



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE ESTRATEGIAS BASADAS EN MEDIDAS DE
INFORMACIÓN PARA LA DETECCIÓN DE REGENERACIONES DEL ESTADO-DE-
SALUD EN BATERÍAS DE ION-LITIO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

MATÍAS SEBASTIÁN LACALLE ALARCÓN

PROFESOR GUÍA:
MARCOS ORCHARD CONCHA

PROFESOR CO-GUÍA:
JORGE SILVA SANCHEZ

MIEMBRO DE LA COMISIÓN:
MARCOS DÍAZ QUEZADA

SANTIAGO DE CHILE
OCTUBRE 2013

Resumen

En la actualidad, los acumuladores de ion-litio han tomado fuerza como dispositivos de almacenamiento de energía. Su menor peso para acumular la misma cantidad de energía que otros sistemas de este tipo y su estabilidad en cuanto a seguridad se refiere, son las principales características que le entregan una fuerte ventaja competitiva.

Sin embargo, un problema importante que presenta el uso de este tipo de dispositivos tiene relación con la capacidad de predecir el fin de la vida útil de los mismos. En algunas aplicaciones específicas, como los vehículos aéreos no tripulados, resulta crítico contar con una buena estimación de este parámetro, debido al costo que conlleva el reemplazo de estas baterías y las graves consecuencias que puede traer una sobreestimación de la vida útil remanente. La predicción de este parámetro se ve dificultada con la aparición de fenómenos de auto-regeneración espontánea que sufre el estado de salud de las baterías de ion-litio, lo cual afecta la tendencia de su degradación y puede conducir a errores considerables en la predicción de la vida útil remanente. Es posible atenuar el impacto que estos fenómenos pueden tener sobre algoritmos de estimación o pronóstico si son detectados y aislados correctamente, permitiendo que los algoritmos de predicción consideren únicamente la información que representa la tendencia de degradación de la capacidad de la batería.

El presente trabajo busca desarrollar métodos de detección de anomalías que permitan abordar el problema de incertidumbre causada por el fenómeno de regeneración mencionado; implementando módulos que utilicen métodos de detección en conjunto con algoritmos de filtro de partículas en su versión clásica y su versión sensible al riesgo. Dichos métodos deben ser capaces de identificar si un aumento en la capacidad de la batería se debe a un fenómeno de auto-regeneración o simplemente a la variación intrínseca al ruido de medición.

La investigación realizada compara cuatro métodos de detección que caracterizan empíricamente al estimador de la “función de densidad de probabilidad” del estado de salud del acumulador, determinando su desempeño en términos de errores de tipo I y II, precisión, exactitud y sus efectos en el sesgo de las estimaciones. Un método desarrollado consiste en la construcción de un test de hipótesis, mientras que otras tres metodologías utilizadas están basadas en medida de teoría de la información y que consisten en la medida de entropía, diferencia de entropía y el método de divergencia de Kullback-Leibler.

Los resultados de este estudio reflejan que los métodos basados en medidas de teoría de la información presentan resultados similares. Sin embargo, la metodología de medición de entropía presenta un mejor desempeño comparativo en la zona de menor tasa de falsos positivos, la cual corresponde a la zona de mayor interés si se pretende no subestimar el estado de salud de la batería.

No obstante, el método de test de hipótesis, presenta un desempeño marcadamente superior a los métodos de teoría de la información desarrollados, logrando una mayor tasa de detección para cualquier caso. Siendo consistente con el criterio de evitar la subestimación, se prefiere utilizar este método con el algoritmo de filtro de partículas clásico.

Como línea de desarrollo futuro, se propone diseñar un método de test de hipótesis alternativas (Neyman-Pearson), para caracterizar así la función de probabilidad de las regeneraciones.

Dedicatoria

A mi mamá que siempre se la ha jugado por mí...

Agradecimientos

Después de tanto tiempo, tanta gente, tantas experiencias, tantos altibajos... es especial para mí empezar a escribir esta página que se vio tan lejana alguna vez.

Primero que todo quiero agradecer a mi familia (incluyendo a la Andre, mi hermana adoptada), especialmente a mi mamá, por apoyarme siempre y por creer en mí a pesar de todos los problemas que tuve para sacar esta carrera adelante. Siempre me han hecho sentir el cariño y confianza en mis capacidades, y aunque tal vez no se los digo mucho, eso me ha dado fuerzas para seguir siempre adelante.

Mis amigos de primer año. Un grupo increíble de amigos que conocí acá y que hicieron que los largos años que me tomó estudiar ingeniería (igual que a varios de ellos) valieran la pena completamente. Se podría decir que escogí mal a mis amigos si se ve desde el punto de vista académico, pero no se compara con la amistad, lealtad, confianza, apoyo, etc., que he recibido de ellos durante todos estos años.

Mis amigos eléctricos. Cuando entré a eléctrica no fue la mejor experiencia. Había un ambiente individualista que me resultaba bastante molesto. Por suerte, al final terminé en una sección con otra mentalidad, donde hice muy buenos amigos que hicieron que me re encantara con la carrera que ahora puedo decir que no me veo estudiando otra cosa. Si hay algo que puedo rescatar de haberme atrasado, es haberlos conocido. Mención para Raúl Morales que me ayudó a corregir mi desastrosa redacción en esta memoria.

Mis amigos fuera de la U: Germán y Pablo. Mis mejores amigos. Mi cable a tierra. Mis compañeros de aventuras. Mis confidentes. No sería lo mismo sin ustedes.

También al Toño que me ha ayudado mucho este último año en todo sentido. Gracias por acompañarme y por ser un gran apoyo.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a los que me ayudaron directamente en el trabajo de la memoria. Al profesor Marcos Orchard por su buena onda y disposición, por la confianza en lo que estaba haciendo y el apoyo en todo este proceso. A Benjamín Olivares y Matías Cerda, con los que compartí durante este trabajo y de los que aprendí mucho. Sé que serán (son) unos excelentes profesionales, y les deseo lo mejor.

Sumando y restando el balance de todos estos años es positivo, principalmente debido a la gente que formo parte de todo esto. Puedo terminar mi carrera agradecido de todo lo que pasé. Lo bueno que pude disfrutar y lo malo que me hizo crecer. Soy un ingeniero orgulloso y feliz ☺

Tabla de Contenido

Resumen	i
Dedicatoria.....	ii
Agradecimientos.....	iii
Índice de Tablas.....	vi
Índice de Figuras	vii
Lista de Acrónimos.....	viii
Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1 Motivación.....	1
1.2 Objetivos.....	2
1.2.1 General.....	2
1.2.2 Específicos.....	2
Capítulo 2: Marco Teórico	3
2.1 Acumulador Reversible	3
2.2 Tipos de Acumuladores	5
2.2.1 Acumulador de Plomo-Ácido (Acumulador Planté)	5
2.2.2 Acumulador de Níquel-Cadmio.....	5
2.2.3 Acumulador de Ion-Litio	6
2.3 Predicción del Fin de Vida Útil en Baterías de Ion-Litio	6
2.4 Inferencia Bayesiana e Integración de Monte Carlo	8
2.4.1 Inferencia Bayesiana.....	9
2.4.2 Filtro de Kalman.....	13
2.4.3 Métodos Secuenciales de Monte Carlo: Filtros de Partículas	15
2.5 Test de Hipótesis	22
2.5.1 Errores	22
2.5.2 Región Crítica y Región de Aceptación	23
2.5.3 Etapas del Test de Hipótesis.....	25
2.6 Medidas de Teoría de la Información.....	25
2.6.1 Entropía	25
2.6.2 Divergencia de Kullback-Leibler	30
2.7 Índices de Desempeño en Detección de Eventos	30
2.7.1 Desempeño de Clasificadores.....	30
2.7.2 Error Cuadrático Medio.....	33
Capítulo 3: Formulación del Problema.....	34
3.1 Detección de Anomalías Basado en Filtro de Partículas.....	35
3.1.1 Detección de Anomalías Basada en Algoritmos de PF Clásico	36
3.1.2 Detección de Anomalías Basada en Algoritmos de RSPF	37
3.2 Test de Hipótesis para Detección de Auto-recargas en ESD.....	38

3.3	Medidas de Teoría de la Información Aplicadas a PF.....	38
3.3.1	Entropía	38
3.3.2	Diferencia de Entropía.....	39
3.3.3	Divergencia de Kullback-Leibler	40
Capítulo 4:	Resultados y Análisis	41
4.1	Test de Hipótesis	42
4.2	Medidas de Teoría de la Información.....	43
4.2.1	Entropía	43
4.2.2	Diferencia de Entropía.....	44
4.2.3	Divergencia de Kullback-Leibler	46
4.3	Análisis Comparativo	47
Capítulo 5:	Conclusiones.....	52
5.1	Conclusiones generales.....	52
5.2	Trabajo futuro	53
Referencias	54
Anexo A: Tablas de Resultados	57
Resultados de las Pruebas para Test de Hipótesis	57
Resultados de las Pruebas para Entropía	59
Resultados de las Pruebas para Diferencia de Entropía.....	60	
Resultados de las Pruebas para Divergencia de Kullback Leibler.....	61	
Resultados de las Diferencias de Índices de Desempeño	62	

Índice de Tablas

Tabla 1: Componentes y características del acumulador de plomo-ácido.....	5
Tabla 2: Componentes y características del acumulador de níquel-cadmio.....	5
Tabla 3: Componentes y características del acumulador de ion-litio.....	6
Tabla 4: Resultados de la prueba para test de hipótesis	57
Tabla 5: Resultados de la prueba para entropía.....	59
Tabla 6: Resultados de la prueba para diferencia de entropía	60
Tabla 7: Resultados de la prueba para divergencia de Kullback-Leibler.....	61
Tabla 8: Resultados de las diferencias de índices de desempeño.....	62

Índice de Figuras

Figura 1: Elementos de un acumulador reversible	3
Figura 2: Barreras de potencial iónica en polos del acumulador.....	4
Figura 3: Predicción del fin de la vida útil de una batería de ion-litio	7
Figura 4: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste bilateral	23
Figura 5: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste unilateral por derecha.....	24
Figura 6: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste unilateral por izquierda	24
Figura 7: Descomposición de una elección de 3 posibilidades	26
Figura 8: Entropía para el caso de dos posibilidades con probabilidades p y $(1-p)$	27
Figura 9: Espacio ROC.....	31
Figura 10: Detección basada en PF de fenómenos de regeneración en la capacidad de baterías de ion-litio	34
Figura 11: Desempeño de detección para métodos basados en test de hipótesis	42
Figura 12: Desempeño de detección para métodos basados en entropía.....	43
Figura 13: Diferencia de índices Entropía/PF - Entropía/RSPF.....	44
Figura 14: Desempeño de detección para métodos basados en diferencia de entropía.....	45
Figura 15: Diferencia de índices Diferencia de Entropía/PF – Diferencia de Entropía/RSPF.....	45
Figura 16: Desempeño de detección para métodos basados en divergencia de Kullback-Leibler	46
Figura 17: Diferencia de índices Divergencia de KL/PF – Divergencia de KL/RSPF	47
Figura 18: Desempeño de detección entre los métodos utilizados.....	48
Figura 19: Precisión entre los métodos utilizados.....	49
Figura 20: Exactitud entre los métodos utilizados	50
Figura 21: Exactitud entre los métodos utilizados (Acercamiento)	50

Lista de Acrónimos

EKF	Filtro Extendido de Kalman (<i>Extended Kalman Filter</i>)
ESD	Dispositivo almacenador de energía (<i>Energy Storage Device</i>)
FDP	Función de densidad de probabilidad
FN	Falsos Negativos
FP	Falsos Positivos
fp	Tasa de falsos positivos
i.i.d.	Independiente e idénticamente distribuido
KF	Filtro de Kalman (<i>Kalman Filter</i>)
MCMC	Monte Carlo vía Cadena de Markov (<i>Markov Chain Monte Carlo</i>)
MSE	Error cuadrático medio (<i>Mean Squared Error</i>)
PF	Filtro de partículas (<i>Particle Filter</i>)
RSPF	Filtro de partículas sensible al riesgo (<i>Risk Sensitive Particle Filter</i>)
SIR	Remuestreo Secuencial de Importancia (<i>Sequential Importance Resampling</i>)
SIS	Muestreo Secuencial de Importancia (<i>Sequential Importance Sampling</i>)
SMC	Métodos secuenciales de Monte Carlo (<i>Sequential Monte Carlo methods</i>)
SOH	Estado de salud (<i>State-of-Health</i>)
td	Tasa de detección
UKF	Filtro <i>Unscented</i> de Kalman (<i>Unscented Kalman Filter</i>)
VN	Verdaderos Negativos
VP	Verdaderos Positivos

Capítulo 1: Introducción

1.1 Motivación

El desarrollo de dispositivos de almacenamiento de energía óptimos (ESDs, del inglés *Energy Storage Devices*) ha sido un tema de estudio en las principales comunidades científicas de todo el mundo. Esta es sólo una consecuencia del crecimiento exponencial mostrado por la industria de los vehículos eléctricos/híbridos y dispositivos electrónicos que requieren ESDs. Independientemente de la finalidad principal de un ESD, es esencial que los sistemas de gestión de baterías sean capaces de determinar de una manera confiable el estado-de-salud (SOH, del inglés *State-of-Health*) de la misma; medida que está asociada a la degradación que ha sufrido una batería a lo largo de su vida. Esta tarea sólo puede ser llevada a cabo a través de algoritmos precisos de estimación que permitan la incorporación de mediciones reales en línea del proceso y variables ambientales para determinar la cantidad de ciclos de carga restantes. Los algoritmos de estimación en línea -más específicamente métodos secuenciales de Monte Carlo, también conocido como filtro de partículas (PF, del inglés *Particle Filter*) - son especialmente adecuados para resolver el problema previamente mencionado, debido a su capacidad para combinar la información disponible de las medidas del sistema y modelos analíticos/empíricos. Sin embargo, algunos ESDs sufren de regeneraciones repentinas, momentáneas, y en ocasiones considerables de la capacidad de la ESD. Estos cambios, relacionados con aspectos fisicoquímicos y condiciones de carga/temperatura durante los ciclos de carga y descarga, son particularmente importantes en el caso de las baterías de ion-litio, ya que a menudo altera la tendencia de la curva de predicción del SOH, afectando el desempeño de los módulos de estimación y pronóstico basados en algoritmos bayesianos [1]. En esto radica la importancia de considerar un módulo de detección de estos fenómenos de regeneración del SOH, el cual permita aislarlos correctamente en el modelado del SOH.

Esta memoria presenta una solución al problema antes mencionado, donde se proporciona métodos utilizados para detectar y aislar el efecto de los fenómenos de auto-recarga a través de distintas técnicas. Los módulos de detección de anomalías se basan en una combinación de estimadores de estado basados en PF y medidas de teoría de la información que permiten la detección de eventos extraños dentro de la evolución del proceso de degradación de la batería bajo análisis. Los criterios de selección para el mejor módulo de detección, se basa en el desempeño obtenido al comparar el error de tipo I frente al error de tipo II, teniendo en cuenta el impacto que tienen sobre la estimación de SOH en el sentido del error cuadrático medio (MSE, del inglés *Mean Squared Error*).

1.2 Objetivos

1.2.1 General

- Desarrollar algoritmos de detección de anomalías, en este caso regeneraciones espontaneas en la capacidad del estado de salud de las baterías de ion-litio, con el fin de aislarlas apropiadamente y disminuir su impacto en la predicción del final de su vida útil remanente.

1.2.2 Específicos

- Implementar módulos de detección de dichas anomalías basados en medidas de teoría de la información: Entropía y Divergencia de Kullback-Leibler.
- Analizar estos módulo en el sentido de error de tipo I y error de tipo II al momento de detectar y como afectan al MSE de las estimaciones.
- Comparar los módulos de detección utilizados según los criterios de desempeño como precisión, exactitud y MSE.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Acumulador Reversible

Un acumulador reversible o batería consiste en un reservorio capaz de entregar energía eléctrica a un circuito exterior a expensas de la energía química almacenada en las sustancias activas que existen en su interior y viceversa si se le suministra energía eléctrica procedente de un sistema de cargadores de corriente continua.

En todo acumulador existe un circuito interior y exterior. El circuito interior está compuesto por sustancias químicamente activas que forman el polo negativo, el electrolito y el polo positivo.

Por otro lado, el circuito eléctrico exterior es conformado por las estructuras conductoras que soportan y contienen el material activo de los polos, los bornes de conexión eléctrica al circuito exterior, el cableado y la resistencia de carga que en la práctica corresponde al consumo.

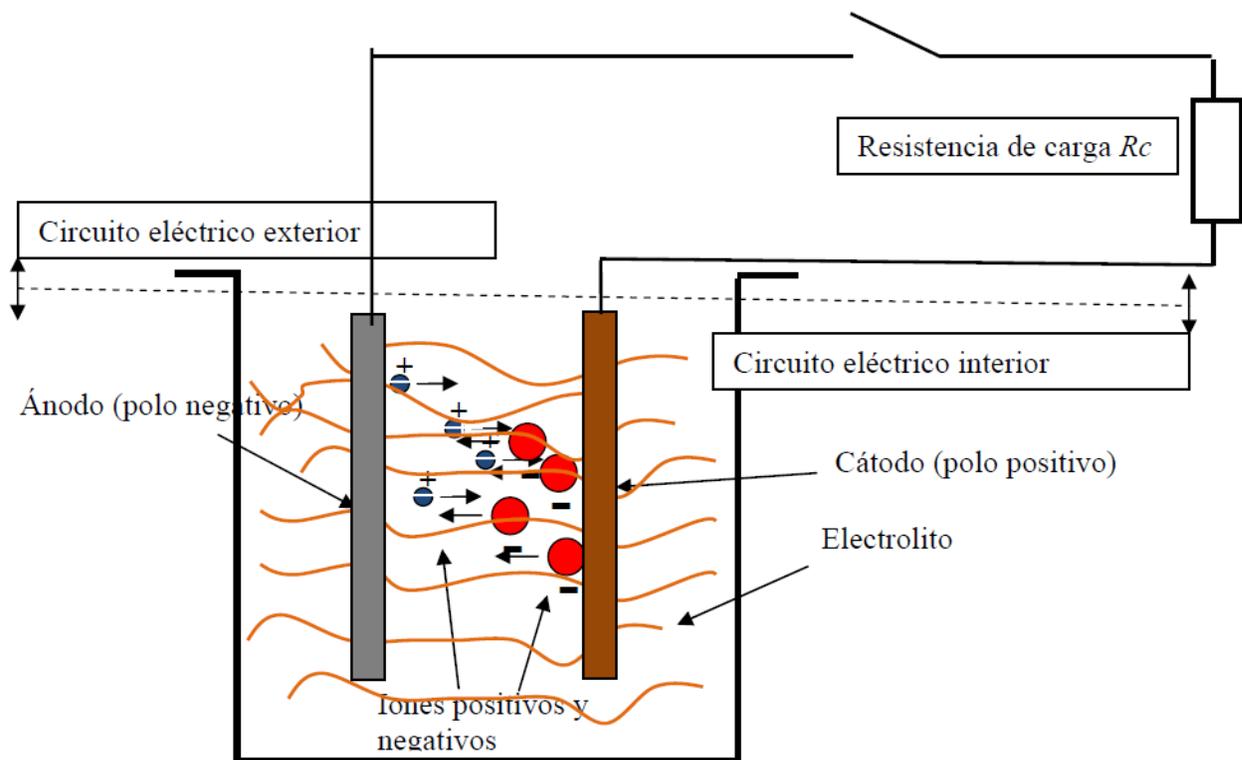


Figura 1: Elementos de un acumulador reversible

El electrolito corresponde a una solución de algún ácido, hidróxido o sal, cuyas moléculas al disociarse generan iones positivos y negativos que pueden moverse libremente en el electrolito. Generalmente el solvente de la solución es agua, cuyas moléculas prácticamente no se ionizan.

Al aplicar un campo eléctrico, los iones se mueven a favor o en contra del campo dependiendo de su polaridad, estableciéndose una corriente eléctrica. Sin embargo, dichos iones presentan una cierta resistencia, ya que estos al moverse colisionan con las moléculas del solvente y entre sí, transfiriendo energía cinética y provocando que el electrolito se caliente.

La sustancia del polo negativo es generalmente un metal puro susceptible de combinarse con la sustancia activa del electrolito para formar sales, hidróxidos u otros compuestos que se caracterizan por tener menor nivel energético que las sustancias originales. De esta forma, los átomos de la superficie de contacto se ionizan, formando iones positivos que se orientarán en el sentido necesario para combinarse con los iones negativos del electrolito, formando una barrera de potencial en la superficie de contacto del tipo *np*.

Del mismo modo, la sustancia activa del polo positivo puede ser un metal, algún óxido u otra sustancia, cuyas moléculas también pueden combinarse con las sustancias del electrolito y formar compuestos de menor nivel energético y creando iones negativos extrayendo electrones de valencia provenientes del circuito exterior. De esta forma los iones negativos se orientan con los iones positivos del electrolito, formando otra barrera de potencial pero de signo contrario.

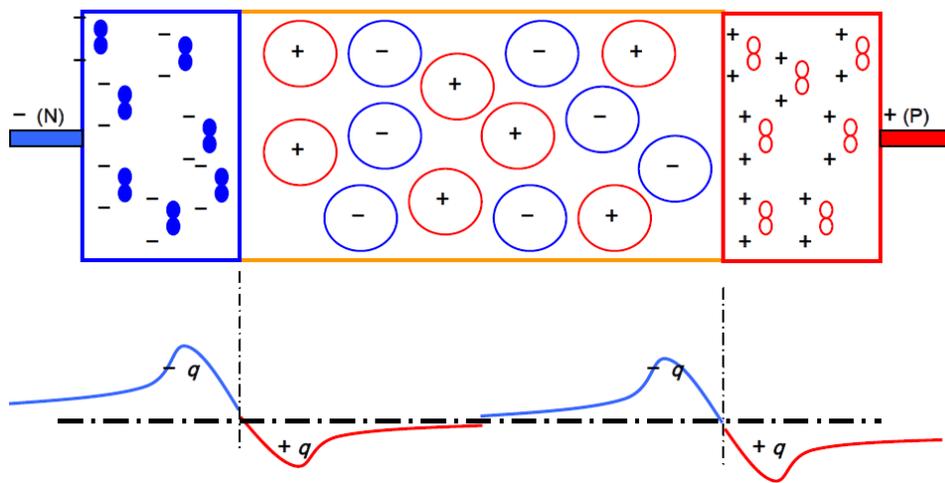


Figura 2: Barreras de potencial iónica en polos del acumulador

Es posible observar que las barreras de potencial generadas impiden que las reacciones químicas se produzcan. Para que estas se puedan realizar, es necesario incorporar el circuito eléctrico exterior que permita que los electrones de valencia viajen desde el polo negativo hacia el polo positivo. Considerando que los electrones se encuentran en la cumbre de la barrera de potencial y que deben “caer” al valle del polo positivo, es necesario que se transfiera energía en el proceso, lo que se materializa a través de la resistencia de carga.

El campo eléctrico creado determina a su vez el potencial electroquímico de cada átomo o radical ionizado. Su suma algebraica se manifiesta como una tensión eléctrica, conocida como tensión electroquímica.

2.2 Tipos de Acumuladores

En la actualidad, los acumuladores reversibles que más se ocupan en equipos eléctricos de potencia y en telecomunicaciones son el acumulador de plomo-ácido, el acumulador de níquel-cadmio y el acumulador de ion-litio.

2.2.1 Acumulador de Plomo-Ácido (Acumulador Planté)

Tabla 1: Componentes y características del acumulador de plomo-ácido

Sustancia activa del polo negativo	Pb
Sustancia activa del polo positivo	PbO_2
Electrolito	$H_2(SO_4)$ disuelto en H_2O
Tensión electroquímica	2,046 [V]
Densidad energética	30 [W/kg]

Los acumuladores de plomo-ácido corresponden a las baterías más usadas en la industria y las que comúnmente se encuentra en un vehículo. Son los acumuladores más económicos; sin embargo, son pesadas, contaminantes y tienen una tasa de autodescarga de aproximadamente un 30%.

2.2.2 Acumulador de Níquel-Cadmio

Las características y propiedades electroquímicas de este acumulador fueron descubiertas en Suecia por el Dr. Waldemar Junger y simultáneamente en Estados Unidos por Tomas Edison.

Tabla 2: Componentes y características del acumulador de níquel-cadmio

Sustancia activa del polo negativo	Cd
Sustancia activa del polo positivo	$NiO(OH)$
Electrolito	$K(OH)$ disuelto en H_2O
Tensión electroquímica	1,3 [V]
Densidad energética	80 [W/kg]

Actualmente, estos acumuladores han sido reemplazados por acumuladores de níquel e hidruro metálico (Ni-MH) debido a que el Cadmio es un elemento muy contaminante y a su reducido “efecto memoria”. Este efecto consiste en la reducción de la capacidad de la batería producida en el proceso de carga (sin haberla descargado completamente), lo que implica la formación de cristales en su interior.

Estos acumuladores no poseen un uso masivo como las anteriores y es solo preferida por algunos fabricantes norteamericanos. Presentan problemas de sobrecalentamiento en el proceso

de carga y también si se utilizan por un tiempo prolongado. Se deterioran a temperaturas extremadamente bajas y poseen una tasa de autodescarga de aproximadamente un 20%.

2.2.3 Acumulador de Ion-Litio

Tabla 3: Componentes y características del acumulador de ion-litio

Sustancia activa del polo negativo	Li_4C
Sustancia activa del polo positivo	CoO_2
Electrolito	$Li(PF_6)$ litio disuelto en solvente orgánico
Tensión electroquímica	1,3 [V]
Densidad energética	115 [W/kg]

Deducido a través de su densidad energética, es posible decir que estas baterías son más pequeñas y pesan menos que otras baterías con igual carga eléctrica. No presentan “efecto memoria”, su tasa de autodescarga es menor al 5% y la descarga es lineal, por lo que es más fácil conocer la tensión real de la batería y no necesita de circuitos reguladores.

Presentan una larga vida útil en vehículos comparadas con las baterías de plomo-ácido, ya que estas últimas sus placas se sulfatan en el proceso de descarga; pudiendo desprenderse luego con vibraciones mecánicas.

Sin embargo, su costo es elevado (aunque tendiente a la baja); en condiciones de temperatura extremadamente bajas tienen menor rendimiento que las baterías de Ni-Cd y las baterías de Ni-MH; además de presentar peligro de explosión en presencia de fuego y en condiciones de sobrecorrientes por lo que es necesario el uso de controladores.

Actualmente se están realizando investigaciones en baterías de litio empleando otras sustancias activas, estas corresponden a las baterías de litio de polímero (Li Po) y las baterías de litio ferroso (Li Fe) que no presentan el riesgo de explosión, tienen una menor tasa de auto descarga y mayor vida útil.

2.3 Predicción del Fin de Vida Útil en Baterías de Ion-Litio

Debido a su estabilidad en términos de seguridad, las baterías de iones de litio están reemplazando otras baterías, como las de plata-óxido y pilas alcalinas. Estas son utilizadas comúnmente en dispositivos de uso cotidiano como son los aparatos electrónicos portátiles que requieren baterías que necesitan ser recargadas muchas veces, incluyendo iPods, teléfonos celulares, computadoras, laptops, relojes y cámaras digitales, donde la predicción del fin de la vida útil (EOL, del inglés *End-of-Life*) puede no presentar un problema de mayor importancia.

Sin embargo, estas baterías también se utilizan en otras aplicaciones, en que es difícil, costoso o incluso imposible de recargar o reemplazar, como por ejemplo en vehículos híbridos o eléctricos, equipos militares, vehículos aéreos no tripulados (UAV, del inglés *Unmanned Aerial Vehicles*) y marcapasos cardíacos, donde la predicción del EOL resulta crítica debido a las consecuencias tanto físicas como económicas que pueden resultar debido a una mala predicción de dicho parámetro.

La Figura 3 muestra la predicción del SOH de una batería (línea punteada) y un intervalo de confianza correspondiente del 95% (líneas más delgadas). Esto demuestra que las regeneraciones del SOH en las baterías de ion-litio, pueden variar la tendencia de la degradación de la capacidad de las baterías, aumentando la varianza en los datos utilizados como entrenamiento para la predicción del EOL. Esto termina por afectar la esperanza de esta predicción y entrega un intervalo de confianza más amplio, lo que conlleva una mayor incertidumbre sobre la vida útil restante de la batería.

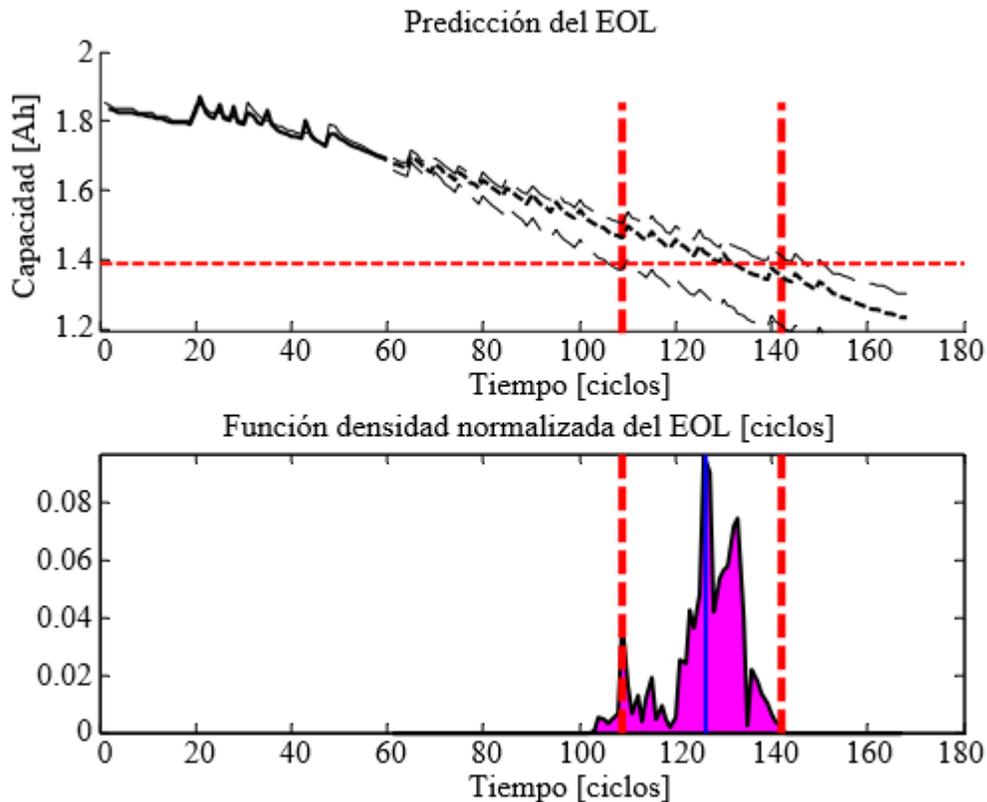


Figura 3: Predicción del fin de la vida útil de una batería de ion-litio

La motivación del actual trabajo investigación consiste en reducir dicha incertidumbre. Para ello, resulta importante contar con métodos eficientes para la detección y aislación de los fenómenos de regeneración que se presentan momentáneamente en el SOH de las baterías, que permita excluir estos eventos de la caracterización de la tendencia de degradación y así se logre obtener una mejor estimación para el EOL.

Las técnicas empleadas en el presente trabajo para el proceso de observación y estimación de estados corresponden a procesos de Inferencia Bayesiana y de Integración de Monte Carlo. Éstas son utilizadas ampliamente debido a su gran campo de aplicación y su facilidad de implementación, que se explican detalladamente a continuación.

2.4 Inferencia Bayesiana e Integración de Monte Carlo

Distintas disciplinas científicas involucran el uso de un conjunto de observaciones para estimar cantidades desconocidas. En el caso particular de este trabajo de investigación, se cuenta con un proceso donde las observaciones corresponden a la tasa de degradación de la capacidad [Ahr] del ESD, y la variable que se pretende estimar es el estado-de-salud (SOH) del acumulador. Desde el punto de vista Bayesiano, el conocimiento disponible del sistema en estudio se puede utilizar para formular distribuciones *a priori* de la evolución de las cantidades desconocidas, y funciones de verosimilitud para relacionar éstas con las observaciones. En este contexto, la inferencia sobre las variables latentes del sistema se basa en la distribución *a posteriori* obtenida mediante el Teorema de Bayes. Adicionalmente, para realizar estimaciones en línea es necesario actualizar esta distribución *a posteriori* en forma secuencial cada vez que nuevas observaciones son recibidas.

Si las relaciones que definen los procesos de observación y transición de estado están dadas por un modelo de espacio-estado lineal y Gaussiano, es posible derivar una expresión analítica óptima para la evolución de las distribuciones *a posteriori*; esta expresión es el bien conocido filtro de Kalman [2]. Sin embargo, los procesos reales son en general bastante complejos como para ser descritos por este tipo de relaciones, puesto que generalmente involucran no-linealidades, ruidos multiplicativos, no Gaussianos, y alta dimensionalidad; en donde consecuentemente la sucesión de densidades *a posteriori* a estimar son integrales multidimensionales con argumentos no-lineales que no tienen forma explícita para el caso general. Este problema es conocido por distintos nombres dependiendo del área en que se presente, entre los que se encuentran filtrado Bayesiano, filtrado óptimo no-lineal, filtrado estocástico, e inferencia en línea [3]-[4].

Entre las técnicas utilizadas para resolver el problema del filtrado Bayesiano, una que ha captado la atención de la comunidad científica por su facilidad de implementación, y su amplio campo de aplicación, es el filtro de partículas. Este método es capaz de aproximar una secuencia de medidas de probabilidad de dimensión creciente mediante un conjunto de muestras ponderadas del espacio de estado, las que evolucionan en base al conocimiento previo del sistema y a las observaciones obtenidas del proceso. PF ha mostrado ser una alternativa superior al filtro extendido de Kalman (EKF, del inglés *Extended Kalman Filter*) y al filtro *unscented* de Kalman (UKF, del inglés *Unscented Kalman Filter*) para sistemas no-lineales y no-Gaussianos, en el sentido de que con suficientes muestras, aproximan la estimación óptima del problema

Bayesiano, de forma más exacta [5], [15]-[18]. Una ventaja de PF es que sus propiedades de convergencia no dependen de la naturaleza del modelo subyacente del esquema de estimación, pudiendo incorporar no-linealidades y procesos de innovación de diversas distribuciones. Las aplicaciones de PF están presentes en múltiples disciplinas, como seguimiento de trayectorias [15], detección de fallas [5], pronóstico de eventos catastróficos [6], econometría [19], y en particular, en el desarrollo de este documento en la determinación de la vida útil de los ESDs.

En lo que sigue de este capítulo se presenta el problema de estimación de estado desde el punto de vista Bayesiano y su solución óptima, para luego presentar una estructura basada en PF que aproxima dicha solución. Los fundamentos teóricos entregados en esta etapa, permiten la implementación de un algoritmo de filtrado que tiene como finalidad entregar las condiciones iniciales al módulo de pronóstico del SOH.

2.4.1 Inferencia Bayesiana

El filtrado Bayesiano está definido como el proceso de usar observaciones ruidosas para estimar la densidad de probabilidad *a posteriori* del estado de un sistema dinámico no-lineal y no necesariamente Gaussiano [4], [16]. Además, dependiendo del conjunto de observaciones que se utilicen para la estimación, surgen también los conceptos de predicción y suavizado [17]. En vista de que la gran mayoría de los sistemas de interés considera observaciones secuenciales, en lo que sigue de este trabajo se pondrá énfasis en los sistemas de tiempo discreto.

El enfoque Bayesiano asume que la evolución de los estados del sistema en el tiempo puede ser descrita por un proceso de Markov, es decir:

$$x_0 \sim p_{x_0}(x) \tag{2.1}$$

$$x_{k+1}|x_k \sim p_{x_{k+1}|x_k}(x|x_k) \tag{2.2}$$

$$y_k|x_k \sim p_{y_k|x_k}(y|x_k) \tag{2.3}$$

donde al instante k , $x_k \in X$ es el estado del sistema, e $y_k \in Y$ es el proceso observado.

Un caso particular de esta estructura son los sistemas factibles de ser representados a través de un conjunto de ecuaciones de diferencia no-lineales de evolución de estado y observación, respectivamente:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, \omega_k) \quad (2.4)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (2.5)$$

donde

$$f_k(\cdot): \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$$

$$h_k(\cdot): \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$$

son funciones no-lineales, $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son secuencias de variables aleatorias (VA) independientes e idénticamente distribuidas (iid), llamadas ruido de proceso y ruido de observación respectivamente, n_x , n_y , n_ω y n_v son respectivamente las dimensiones de x_k , y_k , ω_k y v_k .

Además de la distribución *a posteriori* $p(x_{0:k}|y_{1:k})$, es de interés estimar recursivamente cantidades relacionadas a ésta, tales como la densidad de filtrado $p(x_k|y_{1:k})$, la densidad de predicción $p(x_\tau|y_{1:k})$, $\tau > k$, y las esperanzas:

$$I(\phi) \triangleq E_{p(x_{0:k}|y_{1:k})}[\phi(x_{0:k})] = \int_{\mathcal{X}^{(k+1)}} \phi(x_{0:k}) p(x_{0:k}|y_{1:k}) dx_{0:k} \quad (2.6)$$

para alguna función de interés $\phi: \mathcal{X}^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\phi}$, integrable con respecto a $p(x_{0:k}|y_{1:k})$. Estas esperanzas permiten representar –al menos– todos los momentos del proceso $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mediante el uso de determinadas funciones $\phi(\cdot)$.

Con el fin de resolver el problema de estimación de estas cantidades, considérese que la ecuación de transición de estado (2.2) define la densidad *a priori* del proceso $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, mientras que la ecuación de observación (2.3) define la función de verosimilitud, esto es:

$$p(x_{1:k}) = p(x_1) \prod_{j=1}^k p(x_j|x_{j-1}) \quad (2.7)$$

y

$$p(y_{1:k}|x_{1:k}) = \prod_{j=1}^k p(y_j|x_j) \quad (2.8)$$

En el contexto Bayesiano, la inferencia $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dado un conjunto de observaciones $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, se puede expresar mediante la distribución *a posteriori*

$$p(x_{1:k}|y_{1:k}) = \frac{p(y_{1:k}|x_{1:k})p(x_{1:k})}{p(y_{1:k})} \quad (2.9)$$

donde:

$$p(y_{1:k}) = \int_{\mathcal{X}^k} p(x_{1:k}|y_{1:k}) dx_{1:k} \quad (2.10)$$

En aplicaciones que consideran la disponibilidad de observaciones en forma secuencial, es de interés contar con una relación recursiva para la densidad *a posteriori* (2.9), esta relación puede ser obtenida mediante el Teorema de Bayes de la forma:

$$\begin{aligned} p(x_{1:k}|y_{1:k}) &= p(y_{1:k}|x_{1:k}) \frac{p(x_{1:k})}{p(y_{1:k})} \\ &= p(y_{1:k-1}|x_{1:k}) \frac{p(x_{1:k})p(y_k|x_k)}{p(y_{1:k-1})p(y_k|y_{1:k-1})} \\ &= p(x_{1:k}|y_{1:k-1}) \frac{p(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})} \\ &= p(x_{1:k-1}|y_{1:k-1}) \frac{p(x_k|x_{k-1})p(y_k|x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})} \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde:

$$p(y_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}^2} p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1:k} \quad (2.12)$$

Otro resultado importante es la forma recursiva para la densidad marginal $p(x_k|y_{1:k})$, pues en general interesa estimar el estado actual y no todo el camino recorrido por éste. Esta relación es derivada mediante dos etapas, predicción y actualización. La primera de éstas consiste en estimar $p(x_{0:k}|y_{1:k-1})$ suponiendo $p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$ conocida, lo cual es posible considerando la densidad de transición de estado $p(x_k|x_{k-1})$ dada por (2.4), y la relación de Chapman-Kolmogorov. De esta forma es posible expresar $p(x_k|y_{1:k-1})$ como:

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = \int_{\mathcal{X}} p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|y_{1:k-1})dx_{k-1} \quad (2.13)$$

Notar que en (2.13) se asumió que $p(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k-1}) = p(x_k|x_{k-1})$, ya que (2.4) y las estadísticas de $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definen en forma única a $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ como un proceso de Markov de primer orden.

Por otro lado, la etapa de actualización consiste en incorporar la información recibida para mejorar la estimación de x_k realizada en la etapa de predicción. En este sentido, evaluando la densidad de observación $p(y|x_k)$ –obtenida de (2.4)– en la muestra y_k y utilizando el Teorema de Bayes, se tiene:

$$\begin{aligned} p(x_k|y_{1:k}) &= p(y_{1:k}|x_k) \frac{p(x_k)}{p(y_{1:k})} \\ &= p(y_k|x_k)p(y_{1:k-1}|x_k) \frac{p(x_k)}{p(y_k|y_{1:k-1})p(y_{1:k-1})} \\ &= p(y_k|x_k) \frac{p(x_k|y_{1:k-1})}{p(y_k|y_{1:k-1})} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las relaciones (2.11) y (2.12) representan la base para la solución óptima de estimación Bayesiana. Sin embargo, debido a la complejidad de la constante de normalización $p(y_k|y_{1:k-1})$, las densidades $p(y_{1:k}|x_{1:k})$ y $p(x_{1:k})$, e $I(\phi)$, la propagación recursiva de la densidad *a posteriori*, es en general sólo una solución conceptual y muchas veces no puede ser calculada en forma explícita. Soluciones analíticas como el filtro de Kalman existirán en casos restringidos,

básicamente imponiendo Gaussianidad y linealidad, mientras que en los casos en que la solución óptima no es deducible, es posible implementar métodos aproximados como el filtro de Kalman extendido, el filtro *unscented* de Kalman, métodos basados en grilla, y los métodos secuencias de Monte Carlo. En lo que sigue de este capítulo se revisa el filtro de Kalman y la obtención de la solución óptima (en el sentido del mínimo error cuadrático medio); y los conceptos del filtro de partículas en la estimación de parámetros y su aplicabilidad en métodos de pronóstico.

2.4.2 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman (KF) es un enfoque recursivo para estimar el estado de un sistema utilizando observaciones en línea y un modelo dinámico del sistema. Para sistemas lineales y Gaussianos, el filtro de Kalman es óptimo; i.e., ningún otro filtro entrega mejores estimaciones en el sentido del mínimo error cuadrático medio [2].

KF asume que la densidad *a posteriori* del estado es Gaussiana en todo instante. Suponiendo que $p(x_{k-1}|y_{1:k-1})$ es Gaussiana, es posible probar que $p(x_k|y_{1:k})$ también lo es si el sistema en (2.4) cumple con [4]-[15]:

- ω_{k-1} y v_k son extraídos de una densidad Gaussiana de parámetros conocidos.
- $f_{k-1}(x_{k-1}, \omega_{k-1})$ es una función lineal conocida de x_{k-1} y de ω_{k-1} .
- $h_k(y_k, v_k)$ es una función lineal conocida de y_k y de v_k .

Esto es, suponer que (2.4) se puede escribir de la forma:

$$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + \omega_{k-1} \quad (2.15)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.16)$$

donde $\forall k$, $x_k \in \mathbb{R}^m$ e $y_k \in \mathbb{R}^n$ son respectivamente el estado y las mediciones del sistema, $F_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $H_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices variantes en el tiempo, y las perturbaciones $\omega_k \sim N(0, Q_k)$ y $v_k \sim N(0, R_k)$ son secuencias iid

En el contexto Bayesiano, el modelo (2.15) - (2.16) puede expresarse de la forma:

$$x_k \sim N(F_{k-1}x_{k-1}, Q_{k-1}) \quad (2.17)$$

$$y_k \sim N(H_k x_k, R_k) \quad (2.18)$$

Utilizando las densidades en (2.17) - (2.18) y las relaciones (2.13) - (2.14), el algoritmo del KF puede ser visto de la siguiente forma:

$$p(x_k|y_{1:k-1}) = N(F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (2.19)$$

$$p(x_k|y_{1:k}) = N(H_k\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}) \quad (2.20)$$

donde las medias y covarianzas apropiadas son calculadas en forma recursiva como en (2.21) y (2.24) [14].

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} \quad (2.21)$$

$$P_{k|k-1} = Q_{k-1} + F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^T \quad (2.22)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + G_k(y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.23)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - G_kS_kG_k^T \quad (2.24)$$

donde

$$S_k = H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k \quad (2.25)$$

es la covarianza de la innovación $v_k = y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1}$, y

$$G_k = P_{k|k-1}H_k^T S_k^{-1} \quad (2.26)$$

es la ganancia de Kalman.

El filtro de Kalman calcula recursivamente la media y covarianza de la distribución $p(x_k|y_{1:k})$, lo cual bajo los supuestos de Gaussianidad en las fuentes de incertidumbre es suficiente para conocer completamente esta distribución. Si los restrictivos supuestos anteriores se cumplen, el filtro de Kalman entrega la solución óptima para el problema de estimación de estado; sin embargo, en general la densidad *a posteriori* no es necesariamente Gaussiana por lo

que sólo se obtiene una solución sub-óptima. En los casos en que los sistemas en estudio involucran no linealidades, una alternativa para resolver el problema de estimación de estado es el filtro extendido de Kalman (EKF) y filtro *unscented* de Kalman (UKF). A pesar de que EKF y UKF han mostrado un desempeño adecuado para sistemas no lineales, aún siguen considerando que los ruidos de evolución de estado y observación son aditivos y Gaussianos, por lo que en el contexto de estimación de estado en sistemas que involucran distribuciones asimétricas, se debe recurrir a técnicas alternativas, como filtro de partículas, que ha mostrado tener mejores resultados respecto a los métodos antes mencionado [5], [4].

2.4.3 Métodos Secuenciales de Monte Carlo: Filtros de Partículas

Métodos convencionales de Monte Carlo como *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) han sido extensamente usados para aproximar integrales y densidades de probabilidad. Sin embargo, su uso en el problema de inferencia Bayesiana no es directo, ya que este involucra una secuencia de densidades de probabilidad variantes en el tiempo, mientras que MCMC asume que la densidad objetivo es invariante. Por esta razón, es necesario contar con una versión secuencial de los métodos de Monte Carlo que permita incorporar las observaciones para mejorar las estimaciones realizadas en forma recursiva.

Una herramienta que enfrenta este problema es filtro de partículas (PF), una técnica numérica para aproximar integrales multidimensionales con respecto a una secuencia de medidas de probabilidad [13]. Suponiendo que la secuencia de densidades que se desea aproximar es $\{\pi_k(x_{0:k})\}_{k \geq 1}$, donde $\forall k, \pi_k(x_{0:k})$ está definida en un espacio medible $(\mathcal{X}^{k+1}, \Sigma_{k+1})$ y puede ser evaluada punto a punto salvo una constante de normalización, la implementación del filtro de partículas consiste en generar una colección de $N \gg 1$ muestras aleatorias ponderadas $\{w_k^{(i)}, x_{0:k}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}, w_k^{(i)} \geq 0, \forall i, k$ que permitan aproximar $\pi_k(x_{0:k}), \forall k$ por la distribución empírica:

$$\pi_k^N(x_{0:k}) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x_{0:k}) \quad (2.27)$$

donde $\delta_\alpha(\cdot)$ es el delta de Dirac centrada en α .

Para resolver el problema de aproximación de esperanzas en el contexto de inferencia Bayesiana, se debe considerar que la distribución objetivo $\pi_k(x_{0:k}) = p(x_{0:k} | y_{1:k})$ es la FDP *a posteriori* de $x_{0:k}$ y reemplazar la distribución empírica (2.27) en (2.6). Con esta sustitución, las esperanzas pueden ser aproximadas mediante [7]:

$$\begin{aligned}
\int_{\chi^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \pi_k(x_{0:k}) dx_{0:k} &\simeq \int_{\chi^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \pi_k^N(x_{0:k}) dx_{0:k} \\
&= \int_{\chi^{k+1}} \phi_k(x_{0:k}) \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x_{0:k}) dx_{0:k} \quad (2.28) \\
&= \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \phi_k(x_{0:k}^{(i)})
\end{aligned}$$

Con estas relaciones, el problema de inferencia Bayesiana se reduce a la selección secuencial de las muestras y sus respectivos pesos tal que la sumatoria en (2.28) converja a la integral en (2.6). El algoritmo basado en PF más básico que resuelve este problema es el remuestreo secuencial de importancia (SIR, del inglés *Sequential Importance Resampling*).

Además, una ventaja importante de los enfoques basados en PF, es su alta flexibilidad de implementación permitiendo la incorporación de diversas técnicas para mejorar su funcionamiento en problemas específicos, por ejemplo, lazos de corrección externa [5], [6].

2.4.3.1 Muestreo de Importancia (IS)

El problema de aproximar la integral (2.6) puede ser resuelto mediante algoritmos de Monte Carlo, es decir, generando N caminos $x_{0:k}^{(i)}, i = 1, \dots, N$ y ajustando sus pesos tal que su promedio tienda a la integral para $N \rightarrow \infty$. Una forma directa de resolver este problema es extraer las N muestras según $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ y realizar una estimación de Monte Carlo de $I(\phi)$ con pesos uniformes de la forma:

$$\hat{I}(\phi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}), \quad x_{0:k}^{(i)} \sim p(x_{0:k}|y_{1:k}) \quad (2.29)$$

Sin embargo, existe una gran cantidad de casos en que la distribución $p(x_{0:k}|y_{1:k})$ no es conocida, o bien no es posible extraer muestras de ella [7].

Para evitar la extracción de muestras directamente de $p(x_{0:k}|y_{1:k})$, es posible suponer que existe una densidad $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ llamada densidad o función de importancia, de la cual es posible muestrear y evaluar puntualmente salvo una constante de normalización. Considerando esta nueva densidad, $I(\phi)$ se puede escribir como [8]:

$$\begin{aligned}
I(\phi) &= \int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi(x_{0:k}) p(x_{0:k} | y_{1:k}) dx_{0:k} \\
&= \frac{\int_{\mathcal{X}^{k+1}} \phi(x_{0:k}) w(x_{0:k}) q(x_{0:k} | y_{1:k}) dx_{0:k}}{\int_{\mathcal{X}^{k+1}} w(x_{0:k}) q(x_{0:k} | y_{1:k}) dx_{0:k}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

donde el concepto de los pesos de importancia se inspira de la razón $w(x_{0:k})$ que está dado por (derivada de Radon-Nikodym):

$$w(x_{0:k}) = \frac{p(x_{0:k} | y_{1:k})}{q(x_{0:k} | y_{1:k})} \tag{2.31}$$

Claramente, para que estos pesos estén bien definidos es necesario que $p(\cdot | y_{1:k})$ sea absolutamente continua con respecto a $q(\cdot | y_{1:k})$. Notar además que el denominador de (2.30) permite que $q(x_{0:k} | y_{1:k})$ no sea necesariamente una FDP

Consecuentemente, mediante la obtención de N muestras extraídas según $q(x_{0:k} | y_{1:k})$ es posible construir una aproximación de Monte Carlo de $I(\phi)$ basado en (2.30), es decir:

$$\begin{aligned}
\hat{I}(\phi) &= \frac{\sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}) w(x_{0:k}^{(i)})}{\sum_{i=1}^N w(x_{0:k}^{(i)})} \\
&= \sum_{i=1}^N \phi(x_{0:k}^{(i)}) \bar{w}(x_{0:k}^{(i)})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde los pesos de importancia normalizados están dados por:

$$\bar{w}(x_{0:k}^{(i)}) = \frac{w(x_{0:k}^{(i)})}{\sum_{j=1}^N w(x_{0:k}^{(j)})} \tag{2.33}$$

Notar que para N finito, el estimador $\hat{I}[\phi(x_{0:k})]$ es sesgado, pues es una razón de dos estimadores. Sin embargo, bajo ciertos supuestos la ley de los grandes números garantiza la consistencia asintótica de $\hat{I}[\phi(x_{0:k})]$, es decir,

$$\hat{I}[\phi(x_{0:k})] \xrightarrow{c.s.} I[\phi(x_{0:k})] \quad (2.34)$$

Además, el teorema central del límite garantiza convergencia independiente de la dimensión del integrando. Para una explicación detallada referirse a [8].

El método de muestreo de importancia es ampliamente usado en los métodos de Monte Carlo para reducir la varianza de estimación. La idea detrás de esta aplicación es aprovechar el hecho de que ciertos valores tienen un mayor impacto en la estimación que otros. En este caso, IS enfatiza la utilización de estos valores, lo cual –debido al uso de distribuciones no representativas del proceso– puede llevar a estimaciones sesgadas a no ser que se ponderen correctamente las estimaciones obtenidas según sus pesos de importancia. Si bien el método de muestreo de importancia representa un enfoque simple para aproximar integrales definidas invariantes, no es adecuado dentro del contexto de estimación recursiva, ya que cada vez que se desee estimar $\pi(x_{0:k}|y_{1:k})$ se necesita de todo el conjunto de valores $y_{1:k}$, haciendo el procedimiento computacionalmente ineficiente debido a la alta dimensionalidad de la densidad objetivo. Además, el uso de IS en el contexto de estimación recursiva ha dejado de manifiesto que la varianza de los pesos de las estimaciones explota si no se incluyen rutinas de remuestreo [9]. En resumen, cada vez que una observación y_k es recibida, interesa simplemente recalcular los pesos y las muestras representativas de la densidad de filtrado de forma secuencial y sin degeneración de los pesos. En la Sección 2.4.3.2 se presenta una alternativa de estimación recursiva basada en IS.

2.4.3.2 Muestreo y Remuestreo Secuencial de Importancia

Para evitar la necesidad de una gran cantidad de recursos computacionales en la estimación de la densidad a posteriori $p(x_{0:k}|y_{1:k})$, es posible derivar una relación recursiva, en la que en el instante k se conservan las muestras anteriores del estado $\{x_{0:k-1}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$, y sólo se extraen las muestras $\{x_k^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$ en base a la observación recibida y_k , y a la estimación anterior de la densidad de filtrado $p(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$. Adicionalmente, para solucionar el problema de la degeneración de pesos es posible introducir un paso de remuestreo de la población de partículas, el que asegura una varianza mínima de los pesos, permitiendo que la densidad empírica $\pi^N(x^{(i)})$ sea representativa de $p(x_{0:k}|y_{1:k})$.

Para asegurar que las muestras $\{x_{0:k-1}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$ pueden ser conservadas para la estimación de $\{x_{0:k}^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$, se debe disponer de una función de importancia $q(x_{0:k}|y_{1:k})$ que admita a la función de importancia en el instante anterior $q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})$ como distribución marginal, es decir:

$$q(x_{0:k}|y_{1:k}) = q(x_{0:k-1}|y_{1:k-1})q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k}) \quad (2.35)$$

es decir, el muestreo de $x_{0:k-1}$ desde $q(x_k|x_{0:k-1}, y_{1:k})$ no depende de y_k , lo cual es bastante sencillo de obtener.

Con este supuesto para la función de importancia, es posible obtener una muestra $x_{0:k}^{(i)}$ sin alterar la muestra anterior correspondiente $x_{0:k-1}^{(i)}$, esto es:

$$x_{0:k}^{(i)} = [x_{0:k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}] \quad (2.36)$$

Con

$$x_k^{(i)} \sim q(x_k|x_{0:k-1}^{(i)}) \quad (2.37)$$

También se necesita una relación recursiva para los pesos de importancia, la cual considerando (2.31) y (2.35), está dada por:

$$\bar{w}(x_{0:k}^{(i)}) \propto \bar{w}(x_{0:k-1}^{(i)}) = \frac{p(y_k|x_{0:k}^{(i)})p(x_k^{(i)}|x_{k-1}^{(i)})}{q(x_k^{(i)}|x_{0:k-1}^{(i)}, y_{1:k})} \quad (2.38)$$

La Expresión (2.38) es de gran importancia en la aplicación de los métodos secuenciales de Monte Carlo. Ya que no sólo proporciona un marco teórico para encontrar una función óptima de importancia de acuerdo con un criterio de minimización predefinido, sino que también sienta las bases para la implementación del método secuencial de Monte Carlo (SMC, del inglés *Sequential Monte Carlo methods*) más básico, el muestreo secuencial de importancia secuencial (SIS, del inglés *Sequential Importance Sampling*).

La elección de la función de importancia es crítica para el desempeño del esquema de filtro de partículas y por lo tanto, debe ser considerado como un parámetro de diseño del filtro. Un caso importante es cuando se considera la densidad *a priori* del estado como la función de importancia, es decir, que $q(x_{0:k}|y_{1:k}) = p(x_k|x_{k-1})$. Con esta relación, la recursión para los pesos de importancia se puede expresar como:

$$\bar{w}(x_{0:k}^{(i)}) \propto \bar{w}(x_{0:k-1}^{(i)})p(y_k|x_{0:k}^{(i)}) \quad (2.39)$$

lo que implica que los pesos pueden ser ajustados en forma recursiva directamente de la obtención de nuevas mediciones evaluadas en la función de verosimilitud.

Este enfoque, conocido como muestreo secuencial de importancia resuelve el problema de estimación recursiva de manera mucho más eficiente que IS. Sin embargo, es bien sabido [9] que la distribución de los pesos de importancia en SIS se vuelve cada vez más disímil hasta el punto en que sólo una partícula tiene peso no nulo, lo cual no permite una representación acabada de la distribución *a posteriori*.

Para resolver este problema, el enfoque SIR considera la estructura anterior para generar muestras recursivamente y ponderarlas de acuerdo a su verosimilitud, incorporando además un paso de remuestreo. En este paso se remueven las partículas con bajo peso –y por ende baja verosimilitud– para (i) generar nuevas partículas en una región donde la densidad objetivo es alta, y (ii) evitar el esfuerzo computacional perdido en la actualización de partículas que no son significativas para el esquema de estimación.

La pregunta de cuándo es el mejor instante para ejecutar el remuestreo puede ser abordada considerando el criterio del tamaño efectivo de muestras (ESS) introducido por [10] y definido por [11] como:

$$\begin{aligned} ESS &= \frac{N}{1 + \text{var}_{p(\cdot|y_{1:k})}[w(x_{0:k})]} \\ &= \frac{N}{\mathbb{E}_{p(\cdot|y_{1:k})}[w(x_{0:k})^2]} \leq N \end{aligned} \quad (2.40)$$

ESS no puede ser calculado, sin embargo, una estimación \widehat{ESS} dada por [12] es:

$$\widehat{ESS} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N w(x_{0:k}^{(i)})\right)^2}{\sum_{j=1}^N \left(w(x_{0:k}^{(j)})\right)^2} \quad (2.41)$$

Básicamente, cuando \widehat{ESS} cae bajo cierto umbral, la rutina de remuestreo es ejecutada [12]. Uno de los métodos más usados es el enfoque multinomial [13], el cual consiste en extraer muestras (con reemplazo) del conjunto $\{x_{0:k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$, en donde cada muestra es elegida con probabilidad proporcional a su peso.

Una forma de obtener las nuevas muestras $\{\hat{x}_{0:k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ del conjunto de partículas $\{x_{0:k}^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ acorde a sus pesos es mediante:

$$\hat{x}_{0:k}^{(i)} = \text{Inv}(u_i), i = 1, \dots, N \quad (2.42)$$

donde las muestras $\{u_i\}_{i=1,\dots,N}$ son uniformemente distribuidas $[0, 1]$, e $\text{Inv}(u) = x$ es la inversa de la distribución empírica acumulada de x_k ,

$$\prod_k^N = \int_{-\infty}^N \sum_{i=1}^N \bar{w}^{(i)} \delta_{x_{0:k}^{(i)}}(x) dx \quad (2.43)$$

es decir,

$$\text{Inv}(u) \triangleq x_{0:k}^{(i)} \Leftrightarrow u \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} w(x_{0:k}^{(j)}), \sum_{j=1}^i w(x_{0:k}^{(j)}) \right] \quad (2.44)$$

Cabe destacar que en este esquema de remuestreo, los nuevos pesos serán uniformes, ya que las muestras fueron extraídas según la estimación de la propia estimación de la densidad *a posteriori* del estado.

Si bien el remuestreo es una herramienta fundamental para evitar la degeneración de las partículas, la aplicación de SIR conlleva consecuencias teóricas y prácticas [20]. Teóricamente, esta rutina de remuestreo remueve la independencia estadística de las muestras,

por lo que importantes resultados de los algoritmos de Monte Carlo ya no se cumplen. Sin embargo, [21] establece el teorema central del límite para $\hat{I}(\phi)$ cuando SIR es aplicado en cada iteración. Por otro lado, desde el punto de vista práctico, el remuestreo –además de demandar recursos computacionales adicionales– no permite la propagación de las partículas en paralelo, pues al ocupar SIR, todas las partículas deben ser combinadas.

Con los métodos de estimación presentados es posible construir un test de hipótesis y utilizar medidas de la información para caracterizar la condición del sistema a partir de las estimaciones de la FDP. Estos métodos se describen en las Secciones 2.5 y 2.6 respectivamente.

2.5 Test de Hipótesis

Se define el test de hipótesis [22] como el procedimiento estadístico mediante el cual se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una población o poblaciones. Estas hipótesis se desarrollan ya sea sobre una población p o su media μ .

Se formula una hipótesis H_0 , llamada *hipótesis nula*, la cual se desea contrastar o rechazar mediante una *hipótesis alternativa* H_1 contraria a H_0 . Éstas se deben contraponer de tal forma que la aceptación de una implique el rechazo de la otra.

2.5.1 Errores

Al realizar un test de hipótesis se pueden cometer dos tipos de errores debido a que las muestras pueden llevar a tomar una decisión equivocada. Uno de éstos se da en el caso en que se rechaza la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, lo que se denomina *error de tipo I*. El otro tipo de error que se puede encontrar, es aceptar H_0 cuando ésta es falsa. Este tipo de error se denomina *error de tipo II*. En resumen:

	H_0 verdadera	H_0 falsa
Aceptar H_0	Decisión correcta Probabilidad: $1 - \alpha$	<i>Error tipo II</i> Probabilidad: β
Rechazar H_0	<i>Error tipo I</i> Probabilidad: α	Decisión correcta Probabilidad: $1 - \beta$

donde α es el nivel de significación y $1 - \alpha$ es el nivel de confianza, y a la probabilidad $1 - \beta$ se le denomina potencia de contraste.

2.5.2 Región Crítica y Región de Aceptación

Una vez definida una hipótesis nula, lo primero que se debe hacer es fijar un umbral que permita definir un intervalo dentro del cual los pequeños cambios se puedan atribuir al azar y que conlleve a aceptar la hipótesis nula y diferenciar los cambios significativos que lleven a rechazarla. A este intervalo se le conoce como *región de aceptación* y depende del nivel de confianza $1 - \alpha$ que se precise. Fuera de dicho intervalo, se encuentra la *región crítica o de rechazo*, en la cual los cambios no se pueden atribuir al azar y se debe rechazar H_0 y, por lo tanto, aceptar H_1 .

2.5.2.1 Contraste bilateral (o de dos colas)

En este caso la región de rechazo o región crítica se encuentra formada por dos conjuntos de puntos disjuntos. Dicho caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0: \mu = k$ y la hipótesis alternativa, por lo tanto, es del tipo $H_1: \mu \neq k$.

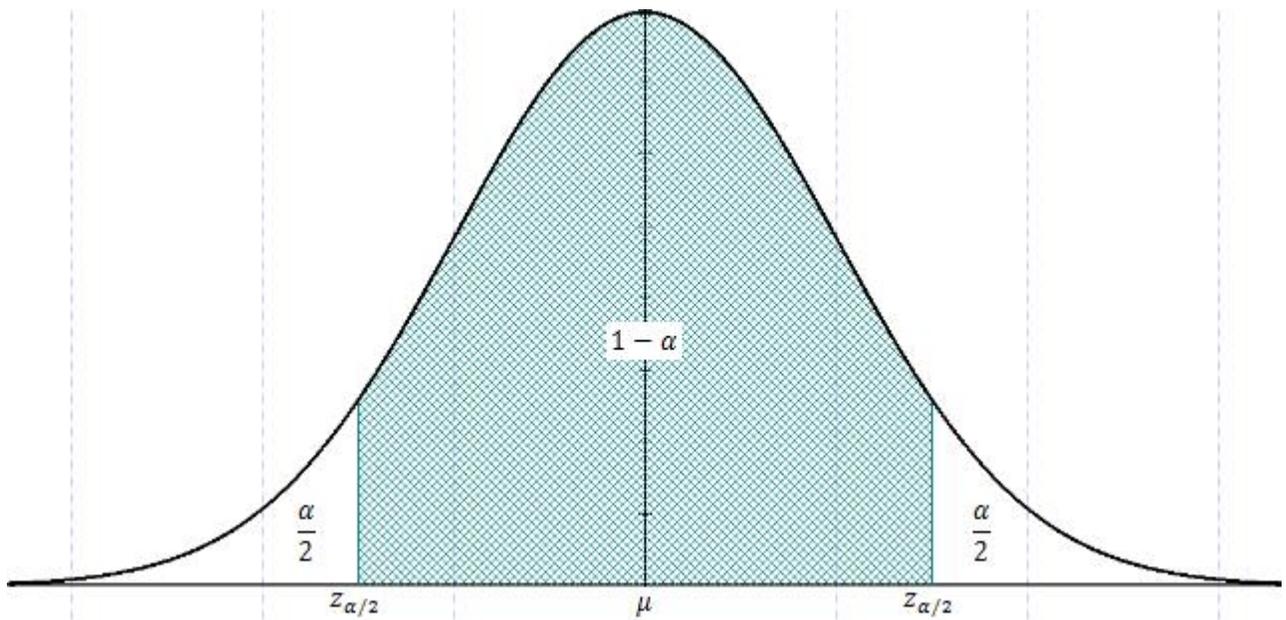


Figura 4: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste bilateral

Para este caso, la región de aceptación queda definido por $\left(\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, mientras que la correspondiente región crítica será $\left(-\infty, \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$.

2.5.2.2 Contraste unilateral (o de una cola)

En este caso la región crítica está formada por un sólo conjunto de puntos ya que el nivel de significación α se concentra sólo en una parte o cola. Este caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0: \mu \geq k$ y la hipótesis alternativa, por lo tanto, es del tipo $H_1: \mu < k$.

a) Unilateral por derecha:

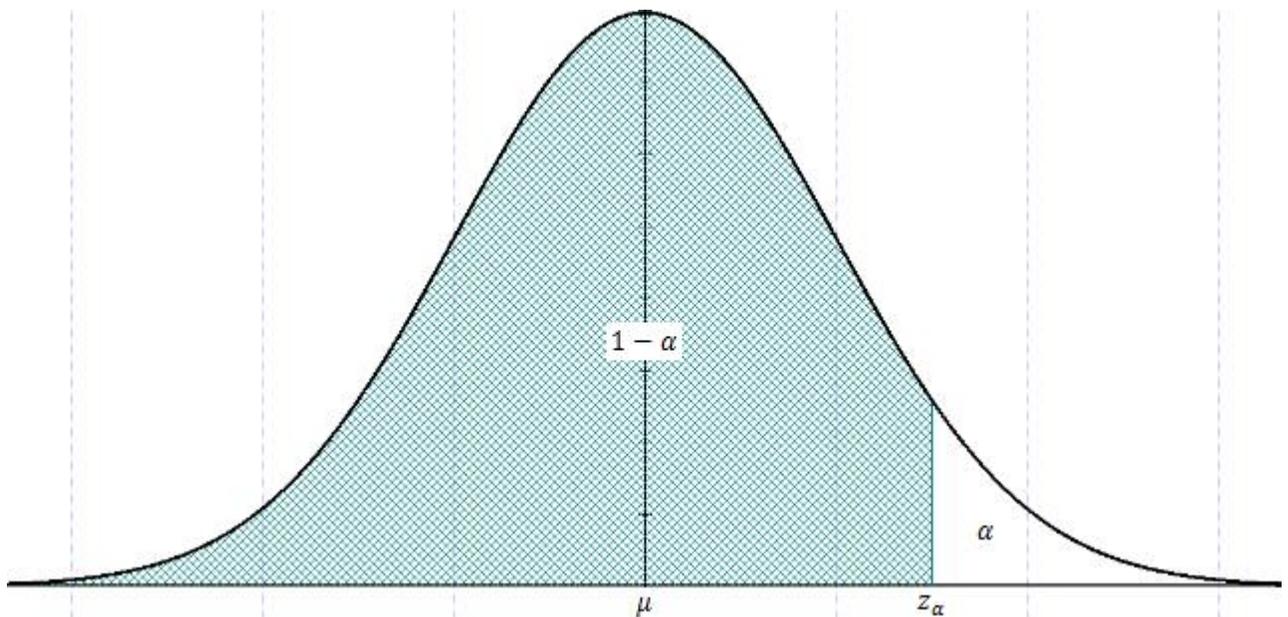


Figura 5: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste unilateral por derecha

Así, la región de aceptación queda definido por $(-\infty, \mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y la región crítica será $(\mu + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$.

b) Unilateral por izquierda

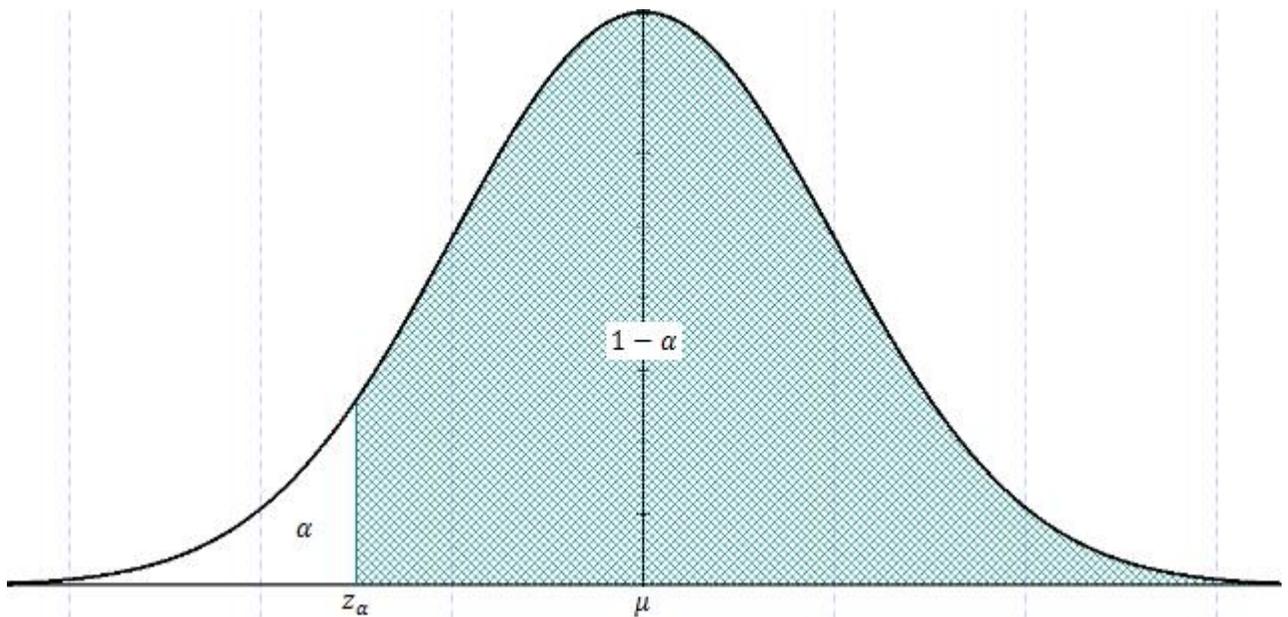


Figura 6: Región de aceptación (achurada) y región crítica (blanco) para contraste unilateral por izquierda

Para este caso, la región de aceptación es $\left(\mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ y su región crítica $\left(-\infty, \mu - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

2.5.3 Etapas del Test de Hipótesis

Los procedimientos seguidos en los test de hipótesis correspondientes a las situaciones de decisión estadística se encuentran totalmente prefijados y se llevan a cabo en una serie de etapas que facilitan su comprensión, y que son:

1. Enunciar la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 : Deben ser excluyentes entre sí. Analizar, una vez enunciadas, si el contraste es bilateral o unilaterial (Es bilateral si la hipótesis alternativa es del tipo \neq y unilateral si es del tipo $>$ o $<$).
2. Determinar el valor $z_{\alpha/2}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_{α} (para contrastes unilaterales), que separa las regiones de rechazo y aceptación, a partir del nivel de confianza $1 - \alpha$ o el de significación α .
3. Determinar la distribución que sigue el parámetro muestral (\bar{x} o \bar{p}) y en base a ella y al valor obtenido en la etapa anterior, escribir las correspondientes regiones de aceptación y rechazo.
4. Calcular el estadístico usado en la prueba (en este caso, calcular media muestral \bar{x} o proporción muestral \bar{p} , a partir de la muestra).
5. Aplicar el test, es decir, dependiendo de si el estadístico cae en la región de aceptación o de rechazo, tomar la decisión de aceptar una de las dos hipótesis.

2.6 Medidas de Teoría de la Información

2.6.1 Entropía

Shannon [23] desarrolló el concepto de entropía para medir la incertidumbre asociada a una variable aleatoria. Se supone un set de eventos posibles con probabilidad de ocurrencia p_1, \dots, p_n . Shannon dice que una medida $H(p_1, \dots, p_n)$ de cuanta incertidumbre se tiene con respecto al resultado requiere cumplir con las siguientes propiedades:

1. H debe ser continua en los p_i
2. Si todos los valores p_i son iguales, $p_i = \frac{1}{n}$, entonces H debe ser monótonamente creciente en función de n , ya que existe mayor incertidumbre sobre el resultado esperado al existir más eventos posibles.

3. Si una elección puede ser subdividida en 2 elecciones consecutivas, el valor original de H debe ser igual a la suma ponderada de los valores individuales de H . Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

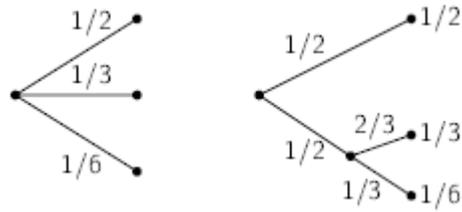


Figura 7: Descomposición de una elección de 3 posibilidades

En este caso se requiere que se cumpla con:

$$H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (2.45)$$

A partir de esto, se postula que la única función H que cumple con las tres propiedades descritas es:

$$H = -k \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (2.46)$$

donde el término k es una constante positiva de escalamiento que generalmente se escoge con valor 1.

La entropía para un caso de dos posibilidades con probabilidad p y $q = 1 - p$, definida por $H = -(p \log p + q \log q)$ resulta como se muestra en la siguiente figura:

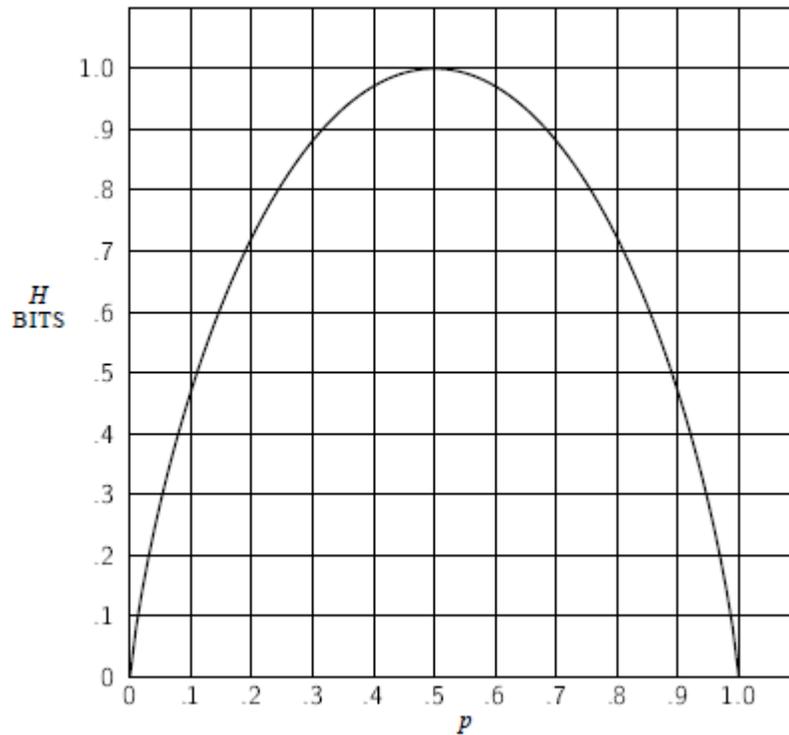


Figura 8: Entropía para el caso de dos posibilidades con probabilidades p y $(1-p)$

La medida H presenta varias propiedades interesantes que la justifican como una medida de información razonable.

1. $H = 0$ si y solo si todos los valores de p_i son cero excepto uno con valor unitario. Es decir, H se anula solo cuando estamos seguros del resultado. De otra forma H es positivo.
2. Para un n dado, H es máximo e igual a $\log n$ cuando todos los p_i son iguales, $p_i = \frac{1}{n}$. Esto es también intuitivamente, el caso con mayor incertidumbre.
3. Para dos eventos, x e y , con m y n posibilidades respectivamente, sea $p(i, j)$ la probabilidad conjunta de ocurrencia de i para x y j para y . La entropía conjunta del evento es

$$H(x, y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j) \quad (2.47)$$

mientras que

$$H(x) = - \sum_{i,j} p(i,j) \log \sum_j p(i,j) \quad (2.48)$$

$$H(y) = - \sum_{i,j} p(i,j) \log \sum_i p(i,j) \quad (2.49)$$

se puede demostrar fácilmente que

$$H(x,y) \leq H(x) + H(y) \quad (2.50)$$

con igualdad únicamente para el caso en que los eventos son independientes, $p(i,j) = p(i)p(j)$. La incertidumbre de un evento conjunto es menor o igual que la suma de las incertidumbres individuales.

4. Cualquier cambio que provoque un acercamiento de las probabilidades p_1, \dots, p_n , provoca un aumento en H . Entonces, si $p_1 < p_2$, al aumentar p_1 y disminuir p_2 la misma cantidad de tal forma que p_1 y p_2 se aproximen, consecuentemente H aumenta. Más generalmente, si se provoca cualquier modificación que “promedie” los p_i de la forma

$$p'_i = \sum_j a_{ij} p_j \quad (2.51)$$

Donde $\sum_i a_{ij} = \sum_j a_{ij} = 1$, y todos los $a_{ij} \geq 0$, entonces H aumenta (excepto en el caso donde estas transformaciones simplemente permutan los valores de los p_i , en cuyo caso H se mantiene igual).

5. Asuma dos eventos azarosos x e y no necesariamente independientes. Para cualquier valor i particular que x pueda tomar existe una probabilidad condicional $p(j|i)$ que y tome valor j y esta dada por

$$p(j|i) = \frac{p(i,j)}{\sum_j p(i,j)} \quad (2.52)$$

Se define la entropía condicional de y , $H(y|x)$ como la entropía promedio de y para cada valor de x , ponderado de acuerdo a la probabilidad de obtener ese valor de x en particular. Esto es

$$H(y|x) = - \sum_{i,j} p(i,j) \log p(j|i) \quad (2.53)$$

Esta cantidad mide que tanta incertidumbre se tiene en promedio con respecto a y cuando se conoce x . Substituyendo el valor de $p(j|i)$ se obtiene

$$H(y|x) = - \sum_{i,j} p(i,j) \log p(i,j) + \sum_{i,j} p(i,j) \log \sum_j p(i,j) = H(x,y) - H(x) \quad (2.54)$$

que es lo mismo que

$$H(x,y) = H(x) + H(y|x) \quad (2.55)$$

Esto dice que la entropía conjunta del evento x,y es igual a la entropía de x más la entropía de y cuando x es conocido.

6. De los puntos 3 y 5 se tiene que

$$H(x) + H(y) \geq H(x,y) = H(x) + H(y|x) \quad (2.56)$$

es decir

$$H(y) \geq H(y|x) \quad (2.57)$$

Por lo tanto, la incertidumbre con respecto a y nunca se ve aumentada con el conocimiento de x . Siempre disminuirá excepto cuando x e y son eventos independientes, en cuyo caso no cambia.

2.6.2 Divergencia de Kullback-Leibler

La divergencia de Kullback-Leibler $D(p||q)$ es una medida de la teoría de la información que permite cuantificar la ineficiencia que resulta al asumir que una variable aleatoria x sigue una distribución de probabilidad $q(x)$ cuando en realidad se encuentra caracterizada por una distribución $p(x)$ [24]. Ésta se define como:

$$D(p(x)||q(x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) \quad (2.58)$$

Resulta útil concebir la divergencia de Kullback-Leibler como la distancia que existe entre dos distribuciones de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$ aunque, en estricto rigor, no se trate realmente de una distancia propiamente tal, ya que no se trata de una función simétrica (no siempre $D(p(x)||q(x)) = D(q(x)||p(x))$) y tampoco cumple con la desigualdad triangular (no necesariamente $D(p(x)||q(x)) \leq D(p(x)||r(x)) + D(r(x)||q(x))$) [24].

2.7 Índices de Desempeño en Detección de Eventos

Es importante contar con alguna medida que indique el desempeño que se obtiene en los distintos métodos aplicados, y que permita compararlos entre sí con el fin de tener algún criterio de decisión al momento de escoger uno otro método. A continuación se explican los criterios escogidos con este propósito.

2.7.1 Desempeño de Clasificadores

Al considerar un problema de predicción de clases binario, en que los resultados son etiquetados como positivos (P) o negativos (N) se puede proponer un clasificador binario que entregaría cuatro tipos de resultados distintos:

- VP : Verdaderos Positivos, que considera a los resultados positivos que son clasificados como positivos.
- VN : Verdaderos Negativos, que considera a los resultados negativos que son clasificados como negativos.
- FP : Falsos Positivos, que considera a los resultados negativos que son clasificados como positivos.

- *FN*: Falsos Negativos, que considera a los resultados positivos que son clasificados como negativos.

A partir de esta notación, es posible representar de manera adecuada la información relevante que se utilizará en los criterios de evaluación presentados a continuación.

2.7.1.1 Curvas ROC

Las curvas ROC corresponden a gráficos bidimensionales en los que se gráfica la tasa de detección ($td = VP/P$) versus la tasa de falsos positivos ($fp = FP/N$) de un clasificador dado. Estas curvas permiten representar de forma gráfica el *tradeoff* entre los beneficios (detecciones) y costos (falsos positivos) inherentes al clasificador utilizado.

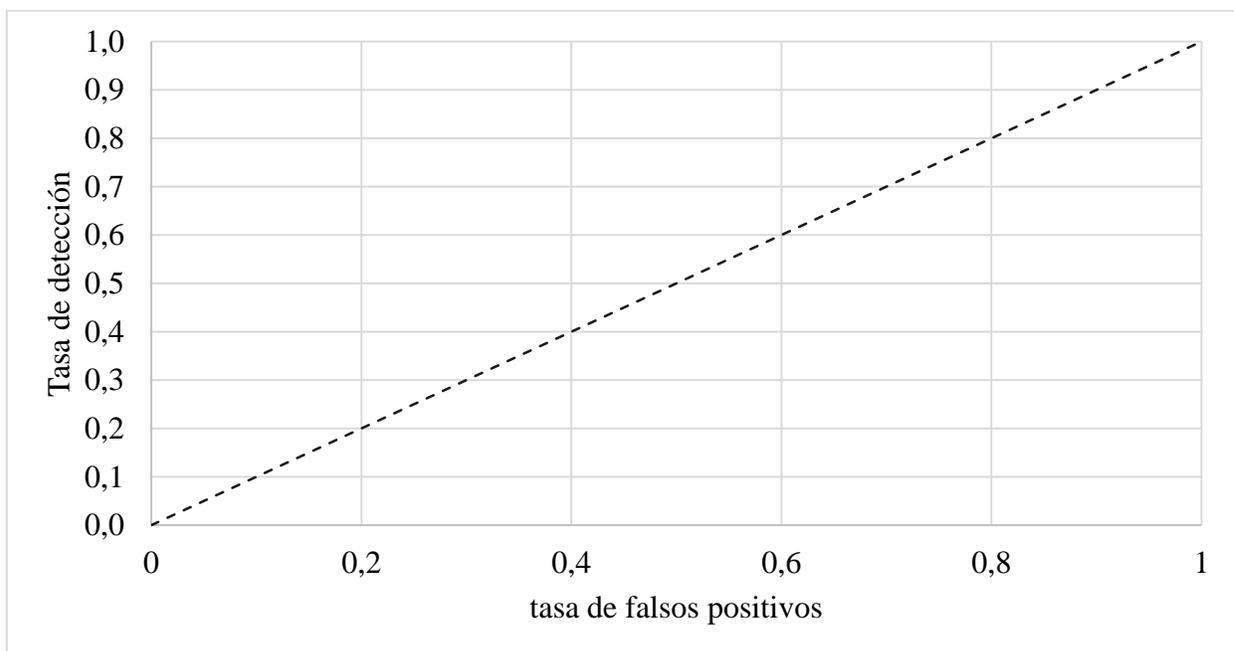


Figura 9: Espacio ROC

A partir de la Figura 9, un punto ubicado en la diagonal $y = x$ del espacio ROC, representa un clasificador aleatorio, ya que su tasa de detección es igual a su tasa de falsos positivos. Un punto que se encuentre en la esquina inferior derecha, presenta un peor desempeño que un clasificador aleatorio, y puede ser fácilmente representado por otro en la otra mitad del espacio al negar sus clasificaciones (considerar positivas las clasificaciones negativas y viceversa). Debido a esto último, la mitad inferior izquierda del espacio ROC, normalmente debería encontrarse vacía.

El espacio ROC presenta algunos puntos de gran interés para analizar, que se detallan a continuación:

- El punto (0,0) representa una estrategia en la cual ningún resultado es clasificado positivo. Esto evita la existencia de falsos positivos, pero a la vez tiene nula capacidad de identificar un resultado etiquetado como positivo.
- El punto (1,1) representa la estrategia contraria, en donde todos los resultados son clasificados como negativos.
- El punto (0,1) indica una clasificación perfecta. Esto quiere decir que es capaz de identificar todos los resultados etiquetados como positivos sin generar clasificaciones positivas erradas (falsos positivos).

De esta forma, como primer criterio cualitativo, se puede decir que un punto es mejor que otro si se encuentra más cerca de la esquina superior izquierda, ya que presenta una mayor tasa de detección, una menor tasa de falsos positivos o ambas situaciones.

Un clasificador representado por un punto cercano al origen (0,0), se considera un clasificador conservador. Esto debido a que clasifica los resultados como positivos sólo cuando cuenta con suficiente evidencia para que así sea, lo que conlleva a tener una tasa de falsos positivos pequeña con el costo de que la tasa de detección también sea pequeña. Por el contrario, un clasificador cercano al punto (1,1) es considerado liberal, ya que identifica correctamente la mayoría de los valores etiquetados como positivos con la desventaja de generar una alta tasa de falsos positivos.

2.7.1.2 Índices de Desempeño

Existen también algunos índices que pueden complementar el análisis de la curva ROC a partir de la información entregada por un clasificador, que sirven para definir cuál presenta un mejor desempeño.

- **Precisión:** Entrega una medida que corresponde a la razón entre los resultados correctamente clasificados como positivos (VP) y el total de resultados clasificados como positivos ($VP + FP$). Esto corresponde a una tasa de desempeño dentro de los resultados clasificados como positivos, lo que ayuda a determinar la veracidad a un resultado que ha sido clasificado como positivo.

$$Prec = \frac{VP}{VP + FP} \quad (2.59)$$

- **Exactitud:** Entrega la razón entre resultados correctamente clasificados ($VP + VN$) y el total de resultados ($P + N$). Esta tasa indica que tan confiable es el clasificador en términos generales, sin discernir entre valores positivos o negativos.

$$Exac = \frac{VP + VN}{P + N} \quad (2.60)$$

Estos índices permiten cuantificar que tan confiable resulta un clasificador al momento de clasificar un resultado. Así, un clasificador resulta mejor que otro si presenta un valor mayor para estos índices.

2.7.2 Error Cuadrático Medio

Entrega una medida del error de estimación, correspondiente al promedio de las restas al cuadrado entre los valores estimados por un método y los valores reales medidos, agrupándolos en una única medida. Este MSE es una buena medida de comparación de la precisión con que se está estimando el valor real de los datos de interés, y queda expresada por:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.61)$$

donde y_i corresponde al valor real medido en el instante i , \hat{y}_i es la estimación de y en el instante i , y N es la cantidad total de datos medidos.

Para efectos de decisión, se considera mejor a una estimación que presente un menor valor de MSE.

Capítulo 3: Formulación del Problema

Las regeneraciones en la capacidad de los ESD han sido mencionadas antes en la literatura [1]. Específicamente en el caso de las baterías de ion-litio, este fenómeno ha sido representado como una auto-recarga, donde ciertas condiciones de operación facilitan un incremento repentino (y temporal) en la capacidad disponible del ESD en el siguiente ciclo (ver Figura 10a), el cuál puede afectar directamente la exactitud y precisión de los algoritmos de estimación del SOH si no son aislados correctamente, ya que estos fenómenos alteran la condición inicial e incertidumbre en la etapa de predicción del SOH [1].

En este trabajo se analiza una solución a este problema considerando un módulo de detección de anomalías que incluye un marco de estimación del SOH basado en PF; ver Figura 10b, donde se ilustra la salida de tal módulo de detección cuando se procesan los datos mostrados en la Figura 10a. El mayor foco de esta investigación es comparar varios métodos de detección, determinar su desempeño en términos de errores tipo I y II, y sus efectos en el sesgo de las estimaciones del SOH. Todos los métodos de detección utilizados en la construcción del test de hipótesis están basados en algoritmos de filtro de partículas, incluyendo su versión clásica y la sensible al riesgo [25]. Estos métodos se complementan con la utilización de medidas de teoría de la información (como entropía) para generar un indicador de detección que caracterice las estimaciones de la FDP del estado basadas en PF.

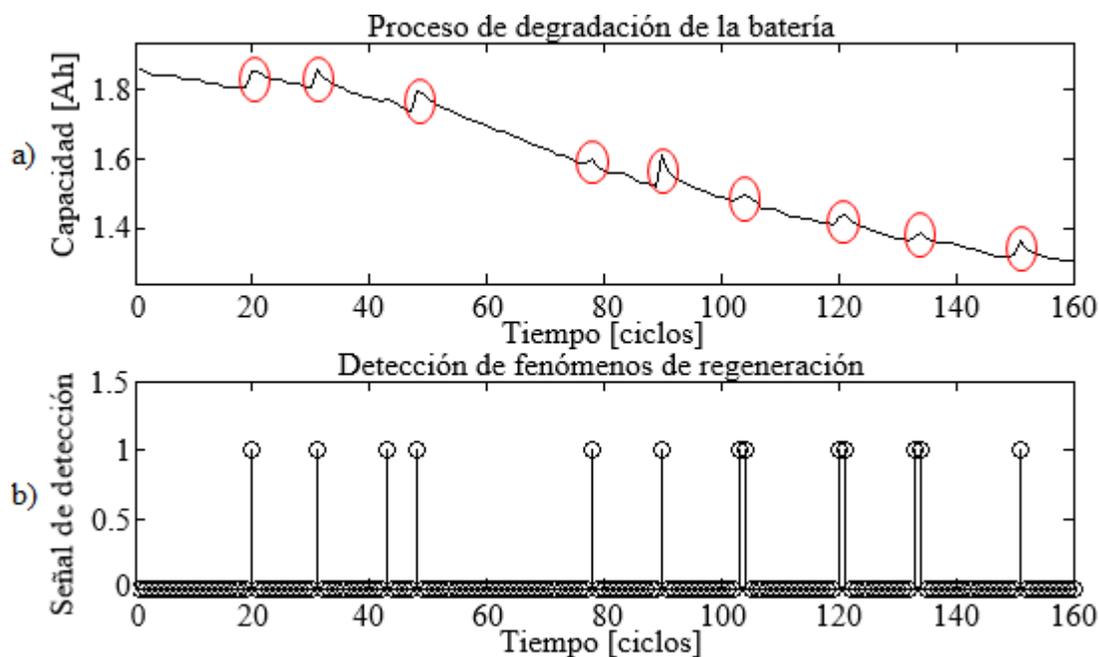


Figura 10: Detección basada en PF de fenómenos de regeneración en la capacidad de baterías de ion-litio

El sistema dinámico que representa el proceso de degradación de la batería considera el uso de modelos estocásticos en el espacio de estados; principalmente por su habilidad de

combinar efectivamente los conocimientos empíricos y fenomenológicos en la representación de un fenómeno dinámico no lineal (tal como la caracterización estadística de los fenómenos de auto recarga dentro de la estructura del modelo de ciclo de vida)

Modelo de transición de estado

$$x(k + 1) = f_k(x(k), U(k), \omega(k)) \quad (3.1)$$

Ecuación de mediciones

$$y(k) = h_k(x(k), U(k), v(k)) \quad (3.2)$$

Donde k es el índice del ciclo; x es el vector de estados que representa al SOH de la batería; y es el SOH medido; ω y v son ruidos no Gaussianos utilizados para representar fuentes de incertidumbre dentro del procedimiento de estimación de los parámetros. Las funciones variantes en el tiempo f_k y h_k son mapeos no lineales. $U(k)$ se explica en el siguiente párrafo.

Si bien el modelo de transición de estados definido por (3.1) y (3.2) permite la implementación de técnicas de filtrado Bayesianas para monitorear el proceso de degradación de baterías de ion-litio, este puede resultar inadecuado cuando se quiere detectar e aislar los efectos a largo plazo de los fenómenos de regeneración debido a que no presenta una representación explícita de dichos fenómenos. Este hecho motiva el desarrollo de módulos de detección de anomalías, tanto basados en algoritmos de PF como en [26], o medidas de teoría de la información [27] como propone esta investigación. Para este propósito, se incluye al modelo una entrada externa U para representar la salida del módulo de detección en línea [5]. Este módulo realiza un test para una hipótesis nula que afirma que un fenómeno de auto-recarga no existe o se está desvaneciendo en el tiempo. Este marco considera un estimador de estados basado en PF para el modelo (3.1) - (3.2) que utiliza la salida de la etapa de detección, donde U se usa para indicar si un fenómeno de regeneración ha ocurrido. La medida de detección seleccionada debe permitir la aislación de eventos donde el algoritmo de estimación del SOH es incapaz de seguir la trayectoria de las mediciones del proceso utilizando un modelo de transición de estados predefinido. Los principales aspectos asociados a la formulación de este tipo de módulos de detección se detallan a continuación.

3.1 Detección de Anomalías Basado en Filtro de Partículas

El filtrado no lineal se define como el proceso de utilizar un set datos $Y = \{y_k, k \in N\}$ que contiene ruido de observación para estimar al menos los dos primeros momentos de un vector

de estado $X = \{x_k, k \in N\}$ gobernado por un modelo en el espacio de estados con una dinámica no lineal y no gaussiana [27]. Desde un punto de vista bayesiano, un procedimiento de filtrado no lineal tiene como objetivo generar una estimación de la función de densidad de probabilidad (FDP) *a posteriori* para el estado, basado en el conjunto de mediciones recibidas. El filtro de partículas es un algoritmo que intenta resolver este problema de estimación eligiendo de manera eficiente un conjunto de $N \gg 1$ partículas $\{x_k^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$ y sus pesos $\{w_k^{(i)}\}_{i=1,\dots,N}$, de tal manera que la FDP del estado pueda ser aproximada [9] por la distribución empírica:

$$\tilde{\pi}_k^N(x_k) = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(x_k - x_k^{(i)}) \quad (3.3)$$

y los valores de los pesos de las partículas pueden calcularse por:

$$w_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{q_k(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (3.4)$$

donde $q_k(x_k)$ denota la función de densidad de importancia de muestreo [28]. La elección de esta función de densidad de importancia $q_k(x_k)$ resulta crítica para el desempeño del esquema del filtro de partículas. En el caso particular del PF clásico, el valor de los pesos de las partículas $w_k^{(i)}$ se calcula estableciendo la función de densidad de importancia igual a la FDP *a priori* del estado, es decir, $q_k(x_k | x_{k-1}) = p(x_k | x_{k-1})$ [28]. Aunque esta elección de la densidad importancia es apropiada para estimar la distribución de probabilidad más probable para un conjunto particular de datos de medición, no permite una buena estimación de la probabilidad de eventos asociados a condiciones de alto riesgo con baja probabilidad. En efecto, el filtro de partículas sensible al riesgo (RSPF, del inglés *Risk Sensitive Particle Filter*) trata de resolver este problema.

En este trabajo se utilizan estimaciones de la FDP del estado basadas en PF y RSPF para implementar módulos de detección. Además, se explora la posibilidad de utilizar medidas de la teoría de la información para analizar estas estimaciones, y lograr realizar la detección temprana de los fenómenos de regeneración del SOH que puedan tener lugar en el ESD.

3.1.1 Detección de Anomalías Basada en Algoritmos de PF Clásico

Los módulos de detección de anomalías basados en PF [5] se han utilizado en el pasado para identificar condiciones anómalas en sistemas dinámicos no lineales y no-Gaussianos. El

objetivo en este tipo de implementaciones es la de unir la información que se encuentra disponible en un vector característico (medidas) para generar estimaciones de la FDP *a priori* de un estado que podría ser útil cuando se determina ya sea la condición de funcionamiento (modo) de un sistema o las desviaciones fuera de los patrones de comportamiento deseado. Este compromiso entre las técnicas basadas en un modelo y las de manejo de información, se lleva a cabo mediante el uso de un módulo basado en PF construido a partir del modelo de estado dinámico no-lineal. Los módulos de detección basados en PF proporcionan un marco en el que las especificaciones del usuario (por ejemplo, tasa de falsas alarmas y la probabilidad de detección deseada) se pueden manejar e incorporar fácilmente dentro de los parámetros de diseño del algoritmo.

3.1.2 Detección de Anomalías Basada en Algoritmos de RSPF

El problema de la detección temprana mediante enfoques basados en PF también ha sido discutido en [29], donde un marco de filtro de partículas sensible al riesgo complementa los beneficios del enfoque clásico, mediante la representación de la probabilidad de eventos poco comunes (en este caso en particular, los fenómenos de regeneración en la capacidad de los ESD) dentro de la formulación de una función de densidad de importancia que tiene como objetivo generar más partículas en regiones de alto riesgo del espacio de estados. Matemáticamente, la distribución de importancia se establece como:

$$q(d_k, x_k | d_{k-1}^{(i)}, x_{k-1}^{(i)}, y_{1:k}) = \gamma_k \cdot r(d_k) \cdot p(d_k, x_k | y_k) \quad (3.5)$$

donde d_k es un conjunto de estados de valores discretos que representan modos de falla, x_k es un conjunto de estados de valores continuos que describen la evolución del sistema dadas esas condiciones de operación, $r(d_k)$ es una función positiva de riesgo que depende del modo de falla, y γ_k es una constante de normalización. Por lo tanto, un módulo de detección basada en RSPF debe definir una distribución de importancia de muestreo de riesgo que asegure la existencia de partículas en la cola de la FDP del estado; para ayudar a representar los fenómenos de regeneración poco probables. En situaciones en las que efectivamente los datos no muestran signos de estos eventos, los pesos de las partículas situadas en los extremos de la FDP deberían disminuir con el tiempo. La formulación del test de hipótesis y su correspondiente umbral es similar a lo que ya ha sido discutido en el caso de los módulos de detección basados en PF.

La suposición de que una anomalía puede afectar el comportamiento cualitativo de la estimación de la FDP del estado motiva el uso de medidas de teoría de la información para complementar el paradigma de los procedimientos del test de hipótesis que se basan en módulos de detección de anomalías basados PF/RSPF. La Sección 3.2 se centra en los conceptos más

importantes que se deben tener en cuenta al aplicar estas medidas para analizar y caracterizar las versiones muestreadas de la distribución *a posteriori*.

3.2 Test de Hipótesis para Detección de Auto-recargas en ESD

En este trabajo se utiliza el módulo de detección basado en PF presentado en [1] como base de referencia para comparar otros métodos de detección. Este módulo aplica un algoritmo de test de hipótesis, donde se utiliza la estimación de la FDP *a priori* basada en PF en el instante k para calcular un umbral $T(k)$ variante en el tiempo, que se define como el mayor escalar tal que la suma de los pesos $w_k^{(i)}$, para todas las partículas que satisfacen $x_k^{(i)} \geq T(k)$, es mayor que la tasa de falsa alarma deseada $\alpha\%$ [24]. Como resultado de esto, el módulo de detección realiza un test de hipótesis (con una tasa de falsa alarma $\alpha\%$ determinado por el usuario) para la medición y_k , considerando la predicción a un paso *a priori* de la salida del sistema como la FDP que caracteriza la hipótesis nula (no existe fenómeno de auto-recarga o se está desvaneciendo en el tiempo). Por otro lado, si la hipótesis nula es rechazada en el ciclo k , entonces la medición y_k es mayor que el umbral de detección para un intervalo de confianza estadística de $\alpha\%$ para la FDP de la predicción a un paso.

3.3 Medidas de Teoría de la Información Aplicadas a PF

Se pueden encontrar varios ejemplos que incorporan medidas de teoría de la información para analizar las salidas de los algoritmos de filtro de partículas en la literatura [30]. Esta memoria tiene como objetivo la formulación de módulos de detección de anomalías basados en filtro de partículas, que se combinan con el uso de medidas de teoría de la información, especialmente centrado en los ampliamente conocidos, como lo son las medidas de entropía diferencial [24].

3.3.1 Entropía

La entropía es una medida de la incertidumbre que está asociada a una medida de probabilidad. En particular, la entropía diferencial H de una FDP $p(x)$ viene dada por:

$$H(p(x)) = - \sum p(x) \log(p(x)) \quad (3.6)$$

Se requieren algunas consideraciones adicionales al tratar de calcularla en el caso de estimaciones de la FDP del estado condicional basado en PF. En efecto, la entropía diferencial de las estimaciones basadas en PF de la FDP *a posteriori* del estado, dado un conjunto de mediciones y_1, \dots, y_k , se calcula como se muestra en la ecuación (3.7):

$$\begin{aligned}
H(p(x_k|y_k)) &= \log \left(\sum_{i=1}^N w_{k/k-1}^{(i)} p(y_k|x_k^{(i)}) \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^N w_{k/k}^{(j)} \left[\log \left(p(y_k|x_k^{(j)}) \right) + \log \left(\sum_{i=1}^N w_{k-1/k-1}^{(i)} p(x_k^{(j)}|x_{k-1}^{(i)}) \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $w_{m/n}^{(i)}$ corresponde a los pesos de las partículas en el instante m considerando la información disponible hasta el instante n . Esta última expresión resulta útil en la evaluación de la incertidumbre asociada a las estimaciones en línea de procesos dinámicos. Se pueden encontrar mayores detalles en [31].

Las aplicaciones relacionadas con entropía para algoritmos de filtro de partículas, generalmente tienen por objetivo evaluar la cantidad de muestras independientes e idénticamente distribuidas (iid) que requiere el algoritmo de filtrado para representar las regiones del espacio de estado donde se acumula la mayoría de la masa de probabilidad, para una determinada estimación $p(x)$ de la FDP de un estado. Esto resulta útil debido a que el indicador de entropía debiera permanecer estable alrededor de un valor particular mientras no se detecten regeneraciones en el SOH. Por el contrario, la entropía debe aumentar repentinamente cuando este fenómeno está presente, lo que permite establecer un umbral para determinar si un incremento en el SOH se detecta como una regeneración de su capacidad. En este sentido, el siguiente esquema de detección de anomalías propuesto utiliza el hecho de que cualquier condición anormal repentina en el proceso de degradación de la batería debería afectar a la distribución *a posteriori* de la estimación de estado basado en PF. Esto es provocado por el hecho que, en condiciones de funcionamiento anormales, el modelo del sistema ya no representa la mejor elección para la distribución de muestreo de importancia. Como consecuencia, los pesos asociados a las partículas con baja probabilidad se ven sometidos a fuertes correcciones, aumentando la entropía diferencial de la FDP condicional de estado antes mencionada.

3.3.2 Diferencia de Entropía

Otro método de detección de anomalías utilizado en este trabajo corresponde a la diferencia de entropía. En este caso se utiliza la entropía discreta definida en la ecuación (2.46) y se realiza la resta entre la entropía de la estimación de la FDP del estado *a priori* $p(x_k|x_{k-1})$ y de la *a posteriori* $p(x_k|y_k)$, resultando de la siguiente manera:

$$D_{ent} = H(p(x_k|x_{k-1})) - H(p(x_k|y_k)) \tag{3.8}$$

Esta medida utiliza el hecho que la entropía es máxima cuando todos los pesos de la FDP son iguales y es mínimo cuando una sola partícula acumula todo el peso de la FDP (es decir, tiene valor 1). Esto quiere decir que la entropía disminuye cuando son pocas las partículas que explican el comportamiento de la FDP como ocurre en el caso en que existe una regeneración en la capacidad del SOH de la batería de ion-litio. De esta forma, cuando este fenómeno se encuentre presente, la entropía *a posteriori* debería disminuir considerablemente con respecto a la calculada *a priori*, provocando un aumento en la medida de la diferencia de entropía utilizada. Fijando un umbral adecuado, se puede determinar cuándo un aumento del SOH corresponde a uno de estos fenómenos de interés.

3.3.3 Divergencia de Kullback-Leibler

Para implementar un módulo de detección de anomalías utilizando esta medida, se utiliza el hecho que permite conocer cuanta información se gana al cambiar de una distribución *a priori* $p(x_k|x_{k-1})$ a una distribución *a posteriori* $p(x_k|y_k)$ incorporando las nuevas mediciones disponibles. Considerando esto, la divergencia de Kullback-Leibler puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$D(p(x_k|y_k)||p(x_k|x_{k-1})) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x_k|y_k) \log \left(\frac{p(x_k|y_k)}{p(x_k|x_{k-1})} \right) \quad (3.9)$$

En la implementación del módulo de detección se utiliza la estimación a un paso de la FDP *a priori* basada en PF asumiendo que no ocurrirá un fenómeno de regeneración en el estado de salud de la batería en estudio. De esta forma, al incorporar la nueva medición y estimar la FDP *a posteriori* del estado y compararla con la FDP *a priori* previamente mencionada, el indicador de la divergencia de Kullback-Leibler debería presentar un valor cercano a cero cuando efectivamente no exista un fenómeno de regeneración, ya que ambas FDP deberían tener cierta similitud. Por el contrario, si ocurriera una regeneración en la capacidad del SOH, la “distancia” entre las dos FDP sería mayor, provocando un aumento abrupto en el indicador del módulo de detección. Esto permite establecer un umbral con el cual se puede determinar si una regeneración en la capacidad del SOH es detectada. Esto se explica considerando que la distribución *a posteriori* se debe ver afectada cuando se presenta una condición anormal repentina, provocando que la FDP *a posteriori* difiera de manera considerable en comparación a la FDP *a priori* que no considera este fenómeno.

Capítulo 4: Resultados y Análisis

Se ha seleccionado la detección de fenómenos de auto-recarga en baterías de ion-litio como caso de estudio para comparar los diferentes módulos de detección mencionados. La verificación de los esquemas de detección propuestos se realiza utilizando datos simulados para el SOH considerando un test de degradación acelerada [1], lo que asegura una certeza absoluta sobre los instantes de tiempo en que se producen los fenómenos de regeneración. El desempeño se evaluó mediante el desarrollo de varias realizaciones del proceso estocástico que define cada uno de los módulos de detección basados en PF propuestos, y la estimación de los errores de tipo I y II. Además, el impacto que cada esquema de detección tiene en el procesador Bayesiano que estima el SOH de la batería se mide en términos del MSE para la estimación *a posteriori*. El concepto principal detrás de los esquemas de detección de anomalías propuestos es que cualquier comportamiento anormal súbito en el sistema debe afectar a la distribución *a posteriori* de la estimación de estados basada en PF. Esto último, se basa en el hecho de que en condiciones de funcionamiento anormales, el modelo del sistema ya no se encontrará correctamente representado por la distribución de muestreo de importancia.

Con respecto a la utilización del PF, el primer enfoque de detección propuesto utiliza un algoritmo de PF basado en el modelo (3.1) - (3.2) como estimador de estado, en combinación con un módulo de detección basado en PF. El segundo esquema considera el mismo tipo de estimador de estado, pero utilizando un módulo de detección basada en RSPF en lugar del clásico.

Los resultados se obtuvieron utilizando 10 diferentes conjuntos de datos que captan el comportamiento de un proceso de degradación acelerada de las baterías de ion-litio. El procedimiento se realizó de la siguiente manera:

- **Test de hipótesis:** Fijando una tasa de falsa alarma nominal, se realizan 10 procesos de detección de regeneraciones para cada uno de los 10 sets de datos, tanto para PF como para RSPF. A partir de esto, se calcula el valor promedio empírico tanto para la tasa de falsa alarma como para la probabilidad de detección para los 2 tipos de filtro de partículas utilizados por separado. Este procedimiento se realizó para 121 valores α nominal.
- **Medidas de teoría de la información:** En este caso, se define un umbral de detección, y se ejecuta la detección de regeneraciones, al igual que para el caso de test de hipótesis, se realizan 10 procesos de detección para cada uno de los 10 sets de datos, tanto para PF como para RSPF. A partir de esto, se calcula el valor promedio empírico tanto para la tasa de falsa alarma como para la probabilidad de detección para los 2 tipos de filtro de partículas utilizados por separado. El procedimiento se realizó para 30 valores α nominal.

Las tablas con el resumen de los resultados obtenidos para todos los métodos mencionados se pueden encontrar en el Anexo A.

4.1 Test de Hipótesis

El test de hipótesis desarrollado en [32] fue utilizado como método base para la comparación de las técnicas implementadas en este trabajo. También se incorporó una versión que utiliza RSPF en el módulo de detección que permita comparar este tipo de filtro con el de PF clásico utilizado anteriormente. Los resultados obtenidos se muestran en el siguiente gráfico:

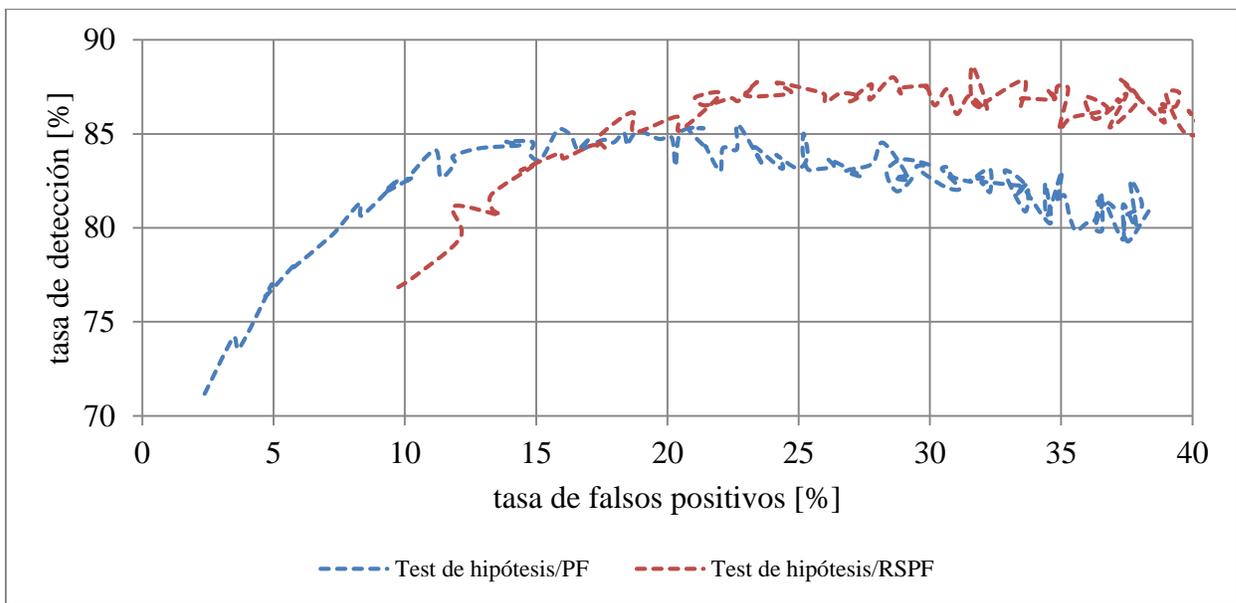


Figura 11: Desempeño de detección para métodos basados en test de hipótesis

Como es posible observar en la Figura 11, en este caso el módulo de detección basado en PF presenta un mejor comportamiento que el módulo que utiliza RSPF para valores de α menores a 17 [%] aproximadamente. Luego de este valor, el algoritmo de RSPF mejora su desempeño con respecto al algoritmo de PF, logrando una mejor probabilidad de detección β para un mismo valor de α . Se debe destacar que si bien la tasa de detección aumenta junto a la tasa de falsos positivos en algunos intervalos, esto no quiere decir necesariamente que presente un mejor desempeño en la detección de los eventos de interés. Esto se explica con el hecho que al acercarse a la esquina superior derecha del plano, el método se vuelve menos exigente, clasificando resultados como positivos sin necesidad de mayor evidencia. En cuanto al MSE mostrado por estos dos acercamientos, se obtiene un mejor resultado para el algoritmo de PF. Sin embargo, la diferencia entre estos es del orden de 10^{-5} , por lo que no se considera una diferencia realmente significativa.

En la Sección 4.2 se presentan los resultados obtenidos con las distintas medidas de teoría de la información implementados, con el motivo de encontrar una alternativa que pueda presentar

un mejor desempeño que el test de hipótesis o resultados similares con un menor costo computacional.

4.2 Medidas de Teoría de la Información

A continuación se presentarán los resultados obtenidos empleando los métodos de detección de medida de teoría de la información presentados en la Sección 3.3.

Para evaluar el desempeño de cada uno de los métodos propuestos, se medirá y comparará los siguientes índices:

- Tasa de detección para una tasa de falsos positivos dado
- Precisión
- Exactitud
- MSE

4.2.1 Entropía

El primer método basado en medidas de teoría de la información utilizado es el método de la entropía. Esta medida de incertidumbre, entregó los siguientes resultados presentados en la Figura 12:

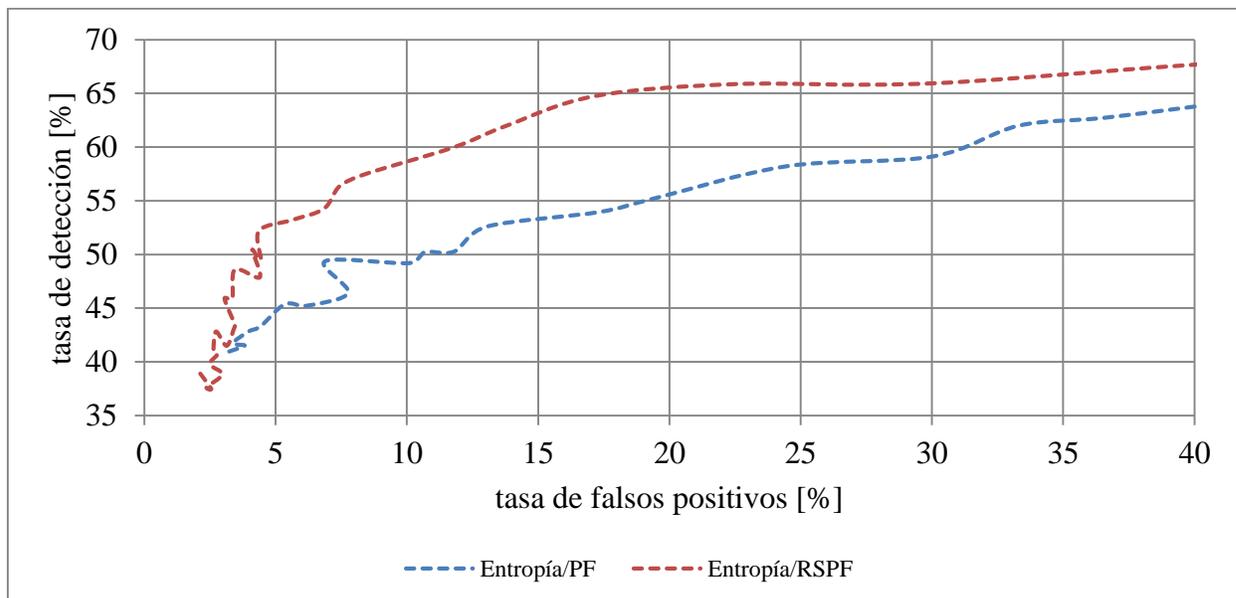


Figura 12: Desempeño de detección para métodos basados en entropía

Este gráfico denota un mejor desempeño para el algoritmo en base a RSPF, considerando que presenta una mejor tasa de detección para cualquier valor de la tasa de falsos positivos. Para reafirmar el análisis propuesto de forma cuantitativa, se presenta los resultados de la Figura 13.

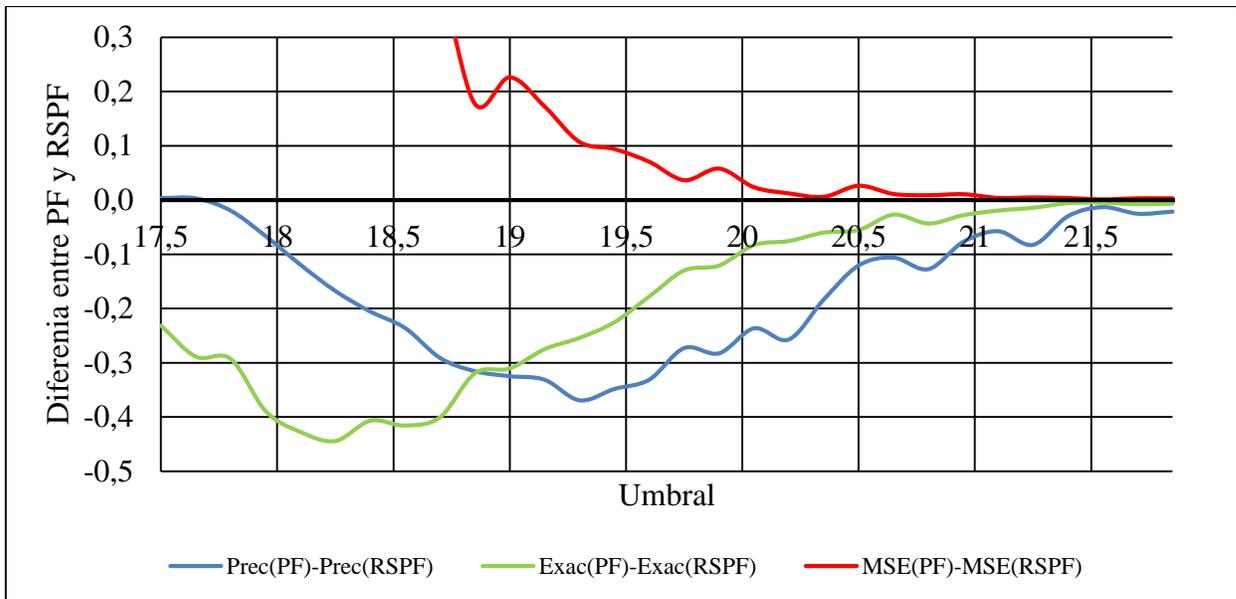


Figura 13: Diferencia de índices Entropía/PF - Entropía/RSPF

La diferencia en los índices que se muestra en la Figura 13, define que el algoritmo de RSPF presenta un mayor valor tanto para la precisión como para la exactitud con respecto al algoritmo en base a PF. Además, generó un menor MSE al momento de realizar las estimaciones del valor real del SOH de la batería.

En base a los resultados obtenidos, se puede considerar que el algoritmo de RSPF, es mejor que el algoritmo de PF en el caso de la entropía. Este análisis también permite distinguir la existencia umbrales donde se puede maximizar la precisión o la exactitud del módulo detector según se considere conveniente.

4.2.2 Diferencia de Entropía

Un segundo método basado en medidas de teoría de la información y presentado anteriormente, consiste en el método de diferencia de entropía. Esta medida entregó los resultados presentados en la Figura 14.

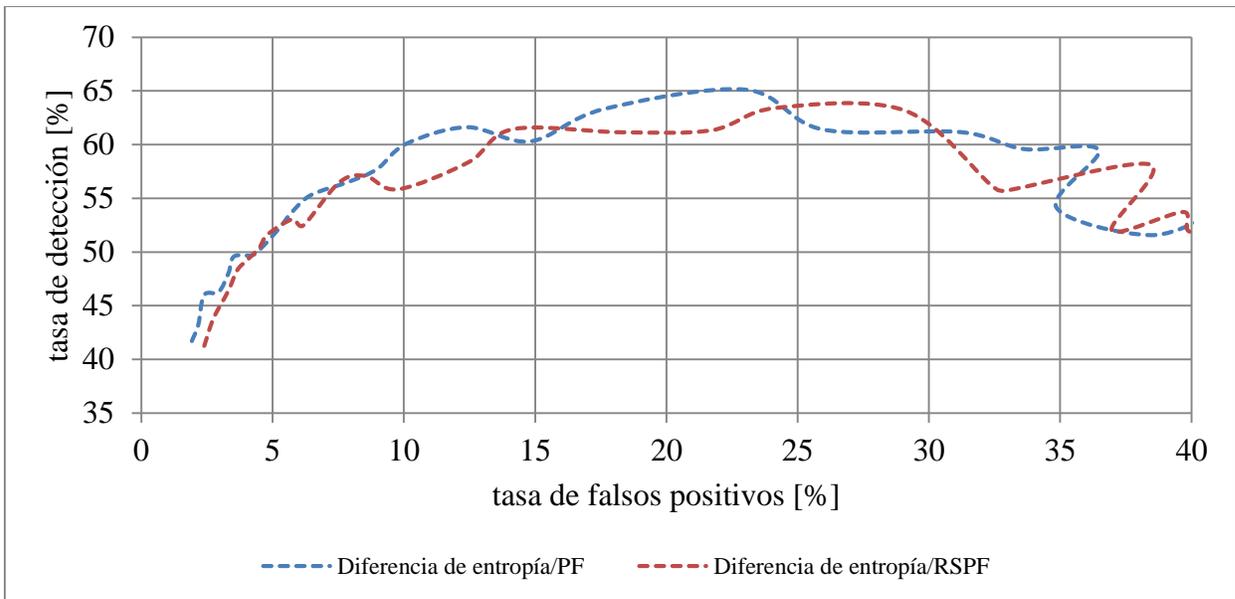


Figura 14: Desempeño de detección para métodos basados en diferencia de entropía

Para este caso de método de detección con diferencia de entropía, se puede observar que las curvas ROC que representan los algoritmos basados en PF y RSPF son bastante similares. Esto quiere decir que para una tasa de falsos positivos dada, ambos presentan una tasa de detección similar.

En cuanto a los índices de desempeño utilizados, se pueden observar los resultados en el gráfico de la Figura 15.

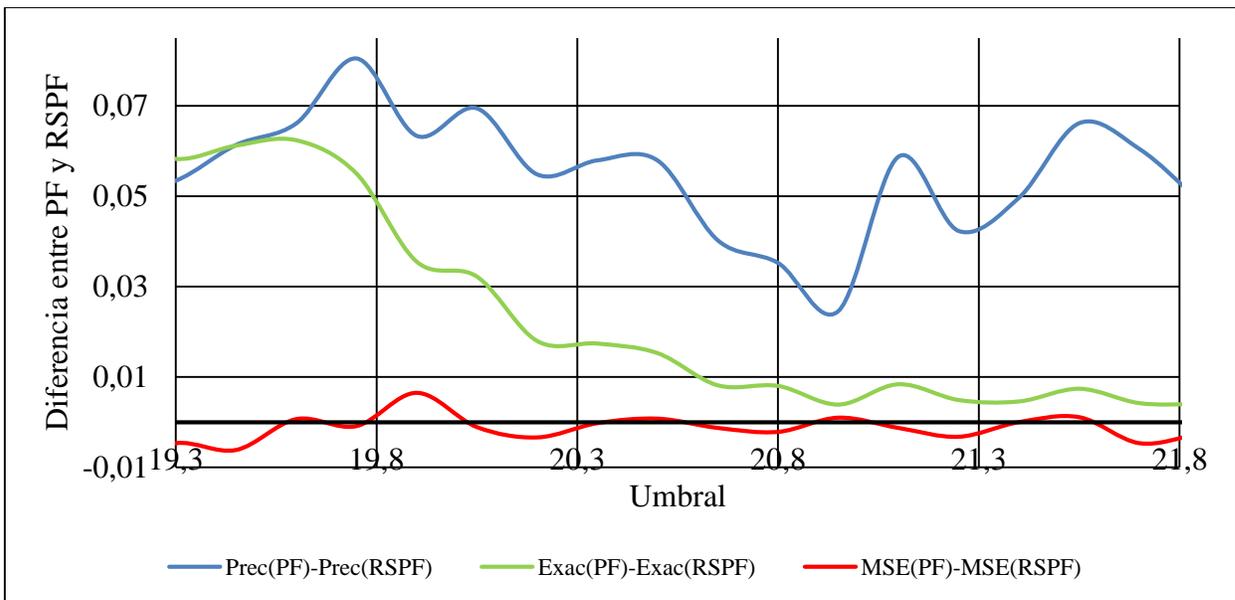


Figura 15: Diferencia de índices Diferencia de Entropía/PF – Diferencia de Entropía/RSPF

En la Figura 15 resulta más fácil distinguir diferencias entre el desempeño mostrado entre los algoritmos basados en PF y RSPF. Es posible observar que en cuanto a precisión y exactitud se refiere, el algoritmo de PF presenta una pequeña ventaja con respecto al algoritmo de RSPF. En cuanto al MSE, se puede observar que este fluctúa en torno a 0, indicando que en este parámetro no existe una diferencia considerable entre ambos algoritmos.

4.2.3 Divergencia de Kullback-Leibler

Finalmente, el último método basado en medida de la información estudiada, consiste en el método de divergencia de Kullback-Leibler, cuyo desempeño se presenta en la siguiente figura.

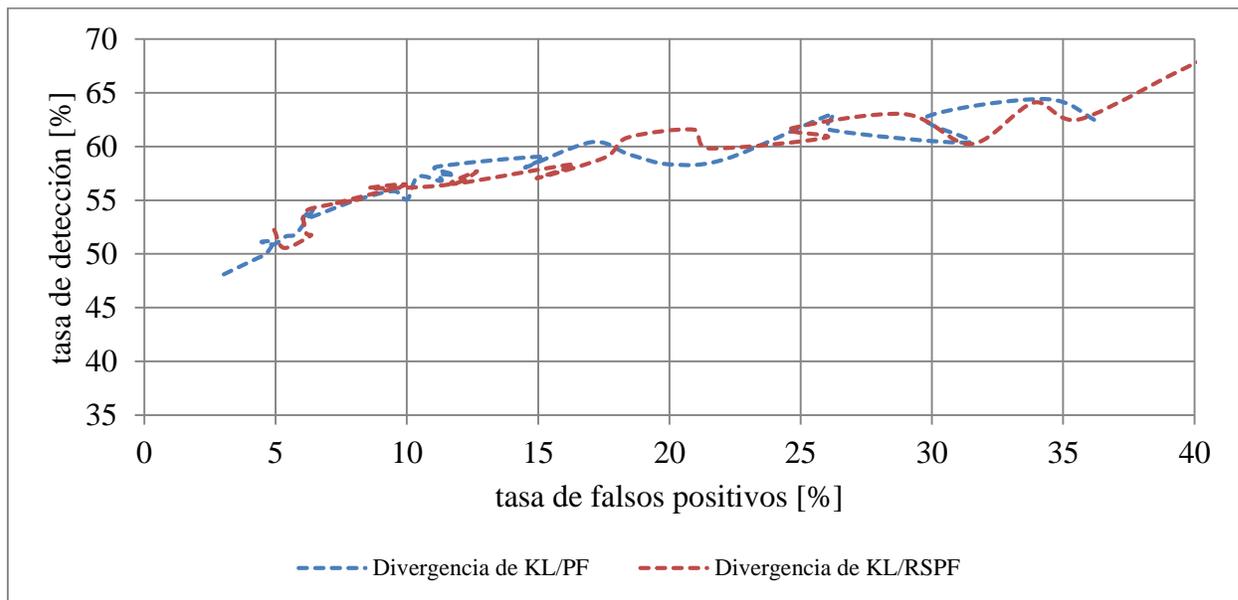


Figura 16: Desempeño de detección para métodos basados en divergencia de Kullback-Leibler

En la Figura 16 es posible observar que, al igual que en el caso de la diferencia de entropía, para la divergencia de Kullback-Leibler la curva ROC presenta resultados similares para ambos algoritmos utilizados, lo que le da mayor relevancia a los índices de desempeño al momento de realizar una comparación entre ambos acercamientos.

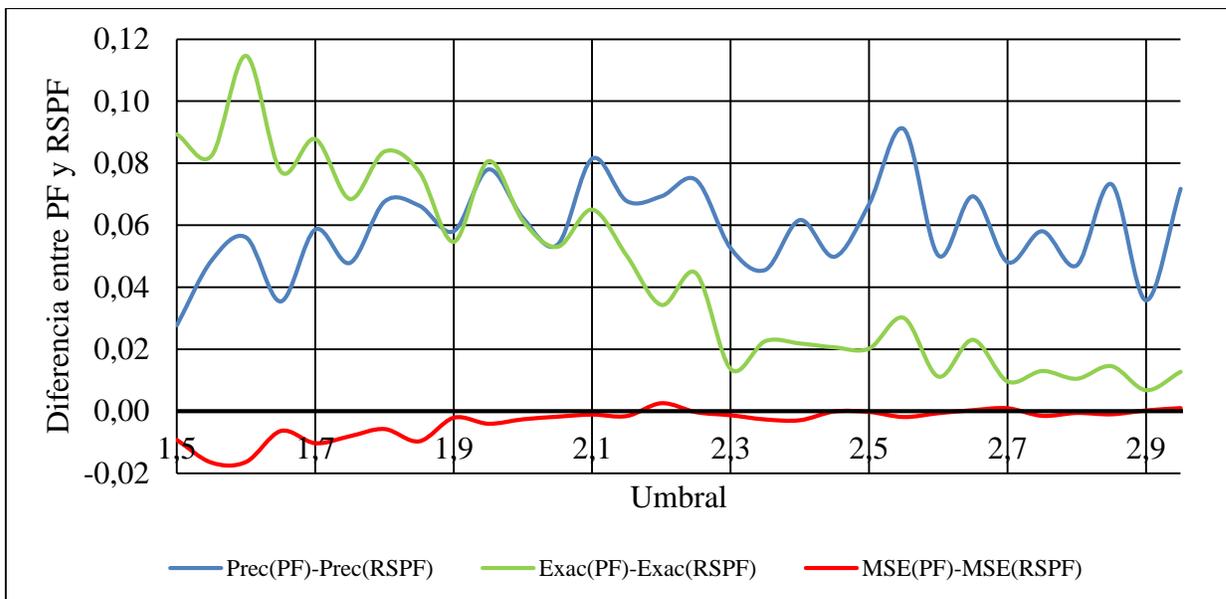


Figura 17: Diferencia de índices Divergencia de KL/PF – Divergencia de KL/RSPF

En la Figura 17 una vez más se encuentran valores positivos tanto para la diferencia de precisión como para la diferencia de exactitud de estos índices entre el algoritmo de PF y el de RSPF, lo que indica que el primero tiene mayor valor para los dos índices de desempeño en estudio. El MSE presenta valores similares para ambos casos, siendo un poco menor para el caso de PF.

Considerando los resultados obtenidos, el método de detección basado en divergencia de Kullback-Leibler, presenta un mejor desempeño al utilizar PF en lugar de RSPF.

4.3 Análisis Comparativo

Los distintos métodos presentados en este trabajo, entregaron resultados satisfactorios al momento de detectar los fenómenos de regeneración en el estado de salud de baterías de ion-litio y también generaron un bajo error en cuanto a las estimaciones del SOH obtenidas. Sin embargo, resulta necesario comparar estos métodos entre sí, con el fin de distinguir cuál de ellos entrega los mejores resultados para abordar esta problemática.

El análisis comparativo se realizará entre los resultados que presentaron mejor desempeño para cada método de detección utilizado. A continuación se presenta la Figura 18, la cual resume gráficamente el comportamiento de los enfoques utilizados en el sentido de tasa de detección obtenida según su tasa de falsos positivos.

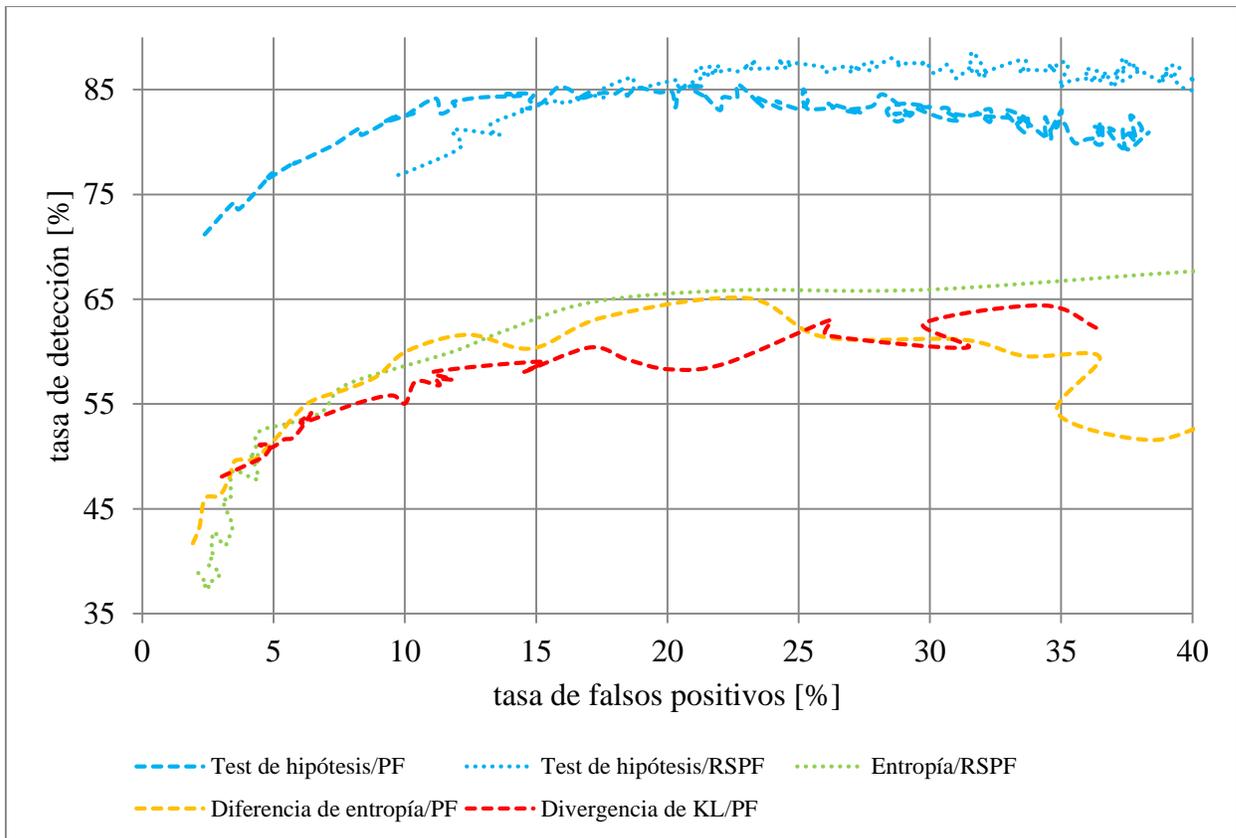


Figura 18: Desempeño de detección entre los métodos utilizados

En el gráfico mostrado en la Figura 18 se puede observar que los métodos basados en medidas de teoría de la información presentan resultados similares, notando además algunos puntos donde distintos métodos presentan exactamente la misma tasa de detección. Resulta interesante el hecho que, si bien la curva de entropía con RSPF se encuentra por arriba de las demás curvas de medidas de teoría de la información, en la zona de menor tasa de falsos positivos (5-10%), presenta resultados muy similares a los obtenidos con la diferencia de entropía. Hay que destacar que justamente dicha zona es la de mayor interés, ya que una baja tasa de falsos positivos resulta adecuada para la problemática en estudio.

En cuanto al test de hipótesis, supera notoriamente a los otros métodos de teoría de la información presentados, logrando una mayor tasa de detección para cualquier valor de la tasa de falsos positivos. Dependiendo de la tasa de falsos positivos deseada, se puede determinar si se prefiere utilizar este método con el algoritmo de PF o con el algoritmo de RSPF. Considerando que el primero logra un mejor desempeño para tasas de falsos positivos más baja, se podría considerar esta combinación como el mejor método de detección encontrado en este estudio.

Los resultados obtenidos se condicen con la intuición considerando que el test hipótesis es el método más cercano a un test de Neyman-Pearson, que corresponde al test óptimo de decisión

entre dos hipótesis. Para poder completar dicho test, resultaría necesario contar con una caracterización de la FDP de las regeneraciones.

Al realizar la comparación entre métodos que utilizan medidas de la teoría de la información, se puede adicionar el análisis en cuanto a la precisión y exactitud obtenida con estos métodos. Estos índices fueron agrupados según la tasa de falsos positivos que presentan, ya que los umbrales de los distintos métodos son diferentes y al utilizarlos dificultaría la comparación de los valores obtenidos.

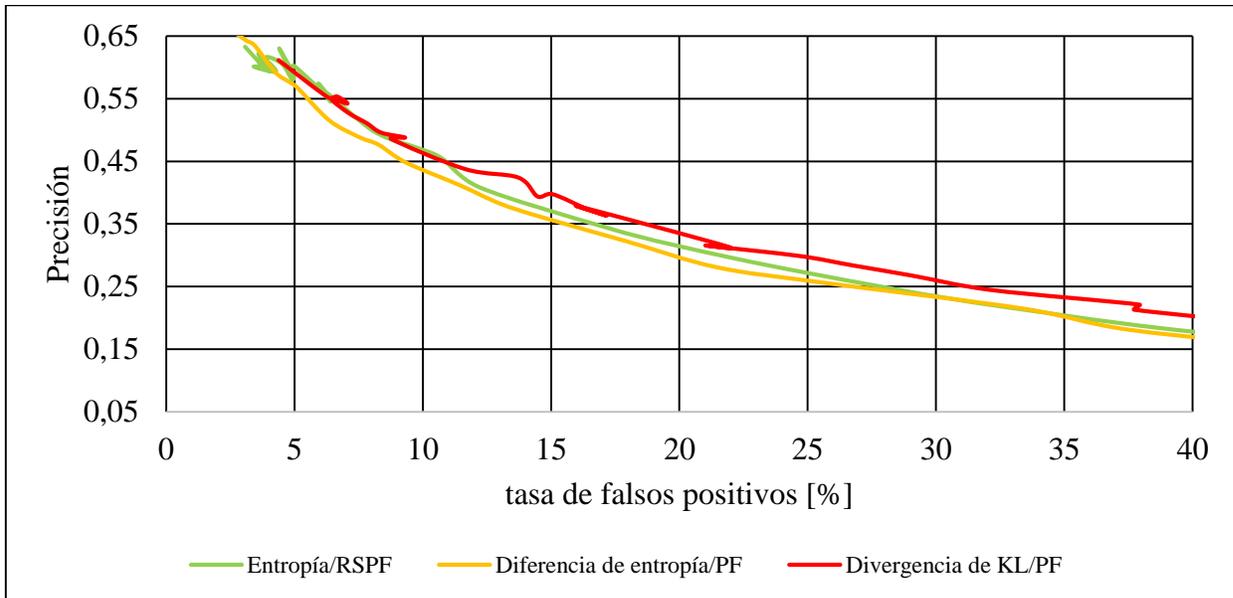


Figura 19: Precisión entre los métodos utilizados

La Figura 19 presenta los resultados de precisión para los métodos seleccionados. Se puede apreciar que en general la divergencia de Kullback-Leibler presenta un mejor desempeño que los otros métodos al considerar este índice. Si se examina la zona de menor tasa de falsos positivos, se observa que el desempeño mostrado por la divergencia de Kullback-Leibler y el desempeño de la entropía son prácticamente iguales, siendo el método de detección por diferencia de entropía el que presenta un peor desempeño.

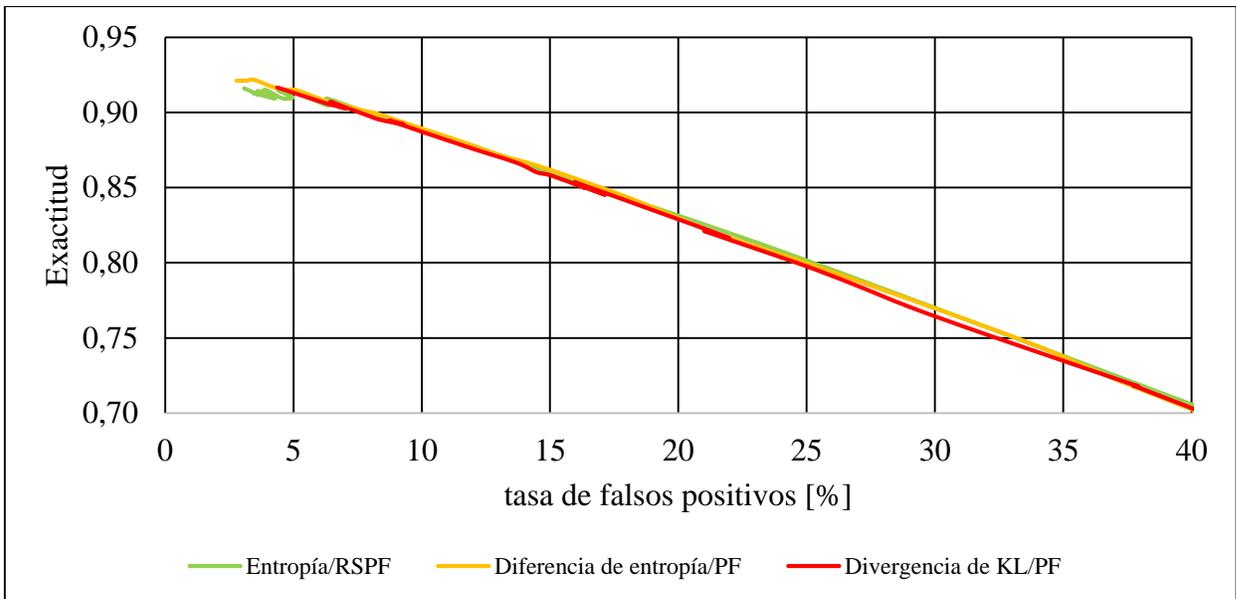


Figura 20: Exactitud entre los métodos utilizados

Por otro lado, en la Figura 20, se puede observar que la exactitud encontrada es considerablemente mayor que la precisión, lo que se explica por el hecho que particularmente en este caso, existe una cantidad mucho mayor de valores etiquetados como negativos que los que se encuentran etiquetados como positivos. La comparación por exactitud, entrega resultados muy similares entre los tres métodos.

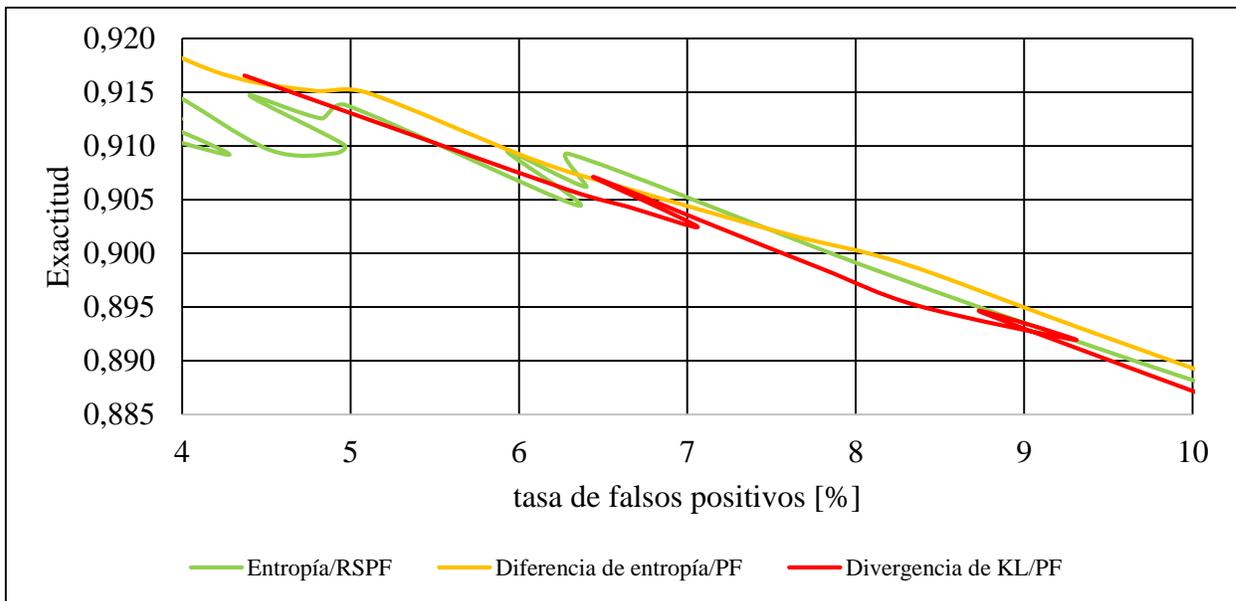


Figura 21: Exactitud entre los métodos utilizados (Acercamiento)

Al realizar un acercamiento a la zona de baja tasa de falsos positivos, se puede apreciar que efectivamente la diferencia entre los resultados obtenidos con los distintos métodos es despreciable. De todas formas, se observa que en general, la divergencia de Kullback-Leibler es

la que presenta un peor desempeño, mientras que los otros dos métodos son comparables, siendo la diferencia de entropía la que presenta una ventaja mínima por sobre la entropía.

Si bien se esperaba que el desempeño presentado por los diferentes métodos basados en medidas de información fuera más cercano al obtenido con el test de hipótesis, al menos existe coherencia en el hecho de que los resultados obtenidos con estas técnicas no presentaran grandes diferencias entre ellos. Esto se debe al hecho que estos métodos se desarrollan a partir principios similares, que tiene que ver con la cantidad de información que explica el estado actual del sistema al pasar de la estimación de la FDP del SOH *a priori* a su FDP *a posteriori*.

Por último, se esperaba que el RSPF presentara una ventaja al momento de detectar los fenómenos de regeneración con respecto al PF, ya que permite caracterizar dichos eventos con algunas partículas en la cola de la FDP. Sin embargo, esta ventaja no fue apreciada en los resultados que se obtuvieron en este trabajo, siendo el módulo de detección basado en entropía el único en que la ventaja de RSPF fue considerable a lo largo del intervalo en estudio.

Capítulo 5: Conclusiones

5.1 Conclusiones generales

Este trabajo presentó el desarrollo y evaluación de distintos métodos de detección de anomalías correspondientes a regeneraciones súbitas y momentáneas en el SOH de baterías de ion-litio. En total fueron implementados ocho métodos distintos conformados por una medida de detección, basada en un algoritmo de filtro de partículas, ya sea su formulación clásica o su formulación sensible al riesgo. Estos métodos son: Test de hipótesis/PF, Test de hipótesis/RSPF, Entropía/PF, Entropía/RSPF, Diferencia de entropía/PF, Diferencia de entropía/RSPF, Divergencia de Kullback-Leibler/PF y Divergencia de Kullback-Leibler/RSPF.

El desempeño de los módulos de detección propuestos, fue evaluado de acuerdo a los criterios que permiten comparar los resultados entregados por las distintas técnicas utilizadas. Los índices de evaluación de desempeño fueron: tasa de detección versus tasa de falsos positivos, precisión en la detección, exactitud en la detección y MSE generado en las estimaciones del SOH.

Inicialmente, fue comparado el desempeño obtenido con los algoritmos de PF contra el que entregaron los algoritmos de RSPF para cada medida de detección. Los resultados obtenidos, arrojaron que los algoritmos basados en PF presentan un mejor desempeño para los métodos que utilizaron Diferencia de entropía y Divergencia de Kullback-Leibler, mientras que para la Entropía, el mejor desempeño fue obtenido al utilizar algoritmos de RSPF. Para el caso del Test de hipótesis, el algoritmo de PF presentó mejores resultados para menores tasas de falsos positivos, situación que se invierte cuando ésta aumenta.

Con respecto al criterio de precisión, se encuentra que el método de la Divergencia de Kullback-Leibler/PF presenta mejor desempeño que las otras técnicas basadas en medidas de teoría de la información. Sin embargo, la medida de Entropía/RSPF, muestra resultados prácticamente iguales que Divergencia de Kullback-Leibler/PF para bajas tasas de falsos positivos, que corresponde a la zona de mayor interés de análisis.

En cuanto a la exactitud, los resultados analizados para los distintos módulos de detección, no arrojaron diferencias considerables que entreguen una real ventaja comparativa a alguno de los métodos estudiados. Esto se debe a que la exactitud incorpora la medición de VN, y para este caso de estudio en particular, se cuenta con una gran cantidad de valores etiquetados como negativos, los cuales a falta de evidencia que indique lo contrario, son clasificados como negativos aumentando el valor de este índice.

Por último, se debe concluir que debido a la superioridad demostrada por los módulos que utilizan el test de hipótesis frente a los que utilizan medidas de la teoría de la información, en cuanto a mayor tasa de detección para la misma tasa de falsos positivos, éste corresponde al mejor método de detección entre todos los estudiados. Esto se condice con la teoría, ya que el test de hipótesis es lo más cercano al test de Neyman-Pearson, que corresponde al criterio óptimo para distinguir entre dos hipótesis simples. Por esto último, se considera una posible mejora generar una caracterización de la distribución de probabilidad de las regeneraciones del SOH de las baterías de ion-litio que permita implementar el test de Neyman-Pearson a un módulo de detección de estos fenómenos.

5.2 Trabajo futuro

Como trabajo futuro se deja abierta la posibilidad de ahondar en los siguientes temas y líneas de investigación:

- Debido a que el método de test de hipótesis corresponde al método analizado con mayor desempeño, se sugiere diseñar un método de test de hipótesis alternativas, caracterizando la FDP de las regeneraciones para hacer un test de Neyman-Pearson.
- Estudiar y analizar otros métodos mencionados en la literatura para la detección de regeneraciones de estado de salud de baterías.
- Implementar y estudiar el comportamiento real del método de test de hipótesis propuesto en aplicaciones a predicciones EOL.

Referencias

- [1] Olivares, B., Cerda, M., Orchard, M., and Silva, J., "Particle-filtering-based Prognosis Framework for Energy Storage Devices with a Statistical Characterization of State-of-Health Regeneration Phenomena," *IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement* (in press), 2012.
- [2] Kalman, R. E. "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering* 82(1): 35-45 1960.
- [3] Anderson, B. D., Moore, J. B. *Optimal Filtering*, Dover Publications, 1979.
- [4] Tobar, F., "Inferencia de la volatilidad de retornos financieros usando filtro de partículas," M.S thesis, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2010.
- [5] Orchard, M., Vachtsevanos, G., "A Particle Filtering Approach for On-Line Fault Diagnosis and Failure Prognosis," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 31, no. 3-4, pp. 221-246, June 2009.
- [6] Orchard, M., Tobar, F., Vachtsevanos, G., "Outer Feedback Correction Loops in Particle Filtering-based Prognostic Algorithms: Statistical Performance Comparison," *Studies in Informatics and Control*, vol. 18, Issue 4, pp. 295-304, December 2009.
- [7] Andrieu C., Doucet A., Punskeya E., "Sequential Monte Carlo Methods for Optimal Filtering," in A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon (Eds.), *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag, NY, 2001.
- [8] Geweke, J. F. "Bayesian inference in econometric models using Monte Carlo integration," *Econometrica* 57: 1317-1340, 1989.
- [9] Doucet A., de Freitas N., Gordon N., "An introduction to Sequential Monte Carlo methods," in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, Eds. NY: Springer-Verlag, 2001.
- [10] Liu, J. S. "Metropolized independent sampling with comparisons to rejection sampling and importance sampling," *Statistics and Computing* 6(2): 113-119, 1996.
- [11] Kong, A., Liu, J. S. & Wong, W. H. "Sequential imputations and bayesian missing data problems," *Journal of the American Statistical Association* 89(425): 278-288, 1994.

- [12] Rubin, D. *Bayesian Statistics*, Vol. 3, Oxford University Press, chapter Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions, 1988.
- [13] Del Moral, P, *Peynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications, Probability and its Applications*, Springer, New York, 2004.
- [14] Anderson, B. D., Moore, J. B. *Optimal Filtering*, Dover Publications, 1979.
- [15] Ristic, B., Arumlampalam, S., Gordon, N. “Beyond the Kalman Filter: particle filters for tracking applications.” *Artech House*, 2004.
- [16] Haug, A. “A tutorial on bayesian estimation and tracking techniques applicable to nonlinear and non-gaussian processes,” *Technical report*, MITRE, 2005.
- [17] Krishnan, V. *Nonlinear Filtering and Smoothing: An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals and Estimation*, Dover, 2005.
- [18] Huggins, R.A., *Advanced Batteries: Materials Science Aspects*. Springer-Verlag, New York, 2008.
- [19] Johannes, M. S., Polson, N. G., Stroud, J. R. “Optimal filtering of jump-diffusions: Extracting latent states from asset prices,” *Review of Financial Studies* 2559-2599. 2009.
- [20] Doucet, A., Godsill, S., Andrieu, C. “On sequential monte carlo sampling methods for bayesian ltering,” *Statistics and Computing* 10: 197-208, 2000.
- [21] Berzuini, C., Best, N. G., Gilks, W. R., Larizza, C. “Dynamic conditional independence models and markov chain monte carlo methods,” *Journal of the American Statistical Association* 92: 1403-1412, 1997.
- [22] Pérez, J., “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II”, 72-79, 2004
- [23] Shannon, C. E., “A Mathematical Theory of Communication” *The Bell System Technical Journal*, 1948
- [24] Thomas, J. A., Cover, T. M. “Entropy, Relative Entropy and Mutual Information” *Elements of Information Theory*: 12-13, 1991.
- [25] Orchard M., Tang L., Saha B., Goebel K., Vachtsevanos G., “Risk-Sensitive Particle-Filtering-Based Prognosis Framework for Estimation of Remaining Useful Life in Energy Storage Devices, *Studies in Informatics and Control*”, 19, 209-218, 2010.

- [26] Orchard M., Tang L., Vachtsevanos G., “A Combined Anomaly Detection and Failure Prognosis Approach for Estimation of Remaining Useful Life in Energy Storage Devices” *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, Montreal, Quebec, Canada, 2011.
- [27] Orchard M., Olivares B., Cerda M., Silva J., “Anomaly Detection Based on Information-Theoretic Measures and Particle Filtering Algorithms” *Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, Minneapolis, MN, USA, 2012.
- [28] Arulampalam M.S., Maskell S., Gordon N., Clapp T., “A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking” *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50, 174 – 188, 2002.
- [29] Orchard M., Kacprzyński G., Goebel K., Saha B., Vachtsevanos G., “Advances in Uncertainty Representation and Management for Particle Filtering Applied to Prognostics” *International Conference on Prognostics and Health Management PHM*, Denver, CO, USA, 2008.
- [30] Ajgl J., Šimandl M., “Particle Based Probability Density Fusion with Differential Shannon Entropy Criterion” *Proceeding of the 14-th International Conference on Information Fusion ISIF*, Chicago, Illinois, USA, 2011.
- [31] Orguner U., “Entropy calculation in particle filters” *Signal Processing and Communications Applications Conference*, Antalya, Turkey, 2009.
- [32] Olivares B., “Sistema de Pronóstico para el Estado-de-Salud de Acumuladores de Energía Basado en Filtro de Partículas y Caracterización Estadística de Fenómenos de Regeneración”, M.S thesis, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2012

Anexo A: Tablas de Resultados

Resultados de las Pruebas para Test de Hipótesis

Tabla 4: Resultados de la prueba para test de hipótesis

Alfa Nominal	PF			RSPF			Alfa Nominal	PF			RSPF		
	fp	td	MSE	fp	td	MSE		fp	td	MSE	fp	td	MSE
0	2,38	71,18	1,73E-04	9,75	76,85	1,73E-04	15,25	26,16	83,66	2,23E-04	36,77	86,33	2,61E-04
0,25	3,48	74,18	1,70E-04	10,31	77,36	1,78E-04	15,5	27,40	82,76	2,12E-04	35,92	86,98	2,60E-04
0,5	3,69	73,59	1,73E-04	12,12	79,49	2,02E-04	15,75	26,78	82,99	2,23E-04	36,30	85,80	2,80E-04
0,75	4,93	76,97	1,73E-04	11,84	81,15	2,07E-04	16	26,99	83,11	2,05E-04	37,26	86,76	2,66E-04
1	4,70	76,36	1,83E-04	13,60	80,69	2,09E-04	16,25	27,81	83,43	2,32E-04	37,11	86,79	2,65E-04
1,25	5,84	78,12	1,87E-04	13,33	80,99	1,93E-04	16,5	28,21	84,53	2,16E-04	37,49	87,07	2,58E-04
1,5	5,78	77,92	1,90E-04	13,31	81,80	2,03E-04	16,75	29,15	82,70	2,14E-04	36,85	85,34	2,66E-04
1,75	7,15	79,52	1,85E-04	14,84	83,25	2,16E-04	17	28,64	82,67	2,10E-04	37,93	86,80	2,70E-04
2	7,41	79,89	1,85E-04	14,41	83,06	2,01E-04	17,25	29,34	82,74	2,22E-04	37,27	87,87	2,72E-04
2,25	8,29	81,31	1,84E-04	15,90	83,98	2,09E-04	17,5	28,75	81,95	2,19E-04	38,89	85,63	2,76E-04
2,5	8,37	80,67	1,86E-04	16,04	83,69	2,23E-04	17,75	28,36	82,98	2,17E-04	38,76	86,31	2,50E-04
2,75	9,75	82,56	1,81E-04	17,13	84,39	2,13E-04	18	28,94	83,64	2,14E-04	38,93	86,19	2,52E-04
3	9,23	81,90	2,13E-04	17,61	84,25	2,01E-04	18,25	30,01	83,34	2,36E-04	39,07	86,28	2,70E-04
3,25	10,33	82,72	1,92E-04	17,40	84,86	2,04E-04	18,5	29,49	83,23	2,14E-04	38,84	86,59	2,83E-04
3,5	10,07	82,54	2,04E-04	18,66	86,16	2,38E-04	18,75	30,56	82,20	2,22E-04	39,35	86,46	2,55E-04
3,75	11,15	84,15	1,87E-04	18,75	85,09	2,18E-04	19	31,13	82,10	2,26E-04	39,49	87,22	2,89E-04
4	11,37	82,71	2,11E-04	20,36	85,92	2,24E-04	19,25	30,46	83,12	2,13E-04	39,00	87,07	2,70E-04
4,25	11,91	83,44	1,91E-04	20,47	85,19	2,21E-04	19,5	30,68	83,22	2,28E-04	39,66	85,14	2,77E-04
4,5	11,84	83,83	1,88E-04	22,01	87,11	2,14E-04	19,75	30,87	82,72	2,28E-04	40,37	85,11	2,77E-04
4,75	12,87	84,24	2,20E-04	21,06	86,95	2,42E-04	20	31,56	82,46	2,21E-04	39,85	86,23	2,68E-04
5	14,38	84,40	2,04E-04	21,42	86,52	2,37E-04	20,25	31,52	82,54	2,08E-04	40,14	85,74	2,80E-04
5,25	13,87	84,59	2,12E-04	22,42	86,90	2,21E-04	20,5	32,02	82,68	2,31E-04	40,45	85,66	2,78E-04
5,5	14,87	84,57	2,09E-04	22,71	86,76	2,25E-04	20,75	31,71	82,67	2,27E-04	40,59	86,56	3,02E-04
5,75	14,76	83,92	1,91E-04	23,42	87,76	2,26E-04	21	32,29	83,13	2,15E-04	41,52	87,68	2,82E-04
6	15,18	83,66	1,90E-04	22,99	87,04	2,11E-04	21,25	32,30	81,93	2,29E-04	41,24	85,97	2,63E-04
6,25	15,74	85,08	2,07E-04	24,41	87,09	2,20E-04	21,5	32,06	82,28	2,36E-04	41,34	84,57	2,69E-04
6,5	15,97	85,26	2,11E-04	24,72	87,25	2,50E-04	21,75	31,98	82,46	2,27E-04	41,88	86,52	2,81E-04
6,75	16,34	84,89	2,31E-04	24,18	87,73	2,30E-04	22	33,58	82,28	2,34E-04	41,89	85,78	2,85E-04
7	16,60	84,18	1,95E-04	25,66	87,28	2,52E-04	22,25	32,84	83,04	2,29E-04	41,74	85,50	2,69E-04
7,25	17,06	84,80	2,02E-04	25,99	87,10	2,31E-04	22,5	33,62	80,88	2,39E-04	41,93	86,19	2,88E-04
7,5	16,63	84,11	2,15E-04	26,03	86,68	2,31E-04	22,75	33,72	82,32	2,43E-04	41,68	85,06	2,67E-04
7,75	17,54	84,68	2,01E-04	26,60	87,16	2,46E-04	23	33,31	81,71	2,18E-04	42,19	86,90	2,83E-04
8	17,95	84,55	2,30E-04	27,30	87,02	2,39E-04	23,25	33,52	82,24	2,21E-04	42,33	85,09	2,91E-04
8,25	18,34	85,06	2,17E-04	26,95	86,75	2,50E-04	23,5	33,51	82,25	2,37E-04	42,20	85,40	2,87E-04
8,5	18,46	84,40	2,10E-04	27,76	87,64	2,41E-04	23,75	34,58	80,24	2,31E-04	43,10	85,29	2,63E-04

Alfa Nominal	PF			RSPF		
	fp	td	MSE	fp	td	MSE
8,75	18,56	84,64	2,20E-04	27,72	86,83	2,41E-04
9	18,90	85,16	2,12E-04	28,56	88,01	2,15E-04
9,25	19,68	84,74	2,09E-04	28,90	87,15	2,37E-04
9,5	20,17	84,79	2,07E-04	28,81	87,43	2,63E-04
9,75	20,31	83,30	2,25E-04	29,87	87,57	2,44E-04
10	20,50	85,09	2,17E-04	29,69	87,45	2,47E-04
10,25	21,38	85,30	2,25E-04	29,91	87,42	2,41E-04
10,5	20,83	85,24	2,06E-04	30,19	86,52	2,56E-04
10,75	21,52	84,20	2,04E-04	30,65	87,38	2,68E-04
11	21,45	84,36	2,17E-04	31,02	86,06	2,44E-04
11,25	22,01	83,02	1,93E-04	31,50	87,02	2,61E-04
11,5	22,11	84,25	2,06E-04	32,17	86,32	2,50E-04
11,75	22,65	84,18	2,33E-04	31,62	88,61	2,54E-04
12	22,69	85,50	2,16E-04	31,59	86,81	2,51E-04
12,25	23,65	83,30	2,21E-04	32,04	86,37	2,60E-04
12,5	23,33	84,31	2,06E-04	32,19	86,75	2,50E-04
12,75	24,34	83,16	2,10E-04	33,59	87,86	2,70E-04
13	24,31	83,68	2,25E-04	33,46	86,49	2,58E-04
13,25	24,17	83,87	2,39E-04	33,49	86,88	2,78E-04
13,5	24,96	83,17	2,04E-04	34,74	86,84	2,77E-04
13,75	25,34	83,83	2,10E-04	34,47	87,38	2,69E-04
14	25,19	85,02	2,21E-04	34,78	86,90	2,59E-04
14,25	25,16	83,97	2,08E-04	34,86	87,54	2,68E-04
14,5	25,34	83,14	1,99E-04	35,27	87,39	2,54E-04
14,75	25,63	83,12	2,16E-04	34,93	85,24	2,58E-04
15	26,33	83,27	2,24E-04	35,38	85,86	2,56E-04

Alfa Nominal	PF			RSPF		
	fp	td	MSE	fp	td	MSE
24	34,39	82,38	2,25E-04	43,15	87,33	2,90E-04
24,25	34,45	80,64	2,33E-04	43,37	86,26	2,83E-04
24,5	35,01	83,00	2,38E-04	43,08	86,54	2,88E-04
24,75	34,87	81,63	2,31E-04	43,40	87,08	2,98E-04
25	34,80	81,36	2,40E-04	43,33	85,50	2,71E-04
25,25	35,12	81,73	2,33E-04	43,79	86,30	2,82E-04
25,5	35,32	80,62	2,16E-04	43,89	85,39	2,94E-04
25,75	35,56	79,86	2,24E-04	44,76	86,08	2,89E-04
26	35,95	80,24	2,39E-04	43,07	86,07	2,95E-04
26,25	36,31	80,50	2,33E-04	44,48	86,57	2,96E-04
26,5	36,52	81,91	2,20E-04	44,83	84,63	2,89E-04
26,75	36,56	79,89	2,14E-04	44,60	86,50	2,84E-04
27	36,29	79,98	2,25E-04	44,45	85,04	2,99E-04
27,25	36,55	81,27	2,39E-04	44,50	86,96	2,74E-04
27,5	36,26	81,46	2,45E-04	45,70	85,25	2,99E-04
27,75	36,99	81,10	2,44E-04	44,67	86,39	2,88E-04
28	36,72	81,30	2,51E-04	45,52	85,78	2,90E-04
28,25	37,35	79,38	2,38E-04	45,30	84,69	3,10E-04
28,5	37,36	81,25	2,50E-04	45,92	86,27	2,71E-04
28,75	37,85	80,07	2,54E-04	46,40	85,86	2,99E-04
29	37,63	82,52	2,34E-04	46,21	86,23	2,98E-04
29,25	38,08	81,19	2,43E-04	46,92	85,46	3,08E-04
29,5	37,43	80,58	2,37E-04	45,78	85,77	2,88E-04
29,75	37,55	79,28	2,45E-04	46,36	86,06	2,88E-04
30	38,33	80,90	2,70E-04	45,83	85,32	3,06E-04
-	-	-	-	-	-	-

Resultados de las Pruebas para Entropía

Tabla 5: Resultados de la prueba para entropía

Umbr	Regs	Filtro de Partículas							Filtro de Partículas Sensible al Riesgo								
		VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE	VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE
21,85	15	5,13	4,65	9,14	3,23	40,96	0,61	0,91	3,73E-03	4,62	3,07	9,50	2,13	38,89	0,63	0,92	9,75E-04
21,7	15	5,15	5,52	9,11	3,82	41,50	0,58	0,90	4,48E-03	4,54	3,67	9,67	2,55	37,48	0,60	0,91	1,67E-03
21,55	15	5,15	4,86	9,06	3,38	41,74	0,59	0,91	3,43E-03	4,49	3,42	9,66	2,37	37,64	0,60	0,91	2,63E-03
21,4	15	5,27	5,73	8,88	3,98	42,83	0,56	0,90	4,49E-03	4,75	4,28	9,52	2,97	38,83	0,59	0,91	1,22E-03
21,25	15	5,37	6,39	8,80	4,42	43,30	0,54	0,90	5,81E-03	4,85	3,59	9,35	2,49	39,76	0,62	0,91	1,36E-03
21,1	15	5,61	7,72	8,46	5,35	45,35	0,54	0,89	4,99E-03	4,99	3,99	9,23	2,76	40,64	0,59	0,91	1,52E-03
20,95	15	5,77	8,99	8,51	6,22	45,23	0,53	0,89	1,20E-02	5,05	3,80	9,19	2,63	40,90	0,60	0,91	1,61E-03
20,8	15	5,73	11,26	8,29	7,76	46,43	0,49	0,87	9,67E-03	5,32	3,93	8,91	2,73	42,81	0,62	0,91	1,20E-03
20,65	15	6,22	9,98	7,89	6,89	49,37	0,50	0,88	1,19E-02	5,06	4,52	9,10	3,13	41,49	0,61	0,91	1,16E-03
20,5	15	6,27	14,61	7,85	10,09	49,19	0,46	0,85	2,87E-02	5,40	4,91	8,86	3,40	43,04	0,58	0,91	2,74E-03
20,35	15	6,45	15,44	7,67	10,68	50,22	0,41	0,85	1,16E-02	5,58	4,96	8,81	3,44	43,47	0,59	0,91	6,03E-03
20,2	15	6,41	17,15	7,69	11,81	50,27	0,37	0,84	1,25E-02	5,75	4,40	8,44	3,05	45,87	0,63	0,91	6,70E-04
20,05	15	6,66	18,93	7,33	13,04	52,59	0,36	0,83	2,49E-02	5,84	4,83	8,42	3,35	45,90	0,60	0,91	1,72E-03
19,9	15	7,01	25,10	7,11	17,35	53,95	0,32	0,79	5,96E-02	6,18	4,97	8,01	3,45	48,60	0,60	0,91	1,99E-03
19,75	15	7,12	28,15	6,89	19,41	55,20	0,28	0,77	3,83E-02	6,06	6,34	8,15	4,40	47,86	0,55	0,90	2,06E-03
19,6	15	7,51	35,39	6,42	24,46	58,21	0,24	0,73	7,13E-02	6,45	5,93	7,74	4,11	50,41	0,57	0,91	1,31E-03
19,45	15	7,55	43,58	6,27	30,03	59,12	0,20	0,68	9,63E-02	6,39	6,40	7,88	4,43	49,50	0,55	0,91	2,74E-03
19,3	15	8,10	48,26	5,84	33,31	61,99	0,19	0,66	1,08E-01	6,78	6,30	7,45	4,37	52,20	0,56	0,91	1,42E-03
19,15	15	8,07	53,29	5,69	36,76	62,78	0,17	0,62	1,74E-01	6,87	8,13	7,26	5,63	53,20	0,50	0,90	1,91E-03
19	15	8,40	60,84	5,40	41,95	64,53	0,15	0,58	2,27E-01	7,09	9,88	7,15	6,84	54,25	0,47	0,89	1,40E-03
18,85	15	8,51	63,01	5,21	43,44	66,20	0,14	0,57	1,79E-01	7,31	10,75	6,81	7,44	56,36	0,45	0,88	2,00E-03
18,7	15	9,35	78,14	4,39	53,87	71,18	0,12	0,48	4,02E-01	7,45	12,23	6,65	8,46	57,51	0,41	0,88	1,19E-03
18,55	15	9,77	85,58	4,10	59,01	72,93	0,11	0,43	4,85E-01	7,69	17,02	6,25	11,76	59,95	0,35	0,85	1,89E-03
18,4	15	9,95	86,95	3,75	59,99	75,31	0,11	0,43	5,41E-01	8,01	19,94	5,96	13,78	61,96	0,31	0,83	3,05E-03
18,25	15	11,00	98,64	2,82	68,03	81,48	0,11	0,36	7,47E-01	8,24	24,84	5,48	17,16	64,74	0,27	0,80	1,01E-03
18,1	15	10,98	103,82	2,67	71,55	82,65	0,10	0,33	7,41E-01	8,14	32,59	5,34	22,52	65,85	0,22	0,75	3,28E-03
17,95	15	11,69	109,65	2,26	75,61	85,27	0,10	0,29	1,31E+00	7,87	43,61	5,28	30,11	65,93	0,16	0,68	6,03E-03
17,8	15	12,24	115,21	1,69	79,46	88,99	0,10	0,26	1,64E+00	7,81	63,92	4,80	44,07	68,04	0,12	0,56	7,51E-03
17,65	15	12,97	124,19	1,18	85,66	92,17	0,09	0,21	2,40E+00	7,22	72,27	5,19	49,82	65,25	0,09	0,50	1,98E-02
17,5	15	13,03	124,87	1,17	86,11	92,43	0,09	0,21	2,75E+00	8,28	83,09	4,53	57,29	69,90	0,09	0,44	4,15E-02

Resultados de las Pruebas para Diferencia de Entropía

Tabla 6: Resultados de la prueba para diferencia de entropía

Umbr	Regs	Filtro de Partículas							Filtro de Partículas Sensible al Riesgo								
		VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE	VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE
21,85	15	5,16	2,77	9,06	1,92	41,70	0,65	0,92	1,43E-03	5,23	3,47	9,09	2,40	41,26	0,60	0,92	4,02E-03
21,7	15	5,51	3,13	8,79	2,17	43,25	0,64	0,92	1,05E-03	5,69	3,98	8,68	2,75	43,81	0,58	0,92	5,70E-03
21,55	15	5,92	3,44	8,43	2,38	45,98	0,63	0,92	2,93E-03	6,08	4,78	8,30	3,31	46,33	0,57	0,91	1,83E-03
21,4	15	5,91	4,24	8,34	2,94	46,27	0,59	0,92	1,68E-03	6,23	5,29	8,04	3,66	48,30	0,54	0,91	1,67E-03
21,25	15	6,21	4,79	8,05	3,31	48,01	0,58	0,92	6,23E-04	6,45	5,81	7,87	4,02	49,21	0,53	0,91	3,85E-03
21,1	15	6,49	5,10	7,80	3,52	49,58	0,57	0,91	1,09E-03	6,54	6,49	7,71	4,49	50,36	0,51	0,91	2,37E-03
20,95	15	6,48	6,09	7,79	4,21	49,70	0,52	0,91	5,57E-03	6,74	6,97	7,50	4,81	51,63	0,50	0,90	4,58E-03
20,8	15	6,61	6,66	7,64	4,60	50,46	0,51	0,91	1,10E-03	7,01	8,34	7,30	5,76	53,06	0,47	0,90	3,25E-03
20,65	15	6,88	7,60	7,37	5,25	52,22	0,49	0,90	8,48E-04	6,91	8,93	7,36	6,17	52,47	0,45	0,89	2,13E-03
20,5	15	7,13	8,28	7,20	5,72	53,68	0,48	0,90	1,78E-03	7,33	10,92	6,74	7,54	56,48	0,42	0,88	1,01E-03
20,35	15	7,22	9,34	6,92	6,45	55,30	0,45	0,89	8,51E-04	7,48	12,38	6,65	8,55	57,08	0,39	0,88	1,08E-03
20,2	15	7,43	11,44	6,71	7,90	56,54	0,41	0,88	9,85E-04	7,28	14,16	6,84	9,78	55,83	0,36	0,86	4,36E-03
20,05	15	7,49	13,00	6,53	8,98	57,72	0,38	0,87	1,42E-03	7,39	18,05	6,41	12,47	58,36	0,31	0,84	2,52E-03
19,9	15	7,86	14,63	6,15	10,10	60,10	0,36	0,86	7,62E-03	8,08	20,53	5,97	14,17	61,44	0,30	0,83	1,13E-03
19,75	15	7,99	17,96	5,99	12,41	61,62	0,32	0,84	1,94E-03	7,77	26,54	5,95	18,31	61,15	0,24	0,79	2,82E-03
19,6	15	7,64	21,46	6,13	14,83	60,30	0,28	0,82	6,52E-03	7,69	31,49	6,00	21,73	61,34	0,21	0,76	5,85E-03
19,45	15	8,00	25,50	5,68	17,61	63,31	0,26	0,80	2,91E-03	7,71	35,00	5,62	24,17	63,42	0,20	0,74	9,06E-03
19,3	15	8,17	33,35	5,33	23,00	65,12	0,22	0,75	5,39E-03	7,64	42,14	5,60	29,08	63,18	0,16	0,69	1,00E-02
19,15	15	7,59	37,60	5,87	25,95	61,41	0,18	0,72	9,74E-03	6,76	46,91	6,61	32,35	56,28	0,13	0,66	1,94E-02
19	15	7,16	45,23	6,01	31,21	61,16	0,15	0,67	2,03E-02	6,49	47,72	6,72	32,89	55,71	0,12	0,65	2,66E-02
18,85	15	7,02	48,73	6,21	33,62	59,59	0,13	0,65	2,17E-02	6,87	55,78	6,35	38,44	58,13	0,11	0,60	2,47E-02
18,7	15	7,12	52,89	6,17	36,46	59,50	0,12	0,62	2,91E-02	6,30	53,61	7,24	36,97	52,00	0,10	0,61	4,07E-02
18,55	15	6,36	50,57	6,99	34,86	54,13	0,11	0,63	4,25E-02	6,47	57,53	6,94	39,69	53,72	0,10	0,59	4,82E-02
18,4	15	6,37	55,76	7,33	38,45	51,57	0,10	0,60	4,84E-02	6,21	57,93	7,23	39,94	51,88	0,10	0,58	5,58E-02
18,25	15	6,54	59,98	6,90	41,37	53,82	0,10	0,57	5,60E-02	6,52	61,17	7,20	42,19	51,75	0,10	0,56	6,55E-02
18,1	15	6,32	59,38	7,45	40,95	50,49	0,10	0,57	7,46E-02	6,47	61,94	7,42	42,72	50,47	0,10	0,56	7,66E-02
17,95	15	6,42	61,25	7,35	42,22	51,04	0,10	0,56	7,74E-02	6,93	64,31	7,07	44,38	52,71	0,10	0,55	8,98E-02
17,8	15	6,73	63,86	7,23	44,04	51,60	0,10	0,55	7,52E-02	11,20	108,23	1,60	74,63	89,48	0,09	0,30	1,11E-02
17,65	15	7,01	67,57	6,93	46,59	53,84	0,10	0,53	8,17E-02	13,13	122,76	0,42	84,69	97,18	0,10	0,22	1,58E+00
17,5	15	10,41	100,06	3,05	69,00	79,81	0,09	0,35	4,04E-02	14,24	136,16	0,16	93,92	98,92	0,09	0,14	4,07E+00

Resultados de las Pruebas para Divergencia de Kullback Leibler

Tabla 7: Resultados de la prueba para divergencia de Kullback-Leibler

Umbr	Regs	Filtro de Partículas								Filtro de Partículas Sensible al Riesgo							
		VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE	VP	FP	FN	fp [%]	td [%]	Prec	Exac	MSE
2,95	15	6,02	4,37	8,12	3,03	48,09	0,61	0,92	1,98E-03	6,75	7,14	7,46	4,95	52,24	0,54	0,90	9,90E-04
2,9	15	6,24	6,30	7,83	4,37	49,66	0,55	0,91	1,55E-03	6,54	7,69	7,68	5,33	50,55	0,52	0,90	1,32E-03
2,85	15	6,34	6,64	7,83	4,61	49,90	0,55	0,90	8,04E-04	6,53	9,16	7,53	6,35	51,71	0,48	0,89	1,82E-03
2,8	15	6,46	7,06	7,63	4,90	51,07	0,54	0,90	9,64E-04	6,65	8,93	7,51	6,18	51,89	0,49	0,89	1,54E-03
2,75	15	6,58	6,44	7,63	4,46	51,12	0,55	0,91	1,65E-03	6,79	8,73	7,24	6,06	53,62	0,49	0,89	3,15E-03
2,7	15	6,57	7,12	7,66	4,94	50,89	0,53	0,90	2,41E-03	7,08	9,17	7,13	6,35	54,22	0,48	0,89	1,47E-03
2,65	15	6,57	7,80	7,56	5,39	51,63	0,51	0,90	3,05E-03	7,00	11,92	7,02	8,25	55,12	0,44	0,88	2,72E-03
2,6	15	6,59	8,37	7,49	5,79	51,88	0,50	0,90	1,15E-03	7,01	10,58	7,07	7,32	54,74	0,45	0,88	1,82E-03
2,55	15	7,02	9,31	7,15	6,44	54,14	0,49	0,89	1,15E-03	7,27	14,38	6,81	9,95	56,43	0,40	0,86	3,04E-03
2,5	15	6,87	8,78	7,29	6,08	53,20	0,49	0,89	2,01E-03	7,18	12,33	6,84	8,54	56,13	0,42	0,87	2,26E-03
2,45	15	7,09	11,65	7,03	8,06	54,99	0,44	0,88	1,50E-03	7,24	15,10	6,84	10,43	56,21	0,39	0,86	1,58E-03
2,4	15	7,34	13,72	6,91	9,49	55,84	0,42	0,87	2,27E-03	7,36	17,24	6,73	11,92	56,62	0,36	0,84	5,18E-03
2,35	15	7,11	14,47	7,01	10,01	55,06	0,39	0,86	1,27E-03	7,37	18,35	6,57	12,68	57,70	0,35	0,84	3,94E-03
2,3	15	7,33	15,06	6,68	10,42	57,18	0,40	0,86	1,97E-03	7,17	17,08	6,76	11,79	56,53	0,34	0,84	3,29E-03
2,25	15	7,32	16,36	6,73	11,30	56,78	0,37	0,85	2,34E-03	7,45	23,62	6,48	16,30	58,34	0,30	0,81	2,66E-03
2,2	15	7,37	16,24	6,59	11,22	57,40	0,38	0,85	6,11E-03	7,30	21,66	6,65	14,95	57,04	0,31	0,82	3,54E-03
2,15	15	7,38	17,16	6,65	11,82	57,37	0,36	0,85	2,38E-03	7,59	25,39	6,35	17,56	58,99	0,30	0,80	3,95E-03
2,1	15	7,54	16,07	6,55	11,12	58,10	0,38	0,85	1,53E-03	7,72	26,66	6,07	18,41	60,84	0,30	0,79	2,63E-03
2,05	15	7,63	21,93	6,38	15,16	59,05	0,31	0,82	2,59E-03	7,54	30,33	6,00	20,94	61,58	0,26	0,76	4,37E-03
2	15	7,39	21,01	6,56	14,51	58,04	0,32	0,82	3,76E-03	7,58	31,02	6,20	21,44	59,84	0,25	0,76	6,38E-03
1,95	15	7,61	24,67	6,18	17,05	60,40	0,30	0,80	3,81E-03	7,56	37,53	6,06	25,97	60,83	0,22	0,72	7,87E-03
1,9	15	7,55	26,71	6,31	18,47	59,26	0,28	0,79	7,81E-03	7,64	35,55	5,97	24,58	61,65	0,23	0,73	9,92E-03
1,85	15	7,31	29,06	6,49	20,07	58,32	0,27	0,77	3,51E-03	7,76	41,88	5,64	28,94	63,03	0,20	0,69	1,32E-02
1,8	15	7,38	32,17	6,41	22,20	58,87	0,24	0,75	1,11E-02	7,41	45,61	6,10	31,51	60,24	0,18	0,67	1,69E-02
1,75	15	7,77	37,94	5,75	26,20	63,01	0,22	0,72	5,67E-03	7,91	49,04	5,53	33,90	64,11	0,17	0,65	1,37E-02
1,7	15	7,67	37,74	5,93	26,07	61,57	0,21	0,72	9,38E-03	7,58	51,70	5,79	35,65	62,56	0,15	0,63	1,97E-02
1,65	15	7,28	45,51	6,08	31,41	60,39	0,18	0,67	1,40E-02	8,43	59,04	4,85	40,78	68,47	0,15	0,59	2,04E-02
1,6	15	7,74	43,14	5,77	29,79	62,74	0,19	0,69	9,98E-03	8,35	62,10	5,04	42,88	67,27	0,14	0,57	2,63E-02
1,55	15	8,03	49,64	5,49	34,31	64,42	0,17	0,65	1,53E-02	8,29	63,09	5,18	43,58	65,89	0,13	0,56	3,19E-02
1,5	15	7,51	52,76	5,79	36,43	62,18	0,15	0,62	1,99E-02	8,71	68,26	4,76	47,12	68,62	0,12	0,53	2,92E-02

Resultados de las Diferencias de Índices de Desempeño

Tabla 8: Resultados de las diferencias de índices de desempeño

Entropía			Diferencia de Entropía			Divergencia de Kullback Leibler		
Prec(PF)	Exac(PF)	MSE(PF)	Prec(PF)	Exac(PF)	MSE(PF)	Prec(PF)	Exac(PF)	MSE(PF)
-Prec(RSPF)	-Exac(RSPF)	-MSE(RSPF)	-Prec(RSPF)	-Exac(RSPF)	-MSE(RSPF)	-Prec(RSPF)	-Exac(RSPF)	-MSE(RSPF)
-0,02	-0,01	2,75E-03	0,05	0,00	-2,59E-03	0,07	0,01	9,90E-04
-0,03	-0,01	2,81E-03	0,06	0,00	-4,65E-03	0,04	0,01	2,37E-04
-0,01	0,00	7,92E-04	0,07	0,01	1,10E-03	0,07	0,01	-1,02E-03
-0,03	-0,01	3,27E-03	0,05	0,00	1,07E-05	0,05	0,01	-5,77E-04
-0,08	-0,01	4,45E-03	0,04	0,00	-3,23E-03	0,06	0,01	-1,50E-03
-0,06	-0,02	3,48E-03	0,06	0,01	-1,28E-03	0,05	0,01	9,38E-04
-0,08	-0,03	1,04E-02	0,02	0,00	9,91E-04	0,07	0,02	3,24E-04
-0,13	-0,04	8,47E-03	0,04	0,01	-2,15E-03	0,05	0,01	-6,63E-04
-0,11	-0,03	1,07E-02	0,04	0,01	-1,28E-03	0,09	0,03	-1,89E-03
-0,12	-0,06	2,60E-02	0,06	0,02	7,71E-04	0,07	0,02	-2,47E-04
-0,18	-0,06	5,54E-03	0,06	0,02	-2,26E-04	0,05	0,02	-8,59E-05
-0,26	-0,08	1,19E-02	0,05	0,02	-3,38E-03	0,06	0,02	-2,92E-03
-0,24	-0,08	2,32E-02	0,07	0,03	-1,10E-03	0,05	0,02	-2,67E-03
-0,28	-0,12	5,76E-02	0,06	0,04	6,48E-03	0,05	0,01	-1,32E-03
-0,27	-0,13	3,62E-02	0,08	0,05	-8,77E-04	0,07	0,04	-3,23E-04
-0,33	-0,18	7,00E-02	0,07	0,06	6,72E-04	0,07	0,03	2,57E-03
-0,35	-0,23	9,36E-02	0,06	0,06	-6,16E-03	0,07	0,05	-1,57E-03
-0,37	-0,25	1,07E-01	0,05	0,06	-4,65E-03	0,08	0,07	-1,10E-03
-0,33	-0,27	1,72E-01	0,05	0,06	-9,64E-03	0,05	0,05	-1,78E-03
-0,32	-0,31	2,26E-01	0,03	0,02	-6,37E-03	0,06	0,06	-2,61E-03
-0,32	-0,32	1,77E-01	0,02	0,05	-2,99E-03	0,08	0,08	-4,06E-03
-0,29	-0,40	4,01E-01	0,02	0,01	-1,17E-02	0,06	0,05	-2,11E-03
-0,24	-0,42	4,84E-01	0,01	0,04	-5,74E-03	0,07	0,08	-9,72E-03
-0,21	-0,41	5,38E-01	0,00	0,01	-7,43E-03	0,07	0,08	-5,76E-03
-0,17	-0,44	7,46E-01	0,00	0,01	-9,48E-03	0,05	0,07	-8,07E-03
-0,12	-0,43	7,38E-01	0,00	0,02	-1,99E-03	0,06	0,09	-1,03E-02
-0,07	-0,39	1,30E+00	0,00	0,02	-1,23E-02	0,04	0,08	-6,39E-03
-0,02	-0,29	1,63E+00	0,00	0,25	6,41E-02	0,06	0,11	-1,63E-02
0,00	-0,29	2,38E+00	0,00	0,31	-1,50E+00	0,05	0,08	-1,66E-02
0,00	-0,23	2,71E+00	0,00	0,20	-4,03E+00	0,03	0,09	-9,27E-03