \\ &\Longleftrightarrow \overline{\text{co}}\, f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \leq \overline{\text{co}}\, f(y), \ \forall y \in X \\ &\Longrightarrow f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y), \ \forall y \in X \\ &\Longrightarrow x^* \in \partial f(x), \end{aligned}$$

donde la primera implicancia se tiene de que $f(x) = \overline{\text{co}}\, f(x)$ y de que $\overline{\text{co}}\, f(y) \leq f(y)$, para todo $y \in X$. Luego, $x \in (\partial f)^{-1}(x^*)$ y por lo tanto

$$\partial f^*(x^*) = \{x\} \subseteq (\partial f)^{-1}(x^*).$$

$\square$

La demostración de la última proposición es una versión alternativa a la demostración presentada en [8], utilizando las propiedades presentadas de los puntos fuertemente expuestos. Para la demostración original, ver [8, Proposición 6].

Lema 3.16 *Sean $f, g \in \Gamma_0(X)$ y sea $V \subseteq \operatorname{dom} \partial f$ abierto no-vacío. Si D es un conjunto denso de V tal que $\partial f(x) \subseteq \partial g(x)$, para todo $x \in D$, entonces se tiene*

$$\partial f(x) \subseteq \partial g(x),\ \forall x \in V.$$

Demostración. Ver [8, Lema 11]. □

Lema 3.17 *Sean $f, h \in \Gamma_0(X)$, ambas con interior de su dominio no-vacío, que satisfacen*

(i) $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f] = \operatorname{Int}[\operatorname{dom} h] =: D$, *y*

(ii) $\partial f(x) \subseteq \partial h(x)$, *para todo* $x \in D$.

Se tiene entonces que f y h son iguales salvo una constante aditiva.

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]$ y $V \subseteq D$ una vecindad convexa y cerrada de x. Aplicando la proposición 1.39.3, se tiene que para todo $y \in X$

$$\partial(f + I_V)(y) = \partial f(y) + \partial I_V(y) \subseteq \partial h(y) + \partial I_V(y) = \partial(h + I_V)(y).$$

Luego, por el corolario 3.5, se tiene que $f + I_V = h + I_V + c_V$, donde c_V es una constante en $\mathbb{R}$. De hecho, para todo par de vecindades V_1, V_2 de la forma anterior, $c_{V_1} = c_{V_2}$. En efecto, basta considerar $V = \overline{\operatorname{co}}(V_1 \cup V_2) \subseteq D$ y repetir el proceso de integración anterior, concluyendo que $c_{V_1} = c_V = c_{V_2}$. Se concluye que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = h(x) + c, \quad \forall x \in D.$$

La igualdad anterior se puede expresar como $f + I_D = h + c + I_D$. Luego, como I_D es continua en D, se tiene que $(f + I_D)^* = f^* \Box (I_D)^*$ y por lo tanto,

$$(f + I_D)^{**} = f^{**} + I_{\overline{\operatorname{co}}^{**} D}.$$

En particular, $(f + I_D)^{**}\big|_X = f(x) + I_{\overline{D}}$. Como $\operatorname{dom} f \subseteq \overline{\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]} = \overline{D}$, se concluye que $(f + I_D)^{**}\big|_X = f$. Repitiendo el razonamiento para $h + c$, se concluye que $(h + c + I_D)^{**}\big|_X = h + c$. Notando que $(f + I_D)^{**}\big|_X = (h + c + I_D)^{**}\big|_X$, se concluye el resultado.

□

Con estos lemas, se obtiene la siguiente fórmula de integración en espacios con la RNP:

Teorema 3.18 (Correa-Hantoute) *Sea X un espacio de Banach con la RNP y sean $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones, con f epi-pointed y semicontinua inferior. Si para todo $x \in X$ se tiene que*

$$\partial f(x) \subseteq \partial g(x),$$

entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\operatorname{co}}\, f = \overline{(\overline{\operatorname{co}}\, g) \Box \sigma_{\operatorname{dom} f^*}} + c.$$

Si además se cumple alguna de las condiciones (i)-(iii) del teorema 3.11, entonces $\overline{\operatorname{co}}\, f$ y $\overline{\operatorname{co}}\, g$ son iguales, salvo por una constante aditiva.

Demostración. Como X tiene la RNP, X^* es w^*-Asplund y por lo tanto f^* es F-Diff. en un conjunto D denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$. Además $D \subseteq \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \mathrm{Int}[\overline{\mathrm{dom}\, \partial f^*}] \subseteq \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, \partial f^*]$. Por otro lado, definiendo la función $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, por $h = g \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}$ y repitiendo el razonamiento del teorema 3.11 se tiene que $\partial f \subseteq \partial h$. Citando entonces la proposición 3.15, se tiene que para todo $x^* \in D$,

$$\partial f^*(x^*) = (\partial f)^{-1}(x^*) \subseteq (\partial h)^{-1}(x^*) \subseteq \partial h^*(x^*).$$

Luego, del lema 3.16 se concluye que $\partial f^*(x^*) \subseteq \partial h^*(x^*)$, para todo $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$. En particular, $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, h^*]$. Por otro lado, $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] \subseteq \overline{\mathrm{Im}\, \partial f} \subseteq \overline{\mathrm{Im}\, \partial h} = \overline{\mathrm{dom}\, h^*}$. Como $h^* = g^* + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}$, se tiene que $\overline{\mathrm{dom}\, h^*} \subseteq \overline{\mathrm{dom}\, f^*}$. Se concluye entonces por convexidad que

$$\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*] = \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, h^*].$$

Aplicando el lema 3.17, se tiene que $\overline{\mathrm{co}}\, f = \overline{(\overline{\mathrm{co}}\, g) \Box \sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}} + c$. El resto de la demostración sigue igual que [8, Proposición 12 y Teorema 9].

$\square$

El objetivo de esta memoria es extender el resultado del teorema 3.18, en el sentido de debilitar la hipótesis de la RNP. Dicho de otro modo, se desea contestar la pregunta *¿En qué familia de espacios de Banach el teorema 3.18 es cierto?* En los siguientes capítulos se estudiará la teoría desarrollada en torno a esta pregunta.

Capítulo 4

Funciones Integrables y Cuasi-Integrables

Para poder extender de buena manera el teorema 3.18, es necesario primero estudiar qué condiciones debe cumplir una función epi-pointed para poder ser integrada a partir de su subdiferencial. En este capítulo se desarrolla la teoría de las funciones integrables, es decir, de aquellas funciones en las que el razonamiento de la fórmula de integración de Correa-Hantoute es aplicable.

4.1. Funciones Integrables

Definición 4.1 (Funciones Integrables) *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice* ***integrable*** *si es epi-pointed y existe D subconjunto denso de $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ tal que para todo $x^* \in D$ se cumple*

$$\partial f^*(x^*) = \overline{\operatorname{co}}^{**}[(\partial f)^{-1}(x^*)]. \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) se puede separar en dos ecuaciones independientes, una que representa la necesidad de que la función f sea "parecida" a $\overline{\operatorname{co}}\, f$, y la otra que representa en cierto modo la "continuidad" del subdiferencial de f^*. Más adelante se desarrollarán en más detalle estos criterios.

Proposición 4.2 *Sean $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x^* \in \operatorname{dom} f^*$. x^* satisface la ecuación (4.1) si y sólo si*

(i) $X \cap \partial f^*(x^*) = \overline{\operatorname{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)]$, *y*

(ii) $\overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**} = \partial f^*(x^*)$.

En particular, fs es integrable si y sólo si es epi-pointed y existe D subconjunto denso de $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ *tal que todo $x^* \in D$ satisface (i) y (ii).*

Demostración. Es claro que basta con demostrar la caracterización de la ecuación (4.1), pues la conclusión sobre integrabilidad es directa.

$\Leftarrow$) Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\overline{\text{co}}^{**}[(\partial f)^{-1}(x^*)] &= \overline{\overline{\text{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)]}^{**}\\ &\overset{(i)}{=} \overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**}\\ &\overset{(ii)}{=} \partial f^*(x^*).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Se tiene que

$$\begin{aligned}X \cap \partial f^*(x^*) &= X \cap \overline{\text{co}}^{**}[(\partial f)^{-1}(x^*)]\\ &= \overline{\text{co}}^{w}[(\partial f)^{-1}(x^*)]\\ &= \overline{\text{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)],\end{aligned}$$

por lo que se satisface (i). Finalmente, notando nuevamente que

$$\overline{\text{co}}^{**}[(\partial f)^{-1}(x^*)] = \overline{\overline{\text{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)]}^{**},$$

(ii) se concluye en virtud de la hipótesis y de (i).

$\square$

Ejemplo 4.3 Considérese $X = c_0$ y sea $C = S_X \cap c_{00}$, donde c_{00} denota el espacio de las sucesiones finitas. Se tiene que la función $f = I_C$ es integrable.

Demostración. Nótese primero que para $x^* \in X^*$,

$$f^*(x^*) = \sigma_C(x^*) = \sigma_{\overline{\text{co}}(C)}(x^*)$$

y como $\overline{\text{co}}\, C = B_X$ (pues c_{00} es denso en c_0 para la norma del supremo), se tiene que $f^* \equiv \|\cdot\|_1$, donde $\|\cdot\|_1$ denota la norma usual en $X^* = \ell^1$. En particular, $\overline{\text{co}}\, f = I_{B_X}$ y además f es epi-pointed.

Se sabe también de [5, Ejemplo 1.4(b)] que para todo $x^* \in X^*$

$$\partial\|\cdot\|_1(x^*) = \{x^{**} \in \ell^\infty \ : \ \|x^{**}\|_\infty \leq 1 \wedge x_n^{**} = \text{sgn}(x_n^*),\ \forall x_n^* \neq 0\}\,.$$

Sea entonces $x^* \in c_{00} \subseteq \ell^1$ y sea $N \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de índices tal que $x_n^* \neq 0$ si y sólo si $n \in N$. Se tiene que

$$\partial\|\cdot\|_1(x^*) = \prod_{n\in N}\{\text{sgn}(x_n^*)\} \times [-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}.$$

es directo entonces que

$$(\partial I_C)^{-1}(x^*) = \prod_{n\in N}\{\text{sgn}(x_n^*)\} \times \left(c_{00}(\mathbb{N}\setminus N) \cap [-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}\right),$$

y que

$$X \cap \partial\|\cdot\|_1(x^*) = \prod_{n\in N}\{\mathrm{sgn}(x_n^*)\} \times \left(c_0(\mathbb{N}\setminus N) \cap [-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}\right).$$

Luego, notando $c_{00}(\mathbb{N}\setminus N)$ y $c_0(\mathbb{N}\setminus N)$ son isomorfos a c_{00} y c_0 respectivamente (pues N es finito), se tiene que que $c_{00}(\mathbb{N}\setminus N)\cap[-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}$ es denso en $c_0(\mathbb{N}\setminus N)\cap[-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}$, y que, aplicando el teorema 1.29, $c_0(\mathbb{N}\setminus N)\cap[-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}$ es w^{**}-denso en $[-1,1]^{\mathbb{N}\setminus N}$. Se obtiene entonces que

$$\partial\|\cdot\|_1(x^*) = \overline{\mathrm{co}}^{**}[(\partial I_C)^{-1}(x^*)],\ \forall x^*\in c_{00}.$$

Finalmente, como c_{00} es denso en ℓ^1 para $\|\cdot\|_1$, se concluye que I_C es integrable. $\square$

El siguiente teorema extiende el resultado de integración de Correa-Hantoute independizándose de la hipótesis de la Fréchet-diferenciabilidad de la conjugada y por lo tanto de la RNP. Además, muestra el porqué de la definición de funciones integrables.

Teorema 4.4 (Fórmula de Integración I) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función integrable y $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función cualquiera tal que*

$$\partial f \subseteq \partial g.$$

Entonces existe $c\in\mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\mathrm{co}}\, f = \overline{(\overline{\mathrm{co}}\, g)\Box\sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}} + c.$$

Si además se cumple alguna de las condiciones (i)-(iii) del teorema 3.11, entonces $\overline{\mathrm{co}}\, f$ y $\overline{\mathrm{co}}\, g$ son iguales, salvo por una constante aditiva.

Demostración. Como la inclusión $\partial g \subseteq \partial(\overline{\mathrm{co}}\, g)$ siempre es cierta, se puede suponer sin perder generalidad que $g\in\Gamma_0(X)$. Sea ahora $D\subseteq X^*$, el conjunto denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$ tal que la ecuación (4.1) se cumple. Como $\mathrm{Im}\,\partial f\subseteq\overline{\mathrm{dom}\, f^*}$, se tiene que

$$\partial f(x)\subseteq\partial g(x)\cap\overline{\mathrm{dom}\, f^*},\ \forall x\in X.$$

Luego, de la proposición 1.39.4, se tiene que para todo $x\in X$ tal que $\partial f(x)\neq\emptyset$

$$\partial f(x)\subseteq\partial g(x)\cap\overline{\mathrm{dom}\, f^*} = \partial g(x)\cap\partial\sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}(0) = \partial(g\Box\sigma_{\mathrm{dom}\, f^*})(x).$$

Luego, definiendo $h = g\Box\sigma_{\mathrm{dom}\, f^*}$, se tiene que $\partial f(x)\subseteq\partial h(x)$ para todo $x\in X$ (cuando $\partial f(x)=\emptyset$, la inclusión es trivial). Por otro lado, $h^* = g^* + I_{\overline{\mathrm{dom}\, f^*}}$.

Ahora, como f es integrable, se tiene que para todo $x^*\in D$

$$\begin{aligned}\partial f^*(x^*) &= \overline{\mathrm{co}}^{**}[(\partial f)^{-1}(x^*)]\\ &\subseteq \overline{\mathrm{co}}^{**}[(\partial h)^{-1}(x^*)]\\ &\subseteq \partial h^*(x^*).\end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el lema 3.16, se tiene que $\partial f^*(x^*) \subseteq \partial h^*(x^*)$ para todo $x^* \in \text{Int}[\text{dom}\, f^*]$. En particular, se concluye que h es epi-pointed y que $\text{Int}[\text{dom}\, f^*] \subseteq \text{Int}[\text{dom}\, h^*]$. Como además $\text{dom}\, h^* = \text{dom}\, g^* \cap \overline{\text{dom}\, f^*} \subseteq \overline{\text{dom}\, f^*}$, se concluye que

$$\overline{\text{dom}\, f^*} = \overline{\text{Int}[\text{dom}\, f^*]} \subseteq \overline{\text{dom}\, h^*} \subseteq \overline{\text{dom}\, f^*},$$

es decir, $\overline{\text{dom}\, f^*} = \overline{\text{dom}\, h^*}$ y por lo tanto $\text{Int}[\text{dom}\, f^*] = \text{Int}[\text{dom}\, h^*]$. Se tienen entonces las hipótesis del lema 3.17, por lo que se concluye que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^* = h^* - c$, y por lo tanto

$$\overline{\text{co}}\, f = h^{**}\big|_X + c.$$

Como $I_{\overline{\text{dom}\, f^*}}$ es continua en $\text{Int}[\text{dom}\, h^*] \subseteq \text{dom}\, g^* \cap \overline{\text{dom}\, f^*}$, se tiene, aplicando el ejemplo 1.31, que $h^{**} = g^{**} \Box \sigma_{\text{dom}\, f^*}$ y por lo tanto,

$$h^{**}\big|_X \equiv \overline{g \Box \sigma_{\text{dom}\, f^*}},$$

de donde se concluye la primera parte del resultado. El resto de la demostración sigue igual que [8, Teorema 9]. □

Observación Una pregunta razonable que nace de este teorema es si es posible recuperar el resultado ocupando el subdiferencial con respecto a la dualidad $\langle X, X^* \rangle$. En efecto, el corolario 3.6 da la intuición de que es posible. Sin embargo, para poder aplicar este resultado, sería necesario que

$$\hat{X} \cap \partial f^*(x^*) \subseteq \hat{X} \cap \partial h^*(x^*), \ \forall x^* \in X^*,$$

inclusión que sólo es verificada en un conjunto denso D del interior de $\text{dom}\, f^*$. La extensión de esta inclusión desde D a $\text{dom}\, f^*$ pasa por el lema 3.17, que requiere que $\partial f^*(x^*) \subseteq \partial h^*(x^*)$ en $D \subseteq \text{Int}[\text{dom}\, \partial f^*]$, necesariamente considerando a X^* como espacio de Banach. Así el teorema 4.4, requiere que f sea integrable.

La observación anterior motiva el siguiente resultado.

Teorema 4.5 (Fórmula de Integración II) *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que para todo $x^* \in X^*$ se satisface que*

$$X \cap \partial f^*(x^*) = \overline{\text{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)]. \tag{4.2}$$

Entonces para toda función $g \in \Gamma_0(X)$ que satisface $\partial f \subseteq \partial g$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\text{co}}\, f = g + c.$$

Demostración. Para todo $x^* \in X^*$ se tiene

$$\begin{aligned} X \cap \partial f^*(x^*) &= \overline{\text{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)] \\ &\subseteq \overline{\text{co}}[(\partial g)^{-1}(x^*)] \\ &= X \cap \partial g^*(x^*). \end{aligned}$$

Aplicando el corolario 3.6, se concluye que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^* = g^* - c$, y por lo tanto, como $g \in \Gamma_0(X)$, se concluye que

$$\overline{\text{co}}\, f = g + c.$$

□

De este último teorema y en el contexto de las funciones epi-pointed, es razonable plantear la siguiente posible extensión de la segunda fórmula de integración:

Conjetura 4.6 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed tal que todo $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ satisface la ecuación (4.2). Entonces, para toda función $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

$$\partial f \subseteq \partial g,$$

existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\operatorname{co}}\, f = \overline{(\overline{\operatorname{co}}\, g)\Box\sigma_{\operatorname{dom} f^*}} + c$.

Si esta conjetura fuese cierta, sería posible independizarse de la segunda condición de integración expuesta en la caracterización de funciones integrables dada en la proposición 4.2. No obstante, en esta memoria se desarrolla investigación precisamente sobre la segunda condición, es decir, se estudia en profundidad cuándo para una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed, un punto $x^* \in X^*$ satisface

$$\overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**} = \partial f^*(x^*). \tag{4.3}$$

4.2. Funciones Cuasi-Integrables

Para poder concentrarse en la condición de integrabilidad dada por la ecuación (4.3), se introduce la noción de **cuasi-integrabilidad**. Intuitivamente, una función cuasi-integrable es aquella donde si se tiene (4.3) en un conjunto denso, entonces también se satisface (4.2) en el mismo denso.

Definición 4.7 *Para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x^* \in \operatorname{dom} f^*$ se dice que x^* es un* ***funcional de similitud de f*** *si $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$ y*

$$X \cap \partial f^*(x^*) = \overline{\operatorname{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)].$$

El conjunto de los funcionales de similitud de f se denota por $Sim(f)$.

Definición 4.8 (Funciones Cuasi-Integrables) *Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice* ***cuasi-integrable*** *si es epi-pointed y se satisface que*

$$D \text{ es denso en } \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*] \Longrightarrow D \cap Sim(f) \text{ es denso en } \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*], \tag{4.4}$$

donde $D = \left\{x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*] \ : \ \overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**} = \partial f^*(x^*)\right\}$.

De la definición, es claro que toda función integrable es cuasi-integrable. Además, toda función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed que satisface la hipótesis de la conjetura 4.6 es cuasi-integrable: En efecto, basta notar que $D \cap Sim(f) = D$, para todo conjunto de la forma

$$D \subseteq \{x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*] \ : \ X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset\}.$$

Por otro lado no toda función cuasi-integrable es (a priori) necesariamente integrable, pues la relación (4.4) se puede satisfacer por vacuidad. Sin embargo, se tiene el siguiente lema directo.

Lema 4.9 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función cuasi-integrable. f es integrable si y sólo si el conjunto de funcionales $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$ que satisfacen (4.3) es denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$.*

Con este lema, se puede recuperar el teorema 3.18 como corolario del teorema 4.4.

Proposición 4.10 *Si X tiene la RNP, se tiene que*

1. *Toda función epi-pointed y sci. es cuasi-integrable.*

2. *Toda función cuasi-integrable es integrable.*

Demostración. Para demostrar 2. basta notar que para una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed, los puntos donde f^* es F-Diff. satisfacen (4.3). Para 1., si f es epi-pointed y sci., se tiene directamente de la proposición 3.15 los puntos donde f^* es F-Diff. son funcionales de similitud de f. □

De esta proposición aparecen dos preguntas naturales: *¿Qué condiciones son suficientes para que una función sea cuasi-integrable?* y *¿Cuál es la familia de espacios de Banach más grande donde toda función cuasi-integrable es integrable?* Para cerrar este capítulo, se estudiarán condiciones suficientes en espacios con la propiedad de Krein-Milman para que una función sea cuasi-integrable. La segunda pregunta se tratará en el capítulo siguiente.

Proposición 4.11 *Sea $C \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío. Si X tiene la KMP, entonces $I_{\mathrm{ext}(C)}$ es cuasi-integrable.*

Demostración. Como X tiene la KMP, se sabe que $C = \overline{\mathrm{co}}[\mathrm{ext}(C)]$ y por lo tanto $\overline{\mathrm{co}}(I_{\mathrm{ext}(C)}) = I_C$. En particular, $(I_{\mathrm{ext}(C)})^* = \sigma_C$, que toma valores en $\mathbb{R}$ por ser C acotado. Así, $I_{\mathrm{ext}(C)}$ es epi-pointed.

Sea entonces $x^* \in X^* = \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, \sigma_C]$ tal que $X \cap \sigma_C(x^*) \neq \emptyset$. Como σ_C es continua en x^*, se tiene que $X \cap \partial\sigma_C(x^*)$ es convexo, cerrado y acotado y por lo tanto

$$X \cap \partial\sigma_C(x^*) = \overline{\mathrm{co}}[\mathrm{ext}(X \cap \partial\sigma_C(x^*))].$$

Por otro lado, se sabe que $X \cap \partial\sigma_C(x^*) = H(C, x^*) \cap C$ y luego, de la proposición 2.28, se tiene que $\mathrm{ext}(X \cap \partial\sigma_C(x^*)) \subseteq \mathrm{ext}(C)$. Así,

$$(\partial I_{\mathrm{ext}(C)})^{-1}(x^*) = \mathrm{ext}(X \cap \partial\sigma_C(x^*)),$$

y por lo tanto $x^* \in Sim(I_{\mathrm{ext}(C)})$. Luego,

$$Sim(I_{\mathrm{ext}(C)}) \equiv \{x^* \in X^* \ : \ X \cap \partial\sigma_C(x^*) \neq \emptyset\},$$

con lo que se concluye que, independientemente de si se satisface la hipótesis de (4.4), $I_{\mathrm{ext}(C)}$ es cuasi-integrable. □

Cabe destacar que, de la demostración, se tiene que $I_{\text{ext}(C)}$ satisface las condiciones del teorema 4.5 y por lo tanto se puede integrar a partir de su subdiferencial según este paradigma. No obstante, un resultado más interesante es que este razonamiento se puede extender al epigrafo de funciones epi-pointed.

Lema 4.12 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed y $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$. Se tiene que*

1. $x^{**} \in \partial f^*(x^*) \iff (x^{**}, f^{**}(x^{**})) \in \operatorname{epi} f^{**} \cap H(\operatorname{epi} f^{**}, (x^*, -1))$.

2. $x \in X \cap \partial f^*(x^*) \iff (x, \overline{\operatorname{co}}\, f(x)) \in \operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f) \cap H(\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f), (x^*, -1))$.

Demostración. Sin perder generalidad, se asume que $f \in \Gamma_0(X)$ (basta recordar que $f^* = (\overline{\operatorname{co}}\, f)^*$). Para $x^{**} \in X^{**}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
x^{**} \in \partial f^*(x^*) &\iff x^* \in \partial f^{**}(x^{**}) \\
&\iff \forall y^{**} \in \operatorname{dom} f^{**},\ \langle x^*, y^{**} - x^{**}\rangle \leq f^{**}(y^{**}) - f^{**}(x^{**}) \\
&\iff \forall (y^{**}, \lambda) \in \operatorname{epi} f^{**},\ \langle x^*, y^{**} - x^{**}\rangle \leq \lambda - f^{**}(x^{**}) \\
&\iff \forall (y^{**}, \lambda) \in \operatorname{epi} f^{**},\ \langle x^*, y^{**}\rangle - \lambda \leq \langle x^*, x^{**}\rangle - f^{**}(x^{**}) \\
&\iff \langle x^*, x^{**}\rangle - f^{**}(x^{**}) = \sigma_{\operatorname{epi} f^{**}}(x^*, -1) \\
&\iff (x^{**}, f^{**}(x^{**})) \in \operatorname{epi} f^{**} \cap H(\operatorname{epi} f^{**}, (x^*, -1)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la primera equivalencia. Para ver la segunda, nótese del desarrollo anterior que para $x \in X$,

$$x \in X \cap \partial f^*(x^*) \iff (x, f^{**}(x)) \in \operatorname{epi} f^{**} \cap H(\operatorname{epi} f^{**}, (x^*, -1)).$$

Notando que $f^{**}(x) = f(x)$ y que $\operatorname{epi} f^{**} = \overline{\operatorname{co}}^{**}[\operatorname{epi} f]$, se tiene que

$$(x, f^{**}(x)) \in \operatorname{epi} f^{**} \cap H(\operatorname{epi} f^{**}, (x^*, -1)) \iff (x, f(x)) \in \operatorname{epi} f \cap H(\operatorname{epi} f, (x^*, -1)),$$

lo que concluye la demostración. □

Lema 4.13 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$ y $x^* \in X^*$ tal que $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$. Se cumple que para todo $x \in X$, x es punto extremo de $X \cap \partial f^*(x^*)$ si y sólo si $(x, f(x))$ es punto extremo de $\operatorname{epi} f \cap H(\operatorname{epi} f, (x^*, -1))$.*

Demostración. Para ahorrar notación, sea $H \equiv H(\operatorname{epi} f, (x^*, -1))$. Supóngase primero que x es punto extremo de $X \cap \partial f^*(x^*)$. Si $(x, f(x))$ no fuera punto extremo de $\operatorname{epi} f \cap H$, entonces existirían $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2) \in \operatorname{epi} f \cap H$ y $t \in (0, 1)$ tales que

$$t(x_1, \lambda_1) + (1 - t)(x_2, \lambda_2) = (x, f(x)).$$

En particular, se tendría que $tx_1 + (1 - t)x_2 = x$. Por otra parte, como $(x_i, \lambda_i) \in \operatorname{epi} f$ para $i = 1, 2$, se tiene que $f(x_i) \leq \lambda_i$ y por lo tanto, como $(x_i, \lambda_i) \in H$, se debe tener que $\lambda_i = f(x_i)$. Del lema 4.12, es directo que $x_i \in X \cap \partial f^*(x^*)$ y luego x no sería punto extremo de $X \cap \partial f^*(x^*)$, lo cual es una contradicción.

Para ver la otra implicancia, supóngase que $(x, f(x))$ es punto extremo de $\operatorname{epi} f \cap H$ y que existen $x_1, x_2 \in X \cap \partial f^*(x^*)$ y $t \in (0,1)$ tales que $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Se tiene nuevamente que $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \operatorname{epi} f \cap H$ y como este conjunto es convexo, se tiene que

$$t(x_1, f(x_1)) + (1-t)(x_2, f(x_2)) \in \operatorname{epi} f \cap H.$$

De manera análoga al desarrollo anterior, se concluye que $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x)$ y entonces,

$$t(x_1, f(x_1)) + (1-t)(x_2, f(x_2)) = (x, f(x)),$$

lo cual es una contradicción. □

Proposición 4.14 *Supóngase que X tiene la KMP y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función epi-pointed. Si* $\operatorname{epi} f$ *contiene los puntos extremos de* $\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{epi} f)$*, entonces f es cuasi-integrable.*

Demostración. Sea $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ con $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$. Se tiene que $X \cap \partial f^*(x^*)$ es un convexo cerrado acotado, por lo que

$$X \cap \partial f^*(x^*) = \overline{\operatorname{co}}[\operatorname{ext}(X \cap \partial f^*(x^*))].$$

Sea entonces $x \in \operatorname{ext}(X \cap \partial f^*(x^*))$. Por el lema 4.13, tenemos que $(x, \overline{\operatorname{co}}\, f(x))$ es punto extremo de $\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f) \cap H(\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f), (x^*, -1))$. Luego, por la proposición 2.28, $(x, \overline{\operatorname{co}} f(x))$ es punto extremo de $\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f)$ que, por definición, es igual a $\overline{\operatorname{co}}(\operatorname{epi} f)$. Así, por hipótesis, $(x, \overline{\operatorname{co}}\, f(x)) \in \operatorname{epi} f$ lo que equivale a que $f(x) = \overline{\operatorname{co}}\, f(x)$. Luego, como $x^* \in \partial(\overline{\operatorname{co}}\, f)(x)$, se tiene que

$$\forall y \in X,\ \langle x^*, y - x\rangle + f(x) = \langle x^*, y - x\rangle + \overline{\operatorname{co}}\, f(x) \leq \overline{\operatorname{co}} f(y) \leq f(y),$$

es decir, $x^* \in \partial f(x)$. De lo anterior, se tiene que $\operatorname{ext}(X \cap \partial f^*(x^*)) \subseteq (\partial f)^{-1}(x^*)$ y por lo tanto

$$X \cap \partial f^*(x^*) = \overline{\operatorname{co}}[(\partial f)^{-1}(x^*)].$$

Así, todo $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ satisface (4.2) (si $X \cap \partial f^*(x^*) = \emptyset$, (4.2) se satisface trivialmente), por lo que f es cuasi-integrable. □

Capítulo 5

La propiedad de continuidad del subdiferencial

En este capítulo se estudiará la familia de espacios de Banach donde toda función cuasi-integrable es integrable o, equivalentemente gracias al lema 4.9, la familia de espacios de Banach X donde para toda función $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ con $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f] \neq \emptyset$, existe D conjunto denso en $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f]$, tal que para todo $x^* \in D$,

$$\overline{X \cap \partial f(x^*)}^{**} = \partial f(x^*).$$

Recordando que toda función en $\Gamma_0(X^*, w^*)$ es la función conjugada de alguna función en X, la afirmación anterior se puede escribir como que para toda función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed, existe D conjunto denso en $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$, tal que para todo $x^* \in D$, x^* satisface (4.3).

5.1. Ecuación de continuidad de ∂f^*

En esta sección, se pretende caracterizar la ecuación de continuidad de ∂f^*:

Definición 5.1 *Se llama* ***ecuación de continuidad*** *de ∂f^* en un punto $x^* \in X^*$ a la ecuación (4.3), es decir, a la ecuación*

$$\overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**} = \partial f^*(x^*).$$

El siguiente teorema da el primer resultado en esta dirección.

Teorema 5.2 *Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed y $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ tal que $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$. Se tiene que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\partial f^*(x^*) = \overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{w^{**}}$.

(ii) $(f^*)'(x^*;\cdot)$ *es* w^**-semicontinua inferior.*

(iii) $\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f) \cap H(\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f),(x^*,-1))$ *es* w^{**}*-denso en* $\operatorname{epi} f^{**} \cap H(\operatorname{epi} f^{**},(x^*,-1))$.

Demostración. En lo que sigue se denotará por $C = \partial f^*(x^*)$, por $C_X = X \cap \partial f^*(x^*)$, por $H = H(\operatorname{epi} f^{**},(x^*,-1))$ y por $H\big|_X = H(\operatorname{epi}(\overline{\operatorname{co}}\, f),(x^*,-1))$. Se supondrá además, sin perder generalidad, que $f \in \Gamma_0(X)$.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ Del teorema 1.57 se sabe, como $C_X \neq \emptyset$, que

$$\overline{(f^*)'(x^*,\cdot)}^* = \sigma_{C_X}.$$

Por otro lado, como $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ y f^* es continua en $\operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$, se tiene que

$$(f^*)'(x^*,\cdot) = \sigma_C.$$

Además, como C_X es convexo y C es convexo w^{**}-compacto, es sabido que $(\sigma_{C_X})^* = I_{\overline{C_X}^{**}}$ y que $(\sigma_C)^* = I_C$. Además, como σ_C y σ_{C_X} son convexas y continuas, ambas son $\sigma(X^*,X^{**})$-s.c.i. y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} C = \overline{C_X}^{**} &\Longleftrightarrow I_C = I_{\overline{C_X}^{**}} \\ &\Longleftrightarrow (\sigma_C)^* = (\sigma_{C_X})^* \\ &\Longleftrightarrow \sigma_C = \sigma_{C_X} \\ &\Longleftrightarrow \overline{(f^*)'(x^*,\cdot)}^* = (f^*)'(x^*,\cdot), \end{aligned}$$

es decir, $(f^*)'(x^*,\cdot)$ es w^*-s.c.i. si y sólo si C_X es w^{**}-denso en C.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Supóngase que C_X es w^{**}-denso en C y sea $(x^{**}, f^{**}(x^{**})) \in \operatorname{epi} f^{**} \cap H$. Por el lema 4.12, $x^{**} \in C$ y por lo tanto existe una red $(x_\alpha) \subseteq C_X$ tal que $x_\alpha \rightharpoonup^{w^{**}} x^{**}$. En particular, se tiene que $\langle x^*, x_\alpha\rangle \to \langle x^*, x^{**}\rangle$. Luego

$$\begin{aligned} |f^{**}(x^{**}) - f^{**}(x_\alpha)| &= |(f^{**}(x^{**}) + f^*(x^*)) - (f(x_\alpha) + f^*(x^*))| \\ &= |\langle x^*, x^{**}\rangle - \langle x^*, x_\alpha\rangle| \to 0. \end{aligned}$$

Así, $(x_\alpha, f(x_\alpha)) \rightharpoonup^{w^{**}} (x^{**}, f^{**}(x^{**}))$. Nuevamente aplicando el lema 4.12,

$$(x_\alpha, f(x_\alpha)) \in \operatorname{epi} f \cap H\big|_X,$$

y por lo tanto $\operatorname{epi} f \cap H\big|_X$ es w^{**}-denso en $\operatorname{epi} f^{**} \cap H$. La otra implicancia es directa del lema 4.12 y del hecho que si una red $(x_\alpha, \lambda_\alpha)$ converge en $X^{**} \times \mathbb{R}$ a (x^{**}, λ) para la topología $\sigma(X^{**} \times \mathbb{R}, X^* \times \mathbb{R})$, entonces en particular $x_\alpha \rightharpoonup^{w^{**}} x^{**}$.

$\square$

En los esfuerzos por encontrar condiciones suficientes para la ecuación de continuidad de ∂f^*, nace la siguiente pregunta: *¿El hecho que* $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$ *en un punto* $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$ *será condición suficiente para que se tenga (4.3) en dicho punto?* La respuesta es negativa y la siguiente proposición muestra un contraejemplo.

Proposición 5.3 *Sean $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ epi-pointed y $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$. Para que x^* satisfaga (4.3) es condición necesaria* ***pero no suficiente*** *que $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$.*

Demostración. Que sea condición necesaria es directo del hecho que, como $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$, $\partial f^*(x^*) \neq \emptyset$. Para ver que no es condición suficiente, considérese $X = \ell^1$ y dos sucesiones (x^n), (y^n) de elementos en ℓ^1, dadas por $x^1 = y^1 = \mathrm{e}_1$ y

$$\begin{cases} x^n & = \frac{1}{n}\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_n \\ \\ y^n & = \frac{1}{n}\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_n, \end{cases}$$

para $n \geq 2$, donde e_n es la n-ésima sucesión canónica en c_{00} ($(\mathrm{e}_n)_k = 1$ si $k = n$ y 0 si no). Sea

$$K = \overline{\mathrm{co}}\{x^n, y^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Basta demostrar que 0 es un punto expuesto de K, pero que no es punto extremo en $\overline{K}^{**} \subseteq X^{**}$. En efecto, si así fuera habría un funcional $\varphi \in \ell^\infty$ que expone 0, o sea, tal que $X \cap \partial\sigma_K(\varphi) = \{0\}$, pero tal que $\partial\sigma_K(\varphi) \supsetneq \{0\}$, pues de lo contrario, 0 sería punto extremo de $\partial\sigma_K(\varphi)$ y luego, aplicando la proposición 2.28, también lo sería de $\overline{K}^{**}$. Como σ_K es continua en ℓ^∞, entonces φ sería un punto que está en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, \sigma_K]$ y que satisface que $X \cap \partial\sigma_K(\varphi) \neq \emptyset$, pero que no satisface (4.3).

Considérese entonces el funcional en ℓ^∞, $\varphi = -\mathrm{e}_1$. Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x^n) = \varphi(y^n) = -1/n < 0$. Luego, necesariamente para todo $x \in K$, $\varphi(x) \leq 0$. Por otro lado, tomando la sucesión en K dada por $\frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}y^n = \frac{1}{n}\mathrm{e}_1$, es claro que el límite de esta sucesión es 0, por lo que $0 \in K$. Así, $\varphi(0) = 0 = \sigma_K(\varphi)$. Para ver que 0 es expuesto por φ, sólo resta demostrar que para todo $x \in K \setminus \{0\}$, $\varphi(x) < 0$.

Supóngase que existe $z \in K \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(z) = 0$. Entonces existe una sucesión de combinaciones convexas (z^n) dada por

$$z^n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n x^i + \beta_i^n y^i, \quad \alpha_i, \beta_i^n \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n + \beta_i^n = 1,$$

tal que $z^n \to z$. Considérese la sucesión de reales $(z_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por los valores de la coordenada j-ésima de la sucesión. Es claro que

$$z_j^n = \begin{cases} \alpha_j^n - \beta_j^n & \text{si } j \leq k_n \\ \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

Luego, sin perder generalidad se puede asumir que $k_n \geq j$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como $\varphi(z^n) \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, la sucesión

$$\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\alpha_i^n + \beta_i^n}{i} = |\varphi(z^n)| \leq \frac{\varepsilon}{2j}.$$

Esto implica directamente que

$$\frac{\alpha_j^n + \beta_j^n}{j} \leq \frac{\varepsilon}{2j} \Longrightarrow \alpha_j^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \wedge \beta_j^n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, para todo $n \geq n_0$,

$$|z_j^n| = |\alpha_j^n - \beta_j^n| \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye que $z_j^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Notando que $z_j^n = \langle \mathrm{e}_j, z^n \rangle \to \langle \mathrm{e}_j, z \rangle = z_j$, se concluye que $z_j = 0$. Repitiendo el argumento para todas las coordenadas, se tiene que $z = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, φ expone 0.

Sólo resta ver que 0 no es punto extremo de $\overline{K}^{w^{**}}$. Nótese primero que la sucesión $\frac{1}{n}\mathrm{e}_1$ converge a 0. Además, la sucesión e_n tiene una subsucesión $\mathrm{e}_{\alpha(n)}$ w^{**}-convergente, digamos a $u^{**} \in X^{**}$. Veamos que $u^{**} \in X^{**} \setminus X$. Si no fuera así, entonces $\mathrm{e}_{\sigma(n)}$ convergería débilmente a u^{**} y luego, como $X = \ell^1$, se tendría que $\mathrm{e}_{\alpha(n)}$ convergería fuertemente a u^{**}. Sin embargo, se sabe que la sucesión (e_n) no tiene puntos de acumulación en ℓ^1 y por lo tanto el hecho que $(\mathrm{e}_{\alpha(n)})$ converja es una contradicción. Con esto, es directo que

$$x^{\alpha(n)} = \frac{1}{\alpha(n)}\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_{\alpha(n)} \to^{**} u^{**} \quad \wedge \quad y^{\alpha(n)} = \frac{1}{\alpha(n)}\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_{\alpha(n)} \to^{**} -u^{**}.$$

Luego, $u^{**}, -u^{**} \in \overline{K}^{**}$ y por lo tanto $0 = \frac{1}{2}u^{**} + \frac{1}{2}(-u^{**})$. Luego $0 \notin \operatorname{ext}\left(\overline{K}^{**}\right)$, lo que concluye la demostración.

$\square$

C. Zaliñescu, en su artículo [9], entrega otro enfoque en la caracterización de la ecuación de continuidad a partir de la Hausdorff-semicontinuidad superior de una función multivaluada relacionada con el subdiferencial. Es de hecho esta relación la que motivó el nombre dado a la ecuación (4.3). Para utilizar la misma notación del artículo antes citado, se introduce la siguiente definición:

Definición 5.4 *Sea $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$. Se define la la función multivaluada S_f^X como*

$$S_f^X : \mathbb{R}_+ \times X^* \rightrightarrows X, \quad (\varepsilon, x^*) \mapsto X \cap \partial_\varepsilon f(x^*).$$

Proposición 5.5 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$, $x^* \in \operatorname{dom} f^*$ y τ una topología localmente convexa en X. Considérense las siguientes afirmaciones:*

(i) $S_{f^*}^X(\cdot, x^*)$ *es τ_0-τ H-scs. en* 0.

(ii) $S_{f^*}^X(0, \cdot)$ *es norma-τ H-scs. en* x^*.

(iii) $S_{f^*}^X$ *es $[\tau_0 \times \tau_{\|\cdot\|}]$-$\tau$ H-scs. en* $(0, x^*)$.

Si $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom} f^*]$, entonces (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Si τ es más débil que $\tau_{\|\cdot\|}$, entonces (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Si se tienen ambas condiciones, entonces (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

DEMOSTRACIÓN. Ver [9, Proposición 5.1]. $\square$

El siguiente teorema da la segunda caracterización de la ecuación de continuidad de ∂f^*.

Teorema 5.6 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$ y sea $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$. Entonces*

$$\partial f^*(x^*) = \overline{X \cap \partial f^*(x^*)}^{**}$$

si y sólo si $S^X_{f^*}(\cdot, x^*)$ es τ_0-w H-scs. en 0.

DEMOSTRACIÓN. [9, Proposición 5.2] $\square$

Observación Como la topología $\sigma(X, X^*)$ es más débil que $\tau_{\|\cdot\|}$, la proposición 5.5 aplica y en el teorema 5.6 se puede utilizar cualquiera de las afirmaciones (i)-(iii) para la caracterización.

Del teorema 5.6, es claro que una condición suficiente para que la ecuación de continuidad de ∂f^* se satisfaga en un punto $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$ es que $S^X_{f^*}(\cdot, x^*)$ sea τ_0-norma H-scs. en 0. Es interesante por lo tanto estudiar en profundidad esta condición, para lo cual se introduce la siguiente definición:

Definición 5.7 (Derivada direccional de Fréchet) *Sea X un espacio vectorial normado. Se dice que $f : X \to \overline{R}$ es **direccionalmente Fréchet-diferenciable** en $x \in X$ si $f(x) \in \mathbb{R}$ y el límite*

$$f'(x; h) \doteq \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

existe en $\mathbb{R}$ para todo $h \in X$ y el límite es uniforme con respecto a $h \in B$, para todo B en la bornología de Fréchet (i.e. para todo $B \subseteq X$ acotado no-vacío). En tal caso, $f'(x; \cdot)$ se denomina la derivada direccional de Fréchet de f en x.

Lema 5.8 *Sea $f \in \Gamma_0(X)$. Si f^* es direccionalmente F-Diff. en $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$, entonces $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$ y se tiene (4.3).*

DEMOSTRACIÓN. Ver [9, Lema 5.12]. $\square$

Teorema 5.9 *Sea X un espacio de Banach, $f \in \Gamma_0(X)$ epi-pointed y $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f^* es direccionalmente F-Diff. en x^*.

(ii) $S^X_{f^*}(\cdot, x^*)$ es τ_0-norma H-scs. en 0.

(iii) $S^X_{f^*}$ es $[\tau_0 \times \tau_{\|\cdot\|}]$-norma H-scs. en $(0, x^*)$.

(iv) $S^X_{f^*}(0, \cdot)$ es norma-norma H-scs. en x^*.

(v) $d(X \cap \partial f^*(x^*), X \cap \partial f^*(y^*))$ tiende a 0 cuando $y^* \in \mathrm{Im}(\partial f)$ tiene a x^*.

(vi) *Para toda sucesión* $(\eta_n) \subseteq [0, \infty)$ *convergente a* 0 *y toda sucesión* $(x_n) \subseteq X$ *con* $x_n \in X \cap \partial_{\eta_n} f^*(x^*)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $d(x_n, X \cap \partial f^*(x^*)) \to 0$.

Demostración. Ver [9, Teorema 5.13]. □

Con estas nociones, se introducen las siguientes familias de espacios de Banach:

Definición 5.10 (Propiedad de continuidad del subdiferencial (SCP)) *Sea* X *un espacio de Banach. Se dice que* X^* *tiene la*

1. ***propiedad de continuidad del subdiferencial (SCP)*** *si para toda función* $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ *con* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$, *existe un conjunto* D *denso en* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ *tal que* $S_f^X(0, \cdot)$ *es norma-norma H-scs. en todo punto de* D.

2. ***propiedad de continuidad del subdiferencial débil (w-SCP)*** *si para toda función* $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ *con* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$, *existe un conjunto* D *denso en* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ *tal que* $S_f^X(0, \cdot)$ *es norma-w H-scs. en todo punto de* D.

Se tiene entonces la siguiente relación evidente entre estas familias y los espacios w^*-Asplund.

Proposición 5.11 *Para* X *espacio de Banach, considere las siguientes afirmaciones:*

(i) X^* *es* w^**-Asplund.*

(ii) X^* *tiene la SCP.*

(iii) X^* *tiene la w-SCP.*

Entonces $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$.

Demostración. Notando que si f^* es F-Diff. en $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f^*]$, entonces es direccionalmente F-Diff. en x^*, la demostración es directa del lema 5.8 y de las equivalencias de los teoremas 5.9 y 5.6. □

Además, la pregunta sobre la relación entre Cuasi-Integrabilidad e Integrabilidad queda completamente resuelta por el siguiente teorema directo del lema 4.9:

Teorema 5.12 *Sea* X *un espacio de Banach. Toda función* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *cuasi-integrable es integrable si y sólo si* X^* *tiene la w-SCP.*

5.2. Caracterización de la w-SCP

Dado el teorema 5.12, esta sección se dedica a las diferentes caracterizaciones de la w-SCP obtenidas en el desarrollo de esta memoria. Los resultados están inspirados en las caracterizaciones análogas de la RNP y por lo tanto, de los espacios de Asplund. El primer teorema en esta línea muestra que la w-SCP, al igual que los espacios de Asplund, se puede definir a partir de diferentes familias de funciones en $\Gamma_0(X^*, w^*)$.

Lema 5.13 *Sea* $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ *con* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$ *y sea* $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$. *Se tiene que existe una vecindad* U *de* x^* *contenida en* $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ *y una función* $f_{x^*} : X^* \to \mathbb{R}$ *convexa, Lipschitz y* w^**-sci. tales que*

$$f_{x^*}\big|_U \equiv f\big|_U.$$

Demostración. Para $n \geq 1$, se definen las funciones $f_n := f \Box (n\| \cdot \|)$, donde $\| \cdot \|$ es la norma dual en X^*. De la demostración del teorema 1.19 desarrollada en [5, Lema 2.31], se sabe que existe U vecindad de x^* contenida en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ y $n \geq 1$ lo suficientemente grande tal que

$$f\big|_U \equiv f_n\big|_U.$$

Se define entonces $f_{x^*} \equiv f_n$ para dicho n. Se sabe de la misma demostración que f_n es Lipschitz de constante n y, por definición, es convexa. Resta ver que f_n es w^*-semicontinua inferior. Se sabe que $n\| \cdot \| = (I_{nB_X})^*$ y que, como $f \in \Gamma_0(X, w^*)$, existe $g \in \Gamma_0(X)$ tal que $g^* = f$. Luego, como n se puede elegir arbitrariamente grande, se puede suponer que $\mathrm{dom}\, g \cap \mathrm{Int}[nB_X] \neq \emptyset$, y por lo tanto se tienen las condiciones de calificación del ejemplo 1.31(c). Así,

$$(g + I_{nB_X})^* = f \Box (n\| \cdot \|) = f_{x^*},$$

lo que muestra que $f_{x^*} \in \Gamma_0(X^*, w^*)$, concluyendo la demostración. $\square$

Teorema 5.14 (Caracterización w-SCP I) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X^* tiene la w-SCP.*
2. *Para toda función $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ continua, existe un conjunto D denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ tal que $S_f^X(0, \cdot)$ es norma-w H-scs. en todo punto de D.*
3. *Para toda función $f : X^* \to \mathbb{R}$ convexa y w^*-semicontinua inferior, existe un conjunto D denso en X^* tal que $S_f^X(0, \cdot)$ es norma-w H-scs. en todo punto de D.*

Demostración. Claramente 1. $\Longrightarrow$ 2. y 2. $\Longrightarrow$ 3.. Para ver la implicancia 3. $\Longrightarrow$ 1., considérese $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ con $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$ y sea $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$. Por el lema 5.13, existe f_{x^*} convexa, Lipschitz y w^*-semicontinua inferior y U vecindad abierta de x^* contenida en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$, tales que

$$f\big|_U \equiv f_{x^*}\big|_U.$$

Por hipótesis, existe D_{x^*} denso en X^* tal que $S_{f_{x^*}}^X(0, \cdot)$ es norma-w H-scs. en todo punto de D_{x^*}. Considérese entonces $\tilde{D}_{x^*} = U \cap D_{x^*}$. Como U es abierto, $\partial f(y^*) = \partial f_{x^*}(y^*)$ para todo $y^* \in U$, y por lo tanto $S_f^X(0,\cdot)$ es norma-w H-scs. para todo $y^* \in \tilde{D}_{x^*}$. Repitiendo este razonamiento para todo $x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$ y notando que el conjunto

$$D = \bigcup_{x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]} \tilde{D}_{x^*}$$

es denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$, se concluye el resultado.

□

Observación De la demostración del teorema 5.14, se puede repetir el mismo razonamiento para caracterizar los espacios w^*-Asplund y los espacios con la SCP a partir de las tres familias de funciones: funciones en $\Gamma_0(X^*, w^*)$ con interior del dominio no-vacío; funciones en $\Gamma_0(X^*, w^*)$ continuas; y funciones en $\Gamma_0(X^*, w^*)$ a valores en $\mathbb{R}$.

Es claro que la w-SCP es una propiedad analítica del espacio dual. No obstante, al igual que los espacios de Asplund y la RNP, la w-SCP parece tener relaciones con las propiedades geométricas del espacio primal. Para estudiar en más detalle esta relación, se introducen las siguientes definiciones.

Definición 5.15 (Caras de continuidad) *Sea $K \subseteq X$ (o X^{**}) convexo, cerrado, acotado y no-vacío y $x^* \in X^*$. Se define la **cara de K inducida por x^*** como*

$$F_K(x^*) = \{x \in K \ : \ \langle x^*, x\rangle = \sigma_K(x^*)\}.$$

Se dice además que

1. *$F_K(x^*)$ es una **cara de continuidad** de K si en X^{**}, se tiene que*

$$\overline{F_K(x^*)}^{**} = F_{\overline{K}^{**}}(x^*).$$

*En tal caso, se dice que x^* es un **hiperplano de continuidad** de K. Se denota por $\mathcal{CH}(K)$ al conjunto de los hiperplanos de continuidad de K.*

2. *$F_K(x^*)$ es una **cara de fuerte-continuidad** si para toda sucesión (x_n) en K tal que $\langle x^*, x_n\rangle \to \sigma_K(x^*)$, se tiene que*

$$d(x_n, F_K(x^*)) \to 0,$$

*con la convención $d(x, \emptyset) = +\infty$. En tal caso, diremos que x^* es un **hiperplano de fuerte-continuidad** de K. Denotaremos por $\mathcal{SCH}(K)$ al conjunto de hiperplanos de fuerte-continuidad de K.*

Definición 5.16 (Slice cerrada) *Sea $C \subseteq X$ un conjunto no-vacío, $\alpha > 0$ y $x^* \in X^*$ con x^* no-nulo. Se define la **slice cerrada de C dada por α y x^*** como el conjunto*

$$\overline{S}(x^*, C, \alpha) = \{x \in C \ : \ \langle x^*, x\rangle \geq \sigma_C(x^*) - \alpha\}.$$

Observación De la definición, es claro que para $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y $x^* \in X^*$, se tiene que

$$F_K(x^*) = X \cap \partial\sigma_K(x^*) \quad \text{ y que } \quad F_{\overline{K}^{**}}(x^*) = \partial\sigma_K(x^*).$$

Además, también es evidente que para $\alpha > 0$

$$\overline{S}(K, x^*, \alpha) = X \cap \partial_\alpha\sigma_K(x^*) \quad \text{ y que } \quad \overline{S}\left(\overline{K}^{**}, x^*, \alpha\right) = \partial_\alpha\sigma_K(x^*).$$

Lema 5.17 *Sea $K \subseteq X^*$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y sea $x^* \in X^*$.*

1. *$x^* \in \mathcal{CH}(K)$ si y sólo si $S^X_{\sigma_K}(\cdot, x^*)$ es τ_0-w H-scs. en 0.*
2. *$x^* \in \mathcal{SCH}(K)$ si y sólo si $S^X_{\sigma_K}(\cdot, x^*)$ es τ_0-norma H-scs. en 0.*

Demostración.

1. La implicancia $\Longleftarrow$ es directa del teorema 5.6 y de la proposición 5.5. Sea entonces $x^* \in \mathcal{CH}(K)$. Se tiene que

   $$\overline{X \cap \partial\sigma_K(x^*)}^{**} = \overline{F_K(x^*)}^{**} = F_{\overline{K}^{**}}(x^*) = \partial\sigma_K(x^*).$$

   Luego, se concluye directamente del teorema 5.6.

2. La implicancia $\Longleftarrow$ es directa de la relación $(iv) \Longrightarrow (vi)$ del teorema 5.9. Sea entonces $x^* \in \mathcal{SCH}(K)$. Se sabe que

   $$X \cap \partial\sigma_K(x^*) = F_K(x^*).$$

   Considérese una sucesión $(\eta_n) \subseteq [0, \infty)$ convergente a 0 y una sucesión $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \in X \cap \partial_{\eta_n}\sigma_K(x^*)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\eta_n \to 0$,

   $$\sigma_K(x^*) \geq \langle x^*, x_n\rangle \geq \sigma_K(x^*) - \eta_n \to \sigma_K(x^*),$$

   es decir, $\langle x^*, x_n\rangle \to \sigma_K(x^*)$. Luego, como $F_K(x^*)$ es una cara de fuerte-continuidad, se tiene que

   $$d(x_n, X \cap \partial_K(x^*)) = d(x_n, F_K(x^*)) \to 0.$$

   Finalmente, se concluye nuevamente del teorema 5.9.

$\square$

Observación Es claro del lema 5.17, que $\mathcal{SCH}(K) \subseteq \mathcal{CH}(K)$, es decir, las caras de fuerte-continuidad son en particular caras de continuidad.

La familia de conjuntos convexos, cerrados y acotados tiene una subfamilia bastante representativa de lo que son las propiedades geométricas del espacio: Aquellos conjuntos donde 0 está en el interior. Es sabido que las funciones soporte de estos conjuntos son los funcionales de Minkowski sobre el dual que además son w^*-sci. En base a esta observación, e inspirándose en la RNP, se introduce la siguiente definición:

Definición 5.18 (MSCP y w-MSCP) *Para X espacio de Banach, se dice que*

1. *X^* tiene la* ***Minkowski - SCP*** *(MSCP) si para todo funcional $\rho : X^* \to \mathbb{R}$ de Minkowski y w^*-sci., existe un conjunto D denso en X^* tal que $S_\rho^X(0,\cdot)$ es norma-norma H-scs. en x^*, para todo $x^* \in D$.*

2. *X^* tiene la* ***Minkowski - SCP débil*** *(w-MSCP) si para todo funcional $\rho : X^* \to \mathbb{R}$ de Minkowski y w^*-sci., existe un conjunto D denso en X^* tal que $S_\rho^X(0,\cdot)$ es norma-w H-scs. en x^*, para todo $x^* \in D$.*

Para estandarizar la notación, es conveniente extender la noción de hiperplano de continuidad:

Definición 5.19 (Hiperplanos de continuidad para funciones) *Sea $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ con $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \neq \emptyset$. Se definen los conjuntos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{CH}(f) &= \{x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \ : \ S_f^X(0,\cdot) \text{ es norma-}w \text{ H-scs. en } x^*\}.\\
\mathcal{SCH}(f) &= \{x^* \in \mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f] \ : \ S_f^X(0,\cdot) \text{ es norma-norma H-scs. en } x^*\}.
\end{aligned}$$

En el caso de que $f \equiv \sigma_K$ con $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío, denotaremos indistintamente por $\mathcal{CH}(K)$ y $\mathcal{SCH}(K)$, los conjuntos $\mathcal{CH}(\sigma_K)$ y $\mathcal{SCH}(\sigma_K)$ respectivamente.

En vista del lema 5.17, se pueden reescribir las definiciones de w-SCP, SCP, w-MSCP y MSCP como sigue:

Proposición 5.20 *Sea X un espacio de Banach, se tiene que*

1. *X^* tiene la w-SCP [resp. SCP] si y sólo si para toda función $f \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ continua, el conjunto $\mathcal{CH}(f)$ [resp. $\mathcal{SCH}(f)$] es denso en $\mathrm{Int}[\mathrm{dom}\, f]$.*

2. *X^* tiene la w-MSCP [resp. MSCP] si y sólo si para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y que cumple que $0 \in \mathrm{Int}(K)$, se tiene que el conjunto $\mathcal{CH}(K)$ [resp. $\mathcal{SCH}(K)$] es denso en X^*.*

El siguiente teorema es el resultado central de esta memoria, donde se caracteriza completamente la w-MSCP: En términos de la familia de funciones más pequeña posible (las normas duales equivalentes) y también en términos geométricos.

Teorema 5.21 (Caracterización w-MSCP) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío, todo $x^* \in X^*$ y todo $\alpha > 0$, se tiene que existe $z^* \in \mathcal{CH}(K)$ tal que

$$F_K(z^*) \subseteq S(K, x^*, \alpha).$$

(ii) Para toda norma dual p^* proveniente de una norma p equivalente a la norma de X, se tiene que existe $D \subseteq X^*$ denso en X^* que satisface que

$$\forall x^* \in D,\ \overline{X \cap \partial p^*(x^*)}^{**} = \partial p^*(x^*).$$

(iii) X^* tiene la w-MSCP.

(iv) Para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío, $\mathcal{CH}(K)$ es denso en X^*.

Este teorema se demostrará en varios lemas. Para el primero, es necesario introducir la noción de **conjunto polar**.

Definición 5.22 *Sea $\langle E, F\rangle$ un par en dualidad y $A \subseteq E$. Se define el* ***conjunto polar de A*** *como*

$$A^o := \{f \in F \ :\ \langle f, \mathrm{e}\rangle \leq 1,\ \forall \mathrm{e} \in A\}.$$

Es claro que A^o es convexo, $\sigma(F, E)$-cerrado y $0 \in A^o$. Respecto a polaridad, el teorema más importante es el teorema bipolar, que da forma explícita de cómo es el conjunto polar de A^o.

Teorema 5.23 (Teorema Bipolar) *Sea $\langle E, F\rangle$ un par en dualidad y $A \subseteq E$. Denotando por w a la topología débil $\sigma(E, F)$, se tiene que*

$$A^{oo}(:= (A^o)^o) = \overline{\mathrm{co}}^w(A \cup \{0\}).$$

En particular, si A es convexo y w-cerrado y $0 \in A$, entonces $A = A^{oo}$.

Demostración. Ver [3, Teorema 3.38]. □

Lema 5.24 *Sea $A \subseteq X^{**}$ convexo, w^{**}-cerrado y con $0 \in A$. Considérese la dualidad $\langle X^*, X^{**}\rangle$. Se tiene que*

$$\overline{\hat{X} \cap A}^{**} = A$$

si y sólo si $A^o \subseteq X^*$ es w^*-cerrado.

Demostración. Nótese primero que para $B \subseteq X$, B^o con respecto a la dualidad $\langle X, X^*\rangle$ es igual a $(\hat{B})^o$ con respecto a la dualidad $\langle X^*, X^{**}\rangle$. Con esto presente, se razonará por doble implicancia:

$\Rightarrow$) Por definición de conjunto polar, es claro que $(\hat{X} \cap A)^o \supseteq A^o$. Además, $(\hat{X} \cap A)^o$ es w^*-cerrado en X^* (basta considerar que es el conjunto polar de un subconjunto de X). Aplicando el teorema 5.23,

$$(\hat{X} \cap A)^{oo} = \overline{\mathrm{co}}^{**}(\hat{X} \cap A) = \overline{\hat{X} \cap A}^{**} = A.$$

Luego, aplicando nuevamente el teorema 5.23 y notando que $(\hat{X} \cap A)^o$ es ya convexo, w-cerrado y $0 \in (\hat{X} \cap A)^o$, se tiene que

$$(\hat{X} \cap A)^o = ((\hat{X} \cap A)^o)^{oo} = ((\hat{X} \cap A)^{oo})^o = A^o,$$

por lo que, en particular, A^o es w^*-cerrado.

$\Leftarrow$) Como A es convexo, w^{**}-cerrado y $0 \in A$, se tiene del teorema 5.23 que $(A^o)^o = A$. En particular, de la definición de conjunto polar, si se define $B = (A^o)^o$ con respecto a la dualidad $\langle X, X^* \rangle$, se tiene que $\hat{B} = \hat{X} \cap A$. Por último, como A^o es w^*-cerrado, se puede aplicar nuevamente el teorema 5.23 y concluir que $B^o = A^o$. Finalmente,

$$A = A^{oo} = (\hat{B})^{oo} = (\hat{X} \cap A)^{oo} = \overline{\hat{X} \cap A}^{**} \subseteq A.$$

$\square$

Lema 5.25 *Sean $C \subseteq X$ conjunto acotado y no-vacío, $x^* \in X^*$ no-nulo y $\alpha > 0$. Se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$S(y^*, C, \alpha) \subseteq S(x^*, C, 2\alpha), \quad \forall y^* \in x^* + \varepsilon B_{X^*}.$$

Demostración. Ver [1, Lema 3.2.6]. $\square$

Lema 5.26 *En el teorema 5.21, (i) y (iv) son equivalentes.*

Demostración.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sea $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y sea S una slice de K. Considérese que S es de la forma $S = S(x^*, K, 2\alpha)$, con $x^* \in X^*$ no-nulo y $\alpha > 0$. Por el lema 5.25, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y^* \in U = x^* + \varepsilon B_{X^*}$,

$$S(y^*, K, \alpha) \subseteq S.$$

Por hipótesis, existe $z^* \in U$ tal que $\partial\sigma_K(z^*) = \overline{X \cap \partial\sigma_K(z^*)}^{**}$. Notando que

$$F_K(z^*) = \partial\sigma_K(z^*) \subseteq \partial_{\alpha/2}\sigma_K(z^*) = \overline{S}(z^*, K, \alpha/2) \subseteq S(z^*, K, \alpha)$$

y aplicando el lema 5.17, se concluye que $F_K(z^*)$ es cara de continuidad y que $F_K(z^*) \subseteq S$.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Razonando por contradicción, supóngase que existen $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y U un abierto en X^* tales que $\mathcal{CH}(K) \cap U = \emptyset$. Sin perder generalidad, $0 \notin U$. Sean $x^* \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B = x^* + \varepsilon B_{X^*} \subseteq U$ y que existen $x^{**} \in X^{**}$ y $\eta > 0$ que cumplen $\sigma_B(x^*) \leq -\eta$ (Basta considerar x^{**} tal que $\langle x^{**}, x^* \rangle < 0$ y encontrar η y ε por continuidad de σ_B). Considérese entonces el conjunto

$$C = \operatorname{cone}(B) := \mathbb{R}_+ \cdot B.$$

Es claro, por la sublinealidad de σ_K, que $\mathcal{CH}(K) \cap [C \setminus \{0\}] = \emptyset$. Se demostrará que C es además w^*-cerrado. En efecto, sea $(y_n^*) \subseteq C$ w^*-convergente a $y^* \in X^*$. Sin perder generalidad, $y^* \neq 0$ y por lo tanto también se puede asumir que $y_n^* \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de C, $y_n^* = \lambda_n(x^* + \varepsilon z_n^*)$, donde $\lambda_n > 0$ y $z_n^* \in B_{X^*}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (y_n^*) es w^*-convergente, entonces es acotada y por lo tanto (λ_n) es también una sucesión acotada. Luego, existe una subsucesión $(y_{\varphi(n)}^*)$ tal que

$(\lambda_{\varphi(n)})$ es convergente, dígase a $\lambda > 0$, y $(z^*_{\varphi(n)})$ w^*-converge, dígase a $z^* \in B_{X^*}$ (que existe pues B_{X^*} es w^*-compacto). Considérese ahora $x \in X$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x, y^*_{\varphi(n)}\rangle &= \lambda_n\langle x, x^*\rangle + \lambda_n\varepsilon\langle x, z^*_{\varphi(n)}\rangle \\ &\to \lambda\langle x, x^*\rangle + \lambda\varepsilon\langle x, z\rangle = \langle x, \lambda(x+\varepsilon z)\rangle.\end{aligned}$$

Luego,

$$y^*_{\varphi(n)} \rightharpoonup^* \lambda(x^* + \varepsilon z^*),$$

y por lo tanto $y^* = \lambda(x^* + \varepsilon z^*)$. Luego, $y^* \in C$, lo que concluye que C es w^*-cerrado. Sea C^o el cono polar de C con respecto a la dualidad $\langle X^*, X^{**}\rangle$, que se puede escribir como

$$C^o = \{x^{**} \in X^{**} \ : \ \langle x^{**}, y^*\rangle \leq 0, \ \forall y^* \in C\}.$$

Por el lema 5.24, se tiene que $\overline{X \cap C^o}^{**} = C^o$. En particular, $I_C \in \Gamma_0(X^*, w^*)$: En efecto,

$$I_C = \sigma_{C^o} = \sigma_{X\cap C^o} = (I_{X\cap C^o})^*.$$

Defínase entonces $\sigma = \sigma_K + I_C$. Es claro que σ es sublineal y que, en vista del desarrollo anterior, es w^*-sci. con $\operatorname{dom}\sigma = C$ y por lo tanto con $\operatorname{Int}[\operatorname{dom}\sigma] \neq \emptyset$. Luego, como I_C es continua en $\operatorname{Int}[C]$, aplicando la proposición 1.39.3, se tiene que

$$\partial\sigma(x^*) = \partial\sigma_K(x^*) + N_C(x^*).$$

Por otro lado, por el teorema 1.58, se sabe que σ es la función soporte del conjunto

$$K_1 = \{y \in X \ : \ \langle y^*, y\rangle \leq \sigma(y^*), \ \forall y^* \in X^*\}.$$

En lo que sigue, se denotará indistintamente $\sigma = \sigma_{K_1}$. Considérese además para $\alpha > 0$ el conjunto $K_2 = \overline{S}(K_1, x^*, 2\alpha) = X \cap \partial_{2\alpha}\sigma(x^*)$. Como $x^* \in \operatorname{Int}[\operatorname{dom}\sigma]$ se tiene que K_2 es acotado y además, de (1.1), $\overline{K_2}^{**} = \partial_{2\alpha}\sigma(x^*)$. Luego, por hipótesis, toda slice de K_2 contiene una cara de continuidad, en particular existe $z^* \in X^*$ tal que

$$F_{K_2}(z^*) \subseteq S(K_2, x^*, \alpha) \quad \wedge \quad \overline{F_{K_2}(z^*)}^{**} = F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*).$$

Se demostrará primero que $F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*) = F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*)$. Para esto basta demostrar que $F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) \subseteq F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$. En efecto, como $F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) \neq \emptyset$, existe $z^{**} \in F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) \cap F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$ y luego,

$$\sigma_{K_2}(z^*) = \langle z^{**}, z^*\rangle = \sigma(z^*).$$

Así, se tiene que para todo $x^{**} \in F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$, $\langle x^{**}, z^*\rangle = \sigma_{K_2}(z^*) + I_{\overline{K_2}^{**}}(x^{**})$ y como $\overline{K_2}^{**} \subseteq \overline{K_1}^{**}$, se concluye que $\sigma_{K_2}(z^*) + I_{\overline{K_2}^{**}}(x^{**}) = \sigma_{K_1}(z^*) + I_{\overline{K_1}^{**}}(x^{**})$, es decir, $x^{**} \in F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*)$.

Razonando entonces por contradicción, supóngase que $F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) \nsubseteq F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$, es decir, que existe $z_1^{**} \in F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) \setminus F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$. Como $K_2 \subseteq K_1$, se tiene que $\sigma_{K_2}(z^*) \leq \sigma(z^*)$ y por lo tanto, $z_1^{**} \notin K_2$ (de lo contrario, $\langle z_1^{**}, z^*\rangle \geq \sigma_{K_2}(z^*)$ y luego $z_1^{**} \in \partial\sigma_{K_2}(z^*) = F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$). En particular, se tendría que

$$\langle x^*, z_1^{**}\rangle < \sigma(x^*) - 2\alpha.$$

Tómese entonces $z_2^{**} \in F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$. Como $F_{K_2}(z^*)$ es cara de continuidad y está contenida en $S(K_1, x^*, \alpha)$, se tiene que $\langle x^*, z_2^{**}\rangle \geq \sigma(x^*) - \alpha > \sigma(x^*) - 2\alpha$. Luego, existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $z^{**} = \lambda z_1^{**} + (1-\lambda) z_2^{**}$ satisface que $\langle z^{**}, x^*\rangle = \sigma(x^*) - 2\alpha$ y que además cumple

$$\langle z^{**}, z^*\rangle = \lambda\langle z_1^{**}, z^*\rangle + (1-\lambda)\langle z_2^{**}, z^*\rangle = \lambda\sigma(z^*) + (1-\lambda)\sigma_{K_2}(z^*) \geq \sigma_{K_2}(z^*).$$

Así, $z^{**} \in K_2$ y por lo tanto $z^{**} \in \partial\sigma_{K_2}(z^*) = F_{\overline{K_2}^{**}}(z^*)$. Esto implica que $\langle z^{**}, x^*\rangle \geq \sigma(x^*) - \alpha > \sigma(x^*) - 2\alpha = \langle z^{**}, x^*\rangle$, claramente una contradicción.

Para concluir, basta demostrar que $z^* \in \mathrm{Int}[C]$. De ser así, se tendría que

$$F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) = \partial\sigma(z^*) = \partial\sigma_K(z^*) + N_C(z^*) = \partial\sigma_K(z^*),$$

concluyendo que $\overline{X \cap \partial\sigma_K(z^*)}^{**} = \partial\sigma_K(z^*)$ y por lo tanto, que $z^* \in \mathcal{CH}(K)$, lo cual es una contradicción pues

$$\mathcal{CH}(K) \cap \mathrm{Int}[C] \subseteq \mathcal{CH}(K) \cap [C \setminus \{0\}] = \emptyset.$$

Como $F_{\overline{K_1}^{**}}(z^*) = \partial\sigma_K(z^*) + N_C(z^*)$ es acotado y no-vacío, basta ver que si $z^* \in \mathrm{Fr}(C)$, entonces $N_C(z^*)$ es no-acotado o vacío. Supóngase entonces que $z^* \in \mathrm{Fr}(C)$. Es claro que $N_C(z^*)$ es no-vacío, pues $0 \in N_C(z^*)$. Ahora, como $\{z^*\}$ es compacto, se sabe por Hahn-Banach que existe z^{**} no-nulo y $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall y^* \in \mathrm{Int}[C],\ \langle z^{**}, z^*\rangle \geq \langle z^{**}, y^*\rangle.$$

Luego, como $C = \overline{\mathrm{Int}(C)}$,

$$\langle z^{**}, y^* - z^*\rangle \leq 0, \quad \forall y^* \in C,$$

es decir, $z^{**} \in N_C(z^*)$. Así, es directo que $\{\lambda z^{**} \ :\ \lambda \geq 0\} \subseteq N_C(z^*)$ y por lo tanto, como $z^{**} \neq 0$, se concluye que $N_C(z^*)$ es no-acotado. Con esto, z^* no puede estar en $\mathrm{Fr}(C)$ y por lo tanto $z^* \in \mathrm{Int}[C]$, que era lo que faltaba probar.

□

Lema 5.27 *En el teorema 5.21, (ii) $\Longrightarrow$ (iv).*

Demostración. Razonando por contradicción y supóngase que existe K convexo, cerrado, acotado y no-vacío tal que $\mathcal{CH}(K)$ no es denso en X^*. Eso implica que existe un abierto $U \subseteq X^*$ tal que $\mathcal{CH}(K) \cap U = \emptyset$. Asúmase, sin perder generalidad, que existen $x^* \in U$ y $\eta > 0$ tales que $\langle x^*, x\rangle \geq \eta$ para todo $x \in K$.

En efecto, si no fuera así, basta considerar $c \in X$ tal que $\langle x^*, c\rangle \geq -\sigma_K(x^*) + \eta$ y reemplazar K por $\tilde{K} = K + c$. Es claro que para todo $y^* \in X^*$, $\sigma_{\tilde{K}}(y^*) = \sigma_K(y^*) + \langle y^*, c\rangle$ y luego $\partial\sigma_{\tilde{K}}(y^*) = \partial\sigma_K(y^*) + c$. Luego, como para todo $y^* \in U$ se tiene que

$$\exists y^{**} \in \partial_K(y^*) \setminus \overline{X \cap \partial\sigma_K(y^*)}^{**},$$

también se tiene que $y^{**} + c \in \partial_{\tilde{K}}(y^*) \setminus \overline{X \cap \partial\sigma_{\tilde{K}}(y^*)}^{**}$ (basta notar que si una sucesión (y_k) es w^{**}-convergente a $y^{**}+c$, entonces $y_k - c$ también lo es a y^{**}). Luego, $y^* \notin \mathcal{CH}(\tilde{K})$. Así, $\mathcal{CH}(\tilde{K}) \cap U = \emptyset$ por lo tanto se puede razonar con $\tilde{K}$ en vez de K.

Sea ahora $K' = \overline{\mathrm{co}}(-K \cup K)$. Se sabe que $\sigma_{K'} = \sigma_{-K \cup K} = \text{máx}(\sigma_{-K}, \sigma_K)$. Luego, como

$$\sigma_{-K}(x^*) = \sup_{x \in K} \langle x^*, -x \rangle \leq -\eta < \eta \leq \sigma_K(x^*),$$

existe, por continuidad, $U' \subseteq U$ abierto con $x^* \in U'$ tal que $\sigma_{-K}(y^*) < \sigma_K(y^*)$ para todo $y^* \in U'$. Se tiene entonces que

$$\sigma_{K'}\big|_{U'} \equiv \sigma_K\big|_{U'},$$

y por lo tanto $\partial\sigma_{K'}(y^*) = \partial\sigma_K(y^*)$ para todo $y^* \in U'$. Se concluye que $\mathcal{CH}(K') \cap U' = \emptyset$. Tómese ahora el conjunto $B = \frac{\eta}{2\|x^*\|} B_X$ y considérese el conjunto $K'' = \overline{\mathrm{co}}(B \cup K')$. Nótese que

$$\sigma_B(x^*) = \frac{\eta}{2\|x^*\|}\|x^*\| = \frac{\eta}{2} < \eta \leq \sigma_K(x^*) = \sigma_{K'}(x^*).$$

Repitiendo el razonamiento anterior, existe un abierto $U'' \subseteq U'$ con $x^* \in U''$ tal que

$$\sigma_{K''}\big|_{U''} \equiv \sigma_{K'}\big|_{U''},$$

y por lo tanto $\mathcal{CH}(K'') \cap U'' = \emptyset$. Pero como K'' es convexo, cerrado, acotado, simétrico, no-vacío y satisface que $0 \in \mathrm{Int}[K'']$, se tiene que $\sigma_{K''}$ es una norma dual en X^*, proveniente de una norma equivalente en X. Finalmente, por hipótesis, $\mathcal{CH}(K'')$ es denso en X^*, de donde se sigue que $U'' \cap \mathcal{CH}(K'') \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. $\square$

Con estos lemas, la demostración del teorema 5.21 es relativamente simple y se expone a continuación:

Demostración del teorema 5.21. Es claro que $(iv) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii)$. Luego, por el lema 5.27, se tiene que (ii), (iii) y (iv) son equivalentes. Finalmente, se concluye el resultado del lema 5.26. $\square$

La siguiente proposición relaciona la w-SCP y la w-MSCP.

Proposición 5.28 *X^* tiene la w-SCP si y sólo si $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-MSCP.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $K \subseteq X \times \mathbb{R}$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y sea $t \in \mathbb{R}$ con $t \neq 0$. Considérese la función $f_t : X^* \to \mathbb{R}$ dada por $f_t(x^*) = \sigma_K(x^*, t)$. Es claro que $f_t \in \Gamma_0(X^*, w^*)$ y que toma valores en $\mathbb{R}$. Por otro lado, sea $T : X^* \to (X^* \times \mathbb{R})$ dada por $T(x^*) = (x^*, t)$. Es claro que T es F-Diff. y que $DT(x^*)h^* = (h^*, 0)$. Se tiene entonces que $f_t = \sigma_K \circ T$ y luego, por regla de la cadena, se sabe que

$$\partial f_t(x^*) = \partial\sigma_K(T(x^*)) \circ DT(x^*), \quad \forall x^* \in X^*,$$

donde $\partial\sigma_K(T(x^*))\circ DT(x^*) = \{(x^{**},\lambda)\circ DT(x^*) \ : \ (x^{**},\lambda) \in \partial\sigma_K(x^*,t)\}$. Como X^* tiene la w-SCP, entonces $\mathcal{CH}(f_t)$ es denso en X^*. Se demostrará que si $x^* \in \mathcal{CH}(f_t)$, entonces $(x^*,t) \in \mathcal{CH}(K)$, es decir,

$$\overline{(X\times\mathbb{R})\cap\partial\sigma_K(x^*,t)}^{**} = \partial\sigma_K(x^*,t).$$

Para esto considérense $x^* \in \mathcal{CH}(f_t)$ y $(x^{**},\lambda) \in \partial\sigma_K(x^*,t)$. Como $(x^{**},\lambda) \in \partial\sigma_K(x^*,t)$, se tiene que $\langle x^{**},x^*\rangle + \lambda t = \sigma_K(x^*,t) + (\sigma_K)^*(x^{**},\lambda)$. Además, como $x^{**} \in \partial f_t(x^*)$, entonces existe $(x_n,\lambda_n) \subseteq (X\times\mathbb{R})\cap\partial\sigma_K(x^*,t)$ tal que $x_n \rightharpoonup^{**} x^{**}$. Como (λ_n) es acotada en $\mathbb{R}$, podemos asumir que converge a $\lambda' \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que $(x^{**},\lambda') \in \overline{(X\times\mathbb{R})\cap\partial\sigma_K(x^*,t)}^{**}$. Finalmente, como $(\sigma_K)^* = I_{\overline{K}^{**}}$,

$$\lambda'\cdot t = \sigma_K(x^*,t) + I_{\overline{K}^{**}}(x^{**},\lambda') - \langle x^*,x^{**}\rangle = \sigma_K(x^*,t) + I_{\overline{K}^{**}}(x^{**},\lambda) - \langle x^*,x^{**}\rangle = \lambda\cdot t,$$

y como $t \neq 0$, se tiene que $\lambda = \lambda'$. Así, $(x^{**},\lambda) \in \overline{(X\times\mathbb{R})\cap\partial\sigma_K(x^*,t)}^{**}$ y por lo tanto $(x^*,t) \in \mathcal{CH}(K)$. Sea entonces $D_t = \{(x^*,t) \in (X^*\times\mathbb{R}) \ : \ x^* \in \mathcal{CH}(f_t)\}$ y nótese que el conjunto

$$D = \bigcup_{t\neq 0} D_t$$

es denso en $X^*\times\mathbb{R}$. Como $D \subseteq \mathcal{CH}(K)$, se concluye lo pedido.

$\Leftarrow$) Sean $f \in \Gamma_0(X)$ tal que f^* toma valores en $\mathbb{R}$, $x^* \in X^*$ cualquiera y $U = x^* + \delta B_{X^*}$, con $\delta > 0$. Se quiere demostrar que $\mathcal{CH}(f^*)$ es denso en X^*, por lo que basta demostrar que $\mathcal{CH}(f^*)\cap U \neq \emptyset$. Sin perder generalidad, $X \cap \partial f^*(x^*) \neq \emptyset$. Además, para $y^* \in U$ y $x \in X\cap\partial f^*(x^*)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle y^*,x\rangle &= \langle y^*-x^*,x\rangle + \langle x^*,x\rangle \\
&= \langle y^*-x^*,x\rangle + f^*(x^*) + f(x) \\
&\geq f^*(y^*) + f(x) + f^*(x^*) - f^*(y^*) - |\langle y^*-x^*,x\rangle| \\
&\geq f^*(y^*) + f(x) - (|f^*(y^*) - f^*(x^*)| + \|x\|\|y^*-x^*\|).
\end{aligned}$$

Luego, tomando $\varepsilon = \sup_{y^*\in U}|f^*(y^*) - f^*(x^*)| + \|x\|\|y^*-x^*\|$ (que es finito, pues f^* es localmente acotada y δ se puede elegir tan pequeño como se desee) se tiene que $y^* \in \partial_\varepsilon f(x)$. Considérese ahora el conjunto K en $X\times\mathbb{R}$ dado por

$$K = (X\times\mathbb{R})\cap\partial_{2\varepsilon}\sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*,-1) = \{(y,\lambda) \in \operatorname{epi} f \ : \ \langle x^*,y\rangle - \lambda \leq \langle x^*,x\rangle - f(x) + 2\varepsilon\}.$$

donde la desigualdad se obtiene del lema 4.12. De (1.1), $\overline{K}^{**} = \partial_{2\varepsilon}\sigma_{\operatorname{epi} f}(x^*,-1)$, y además para todo $y^* \in U$,

$$\{(y^{**}, f^{**}(y^{**})) \ : \ y^{**} \in \partial f^*(y^*)\} = \partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(y^*,-1) \subseteq \overline{K}^{**}.$$

En efecto, para $(y^{**}, f^{**}(y^{**})) \in \partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(y^*, -1)$,

$$
\begin{aligned}
&\langle x^*, y^{**}\rangle - f^{**}(y^{**}) = \langle x^*, y^{**}\rangle + f^*(y^*) - (f^*(y^*) + f^{**}(y^{**}))\\
&= \langle x^*, y^{**}\rangle + f^*(y^*) - \langle y^*, y^{**}\rangle\\
&= \langle x^* - y^*, y^{**}\rangle + f^*(x^*) + (f^*(y^*) - f^*(x^*))\\
&= \langle x^* - y^*, y^{**}\rangle + \langle x^*, x\rangle - f(x) + (f^*(y^*) - f^*(x^*))\\
&= \langle x^*, x\rangle - f(x) + \langle x^* - y^*, y^{**} - x\rangle + \langle x^* - y^*, x\rangle + (f^*(y^*) - f^*(x^*))\\
&\leq \langle x^*, x\rangle - f(x) + \underbrace{\langle x^* - y^*, y^{**} - x\rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\|x^* - y^*\|\|x\| + |f^*(y^*) - f^*(x^*)|}_{\leq \varepsilon}\\
&\leq \langle x^*, x\rangle - f(x) + 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Así, para todo $y^* \in U$, $\partial\sigma_K(y^*, -1) = \partial\sigma_{\operatorname{epi} f}(y^*, -1)$ (en particular, $\sigma_K(y^*, -1) = \sigma_{\operatorname{epi} f}(y^*, -1)$). Para demostrar que $\mathcal{CH}(f^*) \cap U \neq \emptyset$, basta demostrar, gracias al lema 4.12, que existe $z^* \in U$ tal que

$$\overline{X \cap \partial\sigma_K(z^*, -1)}^{**} = \partial\sigma_K(z^*, -1).$$

Para esto, considérese una vecindad V de x^* y $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño tales que $((1+\eta)^{-1}, (1-\eta)^{-1}) \cdot V \subseteq U$ y sea $U' = V \times (-1-\eta, -1+\eta)$. Es claro que U' es vecindad de $(x^*, -1)$. Como $\mathcal{CH}(K)$ es por hipótesis denso en $X^* \times \mathbb{R}$, existe $(y^*, t) \in \mathcal{CH}(K) \cap U'$. Como σ_K es positivamente homogénea, se tiene que $\sigma_K(y^*, t) = |t|\sigma_K(z^*, -1)$, con $z^* = |t|^{-1}y^*$. Luego, como $|t|^{-1} \in ((1+\eta)^{-1}, (1-\eta)^{-1})$, se tiene que $z^* \in U$. Además, es directo que

$$\partial\sigma_K(y^*, t) = \partial\sigma_K(z^*, -1),$$

y por lo tanto σ_K satisface que $\overline{X \cap \partial\sigma_K(z^*, -1)}^{**} = \partial\sigma_K(z^*, -1)$. Como $z^* \in U$ se tiene lo pedido.

□

Es natural pensar que, así como la propiedad de w^*-Asplund se puede reducir a la Fréchet-Diferenciabilidad de los funcionales de Minkowski w^*-semicontinuos inferiores, lo mismo se podría hacer con la w-SCP, mostrando que es equivalente a la w-MSCP. Sin embargo, el único resultado que fue posible alcanzar durante el trabajo de esta memoria fue la proposición 5.28. La equivalencia ha quedado como la siguiente conjetura.

Conjetura 5.29 *Para X espacio de Banach, se tiene que*

(i) X^* tiene la w-SCP si y sólo si X^* tiene la w-MSCP.

(ii) X^* tiene la w-MSCP $\Longrightarrow$ $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-MSCP.

(iii) X^* tiene la w-SCP $\Longrightarrow$ $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-SCP.

La conjetura 5.29 está planteada en tres afirmaciones pues, de hecho, gracias a la proposición 5.28 son todas equivalentes.

Lema 5.30 *En la conjetura 5.29, (i), (ii) y (iii) son equivalentes.*

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Suponiendo que X^* tiene la w-MSCP, X^* tiene la w-SCP por hipótesis y luego, aplicando la proposición 5.28, $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-MSCP.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si X^* tiene la w-SCP, entonces, aplicando la proposición 5.28, $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-MSCP. Luego, por hipótesis, $(X^* \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ tiene la w-MSCP y, aplicando nuevamente la proposición 5.28, se concluye que $X^* \times \mathbb{R}$ tiene la w-SCP.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si X^* tiene la w-SCP, siempre es cierto que también tiene la w-MSCP. Supóngase entonces que X^* tiene la w-MSCP y sea H un hiperplano cerrado de X^*. Es claro que X^* es isomorfo a $H \times \mathbb{R}$ y luego, aplicando la proposición 5.28, H tiene la w-SCP. Finalmente, por hipótesis, $H \times \mathbb{R}$ tiene la w-SCP, y por consiguiente también X^*.

□

Al estudiar con detalle la estructura de los espacios w^*-Asplund, es claro que un espacio dual X^* es w^*-Asplund si y sólo si $X^* \times \mathbb{R}$ también lo es. Esto radica en que el conjunto de puntos que define la propiedad es un G_δ denso, lo permite trabajar de forma mucho más sencilla, ya que *la intersección de conjuntos G_δ densos es también un G_δ denso.* Surge entonces la inquietud de si es razonable pedir que el conjunto de puntos que define la w-SCP fuese también G_δ. Sin embargo, la siguiente proposición muestra que, bajo esta nueva hipótesis, se recupera la RNP que es la familia de espacios que se está tratando de generalizar.

Proposición 5.31 *Sea X espacio de Banach tal que para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío se tiene que $\mathcal{CH}(K)$ es un G_δ denso de X^*. Entonces, X tiene la RNP.*

Demostración. Por el teorema 2.43 se sabe que X tiene la RNP si y sólo si para todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío, el conjunto de los funcionales soporte de K es de segunda categoría en X^*.

Sea entonces $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío y sea S el conjunto de funcionales en X^* que soportan a K. Es claro que $\mathcal{CH}(K) \subseteq S$ y como $\mathcal{CH}(K)$ es G_δ denso se tiene que S es residual. En particular S es de segunda categoría. Como esto se tiene para cualquier conjunto $K \subseteq X$ con estas características, se concluye el resultado. □

A pesar de no haber podido concluir la conjetura 5.29, la proposición 5.28 entrega un resultado importante de la w-SCP: Es cerrada para subespacios.

Teorema 5.32 *Sea M un subespacio cerrado de X. Si X^* tiene la w-SCP, entonces también M^* la tiene.*

Demostración. Basta demostrar que todo subespacio cerrado de X cumple que su dual tiene la w-MSCP. En efecto, para un subespacio cerrado propio M de X, se tiene que $M \oplus \mathbb{R}$ también es subespacio cerrado de X y por lo tanto, $(M \oplus \mathbb{R})^*$ tendría la w-MSCP. Como $(M \oplus \mathbb{R})^*$ es isomorfo a $M^* \times \mathbb{R}$, se concluiría gracias a la proposición 5.28 que M^* tendría la w-SCP, que es lo que se desea demostrar.

Sea entonces M un subespacio cerrado propio de X y sea $K \subseteq M$ un convexo, cerrado, acotado y no-vacío. Se sabe que $M^* = X^*/M^\perp$ y que, denotando por $\pi : X^* \to X^*/M^\perp$ la proyección canónica, la dualidad entre M y $X^*/M^\perp$ está dada por

$$\langle \pi(x^*), x\rangle = \langle x^*, x\rangle, \quad \forall x^* \in X^*,\ x \in M.$$

Sea además $\sigma_K : M^* \to \mathbb{R}$ la función soporte de K definida en M^*. Considérese la función sobre X^* dada por $\sigma \equiv \sigma_K \circ \pi$. Es fácil ver que σ es la función soporte de K visto como conjunto de X. En efecto, para $x^* \in X^*$, se tiene que

$$\sup_{x\in K}\langle x^*, x\rangle = \sup_{x\in K}\langle \pi(x^*), x\rangle = (\sigma_K \circ \pi)(x^*) = \sigma(x^*).$$

Luego, como X^* tiene la w-MSCP, se tiene que $\mathcal{CH}(\sigma)$ es denso en X^*. Por otro lado, notando que $M^{**} \cong \overline{M}^{**} \subseteq X^{**}$, se tiene que para todo $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}
\partial\sigma(x^*) &= \left\{x^{**} \in \overline{K}^{**} \ :\ \langle x^*, x^{**}\rangle = \sigma(x^*)\right\} \subseteq \overline{M}^{**}\\
&\cong \left\{x^{**} \in \overline{K}^{**} \subseteq M^{**} \ :\ \langle \pi(x^*), x^{**}\rangle = \sigma_K(\pi(x^*))\right\}\\
&= \partial\sigma_K(\pi(x^*)).
\end{aligned}$$

Luego, es fácil ver que para todo $x^* \in X^*$,

$$\overline{X \cap \partial\sigma(x^*)}^{**} = \partial\sigma(x^*) \Longleftrightarrow \overline{M \cap \partial\sigma_K(\pi(x^*))}^{**} = \partial\sigma_K(\pi(x^*)),$$

y por lo tanto $\mathcal{CH}(\sigma_K) = \pi(\mathcal{CH}(\sigma))$, que es denso en M^*. Así M^* tiene la w-MSCP, lo que concluye la demostración.

□

Se cierra este capítulo, y por consiguiente esta memoria, con dos conjeturas importantes en torno a la w-SCP. La primera, busca consolidar lo que sería una caracterización puramente geométrica en el primal de la w-SCP. La segunda, apunta a mostrar que los espacios con la w-SCP son en efecto una generalización de los espacios w^*-Asplund.

Conjetura 5.33 *X^* tiene la w-SCP si y sólo si todo $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío es la envoltura convexa cerrada de sus caras de continuidad, es decir,*

$$K = \overline{\mathrm{co}}\left[\bigcup_{x^*\in\ \mathcal{CH}(K)} F_K(x^*)\right].$$

De esta conjetura se tiene al menos la necesidad de la equivalencia, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.34 *Sea X espacio de Banach y $K \subseteq X$ convexo, cerrado, acotado y no-vacío. Si $\mathcal{CH}(K)$ es denso en X^*, entonces*

$$K = \overline{\mathrm{co}}\left[\bigcup_{x^* \in \ \mathcal{CH}(K)} F_K(x^*)\right].$$

Demostración. Razonando por contradicción, sea

$$C = \overline{\mathrm{co}}\left[\bigcup_{x^* \in \ \mathcal{CH}(K)} F_K(x^*)\right].$$

y supóngasé que $C \neq K$. Como $C \subsetneq K$, existe $x^* \in X^*$ no-nulo tal que $\sigma_C(x^*) < \sigma_K(x^*)$. Como ambas funciones son continuas, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall y^* \in x^* + \varepsilon B_{X^*},\ \sigma_C(y^*) < \sigma_K(y^*).$$

Considérese entonces $z^* \in \mathcal{CH}(K) \cap [x^* + \varepsilon B_{X^*}]$. Por definición de C, para todo $z \in F_K(z^*)$ se tiene que $z \in C$ y luego

$$\sigma_K(z^*) = \langle z^*, z\rangle \leq \sigma_C(z^*),$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Conjetura 5.35 *Existe un espacio de Banach X, tal que X^* tiene la w-SCP y no es w^*-Asplund.*

En ambas conjeturas, aún no hay un camino claro de investigación. No obstante, es más probable que la conjetura 5.35 sea cierta, mientras que es difícil generar intuición en cuanto a la conjetura 5.33. De todas formas, es claro que se ha comenzado con un nuevo nicho de investigación y que se espera, en el futuro, de más luces sobre la estructura de los espacios con la w-SCP.

Conclusión

El resultado de esta memoria es bastante claro: La fórmula de integración dada en el teorema 4.4 sólo tiene sentido en los espacios con dual que tenga la w-SCP, dado que en estos espacios se puede asegurar al menos que todas las conjugadas de funciones epi-pointed cumplen la ecuación de continuidad de ∂f^* en un conjunto denso del interior de su dominio. Con esta condición, si una función f es epi-pointed, convexa, propia y semicontinua inferior, la fórmula de integración de Rockafellar y la dada en el teorema 4.4 son equivalentes, que es el resultado mínimo esperado para que esta extensión de la teoría de integración a partir del subdiferencial tenga sentido.

Los espacios de Banach cuyos duales tienen la w-SCP son espacios que logran independizarse de la necesidad de puntos extremos y mantener propiedades analíticas y geométricas acordes a la teoría de los espacios con la RNP. Sin embargo, aún está abierta la pregunta de si efectivamente esta es una familia más grande de espacios de Banach. De ser así, esta memoria habrá abierto un nuevo nicho de investigación en cuanto a la geometría de espacios de Banach: La búsqueda de propiedades que entreguen las caras de continuidad. De lo contrario, si la w-SCP en el dual implica la RNP en el primal, se habrá dado una caracterización de la RNP considerablemente más débil y de hecho sorprendente: Una condición suficiente para que un espacio de Banach X tenga la RNP sería que las caras de continuidad cumplan la afirmación dada en el teorema 5.21.(i) en $X \times \mathbb{R}$.

Por otro lado, incluso teniendo la w-SCP, no es claro qué funciones son integrables según el teorema 4.4. Esto debido a que no se ahondó en la búsqueda de condiciones suficientes para saber cuándo una función es cuasi-integrable. En el desarrollo de esta memoria, se dieron ejemplos de cuasi-integrabilidad en espacios con la RNP y con la KMP, propiedades que de hecho se conjetura son equivalentes. La otra línea de investigación que abre esta memoria es estudiar qué tan amplia es la familia de funciones cuasi-integrables en espacios con dual que tenga la w-SCP. La idea natural, nuevamente motivada por lo que ocurre en los espacios con la RNP, es estudiar si existen condiciones de semicontinuidad suficientes para la cuasi-integrabilidad.

Bibliografía

[1] R.D. Bourgin. *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodỳm Property (Lecture Notes in Mathematics).* Springer-Verlag, 1983.

[2] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, New York London, 2011.

[3] M. Fabian et al. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis (CMS Books in Mathematics).* Springer, 2010.

[4] J. R. Giles. A subdifferential characterisation of Banach spaces with the Radon-Nikodỳm Property. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 66:313–316, 2002.

[5] R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators, and differentiability (Lecture Notes in Mathematics).* Springer-Verlag, Berlin New York, 1989.

[6] R. T. Rockafellar. Characterization of the subdifferentials of convex functions. volume 17, pages 497–510. Pacific Journal of Mathematics, 1966.

[7] M. Bachir y A. Daniilidis. A dual characterization of the Radon-Nikodým Property. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 62:379–387, 2000.

[8] R. Correa, Y. Garcia y A. Hantoute. Integration formulas via the Fenchel subdifferential of nonconvex functions. *Nonlinear Analysis*, 75(3):1188–1201, 2012.

[9] A.K. Chakrabarty, P. Shunmunagaraj y C. Zalinescu. Continuity properties for the subdifferential and ε-subdifferential of a convex function and its conjugate. *Journal of Convex Analysis*, 14(3):479–514, 2007.

[10] J. Borwein y J. Vanderwerff. *Convex functions: constructions, characterizations and counterexamples.* Cambridge University Press, Cambridge, UK New York, 2010.

[11] C. Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific, River Edge, N.J. London, 2002.

[12] F. Álvarez. *Análisis Convexo y Dualidad.* Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2012.