



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS DE OBSERVADORES FRACCIONARIOS DE ESTADO EN SISTEMAS
DINÁMICOS LINEALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL ELÉCTRICA

CAROLINA ALEJANDRA PACHECO OÑATE

PROFESOR GUÍA:
MANUEL DUARTE MERMOUD

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
MARCOS ORCHARD CONCHA
HÉCTOR AGUSTO ALEGRÍA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por Proyecto FONDECYT No. 1120453

SANTIAGO DE CHILE
2014

**RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE:** Ingeniera Civil Eléctrica
POR: Carolina Alejandra Pacheco Oñate
FECHA: 27/01/2014
PROFESOR GUÍA: Manuel Duarte Mermoud

ANÁLISIS DE OBSERVADORES FRACCIONARIOS DE ESTADO EN SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES

En el último tiempo, la utilización de derivadas no enteras ha arrojado resultados interesantes en algunas aplicaciones, pues se ha encontrado que ecuaciones diferenciales de orden fraccionario permiten describir de mejor manera la dinámica de ciertos fenómenos. Su uso ha sido validado en ámbitos tan diversos como carga de baterías o sociología, principalmente debido a que incorporan el concepto de memoria en ellas.

La observación de estados de un sistema dinámico es un problema que ha sido ampliamente estudiado debido a que permite acceder a información relevante del mismo, para ser usada con fines de control. En la literatura existen numerosos resultados con respecto a observadores fraccionarios, sin embargo el estudio de observadores cuyo orden no coincide exactamente con el del sistema a observar, no ha sido convenientemente abordado.

En este contexto, en el presente trabajo de título se plantea el diseño un observador de estado de orden fraccionario para sistemas lineales SISO (*Single Input - Single Output*), de orden entero y parámetros conocidos. Además se analiza su desempeño y se compara con observadores de orden entero, en cuanto a la rapidez de convergencia del error de observación, y a su robustez frente a cambios en los parámetros del sistema original y presencia de perturbaciones.

Mediante desarrollos teóricos y simulaciones, se analiza primero el desempeño del observador de Luenberger de orden fraccionario para una planta de orden entero. Éste se realiza tanto desde el punto de vista de la estabilidad del sistema como de la influencia de distintos parámetros en su desempeño, considerando el caso ideal y también en presencia de perturbaciones y desconocimiento en los parámetros de la planta. Posteriormente se aborda la problemática del diseño de un observador de orden fraccionario, que otorgue alguna ventaja con respecto al desempeño del observador de Luenberger fraccionario. Se analiza la obtención de observadores a partir de una dinámica deseada para el error de observación, y finalmente se presenta un observador fraccionario que sigue la estructura de Luenberger fraccionario, pero incorporando una modificación en la entrada que el observador considera.

Como resultado del estudio se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad de los esquemas de observación fraccionarios planteados y ventajas de los mismos con respecto al observador de Luenberger de orden entero, en cuanto a la velocidad de convergencia para $0 < \alpha < 1$ y también respecto de la atenuación de perturbaciones de alta frecuencia para $1 < \alpha < 2$. En cuanto a sus desventajas, los observadores fraccionarios estudiados se restringen a plantas estables, con lo cual su velocidad de convergencia está limitada por las características de la planta y no puede ser manejada arbitrariamente, como en el caso Luenberger de orden entero.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Maritza y Héctor, quienes han estado siempre apoyándome y cuyo cariño y comprensión es uno de los motores fundamentales que me ha movido durante todos estos años. Agradezco también a mi hermano Nicolás, quien desde su particular carisma ha sido un gran ejemplo, y me recuerda a diario que uno nunca deja de ser niño. Junto a ellos agradezco toda la preocupación y apoyo de mi extensa familia, de mi Nonna, mis tíos, mis primos y sus respectivas familias.

Cómo no agradecer a mis amigos, aquellos junto a quienes he crecido desde el liceo y que hemos aprendido a conocernos y reconocernos en nuestras distintas etapas. También agradezco a aquellos amigos que se han ido sumando a mi vida en el camino universitario, les tengo un gran cariño y sin duda ustedes harán que recuerde estos 6 últimos años llenos de lindas experiencias.

Finalmente agradezco a mis profesores, en particular al profesor Manuel Duarte, quien me dio a la posibilidad de trabajar junto a su grupo de investigación, y cuya guía en el desarrollo de este trabajo ha sido fundamental. Agradezco especialmente también al profesor Marcos Orchard, quien con sus clases me ha hecho ver lo interesante que puede llegar a ser la carrera que estudié, y los múltiples aportes que con ella se pueden realizar. A través de ellos quiero agradecer a todos mis profesores, desde mi enseñanza básica hasta la actualidad, quienes han sabido motivar mis intereses y me han enseñado a dar lo mejor de mí en cada uno de los desafíos que enfrento.

A todos ustedes, muchas gracias.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Tratamiento del Tema en la Literatura	2
1.3. Objetivos	2
1.3.1. Objetivos Generales	3
1.3.2. Objetivos Específicos	3
1.4. Metodología y Principales Resultados	3
1.5. Estructura de la Memoria	4
2. Fundamentos y Conceptos Básicos	6
2.1. Fundamentos del Cálculo Fraccionario	6
2.2. Sistemas Fraccionarios	9
2.3. Análisis de Estabilidad de Sistemas Fraccionarios	13
2.4. Observadores de Estado	16
2.4.1. Análisis de Desempeño de Observadores de Estado	18
2.5. Control por Realimentación de Estado	20
2.5.1. Principio de Separación	22
3. Observador del tipo Luenberger de orden Fraccionario	24
3.1. Planteamiento General	24
3.2. Análisis de Estabilidad	25
3.2.1. Consideraciones previas	25
3.2.2. Término dependiente de la entrada $u(t)$	26
3.2.3. Término dependiente de las condiciones iniciales de la planta $x(0)$	27
3.2.4. Término dependiente de las condiciones iniciales del observador $\hat{x}^{(k)}(0)$	28
3.2.5. Resumen	29
3.3. Análisis de Desempeño en Caso Ideal	29
3.3.1. Influencia de la entrada $u(t)$	30
3.3.2. Influencia del orden de derivación α	34
3.3.3. Influencia de la matriz de evolución A	37
3.3.4. Influencia del factor de corrección F	39
3.3.5. Influencia de las condiciones iniciales	41
3.4. Análisis de Desempeño en Caso No Ideal	43
3.4.1. Desconocimiento en parámetros	44
3.4.2. Presencia de perturbaciones	46

4. Diseño de Observadores Fraccionarios para Plantas Enteras	49
4.1. Diseño de Observadores con Dinámica Deseada	49
4.1.1. Dinámica de orden Entero	50
4.1.2. Dinámica de orden Fraccionario	52
4.2. Observador Fraccionario con Modificación en la Entrada	55
4.2.1. Planteamiento General	55
4.2.2. Análisis de Estabilidad	55
4.2.3. Análisis de Desempeño en Caso Ideal	57
4.2.4. Análisis de Desempeño en Caso No Ideal	65
4.2.5. Regulación por Realimentación de Estado mediante Observadores	70
5. Conclusiones y Trabajo Futuro	76
5.1. Conclusiones	76
5.2. Trabajo Futuro	78
Bibliografía	79

Índice de tablas

3.1.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para entradas constantes	32
3.2.	Amplitud oscilación persistente del error de observación para entrada sinusoidal . .	33
3.3.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos valores de α	35
3.4.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos A	37
3.5.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para F determinado	39
3.6.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos F	40
3.7.	Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintas CI	42
3.8.	Condiciones Iniciales de la planta y el observador	42
3.9.	Desempeño observador Luenberger fraccionario con $\Delta A \neq 0$ ó $\Delta B \neq 0$	45
3.10.	RMSE de observador en presencia de perturbación a la salida	46
4.1.	Desempeño observador fraccionario modificado para distintos valores de α	58
4.2.	Desempeño observador fraccionario modificado para distintos A	59
4.3.	Desempeño observador fraccionario modificado para F determinado	61
4.4.	Desempeño observador fraccionario modificado para distintos F	63
4.5.	Desempeño observador fraccionario modificado para distintas CI	65
4.6.	Desempeño observador fraccionario modificado con $\Delta A \neq 0$ y $\Delta B = 0$	66
4.7.	Desempeño observador fraccionario modificado con $\Delta A = 0$ y $\Delta B \neq 0$	67
4.8.	Desempeño observadores en regulación sin perturbación.	72
4.9.	Valores de la ganancia del filtro para perturbación de $100 \left[\frac{rad}{s} \right]$	75

Índice de figuras

2.1.	Funciones de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$	10
2.2.	Dominio de estabilidad sistemas fraccionarios LIT (2.25)	14
2.3.	Esquema de control por realimentación de estado	21
2.4.	Esquema control por realimentación de estado mediante observador	23
3.1.	Error de observación Luenberger fraccionario para entradas constantes	31
3.2.	Error de observación Luenberger fraccionario para entradas sinusoidales	33
3.3.	Ganancia del error de observación en función de la frecuencia	33
3.4.	Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de α	34
3.5.	Error de observación Luenberger fraccionario para $\alpha \approx 1$ con CI no nulas	36
3.6.	Error de observación Luenberger fraccionario para $\alpha \approx 1$ con CI nulas	36
3.7.	Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de A	38
3.8.	Error de observación Luenberger fraccionario para F determinado	39
3.9.	Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de F	41
3.10.	Error de observación Luenberger fraccionario para distintas condiciones iniciales	43
3.11.	Error de observación Luenberger fraccionario con A inestable y $\Delta A \neq 0$	44
3.12.	Error de observación con desconocimiento de parámetros.	45
3.13.	Error de observación con perturbación en la salida $y(t) = C^T x(t) + n(t)$	47
3.14.	Diagrama de Bode	48
4.1.	Ejemplo de error de observación con observador fraccionario dinámica deseada	54
4.2.	Error con observador fraccionario modificado para distintos valores de α	58
4.3.	Error de observación con observador fraccionario modificado para distintos A	60
4.4.	Error de observación con observador fraccionario modificado para F determinado	61
4.5.	Error con observador fraccionario modificado para distintos valores de F	62
4.6.	Error de observación con observador fraccionario modificado para distintas CI	64
4.7.	Error de observación observador fraccionario modificado A inestable y $\Delta A \neq 0$	66
4.8.	Error de observación con $\Delta A \neq 0$ para observador fraccionario modificado	67
4.9.	Error de observación con $\Delta B \neq 0$ para observador fraccionario modificado	68
4.10.	Error de observación con perturbación en la salida $y(t) = C^T x(t) + n(t)$	69
4.11.	Regulación mediante observador Luenberger fraccionario con $n(t) = 0$	71
4.12.	Regulación mediante observador fraccionario modificado con $n(t) = 0$	72
4.13.	Regulación mediante observador Luenberger fraccionario con $n(t) = 10\sin(100t)$	73
4.14.	Regulación mediante observador fraccionario modificado con $n(t) = 10\sin(100t)$	74
4.15.	Diagrama de Bode atenuación de perturbación en estimación de estados y salida	75

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo de título se aborda la problemática del diseño de observadores de orden fraccionario para plantas de orden entero, tanto desde la perspectiva de estabilidad del sistema como de la influencia que tienen distintos factores en su desempeño.

1.1. Motivación

El uso de derivadas de orden no entero ha demostrado ser útil en la modelación de sistemas en los que el concepto de memoria tiene gran importancia, y ha encontrado aplicación en ámbitos que involucran sismología [1], sociología [2] [3] y electrónica [4], entre otros.

A pesar de que el interés en el área del cálculo fraccionario ha tenido un crecimiento importante en los últimos años, la idea principal que la sustenta no es algo nuevo. Ya en 1695 los destacados matemáticos L'Hopital y Leibniz planteaban la inquietud de considerar derivadas de orden no entero, señalando este último que corresponde a una idea que «llevará a una paradoja, de la cual algún día se obtendrán consecuencias útiles»[5].

Y así fue, la idea vagamente planteada por los matemáticos a finales del siglo XVII, con el tiempo fue tomando forma y creando una teoría que se sustenta actualmente en la definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville [6], y las diferentes formulaciones planteadas para la derivada fraccionaria como la derivada de Riemann-Liouville, la derivada de Caputo y derivada de Grünwald-Letnikov [7].

Con su formalización, el cálculo fraccionario ha ido encontrando aplicaciones no sólo en la matemática, sino que en la modelación, control y sincronización de sistemas. A modo general la idea de considerar derivadas de orden no entero amplía las posibilidades que se tienen en el diseño de cualquier tipo de esquema, pues incorpora un grado de libertad para el orden de derivación.

Paralelamente, el estudio de los observadores de estados en sistemas dinámicos ha sido ampliamente abordado debido que permite acceder a información del sistema sin tener que modificarlo. Esto permite, por ejemplo, tener una estimación del estado interno de un sistema sin la necesidad

de incorporar sensores, lo cual a gran escala se traduce en un beneficio económico. Este acceso al estado interno del sistema mediante observadores permite sobrellevar una limitación importante de gran parte de la teoría de control clásico, pues sus desarrollos teóricos se sustentan en el acceso al estado del sistema [8].

Por lo tanto, la incorporación de derivadas de orden no entero en la observación de plantas enteras provee un elemento de diseño adicional, lo cual podría presentar ventajas importantes con respecto a los observadores con los que se resuelve la problemática actualmente.

1.2. Tratamiento del Tema en la Literatura

La observación de estado en sistemas lineales de orden entero y parámetros conocidos tiene numerosas soluciones en la literatura. Fue abordado en un principio desde el punto de vista discreto y estocástico en 1960 por Kalman [9] con foco en la predicción y estimación, y posteriormente su solución más clásica para el caso continuo y determinístico se presentó de la mano de Luenberger en 1964 [10].

Luego, el problema ha sido ampliado al caso de sistemas no lineales [11] [12] y sistemas variantes en el tiempo [13] [14], sustentando sus soluciones en los resultados de estabilidad conocidos para sistemas de orden entero.

En la observación de sistemas de orden fraccionario también se han obtenidos interesantes resultados, los que abordan sistemas lineales, no lineales [15] [16] [17] y con entradas desconocidas [18]. Éstos emplean observadores de orden fraccionario, por lo cual se sustentan principalmente en los resultados teóricos de estabilidad [19] y observabilidad [20] presentados por Matignon.

En general las soluciones propuestas en el ámbito determinístico y con parámetros conocidos, tanto en el caso fraccionario como en el de orden entero, consisten en formular observadores que conservan la misma estructura de la planta a observar, a la cual se le incorpora un factor de corrección dependiente del error de estimación de la salida, lo cual permite que tanto el error de estimación de estado como el asociado a la salida sean estables e idealmente converjan a cero.

Si bien la teoría al respecto es bastante sólida y se ha estudiado en profundidad, el estudio de observadores de estado cuyo orden no coincide exactamente con el de la planta a observar no ha sido convenientemente abordado, y es ahí donde este trabajo de título enfoca su aporte.

1.3. Objetivos

En este contexto e intentando abordar la problemática planteada, los objetivos generales y específicos que se persiguen en este trabajo de título se detallan a continuación.

1.3.1. Objetivos Generales

- Diseñar un observador de estado de orden fraccionario para sistemas lineales SISO de orden entero y parámetros conocidos.
- Analizar su desempeño y compararlo con observadores de orden entero en cuanto a la rapidez de convergencia del error de observación y a su robustez ante cambios en los parámetros del sistema original y en presencia de perturbaciones.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Implementar, simular y comparar el desempeño de un observador del tipo Luenberger fraccionario aplicado a una planta de orden entero con respecto al desempeño del observador de Luenberger de orden entero.
- Diseñar, implementar y simular un observador de orden fraccionario para un sistema de orden entero.
- Comparar el desempeño del observador diseñado con el desempeño del observador de Luenberger, en cuanto a convergencia del error de observación y a su robustez ante cambios paramétricos y en presencia de perturbaciones.
- Analizar la problemática de la estabilidad en sistemas con observadores fraccionarios aplicados a plantas de orden entero.

1.4. Metodología y Principales Resultados

En principio se analiza, mediante desarrollo teórico y simulaciones, el desempeño del observador Luenberger de orden fraccionario en una planta de orden entero. Se aborda desde el punto de vista de la estabilidad del sistema y se estudia la influencia de distintos parámetros en su desempeño en caso ideal, en presencia de perturbaciones y también considerando desconocimiento en los parámetros de la planta.

Posteriormente se estudia la problemática de diseño de un observador de orden no entero que otorgue alguna ventaja con respecto al desempeño del observador Luenberger fraccionario. Se plantea la obtención de observadores a partir de una dinámica deseada en el error de observación, y finalmente se propone un observador de orden no entero que sigue la estructura de Luenberger fraccionario pero incorpora una modificación en la entrada que el observador considera.

Todas las simulaciones que se presentan son realizadas en Matlab-Simulink utilizando el toolbox «ninteger v2.3» [21], mediante la aproximación de «Crone» para el término s^α con $\alpha \in (-1, 1)$.

Debido a que los sistemas resultantes no son enteros ni fraccionarios de orden conmensurable, no es posible utilizar los clásicos resultados teóricos que se emplean en la mayoría de los desarrollos relacionados con observadores de estado. Por lo tanto el análisis teórico de convergencia se basa principalmente en el Teorema del Valor Final Extendido [22] con las representaciones en el dominio de Laplace que se tienen para los operadores de orden no entero.

Se desestima la utilidad de los observadores fraccionarios obtenidos mediante una dinámica deseada para el error de observación, pues corresponden a representaciones no enteras equivalentes al observador Luenberger de orden entero, o bien limitan su aplicación a plantas de primer orden, las que no son de interés en la observación pues se tiene acceso a su estado, o una ponderación de él, mediante la salida.

Se obtienen condiciones suficientes de estabilidad para los esquemas de observación fraccionarios planteados y ventajas de los mismos con respecto al observador Luenberger de orden entero en cuanto a la velocidad de convergencia para $0 < \alpha < 1$, y en cuanto a la atenuación de perturbaciones de alta frecuencia para $1 < \alpha < 2$.

Una de las principales desventajas identificadas en los observadores fraccionarios estudiados es que restringen su funcionamiento a plantas estables, lo cual limita su velocidad de convergencia a las características de la planta y no es posible manejarla arbitrariamente como en el caso Luenberger de orden entero.

1.5. Estructura de la Memoria

El desarrollo del presente documento se estructura en distintos capítulos, cuyo contenido se resume a continuación.

En el Capítulo 2 se presentan las definiciones básicas relacionadas con el cálculo fraccionario, para posteriormente abordar la formulación de sistemas de orden no entero y los resultados importantes que existen con respecto al análisis de su estabilidad. Además se presentan los fundamentos de la observación de estado tanto en el caso fraccionario como en el de orden entero, y finalmente se aborda una de sus aplicaciones principales: el control por realimentación de estado basado en observadores.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio del observador de Luenberger de orden fraccionario aplicado a una planta de orden entero. Se realiza el planteamiento general del problema a estudiar y se presenta uno de los aportes de este trabajo de título: un análisis detallado de su estabilidad realizado en el dominio de Laplace que permite encontrar condiciones suficientes para la estabilidad BIBO (*Bounded Input - Bounded Output*) del esquema de observación. Junto con esto se estudia cuidadosamente, mediante simulaciones y desarrollo teórico, la influencia de distintos parámetros en el desempeño del observador de Luenberger fraccionario, su robustez ante desconocimiento en los parámetros del sistema y en presencia de perturbaciones a la salida de la misma.

En el Capítulo 4 se aborda la problemática de diseñar un observador de orden fraccionario que, aplicado a una planta de orden entero, presente alguna ventaja con respecto al observador Luenberger fraccionario estudiado en el Capítulo 3. Se plantea la obtención de un observador de estados a partir de una dinámica para el error de observación que sea fácil de analizar, por lo cual se elige que el error siga dinámica autónoma lineal de orden entero u orden fraccionario. Los resultados obtenidos no son satisfactorios por lo cual se propone un nuevo observador, diferente a los encontrados en la literatura, que conserva la estructura del observador Luenberger de orden fraccionario pero considera una modificación en la entrada del mismo, lo cual constituye otro de

los aportes importantes del presente trabajo de título. Se analiza este observador modificado, tal como se hizo en el Capítulo 3 para el caso de Luenberger fraccionario, desde el punto de vista de la estabilidad encontrando condiciones suficientes para su estabilidad asintótica, se estudia la influencia de distintos parámetros en su desempeño en caso ideal, y se analiza su robustez ante desconocimiento en los parámetros y presencia de perturbaciones. Además se presenta un ejemplo de aplicación de los observadores fraccionarios en la regulación de una planta de segundo orden en presencia de perturbaciones de alta frecuencia.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las principales conclusiones obtenidas del desarrollo realizado y se proponen temas de interés que no han sido abordados en su totalidad en este trabajo de título pero que pudieran llevar a interesantes resultados como trabajo futuro.

Capítulo 2

Fundamentos y Conceptos Básicos

Para contextualizar el tema del presente trabajo de título existen varios aspectos que es necesario abordar. En particular en este capítulo se presenta una descripción de los conceptos básicos asociados al cálculo fraccionario, los aspectos fundamentales de los sistemas de orden fraccionario, los resultados relevantes que existen en la literatura acerca del análisis de estabilidad de sistemas dinámicos, el estado del arte con respecto al diseño de observadores de estado, y una breve descripción de los controladores por realimentación de estado.

2.1. Fundamentos del Cálculo Fraccionario

De acuerdo a [5] la idea del cálculo fraccionario, entendido como la posibilidad de considerar derivadas de orden no entero, tuvo su primer registro en una conversación por correspondencia entre L'Hopital y Leibniz en el año 1695, pero pasó más de un siglo para que en 1823 tuviera su primera aplicación en la física de la mano de Abel [23], quien resolvió el problema de la curva tautócrona mediante integrales y derivadas fraccionarias de orden $\frac{1}{2}$. Desde ese entonces, y en particular en los últimos años, el cálculo fraccionario ha sido foco de atención debido a que numerosos fenómenos físicos han sido modelados de manera efectiva con dinámica de orden fraccionario, en particular fenómenos en los cuales el concepto de memoria cobra importancia como lo son la ocurrencia de terremotos [1], la dinámica de carga y descarga de condensadores [4], la propagación de enfermedades [24] e incluso la dinámica social de emociones como la felicidad [2] o el amor [3].

Existen varias definiciones para las derivadas e integrales de orden no entero, que abordan incluso el caso de derivadas de orden complejo, sin embargo en este trabajo sólo se consideran las derivadas de orden real ya que es más común encontrar su aplicación en la ingeniería.

De acuerdo a [6] se define la integral de orden real α , condensando los resultados de Riemann y Liouville, como se muestra en (2.1), donde $\Gamma(\cdot)$ corresponde a la conocida función Gamma que se muestra en (2.2). Esta definición de integral fraccionaria también puede ser presentada como la convolución de $f(t)$ con el kernel $Y_\alpha(t)$ que se define en (2.3).

Definición 2.1 [6] *Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville*

$${}_{t_0}J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (2.1)$$

Definición 2.2 [6] *Función Gamma*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad \forall z \in \mathfrak{R} \quad (2.2)$$

Definición 2.3 [7] *Kernel asociado a la integral fraccionaria de Riemman-Liouville*

$$Y_\alpha(t) \triangleq \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \in L_{loc}^1(\mathfrak{R}^+) \quad (2.3)$$

$$t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Dado que la integral de orden entero tiene una conocida interpretación geométrica al representar el área bajo la curva de la función, una de las interrogantes importantes que surge en el cálculo fraccionario es cómo extender esta interpretación a la definición de la integral de orden no entero. En [25] se sugiere una interpretación física de la integral fraccionaria al escribirla como se muestra en (2.4). De este modo, la integral fraccionaria se relaciona con la integral de orden entero en términos de una escala de tiempo cambiante y no homogénea definida por $g_t(\tau)$, lo cual según el autor está en línea con la visión física actual que se tiene del tiempo y el espacio.

$${}_{0}J_t^\alpha = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \quad (2.4)$$

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha - (t-\tau)^\alpha)$$

A partir de la definición de integral fraccionaria dada por (2.1) han surgido diferentes formulaciones para la derivada fraccionaria, las que intentan recuperar la propiedad que se tiene en el caso de orden entero: $D^n J^n = I$, es decir, que la derivada n -ésima constituye una inversa por la izquierda de la integral de orden n . A continuación se muestran las dos formulaciones más utilizadas en el ámbito de la ingeniería: Derivada de Riemann-Liouville y Derivada de Caputo.

- **Derivada de Riemann-Liouville**

Presentada como consecuencia directa de la propiedad buscada, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α que se presenta en (2.5) corresponde a la aplicación de la derivada de orden entero m a la integral fraccionaria de orden $m - \alpha$, donde $m - 1 \leq \alpha < m$ con $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$.

Definición 2.4 [26] *Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville*

$${}^R D_t^\alpha f(t) = D^m {}_{t_0} J_t^{m-\alpha} (f(t)) = \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \right) \quad (2.5)$$

Algunas de sus propiedades más relevantes se presentan a continuación [7], considerando $x(t) \in C^m[0, \infty)$:

1. ${}^R D_t^\alpha [{}^R J_t^\alpha (x(t))] = x(t)$ es válido para $m = 1$.
2. ${}^R J_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha x(t)) = x(t) - \sum_{k=1}^m \left(\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} [{}^R D_t^{\alpha-k} x(t)]_{t=0} \right)$.
3. ${}^R D_t^\alpha [K] = \frac{K t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, donde K es una constante.
4. $\lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} [{}^R D_t^\alpha x(t)] = \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}}$.
5. $\lim_{\alpha \rightarrow (m)^-} [{}^R D_t^\alpha x(t)] = \frac{d^m x(t)}{dt^m}$.

• **Derivada de Caputo**

Propuesta en 1967 por Caputo, la derivada fraccionaria del mismo nombre se muestra en (2.6) y corresponde a integrar en un orden $m - \alpha$ la m -ésima derivada de la función, donde $m - 1 < \alpha < m$, con $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha > 0$.

Definición 2.5 [26] *Derivada fraccionaria de Caputo*

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}_{t_0} J_t^{m-\alpha} (D^m f(t)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \quad (2.6)$$

A continuación se presentan algunas de sus propiedades más importantes [7]:

1. ${}^C D_t^\alpha [{}^C J_t^\alpha (x(t))] = x(t)$ es válido para $m = 1$ si $x(t) \in C^m[0, \infty)$.
2. ${}^C J_t^\alpha ({}^C D_t^\alpha x(t)) = x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0)$ si $x(t) \in C^m[0, \infty)$.
3. ${}^C D_t^\alpha [K] = 0$, donde K es una constante.
4. $\lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} [{}^C D_t^\alpha x(t)] = \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} - x^{(m-1)}(0)$.
5. $\lim_{\alpha \rightarrow (m)^-} [{}^C D_t^\alpha x(t)] = \frac{d^m x(t)}{dt^m}$.
6. Si $x(t) \in C^1[0, T]$ para algún $T > 0$, entonces ${}^C D_t^{\alpha_1} [{}^C D_t^{\alpha_2} (x(t))] = {}^C D_t^{\alpha_1 + \alpha_2} (x(t))$, donde $t \in [0, T]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}^+$ y $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.
7. Si $x(t) \in C^m[0, T]$ para algún $T > 0$, entonces $({}^C D_t^\alpha x)(0) = 0$.

Se aprecia que existen diferencias importantes entre ambas definiciones, en particular con respecto a sus propiedades. Mientras que la derivada de Riemann-Liouville tiene la ventaja de ser un puente entre las derivadas de orden entero, pues en el límite en que el orden de derivación α tiende a un valor entero el operador derivada fraccionaria converge al operador derivada de orden entero, la derivada de Caputo conserva algunas de las propiedades más emblemáticas de la derivada de orden entero: aditividad de los órdenes de derivación al aplicar el operador derivada repetidamente, y nula derivada para constantes.

Es de interés señalar además que la derivada de Caputo considera directamente la derivada de orden entero de la función y , al estar integrándolas, sus condiciones iniciales. De este modo, las condiciones iniciales que requiere son interpretables físicamente, razón por la cual en el ámbito de la ingeniería se prefiere generalmente la derivada de Caputo (2.6) por sobre la definición dada por Riemann-Liouville (2.5). De todos modos existen relaciones entre ambas, como las que se muestran en (2.7) y (2.8), de las cuales se desprende que si las condiciones iniciales de las $m - 1$ primeras derivadas de la función son nulas, las definiciones son equivalentes.

$${}^R_0D_t^\alpha(x(t)) = {}^C_0D_t^\alpha(x(t)) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{(k)}(0^+) \quad (2.7)$$

$${}^C_0D_t^\alpha(x(t)) = {}^R_0D_t^\alpha\left(x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} x^{(k)}(0^+)\right) \quad (2.8)$$

Las transformadas de Fourier y Laplace son herramientas fundamentales en el análisis de sistemas, por lo cual las representaciones en el dominio de Laplace de la integral fraccionaria y las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo se presentan en (2.9), (2.10) y (2.11) respectivamente, y la representación en Fourier de la integral fraccionaria se presenta en (2.12).

$$\mathcal{L}({}_0J_t^\alpha f(t)) = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}({}^R_0D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}^R_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}({}^C_0D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} [f^{(k)}(0)] \quad (2.11)$$

$$\mathcal{F}({}_0J_t^\alpha f(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \mathcal{F}(f(t)) = (j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \quad (2.12)$$

2.2. Sistemas Fraccionarios

Se denominan sistemas fraccionarios aquellos cuya evolución está regida por ecuaciones de orden no entero. La típica ecuación de un sistema dinámico fraccionario escalar, lineal, invariante en el tiempo y de parámetros conocidos es la que se presenta en (2.13), en la que D^α representa el operador derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathfrak{R}$ en cualquiera de sus formulaciones, $x(t) \in \mathfrak{R}$ corresponde al estado del sistema dinámico, $u(t) \in \mathfrak{R}$ es la entrada externa forzante, y $\lambda \in \mathfrak{R}$ es un parámetro constante que se supone conocido.

$$D^\alpha x(t) + \lambda \cdot x(t) = u(t) \quad (2.13)$$

Considerando la derivada de Caputo, la ecuación (2.13) en el dominio de Laplace tiene la expresión que se presenta en (2.14).

$$X(s) = \frac{1}{(s^\alpha + \lambda)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} [x^{(k)}(0)] + \frac{1}{(s^\alpha + \lambda)} \cdot U(s) \quad (2.14)$$

De acuerdo a [5] se tiene la propiedad que se muestra en (2.15), la cual es útil para encontrar la solución en el tiempo de la expresión (2.14).

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) \quad (2.15)$$

Utilizando (2.15) con $\beta = k + 1$ para la solución homogénea y $\beta = \alpha$ para la particular, se tiene que la solución de la ecuación (2.13) al considerar la derivada de Caputo es (2.16), donde m corresponde al mínimo entero mayor que α , $b_k = x^{(k)}(0)$ con $k \in [0, m - 1]$ corresponden a las m condiciones iniciales requeridas, y $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ corresponde a la función de Mittag-Leffler de dos parámetros definida en (2.17), la cual representa la matriz de transición de estados en el caso fraccionario [27].

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t^k E_{\alpha,k+1}(-\lambda t^\alpha) + \int_0^t t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) u(t - \tau) d\tau \quad (2.16)$$

Definición 2.6 *Función de Mittag-Leffler de dos parámetros*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad (2.17)$$

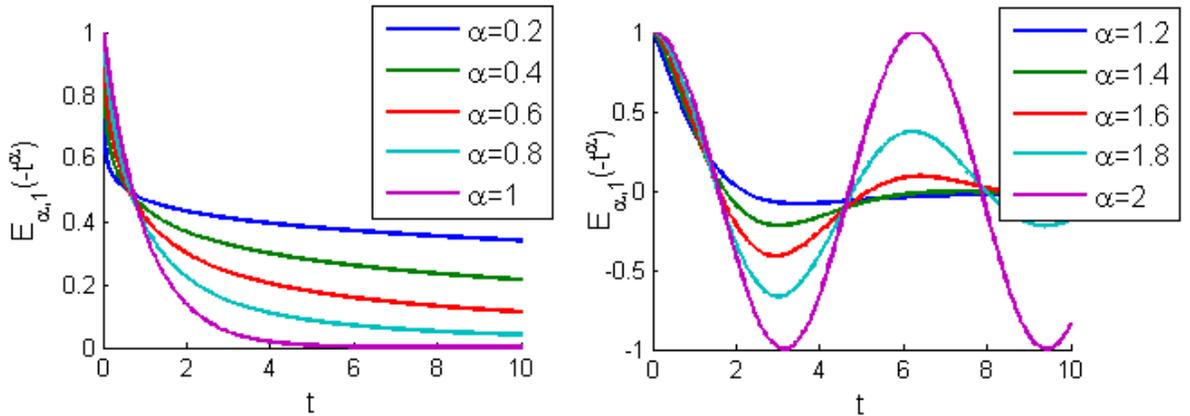


Figura 2.1: Funciones de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$

En la Figura 2.1 se presenta la función $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ para distintos valores de $\alpha \in (0, 2]$. En ella se aprecia que tiene carácter oscilatorio cuando $\alpha > 1$ y además para $\alpha = 1$ se recupera el caso entero pues $E_{1,1}(-t) = e^{-t}$. En ella se observa además que para $0 < \alpha < 2$, la función $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ tiende a cero a medida que t crece, esta característica se debe a que la función de Mittag-Leffler de dos parámetros tiene una cota dinámica de acuerdo al Teorema 2.1.

Teorema 2.1 [28] *Cota para $E_{\alpha,\beta}(z)$*

Sea $0 < \alpha < 2$ y $\beta \in \mathfrak{R}$ un número real arbitrario. Entonces

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}$$

es válido para $\mu \leq |\arg(z)| \leq \pi$, donde C es una constante positiva, $\mu \in (\frac{\pi\alpha}{2}, \min\{\pi, \pi\alpha\})$, $|\cdot|$ corresponde al valor absoluto, y $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ es el argumento de $z \in \mathbb{C}$.

De forma más general los sistemas fraccionarios se pueden expresar como se muestra en (2.18), donde tanto la dinámica de la entrada como de la salida del sistema está regida por suma de derivadas fraccionarias de diferentes órdenes α_k y β_k , con diferentes ponderaciones a_k y b_k respectivamente. Es posible también considerar $x(t)$ como un vector, y así de (2.18) obtener la dinámica de cada uno de los estados aplicando el operador derivada fraccionaria a cada uno de ellos por separado y con diferentes ponderadores.

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} x(t) = \sum_{k=0}^n b_k D^{\beta_k} u(t) \quad (2.18)$$

Si cada uno de los órdenes α_k y β_k puede escribirse como múltiplo entero de un valor α base, es decir, $\exists k_i \in \mathbb{Z} \wedge r_i \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in \mathfrak{R}^+ / \alpha_i = k_i \alpha \wedge \beta_i = r_i \alpha$ con $i = 1, 2, \dots, n$, se dice que el sistema es de orden conmensurable. Si además $\alpha = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, el sistema se clasifica como de orden racional. Así pues, los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT) pueden ser clasificados según su orden como sigue [5]:

$$\text{Sistemas LIT} \begin{cases} \text{Orden no entero} \\ \text{Orden entero} \end{cases} \begin{cases} \text{Conmensurable} \\ \text{No conmensurable} \end{cases} \begin{cases} \text{Racional} \\ \text{Irracional} \end{cases}$$

Al aplicar la transformada de Laplace a (2.18) considerando que $x(t) \in \mathfrak{R}$ y $x(0) = 0$ se obtiene la función de transferencia del sistema, la que se presenta en (2.19).

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^{\beta_n} + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.19)$$

Debido a que la función de transferencia obtenida es en general de orden irracional, cada polinomio tiene un número no finito de raíces, lo que lleva a señalar que los sistemas fraccionarios poseen memoria ilimitada [29].

Para analizar la función de transferencia en (2.19) es necesario considerar que una función $f(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}$ con $\alpha_i \in \mathfrak{R}$ es una función multivaluada de $s \in \mathbb{C}$, cuyo dominio puede verse como una superficie de Riemann. Este tipo de superficie suele

dividirse en subconjuntos denominados «hojas de Riemann», y en el caso de $f(s)$ el número de hojas es finito sólo en el caso de órdenes racionales. De este modo, si $\alpha = \frac{1}{q}$ con q un entero positivo, se tienen q hojas de Riemann definidas por (2.20), donde la hoja definida por $k = -1$ de manera que $\phi \in (-\pi, \pi)$ es denominada la hoja principal.

$$s = |s| e^{j\phi}, \quad (2k+1)\pi < \phi < (2k+3)\pi, \quad k = -1, 0, \dots, q-2. \quad (2.20)$$

Así pues, en el caso general se puede decir que la ecuación $f(s) = 0$ tiene un número infinito de raíces, pero sólo un número finito de ellas se encuentra en la hoja principal. Lo interesante es que, de acuerdo a [29], las raíces que están en hojas secundarias de la superficie de Riemann dan lugar a soluciones que son siempre funciones monótonamente decrecientes (tienden a cero sin oscilaciones cuando $t \rightarrow \infty$) y sólo las raíces que están en la hoja principal de Riemann pueden producir una dinámica distinta: oscilación amortiguada, oscilación de amplitud constante, oscilación de amplitud creciente o crecimiento monótono. Debido a lo anterior, para el análisis de estabilidad de la función de transferencia de sistemas fraccionarios (2.19) basta analizar las raíces del denominador que se encuentran en la hoja principal de Riemann.

En [30] se propone un procedimiento para obtener la respuesta al impulso del sistema (2.18) con función de transferencia dada por (2.19), el cual es válido para dos casos:

- Los órdenes α_i y β_i son números irracionales pero múltiplos de un α dado, de manera que el sistema es de orden conmensurable.
- Los órdenes α_i y β_i son números racionales, de manera que se pueden escribir en la forma $\alpha_i = \frac{p\alpha_i}{q\alpha_i}$ y $\beta_i = \frac{p\beta_i}{q\beta_i}$.

En ambos casos la función de transferencia se puede escribir como se muestra en (2.21), donde α corresponde al mínimo común denominador.

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m s^{m\cdot\alpha}}{\sum_{n=0}^N a_n s^{n\cdot\alpha}} \quad (2.21)$$

Así pues, el método propuesto en [30] consta de los siguientes 5 pasos:

1. Transformar $H(s)$ en $H(\omega)$, sustituyendo s^α por ω . Se toma por supuesto que $H(\omega)$ es una fracción propia; de otro modo ésta puede descomponerse en la suma de un polinomio y una fracción propia.
2. Descomponer $H(\omega)$ en fracciones parciales. El denominador polinomial en $H(\omega)$ es llamado pseudo-polinomio característico.
3. Volver a la variable original reemplazando ω por s^α , entonces se tienen funciones parciales de la forma (2.22):

$$F(s) = \frac{1}{(s^\alpha - a)^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

4. Invertir cada fracción parcial

Para el caso $k = 1$ se puede hacer uso de (2.15) considerando $\beta = \alpha$ o se puede utilizar el desarrollo que se presenta a continuación.

Mediante propiedades de series geométricas, la función $G(s) = \frac{1}{s^\alpha - a}$ puede ser escrita como se muestra en (2.23), con la región de convergencia definida por $Re(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}$.

$$G(s) = s^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a^n s^{-n\alpha} \quad (2.23)$$

Todos los términos de la serie son analíticos para $Re(s) > 0$, por lo que ésta se puede transformar al tiempo término por término, obteniéndose la respuesta al impulso que se muestra en (2.24).

$$g(t) = t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) \quad (2.24)$$

Para el caso $k > 1$ basta repetir el procedimiento anterior considerando la diferenciación o convolución de la respuesta para $k = 1$.

5. Sumar las diferentes respuestas para obtener la respuesta al impulso del sistema.

2.3. Análisis de Estabilidad de Sistemas Fraccionarios

Por consideraciones ya expuestas, el análisis de estabilidad de sistemas fraccionarios suele no ser una tarea sencilla, sin embargo se han obtenido algunos resultados importantes al respecto, los cuales se presentan a continuación.

Considérese el sistema lineal e invariante en el tiempo (LIT) que se presenta en (2.25), con $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ el vector de estado, $y(t) \in \mathfrak{R}$ la salida del sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}$ la entrada, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ matriz de evolución, $B \in \mathfrak{R}^n$ matriz de control, $C^T \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ matriz de observación, y $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ la condición inicial del sistema, con $0 < \alpha < 2$.

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \\ x(0) &= x_0, \quad 0 < \alpha < 2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Definición 2.7 [19] Estabilidad interna

El sistema autónomo $D^\alpha x(t) = Ax(t)$ si dice estable ssi

$$\forall x_0 \exists M \in \mathfrak{R} / \forall t \geq 0 \|x(t)\| < M.$$

Además se dice asintóticamente estable ssi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Con respecto a la estabilidad interna del sistema antes mencionado, Matignon en 1996 plantea el Teorema 2.2.

Teorema 2.2 [19] *Estabilidad Interna sistema orden fraccionario*

El sistema autónomo (2.25) es:

- *Asintóticamente estable ssi $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$. En este caso, las componentes decaen a cero como $t^{-\alpha}$.*
- *Estable ssi es asintóticamente estable, o si los valores propios críticos que satisfacen $|\arg(\text{spec}(A))| = \alpha \frac{\pi}{2}$ tienen multiplicidad geométrica uno.*

El teorema anterior es válido para $\alpha = 1$. Con ello se verifica que un sistema lineal definido por una matriz de evolución de estados A puede resultar inestable para sistemas de orden entero, pero ser estable para algún $\alpha < 1$ ya que, como se muestra en la Figura 2.2, se amplía el sector en el plano complejo en que se pueden ubicar los valores propios de la matriz A para que el sistema sea estable.

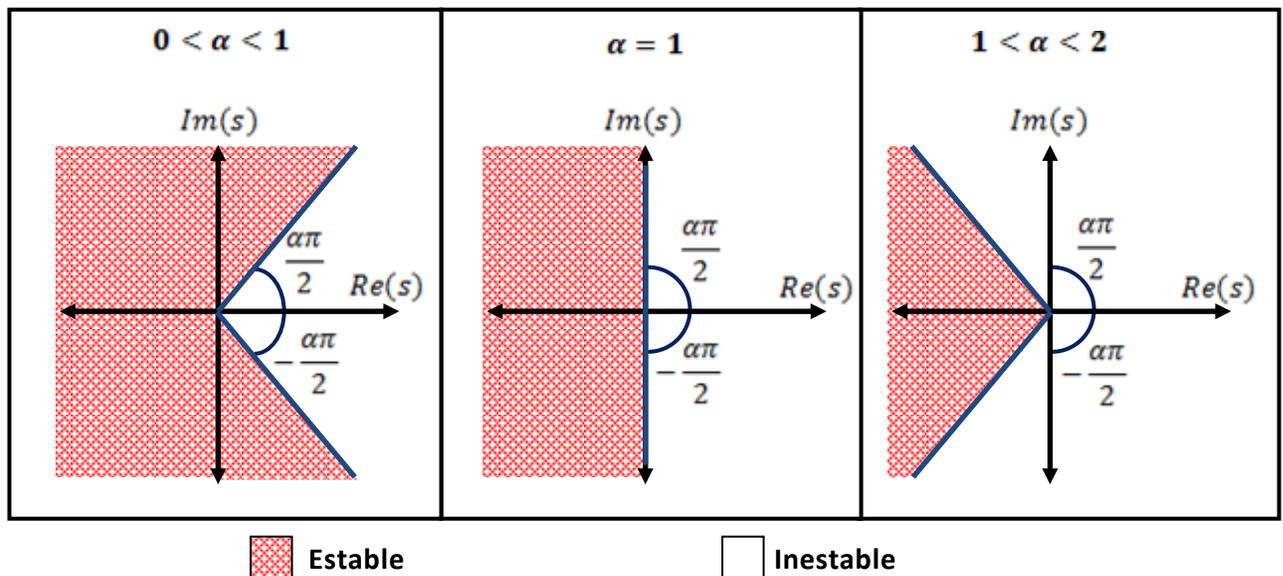


Figura 2.2: Dominio de estabilidad sistemas fraccionarios LIT (2.25)

En cuanto a estabilidad externa, también conocida como estabilidad BIBO, en [19] se presenta el Teorema 2.3 para sistemas de la forma de (2.25) y el Teorema 2.4 para sistemas fraccionarios en su forma polinomial. Para la aplicación de estos teoremas resulta útil conocer el Teorema 2.5.

Definición 2.8 [19] *Estabilidad externa*

Un sistema es BIBO estable (Bounded Input - Bounded Output) ssi para una entrada acotada, la salida del sistema también lo es.

$$u(t) \in \mathcal{L}^\infty \implies y(t) \in \mathcal{L}^\infty$$

Teorema 2.3 [19] *Estabilidad BIBO sistema orden fraccionario*

Si la tripleta (A, B, C^T) es mínima se tiene la siguiente equivalencia:

Sistema (2.25) es BIBO estable ssi $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Teorema 2.4 [19] *Estabilidad BIBO para sistemas fraccionarios en representación polinomial*

Sea el sistema que se presenta en (2.26).

$$\begin{aligned} P(s^\alpha)x &= Q(s^\alpha)u \\ y &= R(s^\alpha)x \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si la tripleta (P, Q, R) de matrices polinomiales es mínima, se tiene la equivalencia:

El sistema (2.26) es BIBO estable ssi $\det(P(s^\alpha)) \neq 0 \quad \forall s^\alpha / |\arg(s^\alpha)| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$.

Teorema 2.5 [31] *Tripleta mínima*

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para la representación de un sistema invariante en el tiempo:

- (A, B, C^T) es controlable y observable.
- (A, B, C^T) es mínima.

Para sistemas fraccionarios lineales de orden racional no conmensurable en [32] se propone una formulación que, aumentando el número de estados del sistema, lo transforma a un sistema de orden conmensurable y se obtienen condiciones para su estabilidad.

En casos de sistemas fraccionarios irracionales y no conmensurables es posible abordar el problema directamente en el dominio de Laplace valiéndose del Teorema 2.6, o analizar la respuesta temporal del sistema y, en base a las propiedades de las funciones de Mittag-Leffler, obtener resultados de estabilidad. En la literatura existen algunos trabajos que podrían resultar útiles en este último caso, por ejemplo en [33] se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad L_p de las funciones de Mittag-Leffler y en [34] se estudian sus asíntotas.

Teorema 2.6 [22] *Teorema del Valor Final Extendido*

Sea $y(t)$ una señal en $[0, \infty)$, $Y(s)$ su transformada de Laplace y se define:

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

siempre que el límite exista, es decir, siempre que $y(\infty) \in \mathfrak{R}$ (Se hace énfasis en que ∞ y $-\infty$ no son números reales). Además se supone $Y(s)$ una función racional propia, de modo que el grado del numerador es menor que el del denominador.

Si cada polo de $Y(s)$ está en el semiplano izquierdo complejo o en el origen, entonces $y(\infty)$ existe y está dado por

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sY(s).$$

En particular si $s = 0$ es un polo múltiple de $Y(s)$, entonces $y(\infty)$ no existe porque es infinito.

Para sistemas fraccionarios no lineales, en [35] se plantea el Teorema 2.7, el cual es una extensión del teorema de estabilidad de Lyapunov en sistemas de orden entero. En él se presenta una condición suficiente para la estabilidad Mittag-Leffler del sistema, lo cual de acuerdo a la Definición 2.9 implica estabilidad asintótica del mismo.

Teorema 2.7 [35] *Extensión Teorema de Lyapunov*

Sea el sistema no lineal que se presenta en (2.27), con $\alpha \in (0, 1)$, $f : [t_0, \infty] \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua por partes en t y localmente Lipschitz en x en $[t_0, \infty] \times \Theta$ y $\Theta \in \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el origen $x = 0$.

$${}_t D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \tag{2.27}$$

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2.27) de modo que $f(t, 0) = {}_0 D_t^\alpha(0)$. Si existe una función $V(t, x(t)) \in [0, \infty] \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciable y localmente Lipschitz en x de modo que se satisfacen (2.28) y (2.29), donde $t \geq 0$, $x \in \Theta$, $\beta \in (0, 1)$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a$ y b son constantes positivas arbitrarias; entonces el punto de equilibrio es Mittag-Leffler estable. Si los supuestos se mantienen para $\Theta = \mathbb{R}^n$ entonces $x = 0$ es un punto de equilibrio globalmente Mittag-Leffler estable.

$$\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab} \tag{2.28}$$

$${}_0^C D_t^\beta (V(t, x(t))) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab} \tag{2.29}$$

Definición 2.9 [35] *Estabilidad Mittag Leffler*

La solución del sistema (2.27) se denomina Mittag-Leffler estable si

$$\|x(t)\| = \{m[x(t_0)]E_\alpha(-\lambda(t - t_0)^\alpha)\},$$

donde t_0 es el instante inicial, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$ y $m(x)$ es localmente Lipschitz en $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$ con constante de Lipschitz m_0 .

2.4. Observadores de Estado

Se conoce como observador de estado [10] a un sistema dinámico que es capaz de reconstruir el vector de estado de otro sistema dinámico a partir del conocimiento de los parámetros, la entrada y salida del mismo.

De este modo, se dice que un sistema es observable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si el vector de estado $x(t)$ puede ser obtenido a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ del sistema en $t \in [t_0, t_1]$. De acuerdo con [20] el sistema (2.25) con $0 < \alpha \leq 1$ es observable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si la matriz de observabilidad (2.30) es de rango completo, por lo que se mantiene exactamente la misma condición de observabilidad conocida para los sistemas lineales de orden entero [36].

Definición 2.10 [20] *Matriz de Observabilidad*

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

El tema de los observadores de estado clásicos ha sido ampliamente estudiado desde la propuesta de David Luenberger en 1964 [10], quien plantea un observador lineal cuya complejidad decrece a medida que aumenta la cantidad de salidas disponibles. El aporte principal del enfoque planteado por Luenberger es que permite sobrellevar la limitación práctica que en su época enfretaban la mayoría de los esquemas teóricos de control: el supuesto de acceso al estado del sistema a controlar. Además aborda el problema de estimación de estados en tiempo continuo y de manera determinística, lo cual se diferencia del enfoque planteado por Kalman para estimación y predicción [9].

Desde el primer acercamiento planteado por Luenberger, la teoría de observadores se ha fortalecido y expandido al caso de sistemas variantes en el tiempo [13] [14] y sistemas no lineales [11] [12], por lo que con el creciente interés en los sistemas fraccionarios surge naturalmente la idea de aplicar cálculo fraccionario en el ámbito de los observadores de estado.

Para plantas de orden entero, lineales, invariantes en el tiempo, SISO y de parámetros conocidos ($A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^n$ y $C^T \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$) como se muestra en (2.31), el observador planteado por Luenberger en [10] tiene la forma que se muestra en (2.32), donde se aprecia que el observador conserva la estructura de la planta incorporándole un factor de corrección lineal con respecto al error de observación mediante el vector $F \in \mathfrak{R}^n$ como parámetro de diseño.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + F(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

La estructura mencionada genera la dinámica del error de observación que se muestra en (2.33) y, por resultados conocidos de estabilidad en sistemas enteros, se sabe que el error de observación tiende asintóticamente a cero si se elige un vector F de manera que los polos de la matriz $(A - FC^T)$ se encuentren en el semiplano izquierdo complejo, con lo cual además es posible regular la velocidad de convergencia del mismo [8].

$$\dot{e}_x(t) = \left(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \right) = (A - FC^T)e_x(t) \quad (2.33)$$

Para el caso de plantas invariantes en el tiempo, SISO, de parámetros conocidos pero de dinámica fraccionaria como se muestra en (2.34), en [16] se plantea un observador de la misma forma que el observador de Luenberger, pero considerando derivadas de orden no entero (2.35).

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha(x(t)) &= Ax(t) + f(x) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha(\hat{x}(t)) &= A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

En plantas lineales, es decir $f(x) = 0 \quad \forall x$, con el observador (2.35) se obtiene la dinámica de error autónoma y lineal que se muestra en (2.36). Esta vez dadas las condiciones de estabilidad para sistemas lineales fraccionarios, de acuerdo al Teorema 2.2 es necesario escoger $L \in \mathbb{R}^n$ de manera que la matriz $J = (A - LC^T)$ cumpla $|\arg(\text{spec}(J))| > \alpha \frac{\pi}{2}$, y de este modo se logra convergencia asintótica del error de observación a cero y, por lo tanto, la estimación del estado converge a su valor real.

$${}_0D_t^\alpha(e_x(t)) = {}_0D_t^\alpha(x(t) - \hat{x}(t)) = (A - LC^T)e_x(t) \quad (2.36)$$

Para el caso no lineal donde $f(x) \neq 0$, en [16] se demuestra que el error de estimación de estado también tiende asintóticamente a cero si $f(x)$ es Lipschitz y se elige el parámetro L de manera adecuada (elección más restrictiva que en el caso lineal pues su cota depende de los valores propios de la matriz J , la constante de Lipschitz de $f(x)$ y otras características del sistema).

Los observadores mencionados anteriormente son sólo algunos, pues existen numerosos enfoques para abordar el problema de reconstruir el vector de estado de plantas con parámetros conocidos, ya sean lineales o no, y considerando derivadas enteras o fraccionarias. En particular en la literatura se plantean interesantes resultados con respecto a observadores fraccionarios para reconstruir el estado de sistemas fraccionarios [16] [15] [18] [17], los que se sustentan en los resultados teóricos de estabilidad [19] y observabilidad [20]. Sin embargo, el problema de la aplicación de observadores fraccionarios a sistemas de orden entero no ha sido convenientemente abordado en la literatura y es ahí donde se enfoca el desarrollo del presente trabajo de título.

2.4.1. Análisis de Desempeño de Observadores de Estado

El principal objetivo de los observadores es lograr estimar el estado de un sistema, por lo que una de las señales más relevantes en el análisis de su desempeño es el error de estimación del vector de estado. En particular se centra la atención en el análisis de la respuesta temporal del error de estimación, para lo cual a continuación se presentan los parámetros principales que se utilizan en el análisis de señales temporales: tiempo de estabilización, sobreoscilación máxima y error permanente.

De acuerdo a [37] se define como tiempo de estabilización o de asentamiento al tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final especificado por

el porcentaje absoluto del valor final, generalmente en una banda del 2% al 5%, y permanezca dentro de él. En el caso de los observadores de estado se desea que el error de estado se encuentre en una banda cercana a cero, donde la banda es calculada de acuerdo a la condición inicial del error de observación.

En [37] se define la sobreoscilación como el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido con el valor final en estado estacionario de la misma como referencia, tal como se muestra en (2.37), donde M_p corresponde a la sobreoscilación, $s(t)$ es la señal temporal que se está analizando (en el caso de los observadores corresponde al error de estimación del vector de estado) y t_p es el tiempo en que la señal llega a su valor pico máximo.

$$M_p = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100\% \quad (2.37)$$

En el caso de los observadores de estado el error permanente corresponde al error de estimación del estado en regimen permanente e idealmente es igual a cero.

Es de interés señalar que en los observadores de estado es crítica la rapidez de convergencia del error a cero, pues usualmente la estimación que entregan es utilizada como información dentro de un lazo cerrado de control, por lo cual deben ser capaces de estimar el estado más rápido de lo que el sistema responde.

Otro análisis al que suelen ser sometidos los observadores de estado tiene relación con su respuesta ante variaciones paramétricas y/o perturbaciones. Algunos ejemplos de cómo se trata este tema en la literatura se presentan a continuación.

En [38] se señala que ha sido probado que el uso de sistemas de orden fraccionario presenta ciertos beneficios en el comportamiento dinámico del sistema y un efecto de robustez ante ruido y perturbaciones. En particular en ese trabajo se analiza la robustez del control adaptivo por modelo de referencia al descomponer la integral de orden entero en dos integrales de orden α y $(1 - \alpha)$ con $\alpha \in (0, 1)$ y, mediante el indicador J_α que se presenta en (2.38), se concluye que esta descomposición en la implementación lleva a una mejora en el rechazo ante ruido del lazo cerrado de control. En [39] se utiliza un indicador similar en su versión discreta (2.39) para analizar la robustez ante perturbaciones de observadores discretos en un motor diesel.

$$J_\alpha(\hat{x}) = \int_{t_I}^{t_F} (x(t) - \hat{x}(t))^2 \quad (2.38)$$

$$RMSD(\hat{x}) = \sqrt{E((x(t) - \hat{x}(t))^2)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n}} \quad (2.39)$$

En [40] se presenta un estudio en que se compara el desempeño de 6 observadores en el modelo de un motor DC, correspondiente a un sistema con múltiples entradas y salidas (MIMO, por sus siglas en inglés) lineal de segundo orden. En él se estudia la capacidad de detectar mediante el error de observación cambios en los parámetros del modelo (fallas) y la robustez de los esquemas ante

perturbaciones. Para ello se analiza el rango en que permanece el error de observación, junto con la media y desviación estándar de su densidad de probabilidad estimada.

En [41] se estudia la robustez de un observador diseñado por ubicación de polos ante la variación de un 50 % en los parámetros de la planta, correspondientes a la resistencia del rotor y el estator de un motor de inducción.

Con todo lo anterior, los elementos esenciales considerados en este trabajo de título para el análisis de desempeño de observadores de estado son la rapidez de convergencia del error de estimación y la robustez en la respuesta de los observadores ante cambios paramétricos en la planta y en presencia de perturbaciones.

2.5. Control por Realimentación de Estado

De acuerdo a [42] se entiende por controlador a un dispositivo que, conectado al sistema físico que se desea controlar, es capaz de hacer que éste se comporte de acuerdo a especificaciones deseadas.

Se dice que un sistema es controlable si cada punto en el espacio de estados puede ser alcanzado a partir de cualquier otro punto en un intervalo de tiempo dado, lo que se define formalmente a continuación.

Definición 2.11 [20] *Sistema controlable*

El sistema (2.25) es controlable en $[t_0, t_1]$ ssi para cada $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe un control $u(t) \in \mathbb{R}$ definido en $t \in [t_0, t_1]$ que lleva el estado inicial $x(t_0) = x_0$ al estado final $x(t_1) = x_1$.

Un conocido resultado acerca de la controlabilidad de sistemas de orden entero es que el sistema (2.25) con $\alpha = 1$ es controlable ssi la matriz de controlabilidad que se presenta en (2.40) es de rango completo. En [20] extiende la validez del mismo resultado para el caso fraccionario en que $0 < \alpha \leq 1$.

Definición 2.12 [42] *Matriz de controlabilidad*

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (2.40)$$

Un esquema de control que es de particular interés en este caso es el control por realimentación de estado, pues uno de sus principales limitaciones es que requiere el acceso al estado del sistema, problema que puede ser resuelto mediante el uso de observadores.

Sea la planta entera que se presenta en (2.41), donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ el estado del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ la salida y $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Se propone la ley de control que se muestra en (2.42) que corresponde a un esquema de control por realimentación de estado donde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times q}$ son parámetros de diseño del controlador y $v(t) \in \mathbb{R}^q$ corresponde a una

nueva señal de control [43].

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \leq 0\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$u(t) = Kx(t) + Gv(t)\tag{2.42}$$

El esquema general del control por realimentación de estado se presenta en la Figura 2.3, donde se observa que es necesario tener acceso al estado del sistema para construir la señal de control.

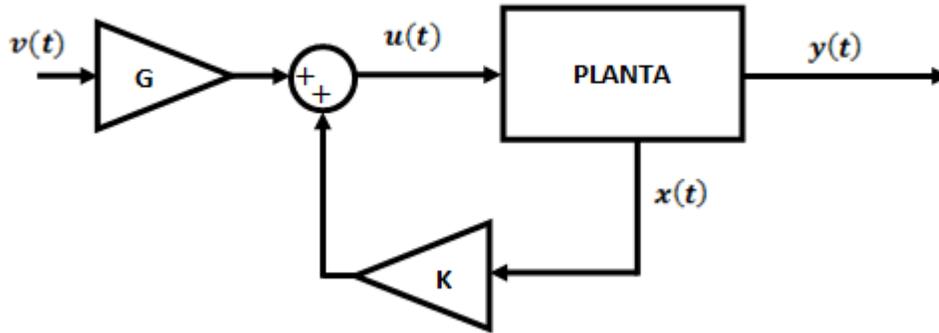


Figura 2.3: Esquema de control por realimentación de estado

El control antes descrito genera la dinámica que se muestra en (2.43), donde se observa que las matrices K y G permiten modificar la dinámica de la planta. A continuación se muestra un ejemplo de control por realimentación de estado con referencia constante para el caso de una planta SISO, de manera que $p = m = 1$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BGv(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \leq 0\end{aligned}\tag{2.43}$$

Ejemplo : Control para una planta lineal SISO con referencia constante

Se desea que la planta (2.41) alcance una referencia constante $r(t) = R$, para lo cual se utiliza una ley de control dada por (2.42) con F, G por determinar y $v(t) = r(t) = R$ cte.

En el dominio de Laplace la salida del sistema tiene la expresión que se muestra en (2.44) y, si el par (A, B) es controlable, es posible escoger K de manera que ubique los valores propios de la matriz $(A + BK)$ en el semiplano izquierdo complejo y por lo tanto, es posible utilizar el Teorema 2.6 para calcular la salida del sistema en estado estacionario como se muestra en (2.45).

Se desea que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = R$, por lo tanto basta escoger $G = -\frac{1}{C(A+BK)^{-1}B}$ y se tiene convergencia asintótica de la salida del sistema (2.41) a la referencia constante R .

$$Y(s) = C(sI - (A + BK))^{-1}BG \cdot R(s) + C(sI - (A + BK))^{-1} \cdot x(0) \quad (2.44)$$

$$R(s) = \frac{R}{s} \Rightarrow \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= -C(A + BK)^{-1}BG \cdot R \end{aligned} \quad (2.45)$$

En plantas en las cuales no se tiene acceso al estado es posible utilizar un esquema de control realimentado valiéndose del Principio de Separación que se explica a continuación.

2.5.1. Principio de Separación

Considérese la planta (2.41), un observador del tipo Luenberger como (2.32) y una ley de control como se muestra en (2.46), donde en vez de utilizar el estado de la planta $x(t)$ se utiliza una estimación de él $\hat{x}(t)$ entregada por el observador.

$$u(t) = K\hat{x}(t) + r(t) \quad (2.46)$$

En estas condiciones, la dinámica del estado de la planta, del estado estimado y por consecuencia del error de estimación están dadas por (2.47).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Br(t) - BK e_x(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= (A - FC^T + BK)\hat{x}(t) + Br(t) + Fy(t) \\ \dot{e}_x(t) &= (A - FC^T)e_x(t) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Las ecuaciones anteriores pueden combinarse representando en una dinámica de orden $2n$ el comportamiento de todo el sistema como se muestra en (2.48), cuya ecuación característica está dada por $\det(sI - (A + BK)) \cdot \det(sI - (A - FC^T)) = 0$. Lo anterior indica que los valores propios del sistema completo consisten en la unión de los valores propios del controlador con los valores propios del observador [44].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - FC^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.48)$$

En otras palabras, los valores propios del controlador y los correspondientes al observador son independientes entre sí. Si el controlador y el observador han sido diseñados de manera que sus valores propios se sitúan en el semiplano izquierdo complejo, entonces la estabilidad asintótica del sistema completo está asegurada. Este importante resultado es el llamado «Principio de Separación».

Así pues, en la Figura 2.4 se presenta la estructura del control de realimentación de estado utilizando un observador en la estimación.

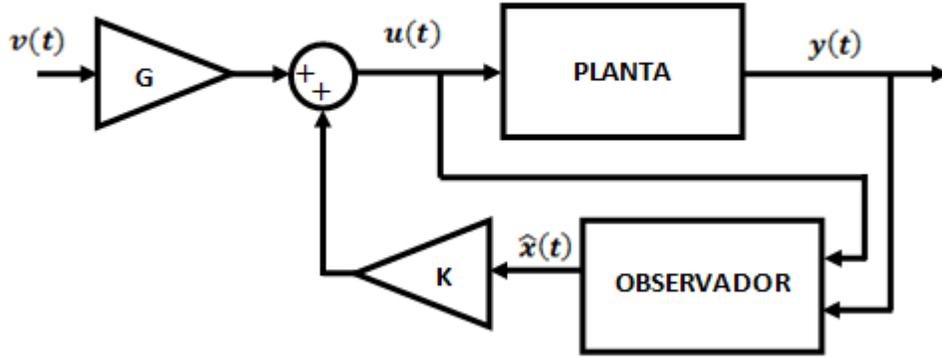


Figura 2.4: Esquema control por realimentación de estado mediante observador

En [45] y [46] se demuestra que el Principio de Separación también es válido para el caso fraccionario considerando una pequeña modificación como se muestra en el Teorema 2.8.

Teorema 2.8 [45] *Principio de Separación caso fraccionario*

Sea la planta (2.25), el observador del tipo luenberger fraccionario (2.35) y la ley de control (2.46). Entonces el controlador basado en la observación puede sintetizarse en el sistema de orden $2n$ (2.49) ssi los modos no asintóticamente estables de A son controlables y observables. Además, la dinámica del sistema completo estará determinado por $\text{spec}(A + BK) \cup \text{spec}(A - FC^T)$.

$$\begin{bmatrix} {}_0D_t^\alpha x(t) \\ {}_0D_t^\alpha e_x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - FC^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.49)$$

Capítulo 3

Observador del tipo Luenberger de orden Fraccionario

En este capítulo se analiza el desempeño de un observador del tipo Luenberger de orden fraccionario en una planta lineal, SISO, de orden entero y parámetros conocidos. Se presenta un novedoso análisis de estabilidad del error de observación, encontrando condiciones suficientes que aseguran su estabilidad BIBO. Además se aborda en base a simulaciones y desarrollo analítico la influencia de ciertos parámetros del sistema en el desempeño del observador y se analiza el desempeño del mismo en condiciones no ideales, vale decir, con desconocimiento en los parámetros del sistema y en presencia de perturbaciones.

3.1. Planteamiento General

Se considera la planta de orden n lineal e invariante en el tiempo (LIT), de parámetros conocidos, con una entrada y una salida (SISO) que se muestra en (3.1), donde $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^n$ y $C^T \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C^T \cdot x(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para reconstruir su estado se utiliza el conocido observador Luenberger de orden fraccionario que se presenta en (3.2), donde el orden fraccionario $\alpha \in (0, 2)$ y $F \in \mathfrak{R}^n$ corresponden a parámetros de diseño del observador y A , B y C^T son los parámetros conocidos de la planta. Se considera en todo el desarrollo la derivada fraccionaria de Caputo, pues requiere condiciones iniciales interpretables físicamente.

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha(\hat{x}(t)) &= A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + F \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C^T \cdot \hat{x}(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2. Análisis de Estabilidad

Al aplicar transformada de Laplace a la ecuación de evolución del estado de la planta en (3.1) y a la ecuación de evolución del observador en (3.2) se tienen (3.3) y (3.4) respectivamente, donde m corresponde al mínimo entero mayor que α de modo que $m - 1 < \alpha < m$.

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot (B \cdot U(s) + x(0)) \quad (3.3)$$

$$\hat{X}(s) = (s^\alpha I - (A - F \cdot C^T))^{-1} \cdot \left(B \cdot U(s) + F \cdot C^T \cdot X(s) + \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha-k}) \right) \quad (3.4)$$

Así pues, dado que el error de observación se define como $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, utilizando las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtiene la expresión (3.5) que determina la dinámica del error de observación en el dominio de Laplace.

$$\begin{aligned} E_x(s) = & \left((sI - A)^{-1} - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot (I + FC^T(sI - A)^{-1}) \right) \cdot BU(s) \\ & + \left((sI - A)^{-1} - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} FC^T(sI - A)^{-1} \right) \cdot x(0) \\ & + (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha-k}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

En la dinámica del error de observación se logran distinguir tres términos: $E_u(s)$ que depende de la entrada de la planta $u(t)$; $E_{x_0}(s)$ dependiente de las condiciones iniciales de la planta $x(0)$; y $E_{\hat{x}_0}(s)$ dependiente de las condiciones iniciales del observador $\hat{x}^{(k)}(0)$.

No se aprecia a simple vista una posible factorización común entre los términos dependientes de las condiciones iniciales del sistema a observar $x(0)$, y los dependientes de las condiciones iniciales del observador $x^{(k)}(0)$ con $k = 0, \dots, m - 1$, de modo que no es posible analizar la expresión anterior con respecto a las condiciones iniciales del error $e_x(0)$. Por lo tanto, se opta por encontrar condiciones suficientes para la estabilidad del error de observación analizando cada término por separado.

3.2.1. Consideraciones previas

Hay ciertas relaciones que es de utilidad notar para el posterior análisis de estabilidad del error de observación planteado. En particular a continuación se presentan 2 proposiciones junto con los argumentos que las sustentan.

- **Proposición 1:** Si el par (A, C^T) es observable, entonces el par $(A - FC^T, B)$ es controlable si $F \in \mathfrak{R}^n$ se puede escoger libremente.

Si el par (A, C^T) es observable entonces el sistema (3.1) es observable, por lo tanto es posible definir una estimación del estado $\hat{x}(t)$ como se muestra en (3.6) de modo que los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$, con $F \in \mathfrak{R}^n$, se pueden situar de manera arbitraria en el plano complejo.

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + F(y(t) - C^T\hat{x}(t)) \quad (3.6)$$

Por otro lado, el par $(A - FC^T, B)$ es controlable ssi los valores propios de la matriz $(A - FC^T + BK)$ pueden ser asignados de manera arbitraria mediante una elección adecuada de $K \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$. Dado que el par (A, C^T) es observable, se sabe que los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$ pueden ser arbitrariamente ubicados en el plano complejo mediante la elección de F . Por lo tanto, si se desea que los valores propios de la matriz $(A - FC^T + BK)$ sean asignados de manera arbitraria basta tomar $K = 0 \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ y por la observabilidad de (A, C^T) se tiene el resultado.

- **Proposición 2:** Si el par (A, C^T) es observable, entonces el par $(A - FC^T, F)$ es controlable si $F \in \mathfrak{R}^n$ se puede escoger libremente.

Por la invariabilidad de la controlabilidad con respecto a la retroalimentación se sabe que el par $(A - FC^T, F)$ es controlable ssi el par (A, F) es controlable. La proposición anterior es verdadera ssi los valores propios de la matriz $(A - FK)$ pueden ser arbitrariamente ubicados en el plano complejo mediante la elección de $K \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$. Si se considera el sistema (3.1) se sabe que el par (A, C^T) es observable por lo que los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$ pueden ser situados de manera arbitraria en el plano complejo mediante una adecuada elección de F . Por lo tanto basta elegir $K = C^T$ para que la proposición sea verdadera.

3.2.2. Término dependiente de la entrada $u(t)$

Idealmente se desea que la dinámica del error de observación sea independiente de la entrada de la planta, ya que al estar presente como entrada en la dinámica del error de observación impide asociarlo con el concepto de estabilidad asintótica, válido para sistemas autónomos, dejando como alternativa la estabilidad BIBO.

$$E_u(s) = \left((sI - A)^{-1} - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot (I + FC^T(sI - A)^{-1}) \right) \cdot BU(s) \quad (3.7)$$

Si se define $E_u(s)$ como se muestra en (3.7), es posible distinguir tres términos de modo que $E_u(s) = E_{u_1}(s) - E_{u_2}(s) - E_{u_3}(s)$, cada uno de los cuales se analiza en detalle a continuación.

1. Término $E_{u_1}(s)$

$$E_{u_1}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s) \quad (3.8)$$

De acuerdo al Teorema 2.3 si el par (A, B) es controlable, entonces el sistema (3.8) es BIBO estable ssi $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$.

2. Término $E_{u_2}(s)$

$$E_{u_2}(s) = (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot BU(s) \quad (3.9)$$

Se tiene por la Proposición 1 que si el par (A, C^T) es observable y F es elegible, entonces el par $(A - FC^T, B)$ es controlable.

De acuerdo al Teorema 2.3 si el par $(A - FC^T, B)$ es controlable, entonces el sistema (3.9) es BIBO estable ssi $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Por lo tanto, basta con elegir $F \in \mathfrak{R}^n$ de manera que se cumpla la condición.

3. Término $E_{u_3}(s)$

$$\begin{aligned} E_{u_3}(s) &= (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} (FC^T (sI - A)^{-1}) \cdot BU(s) \\ M(s) &= (C^T (sI - A)^{-1}) \cdot BU(s) \implies E_{u_3}(s) = (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot FM(s) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se define la señal $m(t)$ de modo que su transformada de Laplace está dada por $M(s) = C^T (sI - A)^{-1} BU(s)$. De acuerdo a al Teorema 2.3 se tiene que si la tripleta (A, B, C^T) es mínima y $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$, entonces $u(t) \in \mathbb{L}^\infty \implies m(t) \in \mathbb{L}^\infty$.

Por la Proposición 2 se sabe que si el par (A, C^T) es observable y F es elegible, entonces el par $(A - FC^T, F)$ es controlable.

De acuerdo al mismo teorema y considerando $m(t)$ como entrada al sistema (3.10) se tiene que si el par $(A - FC^T, F)$ es controlable, entonces el sistema (3.10) es BIBO estable ssi $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \frac{\alpha\pi}{2}$. Esta condición para la elección de F es exactamente la misma que se requiere para la estabilidad del término E_{u_3} .

Condensando los resultados obtenidos anteriormente, si se cumplen las 3 condiciones en (3.11), entonces $e_u(t)$ es BIBO estable.

1. La tripleta (A, B, C^T) es mínima .
 2. $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$.
 3. $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
- (3.11)

3.2.3. Término dependiente de las condiciones iniciales de la planta $x(0)$

En este caso se distinguen dos términos como se muestra en (3.12), cuya estabilidad se analiza separadamente a continuación.

$$\begin{aligned} E_{x_0}(s) &= (sI - A)^{-1} \cdot x(0) - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} FC^T (sI - A)^{-1} \cdot x(0) \\ E_{x_0}(s) &= E_{x_{01}}(s) - E_{x_{02}}(s) \end{aligned} \quad (3.12)$$

1. Término $E_{x_{01}}(s)$

$$E_{x_{01}}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x(0) \quad (3.13)$$

Como se muestra en (3.13), este término corresponde a un sistema entero autónomo por lo tanto de acuerdo al Teorema 2.2 se tiene que $e_{x_{01}}(t)$ converge asintóticamente a 0 ssi $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$.

2. Término $E_{x_{02}}(s)$

$$E_{x_{02}}(s) = (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} FC^T (sI - A)^{-1} \cdot x(0) \quad (3.14)$$

Si A tiene los valores propios situados en el semiplano izquierdo complejo abierto y el par (A, C^T) es observable, entonces es posible situar las raíces de $P(s) = \det(sI - A) \cdot \det(s^\alpha I - (A - FC^T))$ de manera que $\forall s / P(s) = 0 \implies |\arg(s)| > \frac{\pi}{2}$. Siendo así, es posible utilizar el Teorema 2.6 como se muestra en (3.15).

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_{x_{02}}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E_{x_{02}}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (s(s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} FC^T (sI - A)^{-1} \cdot x(0)) \\ &= 0 \cdot \left(\frac{\text{adj}(FC^T - A)}{P(0)} FC^T \cdot \text{adj}(-A) \right) \cdot x(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo tanto $e_{x_{02}}(t)$ tiende asintóticamente a 0 si A es estable, el par (A, C^T) es observable y F se elige de manera que $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

3.2.4. Término dependiente de las condiciones iniciales del observador $\hat{x}^{(k)}(0)$

$$E_{\hat{x}_0}(s) = (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha-k}) \quad (3.16)$$

Si el par (A, C^T) es observable, entonces es posible elegir F de manera que $\forall s \in \mathbb{C} / \det(s^\alpha I - (A - FC^T)) = 0 \implies |\arg(s)| > \frac{\pi}{2}$. De este modo es posible utilizar el Teorema del valor final (Teorema 2.6) y concluir que se tiene estabilidad asintótica para el término del error de observación asociado a las condiciones iniciales del observador como se muestra en (3.17), considerando en el último paso que $k \in [1, m]$ y $m - 1 < \alpha < m$, por lo tanto $\alpha + 1 > k$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_{\hat{x}_0}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E_{\hat{x}_0}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha+1-k}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Cabe señalar que este término no es de mayor importancia en el análisis de estabilidad pues puede ser llevado a cero fácilmente fijando condiciones iniciales nulas en los estados del observador.

3.2.5. Resumen

Condensando los resultados obtenidos para los distintos términos que componen la ecuación del error de observación, se tiene que si se cumplen las 3 condiciones en (3.18), el error de observación del observador Luenberger fraccionario aplicado a una planta de orden entero es BIBO estable (condición suficiente).

1. La tripleta (A, B, C^T) es mínima.
 2. $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$
 3. $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
- (3.18)

Cabe señalar que este resultado es bastante menos deseable que el que se obtiene con Luenberger de orden entero, pues en este último se logra convergencia asintótica del error de observación a cero teniendo sólo como condición que el par (A, C^T) sea observable y F se elija de manera que $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \frac{\pi}{2}$.

Así pues, el esquema de observación del tipo Luenberger fraccionario aplicado a una planta de orden entero agrega restricciones importantes a la planta, pues requiere su estabilidad (valores propios de la matriz A en el semiplano izquierdo complejo abierto) y controlabilidad.

3.3. Análisis de Desempeño en Caso Ideal

Si bien el análisis de la influencia de distintos parámetros en el desempeño del observador se realiza en base a las ecuaciones generales en un sistema de orden n , para efectos ilustrativos se muestran resultados de simulaciones para un caso de orden 2, donde la planta está en su forma canónica observable, y los parámetros nominales a utilizar son los que se muestran en (3.19), (3.20) y (3.21).

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_2 = 6 \end{array} \quad (3.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} b_1 = 2 \\ b_2 = 1 \end{array} \quad (3.20)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La parámetros nominales han sido fijados de manera que la planta resulta controlable, observable y estable, con los valores propios de la matriz A ubicados en -2 y -3 . Junto con eso, los valores propios de la matriz $A - FC^T$ se sitúan en el eje real negativo de manera que, de acuerdo

a los resultados obtenidos en la sección anterior, el esquema de observación con los parámetros nominales resulta estable para $\alpha \in (0, 2)$.

En adelante se varían algunos de estos parámetros para estudiar su influencia en el desempeño del observador de estados, además de estudiarse algunos otros factores como α y $u(t)$.

En las simulaciones se analiza la dinámica del error de observación separadamente para ambos estados, calculando su tiempo de estabilización (t_s) como se muestra en (3.22), sobreoscilación (MOV) como se muestra en (3.23) y error en estado estacionario e_{ss} como se muestra en (3.24). En el caso en que la condición inicial y de estado estacionario del error coincide, se calcula t_s como el tiempo a partir del cual el error ingresa en la banda $[-0.1 + e_{ss}, e_{ss} + 0.1]$ y el porcentaje de sobreoscilación se calcula con respecto a 1.

$$t_s / \forall t > t_s [e_{ss} - 5\% \cdot (e_{ss} - e(0)) \leq e(t) \leq e_{ss} + 5\% \cdot (e_{ss} - e(0))] \quad (3.22)$$

$$MOV = \frac{t^* / \dot{e}(t^*) = 0}{\frac{\max\{|e(t^*) - e_{ss}|\}}{e_{ss} - e(0)}} \cdot 100\% \quad (3.23)$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t)) \quad (3.24)$$

3.3.1. Influencia de la entrada $u(t)$

Se sabe que el error de observación tiene un término que depende de la entrada $u(t)$ que se aplique a la planta, y además se tienen ciertas condiciones que garantizan que si esta entrada es acotada, el error también lo es. A continuación se analiza el desempeño del observador para dos tipos de entrada acotada: entrada constante y entrada sinusoidal.

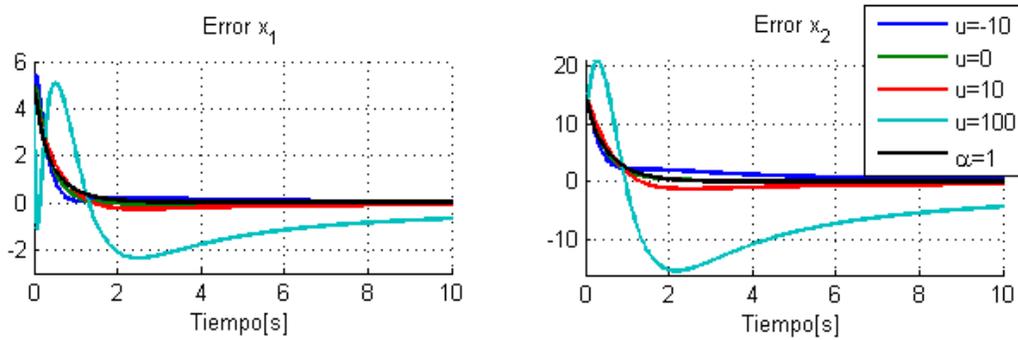
Si la entrada es constante de magnitud K , su transformada de Laplace es $U(s) = \frac{K}{s}$, con lo cual cumpliendo las condiciones suficientes de estabilidad BIBO deducidas, mediante el Teorema del Valor Final (es aplicable dado que el polo en 0 es simple) es posible calcular el error en estado estacionario del sistema. Utilizando las propiedades de la matriz adjunta $adj(\cdot)$ que se presentan en (3.25) se llega a que el error de observación en estado estacionario cuando la entrada $u(t) = K$ es nulo, con lo que se logra convergencia asintótica del error de observación a cero como se aprecia en (3.26).

$$\begin{aligned} \text{Si } A \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\ A^{-1} &= \frac{adj(A)}{\det(A)} \\ A \cdot adj(A) &= adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I \end{aligned} \quad (3.25)$$

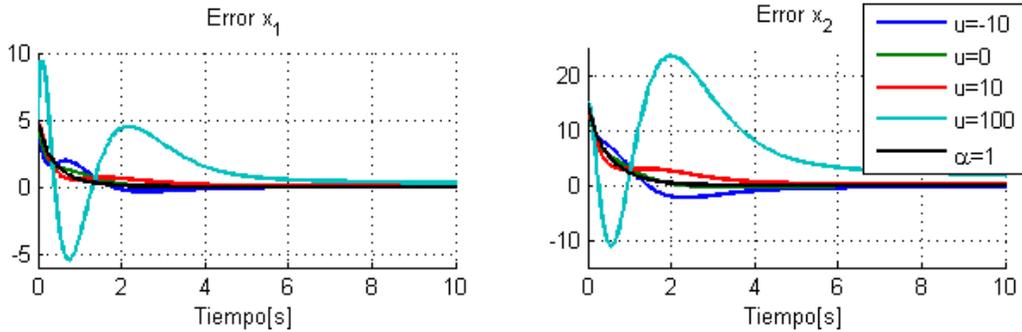
$$\begin{aligned}
e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} (sE_x(s)) &= \left\{ (A - FC^T)^{-1} - A^{-1} - (A - FC^T)^{-1} FC^T A^{-1} \right\} \cdot BK \\
&= \left\{ -\frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} + \frac{\text{adj}(A - FC^T)}{\det(A - FC^T)} \cdot \left(I - FC^T \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \right) \right\} \cdot BK \\
&= \left\{ -\frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} + \frac{\text{adj}(A - FC^T)}{\det(A - FC^T) \cdot \det(A)} \cdot (A - FC^T) \cdot \text{adj}(A) \right\} \cdot BK \\
&= \left\{ -\frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} + \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} \right\} \cdot BK \\
&= 0_{n \times n} \cdot BK \\
&= 0_{n \times 1}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

La invertibilidad de A y $A - FC^T$ viene dada por las condiciones de estabilidad, pues estas matrices no pueden tener valores propios en 0.

En la Figura 3.1 se presenta el error de observación obtenido para distintas entradas constantes. En 3.2a se muestra el caso $\alpha = 0.8$ y en 3.2b el caso $\alpha = 1.2$. En la Tabla 3.1 se presenta el tiempo de estabilización, sobreoscilación y error permanente del error de observación en todos los casos.



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 3.1: Error de observación Luenberger fraccionario para entradas constantes

α	$u(t)$	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
		$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.8	-10	0.75	3.8	0	6.34	0	0
	0	1.02	0.8	0	1.55	0	0
	10	3.23	5.4	0	5.12	8.1	0
	100	8.82	104.8	0	48.60	139.2	0
1	Cualquiera	1.46	0	0	1.69	0	0
1.2	-10	3.29	38.8	0	4.39	14.7	0
	0	1.91	0	0	1.75	0	0
	10	3.36	13.4	0	3.85	20.6	0
	100	10.90	188.4	0	25.20	158.4	0

Tabla 3.1: Desempeño observador Luenberger fraccionario para entradas constantes

Uno de los puntos más importantes a destacar en este caso es que cualquier entrada $u(t)$ constante afecta en la etapa transiente del error de observación, no así en el estado estacionario del mismo, pues se demuestra y comprueba por simulaciones que el error en estado estacionario es 0 para todos los casos.

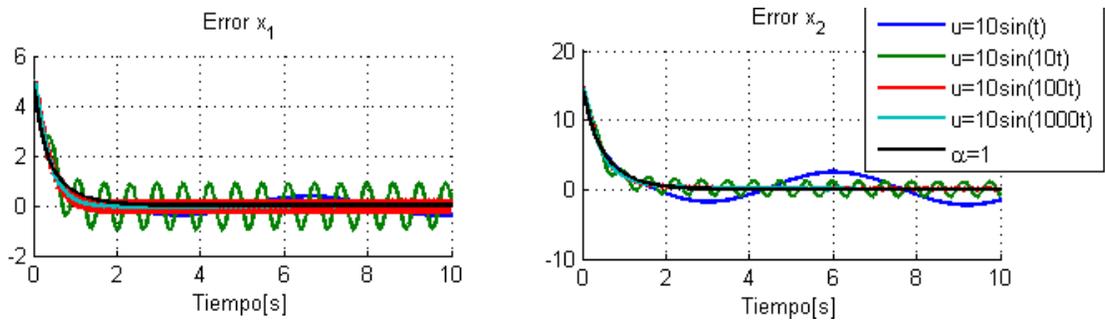
Un efecto importante de la influencia de $u(t) = K$ en el transiente es que, en casi todos los casos, al aumentar la magnitud de la entrada aumenta el tiempo de estabilización y su sobreoscilación, por lo que es posible señalar la tendencia al deterioro del desempeño del observador a medida que aumenta la magnitud de la entrada constante. Esto se debe a que, al aumentar la magnitud de la constante K , el término del error de observación que depende de $u(t)$ demora más en decaer a cero.

Es de interés destacar que en el observador clásico de Luenberger de orden entero el error de observación no depende de la entrada $u(t)$ que se aplique, razón por la cual se presenta como una única línea en los gráficos de la Figura 3.1. De la Tabla 3.1 se desprende que para el caso $u(t) = 0$ y $\alpha = 0.8$ el desempeño del observador Luenberger fraccionario es mejor que el de Luenberger de orden entero, pues en ambos estados obtiene un menor tiempo de estabilización, y presenta sólo sobreoscilación de 0.8% en x_1 lo cual se considera despreciable. Este desempeño superior del observador de Luenberger fraccionario se debe a que en este caso la dinámica fraccionaria converge más rápidamente a la banda de estabilización, aunque cabe señalar que para ello agrega algo de sobreoscilación lo cual produce que llegue estrictamente a cero (o una banda muy cercana a él $\pm 0.5\%$) en mayor tiempo que el observador de Luenberger clásico (7.96[s] versus 2.91[s] para el primer estado).

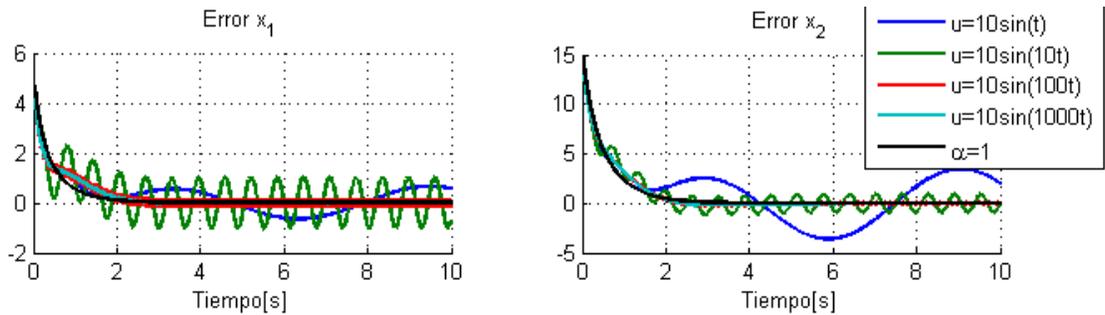
Si la entrada es una sinusoidal de modo que $u(t) = K \cdot \sin(\omega t)$, su transformada de Laplace es $U(s) = K \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ con polos complejos conjugados $s^* = \pm j\omega = |\omega| e^{j\frac{\pi}{2}}$, por lo que no se puede utilizar el Teorema del Valor Final para calcular su error permanente. Como se observa en la Figura 3.2, en este caso la salida del sistema es de carácter oscilatoria y su amplitud depende de la frecuencia de la entrada.

En la Tabla 3.2 se presenta la amplitud de la oscilación persistente en cada caso, y es posible notar que a partir de cierta frecuencia la magnitud de la oscilación presente en el error de observación tiende a decaer a medida que aumenta la frecuencia, esto se debe a que el sistema es del tipo

pasa-bajo como se muestra en la Figura 3.3.



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 3.2: Error de observación Luenberger fraccionario para entradas sinusoidales

Entrada sinusoidal	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.2$
$u(t) = 10\sin(t)$	0.39	0	0.65	2.30	0	3.48
$u(t) = 10\sin(10t)$	0.93	0	1.02	1.10	0	0.91
$u(t) = 10\sin(100t)$	0.25	0	0.17	0.26	0	0.07
$u(t) = 10\sin(1000t)$	0.06	0	0.04	0.07	0	0.02

Tabla 3.2: Amplitud oscilación persistente del error de observación para entrada sinusoidal

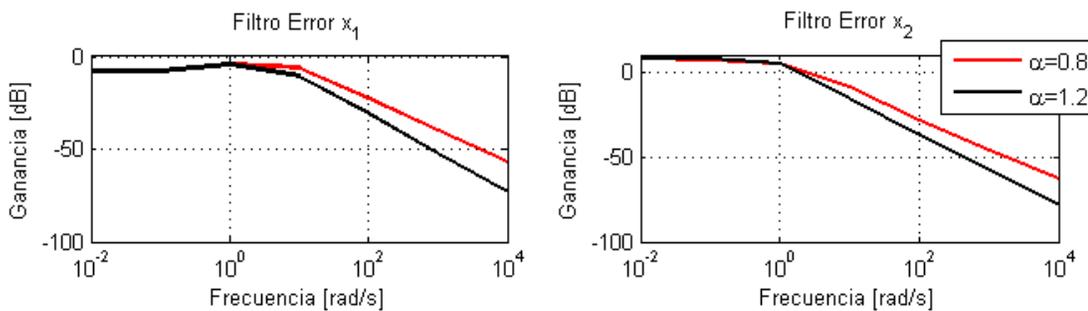


Figura 3.3: Ganancia del error de observación en función de la frecuencia

Así pues, a diferencia del caso con entrada constante, la entrada oscilatoria no sólo afecta en el transiente del error de observación sino que produce que en estado estacionario el error de observación se mantenga con oscilación persistente, cuya frecuencia coincide con la frecuencia de entrada y cuya amplitud depende de la frecuencia de la misma.

De acuerdo a (3.5) y al análisis de convergencia presentado en la Sección 3.2 , en los estados desconectados de la entrada $u(t)$ el error de observación converge asintóticamente a cero si se cumplen las condiciones de estabilidad, pero este hecho no se considera interesante pues corresponde a un caso particular.

En adelante, para no lidiar con un error con oscilación persistente, se considera entrada constante $u(t) = 5$.

3.3.2. Influencia del orden de derivación α

Utilizando los valores nominales de los parámetros ya presentados, se estudia la influencia del orden de derivación α en el desempeño del observador Luenberger fraccionario. En la Figura 3.4 se presentan separadamente el error de observación para $0 < \alpha \leq 1$ y $1 \leq \alpha < 2$ y en la Tabla 3.3 se muestra su desempeño en cuanto a error permanente, tiempo de estabilización y sobreoscilación.

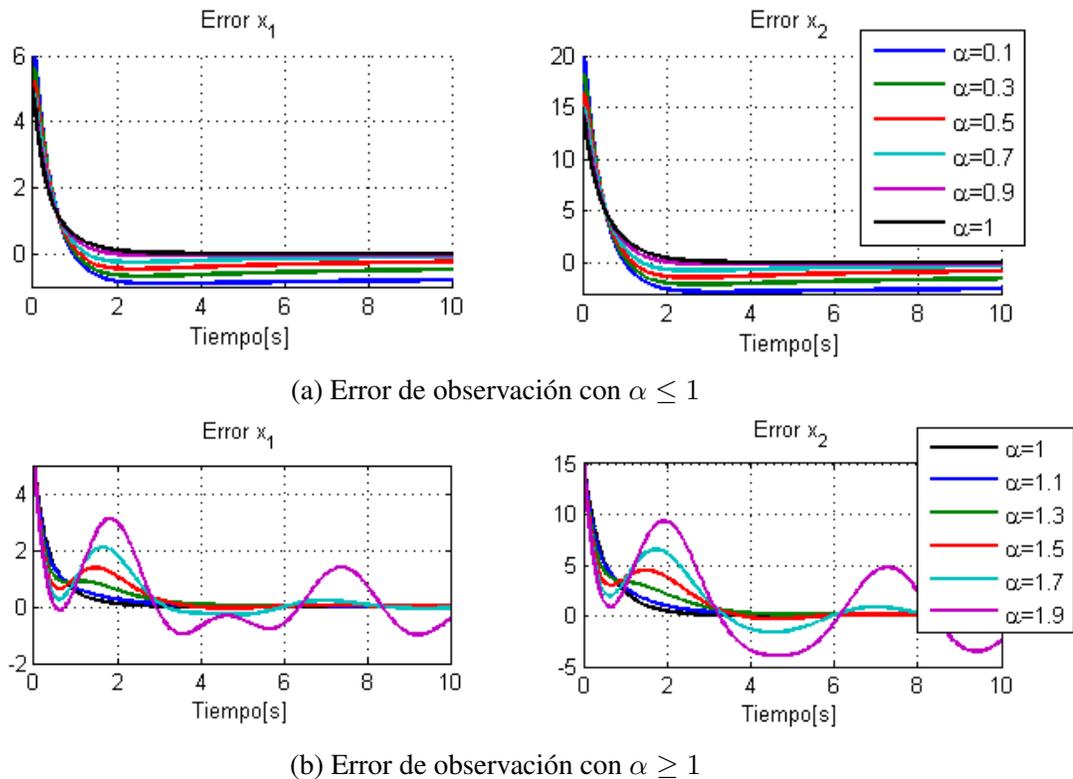


Figura 3.4: Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de α

Un primer punto que es necesario destacar es que en todos los casos presentados el error de observación tiende a cero en el infinito, esto es porque $u(t)$ es constante y porque el valor nominal de

$A - FC^T$ sitúa sus polos en el eje real negativo, cumpliéndose la condición $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ para todos los valores de α estudiados. De no cumplirse esta condición no se asegura la convergencia del error de observación a cero, efecto que se estudia en secciones siguientes.

En la Figura 3.4 se aprecia claramente una diferencia en la forma de la respuesta entre $\alpha < 1$ y $\alpha > 1$, presentando ésta últimas oscilaciones crecientes con el valor de α , las que no se observan en el primer caso. Este comportamiento se debe a las características propias de las funciones de Mittag-Leffler, que son las que rigen la dinámica de los sistemas fraccionarios. Así pues, se logra apreciar la relación entre la dinámica de las funciones de Mittag-Leffler en la Figura 2.1 y la dinámica del observador Luenberger de orden fraccionario en la Figura 3.4.

α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$t_s[s]$	MOV[%]	e_{ss}	$t_s[s]$	MOV[%]	e_{ss}
0.1	136.41	18.2	0	149.73	18.6	0
0.3	42.62	13.6	0	49.01	14.2	0
0.5	10.09	9.4	0	11.77	9.3	0
0.7	2.98	5.2	0	3.37	5.3	0
0.9	1.22	1.2	0	1.41	1.2	0
1	1.46	0	0	1.69	0	0
1.1	2.03	0	0	2.27	0	0
1.3	2.89	17.8	0	3.07	0	0
1.5	3.02	27.4	0	3.19	29.9	0
1.7	5.27	42.0	0	7.39	43.6	0
1.9	17.28	61.8	0	22.45	62.1	0

Tabla 3.3: Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos valores de α

En la Tabla 3.3 se aprecia que el tiempo de estabilización disminuye a medida que α aumenta hasta 0.9, valor de α a partir del cual el tiempo de estabilización vuelve a aumentar. De este modo, pareciera que $\alpha = 0.9$ es el mejor en cuanto a t_s dentro de los valores estudiados, sin embargo no se puede asegurar que constituya un óptimo pues sería necesario estudiar su vecindad en detalle. Esto se explica ya que para $\alpha < 1$ el descenso del error de observación es bastante abrupto en primera instancia, generándose una sobreoscilación que se va recuperando lentamente hasta llegar a cero. Para valores bajos de α esta sobreoscilación es mayor y a su vez su dinámica de recuperación para llegar a cero es más lenta, lo cual produce un tiempo de estabilización alto. Para valores de α cercanos a 1 esta sobreoscilación es menor, por lo que alcanza a entrar en la banda de estabilización antes de la sobreoscilación, razón por la cual otorga un t_s menor que el de $\alpha = 1$.

Para el caso de $\alpha > 1$ la sobreoscilación es igual o significativamente mayor que en el caso $\alpha = 1$, esto se debe al carácter oscilatorio de las funciones de Mittag-Leffler, lo cual provoca a su vez que los tiempos de estabilización aumenten pues el error de observación demora en alcanzar la banda del 5% en torno a cero.

Así pues, en relación al tiempo de estabilización se encuentran ventajas de utilizar el observador de Luenberger fraccionario con valores de α cercanos a 1 por abajo.

Es de interés entonces estudiar cómo se comporta el observador de Luenberger fraccionario con órdenes α cercanos a 1. En la Figura 3.5 se presenta un acercamiento del error de observación para valores de $\alpha \approx 1$, aproximándose por arriba y por abajo. En ella se observa que mientras la respuesta con $\alpha < 1$ se aproxima significativamente a la respuesta del observador de Luenberger de orden entero a medida que $\alpha \rightarrow 1^-$, los observadores con órdenes $\alpha > 1$ no se acercan simétricamente a la respuesta del observador de orden 1, sino que mantienen cierta distancia (a pesar de que todos ellos tienden a cero en el infinito).

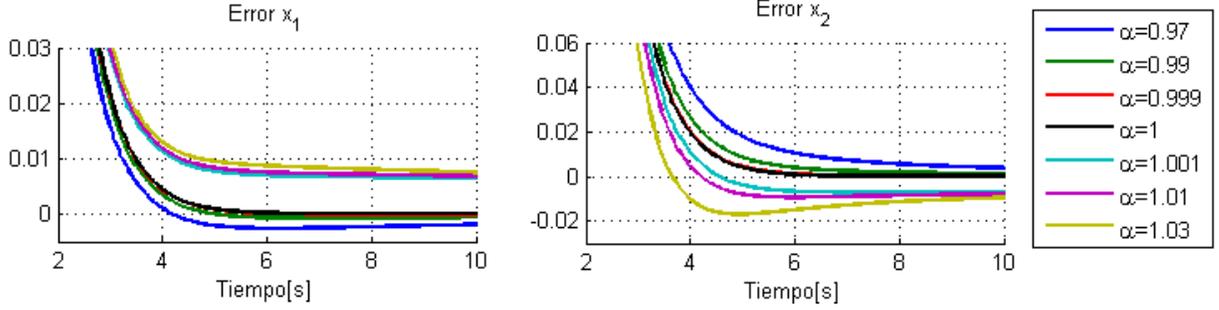


Figura 3.5: Error de observación Luenberger fraccionario para $\alpha \approx 1$ con $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

Esta falta de simetría que existe entre $\alpha < 1$ y $\alpha > 1$ con respecto al observador de Luenberger de orden entero se debe a la propiedad de la derivada de Caputo que se presenta en (3.27). Es decir, se debe a que el operador derivada fraccionaria es continuo cuando se aproxima por debajo a un valor entero, sin embargo al aproximarse por arriba las condiciones iniciales influyen en que no converja directamente al operador derivada de orden entero. Esto se comprueba en la Figura 3.6, donde se han fijado en cero las condiciones iniciales del observador ($\hat{x}(0) = \hat{x}^{(1)}(0) = 0$). En ella ya no se observa una diferencia significativa en el acercamiento del error de observación para $\alpha \rightarrow 1^-$ y $\alpha \rightarrow 1^+$, sino que se logra una simetría entre ambos grupos.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} [{}^C_0 D_t^\alpha x(t)] &= \frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} - x^{(m-1)}(0) \\ \lim_{\alpha \rightarrow (m)^-} [{}^C_0 D_t^\alpha x(t)] &= \frac{d^m x(t)}{dt^m} \end{aligned} \quad (3.27)$$

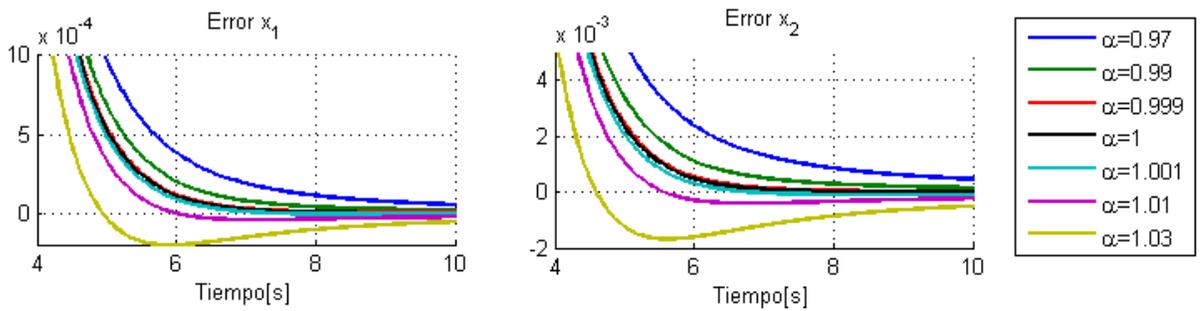


Figura 3.6: Error de observación Luenberger fraccionario para $\alpha \approx 1$ con $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.3.3. Influencia de la matriz de evolución A

Del conocimiento que se tiene del observador de Luenberger de orden entero se sabe que la dinámica de su error de observación es de la forma $\dot{e}_x(t) = (A - FC^T) \cdot e_x(t)$, por lo que para un factor de corrección F fijo, la matriz de evolución A afecta en cuanto a la velocidad de convergencia del error de observación, pero si el par (A, C^T) es observable, siempre es posible encontrar un F que sitúe los polos arbitrariamente y logre convergencia asintótica del error de observación.

En el caso del observador de Luenberger fraccionario se agregan restricciones para la estabilidad del error de observación, pues dentro de las condiciones suficientes para su estabilidad BIBO se encuentra que los valores propios de A deben estar en el semiplano izquierdo complejo abierto. Así pues, se estudia el desempeño del observador Luenberger de orden fraccionario en función a la ubicación de los polos de la matriz de evolución A .

Se utilizan 4 matrices A : una levemente inestable (valor propio positivo pero muy cercano a cero); dos asintóticamente estable (con polos complejos conjugados y polos reales distintos); y una estable (con un valor propio en 0 y el otro en -5), tal como se muestra en la Tabla 3.4.

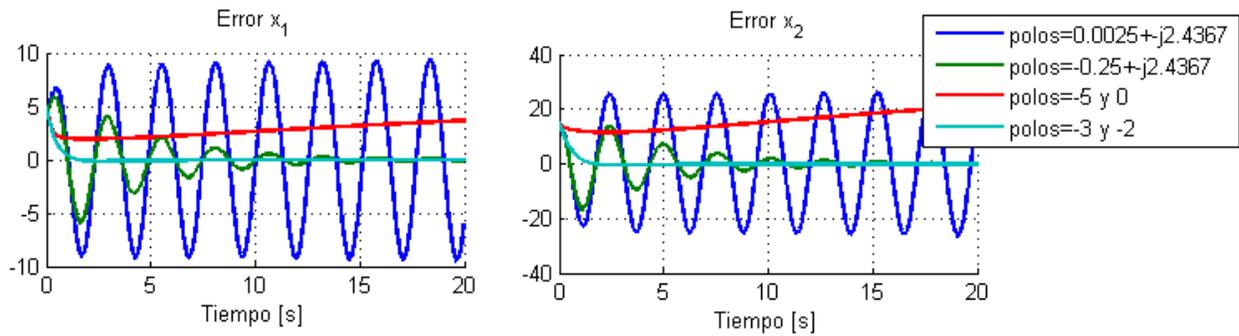
α	Valores propios de A		Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
			$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.8	$0.0025 \pm j2.4367$	(Inestable)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	$-0.25 \pm j2.4367$	(A.E.)	14.68	117.6	0	13.03	111.6	0
	-5 y 0	(Estable)	232.15	220.9	7.53	188.31	112.3	43.7
	-3 y -2	(A.E.)	1.09	3.0	0	1.22	3.13	0
1	$0.0025 \pm j2.4367$	(Inestable)	6.51	122.1	0	6.12	76.9	0
	$-0.25 \pm j2.4367$	(A.E.)	4.23	112.0	0	3.83	56.8	0
	-5 y 0	(Estable)	13.45	0	0	17.32	0	0
	-3 y -2	(A.E.)	1.45	0	0	1.69	0	0
1.2	$0.0025 \pm j2.4367$	(Inestable)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	$-0.25 \pm j2.4367$	(A.E.)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	-5 y 0	(Estable)	107.31	0	-4.98	128.71	0	-28.9
	-3 y -2	(A.E.)	2.57	0	0	2.78	0	0

Tabla 3.4: Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos A

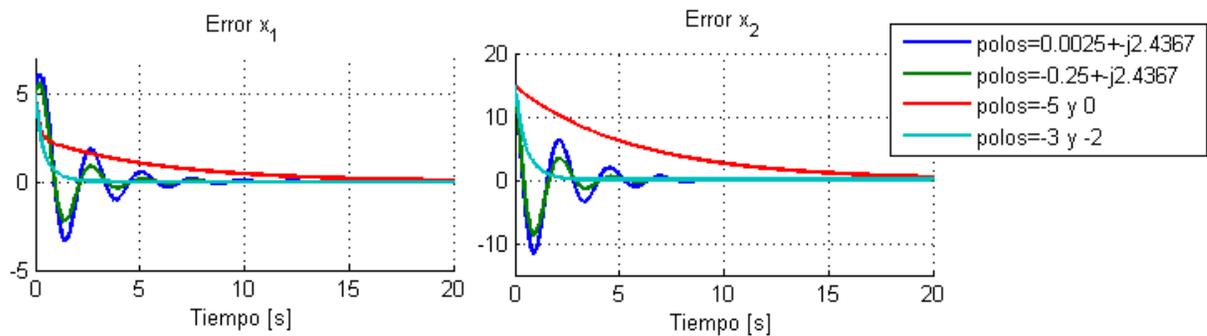
En la Figura 3.7 se muestra el error de observación del observador Luenberger fraccionario para las distintas matrices A (el resto de los parámetros son los nominales). En ella se observa que para $\alpha = 1$ (Figura 3.7b) el error de observación converge para todas las matrices A y, de acuerdo con la teoría, la velocidad de convergencia varía de acuerdo a la ubicación de los polos de $(A - FC^T)$.

Por otra parte, la matriz A inestable produce un error divergente para $\alpha \neq 1$, de hecho en la Figura 3.7c no se muestra pues su rápida divergencia impediría distinguir visualmente el resto de las señales de interés. Esta divergencia se debe a que, como se desprende del análisis de estabilidad realizado, el observador de Luenberger fraccionario no logra modificar directamente los polos de la matriz A debido a la diferencia entre el orden de la planta y el orden del observador, razón por la cual la dinámica de la planta es apreciable directamente en la dinámica del error de observación.

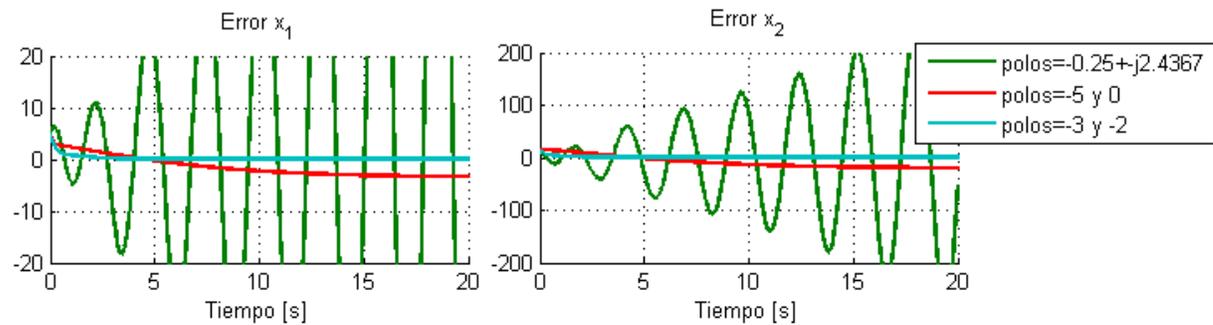
De este modo, al tratarse de una planta inestable el error de observación diverge, y en el caso de una planta estable (con un valor propio en 0 y el otro en el semiplano izquierdo complejo) se genera un error en estado estacionario como se aprecia en la Tabla 3.4.



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 3.7: Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de A

La divergencia del error de observación con A estable (polos en $-0.25 \pm j2.4367$) para $\alpha = 1.2$ se debe a que en ese caso $|\arg(\text{spec}(A - FC))| = 1.183 \cdot \frac{\pi}{2}$, por lo cual no se cumple la condición de estabilidad para $\alpha \geq 1.183$.

3.3.4. Influencia del factor de corrección F

De acuerdo al análisis de estabilidad, el factor de corrección F se debe elegir de acuerdo a la matriz de evolución A y al orden del observador α de manera que se cumpla la desigualdad $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

En la Figura 3.8 se presenta el error de observación al utilizar $F = \begin{bmatrix} 10 \\ 106.5 \end{bmatrix}$ y el resto de los parámetros nominales. Esta elección de F ubica los polos de $(A - FC^T)$ en $-7.5 \pm j7.5$, por lo tanto se cumple la desigualdad de estabilidad para $\alpha < 1.5$.

Este resultado teórico se verifica al observar la Figura 3.8 y la Tabla 3.5, pues se aprecia que el error de observación diverge en oscilaciones de amplitud ascendente para $\alpha = 1.75$ y para $\alpha = 1.5$ (aunque en este caso la divergencia es más lenta al encontrarse en la igualdad de la condición).

Para los demás valores de α se logra convergencia asintótica del error de observación a cero, tal como se desprende de la teoría, y en cuanto al tiempo de estabilización se aprecia una tendencia a disminuir a medida que α se acerca al rango entre 0.75 y 1 en ambos sentidos, pero para la sobreoscilación la tendencia no es tan clara, pues en uno de los estados es ascendente a medida que aumenta α , y en el otro tiene un mínimo cerca de $\alpha = 0.75$.

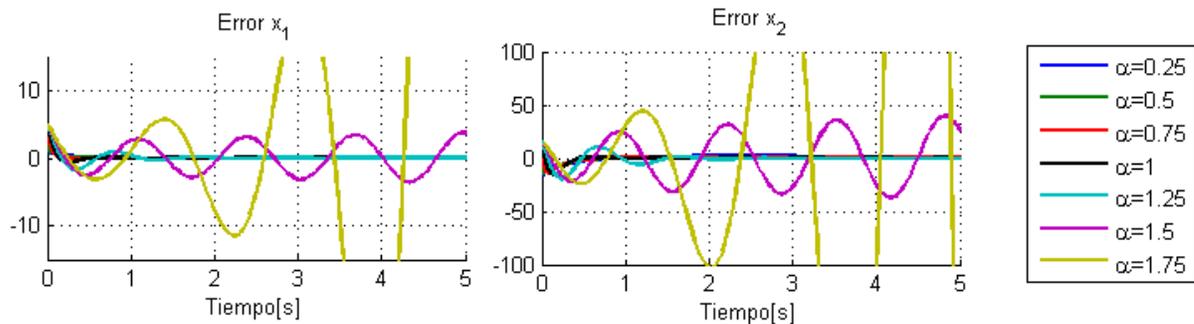


Figura 3.8: Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de α

α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.25	0.31	0	0	25.73	113.4	0
0.5	0.23	0	0	4.54	94.7	0
0.75	0.11	0.8	0	0.62	92.4	0
1	0.41	13.2	0	0.41	103.8	0
1.25	1.41	35.2	0	2.34	131.1	0
1.5	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
1.75	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					

Tabla 3.5: Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos valores de α para $F = \begin{bmatrix} 10 \\ 106.5 \end{bmatrix}$

Un conocido resultado del observador de Luenberger de orden entero, es que se puede sintonizar la velocidad de convergencia del error de observación arbitrariamente, pues la dinámica de éste depende únicamente de la matriz $(A - FC^T)$, la cual es modificable de acuerdo al factor F . En este contexto, se intenta analizar la velocidad de convergencia del error de observación utilizando valores de F que ubiquen los polos de la matriz $(A - FC^T)$ en el eje real negativo (de manera que resulte estable para $\alpha \in (0, 2)$) y con distintos órdenes de magnitud.

Se utilizan 3 valores de F que generan polos del orden de -10 , -100 y -1000 como se observa en la Tabla 3.6, y la dinámica del error de observación resultante se muestra en la Figura 3.9.

α	Valores propios de $A - FC^T$		Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	F	Valores propios	$t_s [s]$	$MOV [\%]$	e_{ss}	$t_s [s]$	$MOV [\%]$	e_{ss}
0.8	[15; 95]	-11 y -9	0.1400	0.8	0	0.62	45	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.0140	8.4	0	0.51	1138	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.0016	12.8	0	0.48	12100	0
1	[15; 95]	-11 y -9	0.3200	6.0	0	0.55	54	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.0400	12.0	0	0.08	1151	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.0040	13.4	0	0.01	12180	0
1.2	[15; 95]	-11 y -9	0.4700	19.6	0	0.83	72	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.1400	55.4	0	1.85	1769	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.1400	105.4	0	0.36	34613	0

Tabla 3.6: Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintos F

Para el caso $\alpha = 1$ se observa que existe una disminución significativa del tiempo de estabilización a medida que los polos de la matriz $(A - FC^T)$ se alejan del eje imaginario, a la vez que se produce un aumento significativo en la sobreoscilación de la respuesta pues existe una compensación entre ambas características.

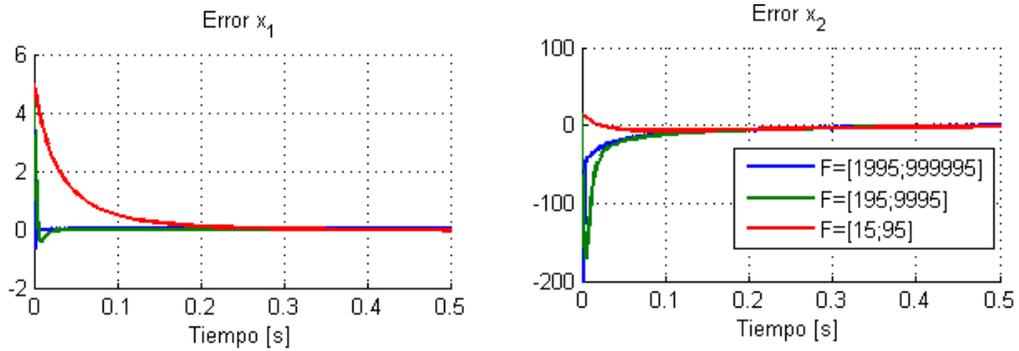
En el caso de $\alpha \neq 1$ se observa claramente una tendencia de aumento en la sobreoscilación a medida que los polos de la matriz $(A - FC^T)$ se alejan del eje imaginario, sin embargo sólo se observa una disminución del tiempo de estabilización para uno de los estados con $\alpha = 0.8$, pero esta tendencia no se extiende al segundo estado que es más importante desde el punto de vista de observación pues en esta formulación $y(t) = x_1(t)$. El hecho se vuelve más claro en $\alpha > 1$, en el cual no se aprecia ninguna tendencia clara en cuanto al tiempo de estabilización y, es más, se repite t_s para dos casos en que los valores propios de $(A - FC^T)$ se diferencian en un orden de magnitud.

Este resultado se explica debido a que la dinámica del error de observación en el caso de Luenberger fraccionario está regida de acuerdo a las raíces de $P(s)$ que se muestra en (3.28), de modo que no depende únicamente de un término modificable, sino que está restringida por la velocidad de convergencia de la planta.

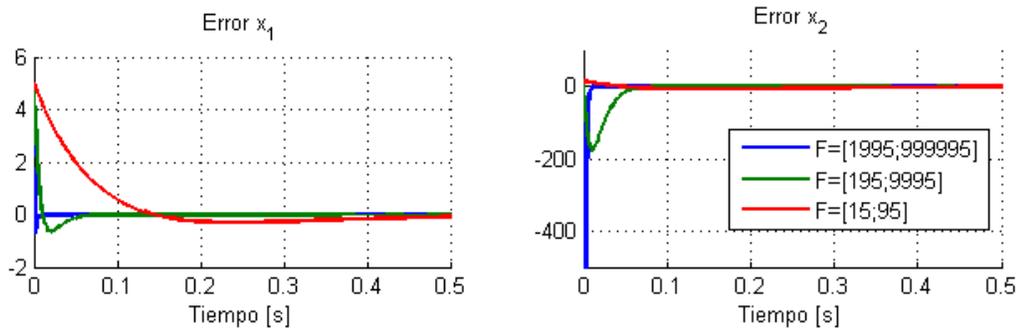
$$P(s) = \det(s^\alpha I - (A - FC^T)) \cdot \det(sI - A) \quad (3.28)$$

Así pues, si bien la elección de F se debe realizar de manera cuidadosa de modo que cumpla

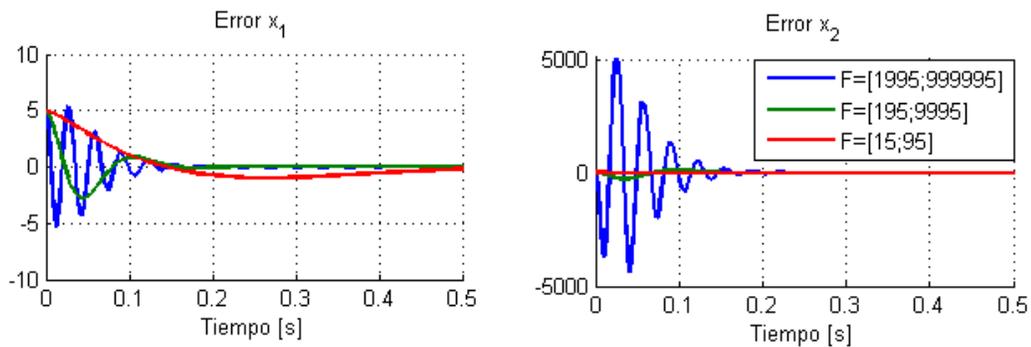
las condiciones de estabilidad, en el caso de Luenberger fraccionario no es posible modificar arbitrariamente la velocidad de convergencia del error de observación, pues esta está limitada por la ubicación de los valores propios de la matriz A .



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 3.9: Error de observación Luenberger fraccionario para distintos valores de F

3.3.5. Influencia de las condiciones iniciales

En la expresión que tiene el error de observación en el dominio de Laplace (3.5) se hace difícil encontrar una factorización que permita unificar los términos dependientes de las condiciones iniciales de la planta $x(0)$ y los del observador $\hat{x}^{(k)}(0)$ de manera de expresar la dinámica del error de observación en función de su condición inicial $e_x(0)$ como es posible en el caso de Luenberger de orden entero (3.29).

$$E_x(s) = (sI - (A - FC^T))^{-1} \cdot e_x(0) \quad (3.29)$$

De (3.29) se desprende que la condición inicial del error de observación es determinante en cuanto a la velocidad de convergencia del mismo, tal como se observa en la Tabla 3.7 y Figura 3.10b. En ellas se observa que a medida que disminuye la magnitud de la condición inicial del error de observación disminuye tanto el tiempo de estabilización como la sobreoscilación, llegando al límite en que si las condición inicial del observador coincide con la condición inicial de la planta, el error de observación se mantiene nulo permanentemente.

α	Condición inicial		Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$x_1(0) - \hat{x}_1(0)$	$x_2(0) - \hat{x}_2(0)$	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.8	0	0	6.03	89.1	0	41.61	260.0	0
	5	5	3.61	8.8	0	8.72	56.4	0
	30	10	1.47	20.5	0	4.94	84.7	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	5	0.48	2.8	0	1.81	21.8	0
	30	10	1.32	8.2	0	2.32	64.6	0
1.2	0	0	6.12	88.4	0	20.29	259.1	0
	5	5	3.63	8.8	0	8.71	56.0	0
	30	10	1.46	20.4	0	4.90	84.7	0

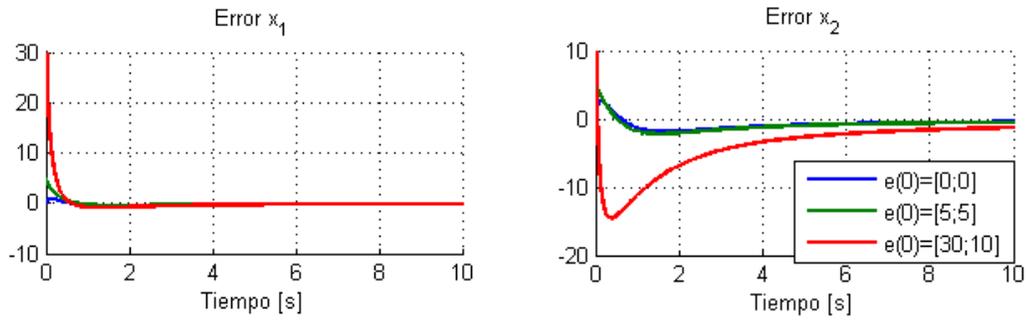
Tabla 3.7: Desempeño observador Luenberger fraccionario para distintas condiciones iniciales

Esta característica es deseable en los observadores pues indica que si se tiene conocimiento o una buena aproximación con respecto a la condición inicial de la planta, el error de observación tiende rápidamente a cero o se mantiene nulo de manera permanente. Sin embargo, en la Figura 3.10 y en la Tabla 3.7 no se observa una relación entre la condición inicial del error de observación y la rapidez de convergencia en el caso Luenberger fraccionario. De hecho, en el caso en que $\alpha \neq 1$ y el error se inicia en cero se obtiene un tiempo de estabilización mayor y sobreoscilación mayor que en los otros dos casos.

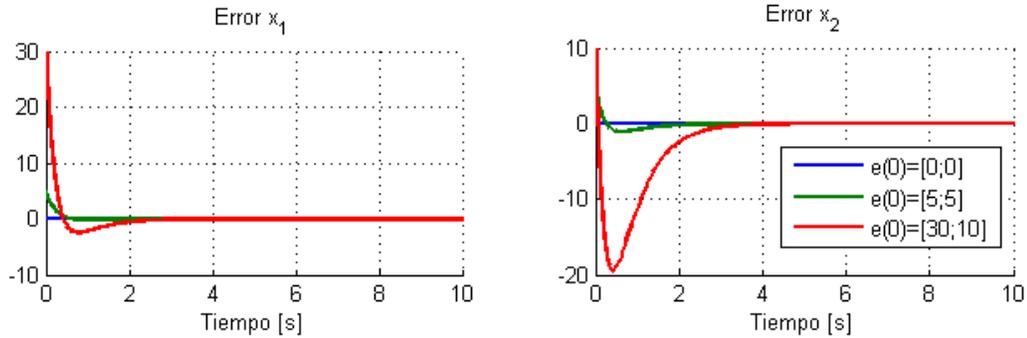
Este resultado se debe a que la dinámica entera se rige mediante funciones exponenciales y la dinámica fraccionaria se rige mediante funciones de Mittag-Leffler, razón por la cual los términos no se cancelan y no es de interés cuán lejos se inicia una condición inicial de la otra, sino que cuán rápido decae cada una de ellas a cero. Las simulaciones que se presentan en la Figura 3.10 tienen las condiciones iniciales que se muestran en la Tabla 3.8, y la magnitud de $\hat{x}(0)$ es la que explica los tiempos de estabilización y sobreoscilación de la Tabla 3.7.

$e_{x_1}(0)$	$e_{x_2}(0)$	$x_1(0)$	$\hat{x}_1(0)$	$x_2(0)$	$\hat{x}_2(0)$
0	0	10	10	20	20
5	5	10	5	20	15
30	10	10	-20	20	10

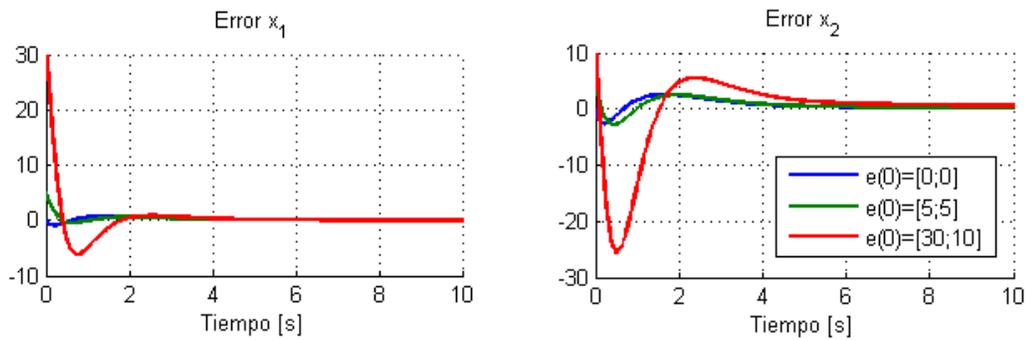
Tabla 3.8: Condiciones Iniciales de la planta y el observador



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 3.10: Error de observación Luenberger fraccionario para distintas condiciones iniciales

3.4. Análisis de Desempeño en Caso No Ideal

En esta sección se estudia el desempeño del observador de Luenberger fraccionario para una planta de orden entero en el caso no ideal, es decir, con desconocimiento en los parámetros y en presencia de perturbaciones.

3.4.1. Desconocimiento en parámetros

Se plantea el problema de desconocimiento en los parámetros A y B de la planta de la siguiente manera. Sea la planta lineal que se muestra en (3.30), con los parámetros $A = \hat{A} + \Delta A$ y $B = \hat{B} + \Delta B$ de modo que tienen una desviación con respecto a su valor nominal conocido. El observador se diseña con los parámetros nominales como se muestra en (3.31).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C^T \cdot x(t)\end{aligned}\quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= \hat{A} \cdot \hat{x}(t) + \hat{B} \cdot u(t) + F \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) &= C^T \cdot \hat{x}(t)\end{aligned}\quad (3.31)$$

Desarrollando en el dominio de Laplace, sujeto a que A sea estable y a que se cumpla la condición de estabilidad $\left| \arg \left(\text{spec}(\hat{A} - FC^T) \right) \right| > \alpha \frac{\pi}{2}$, es posible calcular el error en estado estacionario que se induce al existir un desconocimiento en los parámetros A y B de la planta. Tanto para el observador de Luenberger de orden entero como para el fraccionario se tiene el error en estado estacionario que se muestra en (3.32), donde K corresponde a la magnitud de la entrada $u(t) = K$ constante.

$$e_{ss} = \left(-\hat{A} + FC^T \right)^{-1} \left((-\hat{A})(-A)^{-1}B \cdot K - \hat{B} \cdot K \right)\quad (3.32)$$

El límite de desconocimiento que permite el sistema para que el error de observación sea acotado no tiene que ver con la magnitud del desconocimiento (ΔA o ΔB), sino más bien tiene relación con los valores reales de la matriz A . El error de observación se mantiene acotado si los valores propios de la matriz A se encuentran en el semiplano izquierdo complejo abierto. En la Figura 3.11 se presenta un ejemplo en que $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ es inestable, existe un leve desconocimiento $\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y en este caso $\Delta B = 0$. En él se aprecia que el error de observación diverge para todos los α , incluso para el observador Luenberger de orden entero.

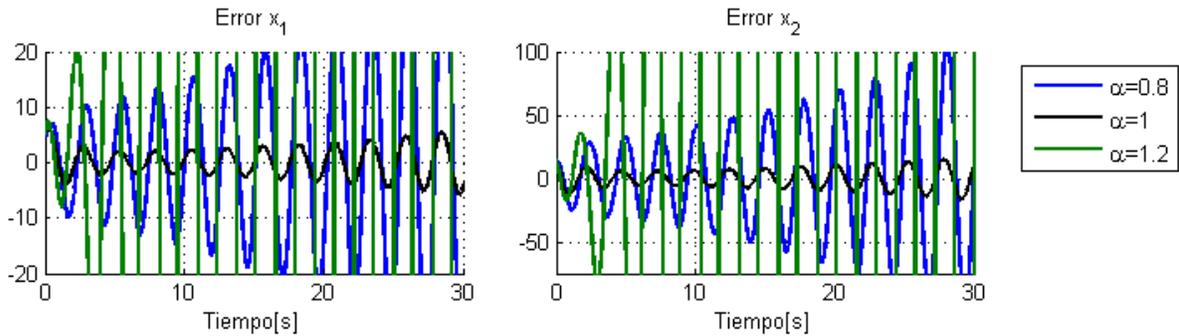


Figura 3.11: Error de observación Luenberger fraccionario con leve desconocimiento de A (inestable)

Para evitar el problema de la divergencia del error de observación se fija $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ en su valor nominal estable y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Se introduce un desconocimiento en A y B separadamente, y en la Figura 3.12 y la Tabla 3.9 se presenta el desempeño del error de observación.

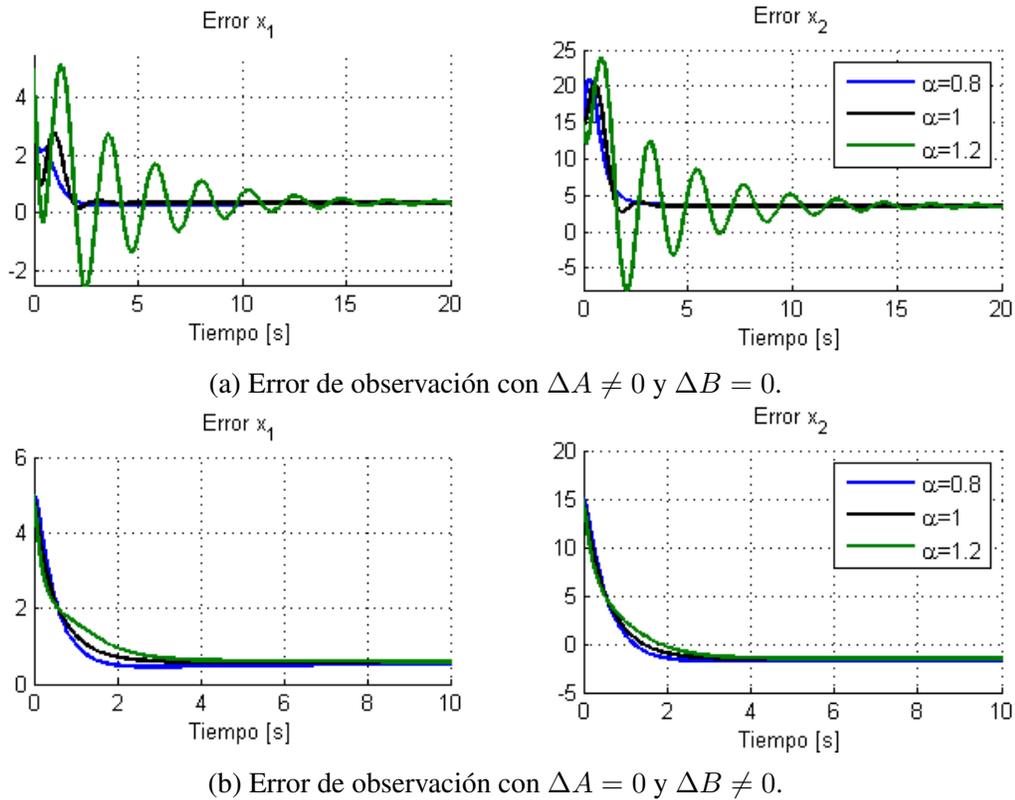


Figura 3.12: Error de observación con desconocimiento de parámetros.

Desconocimiento	α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
		$t_s[s]$	MOV [%]	e_{ss}	$t_s[s]$	MOV [%]	e_{ss}
$\Delta A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$	0.8	1.64	40.1	0.3472	2.31	152.4	3.5417
	1	1.75	52.5	0.3472	2.03	178.5	3.5417
	1.2	12.71	102.8	0.3472	13.38	177.7	3.5417
$\Delta B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	0.8	1.23	2.6	0.5714	1.45	1.4	-1.5714
	1	1.72	0	0.5714	1.82	0	-1.5714
	1.2	2.48	0	0.5714	2.36	0	-1.5714

Tabla 3.9: Desempeño observador Luenberger fraccionario con desconocimiento de parámetros

En el caso en que $\Delta A \neq 0$ y $\Delta B = 0$ se tiene el error en estado estacionario que se presenta en (3.33), el cual coincide con los resultados obtenidos en las simulaciones. A su vez, cuando $\Delta B \neq 0$ y $\Delta A = 0$ se tiene el error en estado estacionario que se presenta en (3.34), lo cual también coincide con los resultados obtenidos de la simulación.

$$e_{ss} = \left(-\hat{A} + FC^T\right)^{-1} ((\Delta A)(-A)^{-1}B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0.3472 \\ 3.5417 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$e_{ss} = \left(-\hat{A} + FC^T\right)^{-1} (\Delta B \cdot K) = \begin{bmatrix} 0.5714 \\ -1.5714 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Es importante señalar que en este caso la simulación corresponde a una entrada $u(t) = 5$, y este parámetro influye fuertemente en el error en estado estacionario, pues lo amplifica directamente. De este modo, si la entrada a la planta es nula, el error en estado estacionario también lo es si se cumplen las condiciones de estabilidad.

3.4.2. Presencia de perturbaciones

Se considera una perturbación aditiva $n(t)$ a la salida de la planta de modo que $y(t) = C^T \cdot x(t) + n(t)$. Al analizar en el dominio de Laplace la respuesta del sistema ante esta perturbación se obtiene la ecuación que se presenta en (3.35), donde se aprecia que la perturbación en la salida de la planta se manifiesta sumando al error de observación del caso sin perturbación ($E_x(s)_{SP}$) un término que corresponde a un filtro de la perturbación $n(t)$.

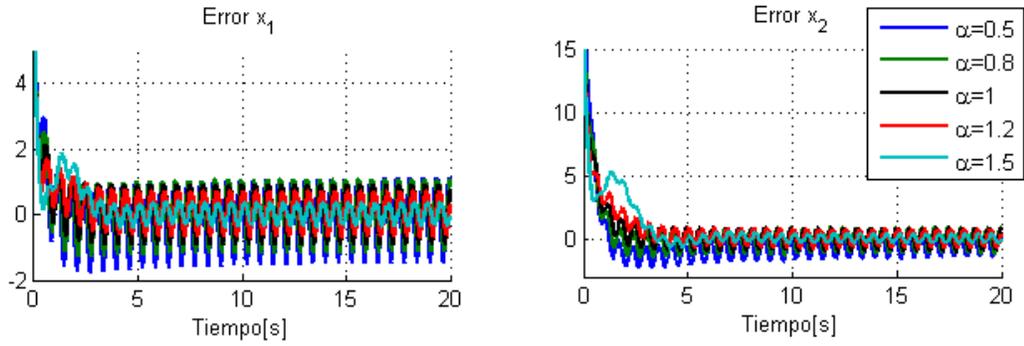
$$E_x(s)_{CP} = E_x(s)_{SP} - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} F \cdot N(s) \quad (3.35)$$

En la Figura 3.13 se presenta el error de observación para una perturbación determinística del tipo $n(t) = 10\sin(10t)$ (Figura 3.13a), para una perturbación de mayor frecuencia $n(t) = 10\sin(100t)$ (Figura 3.13b), para una perturbación estocástica de ruido blanco gaussiano $n(t) \sim N(0, 100)$ (Figura 3.13c) y en la Tabla 3.10 se muestra el RMSE («Root Mean Square Error») generado entre el error de observación con perturbación y sin perturbación para cada caso.

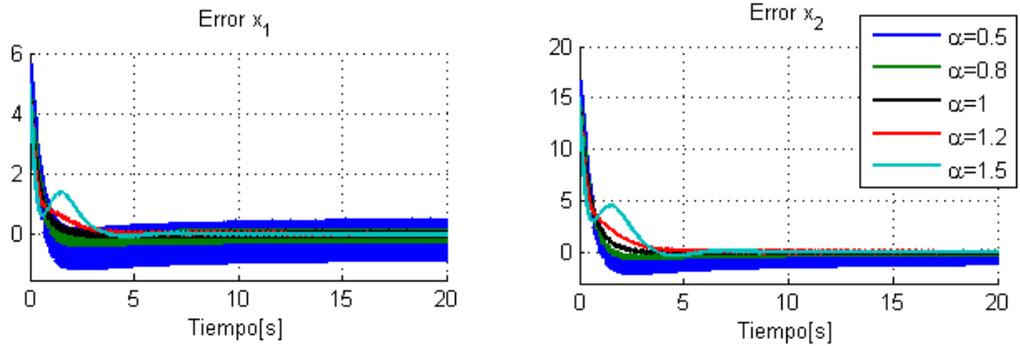
En el caso de perturbaciones determinísticas se aprecia claramente la tendencia de disminución del efecto de la perturbación (en base al RMSE) a medida que aumenta el valor de α , pero en el caso de la perturbación estocástica de ruido blanco esta tendencia no es tan clara.

α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$10\sin(10t)$	$10\sin(100t)$	$N(0, 100)$	$10\sin(10t)$	$10\sin(100t)$	$N(0, 100)$
0.5	0.880	0.251	0.088	0.388	0.223	0.068
0.8	0.626	0.026	0.024	0.542	0.026	0.019
1	0.397	0.005	0.015	0.409	0.005	0.015
1.2	0.218	0.001	0.014	0.242	0.001	0.019
1.5	0.067	0.000	0.018	0.081	0.001	0.045

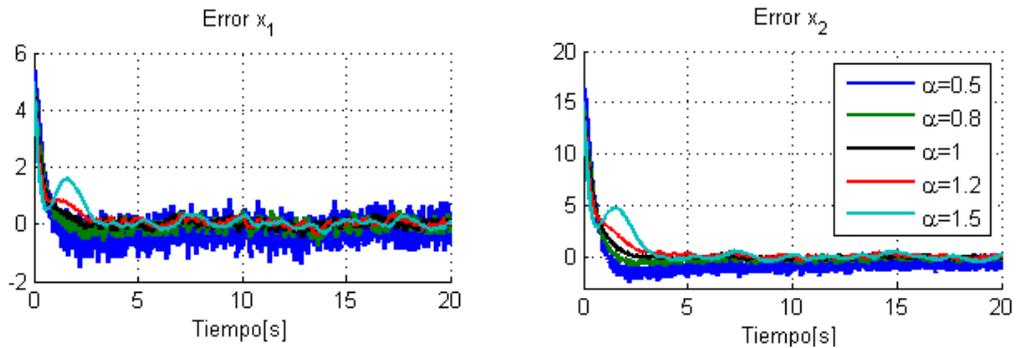
Tabla 3.10: RMSE de observador en presencia de perturbación a la salida



(a) Error de observación con perturbación $n(t) = 10\sin(10t)$.



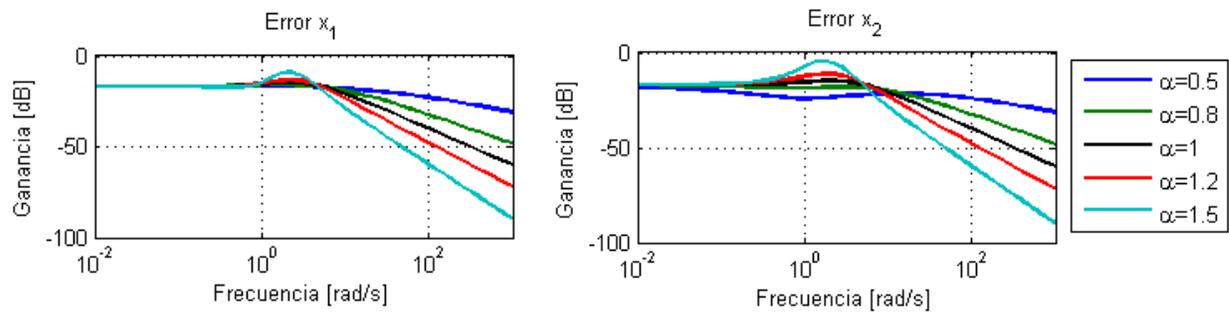
(b) Error de observación con perturbación $n(t) = 10\sin(100t)$



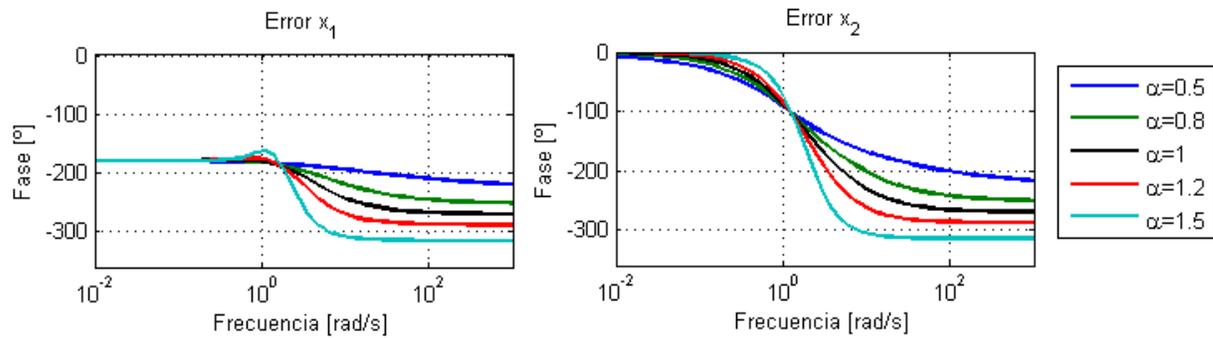
(c) Error de observación con ruido blanco $\sigma^2 = 100$

Figura 3.13: Error de observación con perturbación en la salida $y(t) = C^T x(t) + n(t)$.

En la Figura 3.14 se muestra el diagrama de bode del término dependiente de la perturbación en (3.35). En ella se aprecia que, a medida que aumenta el valor de α , la pendiente del filtro pasa-bajo aumenta. Esto se debe a que en el caso de los sistemas fraccionarios el diagrama de bode decae en $20\alpha[\frac{dB}{dec}]$ por cada polo, lo que permite acentuar la característica de filtrado de perturbaciones de alta frecuencia. Asimismo, dado que el diagrama de bode asciende en $20\alpha[\frac{dB}{dec}]$ por cada cero, para $\alpha > 1$ se aprecia un «peak» de ganancia en frecuencias bajas, lo cual se traduce en que en el caso de ruido blanco en el error de observación para $\alpha > 1$ se aprecien perturbaciones de baja frecuencia, mientras que para $\alpha < 1$ sean más importantes las perturbaciones de alta frecuencia. Esta es la razón de que en el caso del ruido blanco no se aprecie una tendencia clara en cuanto al RMSE, pues este indicador captura la información de todas las frecuencias sin distinción.



(a) Ganancia Ecuación (3.35) en función de la frecuencia de la perturbación



(b) Fase Ecuación (3.35) en función de la frecuencia de la perturbación

Figura 3.14: Diagrama de Bode

De este modo, los observadores fraccionarios con $\alpha > 1$ generan ciertas ventajas en cuanto a la robustez ante perturbaciones de alta frecuencia, pues tienen una característica de filtrado pasa-bajo más acentuada que en el caso de $\alpha = 1$.

Capítulo 4

Diseño de Observadores Fraccionarios para Plantas Enteras

En este capítulo se pretende diseñar un observador de estado de orden fraccionario aplicado a una planta entera que presente alguna ventaja con respecto al desempeño que entrega el observador del tipo Luenberger de orden fraccionario analizado en el capítulo anterior.

En la primera sección se plantea el diseño de observadores a partir de una dinámica deseada para el error de observación, considerándose el caso de dinámica lineal autónoma tanto para orden entero y como para orden fraccionario.

En la segunda sección se propone un observador similar al observador de Luenberger fraccionario pero que presenta una modificación en su entrada, lo que permite ventajas interesantes en el ámbito de la estabilidad del observador. Este observador no ha sido estudiado en la literatura, por lo que se analiza en detalle su estabilidad y la influencia de distintos factores en caso ideal y en presencia de perturbaciones y desconocimiento de parámetros.

Finalmente en la tercera sección se presenta un ejemplo de regulación por realimentación de estado y se compara el desempeño de los observadores fraccionarios versus el observador de orden entero en un lazo cerrado de control en presencia de perturbaciones.

4.1. Diseño de Observadores con Dinámica Deseada

Sea la planta lineal, SISO y de parámetros conocidos que se muestra en (4.1), donde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $y(t) \in \mathfrak{R}$, $u(t) \in \mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^n$ y $C^T \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C^T \cdot x(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Se plantea el problema de encontrar un observador fraccionario adecuado para la planta entera

(4.1), de manera que genere un error de observación que siga una dinámica deseada. Existen dos dinámicas de particular interés debido a los resultados existentes en el ámbito de la estabilidad de sistemas lineales (Teorema 2.2), ellas se muestran en (4.2) y (4.3), donde $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz arbitraria.

$$\dot{e}_x(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = M \cdot e_x(t) \quad (4.2)$$

$${}_0^C D_t^\alpha (e_x(t)) = {}_0^C D_t^\alpha (x(t) - \hat{x}(t)) = M \cdot e_x(t) \quad (4.3)$$

La información disponible para el diseño del observador son: la entrada a la planta $u(t)$, la salida de la planta $y(t)$, el estado del observador $\hat{x}(t)$ y los parámetros de la planta A , B y C^T . Dado lo anterior, se propone el observador que se muestra en (4.4) donde $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son funciones por determinar.

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= f(y(t)) + g(\hat{x}(t)) + h(u(t)) \\ \hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.1. Dinámica de orden Entero

Al considerar la definición de la derivada de Caputo, es posible aplicar la derivada fraccionaria de orden $(m - \alpha)$ a la ecuación (4.4) y de esta manera obtener una expresión para la derivada del error de observación como se muestra en (4.5) para el caso de $0 < \alpha < 1$ y en (4.6) para $1 < \alpha < 2$.

$$\begin{aligned} (0 < \alpha < 1) \\ \dot{e}_x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - {}_0^C D_t^{1-\alpha} [f(C^T x(t)) + g(\hat{x}(t)) + h(u(t))] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} (1 < \alpha < 2) \\ \dot{e}_x(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - \int_0^t ({}_0^C D_t^{2-\alpha} [f(C^T x(t)) + g(\hat{x}(t)) + h(u(t))]) dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cabe señalar que para el caso de $m = 2$ se debe considerar la integral entera para obtener la expresión de $\dot{\hat{x}}(t)$, sin embargo en este caso no se muestran las condiciones iniciales ya que son nulas por propiedad de la derivada de Caputo para $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ de clase C^2 .

- $0 < \alpha < 1$

Se desea entonces obtener la dinámica de error de observación que se presenta en (4.2), por lo tanto ésta se iguala a (4.5) en cada uno de los términos dependientes de $\hat{x}(t)$, $x(t)$ y $u(t)$ separadamente como se muestra en (4.7), (4.8) y (4.9) respectivamente.

$$\begin{aligned} M \cdot \hat{x}(t) &= {}_0^C D_t^{1-\alpha} [g(\hat{x}(t))] \\ \implies g(\hat{x}(t)) - g(t=0) &= M \cdot ({}_0 J_t^{1-\alpha} (\hat{x}(t))) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
& M \cdot x(t) = A \cdot x(t) - {}_0^C D_t^{1-\alpha} [f(C^T x(t))] \\
\implies f(C^T x(t)) - f(t=0) &= (A - M) \cdot ({}_0 J_t^{1-\alpha} (x(t))) \\
\text{Si } (A - M) = F \cdot C^T \implies f(y(t)) - f(t=0) &= F \cdot ({}_0 J_t^{1-\alpha} (y(t)))
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
0 &= B \cdot u(t) - {}_0^C D_t^{1-\alpha} [h(u(t))] \\
\implies h(u(t)) - h(t=0) &= B \cdot ({}_0 J_t^{1-\alpha} (u(t)))
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Dada la forma integral de las soluciones, es posible considerar nulas las condiciones iniciales. Al identificar $M = A - F \cdot C^T$ y reemplazar las expresiones obtenidas para $g(\hat{x}(t))$, $f(y(t))$ y $h(u(t))$ en la estructura del observador (4.4) se obtiene el observador que se muestra en (4.10) para $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}
(0 < \alpha < 1) \\
{}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= A \cdot {}_0 J_t^{1-\alpha} (\hat{x}(t)) + B \cdot {}_0 J_t^{1-\alpha} (u(t)) + F \cdot [{}_0 J_t^{1-\alpha} (y(t) - \hat{y}(t))] \\
\hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

- $1 < \alpha < 2$

En este caso se iguala término a término la dinámica deseada (4.2) a la ecuación (4.6), para encontrar la forma que deben tener las funciones $g(\hat{x}(t))$ (4.11), $f(y(t))$ (4.12) y $h(u(t))$ (4.13) para obtener la dinámica deseada.

$$\begin{aligned}
M \cdot \hat{x}(t) &= \int_0^t ({}_0^C D_t^{2-\alpha} [g(\hat{x}(t))]) dt \\
\implies g(\hat{x}(t)) - g(t=0) &= M \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\hat{\dot{x}}(t))
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
M \cdot x(t) - A \cdot x(t) &= - \int_0^t ({}_0^C D_t^{2-\alpha} [f(C^T x(t))]) dt \\
\implies f(C^T x(t)) - f(t=0) &= (A - M) \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\dot{x}(t)) \\
\text{Si } (A - M) = F \cdot C^T \implies f(y(t)) - f(t=0) &= F \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\dot{y}(t))
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
0 &= B \cdot u(t) - \int_0^t ({}_0^C D_t^{2-\alpha} [g(u(t))]) dt \\
\implies h(u(t)) - h(t=0) &= B \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\dot{u}(t))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Sin pérdida de generalidad se suponen nulas las condiciones iniciales. Ahora al considerar nuevamente que $M = A - F \cdot C^T$ y reemplazar las expresiones obtenidas para $g(\hat{x}(t))$, $f(y(t))$ y $h(u(t))$ en la estructura del observador (4.4), se llega al observador que se muestra en (4.14) para $1 < \alpha < 2$.

$$\begin{aligned}
(1 < \alpha < 2) \\
{}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= A \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\hat{\dot{x}}(t)) + B \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\dot{u}(t)) + F \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha} (\dot{y}(t) - \dot{\hat{y}}(t)) \\
\hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Se tiene entonces que el observador (4.10) sigue la dinámica entera deseada para $0 < \alpha < 1$ y el observador (4.14) cumple el mismo objetivo para $1 < \alpha < 2$, ya que generan un error de la forma $\dot{e}_x(t) = (A - FC^T)e_x(t)$, cuya estabilidad es sencilla de analizar mediante los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$.

Sin embargo, es posible notar que ambas dinámicas corresponden exactamente al observador Luenberger de orden entero, pues éste se obtiene al aplicar ${}_0^C D^{1-\alpha}(\cdot)$ en ambos lados de la ecuación (4.10), así como también al aplicar $\frac{d}{dt} ({}_0^C D^{2-\alpha}(\cdot))$ en la ecuación (4.14).

Así pues, si bien los observadores encontrados cumplen con la dinámica entera deseada para el error de observación, éstos no son propiamente de orden fraccionario sino que corresponden a observadores de orden entero, y específicamente se trata del observador de Luenberger de orden entero que está ampliamente estudiado en la literatura. Por lo tanto, se descarta el uso de estos observadores como observadores de orden no entero en el presente trabajo de título.

4.1.2. Dinámica de orden Fraccionario

Se desea que el observador diseñado genere un error de observación que siga la dinámica fraccionaria en (4.3). Para llegar a ello se aplica ${}_0 J_t^{m-\alpha}(\cdot)$ a ambos lados de la ecuación de la planta (4.1) y de este modo se obtiene una expresión para la derivada de orden α del error de observación que se muestra en (4.15) para $0 < \alpha < 1$ y para $1 < \alpha < 2$ se aplica la integral mencionada a la derivada de (4.3) obteniéndose (4.16).

$$\begin{aligned} (0 < \alpha < 1) \\ {}_0^C D_t^\alpha e_x(t) = A \cdot {}_0 J_t^{1-\alpha}(x(t)) + B \cdot {}_0 J_t^{1-\alpha}(u(t)) - f(C^T x(t)) - g(\hat{x}(t)) - h(u(t)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} (1 < \alpha < 2) \\ {}_0^C D_t^\alpha e_x(t) = A \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha}(\dot{x}(t)) + B \cdot {}_0 J_t^{2-\alpha}(\dot{u}(t)) - f(C^T x(t)) - g(\hat{x}(t)) - h(u(t)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

- $0 < \alpha < 1$

Se desea descubrir qué forma deben tener las funciones $g(\hat{x}(t))$, $f(C^T x(t))$ y $h(u(t))$ para que el error de observación siga la dinámica fraccionaria deseada que se presenta en (4.3). De este modo, se iguala la ecuación (4.15) a la dinámica deseada separando los términos que dependen de $\hat{x}(t)$, $x(t)$ y $u(t)$ y se obtienen para ellas las expresiones que se muestran en (4.17), (4.18) y (4.19) respectivamente.

$$g(\hat{x}(t)) = M \cdot \hat{x}(t) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
& M \cdot x(t) = A \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(x(t)) - f(C^T x(t)) \\
\implies f(C^T x(t)) &= A \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(x(t)) - M \cdot x(t) \\
\text{Si } A = K \cdot C^T \wedge M = F \cdot C^T \implies & f(y(t)) = K \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(y(t)) - F \cdot y(t)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
0 &= B \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(u(t)) - h(u(t)) \\
\implies h(u(t)) &= B \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(u(t))
\end{aligned} \tag{4.19}$$

De este modo se obtiene el observador de orden fraccionario (4.20) para $0 < \alpha < 1$, cuyo error de observación logra seguir la dinámica fraccionaria deseada, sujeto a que $\exists K \in \mathfrak{R}^n / A = K \cdot C^T$, esto es porque sólo se tiene acceso a la salida del sistema $y(t) = C^T x(t)$ y no directamente a su estado. Más adelante en esta misma sección se analiza cuán restrictiva es esta condición.

$$\begin{aligned}
(0 < \alpha < 1) \\
{}_0^C D_t^\alpha(\hat{x}(t)) &= K \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(y(t)) + B \cdot {}_0J_t^{1-\alpha}(u(t)) - F \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\
\hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

- $1 < \alpha < 2$

En este caso se iguala la ecuación de la dinámica deseada (4.3) con la dinámica fraccionaria de orden α que se presenta en (4.16) y, al igualar los términos asociados a $\hat{x}(t)$, $x(t)$ y $u(t)$, se obtienen expresiones para las funciones $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ en (4.21), (4.22) y (4.23) respectivamente.

$$g(\hat{x}(t)) = M \cdot \hat{x}(t) \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& M \cdot x(t) = A \cdot {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{x}(t)) - f(C^T x(t)) \\
\implies f(C^T x(t)) &= A \cdot {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{x}(t)) - M \cdot x(t) \\
\text{Si } A = K \cdot C^T \wedge M = F \cdot C^T \implies & f(y(t)) = K \cdot {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{y}(t)) - F \cdot y(t) \\
{}_0^C D_t^{\alpha-1}(y(t)) = {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{y}(t)) \implies & f(y(t)) = K \cdot {}_0^C D_t^{\alpha-1}(y(t)) - F \cdot y(t)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
0 &= B \cdot {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{u}(t)) - h(u(t)) \\
\implies h(u(t)) &= B \cdot {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{u}(t)) \\
{}_0^C D_t^{\alpha-1}(u(t)) = {}_0J_t^{2-\alpha}(\dot{u}(t)) \implies & h(u(t)) = B \cdot {}_0^C D_t^{\alpha-1}(u(t))
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Así pues, nuevamente se logra obtener una expresión para el observador fraccionario (4.24), cuyo error de observación sigue la dinámica fraccionaria deseada para plantas enteras en que $\exists K \in \mathfrak{R}^n / A = K \cdot C^T$.

$$\begin{aligned}
(1 < \alpha < 2) \\
{}_0^C D_t^\alpha(\hat{x}(t)) &= K {}_0^C D_t^{\alpha-1}(y(t)) + B {}_0^C D_t^{\alpha-1}(u(t)) - F \cdot (y(t) - \hat{y}(t)) \\
\hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Si bien los observadores (4.20) y (4.24) son de orden fraccionario y efectivamente generan un error de observación que sigue la dinámica deseada (4.3) para $0 < \alpha < 1$ y $1 < \alpha < 2$ respectivamente, la condición que imponen a la planta es muy restrictiva y, como se muestra en (4.25), reduce su aplicación únicamente a plantas de primer orden, las que no son interesantes desde el punto de vista de la observación pues su único estado (o una ponderación de él) está siempre disponible a través de la salida del sistema. De esta manera se descarta la utilidad de estos observadores fraccionarios para la observación de plantas enteras de orden n .

Sea la planta (4.1)

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \dot{y}(t) = C^T \dot{x}(t) \\
 &\Rightarrow \dot{y}(t) = C^T(A \cdot x(t) + B \cdot u(t)) \\
 \text{Si } \exists K \in \mathbb{R}^n / A = K \cdot C^T &\Rightarrow \dot{y}(t) = C^T K \cdot y(t) + C^T B \cdot u(t) \\
 &\Rightarrow \text{Corresponde a un sistema de primer orden}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

En la Figura 4.1 se presenta el error de observación obtenido para distintos valores de α , $F = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $C^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ con los observadores (4.20) y (4.24). En ella se observa que se genera un error permanente $e_{ss} = \begin{bmatrix} -4.62 \\ +9.23 \end{bmatrix}$ para todos los valores de α utilizados.

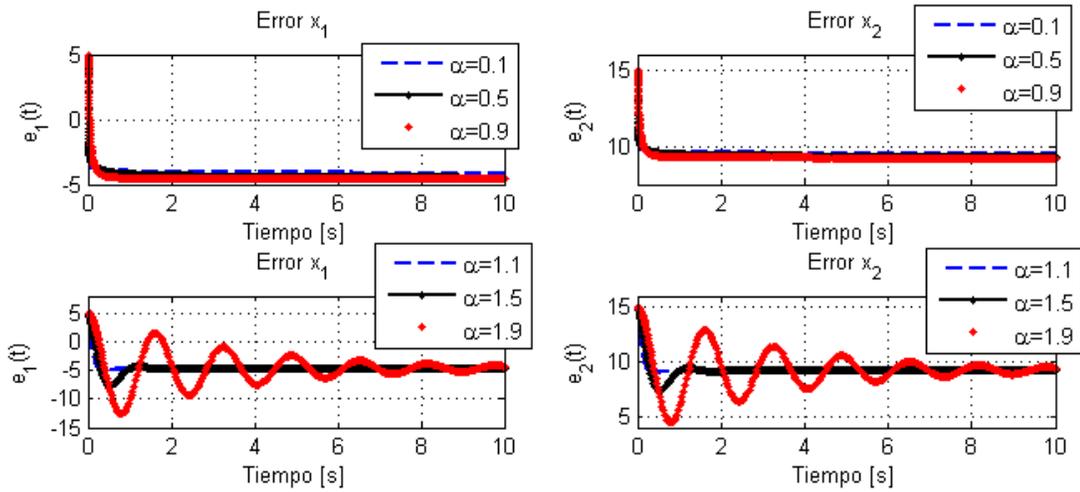


Figura 4.1: Ejemplo de error de observación con observador fraccionario dinámica deseada

Este resultado se debe a que aún en plantas en que $A = K \cdot C^T$, esta estructura de observador restringe la dinámica del error de observación a una del tipo ${}^C_0 D_t^\alpha e_x(t) = F \cdot C^T \cdot e_x(t)$. Esto implica que al menos uno de los valores propios del sistema está situado en cero ($F \cdot C^T$ es no invertible pues sus columnas son linealmente dependientes) lo que impide garantizar convergencia asintótica del error de observación a cero, es decir, en general este observador genera un error de observación permanente distinto de cero (o bien diverge). En (4.26) se presenta el desarrollo para un caso de 2×2 , donde se observa que el polinomio característico de la dinámica del error tiene un polo en 0.

$$\begin{aligned}
\det (s^\alpha I - FC^T) &= \det \left(\begin{bmatrix} s^\alpha & 0 \\ 0 & s^\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \left(\begin{bmatrix} s^\alpha - f_1 c_1 & -f_1 c_2 \\ -f_2 c_1 & s^\alpha - f_2 c_2 \end{bmatrix} \right) \\
&= s^{2\alpha} - (f_1 c_1 + f_2 c_2) s^\alpha + f_1 c_1 f_2 c_2 - f_2 c_1 f_1 c_2 \\
&= s^\alpha (s^\alpha - f_1 c_1 - f_2 c_2)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

4.2. Observador Fraccionario con Modificación en la Entrada

En la sección anterior los resultados obtenidos señalan que para que un observador con la estructura planteada en (4.4) genere una dinámica lineal autónoma de orden entero debe corresponder a una representación fraccionaria del mismo observador Luenberger de orden entero. Por otra parte, es posible obtener observadores con la estructura mencionada capaces de generar un error de observación con dinámica lineal autónoma de orden fraccionaria, sin embargo, su uso se restringe a plantas de primer orden, que no son de interés en el ámbito de la observación, y además generan un error permanente distinto de cero en general.

Para continuar con el diseño de observadores, en esta sección se propone un nuevo observador, similar al observador de Luenberger de orden fraccionario pero con una modificación en la entrada del mismo, del cual se analiza en detalle su estabilidad e influencia de diferentes factores en su desempeño.

4.2.1. Planteamiento General

Para la planta (4.1) se propone el observador que se presenta en (4.27), donde la entrada $\tilde{u}(t)$ se define de manera que corresponde a la señal $u(t)$ filtrada.

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= A \cdot \hat{x}(t) + \tilde{u}(t) + F(y(t) - \hat{y}(t)) \\
\mathcal{L} \{ \tilde{u}(t) \} = \tilde{U}(s) &= (s^\alpha I - A)(sI - A)^{-1} B U(s) \\
\hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Es de interés señalar que en esta estructura de observador al utilizar $\alpha = 1$ también se recupera el caso de Luenberger de orden entero.

4.2.2. Análisis de Estabilidad

Al aplicar la transformada de Laplace en la ecuación del estado del observador se obtiene (4.28), y sabiendo que $X(s)$ está dado por (4.29) es posible escribir la transformada de Laplace del error de observación $\mathcal{L} \{ e_x(t) \} = \mathcal{L} \{ x(t) \} - \mathcal{L} \{ \hat{x}(t) \}$ como se muestra en (4.30).

$$\hat{X}(s) = (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \left((s^\alpha I - A)(sI - A)^{-1} BU(s) + FC^T X(s) + \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha-k}) \right) \quad (4.28)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} (BU(s) + x(0)) \quad (4.29)$$

$$E_x(s) = \left((sI - A)^{-1} - (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} FC^T (sI - A)^{-1} \right) \cdot x(0) + (s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} \cdot \sum_{k=1}^m ((\hat{x}^{(k-1)}(0)) \cdot s^{\alpha-k}) \quad (4.30)$$

Como se observa en (4.30), la ventaja principal que aporta este esquema con respecto al observador del tipo Luenberger fraccionario es que en este caso, debido al filtro aplicado a la entrada $u(t)$, el error de observación es independiente de la entrada del sistema por lo que depende únicamente de condiciones iniciales.

La estabilidad de los dos términos relevantes del error de observación, uno dependiente de las condición inicial de la planta y otro dependiente de las condiciones iniciales del observador, ya ha sido analizada pues son idénticos a los del caso de Luenberger de orden fraccionario, por lo tanto acá se resumen los resultados relevantes (el detalle se encuentra en la Sección 3.2 del presente trabajo de título).

- El término dependiente de la condición inicial de la planta $x(0)$ es asintóticamente estable si los valores propios de A están en el semiplano izquierdo complejo abierto, el par (A, C^T) es observable y se elige F de manera que $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
- El término dependiente de las condiciones iniciales del observador $\hat{x}^{(k)}(0)$ con $k = 0, \dots, m-1$ es asintóticamente estable si el par (A, C^T) es observable y se elige F de manera que $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, el error de observación $e_x(t)$ converge a cero si se cumplen las tres condiciones en (4.31)(condición suficiente).

1. El par (A, C^T) es observable.
 2. $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$
 3. $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$.
- (4.31)

Este resultado de estabilidad es bastante mejor que el que se obtiene en el caso de Luenberger fraccionario, pues en este caso no sólo se garantiza estabilidad BIBO sino que se encuentran condiciones que aseguran la estabilidad asintótica del error de observación. Aún así se incorpora una importante restricción adicional al caso de Luenberger de orden entero, pues de acuerdo a la segunda condición en (4.31) es necesario que los valores propios de la matriz de evolución de la planta se encuentren en el semiplano izquierdo complejo (esta condición también se presenta en el caso Luenberger de orden fraccionario).

4.2.3. Análisis de Desempeño en Caso Ideal

En esta sección se presenta un análisis de desempeño del observador fraccionario modificado, donde se estudia la influencia de distintos factores como la entrada $u(t)$, el orden fraccionario del observador α , la matriz de evolución A , el factor de corrección F y las condiciones iniciales del error de observación $e_x(0)$.

Si bien el análisis se realiza en general para sistemas de orden n , se presentan simulaciones realizadas para una planta de segundo orden, y los parámetros nominales utilizados para ellas así como los criterios de desempeño utilizados son los mismos presentados en la Sección 3.3.

Influencia de la entrada $u(t)$

La ventaja importante que otorgan las condiciones de estabilidad asintótica del error de observación en el observador fraccionario modificado, por sobre la estabilidad BIBO en el caso de Luenberger fraccionario, proviene de que en este caso la dinámica del error de observación no depende de la entrada de la planta $u(t)$ y por lo tanto, no hay fuerzas externas que impidan la convergencia del error de observación cero.

Así pues, la entrada $u(t)$ no tiene influencia alguna en el caso ideal, con lo que se recupera una de las características que tiene el observador de Luenberger de orden entero. De todas formas para efecto de que las simulaciones que se presentan sean comparables con las presentadas en el caso de Luenberger fraccionario, de aquí en adelante se utiliza una entrada $u(t) = 5$.

Influencia del orden de derivación α

Se estudia la influencia del orden de derivación α en el desempeño del observador fraccionario modificado aplicado a una planta entera. En la Figura 4.2 se presenta el error de observación en ambos estados obtenido para distintos valores de α con los parámetros nominales de simulación, y en la Tabla 4.1 se muestra el tiempo de estabilización, sobreoscilación y error permanente asociado a cada curva.

En la Figura 4.2a se observa que para valores de $\alpha \in (0, 1)$ el error de observación decae a cero, disminuyendo su sobreoscilación a medida que el valor de α se acerca a 1. Para valores de $\alpha \in (1, 2)$ en cambio, la respuesta tiene un carácter oscilatorio que se vuelve más importante a medida que α crece, lo cual provoca un aumento progresivo de la sobreoscilación en el error de observación.

En cuanto al tiempo de estabilización, al igual que en el caso de Luenberger fraccionario, se obtiene un mejor desempeño en los valores de α menores que 1, lo cual se debe a que para los valores menores de α el error de observación presenta un descenso bastante rápido en primera instancia, lo cual logra superar la respuesta del observador de Luenberger clásico.

Si bien en ambos casos, observador Luenberger fraccionario y observador fraccionario modificado, se logra convergencia asintótica de error a cero para entrada $u(t)$ constante y se obtienen

ventajas en cuanto al tiempo de estabilización para $\alpha < 1$ con respecto al caso Luenberger clásico, con el observador fraccionario modificado los tiempos de estabilización son menores pues se suprime el efecto transitorio de la entrada $u(t)$ que retarda la convergencia del error en el caso de Luenberger de orden fraccionario.

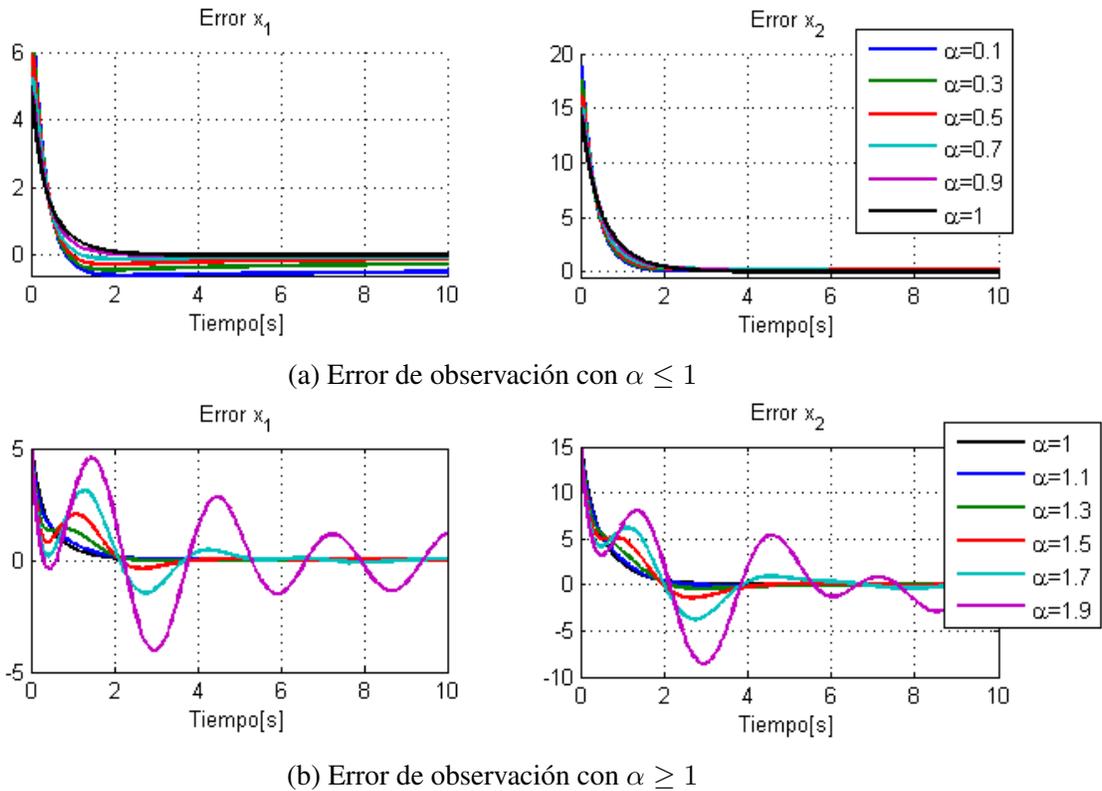


Figura 4.2: Error con observador fraccionario modificado para distintos valores de α

α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$t_s [s]$	MOV [%]	e_{ss}	$t_s [s]$	MOV [%]	e_{ss}
0.1	60.75	12.0	0	1.12	0	0
0.3	10.68	8.6	0	1.20	0	0
0.5	2.56	5.4	0	1.31	0	0
0.7	0.90	2.2	0	1.48	0	0
0.9	1.17	0.2	0	1.63	0	0
1	1.46	0	0	1.69	0	0
1.1	1.76	0	0	1.72	0.4	0
1.3	1.95	27.4	0	1.76	2.7	0
1.5	3.15	41.2	0	3.44	9.3	0
1.7	4.79	61.6	0	4.98	25.0	0
1.9	17.97	91.1	0	18.04	57.1	0

Tabla 4.1: Desempeño observador fraccionario modificado para distintos valores de α

En el desempeño de este observador se repiten algunos aspectos que ya han sido presentados

en la Sección 3.3.2, por lo que no se considera necesario repetir su análisis en detalle. Algunos de ellos son: la no simetría de la respuesta cuando α se aproxima a 1 si las condiciones iniciales del observador son no nulas; la estabilidad de las respuestas garantizadas porque los valores propios de $(A - FC^T)$ son reales negativos; la relación de la dinámica del error de observación con las funciones de Mittag-Leffler; entre otros.

Influencia de la matriz de evolución A

Una de las restricciones importantes que se encuentran dentro de las condiciones de estabilidad asintótica para el error de observación en este caso es que la matriz de evolución A sea asintóticamente estable (valores propios en el semiplano izquierdo complejo abierto).

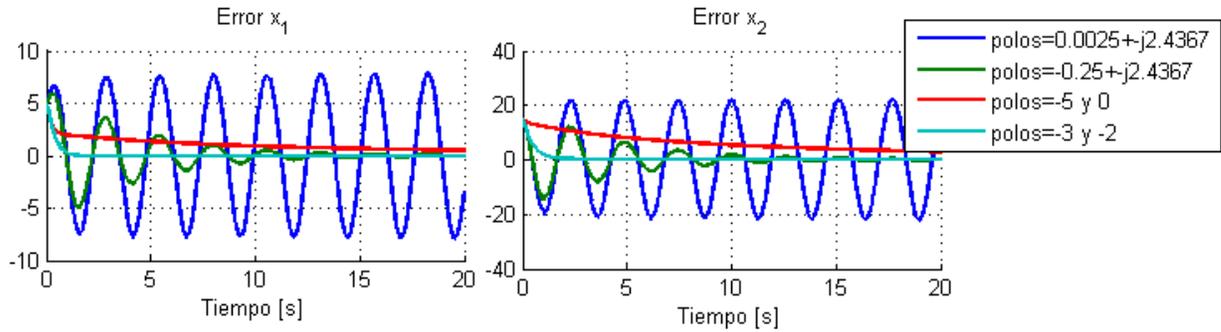
Por ello se desea estudiar la influencia que tiene la matriz A en el desempeño del error de observación, razón por la cual se realizan pruebas con 4 matrices A que ya fueron presentadas en la Sección 3.3.4, de modo que una es inestable, una estable, y dos asintóticamente estables. En la Figura 4.3 y en la Tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos para $\alpha = 0.8$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 1.2$.

Se observa, al igual que en el caso Luenberger fraccionario, una desventaja importante de los observadores fraccionarios con respecto al observador Luenberger de orden entero pues el error de observación diverge para plantas inestables. Cabe mencionar sin embargo que estos resultados concuerdan con el análisis teórico de estabilidad realizado.

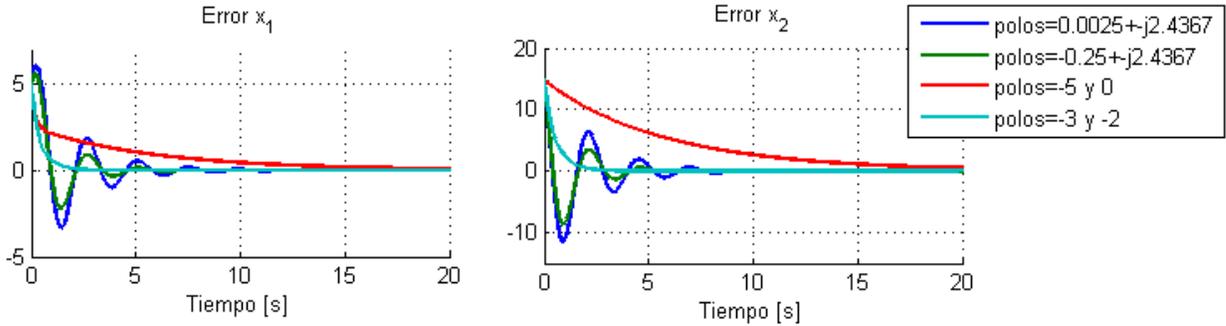
La divergencia del error de observación con $\alpha = 1.2$ para una de las plantas asintóticamente estables se debe a que en este caso la matriz $(A - FC^T)$ cumple la tercera condición de estabilidad en (4.31) sólo para $\alpha < 1.183$.

α	Valores propios de A	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
		$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.8	$0.0025 \pm j2.4367$ (Inestable)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	$-0.25 \pm j2.4367$ (A.E.)	13.31	120.2	0	12.91	95.3	0
	-5 y 0 (Estable)	36.01	0	0	58.49	0	0
	-3 y -2 (A.E.)	1.01	0.8	0	1.55	0	0
1	$0.0025 \pm j2.4367$ (Inestable)	6.50	122.0	0	6.11	76.9	0
	$-0.25 \pm j2.4367$ (A.E.)	4.22	112.0	0	3.79	56.8	0
	-5 y 0 (Estable)	13.45	0	0	17.31	0	0
	-3 y -2 (A.E.)	1.45	0	0	1.72	0	0
1.2	$0.0025 \pm j2.4367$ (Inestable)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	$-0.25 \pm j2.4367$ (A.E.)	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
	-5 y 0 (Estable)	17.82	5.2	0	27.90	10.8	0
	-3 y -2 (A.E.)	1.91	0	0	1.73	1.2	0

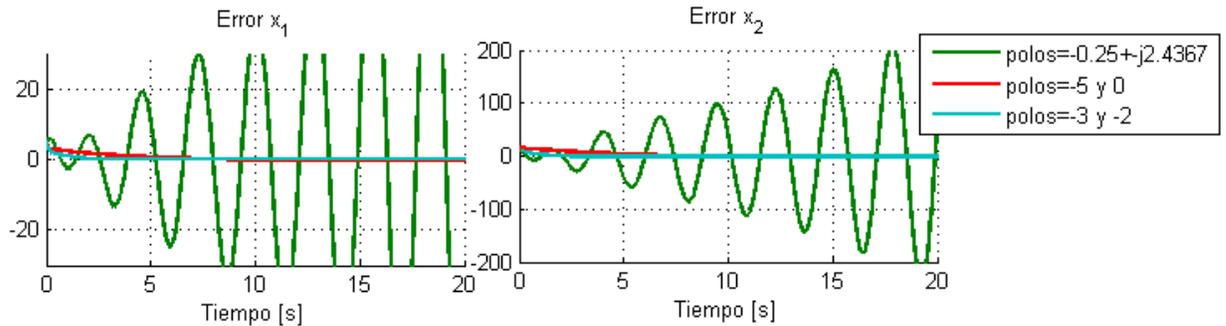
Tabla 4.2: Desempeño observador fraccionario modificado para distintos A



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 4.3: Error de observación con observador fraccionario modificado para distintos valores de A

Para el caso de la planta A estable se produce una diferencia con respecto al observador Luenberger fraccionario, pues en este caso sí se logra convergencia asintótica del error de observación y no se genera un error en estado estacionario. Esto indica que la condición suficiente para la estabilidad asintótica puede no ser necesaria, por lo que tal vez se puede flexibilizar la segunda condición en (4.31) de manera que $|arg(spec(A))| \geq \frac{\pi}{2}$, sin embargo esto no está corroborado teóricamente.

Finalmente cabe mencionar que, más allá de las condiciones de estabilidad, la matriz A influye en el desempeño de los observadores debido a que la matriz $(A - FC^T)$ define la dinámica del error de observación, y es por ello que para algunos valores de A la respuesta es oscilatoria y para otros la respuesta es monótonamente decreciente, pues depende de si los valores propios de $(A - FC^T)$ son complejos conjugados o reales. Este tema se aborda en el análisis de la influencia del factor de

corrección F .

Influencia del factor de corrección F

Para una planta determinada, es decir parámetros A , B y C^T fijos, el factor F es de gran importancia pues, por una parte debe cumplir la condición de estabilidad $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$, y para el caso del observador Luenberger de orden entero mediante la ubicación de los polos de la matriz $(A - FC^T)$ permite modificar arbitrariamente la velocidad de convergencia del error de observación.

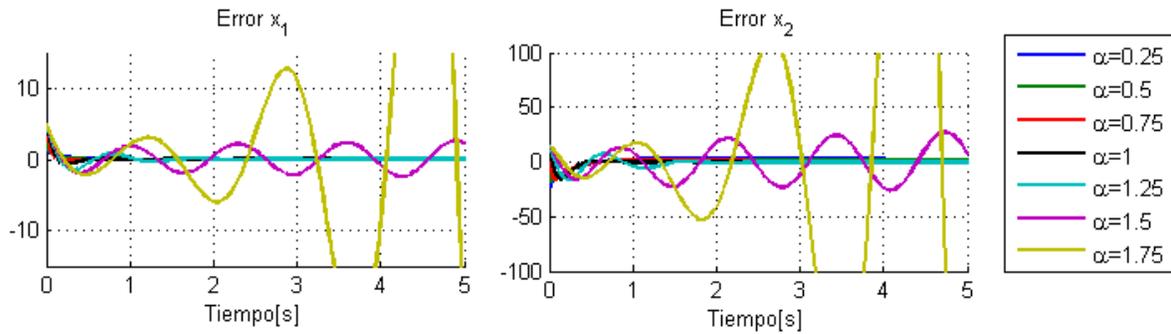


Figura 4.4: Error de observación con observador fraccionario modificado para distintos valores de α

En la Figura 4.4 se presentan simulaciones para el caso en que $F = \begin{bmatrix} 10 \\ 106.5 \end{bmatrix}$, de manera que los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$ están ubicados en $-7.5 \pm j7.5$ y se cumple la condición de estabilidad para $\alpha < 1.5$. En la Figura 4.4 y en la Tabla 4.3 se observa que para valores de α en que se cumple la condición de estabilidad asintótica se logra que el error de observación converja a cero, y para los casos en que no se cumple (incluso en el límite) el error de observación diverge.

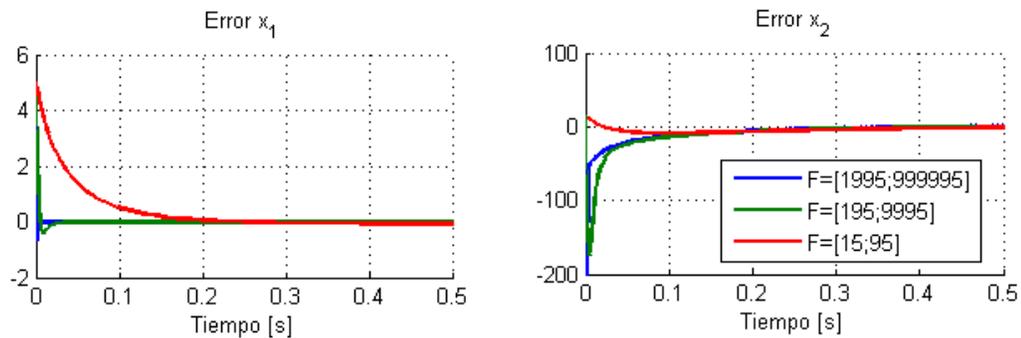
α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.25	0.29	1.2	0	55.38	148.0	0
0.5	0.21	1.2	0	9.31	120.1	0
0.75	0.12	1.4	0	2.41	107.1	0
1	0.41	13.2	0	0.41	103.8	0
1.25	1.36	29.9	0	2.32	110.5	0
1.5	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					
1.75	Error diverge con oscilaciones de amplitud ascendente					

Tabla 4.3: Desempeño observador fraccionario modificado para distintos valores de α de acuerdo a F

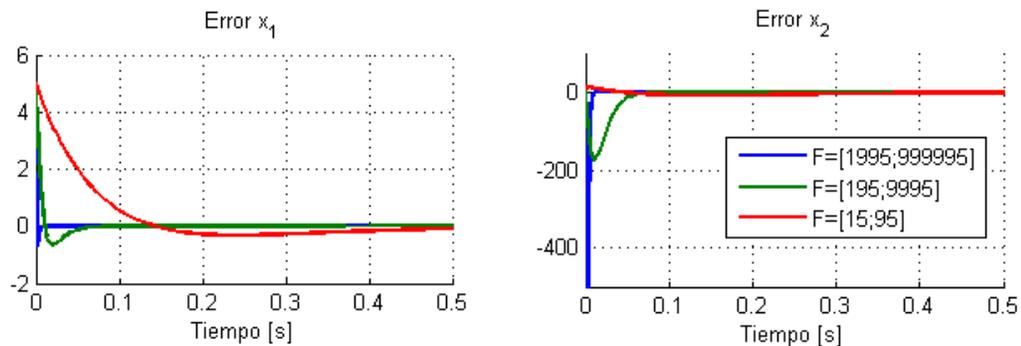
Cabe mencionar que las respuestas son oscilatorias debido a que los valores propios generados son complejos conjugados.

Así pues, se comprueba la condición de estabilidad asintótica deducida teóricamente al igual que en el caso de Luenberger de orden fraccionario.

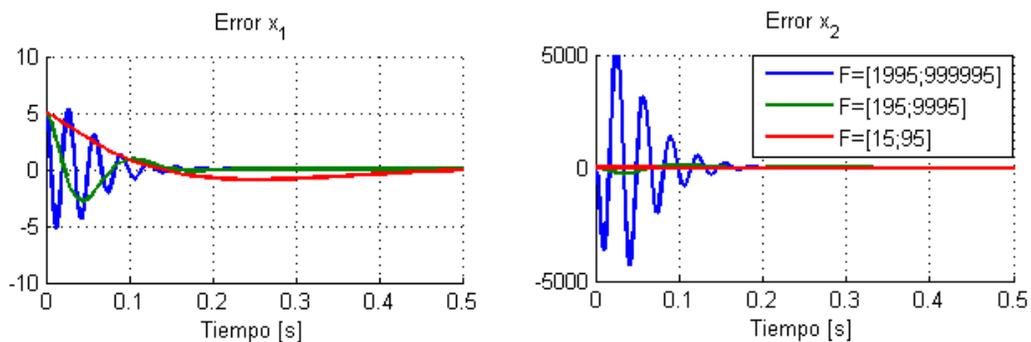
Otro punto importante ya mencionado es la posibilidad de manejar la velocidad de convergencia del error de observación mediante la elección del parámetro F . Para comprobarlo, al igual que en la Sección 3.3.5, se utilizan 3 valores de F que sitúan los valores propios de $(A - FC^T)$ en el eje real negativo (para que sea estable para $\alpha \in (0, 2)$) y en el orden de -10 , -100 y -1000 como se muestra en la Tabla 4.4. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 4.5.



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 4.5: Error con observador fraccionario modificado para distintos valores de F

Como ya es conocido, para el caso de $\alpha = 1$ existe una relación directa entre cuán distantes están los polos de $(A - FC^T)$ del eje imaginario y el tiempo de estabilización del error de observación, sin embargo esta relación no es clara para el caso de observadores fraccionarios.

Este resultado es el mismo que se obtuvo para el caso de Luenberger fraccionario, y se explica debido a que la dinámica del error de observación en este caso no depende únicamente de los valores propios de la matriz $(A - FC^T)$, sino que está fuertemente influido por los valores propios de la matriz A .

α	Valores propios de $A - FC^T$		Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	F	Valores propios	$t_s [s]$	$MOV [\%]$	e_{ss}	$t_s [s]$	$MOV [\%]$	e_{ss}
0.8	[15; 95]	-11 y -9	0.1300	1.2	0	0.55	59	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.0140	8.3	0	2.19	1151	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.0015	12.8	0	2.17	12107	0
1	[15; 95]	-11 y -9	0.3200	6.0	0	0.55	54	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.0400	12.0	0	0.08	1151	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.0040	13.4	0	0.01	12180	0
1.2	[15; 95]	-11 y -9	0.4300	17.8	0	0.47	61	0
	[195; 9995]	-101 y -99	0.1403	55.2	0	1.86	1690	0
	[1995; 9999935]	-1001 y -999	0.1401	107.4	0	1.87	34593	0

Tabla 4.4: Desempeño observador fraccionario modificado para distintos F

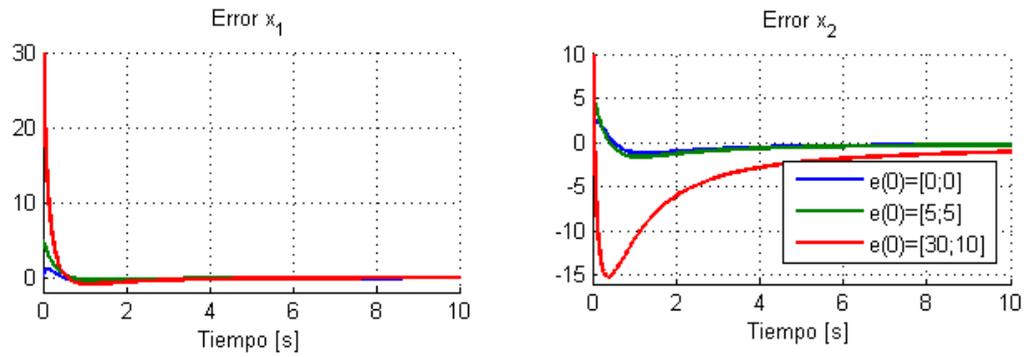
Por lo tanto, para el caso de los observadores fraccionarios no es posible manejar arbitrariamente la velocidad de convergencia del error de observación mediante el factor F , pues la dinámica del error está limitada por la velocidad de convergencia de la propia planta.

Un punto interesante de mencionar es que, si bien no se aprecia la tendencia de disminución del tiempo de estabilización a medida que los valores propios se alejan del eje imaginario, sí es posible apreciar el aumento de la sobreoscilación. Esto se debe a que el efecto del tiempo de estabilización queda limitado por el valor propio más «lento», sin embargo la sobreoscilación resulta de la suma de las distintas componentes.

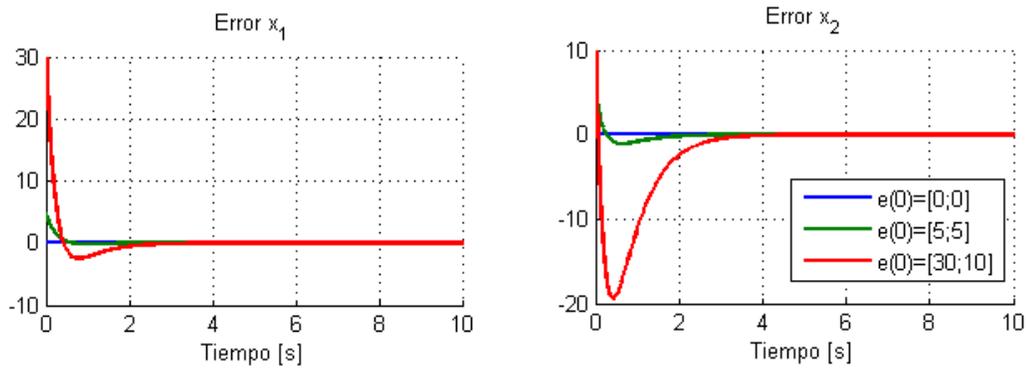
Influencia de las condiciones iniciales

Se estudia la influencia de las condiciones iniciales en el desempeño del observador fraccionario modificado, por lo que en la Figura 4.6 se presenta un ejemplo con distintas condiciones iniciales para $e_x(0)$ y en la Tabla 4.5 se resume su desempeño.

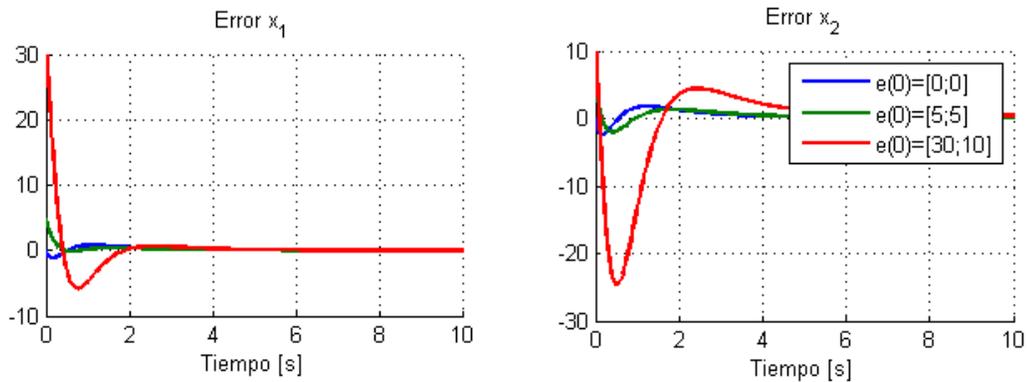
Al igual que en el observador Luenberger fraccionario, las condiciones iniciales del error de observación no son determinantes en el desempeño del observador (a diferencia del caso con $\alpha = 1$). Esto se debe a que en la dinámica del error de observación no se aprecian sus condiciones iniciales, sino que más bien influyen separadamente las condiciones iniciales de la planta y del observador.



(a) Error de observación con $\alpha = 0.8$



(b) Error de observación con $\alpha = 1$



(c) Error de observación con $\alpha = 1.2$

Figura 4.6: Error de observación con observador fraccionario modificado para distintas condiciones iniciales

En este sentido una de las desventajas de los observadores fraccionarios con respecto al observador Luenberger de orden entero es que una buena aproximación de la condición inicial no necesariamente contribuye a mejorar el desempeño del error de observación. Esta cualidad sí está presente en el caso del observador de orden entero, pues una condición inicial del error de observación más cercana a cero permite una más rápida convergencia y si se conoce con certeza la condición inicial de la planta el error de observación se mantiene nulo, por lo que la observación del estado es perfecta en todo el intervalo (ver Figura 4.6b).

α	Condición inicial		Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
	$x_1(0) - \hat{x}_1(0)$	$x_2(0) - \hat{x}_2(0)$	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
0.8	0	0	9.66	110.0	0	24.46	232.0	0
	5	5	2.98	8.6	0	11.20	33.4	0
	30	10	0.39	3.1	0	7.30	101.6	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	5	0.48	2.8	0	1.81	21.8	0
	30	10	1.32	8.2	0	2.30	64.6	0
1.2	0	0	4.76	117.0	0	10.91	242.0	0
	5	5	2.74	7.6	0	5.39	41.0	0
	30	10	1.48	19.3	0	4.59	82.0	0

Tabla 4.5: Desempeño observador fraccionario modificado para distintas condiciones iniciales

En la Tabla 4.5 se distingue incluso una tendencia en que el tiempo de estabilización es mayor a medida que la condición inicial del error de observación se acerca a cero. Esta situación se aborda en la Sección 3.3.5 y se debe a que los valores de la condición inicial del observador son mayores en estos casos (ver Tabla 3.8).

4.2.4. Análisis de Desempeño en Caso No Ideal

En esta sección se analiza el desempeño del observador fraccionario modificado en situaciones no ideales. En particular se aborda el caso en que existe un desconocimiento en los parámetros A y B de la planta, y el caso de presencia de perturbaciones determinísticas o estocásticas en la salida de la planta.

Desconocimiento en parámetros

El problema que se aborda en este caso es el planteado en la Sección 3.4.1, con diferencia que en este caso los parámetros nominales (\hat{A} y \hat{B}) son utilizados en la estructura del observador fraccionario modificado.

En la Figura 4.7 se presenta el error de observación para el caso de A levemente inestable ($A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$) y un leve desconocimiento $\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En ella se aprecia, igual que en el caso Luenberger fraccionario, que el error de observación diverge para todos los valores de α incluyendo $\alpha = 1$, aunque en este caso la divergencia es un poco más lenta.

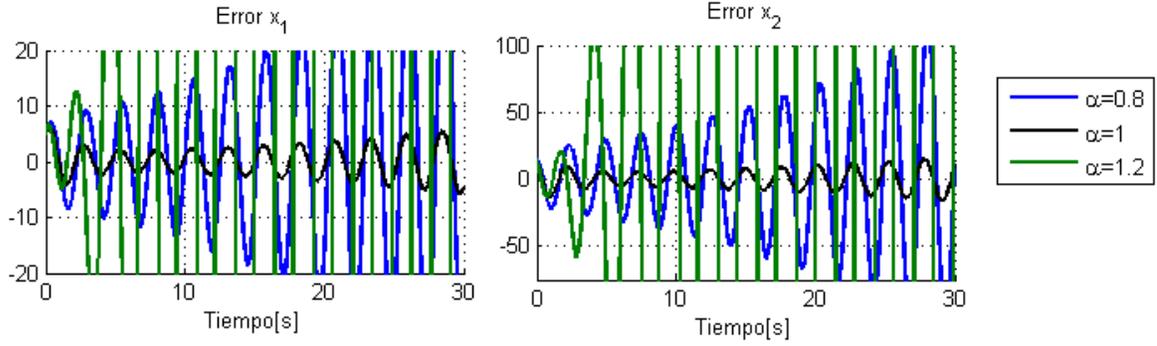


Figura 4.7: Error de observación observador fraccionario modificado con leve desconocimiento de A (inestable)

Así pues, al igual que en el caso de Luenberger fraccionario, la variación paramétrica crítica que soporta el sistema para no desestabilizarse no tiene relación con el ΔA o ΔB aplicado, sino que depende de que los valores propios de la verdadera matriz A se encuentren en el semiplano izquierdo complejo.

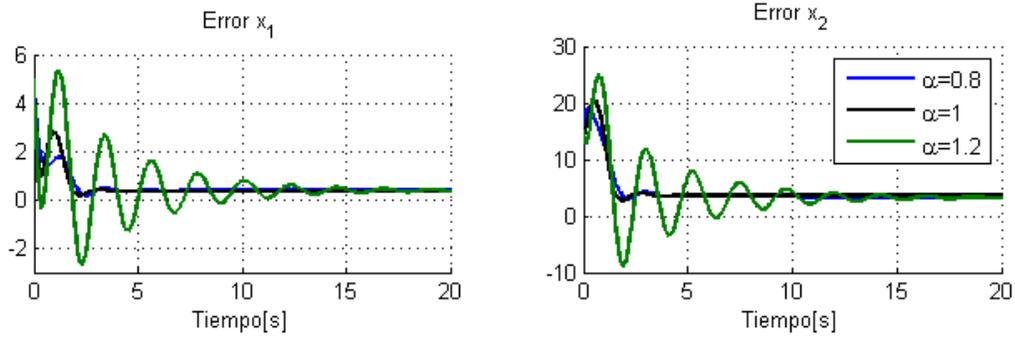
De cumplirse las condiciones de estabilidad $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\pi}{2}$ y $|\arg(\text{spec}(A - FC^T))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ se puede obtener el error en estado estacionario que introduce el desconocimiento en los parámetros ante una entrada constante $u(t) = K$, y tiene la expresión que se muestra en (4.32). Se observa que esta expresión es, en general, distinta del error en estado estacionario que genera en el mismo caso el observador de Luenberger de orden entero y fraccionario (ver (3.32)).

$$e_{ss} = (-A)^{-1} \cdot B \cdot K - (-\hat{A})^{-1} \cdot \hat{B} \cdot K \quad (4.32)$$

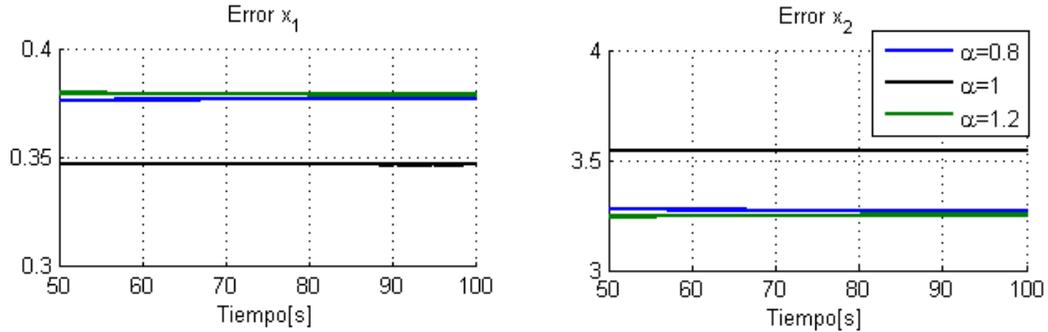
En la Figura 4.8 se presenta el mismo caso estudiado en Sección 3.4.1, con un leve desconocimiento en A y $\Delta B = 0$. Como se observa en la Tabla 4.6 y en el acercamiento en estado estacionario de la Figura 4.8b tanto en el caso de Luenberger de orden entero como en el observador modificado se genera un error de observación permanente, sin embargo éste es diferente para ambos casos, lo cual es consistente con lo obtenido analíticamente.

Desconocimiento	α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
		$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
$\Delta A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$	0.8	1.98	38.1	0.3788	3.43	160.9	3.2576
	1	1.75	52.5	0.3472	2.03	178.5	3.5417
	1.2	11.46	114.8	0.3788	12.21	212.1	3.2576

Tabla 4.6: Desempeño observador fraccionario modificado con $\Delta A \neq 0$ y $\Delta B = 0$.



(a) Error de observación con $\Delta A \neq 0$.



(b) Error de observación en estado estacionario con $\Delta A \neq 0$.

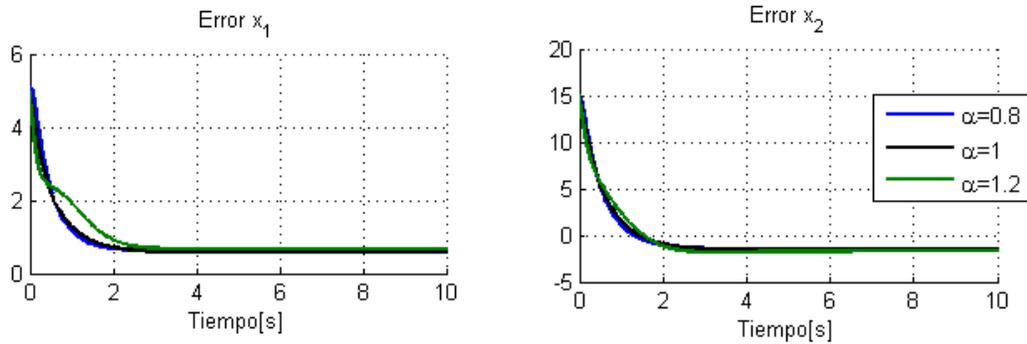
Figura 4.8: Error de observación con $\Delta A \neq 0$ para observador fraccionario modificado

Cabe señalar que en este caso el observador con $\alpha = 1$ es el que presenta menor tiempo de estabilización en ambos estados, y el observador con $\alpha = 0.8$ presenta menor sobreoscilación.

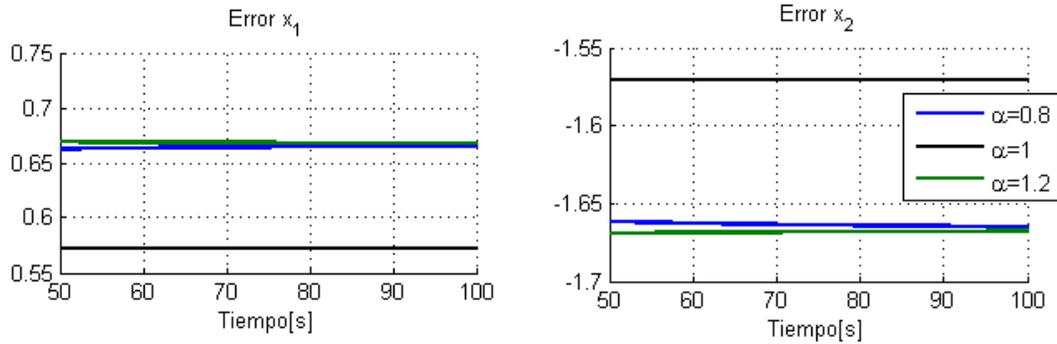
En la Figura 4.9 y en la Tabla 4.7 se presentan los resultados del caso con desconocimiento en B y $\Delta A = 0$ (mismo caso estudiado en Sección 3.4.1). La conclusión en este caso es similar a la anterior pues existe error en estado estacionario diferente para el caso de $\alpha = 1$ y $\alpha \neq 1$ que coinciden con las expresiones analíticas obtenidas. En este caso el error de observación para $\alpha = 0,8$ es el que genera mejor tiempo de estabilización para ambos estados.

<i>Desconocimiento</i>	α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$		
		$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}	$t_s[s]$	$MOV[\%]$	e_{ss}
$\Delta A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$	0.8	1.29	1.07	0.6667	1.74	0	-1.6667
	1	1.72	0	0.5714	1.82	0	-1.5714
	1.2	2.05	0	0.6667	1.83	1.08	-1.6667

Tabla 4.7: Desempeño observador fraccionario modificado con $\Delta A = 0$ y $\Delta B \neq 0$.



(a) Error de observación con $\Delta B \neq 0$.



(b) Error de observación en estado estacionario con $\Delta B \neq 0$.

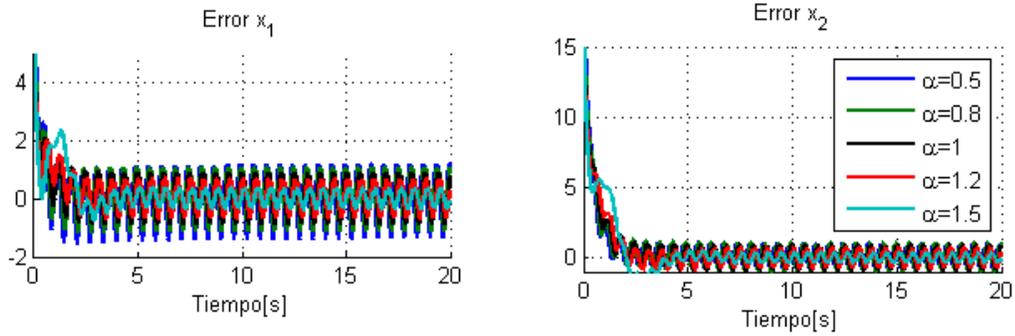
Figura 4.9: Error de observación con $\Delta B \neq 0$ para observador fraccionario modificado

Presencia de perturbaciones

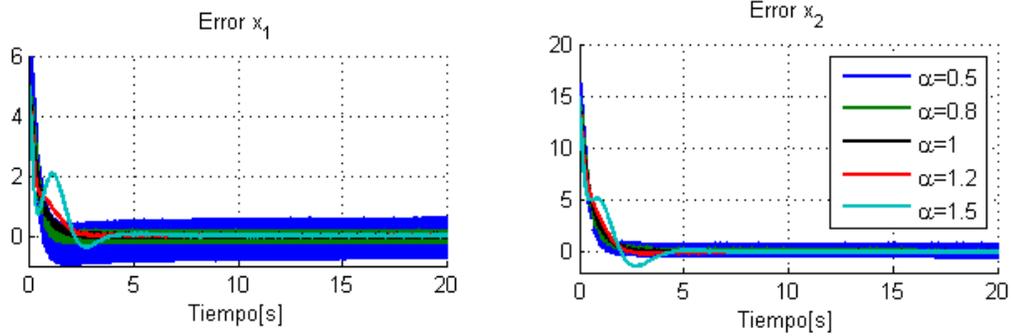
Para el caso con presencia de perturbaciones en la salida de la planta presentado en la Sección 3.4.2, los interesantes resultados obtenidos se mantienen para el observador fraccionario modificado.

De hecho, en la Figura 4.10 se presenta el error de observación para una perturbación determinística $n(t) = 10\sin(10t)$, $n(t) = 10\sin(100t)$ y ruido blanco $n(t) \sim N(0, 100)$ en la que se observa que la dinámica es bastante similar a la presentada en la Figura 3.13 para el observador Luenberger fraccionario (salvo unos detalles en el transiente producto del aporte de la entrada $u(t)$ en este último caso).

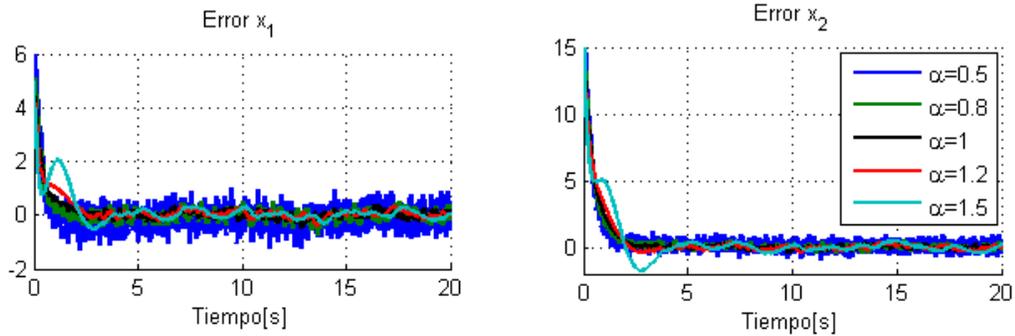
Esta similitud se debe a que el término que se le agrega a la dinámica del error en presencia de una perturbación a la salida de la planta $n(t)$ es exactamente el mismo para el observador Luenberger fraccionario y para el observador fraccionario modificado, por lo que se mantiene la relación (3.35) y a su vez la respuesta en frecuencia del sistema ante una perturbación también se describe mediante el diagrama de Bode presentado en la Figura 3.14.



(a) Error de observación con perturbación $n(t) = 10\sin(10t)$.



(b) Error de observación con perturbación $n(t) = 10\sin(100t)$



(c) Error de observación con ruido blanco $\sigma^2 = 100$

Figura 4.10: Error de observación con perturbación en la salida $y(t) = C^T x(t) + n(t)$.

Así pues, se aprecia que para valores de α mayores a 1 se tienen ventajas significativas en la atenuación de perturbaciones de alta frecuencia, lo cual puede ser interesante en alguna aplicación. Por otro lado, para bajas frecuencias se tiene una amplificación mayor debido a que en el caso fraccionario cada cero/polo provoca un ascenso/descenso del diagrama de Bode en $20\alpha \left[\frac{dB}{dec} \right]$, lo que hace su pendiente más fuerte a medida que α aumenta.

Esto se comprueba en la Figura 4.10c, en que la perturbación cubre todo el rango de frecuencias. Así es como para valores pequeños de α en el error de observación se observan fuertemente componentes de alta frecuencia, mientras que para valores de $\alpha > 1$ se distingue la presencia de perturbaciones de baja frecuencia.

4.2.5. Regulación por Realimentación de Estado mediante Observadores

En esta sección se pretende analizar el desempeño de observadores fraccionarios en un lazo cerrado de control. En particular se compara el desempeño de los observadores fraccionarios presentados en este trabajo de título con respecto al desempeño del observador Luenberger de orden entero en un lazo cerrado de control con referencia constante en presencia de perturbaciones.

Sea la planta lineal, SISO de orden entero que se presenta en (4.33), con los parámetros que se muestran en (4.34). Se trata de una planta estable, controlable y observable.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) + n(t)\end{aligned}\quad (4.33)$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [1 \ 0], \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}\quad (4.34)$$

Por el conocido resultado del Principio de Separación para el caso de orden entero es posible diseñar separadamente un controlador y observador que cumplan con el objetivo de control. Sea el control definido en (4.35) que hace uso de la observación definida por el observador del tipo Luenberger de orden entero que se muestra en (4.36), donde R corresponde a la referencia constante para la salida del sistema.

$$\begin{aligned}u(t) &= K\hat{x}(t) + GR \\ K &= [k_1 \ k_2] = [2 \ -1] \\ G &= \frac{1}{C^T(A+BK)^{-1}B}\end{aligned}\quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + F(y(t) - C^T\hat{x}(t)) \\ F &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ \frac{21^2}{4} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.36)$$

Ambos esquemas (observación y control) resultan estables con los parámetros mencionados y en caso ideal (sin presencia de perturbaciones) se logra convergencia asintótica del error de control y de observación a cero.

Se analiza también el desempeño del esquema de control (4.35) con estimación del estado mediante el observador de Luenberger fraccionario (4.37), y el observador fraccionario modificado que se muestra en (4.38).

$${}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + F(y(t) - C^T\hat{x}(t))\quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}{}_0^C D_t^\alpha (\hat{x}(t)) &= A\hat{x}(t) + \tilde{u}(t) + F(y(t) - C^T\hat{x}(t)) \\ \tilde{U}(s) &= (s^\alpha I - A)(sI - A)^{-1}U(s)\end{aligned}\quad (4.38)$$

Para el caso $n(t) = 0$, cualquiera sea el observador que se utilice para estimar el estado del sistema, la salida del sistema sigue la dinámica que se presenta en (4.39), donde la diferencia entre los distintos observadores se manifiesta en el término $E_x(s)$, y se observa que, de converger a cero el error de observación, la salida del sistema converge a la referencia deseada si el par (A, B) es controlable y se elige K de manera adecuada.

$$Y(s) = C^T (sI - (A + BK))^{-1} \left[BG \frac{R}{s} + x(0) - BK \cdot E_x(s) \right] \quad (4.39)$$

En la Figura 4.11 se presenta el resultado de la regulación de la planta con $R = 5$ mediante el observador de Luenberger fraccionario para el caso de $n(t) = 0$ y $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. En la Figura 4.12 se muestra el resultado de realizar la regulación para el mismo caso pero mediante el observador fraccionario modificado.

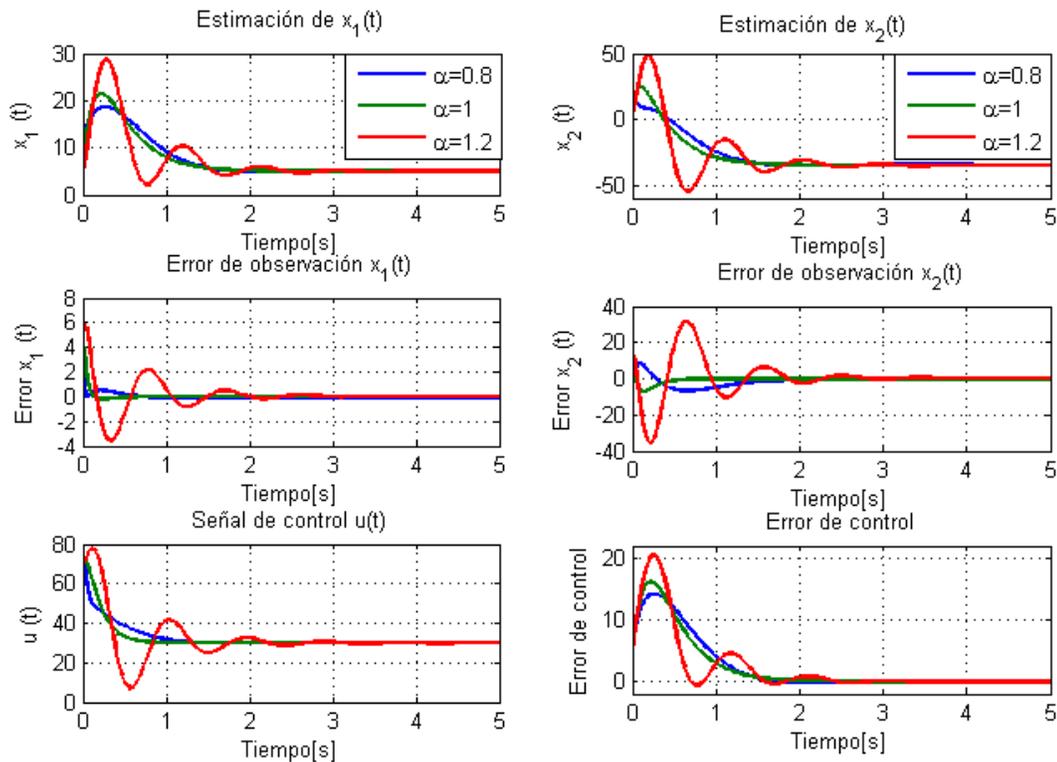


Figura 4.11: Regulación mediante observador Luenberger fraccionario con $n(t) = 0$

De ambos gráficos se aprecia que si bien se logra convergencia asintótica del error de observación y del error de control a cero, la respuesta es más similar al caso Luenberger de orden entero cuando se utiliza el observador fraccionario modificado que cuando se utiliza el observador de Luenberger fraccionario. Esto se debe a que en el observador Luenberger fraccionario el control $u(t)$ perturba el transiente del error de observación, lo cual provoca un mayor tiempo de estabilización y sobreoscilación en el error de observación.

De hecho, en el error de control la diferencia entre la respuesta con $\alpha = 1$, $\alpha = 0.8$ y $\alpha = 1.2$

se hace prácticamente indistinguible con el observador fraccionario modificado.

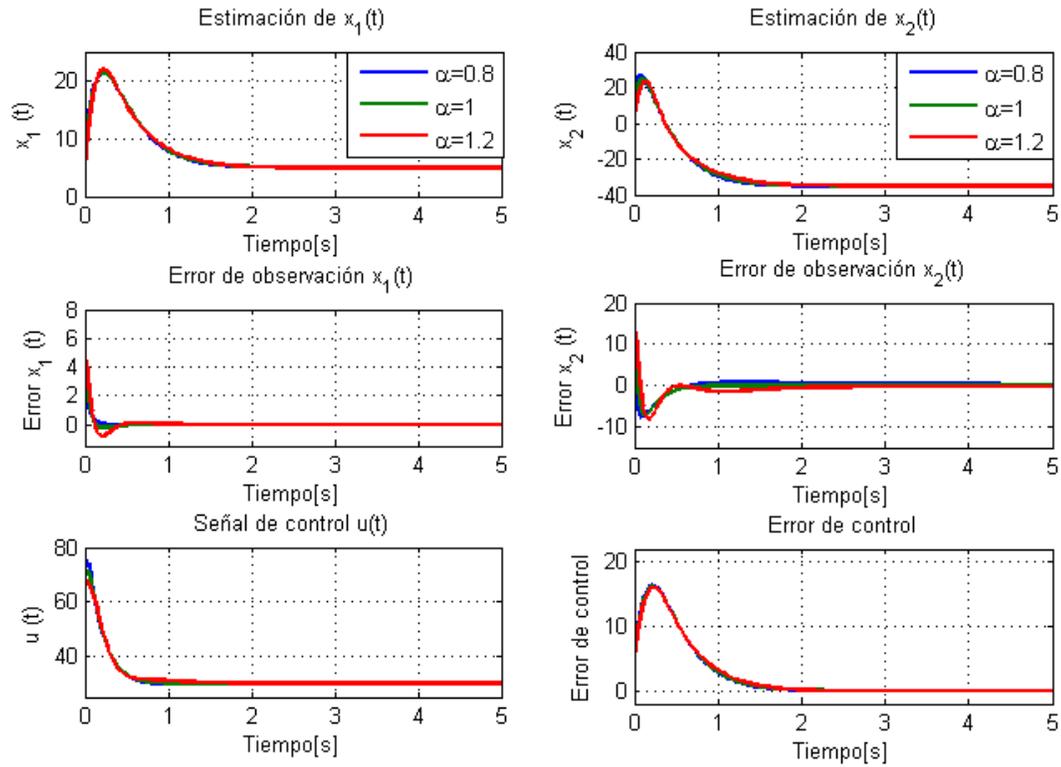


Figura 4.12: Regulación mediante observador fraccionario modificado con $n(t) = 0$

En la Tabla 4.8 se presenta el tiempo de estabilización, sobreoscilación y error en estado estacionario del error de observación y error de control tanto para el observador Luenberger fraccionario (L.F.) como para Luenberger de orden entero (L.E.) y el observador fraccionario modificado (F.M.).

Observador	α	Error $x_1(t)$			Error $x_2(t)$			Error de control		
		$t_s[s]$	MOV[%]	e_{ss}	$t_s[s]$	MOV[%]	e_{ss}	$t_s[s]$	MOV[%]	e_{ss}
L.F.	0.8	0.45	10.2	0	1.93	56.3	0	1.62	283.4	0
	1.2	1.87	118.8	0	2.69	237.1	0	2.35	410.4	0
L.E.	1	0.11	4.4	0	0.56	48.2	0	1.81	323.8	0
F.M.	0.8	0.13	0.9	0	1.48	50.5	0	1.73	326.8	0
	1.2	0.37	16.6	0	1.74	54.5	0	1.85	321.2	0

Tabla 4.8: Desempeño observadores en regulación sin perturbación.

En ella se observa que para los errores de observación el tiempo de estabilización y sobreoscilación es mayor en el caso de Luenberger fraccionario que en los otros observadores, pero a su vez logra el mínimo tiempo de estabilización para el error de control con $\alpha = 0.8$. Esto se debe a que en este caso la perturbación que introduce el control $u(t)$ en el transitorio ayuda levemente a que el error de control descienda un poco más rápido que en el caso Luenberger de orden entero.

En la Figura 4.13 se presenta el desempeño en el esquema de regulación del observador Luenberger fraccionario con los mismos parámetros anteriores, pero esta vez introduciendo una perturbación en la salida de la planta $n(t) = 10\sin(100t)$. En la Figura 4.14 se presenta el desempeño del observador fraccionario modificado para el mismo caso de perturbación de alta frecuencia.

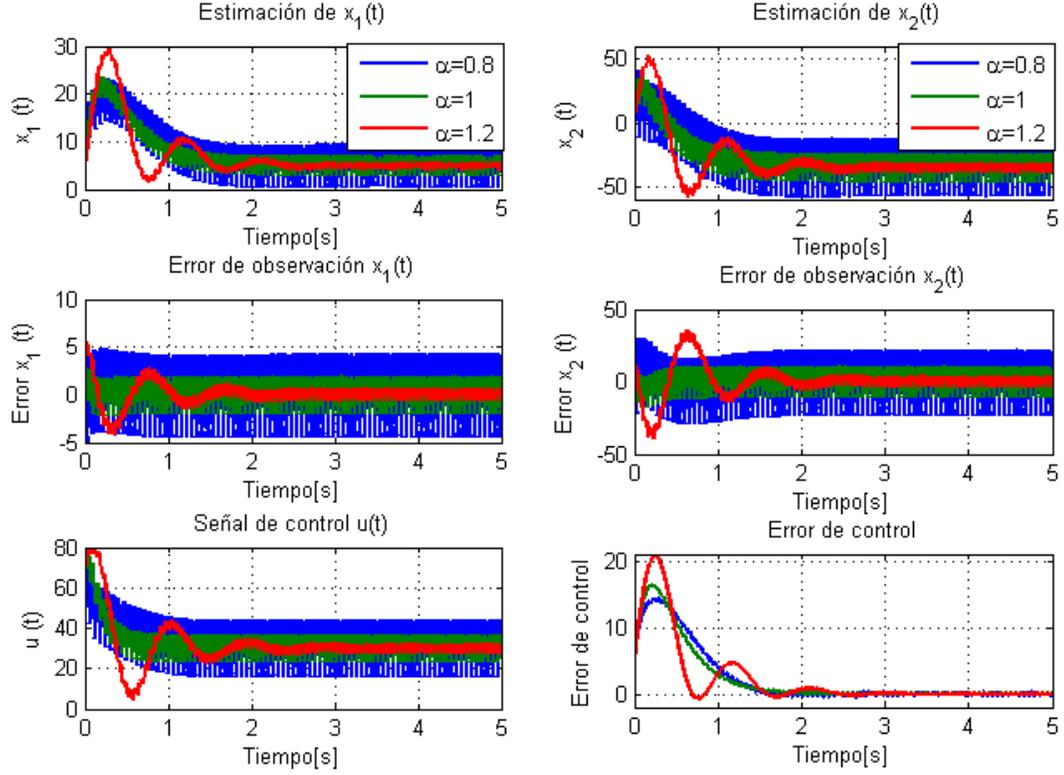


Figura 4.13: Regulación mediante observador Luenberger fraccionario con $n(t) = 10\sin(100t)$

En ambas figuras se aprecia que la dinámica de los errores de observación y control son similares al caso sin perturbación, pero esta vez se le incorpora una componente de perturbación de alta frecuencia que influye fuertemente en el error de observación a medida que disminuye el valor de α . Este efecto parece ser menos significativo en el error de control que en el error de observación.

La influencia de la perturbación en la respuesta de los observadores en el lazo cerrado de control es diferente para los tres observadores. Mientras el error de observación para el observador Luenberger de orden entero se ve afectado por la perturbación como se muestra en (4.40), al observador Luenberger de orden fraccionario se le agrega el término (4.41), y el observador fraccionario modificado incorpora la perturbación como se muestra en (4.42).

$$T_n(s) = -(sI - (A - FC^T))^{-1}F \cdot N(s) \quad (4.40)$$

$$T_n(s) = \left([(sI - A)^{-1}BK - I] (s^\alpha I - (A - FC^T + BK) - FC^T (sI - A)^{-1}BK)^{-1} \right) F \cdot N(s) \quad (4.41)$$

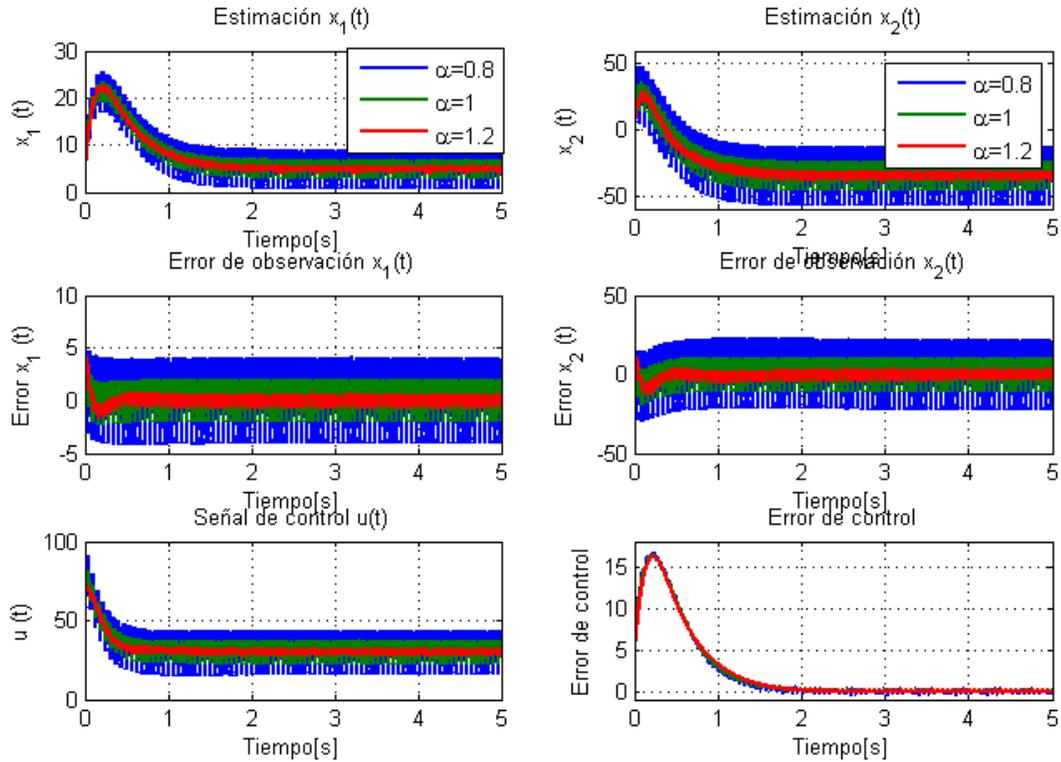


Figura 4.14: Regulación mediante observador fraccionario modificado con $n(t) = 10\sin(100t)$

$$T_n(s) = -(s^\alpha I - (A - FC^T))^{-1} F \cdot N(s) \quad (4.42)$$

De este modo, el error de control se ve afectado por la perturbación con la adición del término $-C^T(sI - (A + BK))^{-1} [BK \cdot T_n(s)]$, donde $T_n(s)$ depende del observador que se utilice en el lazo cerrado de control.

En la Figura 4.15 se presenta la ganancia del diagrama de Bode que afecta a cada uno de los errores de observación y control en la utilización de cada uno de los observadores. En ella se aprecia que para un mismo valor de α no existe una diferencia significativa en la atenuación de la perturbación entre el observador Luenberger fraccionario y el fraccionario modificado. Además se verifica que para valores mayores de α la pendiente del filtro es mayor, y por lo tanto, el efecto de la perturbación de alta frecuencia se aprecia menos en los errores.

Otro punto importante es que existe gran diferencia entre los órdenes de magnitud de las ganancias que afectan a los errores de observación y al error de control, siendo en este último caso al menos 1 orden de magnitud menor (ver Tabla 4.9), lo cual justifica el hecho de que en el error de control no se observa significativamente la influencia de la perturbación de alta frecuencia.

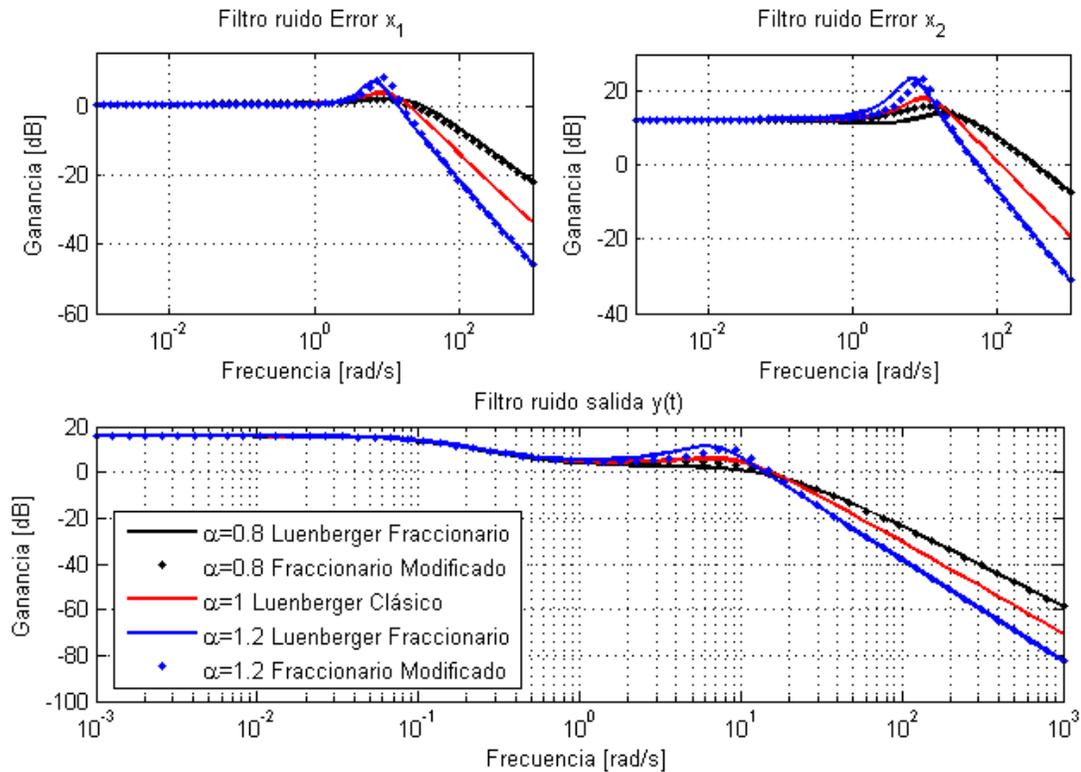


Figura 4.15: Diagrama de Bode atenuación de perturbación en estimación de estados y salida

Obs.	α	Frecuencia [$\frac{rad}{s}$]	Error $x_1(t)$		Error $x_2(t)$		Error de control	
			Ganancia [dB]	Ganancia absoluta	Ganancia [dB]	Ganancia absoluta	Ganancia [dB]	Ganancia absoluta
L.F.	0.8	100	-6.65	0.4653	7.52	2.3771	-23.62	0.0659
	1.2	100	-21.88	0.0805	-6.95	0.4493	-38.24	0.0122
L.E.	1	100	-13.97	0.2002	0.85	1.1024	-30.47	0.0300
F.M.	0.8	100	-7.33	0.4301	7.32	2.3230	-23.95	0.0635
	1.2	100	-21.77	0.0816	-6.92	0.4509	-38.24	0.0122

Tabla 4.9: Valores de la ganancia del filtro para perturbación de 100 [$\frac{rad}{s}$].

Así pues, si bien no se aprecia una diferencia significativa en la dinámica del error de control al utilizar observadores fraccionarios, sí se tiene una ventaja importante en el uso de observadores fraccionarios con $\alpha > 1$ en presencia de perturbaciones de alta frecuencia, pues su error de observación se ve menos afectado por la perturbación y, por lo tanto, la señal de control es menos ruidosa, lo cual generalmente es de interés en la práctica.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

En este capítulo se exponen las principales conclusiones que se desprenden del trabajo desarrollado, y además se sugieren futuras líneas de investigación que dan continuidad a los aportes aquí realizados, complementando los resultados ya obtenidos.

5.1. Conclusiones

La idea de considerar derivadas de orden fraccionario amplía en un grado de libertad el diseño de observadores para plantas de orden entero, lo cual se comprueba que genera ventajas en ciertos aspectos con respecto al observador Luenberger de orden entero. En particular para órdenes de derivación $0 < \alpha < 1$ y factor de corrección F fijo se logran beneficios en cuanto a la velocidad de convergencia del error de observación, y para $1 < \alpha < 2$ se obtienen ventajas significativas en la atenuación de perturbaciones de alta frecuencia.

Se logra generar un diseño original de observador fraccionario que, aplicado a plantas de orden entero, presenta ventajas con respecto al observador Luenberger fraccionario, y además conserva las ventajas que este último tiene con respecto al observador Luenberger de orden entero. Este resultado constituye uno de los aportes principales de este trabajo de título, pues se estudia teóricamente la estabilidad de los esquemas de observación, obteniéndose condiciones suficientes para la estabilidad BIBO del observador Luenberger fraccionario y estabilidad asintótica del observador fraccionario modificado, las que son validadas mediante simulaciones.

Se concluye que la utilización de los observadores diseñados en base una dinámica deseada para el error de observación no resulta útil, pues los observadores obtenidos corresponden a representaciones fraccionarias del observador de Luenberger de orden entero, o bien imponen restricciones que limitan su aplicación a plantas de primer orden, las que no son de interés en el ámbito de los observadores, pues su estado es accesible a través la salida. Este resultado se debe a la forma en que se plantea el observador en primera instancia, como suma de funciones de la entrada, del estado estimado y de la salida, separadamente. Es posible que considerando estructuras de observación más complejas se obtengan mejores resultados usando este enfoque.

En cuanto a las condiciones de estabilidad encontradas para los observadores fraccionarios, se agrega una fuerte condición que impone que la planta a observar debe ser estable. Esta restricción surge debido a que la dinámica fraccionaria se rige mediante funciones de Mittag-Leffler y la dinámica entera mediante exponenciales, lo cual provoca que en el error de observación no se logre modificar la dinámica de la planta y ésta se manifieste directamente, lo que hace necesaria su estabilidad.

Este mismo argumento sustenta otra de las desventajas que se tiene en el caso fraccionario, que consiste en que una buena estimación de la condición inicial no mejora el desempeño de los observadores, pues al ser el observador y la planta guiados por funciones de diferente tipo, por más que se inicien en el mismo punto no seguirán la misma trayectoria de ahí en adelante, como ocurre en el caso del observador Luenberger de orden entero.

En el caso del observador Luenberger fraccionario se requiere otra condición adicional para la estabilidad BIBO, que consiste en que el par (A, B) de la planta sea controlable. Esto ocurre debido a que en la dinámica del error de observación hay un término dependiente de la entrada de la planta, lo que impide asegurar la convergencia asintótica del error a cero. Aún así se demuestra que para una entrada constante el término dependiente de la entrada influye sólo en la respuesta transitoria y por lo tanto se tiene estabilidad asintótica del error de observación a cero. Para entradas sinusoidales en cambio, el efecto se aprecia en el estado estacionario del error de observación, presentándose una oscilación persistente cuya amplitud y frecuencia dependen fuertemente de la frecuencia de entrada, siendo menor su efecto a medida que aumenta la frecuencia. Esta dependencia que el error de observación tiene de la entrada de la planta es la que se resuelve mediante el observador fraccionario modificado presentado en la Sección 4.2 de este trabajo de título.

En los observadores fraccionarios se aprecia que el orden de derivación α define la forma de evolución del error de observación, de acuerdo a la dinámica que siguen las funciones de Mittag-Leffler de ese orden. Esta dinámica permite que para el caso de $0 < \alpha < 1$ la convergencia del error de observación sea más rápida que en el caso de orden entero, lo que a su vez genera un menor tiempo de estabilización si la sobreoscilación se encuentra dentro del rango definido como banda de estabilización.

En cuanto al factor de corrección F , se concluye que si bien su elección juega un rol importante debido a que es parte de las condiciones de estabilidad deducidas, en el caso fraccionario no permite modificar arbitrariamente la velocidad de convergencia del error de observación como en el caso entero, porque el tiempo de estabilización está restringido por las características de la planta. Por lo tanto, los observadores fraccionarios de estado parecieran ser un buen estimador del estado estacionario de la planta, pero no son capaces de estimar el estado transiente pues evolucionan mediante funciones con características diferentes.

Se concluye que todos los observadores estudiados (fraccionarios y enteros) en general producen un error de observación en estado estacionario distinto de cero cuando hay desconocimiento en los parámetros de la planta, el que tiende a infinito si la matriz de evolución A es inestable. Se obtienen expresiones para el error permanente cuando se cumplen las condiciones de estabilidad y existe además desconocimiento en A y B , las que resultan diferentes para el caso del observador fraccionario modificado y los observadores del tipo Luenberger. Dichas conclusiones son validadas mediante simulaciones.

Una de las principales ventajas que presentan los observadores fraccionarios, con respecto al observador Luenberger de orden entero, es en su respuesta frente a perturbaciones. La posibilidad de manejar continuamente mediante el factor α las pendientes del diagrama de bode del error de observación, provoca una ventaja significativa en la atenuación de perturbaciones de alta frecuencia para $1 < \alpha < 2$, lo cual dentro de un lazo cerrado de control se traduce en una disminución en la variabilidad de la señal de control, lo cual es deseable en la práctica para el correcto funcionamiento de los procesos.

Así es como el desarrollo del presente trabajo de título ha generado interesantes conclusiones en el ámbito de los observadores de estado, pues se realiza un análisis de estabilidad que permite encontrar ventajas y desventajas de los esquemas fraccionarios planteados en comparación con una de las soluciones clásicas que existen en la literatura técnica.

5.2. Trabajo Futuro

El tema estudiado en el presente trabajo de título es un tema del cual no se encuentran abundantes resultados en la literatura, y por lo tanto se ha abordado estudiando el caso más sencillo, es decir, plantas lineales SISO y de parámetros conocidos. Se sugiere entonces extender los resultados acá obtenidos para el caso de plantas con múltiples entradas y salidas, ya que ese desarrollo pudiera resultar en observadores de menor orden al existir más información accesible de los estados. También queda propuesto extender este análisis a plantas enteras no lineales o variables en el tiempo.

Además de extender este resultado a otros casos, sería de particular interés utilizar otras estructuras de observación que permitan eliminar la condición de estabilidad que le imponen los observadores fraccionarios a la planta, ya que esta es una de las principales desventajas de los observadores no enteros estudiados. Se cree que utilizando otras estructuras de observación más complejas que las planteadas en el presente trabajo de título, sería posible obtener alguna de las dinámicas autónomas deseadas para el error de observación que efectivamente resulten en observadores más útiles.

Se propone también incorporar a los observadores un algoritmo de optimización que permita encontrar los parámetros óptimos de los observadores (orden de derivación α , factor de corrección F , condiciones iniciales del observador) de manera que se optimice alguna función objetivo, ya sea desde el punto de vista de la rapidez de convergencia del error de observación o de la robustez de los observadores ante perturbaciones.

Finalmente, es de interés señalar la importancia de encontrar aproximaciones numéricas que sean consistentes con la teoría. A lo largo del desarrollo del presente trabajo de título se encontraron ciertas inconsistencias básicas entre los resultados obtenidos teóricamente y los de las simulaciones, especialmente en horizontes temporales extensos. Para llevar a la práctica los desarrollos generados será necesario contar con aproximaciones numéricas consistentes con la teoría sin restricciones temporales, por lo que resulta imprescindible realizar mejoras en la implementación de los algoritmos asociados al cálculo fraccionario.

Bibliografía

- [1] A. El-Misiery and E. Ahmed, “On a Fractional Model for Earthquakes,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 178, no. 2, pp. 207 – 211, 2006.
- [2] L. Song, S. Xu, and J. Yang, “Dynamical Models of Happiness with Fractional Order,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, no. 3, pp. 616 – 628, 2010.
- [3] W. M. Ahmad and R. El-Khazali, “Fractional-Order Dynamical Models of Love,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 33, no. 4, pp. 1367 – 1375, 2007.
- [4] S. Westerlund and L. Ekstam, “Capacitor Theory,” *Dielectrics and Electrical Insulation, IEEE Transactions on*, vol. 1, no. 5, pp. 826 – 839, 1994.
- [5] C. Monje, Y. Chen, B. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls*. Springer, 2010.
- [6] D. Cafagna, “Fractional Calculus: A Mathematical Tool From the Past for Present Engineers [Past and present],” *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, vol. 1, no. 2, pp. 35 – 40, 2007.
- [7] C. Li and W. Deng, “Remarks on fractional derivatives,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, no. 2, pp. 777 – 784, 2007.
- [8] D. Luenberger, “An Introduction to Observers,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 6, pp. 596 – 602, 1971.
- [9] R. E. Kalman *et al.*, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35 – 45, 1960.
- [10] D. Luenberger, “Observing the State of a Linear System,” *Military Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 8, no. 2, pp. 74 – 80, 1964.
- [11] S. P. Banks, “A Note on Non-linear Observers,” *International Journal of Control*, vol. 34, no. 1, pp. 185 – 190, 1981.
- [12] E. Braiek and F. Rotella, “State Observer Design for Analytical Non-linear Systems,” in *Systems, Man, and Cybernetics, 1994. Humans, Information and Technology, 1994 IEEE International Conference on*, vol. 3, pp. 2045 – 2050, 1994.

- [13] G. Luders and K. Narendra, "An Adaptive Observer and Identifier for a Linear System," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 5, pp. 496 – 499, 1973.
- [14] R. L. Carroll and D. Lindorff, "An Adaptive Observer for Single-Input Single-Output Linear Systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 5, pp. 428 – 435, 1973.
- [15] S. Dadras and H. Momeni, "Fractional Sliding Mode Observer Design for a Class of Uncertain Fractional Order Nonlinear Systems," in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pp. 6925 – 6930, 2011.
- [16] S. Dadras and H. Momeni, "A New Fractional Order Observer Design for Fractional Order Nonlinear Systems," in *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering, ASME 2011 Conference on*, ASME, 2011.
- [17] R. Martinez-Martinez, J. Mata-Machuca, R. Martinez-Guerra, J. Leon, and G. Fernandez-Anaya, "A New Observer for Nonlinear Fractional Order Systems," in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pp. 3319 – 3324, 2011.
- [18] I. N'Doye, H. Voos, M. Darouach, J. Schneider, and N. Knauf, "An Unknown Input Fractional-Order Observer Design for Fractional-Order Glucose-Insulin System," in *Biomedical Engineering and Sciences (IECBES), 2012 IEEE EMBS Conference on*, pp. 595 – 600, 2012.
- [19] D. Matignon, "Stability Results for Fractional Differential Equations with Applications to Control Processing," in *CESA'96 IMACS Multiconference: computational engineering in systems applications*, pp. 963 – 968, 1996.
- [20] D. Matignon and B. D'andrea-Novel, "Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems," in *CESA'96 IMACS Multiconference: computational engineering in systems applications*, pp. 952 – 956, 1996.
- [21] D. Valério, *Ninteger v.2.3 : Fractional Control Toolbox for Matlab*. Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [22] J. Chen, K. Lundberg, D. Davison, and D. Bernstein, "The Final Value Theorem Revisited - Infinite Limits and Irrational Functions," *Control Systems, IEEE*, vol. 27, no. 3, pp. 97 – 99, 2007.
- [23] N. Abel, "Oplosning af et Par Opgaver ved Hjaelp af bestemte Integraler," *Magazin for Naturvidenskaberne*, vol. 2, pp. 205 – 215, 1823.
- [24] Y. Ding and H. Ye, "A Fractional-Order Differential Equation Model of HIV Infection of CD4+ T-cells," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 50, no. 3, pp. 386 – 392, 2009.
- [25] I. Podlubny, "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation," *ArXiv Mathematics e-prints*, Oct. 2001.
- [26] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives*,

Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Mathematics in Science and Engineering, Elsevier Science, 1998.

- [27] A. Kilbas, H. Srivastava, and J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 2006.
- [28] C. Li and Z. Zhao, “Asymptotical Stability Analysis of Linear Fractional Differential Systems,” *Journal of Shanghai University (English Edition)*, vol. 13, no. 3, pp. 197 – 206, 2009.
- [29] B. Vinagre and C. Monje, “Introducción al Control Fraccionario,” *RIAI*, vol. 3, no. 3, pp. 5 – 23, 2009.
- [30] M. Ortigueira, “An Introduction to the Fractional Continuous-Time Linear Systems: the 21st century systems,” *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, vol. 8, no. 3, pp. 19 – 26, 2008.
- [31] L. M. Silverman, “Realization of Linear Dynamical Systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 6, pp. 554 – 567, 1971.
- [32] W. Deng, C. Li, and Q. Guo, “Analysis of Fractional Differential Equations with multi-orders,” *Fractals*, vol. 15, no. 02, pp. 173 – 182, 2007.
- [33] J. Zheng, Y. Li, B. Liu, and Y. Chen, “The L_p Stability Analysis of the Basic Functions for Fractional Order Systems,” in *Control and Decision Conference (CCDC), 2012 24th Chinese*, pp. 1048 – 1053, 2012.
- [34] R. Wong and Y. Zhao, “Exponential Asymptotics of the Mittag Leffler Function,” *Constructive Approximation*, vol. 18, no. 3, pp. 355 – 385, 2002.
- [35] Y. Li, Y. Chen, and I. Podlubny, “MittagâLeffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1965 – 1969, 2009.
- [36] E. Kreindler and P. Sarachik, “On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 9, no. 2, pp. 129 – 136, 1964.
- [37] K. Ogata, *Ingeniería de Control moderna*. Pearson educación, Pearson Educación, 2003.
- [38] S. Ladaci and Y. Bensafia, “Fractionalization: A New Tool for Robust Adaptive Control of Noisy Plants,” in *Fractional Differentiation and its Applications*, vol. 6, pp. 379 – 384, 2013.
- [39] F. Yan and J. Wang, “Design and Robustness Analysis of Discrete Observers for Diesel Engine In-Cylinder Oxygen Mass Fraction Cycle-by-Cycle Estimation,” *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 1, pp. 72 – 83, 2012.
- [40] A. Al-Bayati and Z. Skaf, “A Comparative Study of Linear Observers Applied to a DC Servo Motor,” in *Modelling, Identification and Control (ICMIC), The 2010 International Conference on*, pp. 785 – 790, 2010.
- [41] X. Ji, F. Wang, and D. Zhang, “Robustness Analysis of Pole Placement Method with Single Degree of Freedom in Full Order Flux Observer,” in *Power and Energy Engineering Confe-*

rence (APPEEC), 2012 Asia-Pacific, pp. 1 – 4, 2012.

- [42] H. Trentelman, A. Stoorvogel, and M. Hautus, *Control Theory for Linear Systems*. Research Institute of Mathematics and Computer Science, 2002.
- [43] S. Mondié, P. Zagalak, and V. Kucera, “State Feedback in Linear Control Theory,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 317, no. 1 â 3, pp. 177 – 192, 2000.
- [44] E. Hendricks, O. Jannerup, and P. Sorensen, *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer, 2008.
- [45] D. Matignon and B. D’andrea-Novel, “Observer-Based Controllers for Fractional Differential Systems,” in *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, vol. 5, pp. 4967 – 4972, 1997.
- [46] I. N’Doye, M. Zasadzinski, M. Darouach, and N. Radhy, “Observer-Based Control for Fractional-Order Continuous-Time Systems,” in *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pp. 1932 – 1937, 2009.