



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

OPCIONES REALES APLICADAS A UN PROBLEMA DE SECUENCIAMIENTO  
MINERO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

FRANCISCO JAVIER CASTRO ALTAMIRANO

PROFESOR GUÍA:  
RAFAEL EPSTEIN NUMHAUSER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI  
DENIS SAURÉ VALENZUELA  
ANDRÉS WEINTRAUB POHORILLE

SANTIAGO DE CHILE  
JUNIO 2014

---

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO  
POR: FRANCISCO CASTRO ALTAMIRANO  
FECHA: 22/01/2014  
PROF. GUÍA: RAFAEL EPSTEIN

## OPCIONES REALES APLICADAS A UN PROBLEMA DE SECUENCIAMIENTO MINERO

En el presente trabajo se propone una metodología para evaluar un proyecto minero de cobre de largo plazo. Para tales propósitos, se considera la aleatoriedad del precio del cobre, el cual es modelado como un proceso estocástico a tiempo continuo con reversión a la media. Según prácticas tradicionales en la minería, se modela la mina como una serie de bloques cuya distribución espacial es conocida. Éstos poseen características como cantidad de mineral, ley promedio y costo marginal de producción. Dado esto, el planificador debe decidir cuándo es el momento adecuado (timing) para la explotación de cada bloque, de modo que el valor presente neto del proyecto sea maximizado.

Para resolver el problema se plantea, utilizando una formulación de programación dinámica estocástica, un modelo general, el cual considera las opciones de inicio de extracción, detención de extracción y cierre del proyecto minero. Además, el modelo general admite flexibilidad en la secuencia de extracción de los bloques y la capacidad de producción. Si bien éstas dos últimas opciones son consideradas en la formulación general, esta memoria no alcanza a analizarlas y solamente se restringe al estudio del timing de explotación de bloques, considerando una secuencia de extracción y capacidad de producción fijas. Utilizando técnicas de *Parada Óptima*, se resuelven aproximaciones al problema y se obtiene una serie de umbrales (thresholds) que indican, en términos del precio del cobre, cuándo realizar una de las siguientes opciones: extraer, detener o cerrar. Estas aproximaciones son problemas de la misma naturaleza que el problema original, al cual acotan inferior y superiormente.

En relación a la calidad de las aproximaciones, los valores obtenidos para éstas son comparados con el valor real del problema, obteniéndose que, en general, la aproximación inferior tiene el menor error. A partir de ésta, se propone una nueva aproximación (lineal) cuya calidad es tan buena como la anterior. Luego, esta última aproximación es aplicada a una instancia real: sector *El Diablo* de la división *El Teniente* perteneciente a CODELCO. Los resultados obtenidos a partir de la metodología propuesta muestran una mejora con respecto a la planificación inicial sugerida para la extracción del sector *El diablo*.

# Tabla de contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1. Medida Neutral al Riesgo . . . . .	4
2.2. Problema de Parada Óptima . . . . .	7
<b>3. Antecedentes Mineros y Precio del Cobre</b>	<b>13</b>
3.1. Antecedentes Mineros . . . . .	13
3.2. Precio del Cobre . . . . .	15
<b>4. Modelo Matemático</b>	<b>18</b>
4.1. Parametrización del Proyecto Minero . . . . .	18
4.2. Valoración del Proyecto Minero . . . . .	20
4.3. Modelo General . . . . .	21
4.4. Notación . . . . .	24
<b>5. Solución del Modelo Matemático</b>	<b>26</b>
5.1. Formulación del Problema de Parada Óptima . . . . .	26
5.2. Propiedades de $H_j(S)$ . . . . .	28
5.3. $(\alpha, \eta, \gamma)$ -Aproximaciones y su Solución de Parada Óptima . . . . .	36
5.4. Algoritmo de Solución . . . . .	48
<b>6. Resultados Experimentales</b>	<b>54</b>
6.1. Aproximaciones Asintóticas . . . . .	54
6.2. Aplicación a una Instancia Real . . . . .	59
<b>7. Conclusión</b>	<b>62</b>
<b>8. Bibliografía</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En Chile, la actividad minera juega un rol fundamental en la economía del país, siendo uno de los sectores que más aporta en el Producto Interno Bruto Nacional. Según informa la Comisión Chilena del Cobre COCHILCO [6], en 2012, la minería tuvo una participación del 12 % en PIB del país y de este porcentaje, el 89 % corresponde a actividades cupríferas.

Dentro de las firmas mineras posicionadas en Chile destaca, por ejemplo, La Corporación Nacional del Cobre, CODELCO. Ésta posee cerca del 9 % de las reservas mundiales de cobre. Tanto sus reservas como recursos minerales considerados en su plan de negocios y desarrollo 2011 llegaban a 124 millones de toneladas de cobre fino. Considerando lo anterior, sumado a los ritmos de explotación y a el precio proyectado del mineral, CODELCO podrá mantener su producción por al menos otros 70 años. Por otro lado, durante 2012 la empresa realizó ventas por 15.680 millones de dólares, incluyendo cobre y subproductos.

Luego, dada la larga proyección y el gran impacto económico que tiene la actividad cuprífera, es fundamental entender su operación, y a su vez, buscar metodologías que ayuden en la toma de decisiones subyacentes. En cuanto a las operaciones, la actividad minera puede ser desarrollada principalmente en dos contextos: minería a rajo abierto y minería subterránea. En ambos contextos, se realizan Labores Mineras y Tareas de Procesamiento. Las primeras están relacionadas con la extracción y envío a planta del mineral desde el rajo, mientras que las segundas, consisten en una red de procesos que tienen que ver con la reducción y refinamiento del metal para su posterior venta en forma de cátodos de cobre de alta pureza.

Es durante la etapa de Labores Mineras donde las metodologías provenientes del área de Investigación de Operaciones han probado ser más valiosas en la ayuda de toma decisiones. Durante esta etapa, las variables que fijan los puntos de extracción y cuánto mineral es extraído en un determinado momento resultan relevantes, pues afectan las características del mineral que se obtendrá a posteriori y, por lo tanto, influyen directamente en el valor del negocio. De hecho, al extraer mineral con mejores leyes al inicio del horizonte de planificación, se produce más cobre fino en etapas tempranas de la evaluación, generando de esta forma mayores beneficios económicos. El objetivo de utilizar y crear metodologías que permitan, por ejemplo, decidir las variables mencionadas, es maximizar el valor del negocio. Para esto, tanto en un contexto determinista como estocástico (en relación al precio del mineral) las empresas del sector buscan maximizar el valor presente neto del proyecto.

En diversos trabajos se ha abordado la problemática minera desde un punto de vista determinista. Por ejemplo, en [4, 10, 15] se proponen, en distintos niveles de detalle, metodologías que consideran un valor promedio del precio del cobre para optimizar la operación de una faena minera. Si bien los resultados presentados en estos trabajos poseen una gran aplicabilidad, al no considerar la naturaleza estocástica del precio del cobre pueden llevar a soluciones sub-óptimas. En trabajos como [1, 11, 27] se incorpora la estocasticidad del precio del cobre para llevar a cabo la planificación minera. En ellos, dentro de un contexto de tiempo discreto se demuestra empíricamente que existe una ganancia al valorar los proyectos mineros considerando aleatoriedad en el precio del cobre.

En tiempo continuo también existe literatura que incorpora la estocasticidad del precio del mineral para valorar un proyecto minero. Por ejemplo, en [3, 7, 22] se modela el precio del cobre como un proceso estocástico a tiempo continuo y se valora la mina desde una perspectiva de opciones reales y control óptimo estocástico, de modo que el tomador de decisiones puede ir ajustando las variables de decisión, como la tasa de producción, a medida que va adquiriendo información acerca del precio del cobre. Además, puede decidir cuándo es el momento adecuado para iniciar, detener momentáneamente o cerrar definitivamente la operación.

En el presente trabajo se incorporan algunos de los elementos descritos con el objetivo de desarrollar una metodología que genere políticas operacionales óptimas. Específicamente se utiliza el modelo de operaciones de grandes empresas mineras, como CODELCO. Estas empresas dividen sus yacimientos en Unidades Mínimas de Cubicación (UMC) o bloques, los cuales poseen características conocidas como la cantidad de mineral, ley promedio y costo marginal de producción. A partir de estas características, y considerando la naturaleza aleatoria del precio del cobre, se busca maximizar el valor presente neto del negocio. Para esto, los expertos mineros deben decidir cuál es la secuencia óptima de extracción de los bloques. Dada la secuencia, se debe decidir cuándo es el momento adecuado para extraer cada bloque y, además, hacer expansiones de capacidad de producción en caso de ser conveniente.

Para enfrentar este problema, se propone un enfoque de opciones reales. Utilizando técnicas de programación dinámica y *Parado Óptima*, se presenta una solución parcial para la planificación minera. Ésta solución, considera las opciones de extracción, detención y cierre durante cualquier instante del horizonte de planificación. Además, el modelo planteado es general, de modo que captura las opciones de aumento de capacidad de producción.

Este trabajo se estructura como sigue. En el Capítulo 2 se presentan dos herramientas matemáticas básicas que permiten hacer los desarrollos: *Medida Neutral al riesgo* y *Problema de Parada Óptima*. El Capítulo 3, explica el contexto de minería bajo el cual se planteará el problema a ser resuelto; además, se modela el precio del cobre como un proceso estocástico con reversión a la media. En el Capítulo 4, se plantea un modelo que intenta representar y capturar las condiciones bajo las cuales opera la mina. El capítulo termina planteando un problema de programación dinámica estocástica (que considera las opciones de cierre, detención y reinicio) el cual maximiza el valor presente del proyecto minero. En el Capítulo 5, se estudian algunas propiedades del problema planteado y se utilizan técnicas de *Parada Óptima* para resolver aproximaciones al problema original. Luego, se plantea un algoritmo que calcula de manera eficiente dichas aproximaciones. Por último, en el Capítulo 6 se presenta una nueva aproximación para el problema original y

se compara su calidad con las aproximaciones obtenidas en el capítulo anterior. Además, se aplican los resultados obtenidos a una instancia similar a una real: el sector *El Diablo* de la división *El Teniente* perteneciente a CODELCO.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

En el presente capítulo se presentan los antecedentes teóricos que permiten fundamentar el trabajo hecho en esta memoria. En primera instancia, se explica la medida neutral al riesgo, la cual, en un mercado completo, permite hacer evaluaciones libres de arbitraje. Luego, se define de manera general el problema de Parada Óptima, se presenta un resultado que da condiciones suficientes para resolverlo y, finalmente, se muestra cómo utilizar tal resultado mediante un ejemplo. En todo este capítulo se considera un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 2.1. Medida Neutral al Riesgo

Antes de definir formalmente una medida neutral al riesgo, es conveniente proporcionar de intuición acerca de ésta. En términos sencillos, una medida neutral al riesgo es una medida de probabilidad bajo la cual el valor actual de los activos financieros en tiempo  $t$ , es igual al valor futuro esperado de los activos descontados a la tasa libre de riesgo, dada la información disponible en tiempo  $t$ . Lo interesante de utilizar una medida libre de riesgo, es que en un mercado completo no habría arbitraje. Por ejemplo, en [20, Capítulo 1] en un contexto discreto, se considera un periodo (aparte del tiempo  $t = 0$ ) y se valora una opción Europea. Ahí, se construye una medida de probabilidad bajo la cual el valor esperado del activo en  $t = 1$ , es el mismo que su valor en  $t = 0$ , es decir, el valor del activo en promedio es constante. Bajo el supuesto de mercado completo, se demuestra que no es posible beneficiarse al replicar la opción si es que se valora con la medida creada, es decir, no puede ocurrir arbitraje. Esta medida de probabilidad es la llamada medida neutral al riesgo.

**Ejemplo 2.1.** Para claridad, a continuación se ejemplifica la situación recién descrita. Para simplificar la presentación no se considera un descuento, es decir, la tasa de interés es 0. Suponga que un activo  $S_t$  tiene un valor de 10 \$ en el tiempo  $t = 0$ , y que en  $t = 1$  sólo puede tomar dos posibles valores,

$$S_1 = \begin{cases} 20 & \text{con probabilidad } p \\ 7.5 & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases} \quad (2.1)$$

Se considera una opción Europea  $H = (S_1 - K)^+$  (*call option*), donde  $K = 15$ \$ es el precio de ejercicio de la opción. De modo que en  $t = 1$ ,  $H$  produce una ganancia de 5 \$ si  $S_1 = 20$

\$, y 0 \$ si  $S_1 = 7.5\$$ . En este ejemplo, la medida de probabilidad esta dada por la elección del par  $(p, 1 - p)$ . Dicha elección depende de la actitud del inversionista hacia el riesgo, si es que ésta es equivocada puede producir que el inversionista pague más de lo necesario por la opción. Se busca una medida “neutral al riesgo”,  $(q, 1 - q)$ , bajo la cual el valor del activo en  $t = 0$  sea igual a su valor esperado en  $t = 1$ , esto es

$$20q + 7.5(1 - q) = 10,$$

por lo que  $q = 0.2$ . Y por lo tanto, el valor de la opción  $V(H)$  es  $V(H) = 5q = 1$ . Mediante un argumento de replicación se puede probar que esta elección de probabilidad es la que asigna el único valor “racional” a la opción. En efecto, si se considera un portafolio  $(\nu_1, \nu_2)$  donde  $\nu_1$  corresponde a cierta cantidad de dinero (si  $\nu_1 > 0$  se presta  $\nu_1\$$ , en caso contrario se pide prestado  $\nu_1\$$ ), y  $\nu_2$  corresponde a una porción del activo. La idea de este portafolio es que el vendedor (o el comprador) lo pueda usar para evitar el riesgo asociado a la venta (compra) de la opción. Como la tasa de interés es 0, el valor de este portafolio viene dado por

$$V_t = \nu_1 + S_t \nu_2, \quad t = 0, 1.$$

Para que el vendedor de la opción pueda evitar el riesgo, el par  $(\nu_1, \nu_2)$  debe ser construido de manera tal que el portafolio tenga el mismo valor en  $t = 1$  que los posibles valores de la opción, es decir,

$$5 = \nu_1 + 20\nu_2 \quad \text{y} \quad 0 = \nu_1 + 7.5\nu_2,$$

de esto se deduce que  $\nu_1 = -3$  y  $\nu_2 = 0.4$ . Esto sugiere la siguiente estrategia para el vendedor de la opción. En  $t = 0$  debe pedir prestado 3 \$ y vender la opción a  $V(H) = 1\$$ , con este monto compra una porción de 0.4 del activo ( $10 \times 0.4 = 4$ ). Luego, en  $t = 1$  pueden ocurrir dos situaciones

- Si  $S_1 = 20\$$ , entonces se ejerce la opción a un costo de 5\$. Como se tiene 0.4 del activo esta porción puede ser vendida a 20\$, por lo que esto genera 8\$. Con esto se puede pagar el préstamo de 3\$ más el costo de la opción (de 5\$). De modo que el balance neto en este caso es 0\$.
- Si  $S_1 = 7.5\$$ , entonces no se ejerce la opción y por lo tanto el costo es 0\$. Nuevamente se puede vender la porción a 7.5\$ generando 3\$. Con esto se puede pagar el préstamo de 3\$. Otra vez el balance neto de 0\$.

De esta forma, sin importar lo que ocurra en  $t = 1$ , al replicar la opción mediante este portafolio, el vendedor de la opción no produce perdidas ni ganancias. Esto se debe a que se ha evaluado la opción utilizando como medida de probabilidad el par  $(q, 1 - q)$ . De hecho, cualquier otra medida de probabilidad generaría la posibilidad de que tanto el vendedor de la opción como el comprador puedan producir ganancias sin riesgo alguno. Para ver lo anterior supongamos que  $V(H) > 1$ , en este caso el vendedor puede usar la misma estrategia descrita anteriormente, y sin importar cual sea el valor de  $S_1$  siempre obtendrá una ganancia de  $V(H) - 1$ . Por otro lado, si  $V(H) < 1$  entonces el comprador de la opción puede producir, sin riesgo, una ganancia de  $1 - V(H)$ . Por lo tanto, en la presente situación la única medida de probabilidad que no genera arbitraje y permite el equilibrio de mercado es la dada por  $q$ . Es por esto que esta medida es la única “racional” y es llamada medida neutral al riesgo.

La aplicación de esta medida es extensa en el mundo de las finanzas, en esta memoria será utilizada para evaluar un proyecto minero. Para tales propósitos, es necesario dar una definición formal de la medida neutral al riesgo.

Sea  $B_t$  un movimiento Browniano standard 1-dimensional en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea  $\mathcal{F}_t$  la filtración generada por  $B_t$ . Sea  $S_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un proceso estocástico que es solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \quad S_0 = s_0 \quad (2.2)$$

donde la tasa media de retorno  $\alpha_t$  y la volatilidad  $\sigma_t$  son procesos  $\mathcal{F}_t$ -adaptados. Se asume que  $\sigma_t$  no es cero casi seguramente. Sea, además  $R_t$  un proceso adaptado<sup>1</sup> que representa la tasa de interés. Luego, se define el proceso de descuento por

$$D_t \triangleq e^{-\int_0^t R_s ds}, \quad (2.3)$$

de modo que  $dD_t = -R_t D_t dt$ . Con esto, se llama proceso de precio descontado a  $D_t S_t$ . Dado los elementos recién definidos, es posible dar una definición formal de una medida neutral al riesgo.

**Definición 2.2.** Una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$  se dice neutral al riesgo si

- i)  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{P}$  son equivalentes (i.e.,  $\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0$  sí y solo si  $\mathbb{Q}(A) = 0$ ).
- ii) Bajo  $\mathbb{Q}$ , el proceso de precio descontando  $D_t S_t$  es una martingala<sup>2</sup> con respecto a una filtración  $\mathcal{F}_t$ .

Esta definición coincide con lo comentado al inicio de esta sección. El hecho de que bajo  $\mathbb{Q}$  el proceso  $D_t S_t$  sea una martingala implica que el valor esperado de éste bajo  $\mathbb{Q}$  es  $D_0 S_0$ , es decir, es constante. Ahora bien, aún queda entender cómo se encuentra tal medida de probabilidad. En el presente contexto es posible utilizar el Teorema de Girsanov para tales efectos (ver [25, Capítulo 5]). Considérese el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.** En este ejemplo se considera  $S_t, D_t$  como en (2.2), (2.3) respectivamente. En particular, gracias a la formula de Itô es posible probar que

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t \left( \alpha_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds \right\}.$$

Luego,

$$D_t S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t \left( \alpha_s - R_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds \right\},$$

o en su forma diferencial

$$\begin{aligned} dD_t S_t &= (\alpha_t - R_t) D_t S_t dt + \sigma_t D_t S_t dB_t \\ &= \sigma_t D_t S_t (\zeta_t dt + dB_t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Un proceso  $h_t$  se dice  $\mathcal{F}_t$ -adaptado si  $h_t$  es medible con respecto a  $\mathcal{F}_t$ .

<sup>2</sup>Un proceso estocástico  $X_t$  es una **martingala** con respecto a una filtración  $\mathcal{F}_t$  si  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \forall s \leq t$ . En términos intuitivos, una martingala es un proceso estocástico  $X_t$  para el cual la mejor aproximación (en tiempo  $t \geq s$ ), dada la información actual (en tiempo  $s$ ), es el mismo proceso estocástico (en tiempo  $s$ ).

donde  $\zeta_t$  es el precio de mercado del riesgo y esta dado por

$$\zeta_t \triangleq \frac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t}.$$

Utilizando  $\zeta_t$  en [25, Teorema 5.2.3] (Teorema de Girsanov) se obtiene una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$ , equivalente a  $\mathbb{P}$ , bajo la cual el proceso

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \zeta_s ds, \quad (2.5)$$

es un movimiento Browniano. Reemplazando esto último en (2.4) se obtiene que

$$dD_t S_t = \sigma_t D_t S_t d\tilde{B}_t = \int_0^t \sigma_u D_u S_u d\tilde{B}_u,$$

como bajo  $\mathbb{Q}$  el proceso  $\tilde{B}_t$  es un Browniano, se concluye que bajo esta misma medida de probabilidad el proceso  $D_t S_t$  es una integral de Itô y por lo tanto una martingala<sup>3</sup>, es decir,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[D_t S_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^t R_u du} S_t | \mathcal{F}_s] = e^{-\int_0^s R_u du} S_s,$$

de esta forma,  $\mathbb{Q}$  resulta ser una medida neutral al riesgo. Por otra lado, será útil notar que a partir de (2.2) y (2.5) se tiene que

$$dS_t = R_t S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{B}_t,$$

o de manera equivalente

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s d\tilde{B}_s + \int_0^t (R_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) ds \right\}.$$

Este ejemplo ilustra cómo es posible obtener una medida neutral al riesgo utilizando el Teorema de Girsanov. Además, muestra cómo se ve afectado el proceso (2.2) al hacer el cambio de medida. Todo esto será de gran ayuda cuando se estudie la forma de evaluar el proyecto minero que se considera en este trabajo.

## 2.2. Problema de Parada Óptima

En esta sección se formula de manera general el problema de Parada Óptima. Se presentan antecedentes teóricos que entregan condiciones bajo las cuales es posible demostrar la existencia de una solución para este problema. Además, se presentan ejemplos que sirven como guía para los resultados encontrados en esta memoria.

**Definición 2.4.** Difusión de Itô, es un proceso  $X_t^x(\omega) \in \mathbb{R}^n$  que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x,$$

donde  $B_t$  es un movimiento Browniano  $m$ -dimensional en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  son funciones Lipschitz.

<sup>3</sup>En estricto rigor se debe exigir que  $\mathbb{E}[\int_0^t (\sigma_u D_u S_u)^2 du] < \infty$ .

A continuación se define el problema general de Parada Óptima. Sea  $V \subset \mathbb{R}$  un dominio y sea  $X_t$  difusión de Itô en  $\mathbb{R}$ . Se define además

$$\tau_V \triangleq \inf\{t > 0 : X_t \notin V\}.$$

Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que

a)  $\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau_V} f^-(X_t) dt \right] < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ <sup>4</sup>

b) La familia  $\{g^-(X_\tau) : \tau \leq \tau_V, \text{t.d.p}\}$  es uniformemente integrable con respecto a  $\mathbb{P}_{X_t^x}$  (la ley de probabilidad de  $X_t^x$ ), para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Por último, sea  $\mathcal{T}$  la familia de tiempos de parada  $\tau \leq \tau_V$ . Luego, interesa encontrar  $\Phi(x)$  y  $\tau^* \in \mathcal{T}$  tales que

$$\Phi(x) \triangleq \sup_{\tau \in \mathcal{T}} J^\tau(x) = J^{\tau^*}(x), \quad (2.6)$$

donde

$$J^\tau(x) \triangleq \mathbb{E}^x \left[ g(X_\tau) + \int_0^\tau f(X_t) dt \right], \quad \text{para } \tau \in \mathcal{T}.$$

El problema dado por (2.6) es el clásico problema de Parada Óptima que puede ser encontrado en la literatura. En particular, la presente formulación fue extraída de [16, Capítulo 10]. En ésta,  $g$  representa un función de recompensa y  $f$  es una tasa de ganancia dada, por lo tanto, este problema responde a la siguiente pregunta: Cuándo es el momento adecuado en el cual se puede obtener la mayor recompensa esperada?. Problemas del tipo (2.6) surgen de manera natural en las aplicaciones, por ejemplo, en [18, Capítitulo VII] se tratan problemas de Finanzas. En particular, se estudian las opciones Americanas, Rusas y Asiaticas, estos problemas tienen buenas propiedades y permiten ser resueltos analíticamente. Sin embargo, hay problemas prácticos similares a los problemas de opciones recién mencionados que no permiten un análisis sencillo y se debe recurrir a un estudio más profundo. En esta memoria, se trata un problema de esta naturaleza, el cual es planteado y desarrollado en profundidad en los Capítulos 4 y 5.

Existe un resultado que entrega condiciones suficientes las cuales permiten resolver (2.6). Antes de presentar tal resultado, es conveniente definir un elemento básico que aparece en la teoría de difusión.

**Definición 2.5** (Operador Característico). Sea  $X_t$  un proceso de difusión de Itô. Se define el operador característico  $L = L_X$  de  $X_t$  por

$$L\phi \triangleq \sum_i b_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j},$$

para  $\phi \in C^2$ .

---

<sup>4</sup>Para una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cualquiera, se define su parte negativa  $f^-$  como  $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ .

Para este trabajo basta con tener presente la definición de este operador; sin embargo, sus aplicaciones se extienden más allá del alcance de esta memoria. Más información sobre este operador y sus aplicaciones puede ser encontrada en [12, 16].

El caso en que  $X_t$  es un movimiento Browniano Geométrico resultará de especial interés, por lo que a continuación, se presenta un ejemplo en el que se calcula su operador característico y se resuelve una ecuación diferencial relacionada.

**Ejemplo 2.6 (Movimiento Browniano Geométrico).** Considere el caso en que el proceso  $X_t$  es un movimiento Browniano Geométrico de la forma

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes positivas, y  $B_t$  es un movimiento Browniano standard. Se tiene que

$$L\phi = \mu x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

Es muy común que en la práctica se considere el proceso  $Y_t^{(t_0, x)} = (t_0 + t, X_t^x)$ , el cual puede ser representado de la siguiente manera

$$dY_t = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix} dB_t,$$

de esta forma  $Y_t$  es difusión de Itô comenzando en  $y = (t_0, x)$ , y su operador característico esta dado por

$$L_Y \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t_0} + L_X \phi.$$

Como última observación, más adelante en este trabajo será necesario resolver la ecuación diferencial  $L_Y \phi = e^{-rt_0} M$ , es decir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_0} + \mu x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^{-rt_0} M, \quad \phi(t_0, \bar{x}) = e^{-rt_0} g(\bar{x}),$$

con  $M \geq 0$  constante y  $\bar{x}$  es una condición de borde. La solución de esta ecuación es fácil de calcular y está dada por  $\phi(t_0, x) = e^{-rt_0} (C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} - M/r)$ , donde  $C_1, C_2$  son constante arbitrarias que se deben determinar utilizando condiciones de borde y

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 - \mu \pm \sqrt{\left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + 2r\sigma^2} \right], \quad i = 1, 2, \quad \lambda_2 < 0 < 1 < \lambda_1.$$

Continuando con el estudio del problema (2.6), el siguiente resultado, extraído de [16, Teorema 10.4.1], es de gran utilidad para verificar si un candidato a solución efectivamente resuelve este problema.

**Teorema 2.7 (Desigualdades variacionales para parada óptima).** .

a) Suponga que existe una función  $\phi : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$i) \phi \in C^1(V) \cap C(\bar{V})$$

ii)  $\phi \geq g$  en  $V$  y  $\lim_{t \rightarrow \tau_V^-} \phi(Y_t) = g(Y_{\tau_V}) \mathbf{1}_{\{\tau_V < \infty\}}$  a.s.

Defina

$$D \triangleq \{x \in V : \phi(x) > g(x)\}$$

iii) Suponga que  $Y_t$  no pasa tiempo en  $\partial D$  a.s, i.e

$$\mathbb{E}^y \left[ \int_0^{\tau_V} \mathbf{1}_{\partial D}(Y_t) dt \right] = 0 \quad \forall y$$

iv) Suponga que  $\partial D$  es una superficie Lipschitz, i.e.  $\partial D$  es localmente el grafo de una función  $h : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existe  $K < \infty$  con

$$|h(x) - h(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y$$

v) Suponga que  $\phi \in C^2(V \setminus \partial D)$  y sus derivadas de segundo orden son localmente acotadas cerca de  $\partial D$ .

vi) Además asuma que  $L\phi + f \leq 0$  en  $V \setminus D$ .

Entonces

$$\phi(y) \geq \Phi(y)^5 \quad \forall y \in V$$

b) Suponga, además de los puntos anteriores, que

vii)  $L\phi + f = 0$  en  $D$ .

viii)  $\tau_D := \inf\{t > 0 : Y_t \notin D\} < \infty$  a.s  $\mathbb{P}_{Y_t^y}, \forall y \in D$

ix) La familia  $\{\phi(Y_\tau) : \tau \leq \tau_D, \tau \in \mathcal{T}\}$  es uniformemente integrable con respecto a  $\mathbb{P}_{Y_t^y}, \forall y \in V$ .

Entonces

$$\phi(y) = \Phi(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^y \left[ g(Y_\tau) + \int_0^\tau f(Y_t) dt \right], \quad y \in V,$$

y

$$\tau^* = \tau_D,$$

es un tiempo de parada óptimo para este problema.

En la literatura, en un contexto general de control óptimo estocástico, resultados similares al recién presentado pueden ser encontrados como Principio de Verificación, ver por ejemplo [19]. Este nombre viene del hecho de que el Teorema 2.7 provee una lista de condiciones suficientes a verificar para resolver (2.6). En general, el candidato a solución es desconocido, pero la condición *vii)* permite proponer uno. Sin embargo, lo que realmente es esencial es determinar el conjunto  $D$ . Este conjunto es conocido como región de continuación, debido a que si el proceso está dentro de esta región entonces aún no es conveniente detenerse. En la práctica, son la experiencia y las características de cada problema las que permiten determinar la forma de la región de continuación. Por otro lado, la condición *i)* requiere que la solución sea una función continua y diferenciable, esto es comúnmente conocido como las condiciones de *Value Matching* y *Smooth Pasting*. Una

<sup>5</sup>  $\Phi(y)$  se define como en (2.6).

vez que se han propuesto tanto una función  $\phi$  como una región de continuación, se procede a verificar cada una de las hipótesis restantes del teorema. Hecho esto, es posible concluir que el problema en estudio tiene solución, la cual está dada por la función propuesta, y el tiempo de parada óptimo es la primera vez que el proceso deja la región de continuación. Para ganar intuición sobre este resultado, a continuación se presenta un problema de Parada Óptima clásico el cual es posible resolver mediante el Teorema 2.7 .

**Ejemplo 2.8.** Se considera el proceso  $X_t$  como en el Ejemplo 2.6. Este proceso representa el precio de un determinado activo en el instante  $t$ . Interesa saber “¿cuándo es el momento adecuado para vender este activo?”. Se asume que una vez que se decide vender el activo se debe incurrir en un costo de transacción fijo y conocido  $c > 0$ . De esta forma, el problema que interesa resolver es

$$\Phi(t_0, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^{(t_0, x)} \left[ e^{-r\tau} (X_\tau - c) \right],$$

donde  $r > 0$  es un factor de descuento dado. Para este problema, se puede identificar  $g(t, z) = e^{-rt}(z - c)$ , además es conveniente considerar el proceso  $Y_t^{(t_0, x)} = (t_0 + t, X_t^x)$ . De modo que el problema toma la siguiente forma

$$\Phi(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^y \left[ g(Y_\tau) \right],$$

con  $y = (t_0, x)$ . Como ha sido comentado es posible utilizar *vii)* del Teorema 2.7 para encontrar un candidato  $\phi$  a solución. Luego, del Ejemplo 2.6 se concluye que este candidato es de la forma

$$\phi(t_0, x) = e^{-t_0 s} (C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}),$$

para  $(t_0, x) \in D$  y  $V = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ . En la práctica, para problemas de este tipo es muy común considerar regiones de continuación de la siguiente forma

$$D = \{(t_0, x) : 0 < x < \bar{x}\}.$$

Con esto, es necesario comenzar a verificar las condiciones del Teorema 2.7. Gracias a la condición *i)* de este Teorema es posible concluir que  $C_2 = 0$ , pues  $\lambda_2 < 0$ . Por otro lado, a partir de *ii)* conviene definir  $\phi(t_0, x) = g(t_0, x), \forall (t_0, x) \in V \setminus D$ . También, *i)* impone que  $\phi(t_0, \bar{x}) = g(t_0, \bar{x})$  y  $\frac{d}{dx} \phi(t_0, \bar{x}) = \frac{d}{dx} g(t_0, \bar{x})$ . De esta última condición, es posible despejar los valores de  $\bar{x}$  y  $C_1$ , obteniéndose

$$\bar{x} = \frac{c\lambda_1}{\lambda_1 - 1}, \quad C_1 = \frac{\bar{x}^{1-\lambda_1}}{\lambda_1}.$$

De esta forma, el candidato final a solución es

$$\phi(t_0, x) = \begin{cases} e^{-rt_0} (\bar{x} - c) \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^{\lambda_1} & \text{si } x < \bar{x} \\ e^{-rt_0} (x - c) & \text{si } \bar{x} \leq x. \end{cases} \quad (2.7)$$

Resta terminar de verificar las condiciones *ii)*, *iii)*, *iv)*, *v)*, *vi)*, *xiii)* y *ix)*, el resto fue utilizado en la construcción de  $\phi$ . De manera directa se pueden las condiciones *iii)*, *iv)*, *v)*, *xiii)* y *ix)* son satisfechas. De modo que se debe comprobar *ii)*,  $\phi \geq g$  en  $V$ , y *vi)*,

$L\phi \leq 0$  en  $V \setminus D$ . Para lo primero, basta verificar la desigualdad para  $x < \bar{x}$ , es decir, hay que probar que

$$\frac{(x - c)}{x^{\lambda_1}} \leq \frac{\bar{x} - c}{(\bar{x}^{\lambda_1})}, \quad x < \bar{x},$$

notando que  $\frac{(x-c)}{x^{\lambda_1}}$  es creciente en este intervalo, se concluye. Para lo segundo, a partir de el Ejemplo 2.6 se puede deducir que la condición es equivalente a

$$C_1 x^{\lambda_1} (-r + \mu \lambda_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1)) \leq 0,$$

como  $\lambda_1$  es solución de la misma ecuación cuadrática que aparece en el segundo paréntesis de la expresión anterior, se tiene el resultado. En resumen, gracias al Teorema 2.7 se ha comprobado que la solución al problema de “¿cuándo es el momento adecuado para vender un bien?” esta dada por  $\phi$ , definida por (2.7) y el tiempo de parada óptimo es  $\tau_D$ .

Este ejemplo posee elementos similares, pero simplificados a los que se utilizarán en el desarrollo de este trabajo. Es por esto que ha sido abordado en detalle.

En los capítulos siguientes se pretende dar contexto al problema a tratar, entregando antecedentes mineros. Además, se planteará un modelo matemático el cual será abordado desde un punto de vista de programación dinámica.

# Capítulo 3

## Antecedentes Mineros y Precio del Cobre

En el presente capítulo se pretende explicar los antecedentes de carácter minero que motivan la investigación realizada en este trabajo. En la primera sección, se considera una mina de cobre, la cual puede ser de rajo abierto o bien subterránea, y luego se describen los procesos relevantes relacionados con la extracción del mineral. En la segunda sección, se explican antecedentes relacionados con el precio del cobre y se dan argumentos que soportan la modelación del precio del cobre como un proceso estocástico con reversión a la media.

### 3.1. Antecedentes Mineros

La operación minera esta conformada por una serie de procesos que van desde la extracción del mineral en los yacimientos hasta que se obtiene un producto final refinado. Tales procesos pueden ser divididos en dos grandes áreas: Labores Mineras y Procesamiento.

Las condiciones geológicas como la geometría del cuerpo mineralizado, la calidad geomecánica de la roca mineralizada, la cantidad, leyes y distribución de los recursos geológicos, y la ubicación y el entorno de la mina determinan su diseño y por consiguiente determinan las labores mineras que son realizadas en ésta. Las labores mineras están relacionadas con la extracción del mineral. Para una mina a rajo abierto, el mineral es extraído utilizando explosiones controladas en la superficie del recurso. Una vez que ha ocurrido la detonación, el mineral es removido por camiones y llevado a puntos de procesamiento. En este tipo de minas, los bloques están ubicados uno sobre otro formando una especie de escalera, de modo que estos bloques deben ser extraídos en un secuencia determinada, desde la superficie hacia abajo.

El caso de las minas subterráneas es distinto. Para este tipo de minas, existen principalmente dos métodos de explotación: *Panel Caving* y *Block Caving*. En el primer método se quiebra una gran cantidad de área en cada operación, en el segundo se avanza en pequeños frentes de menor área que en el *Panel Caving*. En ambos métodos se induce el hundimiento del mineral por efecto gravitacional (ver Figura 3.1). La gran diferencia entre estos métodos es que al usar *Block Caving* se divide el yacimiento en sectores menores que pueden ser habilitados dando la posibilidad de cambiar el orden de extracción cuando

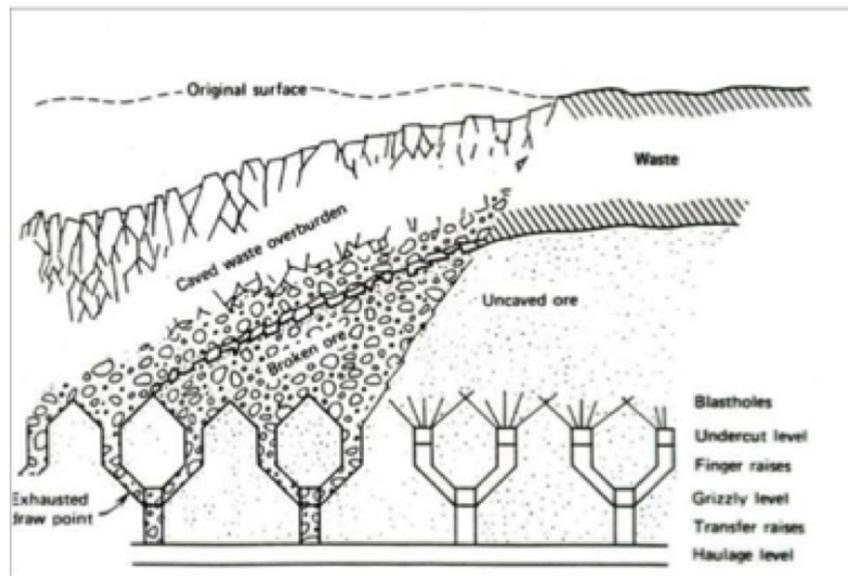


Figura 3.1: Método de explotación subterránea: *Block Caving*. [Fuente: Roberto Oyarzun, (Online) Métodos de explotación más comunes en minería subterránea] <sup>1</sup>

sea necesario, pero complejizando la operación. En cuanto al *Panel Caving* se quiebran grandes áreas del yacimiento, simplificando la extracción pero restando la posibilidad de modificarla. En ambos métodos, el mineral es fragmentado mediante explosiones en lo que se denomina nivel de hundimiento, luego, el mineral cae por gravedad hacia el nivel de producción. En este nivel el mineral es transportado por palas autocargables hasta un punto de vaciado, el cual se comunica con los niveles de reducción mediante un sistema de piques. Luego, en el nivel de reducción, se reduce el tamaño de la roca mediante parrillas y martillos.

A continuación, se procede a procesar el mineral. Dependiendo del tipo de mineral, óxido o sulfuros, el procesamiento puede variar. Sin embargo, a grandes rasgos el procesamiento contiene las tareas de chancado, molienda, flotación, fundición, electrorefinación y electroobtención. Una vez que esta serie de procesos ha ocurrido, se obtienen cátodos de cobre de alta pureza (99.99%). Finalmente, estos cátodos son transportados mediante trenes o camiones para hacerlos llegar a los distintos mercados.

Todos estos elementos están involucrados en las ganancias que una empresa minera, como CODELCO, puede tener. Dado el precio del cobre (ver sección 3.2), el objetivo de las empresas mineras es maximizar el valor presente neto descontado esperado. Para esto se consideran los costos asociados a los procesos recién descritos, como personal, maquinaria, etc. Además, las ganancias vienen dadas por las ventas al mercado de los cátodos de cobre. En cuanto a las variables de decisión, en términos generales, es posible cambiar la secuencia de extracción, aumentar la capacidad de producción y decidir cuándo es el momento adecuado para extraer un bloque. En la práctica, es posible considerar una mayor gama de variables de decisión como la cantidad de camiones a comprar, la cantidad de mineral enviado a los distintos procesos, leyes de corte, etc. Sin embargo, éstas escapan del alcance de esta memoria.

<sup>1</sup>Web: [http://www.ucm.es/info/crismine/Metodos\\_explotacion.htm](http://www.ucm.es/info/crismine/Metodos_explotacion.htm). Fecha de visita: 2012-12-08.

En el presente trabajo, se realizará una abstracción del proceso recién descrito. Dicha abstracción estará fuertemente ligada a los siguientes puntos relevantes, los cuales se infieren de la discusión anterior.

- La mina, ya sea rajo abierto o subterránea, puede ser dividida en bloques. La extracción de estos bloques se realiza en forma secuencial.
- Una vez que se ha extraído un bloque se debe decidir qué bloque se debe seguir extrayendo. Dependiendo del diseño de la mina puede ser que sólo haya un posible bloque para ser extraído.
- Tanto para realizar las labores mineras como para el procesamiento, se requiere de una gran inversión e infraestructura. De hecho, en minería subterránea para realizar la explotación del mineral una serie de piques y caminos subterráneos deben ser construidos.
- Dado lo anterior, si es que el funcionamiento de la mina es detenido por un tiempo se debe incurrir en un costo de mantención.
- En caso de que la mina cierre su operación, no se considera posible su reapertura. En la práctica, por lo menos en el corto y mediano plazo, esto efectivamente ocurre.

Los puntos anteriores, conforman elementos clave que permitirán en el Capítulo 4 formular un modelo matemático del problema descrito.

## 3.2. Precio del Cobre

Como ya ha sido mencionado, el precio del cobre juega un rol importante es la valoración de proyectos mineros. El precio del metal afecta directamente las decisiones de una mina, como secuencias de extracción, capacidad de producción, timing y leyes de corte, de modo que para cualquier metodología de valoración de un proyecto minero de cobre resulta fundamental comprender la naturaleza del comportamiento del precio de este mineral.

Varios artículos en la literatura han enfrentado problemas de opciones reales, algunos de ellos inspirados en recursos naturales (como petróleo, o bien del mismo cobre), modelando el precio spot de los stocks mediante procesos estocásticos continuos, como el movimiento Browniano Geométrico (MBG). Por ejemplo, en la literatura de opciones (*option pricing*), este tipo de proceso ha sido extensamente utilizado debido a su fácil manejo y cercanía a la realidad (ver [8, 14, 21]). Sin embargo, en relación a recursos naturales como petróleo y cobre, ha sido señalado que el modelo correcto a utilizar debería ser uno que considerara que el precio de los *commodities* presenta un comportamiento de reversión a la media. De hecho, en [26] se argumenta, en relación al precio del petróleo, que cuando el precio está por encima de un precio promedio de largo plazo (o precio de equilibrio), éste tiende a disminuir hacia el precio de equilibrio. Por otro lado, cuando el precio está por debajo del precio promedio de largo plazo, entonces tiende a aumentar. De modo que el precio de este *commodity* debe tener reversión a la media, pues el precio siempre tiende a un precio promedio de largo plazo.

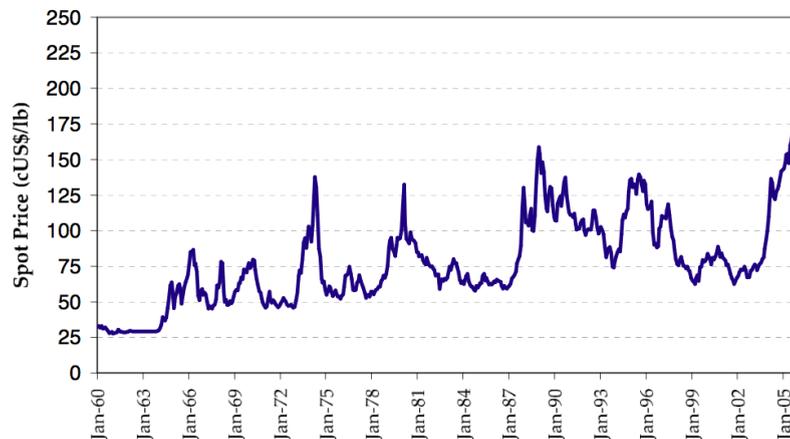


Figura 3.2: Evolución del precio spot del cobre desde enero de 1960. [Fuente: London Metal Exchange]

Otro ejemplo del uso de reversión a la media para modelar el precio de *commodities* puede ser visto en [24]. En [7, Capítulo 3] los autores examinan, utilizando datos desde 1870 a 1990, si es que el precio de *commodities* como el pretróleo y el cobre es mejor modelado utilizando un MBG o un proceso con reversión a la media. Utilizando un test de raíz unitaria, los autores confirman la reversión a la media. Sin embargo, ellos también destacan que utilizando una menor cantidad de datos, 30-40 años, no es posible rechazar la hipótesis de MBG.

En base a la evidencia que la literatura provee, en el presente trabajo se modelará el precio del cobre como un proceso estocástico con reversión a la media. En los artículos [9, 24, 23] Schwartz propone principalmente tres modelos con reversión a la media para el precio del cobre, petróleo y oro. Estos modelos son testeados y validados empíricamente. En particular, será utilizado el primer modelo presentado en [23]. De acuerdo a dicho modelo, el precio  $S_t$  del cobre sigue la siguiente ecuación estocástica

$$dS_t = \kappa(\mu - \ln(S_t))S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (3.1)$$

donde  $B_t$  es un movimiento Browniano standard, la velocidad de ajuste  $\kappa$  mide el grado de reversión a la media hacia el precio promedio de largo plazo  $\mu$ . Por otro lado,  $\sigma$  caracteriza la volatilidad del proceso. Utilizando datos desde 1988 a 1995, Schwartz utiliza la metodología de Filtro de Kalman para estimar los parámetros de (3.1). Mediante ésta, obtiene los siguientes valores para los parámetros:  $\kappa = 0.369$ ,  $\mu = 4.854$  y  $\sigma = 0.233$ .

Es importante notar, como fue discutido en la Sección 2.1, que la existencia de mercados futuros permite el uso de argumentos de replicación para la valoración de opciones. Esto, en consecuencia, hace posible la utilización de una media neutral al riesgo en un contexto de no-arbitraje. En el caso del cobre, los futuros y opciones son comercializados en el London Metal Exchange, por lo que para el cobre existe un mercado de futuros que permitirá utilizar argumentos de replicación para valorar el proyecto minero.

En [3] Brennan y Schwartz, para determinar una relación entre el precio spot y el precio de futuros asumen que el *convenience yield*<sup>2</sup> es proporcional al precio spot del cobre con

<sup>2</sup>El *convenience yield* se interpreta como el flujo por servicios que acumula el dueño de un *commodity* (físicamente), pero no el dueño de contratos futuros.

constante de proporcionalidad  $\rho$ . Además, se sabe que (ver por ejemplo [25, Capítulo 5]) el precio de compra en  $t$  de una unidad del *commodity* con tiempo de maduración  $\tau = T - t$  es igual al valor esperado del precio spot  $S_T$  bajo la medida neutral al riesgo. De esta forma, si  $F(S, \tau)$  representa el precio futuro cuando el precio actual es  $S_0 = S$  entonces

$$F(S, \tau) = Se^{(r-\rho)\tau}, \quad (3.2)$$

aquí  $r$  es la tasa de descuento libre de riesgo. Para efectos prácticos se asumirá que  $r = 0.12$  y  $\rho = 0.063$ , este último es el valor promedio de el *convenience yield*(instantáneo) presentado en [5, Tabla V].

# Capítulo 4

## Modelo Matemático

En el capítulo anterior se dieron a conocer los antecedentes de carácter minero, además se entregó una motivación desde el punto de vista práctico al problema que se desea analizar. El presente capítulo tiene por objetivo plantear un modelo matemático a tiempo continuo que describa el secuenciamiento de bloques. Para esto se utilizarán técnicas standard de programación dinámica.

En la primera sección de este capítulo, se identifican y parametrizan las componentes relevantes del proyecto minero. En la siguiente sección, se discute acerca de la medida de probabilidad que se debe utilizar para valorar el modelo. Luego, se plantea el modelo general que será analizado en los siguientes capítulos. Finalmente, se establecen notaciones que serán de utilidad en los desarrollos.

### 4.1. Parametrización del Proyecto Minero

En primer lugar se debe buscar una estructura adecuada que permita representar a la mina, la cual debe ser capaz de capturar su topografía. Para lograr lo anterior, se modela la mina como un grafo no dirigido  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  representa la colección de UBC o bloques, y  $\mathcal{A}$  representa las conexiones o arcos entre bloques. Se denominará  $\mathcal{N}_0$  al conjunto de bloques que pueden ser escogidos como bloques iniciales en una secuencia de extracción factible. Las siguientes definiciones permiten identificar las secuencias de extracción factibles.

**Definición 4.1.** Sea  $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$ , se define  $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{N}})$  como

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{N}}) \triangleq \{j \in \mathcal{N} \setminus \tilde{\mathcal{N}} \mid \exists i \in \tilde{\mathcal{N}} : (i, j) \in \mathcal{A}\}$$

**Definición 4.2.** Se define  $\Pi$  como

$$\Pi \triangleq \{\pi = (\pi_i)_{i=1}^N : \pi_1 \in \mathcal{N}_0, \pi_i \in \mathcal{A}(\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}), \forall i = 2, \dots, N\}$$

Luego,  $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{N}})$  con  $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N}$  representa el conjunto de bloques adyacentes a los elementos de  $\tilde{\mathcal{N}}$ . El conjunto  $\Pi$  contiene a todas las permutaciones de elementos de  $\mathcal{N}$  que producen una secuencia de extracción de bloques factible. Es decir, se debe entender que un elemento  $\pi \in \Pi$  establece que el primer bloque en ser extraído debe ser  $\pi_1$ , el segundo  $\pi_2$  y así sucesivamente.

Con esto ya se tiene caracterizada la topografía de la mina, pues se han establecido las unidades básicas de cubicación y las posibles secuencias de extracción. El siguiente paso es identificar y definir elementos de una estrategia de producción. Una estrategia de producción esta conformada por una determinada secuencia de extracción, un tiempo de extracción de cada bloque en dicha secuencia y la capacidad a la que el equipo minero extraerá el mineral.

**Definición 4.3** (Estrategia de producción). Se define una estrategia de producción  $\theta$  mediante los siguientes elementos

- La secuencia de extracción,

$$\pi^\theta \triangleq (\pi_1^\theta, \dots, \pi_N^\theta)$$

- El tiempo en el cual cada bloque en la secuencia comienza a ser procesado o bien cuando el tomador de decisiones decide detener el proyecto,

$$\tau^\theta \triangleq (\tau_1^\theta, \dots, \tau_N^\theta)$$

- La capacidad de producción disponible en estos tiempos,

$$K^\theta \triangleq (K_1^\theta, \dots, K_N^\theta)$$

Se asume que no es posible aumentar la capacidad durante la extracción y que es utilizada en su totalidad.

Luego, una estrategia de producción esta dada por  $\theta = (\pi^\theta, \tau^\theta, K^\theta)$ .

Básicamente, un elemento  $\theta$  representa las variables de decisión del problema. Nótese que la definición anterior es general y no especifica cuáles son las estrategias de producción factibles. Más adelante en este trabajo se mostrará cómo afectan estas variables en la formulación del problema. Por otro lado, es necesario definir las características geológicas, operacionales y económicas de cada bloque.

**Definición 4.4** (Características del bloque). Dado  $\theta \in \Theta$  se define,

- 

$$Q^\theta \triangleq (Q_1^\theta, \dots, Q_N^\theta)$$

donde  $Q_i^\theta$  es la cantidad de mineral en el bloque  $\pi_i^\theta \in \mathcal{N}$ .

- 

$$L^\theta \triangleq (L_1^\theta, \dots, L_N^\theta)$$

donde  $L_i^\theta$  es la ley promedio (% de cobre) en el bloque  $\pi_i^\theta \in \mathcal{N}$ . Como observación se debe notar que

$$L_i^\theta K_i^\theta$$

es la tasa a la cual es producido el mineral en el bloque  $\pi_i^\theta$ .

- 

$$T^\theta \triangleq (T_1^\theta, \dots, T_N^\theta)$$

donde  $T_i^\theta = \frac{Q_i^\theta}{K_i^\theta}$  es el tiempo que toma procesar el bloque  $\pi_i^\theta$ .

■

$$A^\theta \triangleq (A_1^\theta, \dots, A_N^\theta)$$

donde  $A_i^\theta$  es el costo marginal de producción del bloque  $\pi_i^\theta$ . En general, este costo debería depender de cuánto ya se haya extraído en una determinada secuencia  $\pi^\theta$ . Por lo tanto, se considera que  $A_i^\theta$  es una función de  $\eta_{i-1}^\theta = \{\pi_1^\theta, \dots, \pi_{i-1}^\theta\}$ , es decir,

$$A_i^\theta = A_i(\eta_{i-1}^\theta)$$

Finalmente, esta última definición permite establecer cuales serán las estrategias de producción factibles.

**Definición 4.5.** (Estrategia de producción factible) Una estrategia de producción  $\theta$  se dirá factible si pertenece al conjunto  $\Theta$ . Donde  $\theta = (\pi^\theta, \tau^\theta, K^\theta) \in \Theta$  si y sólo si

- a)  $\pi^\theta \in \Pi$ .
- b)  $\tau_i^\theta \geq \tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta, \tau_0^\theta = T_0^\theta = 0$ .
- c)  $K_i^\theta \geq K_{i-1}^\theta, K_0^\theta = K_0, K_N^\theta \leq \bar{K}$ .
- d)  $\tau_N^\theta + T_N^\theta \leq \bar{T}$  (Se considerará  $\bar{T} = +\infty$ ).

Algunos comentarios acerca de la Definición 4.5. La primera condición exige que  $\pi^\theta$  sea una secuencia de extracción factible. La segunda, establece que la extracción del  $i$ -ésimo bloque en la secuencia debe ocurrir una vez que se haya terminado de procesar el bloque  $i - 1$ . Además, la tercera condición dice que las capacidades de producción deben ser crecientes; esto tiene que ver con el hecho de que una vez que se ha comprado equipo minero o se ha ampliado la planta de producción, entonces ya no es posible volver a un proyecto con menor capacidad de procesamiento. Por último, para darle generalidad al modelo se da la opción de trabajar en un horizonte de tiempo finito y con expansiones de capacidad de producción acotadas. Sin embargo, para el presente trabajo se considerará un horizonte infinito. Esto pues, en general, los proyectos mineros consideran largos horizontes de planificación (por ejemplo, superiores a 30 años).

## 4.2. Valoración del Proyecto Minero

El objetivo de esta sección es definir la medida de probabilidad que será utilizada para valorar. Para tales efectos se considerarán las discusiones hechas en las Secciones 2.1, 3.2, y el proceso de cobre  $S_t$  como en (3.1).

Luego, considerando la notación de la Sección 2.1 y lo enunciado en la Sección 3.2 es posible considerar  $D_t = e^{-(r-\rho)t}$ . Así, siguiendo el desarrollo hecho en el Ejemplo 2.3 se tiene que

$$\zeta_t = \frac{\kappa(\mu - \ln(S_t)) - (r - \rho)}{\sigma},$$

es el precio de mercado del riesgo. Y además

$$dS_t = (r - \rho)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t, S_0 = S, \quad (4.1)$$

es el precio del cobre, donde  $\tilde{B}_t$  es un movimiento Browniano standar 1-dimensional bajo la medida neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$ , notar que bajo esta medida  $\mathbb{Q}$  es un movimiento Browniano Geométrico. A partir del Ejemplo 2.3, también es posible concluir que

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( (r - \rho) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \tilde{B}_t \right\}. \quad (4.2)$$

Finalmente, es importante notar que bajo  $\mathbb{Q}$  el proceso descontado  $D_t S_t = e^{-(r-\rho)t} S_t$  es una martingala, por lo tanto satisface que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-(r-\rho)t} S_t | \mathcal{F}_\tau] = e^{-(r-\rho)\tau} S_\tau, \quad \forall \tau \leq t. \quad (4.3)$$

### 4.3. Modelo General

Esta sección tiene por objetivo definir con precisión el problema que se pretende abarcar. Para esto, se utilizarán las definiciones y resultados presentados en las Secciones 4.1 y 4.2.

En las condiciones generales de trabajo, se considera un proceso Browniano Geométrico (bajo la medida neutral al riesgo)  $S_t$ , que representa el precio del cobre, definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$ , donde  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es la filtración natural asociada a  $S_t$ . Dado  $S_t$ , el tomador de decisiones tendrá por objetivo maximizar el valor presente neto (VPN) asociado al proyecto. Para esto, dado  $\theta \in \Theta$ , se deben considerar los siguientes aspectos:

1. En relación a la extracción del bloque  $i \in \mathcal{N}$ . En el intervalo de tiempo  $[\tau_i^\theta, \tau_i^\theta + T_i^\theta]$ , a medida que se extrae el bloque se obtiene un ingreso instantáneo y se incurre en un costo marginal de producción. Se asume que una vez que se procesa mineral este es vendido de forma instantánea y no se almacena.
2. Con respecto a las posibles expansiones de la planta o aumento de la capacidad de producción, en el caso de que el tomador de decisiones decida aumentar esta capacidad, entonces se incurre en un costo marginal de expansión, el cual es denotado por  $\gamma$ . Se asume que las expansiones de capacidad son instantáneas y que éstas ocurren sólo al inicio de la extracción de cada bloque. Si bien se podría pensar que las expansiones podrían ocurrir en cualquier momento del intervalo  $[\tau_i^\theta + T_i^\theta, \tau_{i+1}^\theta]$ , se asume que este no es el caso, pues el tomador de decisiones siempre va a preferir posponer esta decisión el mayor tiempo posible.
3. Se debe considerar, además, que una vez que se ha terminado de procesar un determinado bloque, el tomador de decisiones tiene la opción de cerrar el proyecto para siempre. Si es que este fuese el caso, se debe incurrir en un costo de cierre denotado  $C_C > 0$ . En caso de que el último bloque sea extraído, también se debe incurrir en el costo de cierre.
4. En el presente modelo se considera un costo fijo  $M$  de mantención por unidad de tiempo. Se incurre en este costo en todos los intervalos de tiempo de la forma  $[\tau_i^\theta + T_i^\theta, \tau_{i+1}^\theta]$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ . Es decir, entre el fin de la extracción de un bloque y el inicio del procesamiento del siguiente se incurre en un costo. Este costo se explica

debido a que durante estos intervalos de tiempo la mina sigue abierta, por lo que se debe pagar, por ejemplo, la mantención del equipo y la mano de obra, entre otros. Nótese que se incurre en este costo hasta que comienza la extracción del siguiente bloque, o bien hasta que el tomador de decisiones decida cerrar el proyecto.

Utilizando los cuatro puntos anteriores es posible determinar una expresión para el valor descontado del proyecto, pero antes es conveniente hacer la siguiente definición.

**Definición 4.6** (Flujos descontados). Para  $\theta \in \Theta$  se definen los flujos descontados  $W_i^\theta$  al extraer el bloque  $\pi_i$  como

$$W_i^\theta \triangleq \int_0^{T_i^\theta} e^{-rt} (L_i^\theta K_i^\theta S_{\tau_i^\theta+t} - A_i^\theta K_i^\theta) dt, \quad (4.4)$$

que es el flujo descontado al tiempo  $\tau_i^\theta$ .

En la Definición 4.6 el término  $L_i^\theta K_i^\theta S_{\tau_i^\theta+t}$  es la ganancia por unidad de tiempo que se obtiene al procesar el bloque  $i$ . Por otro lado, el término  $A_i^\theta K_i^\theta$  es el costo por unidad de tiempo asociado a la extracción del bloque  $i$ . Además, se debe notar que en (4.4) se considera como precio inicial del cobre, el valor del proceso  $S_t$  justo en el instante en que inicia la extracción del  $i$ -ésimo bloque. La siguiente proposición permitirá simplificar (4.4).

**Proposición 4.7.** Sea  $\theta = (\pi^\theta, \tau^\theta, K^\theta) \in \Theta$ , para el  $i$ -ésimo bloque se cumple que

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q}[W_i^\theta | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] = R_i^\theta S_{\tau_i^\theta} - C_i^\theta. \quad (4.5)$$

Donde

$$R_i^\theta = L_i^\theta K_i^\theta \left\{ \frac{1 - e^{-\rho T_i^\theta}}{\rho} \right\} \quad y \quad C_i^\theta = A_i^\theta K_i^\theta \left\{ \frac{1 - e^{-r T_i^\theta}}{r} \right\}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[W_i^\theta | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}\left[\int_0^{T_i^\theta} e^{-rt} (L_i^\theta K_i^\theta S_{\tau_i^\theta+t} - A_i^\theta K_i^\theta) dt | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}\right] \\ &= \int_0^{T_i^\theta} e^{-rt} (L_i^\theta K_i^\theta \mathbb{E}^\mathbb{Q}[S_{\tau_i^\theta+t} | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] - A_i^\theta K_i^\theta) dt \\ &= \int_0^{T_i^\theta} e^{-rt} (L_i^\theta K_i^\theta e^{(r-\rho)(\tau_i^\theta+t)} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-(r-\rho)(\tau_i^\theta+t)} S_{\tau_i^\theta+t} | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] - A_i^\theta K_i^\theta) dt \\ &= \int_0^{T_i^\theta} e^{-rt} (L_i^\theta K_i^\theta e^{(r-\rho)(\tau_i^\theta+t)} e^{-(r-\rho)\tau_i^\theta} S_{\tau_i^\theta} - A_i^\theta K_i^\theta) dt \\ &= R_i^\theta S_{\tau_i^\theta} - C_i^\theta. \end{aligned}$$

□

Luego, para todo  $\theta \in \Theta$  la ganancia acumulada descontada una vez que se ha terminado el procesamiento del bloque  $i - 1$  y se desea tomar una decisión con respecto al bloque  $i$ ,

está dada por

$$U_i^\theta = e^{-r(\tau_i^\theta - (\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta))} \max \left\{ \mathbb{E}^\mathbb{Q}[W_i^\theta + e^{-rT_i^\theta} U_{i+1}^\theta | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] - \gamma(K_i^\theta - K_{i-1}^\theta), -C_C \right\} - \int_{\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta}^{\tau_i^\theta} e^{-r(t - (\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta))} M dt. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) considera todos los aspectos mencionados al inicio de esta sección. Es decir, los ingresos, costo por expansión de capacidad de producción, un posible costo de cierre y un costo de mantención.

Con esto, el problema de optimización que se desea resolver esta dado por

$$(\mathcal{P}) \quad U^* = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[U_1^\theta].$$

A partir de la Proposición 4.7 es posible reescribir (4.6) de la siguiente forma

$$U_i^\theta = e^{-r(\tau_i^\theta - (\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta))} \max \left\{ (R_i^\theta S_{\tau_i^\theta} - C_i^\theta) + e^{-rT_i^\theta} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[U_{i+1}^\theta | \mathcal{F}_{\tau_i^\theta}] - \gamma(K_i^\theta - K_{i-1}^\theta), -C_C \right\} - \int_{\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta}^{\tau_i^\theta} e^{-r(t - (\tau_{i-1}^\theta + T_{i-1}^\theta))} M dt.$$

Con lo que finalmente se obtiene que  $(\mathcal{P})$  es

$$U^* = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-r\tau_1^\theta} \max \left\{ (R_1^\theta S_{\tau_1^\theta} - C_1^\theta) + e^{-rT_1^\theta} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[U_2^\theta | \mathcal{F}_{\tau_1^\theta}] - \gamma(K_1^\theta - K_0^\theta), -C_C \right\} - \int_0^{\tau_1^\theta} e^{-rt} M dt].$$

A modo de observación se debe notar que, según lo ya establecido,  $C_N^\theta$  está compuesto por un costo de extracción  $\tilde{C}_N^\theta$  y el costo de cierre  $C_C$ , por lo tanto,  $C_N^\theta = \tilde{C}_N^\theta + C_C$ . En lo que sigue, y para todo este trabajo, se utilizará un costo de extracción genérico para el último bloque, y cuando sea necesario se recordará su composición. Ahora bien, dada la forma del problema  $(\mathcal{P})$ , es natural buscar una solución utilizando programación dinámica. Se considera como espacio de estados  $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{P}(\mathcal{N})$ , donde  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  corresponde al conjunto de las partes de  $\mathcal{N}$ . Los elementos de este espacio son las tripletas  $(S, K, \mathfrak{N})$ , donde  $S$  es el precio de cobre,  $K$  la capacidad de producción y  $\mathfrak{N}$  conjunto de bloques que han sido extraídos. Además, se denota  $V(S, K, \mathfrak{N})$  a la ganancia óptima esperada descontada cuando se está en el estado  $(S, K, \mathfrak{N})$ .

Se debe notar que es suficiente evaluar  $V$  en aquellos estados en que se ha finalizado la extracción de un bloque. Esto se tiene gracias a la naturaleza Markoviana del proceso  $S_t$  y a que no es posible hacer expansiones de capacidad mientras se esta procesando un bloque. En efecto, una vez que se ha finalizado la extracción del  $i$ -ésimo bloque y el sistema se encuentra en el estado  $(S, K, \mathfrak{N})$ , el tomador de decisiones tiene las siguientes opciones:

- Decidir el instante  $\tau$  en el cual comienza la extracción del siguiente bloque, o bien cierra el proyecto incurriendo en un costo  $C_C$ . Aquí  $\tau$  es un  $\mathcal{F}_t$ -tiempo de parada.
- En caso de que no se decida cerrar la mina, se debe decidir el siguiente bloque a procesar. Para esto se debe considerar los elementos del conjunto  $\mathcal{A}(\mathfrak{N})$ .

- Decidir si se expande la capacidad de producción o no. Es decir, seleccionar un  $\hat{K}$  tal que  $K < \hat{K} < \bar{K}$ .

Uniendo todo lo anterior se obtiene la siguiente expresión para  $V(S, K, \mathfrak{N})$ :

$$V(S, K, \mathfrak{N}) = \sup_{\tau, \hat{K}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \left\{ (R_i(\hat{K})S_\tau - C_i(\hat{K}, \mathfrak{N})) + e^{-rT_i} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V(S_{\tau+T_i}, \hat{K}, \mathfrak{N} \cup \{i\}) | \mathcal{F}_\tau] \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma(\hat{K} - K), -C_C \right\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right] \quad (4.7)$$

$$\text{sujeto a } dS_t = (r - \rho)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t \quad (4.8)$$

$$\tau \text{ es un } \mathcal{F}_t \text{ - tiempo de parada} \quad (4.9)$$

$$i \in \mathcal{A}(\mathfrak{N}), T_i = \frac{Q_i}{\hat{K}} \text{ y } K < \hat{K} < \bar{K} \quad (4.10)$$

$$\text{La condición de borde } V(S, K, \mathcal{N}) = 0, \forall S, K. \quad (4.11)$$

## 4.4. Notación

En los desarrollos siguientes será conveniente hacer las siguientes definiciones, las cuales permitirán una presentación más cómoda y compacta.

Sean  $X = (X_j)$  y  $\alpha = (\alpha_j)$  dos vectores arbitrarios, se define

$$X_{k,j}^+ \triangleq \sum_{h=k+1}^j X_h, \quad \alpha_{k,j}^\times \triangleq \prod_{h=k+1}^j \alpha_h \quad \text{y} \quad (\alpha^\times X)_{k,j}^+ \triangleq \sum_{h=k+1}^j \alpha_{h,j}^\times X_h, \quad (4.12)$$

considerando que  $\sum_{h=k}^j X_h = 0$  y  $\prod_{h=k}^j \alpha_h = 1$  para  $j < k$ . Además, sea  $j$  un bloque arbitrario con contenido de mineral  $Q_j$ , ley promedio  $L_j$  y costo marginal de producción  $A_j$ . Considérese que la capacidad de producción es  $K$  y que el precio del mineral es  $S$ . Entonces, de la Definición 4.4 se sabe que el tiempo que demora el bloque  $j$  en ser procesado es  $T_j = Q_j/K$ , para hacer notar la dependencia de este tiempo en  $K$  se escribe  $T_j(K)$ . Por otro lado, a partir de la Proposición 4.7 es natural hacer la siguiente definición

$$W_j(S, K) \triangleq R_j(K)S - C_j(K), \quad (4.13)$$

donde

$$R_j(K) \triangleq L_j K \left\{ \frac{1 - e^{-\rho T_j(K)}}{\rho} \right\} \quad \text{y} \quad C_j(K) \triangleq A_j K \left\{ \frac{1 - e^{-r T_j(K)}}{r} \right\}. \quad (4.14)$$

Los valores  $R_j(K)$  y  $C_j(K)$  pueden ser interpretados como el stock de mineral en el bloque  $j$  y el costo descontado de extracción de éste respectivamente. Finalmente, se definen las siguientes cantidades

$$\mathcal{R}_{k,j}(K) \triangleq \sum_{h=k+1}^j e^{-\rho T_{h,j}^+(K)} R_h(K) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{k,j}(K) \triangleq \sum_{h=k+1}^j e^{-r T_{h,j}^+(K)} C_h(K), \quad (4.15)$$

con  $\mathcal{R}_j(K) \triangleq \mathcal{R}_{0,j}(K)$  y  $\mathcal{C}_j(K) \triangleq \mathcal{C}_{0,j}(K)$ . Estas cantidades pueden ser interpretadas como sigue. Si el tomador de decisiones decide extraer los bloques  $1, \dots, j$  sin parar (comenzando por el bloque  $j$  y terminando en el bloque 1) entonces la ganancia esperada descontada cuando el precio del cobre es  $S$  y la capacidad de producción es  $K$  esta dada por

$$\mathcal{W}_j(S, K) \triangleq \mathcal{R}_j(K)S - \mathcal{C}_j(K). \quad (4.16)$$

# Capítulo 5

## Solución del Modelo Matemático

En el Capítulo 4 se formuló detalladamente el problema que se desea abordar. Éste fue formulado como un problema de programación dinámica, en que las variables de decisión corresponden al siguiente bloque en la secuencia, el momento de extracción de este bloque y la capacidad de producción. En este capítulo, se considera un modelo simplificado. Se asume que la secuencia de extracción está dada y se fija la capacidad de producción. Como resultado se obtiene un problema de Parada Óptima, para el cual se desarrollan cotas que permiten aproximar su solución.

En la primera sección se formula el problema de Parada Óptima, luego se estudian algunas propiedades importantes de éste. A partir de éstas se desarrollan dos problemas que acotan inferior y superiormente al problema original, y son de utilidad para aproximar una solución. Luego, éstos son resueltos formalmente. En la última sección de este capítulo se generalizan estas cotas y se describe un algoritmo que permite, de manera eficiente, encontrar la solución a estos problemas.

### 5.1. Formulación del Problema de Parada Óptima

Una primera forma de abordar el problema descrito por (4.7)-(4.11) es considerar que la secuencia de extracción está fija, al igual que la capacidad de producción. De esta forma, para la presente sección y, más aún, para todo este capítulo se consideran estrategias de producción factible  $\theta = (\pi^\theta, \tau^\theta, K^\theta) \in \Theta$  tales que  $\pi^\theta = \pi$  y  $K^\theta = K$  están fijos.

En primer lugar, se debe notar que debido a que se está considerando  $K$  fijo, se tiene que en (4.7) el término  $\gamma(\hat{K} - K)$  se hace cero. Además, como la secuencia de extracción está previamente definida, entonces  $\mathfrak{N} \cup \{i\}$  simplemente representa el paso de extracción del bloque  $\pi_{i-1}$  al  $\pi_i$ . Para facilitar la presentación de los resultados, se invertirá la numeración de los bloques en la secuencia  $\pi$  de extracción. Esto es, el bloque  $\pi_1$  será ahora el  $N$ -ésimo bloque, el  $\pi_2$  será el  $(N - 1)$ -ésimo y así sucesivamente. Considerando esto, se toma una función  $H_j(S, K)$  definida como la máxima ganancia esperada descontada cuando el precio spot es  $S$  y la capacidad es  $K$ . Luego, la ecuación de Bellman que sigue  $H_j$  esta dada por

$$H_j(S, K) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \left\{ W_j(S_\tau, K) + e^{-rT_j(K)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j(K)}, K) | \mathcal{F}_\tau], -C_C \right\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right]. \quad (5.1)$$

Considerando la condición de borde  $H_0(S, K) = 0, \forall S, K$ . La ecuación (5.1) es básicamente un reformulación de (4.7)-(4.11) bajo los supuestos del presente capítulo. Ahora bien, en (5.1) el supremo es sobre todos los  $\tau$  que son tiempos de parada con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$ . Por otro lado, dado que se está considerando  $K$  fijo, es conveniente abandonar por el momento la dependencia sobre  $K$  de  $H_j(S, K)$ ,  $W_j(S, K)$ , y  $T_j(K)$ . De este modo, interesa encontrar una solución de la siguiente función de  $S$

$$H_j(S) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \left\{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j}) | \mathcal{F}_\tau], -C_C \right\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right]. \quad (5.2)$$

A partir de la teoría clásica de problemas de Parada Óptima (ver 2.2) se puede identificar el problema (5.2) como uno cuya solución  $\tau^*$  es del tipo threshold. Es decir,

$$\tau^* = \inf \{ t \geq 0 : S_t \notin (S_j^a, S_j^b) \}. \quad (5.3)$$

Esto se debe interpretar de la siguiente manera: tan pronto como el proceso  $S_t$  tome el valor  $S_j^b$  se debe comenzar la extracción del bloque  $j$ . Por otro lado, si el precio toma el valor  $S_j^a$  antes que  $S_j^b$  entonces se debe cerrar el proyecto. Además, siempre que  $S_t$  esté entre alguno de estos valores se debe incurrir en el costo de mantenimiento, sin tomar otra decisión. Ahora bien, de acuerdo al Teorema 2.7, para que (5.2) tenga solución una de las condiciones (suficientes) es que se  $H_j(S)$  satisfaga la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$-rH_j(S) + (r - \rho)S \frac{\partial}{\partial S} H_j(S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} H_j(S) = M, \quad S_j^a < S < S_j^b. \quad (5.4)$$

Con las siguientes condiciones de borde

$$H_j(S_j^a) = -C_C, \quad (5.5)$$

$$H_j(S_j^b) = W_j(S_j^b) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{T_j}) | S_0 = S_j^b], \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} H_j(S_j^a) = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} H_j(S_j^b) = R_j + e^{-rT_j} \frac{\partial}{\partial S} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{T_j}) | S_0 = S] \Big|_{S=S_j^b}. \quad (5.8)$$

Las condiciones (5.5)-(5.8) son las llamadas condiciones de *Value Matching* y *Smooth Pasting*, las que aseguran la suavidad y continuidad de  $H_j(S)$ . Es decir, estas condiciones

permiten cumplir la condición  $i)$  del Teorema 2.7. Sin embargo, los valores  $S_j^a, S_j^b$  son desconocidos. Para calcularlos, primero es necesario resolver (5.4). La solución de esta ecuación diferencial es conocida y fue vista en el Ejemplo 2.6. Aplicando lo desarrollado en dicho ejemplo pero con  $s = 0$  y  $\mu = (r - \rho)$ , se obtiene que

$$H_j(S) = B_j S^{\lambda_1} + D_j S^{\lambda_2} - M/r, \quad S_j^a < S < S_j^b, \quad (5.9)$$

donde

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 - (r - \rho) \pm \sqrt{\left( (r - \rho) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 + 2r\sigma^2} \right], \quad (i = 1, 2), \lambda_2 < 0 < 1 < \lambda_1, \quad (5.10)$$

y  $B_j, D_j$  son constantes que se deben determinar mediante (5.5)-(5.8). De esta forma se tendría que  $H_j(S)$  toma la siguiente forma

$$H_j(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq S_j^a \\ B_j S^{\lambda_1} + D_j S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } S_j^a < S < S_j^b \\ W_j(S) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{T_j}) | S_0 = S] & \text{si } S_j^b \leq S. \end{cases} \quad (5.11)$$

De (5.11) y las condiciones de *Value Matching and Smooth Pasting* es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones que permitiría encontrar los valores de  $S_j^a, S_j^b, B_j$  y  $D_j$

**Sistema 5.1.**

$$\begin{aligned} B_j S_j^{a\lambda_1} + D_j S_j^{a\lambda_2} - M/r &= -C_C, \\ B_j S_j^{b\lambda_1} + D_j S_j^{b\lambda_2} - M/r &= (R_j S_j^b - C_j) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{T_j}) | S_0 = S_j^b], \\ \lambda_1 B_j S_j^{a\lambda_1-1} + \lambda_2 D_j S_j^{a\lambda_2-1} &= 0, \\ \lambda_1 B_j S_j^{b\lambda_1-1} + \lambda_2 D_j S_j^{b\lambda_2-1} &= R_j + e^{-rT_j} \frac{\partial}{\partial S} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{T_j}) | S_0 = S] \Big|_{S=S_j^b}. \end{aligned}$$

El Sistema 5.1 es no lineal y para ningún valor de  $j$  permite una solución cerrada para las incógnitas  $S_j^a, S_j^b, B_j$  y  $D_j$ . Incluso, para el caso  $j = 1$ , en el que los términos relacionados con la esperanza condicional se hacen cero, no es posible determinar una expresión algebraica para las constantes y thresholds. De esta forma, para resolver el sistema se debe recurrir a métodos numéricos. Por otro lado, los términos relacionados con la esperanza también requieren ser tratados numéricamente. Dado lo anterior, se ha optado por estudiar de manera más profunda las propiedades de la función  $H_j(S)$ . Estas propiedades permiten derivar funciones que acotan superior e inferiormente a  $H_j(S)$ :  $H_j^U(S)$  y  $H_j^L(S)$ . Lo interesante es que estas nuevas funciones tienen asociado un sistema similar al 5.1 pero sin la esperanza condicional, de modo que permiten un manejo más simple. En la siguiente sección se presentan estas cotas y otras propiedades útiles de  $H_j(S)$ .

## 5.2. Propiedades de $H_j(S)$

En la presente sección se presentan propiedades de  $H_j(S)$ . Estas propiedades permiten desarrollar una mejor intuición sobre el problema. Además, entregan herramientas que serán de utilidad para aproximar una solución para  $H_j(S)$ . El primer resultado se relaciona con la convexidad y crecimiento de la función.

**Proposición 5.2.**  $\forall j \geq 1$  se cumple que  $H_j(S)$  es una función convexa y creciente.

*Demostración.* Primero conviene recordar que como el proceso  $S_t$  es un Browniano Geométrico, entonces  $S_t = S_0 \exp(((r - \rho) - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \tilde{B}_t)$ . Para simplificar se define  $X_t \triangleq \exp(((r - \rho) - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \tilde{B}_t)$ , de esta forma  $S_t = S_0 X_t$ . A continuación se procede a probar el resultado. Primero se demostrará la convexidad, por inducción sobre  $j$ . Sea  $\alpha \in [0, 1]$  y  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$ , luego

$$\begin{aligned}
H_1(\alpha S_1 + (1 - \alpha)S_2) &= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = \alpha S_1 + (1 - \alpha)S_2 \right] \\
&= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1([\alpha S_1 + (1 - \alpha)S_2]X_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \right] \\
&\leq \sup_{\tau \geq 0} \left\{ \alpha \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_1 X_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \right] \right. \\
&\quad \left. + (1 - \alpha) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_2 X_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \right] \right\} \\
&\leq \alpha \cdot \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_1 X_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \right] \\
&\quad + (1 - \alpha) \cdot \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_2 X_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \right] \\
&= \alpha H_1(S_1) + (1 - \alpha) H_1(S_2).
\end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad viene del hecho de que  $W_1(S)$  es un función convexa, y que el máximo de funciones convexas es una función convexa. Para el paso inductivo, se debe recordar que  $H_j(S)$  esta definida por

$$H_j(S) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j}) \mid \mathcal{F}_\tau], -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right].$$

Luego, como se está suponiendo que  $H_{j-1}(S)$  es convexa, entonces nuevamente el máximo dentro de la esperanza será una función convexa. Por lo tanto, se podrá repetir el procedimiento hecho para  $H_1(S)$ . De esta forma se concluye que  $H_j(S)$  es una función convexa.

Para ver que  $H_j(S)$  es creciente se procede por inducción. Para  $H_1(S)$  basta notar que  $W_1(S)$  es creciente, luego es posible notar que  $H_1(S)$  también lo es. Ahora, si se supone que  $H_{j-1}(S)$  es creciente entonces se tendrá que

$$\max\{W_j(S_0 X_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_0 X_{\tau+T_j}) \mid \mathcal{F}_\tau], -C_C\},$$

es creciente en  $S_0$  ( $X_t > 0$ ). Por lo tanto  $H_j(S)$  es creciente. Esto último concluye la demostración.  $\square$

El resultado anterior sigue la intuición, de que si se comienza con un mayor precio spot entonces se espera que el valor del proyecto sea mayor. Por otro lado, la convexidad permitirá desarrollar una cota inferior para  $H_j(S)$ . Antes de desarrollar las cotas, se presenta el siguiente resultado sobre el comportamiento asintótico de  $H_j(S)$

**Proposición 5.3.**  $\forall j \geq 1$ , sean  $\{(S_k^a, S_k^b)\}_{k=1}^j$ , como los descritos en (5.3) y sean  $S_j^m \triangleq \max_{1 \leq k \leq j} S_k^b$  y  $R_j^m \triangleq \max_{1 \leq k \leq j} R_k$ . Sea además

$$G_j(S) \triangleq \frac{j(j+1)}{2} \cdot S_j^m \cdot R_j^m \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \min_{1 \leq k \leq j} \frac{1}{T_{k,j}^+} \left[\ln\left(\frac{S}{S_j^m}\right) + \left\{r - \rho + \frac{\sigma^2}{2}\right\} T_{k,j}^+\right]^2\right).$$

Entonces, para  $S > S_j^m \cdot \exp(-\min_{1 \leq k \leq j} \{(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})T_{k,j}^+\})$  se tiene que

$$(\mathcal{R}_j S - \mathcal{C}_j) \leq H_j(S) \leq G_j(S) + (\mathcal{R}_j S - \mathcal{C}_j). \quad (5.12)$$

Además, como  $G_j(S) \rightarrow 0$  cuando  $S \rightarrow \infty$  se tiene que

$$H_j(S) \rightarrow \mathcal{W}_j(S) = \mathcal{R}_j S - \mathcal{C}_j, \quad (5.13)$$

cuando  $S \rightarrow \infty$ . Es decir,  $H_j(S)$  tiene un comportamiento asintótico lineal.

*Demostración.* Interesa demostrar (5.12). Para esto se divide la demostración en dos partes. Primero se demostrará la cota inferior y luego la cota superior. Se probará que

$$\sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[W_k(S_{T_{k,j}^+}) | S_0 = S] \leq H_j(S). \quad (5.14)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[W_k(S_{T_{k,j}^+}) | S_0 = S] &= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \left( R_k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{T_{k,j}^+} | S_0 = S] - C_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \left( R_k S e^{(r-\rho)T_{k,j}^+} - C_k \right) \\ &= \mathcal{R}_j S - \mathcal{C}_j, \end{aligned}$$

se tendrá la cota inferior. Se procede por inducción sobre  $j$ . Para  $j = 1$ , como  $H_0 \equiv 0$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} H_1(S) &= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} \max\{W_1(S_\tau), -C_C\}] - \int_0^\tau e^{-rt} M dt | S_0 = S] \\ &\geq \max\{W_1(S), -C_C\} \\ &= W_1(S), \end{aligned}$$

donde la desigualdad viene de considerar  $\tau = 0$ . Si (5.14) se cumple para  $j - 1$ , se procede a verificar si también se cumple para  $j$ , en efecto (dejando de lado la  $\mathbb{Q}$ -notación por un momento)

$$\begin{aligned}
H_j(S) &= \sup_{\tau > 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \max \{W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j}) | \mathcal{F}_\tau], -C_C\} \\
&\quad - \int_0^\tau e^{-rt} M dt | S_0 = S] \\
&= \sup_{\tau > 0} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \max \{W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{S_\tau}[H_{j-1}(S_{T_j})], -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt | S_0 = S] \\
&\geq \max \{W_j(S) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^S[H_{j-1}(S_{T_j})], -C_C\} \\
&\stackrel{\text{hip. Ind}}{\geq} \max \left\{ W_j(S) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^S \left[ \sum_{k=1}^{j-1} e^{-rT_{k,j-1}^+} \mathbb{E}[W_k(S_{T_{k,j-1}^+}) | S_0 = S_{T_j}] \right], -C_C \right\} \\
&= \max \left\{ \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \mathbb{E}^S[W_k(S_{T_{k,j}^+})], -C_C \right\} \\
&= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \mathbb{E}^S[W_k(S_{T_{k,j}^+})],
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado la propiedad de Markov Fuerte y en la primera desigualdad se ha considerado  $\tau = 0$ . Esto concluye la demostración para la cota inferior. Para la cota superior es necesario hacer más trabajo. Se considera un proceso  $\mathcal{Z}_t$  de precio modificado, definido de la siguiente forma

$$\mathcal{Z}_t \triangleq S_t + \sum_{k: T_{k,j}^+ \leq t} (S_k^b - \mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}^-)^+, \quad \mathcal{Z}_{0-} = S_0.$$

La idea de utilizar el proceso  $\mathcal{Z}_t$  es que cada vez que se ha finalizado la extracción de un bloque (el bloque  $j$ ), se mueva el precio del proceso original  $S_t$  al valor del precio del cobre que permite el inicio de la extracción del siguiente bloque,  $S_{j-1}^b$ . De esta forma, se extraerán de manera consecutiva y sin detención la totalidad de los bloques. Sea  $\mathcal{H}_j(S)$  el valor esperado de un proyecto con  $j$  bloques pero bajo el proceso  $\mathcal{Z}_t$ . Como  $S_t \leq \mathcal{Z}_t$  para toda realización de estos procesos, entonces es claro que  $H_j(S) \leq \mathcal{H}_j(S)$ . Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
H_j(S) \leq \mathcal{H}_j(S) &= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} \mathbb{E}[W_k(\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}^+) | S_0 = S] \\
&= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} (R_k \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}^+ | S_0 = S] - C_k) \\
&= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} R_k \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}^+ - S_{T_{k,j}^+}^+ | S_0 = S] + \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} (R_k \mathbb{E}[S_{T_{k,j}^+}^+ | S_0 = S] - C_k) \\
&= \sum_{k=1}^j e^{-rT_{k,j}^+} R_k \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}^+ - S_{T_{k,j}^+}^+ | S_0 = S] + (\mathcal{R}_j S - C_j).
\end{aligned}$$

Así, se tiene el término lineal que se necesita. A continuación, se procede a acotar el primer término del lado derecho del desarrollo recién hecho. Para esto, se acotará el

término  $\mathbb{E}[\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+} - S_{T_{k,j}^+} | S_0 = S]$  de manera apropiada. Primero, notando que como  $S_t = S_0 \exp(((r - \rho) - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \tilde{B}_t)$  se tiene que

$$\mathbb{Q}(\{S_k^b \geq S_{T_{k,j}^+}\} | S_0 = S) = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sigma} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_k^*} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right] \leq \tilde{B}_{T_{k,j}^+} \right), \quad (5.15)$$

A partir de [2, Teorema XIII-2.1] para  $S > S_j^m \cdot \exp(-\min_{1 \leq k \leq j} \{(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})T_{k,j}^+\})$  es posible acotar el lado derecho de (5.15) por un término exponencial de la siguiente forma

$$\mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sigma} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_k^*} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right] \leq \tilde{B}_{T_{k,j}^+} \right) \leq \exp \left( -\frac{1}{T_{k,j}^+ \sigma^2} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_k^*} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right]^2 \right).$$

Poniendo todo esto junto, es posible hacer el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{Z}_{T_{k,j}^+} - S_{T_{k,j}^+} | S_0 = S] &= \sum_{n=k}^j \mathbb{E}[(S_k^b - \mathcal{Z}_{T_{k,j}^+})^+ | S_0 = S] \\ &= \sum_{n=k}^j \mathbb{E}[(S_k^b - \mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}) \mathbb{1}_{\{S_k^b \geq \mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}\}} | S_0 = S] \\ &\leq \sum_{n=k}^j S_k^b \mathbb{Q}(\{S_k^b \geq \mathcal{Z}_{T_{k,j}^+}\} | S_0 = S) \\ &\leq \sum_{n=k}^j S_k^b \mathbb{Q}(\{S_k^b \geq S_{T_{k,j}^+}\} | S_0 = S) \\ &= \sum_{n=k}^j S_k^b \mathbb{Q}\left(\frac{1}{\sigma} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_k^b} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right] \leq \tilde{B}_{T_{k,j}^+} \right) \\ &\leq \sum_{n=k}^j S_k^b \exp \left( -\frac{1}{T_{k,j}^+ \sigma^2} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_k^b} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right]^2 \right) \\ &\leq (j+1-k) \cdot S_j^m \\ &\quad \cdot \exp \left( -\frac{1}{\sigma^2} \min_{1 \leq k \leq j} \frac{1}{T_{k,j}^+} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_j^m} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando esta última cota en la desigualdad obtenida para  $H_j(S)$  se deduce que

$$H_j(S) \leq \frac{j(j+1)}{2} \cdot S_j^m \cdot R_j^m \cdot \exp \left( -\frac{1}{\sigma^2} \min_{1 \leq k \leq j} \frac{1}{T_{k,j}^+} \left[ \ln \left( \frac{S}{S_j^m} \right) + \left\{ r - \rho + \frac{\sigma^2}{2} \right\} T_{k,j}^+ \right]^2 \right) + (\mathcal{R}_j S - \mathcal{C}_j).$$

Considerando la cota inferior, esta última cota y la definición de  $G_j(S)$  se obtiene (5.12). Además, tomando límite cuando  $S \rightarrow \infty$  se recupera (5.13). Esto concluye la demostración.  $\square$

A continuación se muestran una cota superior e inferior para  $H_j(S)$ . Para esto es necesario demostrar primero el siguiente lema.

**Lema 5.4.**  $\forall j \geq 1$  y  $\tau$  un  $\mathcal{F}_t$ - tiempo de parada, se tiene que  $H_j(S)$  satisface la siguiente desigualdad

$$H_j(S_{\tau(\omega)+T_{j+1}}) \leq e^{rT_{j+1}} H_j(S_{\tau(\omega)}) + e^{rT_{j+1}} \int_0^{T_{j+1}} e^{-rt} M dt. \quad (5.16)$$

*Demostración.* Sea  $\tau$  un  $\mathcal{F}_t$ - tiempo de parada, entonces

$$\begin{aligned} H_j(S_{\tau+T_{j+1}}) &= \sup_{\xi \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\xi} \max \{ W_j(S_\xi) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\xi+T_j}) | \mathcal{F}_\xi], -C_C \} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\xi e^{-rt} M dt | S_0 = S_{\tau+T_{j+1}} \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \sup_{\lambda \geq T_{j+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(\lambda-T_{j+1})} \max \{ W_j(S_\lambda) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\lambda+T_j}) | \mathcal{F}_\lambda], -C_C \} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\lambda-T_{j+1}} e^{-rt} M dt | S_0 = S_\tau \right] \\ &= \sup_{\lambda \geq T_{j+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(\lambda-T_{j+1})} \max \{ W_j(S_\lambda) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\lambda+T_j}) | \mathcal{F}_\lambda], -C_C \} \right. \\ &\quad \left. - \int_{T_{j+1}}^\lambda e^{-r(u-T_{j+1})} M du | S_0 = S_\tau \right] \\ &= \sup_{\lambda \geq T_{j+1}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(\lambda-T_{j+1})} \max \{ W_j(S_\lambda) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\lambda+T_j}) | \mathcal{F}_\lambda], -C_C \} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\lambda e^{-r(u-T_{j+1})} M du | S_0 = S_\tau \right] + \int_0^{T_{j+1}} e^{-r(u-T_{j+1})} M du \\ &\stackrel{(b)}{\leq} e^{rT_{j+1}} \sup_{\lambda > 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\lambda} \max \{ W_j(S_\lambda) + e^{-rT_j} H_{j-1}(S_{\lambda+T_j}), -C_C \} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\lambda e^{-ru} M du | S_0 = S_\tau \right] + e^{rT_{j+1}} \int_0^{T_{j+1}} e^{-ru} M du \\ &= e^{rT_{j+1}} H_j(S_\tau) + e^{rT_{j+1}} \int_0^{T_{j+1}} e^{-ru} M du. \end{aligned}$$

Los pasos más importantes del desarrollo recién presentado están indicados por (a) y (b). Primero, (a) se debe a que se ha realizado el cambio de variable  $\xi = \lambda - T_{j+1}$  y se ha utilizado la propiedad de incrementos estacionarios asociada al movimiento Browniano  $\tilde{B}_t$ . Recordar que  $S_t = S_0 \exp(((r - \rho) - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \tilde{B}_t)$ . Por otro lado, (b) viene simplemente del hecho de que ahora el supremo esta siendo tomando sobre un conjunto de tiempos de parada que contiene al conjunto anterior.  $\square$

Para comprender intuitivamente el Lema 5.4, nótese que reordenando los términos en (5.16) se puede escribir lo siguiente

$$e^{-rT_{j+1}} H_j(S_{\tau(\omega)+T_{j+1}}) - \int_0^{T_{j+1}} e^{-rt} M dt \leq H_j(S_{\tau(\omega)}),$$

esto es, el valor de un proyecto con  $j$  bloques es mayor si se tiene la posibilidad de iniciar la extracción del siguiente bloque a partir de  $\tau$ , que si se retrasa la extracción en  $T_{j+1}$  unidades de tiempo. Aquí la integral aparece debido a que si se retrasa la extracción se

debe incurrir en el costo de mantenimiento. Además, los valores están descontados para poder ser comparados con  $H_j(S_{\tau(\omega)})$ . Este resultado motiva a hacer la siguiente definición, para la cota superior de  $H_j(S)$ .

**Definición 5.5.** Para  $j \geq 0$ , se define

$$H_j^U(S) \triangleq \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_j(S_\tau) + H_{j-1}^U(S_\tau) + \int_0^{T_j} e^{-rt} M dt, -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right].$$

Con  $H_0^U(S) = 0$ .

A partir de el Lema 5.4 se deduce el siguiente resultado.

**Corolario 5.6.**  $\forall j \geq 1$ , se tiene que

$$H_j(S) \leq H_j^U(S). \quad (5.17)$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $j$ . Para  $j = 1$

$$\begin{aligned} H_1(S) &= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_\tau), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right] \\ &\leq \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_1(S_\tau) + \int_0^{T_1} e^{-rt} M dt, -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right] \\ &= H_1^U(S). \end{aligned}$$

Si (5.17) es cierto para  $j - 1$ , entonces

$$\begin{aligned} H_j(S) &= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j}) \mid \mathcal{F}_\tau], -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right] \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} (e^{rT_j} H_{j-1}(S_\tau) + e^{rT_j} \int_0^{T_j} e^{-rt} M dt), -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right] \\ &\stackrel{\text{hip. Ind}}{\leq} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{W_j(S_\tau) + H_{j-1}^U(S_\tau) + \int_0^{T_j} e^{-rt} M dt, -C_C\} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right] \\ &= H_j^U(S). \end{aligned}$$

Donde en (a) se a utilizado la desigualdad probada en el Lema 5.4.  $\square$

Básicamente, el Corolario 5.6 establece que si una vez que se ha finalizado la extracción de un determinado bloque se permite la inmediata extracción del siguiente bloque entonces el valor del proyecto será mayor o igual al valor del proyecto original.

Para acotar  $H_j(S)$  inferiormente, la idea es considerar como precio inicial con el que será extraído el siguiente bloque al precio esperado dada la información que se tiene actualmente. Esto es, una vez que se ha extraído el bloque  $j$  y el precio del mineral está dado por  $S_\tau$ , entonces se evaluará la extracción del siguiente bloque suponiendo que el precio del cobre  $T_j$  unidades de tiempo después es  $\mathbb{E}[S_{\tau+T_j}|\mathcal{F}_\tau]$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 5.7.** Para  $j \geq 0$ , se define

$$H_j^L(S) \triangleq \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} H_{j-1}^L(e^{(r-\rho)T_j} S_\tau), -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right].$$

Con  $H_0^L(S) = 0$ .

Dada esta definición se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 5.8.**  $\forall j \geq 1$ , se tiene que

$$H_j^L(S) \leq H_j(S). \quad (5.18)$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $j$ . Para  $j = 1$  la definición de  $H_j^L(S)$  y  $H_j(S)$  es la misma. Ahora, si (5.18) es cierto para  $j - 1$ , entonces

$$\begin{aligned} H_j^L(S) &= \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} H_{j-1}^L(e^{(r-\rho)T_j} S_\tau), -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right] \\ &\stackrel{\text{hip.Ind}}{\leq} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} H_{j-1}(e^{(r-\rho)T_j} S_\tau), -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} H_{j-1}(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{\tau+T_j}|\mathcal{F}_\tau]), -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right] \\ &\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_j(S_\tau) + e^{-rT_j} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{j-1}(S_{\tau+T_j})|\mathcal{F}_\tau], -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \middle| S_0 = S \right] \\ &= H_j(S), \end{aligned}$$

en (a) se ha usado el hecho de que  $e^{-(r-\rho)t} S_t$  es una  $\mathbb{Q}$ -martingala. Además, es posible utilizar la desigualdad de Jensen ya que gracias a la Proposición 5.2  $H_j(S)$  es una función convexa.  $\square$

Como fue comentado,  $H_j^U(S)$  y  $H_j^L(S)$  comparten la misma estructura de problema con  $H_j(S)$ , pero no tienen el término con la esperanza condicional asociado. Esto último facilita el manejo de ambas funciones y además, permitirá probar que para una familia general de funciones y bajo ciertas condiciones las políticas del tipo (5.3) son óptimas.

### 5.3. $(\alpha, \eta, \gamma)$ -Aproximaciones y su Solución de Parada Óptima

Esta sección tiene por objetivo presentar una generalización a las funciones  $H_j^U(S)$  y  $H_j^L(S)$  definidas en la sección anterior. A partir de esta generalización, se definirán las condiciones bajo las cuales es posible obtener una solución al problema de parada óptima asociado a estas nuevas funciones. Nuevamente, se tendrá que resolver una serie de sistemas de ecuaciones no lineales los cuales no admiten una representación algebraica cerrada para sus incógnitas. Luego, se estudian estos sistemas y se presentan propiedades sobre ellos.

Conviene comenzar haciendo la siguiente definición.

**Definición 5.9** ( $(\alpha, \eta, \gamma)$ -Aproximaciones). Sean  $\alpha = (\alpha_k)$ ,  $\eta = (\eta_k)$  y  $\gamma = (\gamma_k)$  tres vectores positivos. Se define  $\mathcal{H}_k(S)$  como

$$\mathcal{H}_k(S) \triangleq \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max \{ W_k(S_\tau) + \gamma_k + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S_\tau), -C_C \} - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right]. \quad (5.19)$$

Esta definición generaliza las Definiciones 5.5 y 5.7 en el siguiente sentido. Si se toma  $\alpha_k = \eta_k = 1$  y  $\gamma_k = \int_0^{T_k} e^{-rt} M dt \forall k$ , entonces se recupera  $H_k^U(S)$ . De la misma forma, si se toma  $\alpha_k = e^{-rT_k}$ ,  $\eta_k = e^{(r-\rho)T_k}$  y  $\gamma_k = 0 \forall k$ , entonces se recupera  $H_k^L(S)$ . Es en este sentido que  $\mathcal{H}_k(S)$  generaliza a las funciones obtenidas en la Sección 5.2.

Para comenzar a estudiar  $\mathcal{H}_k(S)$  se hace la siguiente observación la cual es planteada a modo de proposición.

**Proposición 5.10.** Si  $M/r < C_C$  entonces el tomador de decisiones nunca decide cerrar el proyecto e incurrir en el costo  $C_C$ . Esto es,

$$\mathcal{H}_k(S) = \tilde{\mathcal{H}}(S) \triangleq \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \left( W_k(S_\tau) + \gamma_k + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S_\tau) \right) - \int_0^\tau e^{-rt} M dt \mid S_0 = S \right].$$

*Demostración.* Primero, para reducir notación se define  $g(s) \triangleq W_k(s) + \gamma_k + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k s)$ . Se demostrarán ambas desigualdades.

- Primero, veremos que  $\tilde{\mathcal{H}}(S) \leq \mathcal{H}_k(S)$ . En efecto, basta notar que  $g(s) \leq \max \{ g(s), -C_C \}$ , luego reemplazando  $s$  por  $S_\tau$ , tomando esperanza y supremo sobre  $\tau \geq 0$ , se obtiene el resultado.
- Ahora veremos que  $\mathcal{H}_k(S) \leq \tilde{\mathcal{H}}(S)$ . Para esto, notemos que

$$\int_0^\tau e^{-rt} M dt = (1 - e^{-r\tau}) M/r.$$

Sea  $\tau$  un  $\mathcal{F}_t$ -tiempo de parada, para  $A_\tau \triangleq \{ \omega : g(S_\tau) > -C_C \}$  se define

$$\tilde{\tau}(\omega) \triangleq \begin{cases} \tau & \text{si } \omega \in A_\tau \\ +\infty & \text{si } \omega \in A_\tau^c. \end{cases}$$

Se tiene que  $\tilde{\tau}$  es un  $\mathcal{F}_t$ -tiempo de parada. En efecto, sea  $t \geq 0$ , como el evento  $\{\tilde{\tau} \leq t\} \cap A_\tau^c = \emptyset$  entonces se cumple que  $\{\tilde{\tau} \leq t\} = \{\tilde{\tau} \leq t\} \cap A_\tau = \{\tau \leq t\} \cap A_\tau$ . Como  $\tau$  es un  $\mathcal{F}_t$ -tiempo de parada entonces  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  y, además,  $A_\tau \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_t$ , por lo tanto  $\{\tilde{\tau} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tau} \max\{g(S_\tau), -C_C\} + (e^{-r\tau} - 1) \frac{M}{r} \right] &\leq \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ \{e^{-r\tau} g(S_\tau) + (e^{-r\tau} - 1) \frac{M}{r}\} \mathbf{1}_{A_\tau} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ -\frac{M}{r} \mathbf{1}_{A_\tau^c} \right] \\
&= \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ \{e^{-r\tilde{\tau}} g(S_{\tilde{\tau}}) + (e^{-r\tilde{\tau}} - 1) \frac{M}{r}\} \mathbf{1}_{A_\tau} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ \{e^{-r\tilde{\tau}} g(S_{\tilde{\tau}}) + (e^{-r\tilde{\tau}} - 1) \frac{M}{r}\} \mathbf{1}_{A_\tau^c} \right] \\
&= \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\tilde{\tau}} g(S_{\tilde{\tau}}) + (e^{-r\tilde{\tau}} - 1) \frac{M}{r} \right] \\
&\leq \sup_{\xi \geq 0} \mathbb{E}_S^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r\xi} g(S_\xi) - \int_0^\xi e^{-rt} M dt \right] \\
&= \tilde{\mathcal{H}}(S),
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad viene del hecho de que  $M/r < C_C$ . Para finalizar, basta tomar supremo sobre  $\tau \geq 0$  al lado izquierdo de la desigualdad y se obtiene el resultado deseado.  $\square$

Esta proposición establece que si el costo asociado a esperar indefinidamente ( $M/r$ ) es menor que el costo asociado a cerrar el proyecto, entonces nunca es conveniente cerrar el proyecto. Para el caso en que  $M/r = C_C$ , el tomador de decisiones estará indiferente entre cerrar el proyecto o esperar indefinidamente. Dado esto, en el presente trabajo se considerará siempre que  $M/r > C_C$ .

En lo que sigue, la idea es determinar condiciones bajo las cuales es posible resolver (5.19), aplicando el Teorema 2.7. En la Sección 5.1, se explicó que la solución al problema (5.2) debía ser de la forma (5.11), donde las constantes son calculadas resolviendo el Sistema 5.1. En dicha sección, no fue posible entregar una demostración de este hecho ya que la presencia de un término asociado a la esperanza condicional obligaría a utilizar métodos numéricos. Sin embargo, el problema (5.19) presenta características que permiten hacer un análisis más simple. Para lograr demostrar que (5.19) tiene solución, primero conviene basarse en lo hecho para (5.2). Esto motiva a considerar como candidato a solución para  $\mathcal{H}_k(S)$  la siguiente función definida en tramos

$$\mathcal{H}_k(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_k^a \\ \mathcal{B}_k S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_k S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_k^a < S < \mathcal{S}_k^b \\ R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S) & \text{si } \mathcal{S}_k^b \leq S, \end{cases} \quad (5.20)$$

donde  $\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b$  (thresholds) y  $\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k$  son constantes que deben ser determinadas resolviendo el siguiente sistema no lineal.

**Sistema 5.11.**

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k \mathcal{S}_k^{a\lambda_1} + \mathcal{D}_k \mathcal{S}_k^{a\lambda_2} - M/r &= -C_C \\ \mathcal{B}_k \mathcal{S}_k^{b\lambda_1} + \mathcal{D}_k \mathcal{S}_k^{b\lambda_2} - M/r &= (R_k \mathcal{S}_k^b - (C_k - \gamma_k)) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k \mathcal{S}_k^b) \\ \lambda_1 \mathcal{B}_k \mathcal{S}_k^{a\lambda_1-1} + \lambda_2 \mathcal{D}_k \mathcal{S}_k^{a\lambda_2-1} &= 0 \\ \lambda_1 \mathcal{B}_k \mathcal{S}_k^{b\lambda_1-1} + \lambda_2 \mathcal{D}_k \mathcal{S}_k^{b\lambda_2-1} &= R_k + \alpha_k \eta_k \mathcal{H}'_{k-1}(\eta_k \mathcal{S}_k^b). \end{aligned}$$

Para poder probar que  $\mathcal{H}_k(S)$  es de la forma dada por (5.20) se requiere el siguiente resultado intermedio.

**Proposición 5.12.** *Sea  $j \geq 1$ , si los valores de los thresholds  $\{\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b\}_{k=1}^j$  y de las constantes  $\{\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k\}_{k=1}^j$  son conocidos y  $\mathcal{H}_j(S)$  esta dada por (5.20), entonces  $\mathcal{H}_j(S)$  tiene la siguiente representación*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j(S) &= (\theta^\times R)_{h,j}^+ S - (\alpha^\times (C - \gamma))_{h,j}^+ \\ &\quad - C_C \cdot \alpha_{h,j}^\times \cdot \mathbb{1}_{\{S \leq \frac{\mathcal{S}_h^a}{\eta_{h,j}^\times}\}} \\ &\quad + \alpha_{h,j}^\times \cdot (\mathcal{B}_h(\eta_{h,j}^\times)^{\lambda_1} S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_h(\eta_{h,j}^\times)^{\lambda_2} S^{\lambda_2} - M/r) \cdot \mathbb{1}_{\{S > \frac{\mathcal{S}_h^a}{\eta_{h,j}^\times}\}}, \end{aligned}$$

con  $h = h(S) = \max\{0 \leq k \leq j : S < \frac{\mathcal{S}_k^b}{\eta_{k,j}^\times}\}$ ,  $\mathcal{S}_0^b = \mathcal{S}_0^a = \infty$ , y  $\theta_k \triangleq \alpha_k \eta_k$ .

*Demostración.* Sea  $S$  fijo. De la definición de  $h$  se sabe que

$$\forall l \in \{h+1, h+2, \dots, j\}, \quad S \geq \frac{\mathcal{S}_l^b}{\eta_{l,j}^\times}$$

Luego, a partir de (5.20) es posible obtener la siguiente serie de igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j(S) &= (R_j S - (C_j - \gamma_j)) + \alpha_j \mathcal{H}_{j-1}(\eta_j S) \\ \mathcal{H}_{j-1}(\eta_j S) &= (R_{j-1} \eta_j S - (C_{j-1} - \gamma_{j-1})) + \alpha_{j-1} \mathcal{H}_{j-2}(\eta_j \eta_{j-1} S) \\ &\quad \vdots \\ \mathcal{H}_{h+1}(\eta_{h+1,j}^\times S) &= (R_{h+1} \eta_{h+1,j}^\times S - (C_{h+1} - \gamma_{h+1})) + \alpha_{h+1} \mathcal{H}_h(\eta_{h,j}^\times S), \end{aligned}$$

reemplazando iterativamente cada una de las igualdades anteriores se tiene que

$$\mathcal{H}_j(S) = (\theta^\times R)_{h,j}^+ S - (\alpha^\times C)_{h,j}^+ + \alpha_{h,j}^\times \mathcal{H}_h(\eta_{h,j}^\times S). \quad (5.21)$$

Ahora, como  $\eta_{h,j}^\times S < \mathcal{S}_h^b$  se tiene que

$$\mathcal{H}_h(\eta_{h,j}^\times S) = -C_C \cdot \mathbb{1}_{\{S \leq \frac{\mathcal{S}_h^a}{\eta_{h,j}^\times}\}} + (\mathcal{B}_h(\eta_{h,j}^\times)^{\lambda_1} S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_h(\eta_{h,j}^\times)^{\lambda_2} S^{\lambda_2} - M/r) \cdot \mathbb{1}_{\{S > \frac{\mathcal{S}_h^a}{\eta_{h,j}^\times}\}},$$

de (5.21) y esta última ecuación se concluye el resultado.  $\square$

En la Proposición 5.12 se está asumiendo que los thresholds son tales que  $\mathcal{S}_k^a < \mathcal{S}_k^b$ . Esto en general no es cierto. Sin embargo, es posible imponer condiciones para que esto ocurra y, de esta forma, darle sentido a dichos valores. Para lograr esto, se probará que bajo ciertas condiciones el Sistema 5.11 posee una única solución para todo  $k \geq 1$ . Luego, con este resultado en mano se podrá demostrar que el problema (5.19) tiene solución y ésta, efectivamente, viene dada por (5.20).

Primero se prueba la existencia y unicidad de solución del Sistema 5.11 para  $k = 1$  y luego se generaliza el resultado para todo  $k \geq 1$ . Es conveniente separar estos casos pues la demostración para  $k = 1$  entrega una forma de extender el resultado para cualquier valor de  $k$ .

**Proposición 5.13.** *Considerando  $k = 1$  en el Sistema 5.11 y asumiendo que  $M/r > (C_1 - \gamma_1) > C_C$ , entonces el Sistema 5.11 tiene una solución  $(\mathcal{S}_1^a, \mathcal{S}_1^b, \mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1)$ , y ésta cumple lo siguiente*

$$i) \mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1 > 0.$$

$$ii) \mathcal{S}_1^a < \mathcal{S}_1^b.$$

$$iii) \mathcal{S}_1^a, \mathcal{S}_1^b \in (x, \bar{x}),$$

donde

$$\underline{x} = \frac{(C_1 - \gamma_1 - C_C)\lambda_2}{R_1(\lambda_2 - 1)}, \quad \bar{x} = \frac{(C_1 - \gamma_1 - C_C)\lambda_1}{R_1(\lambda_1 - 1)} \quad (5.22)$$

*Demostración.* Para simplificar notación se considera  $x_1 = \mathcal{S}_1^a$  y  $x_2 = \mathcal{S}_1^b$ . De esta forma el Sistema 5.11, para  $k = 1$ , queda

$$\mathcal{B}_1 x_1^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 x_1^{\lambda_2} - M/r = -C_C, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{B}_1 x_2^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 x_2^{\lambda_2} - M/r = R_1 x_2 - (C_1 - \gamma_1), \quad (5.24)$$

$$\lambda_1 \mathcal{B}_1 x_1^{\lambda_1 - 1} + \lambda_2 \mathcal{D}_1 x_1^{\lambda_2 - 1} = 0, \quad (5.25)$$

$$\lambda_1 \mathcal{B}_1 x_2^{\lambda_1 - 1} + \lambda_2 \mathcal{D}_1 x_2^{\lambda_2 - 1} = R_1. \quad (5.26)$$

Luego, como  $M/r > C_C$  no puede ocurrir que  $\mathcal{D}_1 = 0$ , pues en caso contrario de (5.25) se deduce que  $\mathcal{B}_1 \lambda_1 x_1^{\lambda_1 - 1} = 0$  por lo que  $\mathcal{B}_1 x_1^{\lambda_1} = 0$ ; esto último y (5.23) implican que  $M/r = C_C$  lo cual es una contradicción. De esto también es posible concluir que  $x_1 > 0$ , pues  $\lambda_2 < 0$ . Usando un argumento similar se concluye que  $\mathcal{B}_1 \neq 0$ . Además, combinando las ecuaciones para  $x_1$ , (5.23) y (5.25), es posible despejar  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{D}_1$  en función de  $x_1$  obteniendo

$$\mathcal{B}_1 = -\frac{(M/r - C_C)\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^{\lambda_1}}, \quad \mathcal{D}_1 = \frac{(M/r - C_C)\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)x_1^{\lambda_2}}.$$

Usando el hecho de que  $M/r - C_C > 0$  y que  $\lambda_2 < 0 < 1 < \lambda_1$  es posible concluir que  $\mathcal{B}_1 > 0$ ,  $\mathcal{D}_1 > 0$ . Ahora solo resta demostrar que  $x_1 < x_2$  y que la solución al sistema (5.23) -(5.26) existe y es única. En efecto, a partir de las ecuaciones para  $x_2$  del sistema, también es posible despejar  $\mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1$ , pero esta vez en función de  $x_2$

$$\mathcal{B}_1 = \frac{(C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_2 - R_1 x_2 (\lambda_2 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)x_2^{\lambda_1}}, \quad \mathcal{D}_1 = -\frac{(C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_1 - R_1 x_2 (\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)x_2^{\lambda_2}}.$$

Luego, para encontrar la solución al sistema, basta igualar los valores anteriormente calculados para  $\mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1$  con los recién obtenidos. A partir de esto es conveniente definir las siguientes funciones para  $x > 0$

$$\begin{aligned} I_1(x) &\triangleq \frac{\lambda_2(C_C - M/r)}{x^{\lambda_1}}, \\ I_2(x) &\triangleq \frac{\lambda_1(C_C - M/r)}{x^{\lambda_2}}, \\ J_1(x) &\triangleq \frac{(C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_2 - R_1x(\lambda_2 - 1)}{x^{\lambda_1}}, \\ J_2(x) &\triangleq \frac{(C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_1 - R_1x(\lambda_1 - 1)}{x^{\lambda_2}}. \end{aligned}$$

Con estas definiciones, interesa probar que existe un único par  $(x_1, x_2)$  tal que

$$I_1(x_1) = J_1(x_2) \quad \text{y} \quad I_2(x_1) = J_2(x_2). \quad (5.27)$$

Para resolver (5.27) se estudiarán las funciones recién definidas. Primero, sus derivadas están dadas por

$$\begin{aligned} I_1'(x) &= \frac{-\lambda_1\lambda_2(C_C - M/r)}{x^{\lambda_1+1}}, \\ I_2'(x) &= -\frac{\lambda_1\lambda_2(C_C - M/r)}{x^{\lambda_2+1}}, \\ J_1'(x) &= \frac{R_1x(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) - (C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_1\lambda_2}{x^{\lambda_1+1}}, \\ J_2'(x) &= \frac{R_1x(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) - (C_1 - \gamma_1 - M/r)\lambda_1\lambda_2}{x^{\lambda_2+1}}. \end{aligned}$$

Para  $I_1(x)$  es posible notar que es positiva y decreciente en todo su dominio, con  $I_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  y  $I_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$ . Para  $I_2(x)$  se tiene que es negativa y decreciente en todo su dominio, con  $I_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$  y  $I_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Por otro lado,  $J_1(x)$  toma valores positivos y es decreciente en todo su dominio (esto pues  $M/r > (C_1 - \gamma_1)$ ), con  $J_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  y  $J_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$ .  $J_2(x)$  toma valores negativos y es decreciente en todo su dominio, con  $J_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$  y  $J_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ . Además, en los puntos

$$\underline{x} = \frac{(C_1 - \gamma_1 - C_C)\lambda_2}{R_1(\lambda_2 - 1)}, \quad \bar{x} = \frac{(C_1 - \gamma_1 - C_C)\lambda_1}{R_1(\lambda_1 - 1)},$$

se cumple que  $I_1(\underline{x}) = J_1(\underline{x})$  y  $I_2(\bar{x}) = J_2(\bar{x})$ , con  $\underline{x} < \bar{x}$ . A partir de todo este análisis es posible concluir lo siguiente acerca de la solución de (5.27):

- Se cumple que  $x_1, x_2 \in (\underline{x}, \bar{x})$  y  $x_1 < x_2$ : Esto se debe a que para  $x \geq \bar{x}$  se tiene que  $I_2(x) \geq J_2(x)$  por lo que todos los pares de puntos  $(x_1, x_2)$  mayores a  $\bar{x}$  tal que  $I_2(x_1) = J_2(x_2)$  cumplen que  $x_1 \geq x_2$ ; al mismo tiempo como  $J_1(x) > I_1(x)$  para  $x \geq \bar{x}$  se tiene que todos los pares de puntos  $(x_1, x_2)$  mayores a  $\bar{x}$  tal que  $I_1(x_1) = J_1(x_2)$  cumplen que  $x_1 < x_2$ . Luego, necesariamente debe tener que  $x_1, x_2 < \bar{x}$ . De modo similar, para  $x \leq \underline{x}$  se tiene que  $I_1(x) \geq J_1(x)$ , luego los pares

de puntos  $(x_1, x_2)$  menores a  $\underline{x}$  tal que  $I_1(x_1) = J_1(x_2)$  cumplen que  $x_1 \geq x_2$ ; al mismo tiempo como  $J_2(x) > I_2(x)$  para  $x \leq \underline{x}$  se tiene que todos los pares de puntos  $(x_1, x_2)$  menores a  $\underline{x}$  tal que  $I_2(x_1) = J_2(x_2)$  cumplen que  $x_1 < x_2$ . De esto es posible concluir que  $x_1, x_2 > \underline{x}$ . Por lo tanto se concluye que  $x_1, x_2 \in (\underline{x}, \bar{x})$ . Además, en este intervalo todas las posibles soluciones de (5.27) cumplen que  $x_1 < x_2$ .

- Dado el punto anterior, consideremos  $x_2 \in (\underline{x}, \bar{x})$ , y sean  $x_1^1(x_2)$  la única solución de  $I_1(x_1^1) = J_1(x_2)$  con  $x_1^1 < x_2$ , y sea  $x_1^2(x_2)$  la única solución de  $I_2(x_1^2) = J_2(x_2)$  con  $x_1^2 < x_2$ . Claramente  $x_1^1(x_2)$  y  $x_1^2(x_2)$  son funciones continuas definidas en  $(\underline{x}, \bar{x})$ . Debemos probar que existe un único  $x_2 \in (\underline{x}, \bar{x})$  tal que  $x_1^1(x_2) = x_1^2(x_2)$ . En efecto, para  $x_2$  cercano a  $\underline{x}$ ,  $x_2 - x_1^2(x_2) > 0$ , pero  $x_2 - x_1^1(x_2) \approx 0$ . Similarmente para  $x_2$  cercano a  $\bar{x}$ ,  $x_2 - x_1^1(x_2) > 0$ , pero  $x_2 - x_1^2(x_2) \approx 0$ . Por lo tanto, debe existir  $x_2$  tal que  $x_2 - x_1^1(x_2) = x_2 - x_1^2(x_2)$ , es decir,  $x_1^1(x_2) = x_1^2(x_2)$ .

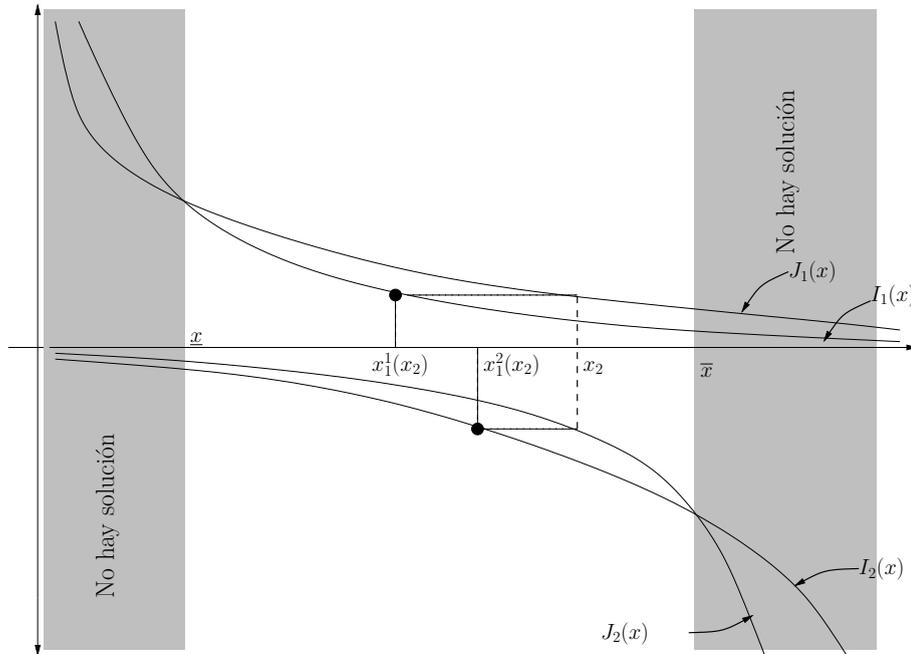


Figura 5.1: En esta figura se grafican las funciones  $I_1, I_2, J_1$  y  $J_2$  definidas en la Proposición 5.13. La idea final en la demostración de esta proposición consiste en que cerca de  $\underline{x}$  el valor de  $x_2 - x_1^1(x_2)$  es cercano a 0, mientras que el valor de  $x_2 - x_1^2(x_2)$  mayor que 0. Luego, a medida que se hace crecer  $x_2$  hacia  $\bar{x}$  ocurre que el valor de  $x_2 - x_1^1(x_2)$  crece, mientras que el valor de  $x_2 - x_1^2(x_2)$  decrece hacia 0. Por lo tanto, debe existir algún  $x_2 \in (\underline{x}, \bar{x})$  tal que  $x_2 - x_1^1(x_2) = x_2 - x_1^2(x_2)$ , es decir,  $x_1^1(x_2) = x_1^2(x_2)$ .

Una descripción gráfica de los puntos anterior esta dada por la Figura 5.1. En resumen se ha demostrado que suponiendo que  $M/r > (C_1 - \gamma_1) > C_C$ , el sistema (5.23)-(5.26) tiene una única solución en las variables  $x_1, x_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1$ .  $\square$

**Corolario 5.14.** Sean  $\{\mathcal{S}_l^a, \mathcal{S}_l^b\}_{l=1}^{k-1}$  y  $\{\mathcal{B}_l, \mathcal{D}_l\}_{l=1}^{k-1}$  conocidos.

a) si

$$M/r > (\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k}^+ + C_C \cdot \alpha_{h,k}^\times > C_C, \quad (5.28)$$

para algún  $h \in \{0, \dots, k-1\}$ , y si en el Sistema 5.11 se considera  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  de la forma

$$\mathcal{H}_{k-1}(S) = (\theta^\times R)_{h,k-1}^+ S - (\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k-1}^+ - C_C \cdot \alpha_{h,k-1}^\times. \quad (5.29)$$

Entonces 5.11 tiene una solución  $(\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b, \mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k)$ , y ésta cumple lo siguiente

- i)  $\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k > 0$ .
- ii)  $\mathcal{S}_k^a < \mathcal{S}_k^b$ .
- iii)  $\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b \in (\underline{x}, \bar{x})$ ,

donde

$$\underline{x} = \frac{((\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k}^+ + C_C \cdot \alpha_{h,k}^\times - C_C)\lambda_2}{(\theta^\times R)_{h,k}^+(\lambda_2 - 1)}, \quad (5.30)$$

$$\bar{x} = \frac{((\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k}^+ + C_C \cdot \alpha_{h,k}^\times - C_C)\lambda_1}{(\theta^\times R)_{h,k}^+(\lambda_1 - 1)}. \quad (5.31)$$

b) Por otro lado, si

$$M/r > (\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k}^+ + \alpha_{h,k}^\times \cdot M/r > C_C, \quad (5.32)$$

para algún  $h \in \{1, \dots, k-1\}$ , y si en el Sistema 5.11 se considera  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k-1}(S) &= (\theta^\times R)_{h,k-1}^+ S - (\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k-1}^+ \\ &+ \alpha_{h,k-1}^\times \cdot (\mathcal{B}_h(\eta_{h,k-1}^\times)^{\lambda_1} S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_h(\eta_{h,k-1}^\times)^{\lambda_2} S^{\lambda_2} - M/r). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Entonces el Sistema 5.11 puede tener solución  $(\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b, \mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k)$ , esto depende del valor de  $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \alpha_{h,k}^\times \cdot \mathcal{D}_h(\eta_{h,k}^\times)^{\lambda_2}$ . En caso de haber solución, ésta cumple lo siguiente

- i)  $\mathcal{B}_k > 0$  y  $\mathcal{D}_k > 0$ .
- ii)  $\mathcal{S}_k^a < \mathcal{S}_k^b$ .

*Demostración.* Para a) basta reemplazar (5.29) en el Sistema 5.11, e identificar  $C_1 - \gamma_1$  con  $(\alpha^\times(C - \gamma))_{h,k}^+ - C_C \cdot \alpha_{h,k}^\times$ . Con esto, se deduce que la condición (5.28) es análoga a  $M/r > C_1 - \gamma_1 > C_C$ . Finalmente, utilizando la Proposición 5.12 bajo las identificaciones recién explicadas, se obtiene el resultado deseado.

Por otro lado, para el caso en que  $\mathcal{H}_{k-1}$  es como en b) es más complicado analizar las condiciones bajo las cuales el Sistema 5.11 tiene solución. Sin embargo, es posible llevar a cabo un análisis similar al hecho en la demostración de la Proposición 5.13, de esto se puede concluir que el Sistema 5.11 no puede ser resuelto si es que  $m = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \alpha_{h,k}^\times \cdot \mathcal{D}_h(\eta_{h,k}^\times)^{\lambda_2}$  es mayor que un constante ( $q$ ) que se determina a partir de la diferencia de las funciones  $I_2(x)$  y  $J_2(x) + m$ . Aquí las funciones  $I_2(x)$  y  $J_2(x)$  son análogas, salvo cambio en los valores de los parámetros, a las funciones definidas en la demostración de la Proposición 5.13. En caso de que  $m$  sea menor que  $q$  entonces existe la posibilidad de resolver el Sistema 5.11, pero no se ha logrado determinar una condición suficiente para asegurar la existencia de la solución en este caso.  $\square$

El Corolario 5.14 entrega condiciones suficiente para resolver el Sistema 5.11, este resultado considera los casos entregados por la Proposición 5.12, la cual informa acerca de todas las posibles funciones  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  que se pueden obtener al ir resolviendo recursivamente (5.20). En principio, para determinar el valor correcto de  $h$  que se debe utilizar para obtener  $\mathcal{H}_k(S)$ , en el Corolario 5.14 es necesario evaluar la definición de  $h$  en  $\eta_k \mathcal{S}_k^b$ . Sin embargo, antes de buscar una solución para el Sistema 5.11, no se dispone del valor de  $\mathcal{S}_k^b$ , pues es una incógnita del mismo sistema. Para poder enfrentar este problema, una opción podría ser imponer las condiciones (5.28) y (5.32)  $\forall h$  e intentar resolver el Sistema 5.11, de esta forma se tiene que para todas los posibles tramos de  $\mathcal{H}_{k-1}$  donde puede caer  $\eta_k \mathcal{S}_k^b$  podría existir una solución para el sistema; el problema de esto es que puede llegar a ser muy restrictivo en término de los parámetros. Ahora bien, una vez que se resuelve el Sistema 5.11 para un determinado  $h$ , se debe comprobar que  $\eta_k \mathcal{S}_k^b$  pertenezca al tramo de  $\mathcal{H}_{k-1}$  indicado por  $h$ . Esto último, es posible comprenderlo mejor a partir del siguiente ejemplo y la discusión presentada en éste.

**Ejemplo 5.15.** Como ya se vió, la Proposición 5.13 establece condiciones suficientes que permiten resolver el Sistema 5.11 para  $k = 1$ . En este ejemplo, se considera el caso  $k = 2$  y se pretende exponer las dificultades asociadas a éste. Para tener mayor claridad se presenta a continuación el Sistema 5.11 para  $k = 2$

$$\mathcal{B}_2 \mathcal{S}_2^{a\lambda_1} + \mathcal{D}_2 \mathcal{S}_2^{a\lambda_2} - M/r = -C_C, \quad (5.34)$$

$$\mathcal{B}_2 \mathcal{S}_2^{b\lambda_1} + \mathcal{D}_2 \mathcal{S}_2^{b\lambda_2} - M/r = (R_2 \mathcal{S}_2^b - (C_2 - \gamma_2)) + \alpha_2 \mathcal{H}_1(\eta_2 \mathcal{S}_2^b), \quad (5.35)$$

$$\lambda_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{S}_2^{a\lambda_1-1} + \lambda_2 \mathcal{D}_2 \mathcal{S}_2^{a\lambda_2-1} = 0, \quad (5.36)$$

$$\lambda_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{S}_2^{b\lambda_1-1} + \lambda_2 \mathcal{D}_2 \mathcal{S}_2^{b\lambda_2-1} = R_2 + \alpha_2 \eta_2 \mathcal{H}'_1(\eta_2 \mathcal{S}_2^b). \quad (5.37)$$

Como se puede notar, las ecuaciones (5.35) y (5.37) dependen del valor que tenga  $\mathcal{H}_1$  en  $\eta_2 \mathcal{S}_2^b$ . Sin embargo,  $\mathcal{H}_1$  esta definida de tres formas distintas en tres diferentes tramos: en  $I_1 = (-\infty, \mathcal{S}_1^a)$  es  $\mathcal{H}_1(S) = -C_C$ , en  $I_2 = [\mathcal{S}_1^a, \mathcal{S}_1^b]$  es  $\mathcal{H}_1(S) = \mathcal{B}_1 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 S^{\lambda_2} - M/r$  y en  $I_3 = (\mathcal{S}_1^b, \infty)$  es  $\mathcal{H}_1(S) = R_1 S - (C_1 - \gamma_1)$ . Por lo tanto, existen tres formas distintas de plantear el sistema (5.34)-(5.37), una por cada tramo de  $\mathcal{H}_1$ . Imponiendo las condiciones dadas en el Corolario 5.14, es posible obtener tres soluciones diferentes asociadas a cada tramo (para el tramo  $I_2$  no necesariamente se podría encontrar solución). Nótese que también puede ocurrir que las condiciones recién mencionadas no se cumplan para un determinado tramo y aún así se pueda obtener una solución para dicho tramo. Además, si  $\mathcal{S}_2^b(i)$  es la solución para  $\mathcal{S}_2^b$  asociada al tramo  $I_i$  entonces ésta debiese cumplir que  $\eta_2 \mathcal{S}_2^b(i) \in I_i$ , para algún  $i = 1, 2, 3$ . Una vez que se verifica esto para un determinado  $i$ , es posible proponer como candidato a solución del problema de Parada Óptima a la función  $\mathcal{H}_2(S)$  resultante (ver Ejemplo 2.8). El problema radica en que eventualmente podría ocurrir que para dos valores distintos de  $i$  se pueda resolver el sistema y, además, se cumpla que  $\eta_2 \mathcal{S}_2^b(i) \in I_i$ . En este caso, existirían dos posibles candidatos a solución para el problema de Parada Óptima. En relación a esto último, Teorema 5.17 entrega condiciones extra sobre los parámetros que podrían ayudar a decidir cuál de estos dos candidatos es efectivamente la solución. De todas formas, aún podría seguir ocurriendo que ambos candidatos satisfagan todas las condiciones necesarias para ser solución. Si esto ocurriese, dada la definición del problema de Parada Óptima establecida por (5.19), se tendría que ambos candidatos son iguales.

El resultado final de esta sección permite argumentar teóricamente que bajo ciertas condiciones la solución de  $\mathcal{H}_k(S)$  viene dada por (5.20), donde  $\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b$  (thresholds)  $\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k$  son constantes que deben ser determinadas resolviendo el sistema no lineal 5.11. Para establecer dicho resultado, antes es necesario demostrar el siguiente lema técnico.

**Lema 5.16.** *Sea  $g_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y estrictamente creciente. Sea  $g(S) = \max\{g_1(S), -C_C\}$ ,  $p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p''(S) > 0, \forall S > 0$ . Suponga que  $0 < S_1 < S_2$  son la única solución de*

$$p(S_1) = -C_C, \quad p'(S_1) = 0 \quad (5.38)$$

$$p(S_2) = g_1(S_2), \quad p'(S_2) = g_1'(S_2), \quad (5.39)$$

Entonces,

$$\forall S, \mathcal{H}(S) \geq g(S) \Leftrightarrow \exists S \in (S_1, S_2) \text{ tal que } p(S) = g_1(S) \\ \text{y } g_1(S_1) < -C_C, g_1(S_2) > -C_C,$$

donde

$$\mathcal{H}(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq S_1 \\ p(S) & \text{si } S_1 < S < S_2 \\ g_1(S) & \text{si } S_2 \leq S. \end{cases}$$

*Demostración.* Se demostrarán ambas implicancias por separado. Primero se probará que si  $\forall S, \mathcal{H}(S) \geq g(S)$  entonces  $\exists S \in (S_1, S_2)$  tal que  $p(S) = g_1(S)$ . Por contradicción, sea  $\tilde{S} \in (S_1, S_2)$  tal que  $p(\tilde{S}) = g_1(\tilde{S})$ . Como  $\forall S, \mathcal{H}(S) \geq g(S)$  entonces en particular se tiene que  $\forall S \in (S_1, S_2), p(S) \geq g_1(S)$ , luego para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño ocurre que  $p(\tilde{S} + \delta) \geq g_1(\tilde{S} + \delta)$  y  $p(\tilde{S} - \delta) \geq g_1(\tilde{S} - \delta)$ , por lo tanto

$$\frac{p(\tilde{S} + \delta) - p(\tilde{S})}{\delta} \geq \frac{g_1(\tilde{S} + \delta) - g_1(\tilde{S})}{\delta} \quad \text{y} \quad \frac{p(\tilde{S}) - p(\tilde{S} - \delta)}{\delta} \leq \frac{g_1(\tilde{S}) - g_1(\tilde{S} - \delta)}{\delta},$$

tomando límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , se tiene que  $p'(\tilde{S}) \geq g_1'(\tilde{S})$  y  $p'(\tilde{S}) \leq g_1'(\tilde{S})$  por lo que  $p'(\tilde{S}) = g_1'(\tilde{S})$ , esto último contradice la unicidad de  $S_2$ . Por otro lado, si  $g_1(S_1) \geq -C_C$ , hay dos opciones:  $g_1(S_1) > -C_C$  o  $g_1(S_1) = -C_C$ . Si  $g_1(S_1) > -C_C$ , entonces  $\mathcal{H}(S_1) = -C_C < g_1(S_1) \leq g(S_1)$  lo cual es una contradicción. Si  $g_1(S_1) = -C_C$  entonces como  $\forall S, \mathcal{H}(S) \geq g(S)$  y  $p(S_1) = -C_C$  se tiene que para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño

$$\frac{p(S_1 + \delta) - p(S_1)}{\delta} \geq \frac{g_1(S_1 + \delta) - g_1(S_1)}{\delta},$$

tomando límite sobre  $\delta \rightarrow 0$  se concluye que  $p'(S_1) \geq g_1'(S_1)$ , como  $p'(S_1) = 0$  y  $g_1'(s) > 0$ , pues  $g_1$  es estrictamente creciente, se tiene una contradicción. Por lo tanto, se ha probado que  $g_1(S_1) < -C_C$ , resta demostrar que  $g_1(S_2) > -C_C$ . En efecto, por contradicción, si  $g_1(S_2) < -C_C$  entonces  $g(S_2) = -C_C > g_1(S_2) = \mathcal{H}(S_2)$ , lo que contradice la hipótesis. Por otro lado, si  $g_1(S_2) = -C_C$  entonces  $p(S_1) = p(S_2) = -C_C$  y como para  $S \in (S_1, S_2)$  se tiene que  $p(S) = \mathcal{H}(S) \geq g(S) \geq -C_C$ , se concluye que necesariamente  $p(s) = -C_C, \forall S \in (S_1, S_2)$ , esto pues  $p$  es una función convexa. De esta forma,  $p''(S) = 0 \forall S \in (S_1, S_2)$ , pero por hipótesis esto último no puede ocurrir.

A continuación se procede a probar la implicancia restante. Como  $g_1(S_1) < -C_C$ ,  $g_1(S_2) > -C_C$  y  $g_1$  es una función continua entonces  $\exists \tilde{s} \in (S_1, S_2)$  tal que  $g_1(\tilde{s}) = -C_C$ . Ahora bien, para probar que  $\mathcal{H}(S) \geq g(S), \forall S$  se consideran tres casos. Primero, si  $S \in [0, S_1]$  entonces  $\mathcal{H}(S) = -C_C = g(S)$ , pues como  $g_1$  es estrictamente creciente se tiene que  $g(S) = -C_C, \forall S \in [0, \tilde{S}]$  y, por lo tanto, en particular para  $S \in [0, S_1]$ . De manera análoga se puede concluir que  $\mathcal{H}(S) = g(S), \forall S \in [S_2, +\infty)$ . Finalmente, sea  $\epsilon > 0$ , como  $p''(S) > 0, \forall S \in [S_1 - \epsilon, S_2]$  entonces  $p$  tiene un mínimo global en  $[S_1 - \epsilon, S_2]$ . Además, como  $p'(S_1) = 0$  entonces el mínimo se alcanza en  $S_1$ , y, por lo tanto,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall S \in (S_1, S_1 + \delta), p'(S) > 0$ . De este modo, como  $p$  es estrictamente convexa, necesariamente se cumple que  $p(S) > -C_C = g(S), \forall S \in (S_1, \tilde{s}]$ . Además, como  $g_1(\tilde{s}) = -C_C$  y no existe solución de la ecuación  $p(S) = g_1(S)$  en  $(S_1, S_2)$  se tiene que  $p(S) > g_1(S), \forall S \in (S_1, S_2)$ . Esto último concluye la demostración.  $\square$

Nótese que en la demostración anterior, en la implicancia de derecha a izquierda no se ha utilizado el hecho de que la solución  $(S_1, S_2)$  sea única. Como en el siguiente resultado sólo se usa esta implicancia, entonces no es necesario exigir la unicidad de la solución. Además, en este mismo lema (Lema 5.16) se puede exigir, en lugar de la unicidad de  $(S_1, S_2)$ , que  $S_2$  sea la menor solución; en este caso se obtiene el mismo resultado.

**Teorema 5.17.** *Sea  $k \geq 1$  arbitrario, sean  $\{\mathcal{S}_l^a, \mathcal{S}_l^b\}_{l=1}^{k-1}$  y  $\{\mathcal{B}_l, \mathcal{D}_l\}_{l=1}^{k-1}$  conocidos, y  $\mathcal{H}_{k-1}$  calculado según la Proposición 5.12. Si existe  $h$  tal que se satisface una de las siguientes*

- i) La condición (5.28) del Corolario 5.14. Y la única solución al Sistema 5.11 asociada a esta condición satisface que  $\mathcal{S}_k^b \leq \mathcal{S}_h^a / \eta_{h,k}^\times$ .*
- ii) La condición (5.32) del Corolario 5.14. Y si existe solución al Sistema 5.11 asociada a esta condición y ésta satisface que  $\mathcal{S}_h^a / \eta_{h,k}^\times < \mathcal{S}_k^b < \mathcal{S}_h^b / \eta_{h,k}^\times$ .*

y se cumple que

$$\forall S \in (S_k^a, S_k^b) \text{ tal que } p(S) = g_1(S) \text{ y } g_1(S_k^a) < -C_C, g_1(S_k^b) > -C_C, \quad (5.40)$$

donde  $p(S) \triangleq \mathcal{B}_k S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_k S^{\lambda_2} - M/r$  y  $g_1(S) \triangleq R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S)$ . Entonces  $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S_t \notin (S_k^a, S_k^b)\}$  es un tiempo de parada óptimo para el problema (5.19) y su solución esta dada por

$$\phi(S) = \mathcal{H}_k(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_k^a \\ \mathcal{B}_k S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_k S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_k^a < S < \mathcal{S}_k^b \\ R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S) & \text{si } \mathcal{S}_k^b \leq S, \end{cases}$$

*Demostración.* La demostración se basa en el Teorema 2.7. Primero, siguiendo la línea del Ejemplo 2.8 se propone como región de continuación

$$D = \{S : \mathcal{S}_k^a < S < \mathcal{S}_k^b\},$$

y además se propone como candidato a solución a

$$\phi(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_k^a \\ \mathcal{B}_k S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_k S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_k^a < S < \mathcal{S}_k^b \\ R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S) & \text{si } \mathcal{S}_k^b \leq S, \end{cases}$$

donde  $\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b$  son encontrados imponiendo las condiciones de value matching y smooth pasting al resolver el Sistema 5.11. Las condiciones  $iii), iv), v), viii)$  y  $ix)$  provenientes del Teorema 2.7 son fáciles de verificar. Además, gracias a las condiciones de smooth pastig y value matching (por  $i)$  o  $ii)$  del presente Teorema) se comprueba la condición  $i)$  de ese Teorema, y  $vii)$  se tiene por construcción de  $\phi(S)$  (ver la ecuación (5.9) y la discusión en torno a ésta). De modo que solo resta verificar las condiciones  $ii)$  y  $vi)$  del Teorema 2.7. Para verificar  $ii)$ , ya sea que se esté en el caso  $i)$  o  $ii)$  del presente Teorema, se utiliza el Lema 5.16. En efecto, gracias a la Proposición 5.2 se tiene que  $\mathcal{H}_{k-1}$  es una función creciente y convexa, de modo que  $g_1(S)$  es una función estrictamente creciente y convexa, además  $h''(S) = \mathcal{B}_k \lambda_1 (\lambda_1 - 1) S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_k \lambda_2 (\lambda_2 - 1) S^{\lambda_2}$ , como  $\lambda_2 < 0 < 1 < \lambda_1$  se concluye que  $h''(S) > 0$  (gracias a el Corolario 5.14 se tiene que  $\mathcal{B}_k, \mathcal{D}_k > 0$ ). Finalmente, como  $0 < \mathcal{S}_k^a < \mathcal{S}_k^b$  son soluciones al Sistema 5.11 (el cual es análogo al sistema de ecuaciones del Lema 5.16), por (5.40) es posible concluir que

$$\forall S, \phi(S) \geq g(S) = \max\{R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S), -C_C\},$$

es decir, se satisface  $ii)$  del Teorema 2.7. Para ver que se cumple  $vi)$ , hay que demostrar que

$$L\phi \leq M \Leftrightarrow -r\phi(S) + (r - \rho)S\phi'(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \phi''(S) \leq M, \quad \text{en } D^c,$$

donde  $L$  es el operador característico definido en 2.5. Para  $S \leq \mathcal{S}_a^k$  se tiene que  $\phi(S) = -C_C$ , por lo que  $L\phi \leq M$  es equivalente a  $C_C \leq M/r$  y como se está considerando que  $M/r > C_C$  entonces la condición se cumple. Para  $S \geq \mathcal{S}_k^b$ ,  $\phi(S) = R_k S - (C_k - \gamma_k) + \alpha_k \mathcal{H}_{k-1}(\eta_k S)$  y hay que ver los dos posibles casos entregados en el enunciado del presente Teorema. Primero  $i)$ , considerando  $S \in [\mathcal{S}_k^b, \mathcal{S}_h^a / \eta_{h,k}^\times)$  (basta probar  $vi)$  para estos valores de  $S$ ) se tiene que  $\phi(S) = (\theta^\times R)_{h,k}^+ S - (\alpha^\times (C - \gamma))_{h,k}^+ - \alpha_{h,k}^\times C_C$ , de modo que  $L\phi \leq M$  es equivalente a

$$\frac{r((\alpha^\times (C - \gamma))_{h,k}^+ + \alpha_{h,k}^\times \cdot C_C) - M}{\rho(\theta^\times R)_{h,k}^+} \leq S,$$

debido a que  $S \geq \mathcal{S}_k^b$  y a (5.28) (el numerador del lado izquierdo en la desigualdad es negativo) se satisface la condición requerida. Para  $ii)$ , considerando  $S \in [\mathcal{S}_k^b, \mathcal{S}_h^b / \eta_{h,k}^\times)$  se tiene que  $\phi(S) = (\theta^\times R)_{h,k}^+ S - (\alpha^\times (C - \gamma))_{h,k}^+ + \alpha_{h,k}^\times \cdot (\mathcal{B}_h (\eta_{h,k}^\times)^{\lambda_1} S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_h (\eta_{h,k}^\times)^{\lambda_2} S^{\lambda_2} - M/r)$ , de modo que  $L\phi \leq M$  es equivalente a

$$\frac{r(\alpha^\times (C - \gamma))_{h,k}^+ + (\alpha_{h,k}^\times - 1) \cdot M}{\rho(\theta^\times R)_{h,k}^+} \leq S,$$

para llegar a la expresión anterior se ha utilizado que  $\lambda_1, \lambda_2$  son las soluciones a la ecuación cuadrática

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \lambda(\lambda - 1) + (r - \rho)\lambda - r = 0,$$

debido a que  $S \geq \mathcal{S}_k^b$  y a (5.32) (el numerador del lado izquierdo en la desigualdad es negativo) se satisface la condición requerida. De esta forma, gracias al Teorema 2.7 se concluye el resultado.  $\square$

Este Teorema permite argumentar la existencia de un tiempo de parada óptimo para el problema en cuestión y confirma como candidato a solución para (5.19) a la función

definida por (5.20). Las condiciones  $i)$ ,  $ii)$  dan una idea de cómo se debe resolver el problema (5.19) para distintos valores de  $k$ . Para entender la idea es útil recurrir a un ejemplo.

**Ejemplo 5.18.** Suponga que se ha podido aplicar el Teorema 5.17 para calcular  $\mathcal{H}_1$  (en la práctica esto resulta trivial), de modo que  $\mathcal{H}_1(S)$  esta dada por

$$\mathcal{H}_1(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_1^a \\ \mathcal{B}_1 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_1^a < S < \mathcal{S}_1^b \\ R_1 S - (C_1 - \gamma_1) & \text{si } \mathcal{S}_1^b \leq S \end{cases}$$

Ahora se desea calcular  $\mathcal{H}_2(S)$ , para lo cual se aplica el Teorema 5.17. Se propone como candidato a solución la siguiente función

$$\mathcal{H}_2(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_2^a \\ \mathcal{B}_2 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_2 S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_2^a < S < \mathcal{S}_2^b \\ R_2 S - (C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 \mathcal{H}_1(\eta_2 S) & \text{si } \mathcal{S}_2^b \leq S, \end{cases}$$

donde las constantes  $\mathcal{S}_2^a, \mathcal{S}_2^b, \mathcal{B}_2, \mathcal{D}_2$  se encuentran imponiendo las condiciones de *Smooth Pasting* y *Value Matching*. Para imponer estas condiciones es necesario conocer el valor de  $\mathcal{H}_1(\eta_2 \mathcal{S}_2^b)$ , como en principio el valor de  $\mathcal{S}_2^b$  es desconocido no es posible dar un respuesta inmediata a esta pregunta. Por lo tanto, conviene probar cada uno de los tres posibles casos, correspondientes a los tres tramos de definición de  $\mathcal{H}_1$ , y resolver el sistema subyacente resultante de las condiciones de *Smooth Pasting* y *Value Matching*. Cada vez que se resuelva uno de estos sistemas, se procede a verificar si la solución que éste entrega, en caso de existir, satisface que  $\eta_2 \mathcal{S}_2^b$  realmente pertenece al tramo que está siendo considerado. Esto último, entrega un valor de  $h = h(\eta_2 \mathcal{S}_2^b)$  para el cual se puede estar en una de las dos condiciones,  $i)$  o  $ii)$ , del Teorema 5.17. Para el caso actual, los posibles valores de  $h$  son  $\{0, 1\}$ , si  $h = 0$  entonces  $\mathcal{S}_1^b / \eta_{1,2}^{\times} \leq \mathcal{S}_2^b$  y necesariamente se está en el caso  $i)$  del Teorema 5.17, si  $h = 1$  entonces hay dos posibilidades:  $\mathcal{S}_2^b \leq \mathcal{S}_1^a / \eta_{1,2}^{\times}$ , o bien  $\mathcal{S}_1^a / \eta_{1,k}^{\times} < \mathcal{S}_2^b < \mathcal{S}_1^b / \eta_{1,2}^{\times}$ , cada una de éstas corresponde al caso  $i)$  o  $ii)$  del Teorema 5.17 respectivamente. De esta forma, si por ejemplo se está en el caso en que  $h = 1$  y  $\mathcal{S}_1^a / \eta_{1,2}^{\times} < \mathcal{S}_2^b < \mathcal{S}_1^b / \eta_{1,2}^{\times}$ , es decir, se ha utilizado  $\mathcal{H}_1(S) = \mathcal{B}_1 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 S^{\lambda_2} - M/r$  para resolver el Sistema 5.11 (y se ha logrado resolver) entonces se procede a verificar la condición (5.40) del Teorema 5.17. En caso de que esta condición sea satisfecha se concluye que la solución del problema es la dada por la función propuesta como candidato a solución, es decir,

$$\mathcal{H}_2(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_2^a \\ \mathcal{B}_2 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_2 S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \mathcal{S}_2^a < S < \mathcal{S}_2^b \\ R_2 S - (C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 (\mathcal{B}_1 \eta_2^{\lambda_1} S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 \eta_2^{\lambda_2} S^{\lambda_2} - M/r) & \text{si } \mathcal{S}_2^b \leq S < \mathcal{S}_1^b / \eta_2 \\ R_2 S - (C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 (R_1 S - (C_1 - \gamma_1)) & \text{si } \mathcal{S}_1^b / \eta_2 \leq S. \end{cases}$$

En caso de que no se cumplan las condiciones se debe continuar iterando con  $h = 0$ , es decir,  $\mathcal{S}_1^b / \eta_{1,2}^{\times} \leq \mathcal{S}_2^b$ , si es que para este caso se satisface (5.40) entonces se ha encontrado la solución al problema la cual es una función como la recién descrita pero sin el tercer tramo. En caso de que para ningún valor de  $h$  se puedan comprobar las condiciones entonces se deben reconsiderar los parámetros del problema.

Este ejemplo ilustra un procedimiento para resolver el problema (5.19) para  $k \geq 1$  arbitrario. Básicamente, la idea consiste en aprovechar la estructura recursiva de  $\mathcal{H}_k$  y aplicar de manera iterativa las condiciones descritas en el Teorema 5.17. En la siguiente sección se estudia un procedimiento algorítmico que permite aplicar esta idea.

## 5.4. Algoritmo de Solución

En la presente sección se presentará un algoritmo que permite calcular de manera eficiente  $\mathcal{H}_k(S)$ ,  $\forall k \geq 1$ . Para esto, primero se analizará la estructura de los candidatos a solución del problema (5.19) dada por (5.20). Este análisis explota la recurrencia de (5.20) y entrega resultados acerca del número de tramos de definición que puede tener  $\mathcal{H}_k(S)$ . Un vez hecho esto, se procede a dar una representación matricial de  $\mathcal{H}_k(S)$  la cual permite un cómodo manejo computacional de ésta. Con esta representación en mano, se describe un procedimiento algorítmico que permite calcular  $\mathcal{H}_k(S)$  en a lo más  $(3k - 2)$  iteraciones.

En lo que sigue es conveniente tener en mente (5.20) y el Sistema 5.11.

**Lema 5.19.** *Para resolver el Sistema 5.11 y conocer completamente  $\mathcal{H}_k(S)$  es suficiente conocer como esta definida  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  para  $S \geq \eta_k \mathcal{S}_k^b$ .*

*Demostración.* Supongamos conocida  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$ , y sean  $\{I_l\}_{l=1}^m$  los distintos intervalos (tramos, se supondrá que son crecientes) en donde  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  está definida (de distinta forma en cada uno de estos intervalos). Sea  $l^*$  tal que  $\eta_k \mathcal{S}_k^b \in I_{l^*}$ , luego es evidente que para resolver el Sistema 5.11 sólo es necesario conocer  $\mathcal{H}_{k-1}(S)$  para  $S \in I_{l^*}$ , en particular para  $S = \eta_k \mathcal{S}_k^b$ . Ahora bien, a partir de (5.20) se tiene que en la definición de  $\mathcal{H}_k$  sólo se utiliza  $\mathcal{H}_{k-1}$  para  $S > \mathcal{S}_k^b$  y ésta última función es evaluada en  $\eta_k S$ , es decir, en valores de  $S$  mayores que  $\eta_k \mathcal{S}_k^b$ .  $\square$

Utilizando la notación del Lema 5.19, es posible observar que

**Corolario 5.20.**  *$\mathcal{H}_k$  está definida en  $2 + (m - l^* + 1)$  tramos. Además  $\mathcal{H}_k$  tiene al menos 3 y a lo más  $2k + 1$  tramos.*

*Demostración.* A partir de (5.20), es posible notar que  $\mathcal{H}_k$  siempre tiene dos tramos fijos:  $I_1^k = (-\infty, \mathcal{S}_k^a)$  y  $I_2^k = [\mathcal{S}_k^a, \mathcal{S}_k^b]$ . El último tramo  $I_3^k = (\mathcal{S}_k^b, \infty)$  se dividirá dependiendo de la cantidad ( $m$ ) de tramos que tenga  $\mathcal{H}_{k-1}$ . Como sólo es necesario conocer  $\mathcal{H}_{k-1}$  para los valores de  $S$  talque  $\eta_k S > \eta_k \mathcal{S}_k^b$  y  $\eta_k \mathcal{S}_k^b \in I_{l^*}^{k-1} = (a^*, b^*)$ , entonces para  $S > \mathcal{S}_k^b$ ,  $\mathcal{H}_k(S)$  tendrá una definición distinta por cada intervalo:  $(\mathcal{S}_k^b, b^*/\eta_k)$ ,  $I_{l^*+1}^{k-1}/\eta_k, \dots, I_m^{k-1}/\eta_k$ . De donde se obtienen los  $(m - l^* + 1)$  tramos restantes.

Por otro lado, tomando  $l^* = m$ , se obtiene que  $\mathcal{H}_k$  tiene al menos 3 tramos. Para lo que queda por demostrar se procede por inducción. Para  $k = 1$ , se sabe que  $\mathcal{H}_1$  tiene  $2 \cdot 1 + 1$  tramos. Supongamos que es cierto para  $k - 1$ . Como  $\mathcal{H}_k$  esta definida en  $2 + (m - l^* + 1)$  tramos, entonces la mayor cantidad de tramos para  $\mathcal{H}_k$  se tiene para  $m = 2(k - 1) + 1$  y  $l^* = 1$ . En este caso habrían  $2 + (2(k - 1) + 1 - 1 + 1) = 2k + 1$  tramos.  $\square$

Con esto es posible construir una matriz que representa a  $\mathcal{H}_k$ . Esto se hace de la siguiente forma

1. Cada función  $\mathcal{H}_k(S)$  estará representada por una matriz:  $M^k \in M_{m \times 8}(\mathbb{R})^1$  con  $m \in \{3, \dots, 2k+1\}$ . Esto pues, gracias al Corolario 5.20 se sabe que  $\mathcal{H}_k$  puede tener a lo menos 3 y a los más  $2k+1$  tramos de definición.
2. Cada fila de  $M^k$  tendrá información sobre cómo está definida  $\mathcal{H}_k(S)$  en un determinado tramo. Este tramo, en la fila  $i$  de  $M^k$ , está dado por  $I_i^k = (M_{i,7}^k, M_{i,8}^k)$ .
3. Para cada función  $\mathcal{H}_k(S)$  es posible distinguir seis tipos de constantes. Las relacionadas con los valores  $R_k$  (columna 1), con  $C_k$  (columna 2),  $\mathcal{B}_k$  (columna 3),  $\mathcal{D}_k$  (columna 4),  $M/r$  (columna 5) y  $C_C$  (columna 6).

Para entender con mayor claridad esta representación se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.21.** Si se tiene que  $\mathcal{H}_2(S)$  está dada por

$$\mathcal{H}_2(S) = \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \mathcal{S}_2^a \\ \mathcal{B}_2 S^{\lambda_1} + \mathcal{D}_2 S^{\lambda_2} - \frac{M}{r} & \text{si } \mathcal{S}_2^a < S < \mathcal{S}_2^b \\ (R_2 S - (C_2 - \gamma_2) - \alpha_2 C_C) & \text{si } \mathcal{S}_2^b \leq S \leq \mathcal{S}_1^a / \eta_2 \\ (R_2 S - (C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 (\mathcal{B}_1 (\eta_2 S)^{\lambda_1} + \mathcal{D}_1 (\eta_2 S)^{\lambda_2} - \frac{M}{r})) & \text{si } \mathcal{S}_1^a / \eta_2 < S < \mathcal{S}_1^b / \eta_2 \\ (R_2 S - (C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 (R_1 \eta_2 S - (C_1 - \gamma_1))) & \text{si } \mathcal{S}_1^b / \eta_2 \leq S. \end{cases}$$

Entonces  $M^2 \in M_{5 \times 8}(\mathbb{R})$  y está dada por

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_C & -\infty & \mathcal{S}_2^a \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{D}_2 & M/r & 0 & \mathcal{S}_2^a & \mathcal{S}_2^b \\ R_2 & (C_2 - \gamma_2) & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 C_C & \mathcal{S}_2^b & \mathcal{S}_1^a / \eta_2 \\ R_2 & (C_2 - \gamma_2) & \alpha_2 \eta_1^{\lambda_1} \mathcal{B}_1 & \alpha_2 \eta_1^{\lambda_2} \mathcal{D}_1 & \alpha_2 M/r & 0 & \mathcal{S}_1^a / \eta_2 & \mathcal{S}_1^b / \eta_2 \\ (R_2 + \alpha_2 \eta_2 R_1) & ((C_2 - \gamma_2) + \alpha_2 (C_1 - \gamma_1)) & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{S}_1^b / \eta_2 & \infty \end{pmatrix}$$

De esta forma,

$$\mathcal{H}_2(S) = \sum_{i=1}^5 [(M_{i,1}^2 S - M_{i,2}^2) + (M_{i,3}^2 S^{\lambda_1} + M_{i,4}^2 S^{\lambda_2} - M_{i,5}^2) - M_{i,6}^2] \cdot \mathbf{1}_{(M_{i,7}^2, M_{i,8}^2)}.$$

Así, la representación en matriz es equivalente a la representación por partes de la función.

A continuación se presenta un algoritmo que permite calcular  $\mathcal{H}_k(S)$ . Este algoritmo tendrá como input los valores  $\{(R_j), (C_j), (\alpha_j, \eta_j, \gamma_j)\}_{j=1}^k, M/r$  y  $C_C$ . El output del algoritmo será una serie de matrices  $\{M^j\}_{j=1}^k$  que representarán a las funciones  $\{\mathcal{H}_j(S)\}_{j=1}^k$ , y además entregará los valores  $\{(B_j, D_j, \mathcal{S}_j^a, \mathcal{S}_j^b)\}_{j=1}^k$ . Durante el algoritmo será necesario considerar el siguiente sistema no-lineal, el cual es el análogo al Sistema 5.11 pero en representación matricial, para un  $k \geq 1$  arbitrario.

<sup>1</sup> $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  representa a las matrices con coeficientes reales de  $m$  filas y  $n$  columnas.

**Sistema 5.22.**

$$\begin{aligned}
M_{2,3}^k \cdot (M_{1,8}^k)^{\lambda_1} + M_{2,4}^k \cdot (M_{1,8}^k)^{\lambda_2} - M_{2,5}^k &= -M_{1,6}^k, \\
M_{2,3}^k \cdot \lambda_1 \cdot (M_{1,8}^k)^{\lambda_1-1} + M_{2,4}^k \cdot \lambda_2 \cdot (M_{1,8}^k)^{\lambda_2-1} &= 0, \\
M_{2,3}^k \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_1} + M_{2,4}^k \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_2} - M_{2,5}^k &= (M_{3,1}^k \cdot M_{2,8}^k - M_{3,2}^k) \\
&+ (M_{3,3}^k \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_1} + M_{3,4}^k \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_2} \\
&- M_{3,5}^k) - M_{3,6}^k, \\
M_{2,3}^k \cdot \lambda_1 \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_1-1} + M_{2,4}^k \cdot \lambda_2 \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_2-1} &= M_{3,1}^k \\
&+ (M_{3,3}^k \cdot \lambda_1 \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_1-1} + M_{3,4}^k \cdot \lambda_2 \cdot (M_{2,8}^k)^{\lambda_2-1}).
\end{aligned}$$

Este sistema permite imponer las condiciones de smooth pasting y value matching, donde las incógnitas son las entradas  $M_{1,8}^k$ ,  $M_{2,8}^k$  y  $M_{2,3}^k$ ,  $M_{2,4}^k$  de la matriz  $M^k$ . Se debe notar que sólo se ha utilizado las primeras tres filas de la matriz  $M^k$ , esto pues para calcular las incógnitas basta considerar los primeros tres tramos de la definición de  $\mathcal{H}^k$ . Considerando lo anterior, el algoritmo está dado por Algoritmo 1.

Algunas observaciones al procedimiento recién propuesto:

1. El algoritmo termina con la secuencia de matrices  $\{M^j\}_{j=1}^k$ , donde cada una de estas matrices representa a  $\mathcal{H}_k(S)$ , respectivamente. Además, los valores  $(S_k^a, S_k^b)$  están dados por  $(M_{1,8}^k, M_{2,8}^k)$ .
2. En el paso (12) del algoritmo, al resolver el Sistema 5.22 con la matriz  $A^l$  puede ocurrir que no haya solución, en este caso se debe continuar con el siguiente valor de  $l$ . Para asegurar que haya solución, se puede hacer una verificación previa utilizando la condición (5.28) del Corolario 5.14 según corresponda. El valor de  $l$  permite determinar en que caso se está (tramo) y, por lo tanto, a su vez permite saber si se debe aplicar *i*) o *ii*) del Teorema 5.17.
3. Para resolver el Sistema 5.22, éste es planteado en la forma  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{0}$ . Para esto se utiliza el software [13], el cual tiene implementado algoritmos que resuelven este tipo de sistemas de ecuaciones no lineales mediante la minimización de la suma de los cuadrados de sus componentes<sup>3</sup>.
4. Si para un determinado  $j$  en el algoritmo no se encuentra  $l^*$  entonces se debe detener el algoritmo y evaluar los parámetros utilizados en el modelo.

El Algoritmo 1 permite el siguiente análisis.

**Corolario 5.23.** *Considere un proyecto con  $k$  bloques. Entonces, en el peor caso, el algoritmo realiza  $(3k - 2)$  iteraciones y se resuelve esta misma cantidad de sistemas del tipo 5.22 .*

<sup>2</sup>La función  $Zeros(n, m)$  crea una matriz de ceros de  $n$  filas y  $m$  columnas.

<sup>3</sup>Una descripción detallada de estos algoritmos puede ser encontrada en Web: <http://www.mathworks.com/help/optim/ug/equation-solving-algorithms.html>. Fecha de visita: 2014-10-03.

**Algoritmo 1** Mecanismo para calculo de  $\mathcal{H}_k$ **Entrada:**

$$\{(R_j), (C_j), (\alpha_j, \eta_j, \gamma_j)\}_{j=1}^k, M/r, C_C$$

- 1: Construir  $M^1$  y resolver el Sistema 5.22 para  $j = 1$ .
- 2: Poner  $j = 2$ .
- 3: Calcular  $m =$  número de filas de  $M^{j-1}$ .
- 4: **for**  $l = 1 \dots m$  **do**
- 5:     Se crea la matriz  $A^l = \text{Zeros}(2 + (m - l + 1), 8)^2$ .
- 6:     Se pone

$$A_{1,\cdot}^l = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ C_C \ -\infty \ \mathcal{S}_j^a)$$

$$A_{2,\cdot}^l = (0 \ 0 \ B_j \ D_j \ M/r \ 0 \ \mathcal{S}_j^a \ \mathcal{S}_j^b)$$

- 7:
- 8:     **for**  $i = 1 \dots (m - l + 1)$  **do**
- 9:         Se pone

$$A_{(2+i),1}^l = R_j + \alpha_j \cdot \eta_j \cdot M_{(l-1+i),1}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),2}^l = C_j + \alpha_j \cdot M_{(l-1+i),2}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),3}^l = \alpha_j \cdot \eta_j^{\lambda_1} \cdot M_{(l-1+i),3}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),4}^l = \alpha_j \cdot \eta_j^{\lambda_2} \cdot M_{(l-1+i),4}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),5}^l = \alpha_j \cdot M_{(l-1+i),5}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),6}^l = \alpha_j \cdot M_{(l-1+i),6}^{j-1}$$

$$A_{(2+i),8}^l = M_{(l-1+i),8}^{j-1} / \eta_j$$

- 10:         Además, si  $i = 1$  entonces  $A_{(2+i),7}^l = \mathcal{S}_j^b$ , si no  $A_{(2+i),7}^l = M_{(l-1+i),7}^{j-1} / \eta_j$ .
  - 11:     **end for**
  - 12:     Se resuelve el Sistema 5.22 pero con la matriz  $A^l$ .
  - 13:     Se verifica que  $\eta_j \mathcal{S}_j^b \in (M_{l,7}^{j-1}, M_{l,8}^{j-1})$  y las condiciones del Teorema 5.17. Si éstas se satisfacen entonces se detienen las iteraciones sobre  $l$  y se define  $l^* = l$ .
  - 14: **end for**
  - 15: Se pone  $M^j = A^{l^*}$ . Si  $j = k$  Stop, si no  $j = j + 1$  e ir a paso (3).
- Salida:**  $\{M^j\}_{j=1}^k$ .

*Demostración.* Primero note que cuando  $k = 1$ , sólo es necesario resolver un sistema y por lo tanto se realiza una sola iteración. En lo que sigue se considera  $k \geq 2$ , y se define  $\nu_i$  con  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  como el número de iteraciones que realiza el algoritmo para calcular  $M^i$  (sin contar las iteraciones anteriores). Es evidente que dependiendo de los parámetros los  $\nu_i$  pueden tomar distintos valores. Por ejemplo,  $\nu_2$  puede ser igual a 3, 4 o 5, dependiendo de qué tramo de  $\mathcal{H}_1$  contiene a  $\eta_2 S_2^b$ . De todas formas, para la presente demostración no importarán los valores exactos que tomen los  $\nu_i$ . Sea además,  $m^i$  el número de filas que tiene la matriz  $M^i$  para  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , donde estas matrices son calculadas a través de la serie de iteraciones  $\nu_1, \dots, \nu_{k-1}$ .

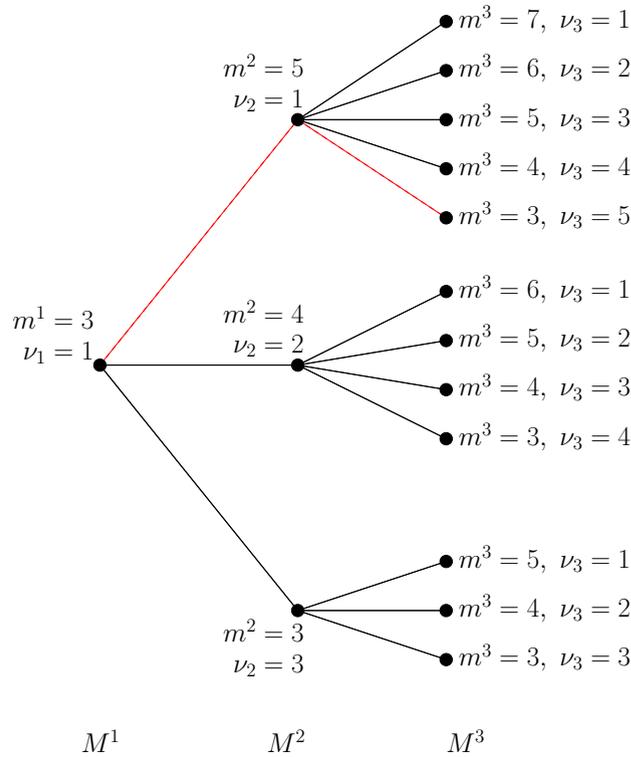


Figura 5.2: Posible número de filas y de iteraciones para el cálculo de  $M^3$ .

Para esta secuencia de  $\nu_i$ 's, cuando se ha calculado  $M^{k-1}$  se han realizado un total de  $\sum_{i=1}^{k-1} \nu_i$  iteraciones. Ahora, para calcular  $M^k$  se pueden realizar de 1 a  $m^{k-1}$  iteraciones. Luego el número de iteraciones en el peor caso está dado por  $\sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + m^{k-1}$ . Por ejemplo, en la Figura 5.2, en línea punteada, se puede observar que para calcular  $M^3$  se han realizado  $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$  iteraciones, luego, existe la posibilidad de que  $\nu_3$  tome valores entre 1 y 5, por lo que el peor caso sería que  $\nu_3 = 5$ . De esta forma lo que se quiere demostrar se reduce a probar la siguiente relación

$$\sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + m^{k-1} = 3k - 2, \quad \forall k \geq 2. \quad (5.41)$$

Antes de continuar con la demostración, note que a partir del Corolario 5.20 se tiene que

$$m^{k-1} = 2 + (m^{k-2} - \nu_{k-1} + 1), \quad (5.42)$$

ahora se procede a probar por inducción (5.41). Para  $k = 2$ , el resultado se deduce del hecho de que  $\nu_1 = 1$  y  $m^1 = 3$ , es decir, para calcular  $\mathcal{H}_1$  sólo es necesario resolver un sistema y la matriz  $M^1$  tiene 3 filas. Si se supone que es cierto para  $k - 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{k-1} \nu_i + m^{k-1} &= \sum_{i=1}^{k-2} \nu_i + \nu_{k-1} + m^{k-1} \\
 &\stackrel{H.I}{=} (3(k-1) - 2 - m^{k-2}) + \nu_{k-1} + m^{k-1} \\
 &= 3k - 2 + (m^{k-1} - (2 + (m^{k-2} - \nu_{k-1} + 1))) \\
 &\stackrel{(5.42)}{=} 3k - 2.
 \end{aligned}$$

Como se han escogido  $\nu_i$  arbitrarios, se concluye el resultado.  $\square$

Finalmente, se ha logrado crear un procedimiento que permite calcular  $\mathcal{H}_k$  de manera eficiente. Se debe recordar que  $\mathcal{H}_k$  representa una aproximación al problema original. En el siguiente capítulo se pondrá en funcionamiento todo lo desarrollado en este apartado. La idea es estudiar la calidad de las aproximaciones para instancias reales.

# Capítulo 6

## Resultados Experimentales

En el presente capítulo se pone en práctica el desarrollo teórico hecho en el Capítulo 5 y se analiza el desempeño de las cotas desarrolladas en las Definiciones 5.5 y 5.7. A partir de estas cotas, surge la idea de utilizar aproximaciones asintóticas, según la Proposición 5.3, cuya calidad al aproximar la solución real será comparada con la calidad de las mismas cotas. Luego, se procede a describir una instancia con características similares a una real, específicamente el sector *El Diablo* de *El teniente*, y se compara el rendimiento de las aproximaciones propuestas.

### 6.1. Aproximaciones Asintóticas

En la Sección 5.3, se estudió una familia genérica de aproximaciones para el problema (5.2) y se probó que bajo ciertas condiciones en los parámetros éstas son soluciones para problemas de Parada Óptima como el presentado en la Definición 5.9. Según lo explicado al comienzo de la Sección 5.3 estas aproximaciones generalizan las cotas superior e inferior del problema (5.2). Para poder medir la calidad de éstas aproximaciones, y a su vez de las cotas superior e inferior, es necesario poder compararlas con el valor real del problema (5.2), o equivalentemente  $H_k(S)$ . Para hacer esto se utilizarán (5.11) y el Sistema 5.1, estos tienen un término con esperanza condicional que dificulta hacer un análisis (es por esto que se decidió utilizar las  $(\alpha, \eta, \gamma)$ - aproximaciones). Para sortear esta dificultad, se calculan de manera numérica (simplemente usando la definición de esperanza) los términos

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{k-1}(S_{T_k})|S_0 = S] \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial S} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{k-1}(S_{T_k})|S_0 = S] \Big|_{S=S_k^b}, \quad (6.1)$$

y luego se imponen las condiciones de smooth pasting y value matching para determinar los thresholds y constantes, con lo que se obtiene  $H_k(S)$ ; nótese que esto también puede ser llevado a cabo discretizando el proceso  $S_t$  y luego resolviendo de manera recursiva para cada  $k$ , sin embargo esto requiere de un gran esfuerzo computacional y es por esto mismo que se ha optado por la opción ya mencionada (en la práctica, utilizando cualquiera de los dos métodos se obtienen los mismo resultados).

Utilizando las características para los bloques dadas en la Tabla 6.1 se resuelve para  $H_5(S)$ ,  $H_5^U(S)$  y  $H_5^L(S)$ , la solución gráfica se presenta en la Figura 6.1. De esta figura se puede observar el comportamiento asintótico lineal que presenta tanto  $H_k(S)$  como sus aproximaciones (ver Proposición 5.3). Además, es posible notar que  $H_5^L(S)$  parece ser

Datos por bloque					
Bloque	$R_k$	$C_k$	$T_k$ [años]	$C_C$ [\$]	$M$ [\$/años]
1	0.25	14	1.2	5	3.8
2	0.3	9	1.6		
3	0.4	16	1		
4	0.32	10	2		
5	0.35	12.25	0.7		

Cuadro 6.1

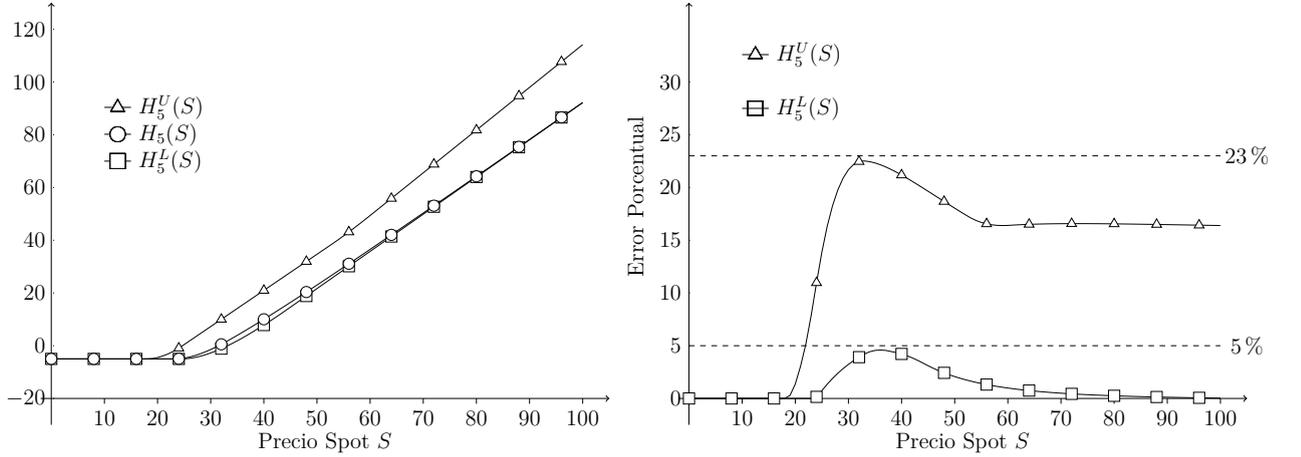


Figura 6.1: *Panel Izquierdo:* Valor de las funciones  $V_5$  (círculo),  $V_5^U$  (triángulo) y  $V_5^L$  (cuadrado) a medida que el precio spot varía. *Panel Derecho:* Error relativo de  $V_5^U$  (triángulo) y  $V_5^L$  (cuadrado) con respecto a  $V_5$ . Las líneas punteadas marcan el máximo error relativo.

una muy buena aproximación de  $H_5(S)$  y que converge a  $H_5(S)$  para  $S$  suficientemente grande. Esto motiva el siguiente resultado.

**Corolario 6.1.** *Considere un proyecto minero con  $k$  bloques y sea  $\mathcal{H}_k(S)$  como en la Definición 5.9. Entonces para  $S$  suficientemente grande  $\mathcal{H}_k(S)$  es una función lineal de  $S$ . De hecho, sea  $\bar{S}_k \triangleq \max_{1 \leq i \leq k} \{\mathcal{S}_i^b / \eta_{i,k}^\times\}$  luego*

$$\mathcal{H}_k(S) = (\theta^\times R)_k^+ S - (\alpha^\times (C - \gamma))_k^+ - C_C, \quad \forall S \geq \bar{S}_k \quad (6.2)$$

Para el caso de la cota superior  $H^U(S)$ ,  $\alpha_k = \eta_k = 1$  y  $\gamma_k = \int_0^{T_k} e^{-rt} M dt$ , con  $\bar{S}_k = \max_{1 \leq i \leq k} \{\mathcal{S}_i^b\}$  se tiene que

$$H_k^U(S) = R_k^+ S - (C - \gamma)_k^+ - C_C, \quad \forall S \geq \bar{S}_k \quad (6.3)$$

Análogamente, para el caso de la cota inferior  $H^L(S)$ ,  $\alpha_k = e^{-rT_k}$ ,  $\eta_k = e^{(r-\rho)T_k}$  y  $\gamma_k = 0$ , con  $\bar{S}_k = \max_{1 \leq i \leq k} \{\mathcal{S}_i^b \cdot e^{-(r-\rho)T_{i,k}^+}\}$  se tiene que

$$H_k^L(S) = \mathcal{R}_k S - \mathcal{C}_k, \quad \forall S \geq \bar{S}_k \quad (6.4)$$

*Demostración.* La demostración se obtiene de manera directa a partir de la Proposición 5.12.  $\square$

Este resultado explica el comportamiento lineal de las funciones presentadas en la Figura 6.1. Además, tomando en cuenta la Proposición 5.12, es posible notar que el comportamiento asintótico pra  $H_k^L$  y  $H_k$  es el mismo, lo cual también es posible observar en la Figura 6.1. A partir de este resultado se desprende la idea de utilizar una nueva clase de aproximaciones. En efecto, si se considera al comportamiento asintótico lineal de las cotas superior e inferior se podría redefinir  $H_k(S)$ , de modo que el término relacionado con la esperanza condicional sea fácil de calcular. Vale decir, en lugar de considerar  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{k-1}(S_{T_k})|S_0 = S]$  en (5.11) se aproximará de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_{k-1}(S_{T_k})|S_0 = S] &\approx \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\theta^\times R)_{k-1}^+ S_{T_k} - (\alpha^\times (C - \gamma))_{k-1}^+ - C_C | S_0 = S] \\ &= (\theta^\times R)_{k-1}^+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{T_k} | S_0 = S] - (\alpha^\times (C - \gamma))_{k-1}^+ - C_C \\ &= (\theta^\times R)_{k-1}^+ e^{(r-\rho)T_k} S - (\alpha^\times (C - \gamma))_{k-1}^+ - C_C. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Al considerar los casos de las cotas superior e inferior, el desarrollo recién hecho motiva a hacer las siguientes definiciones.

**Definición 6.2.** Sea  $k \geq 1$  se define la aproximación asintótica utilizando la cota superior por

$$\widehat{H}_k^U(S) \triangleq \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \widehat{S}_k^{aU} \\ \widehat{B}_k^U S^{\lambda_1} + \widehat{D}_k^U S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \widehat{S}_k^{aU} < S < \widehat{S}_k^{bU} \\ (R_k + e^{-\rho T_k} R_{k-1}^+) S - ((C_k - \gamma_k) + e^{-r T_k} ((C - \gamma)_{k-1}^+ + C_C)) & \text{si } \widehat{S}_k^{bU} \leq S, \end{cases}$$

donde  $\widehat{B}_k^U, \widehat{D}_k^U$  y  $\widehat{S}_k^{aU}, \widehat{S}_k^{bU}$  son constantes determinadas por el siguiente sistema (smooth pasting y value matching).

**Sistema 6.3.**

$$\begin{aligned} \widehat{B}_k^U \widehat{S}_k^{aU \lambda_1} + \widehat{D}_k^U \widehat{S}_k^{bU \lambda_2} - M/r &= -C_C \\ \widehat{B}_k^U \widehat{S}_k^{aU \lambda_1} + \widehat{D}_k^U \widehat{S}_k^{bU \lambda_2} - M/r &= (R_k + e^{-\rho T_k} R_{k-1}^+) \widehat{S}_k^{bU} - ((C_k - \gamma_k) + e^{-r T_k} ((C - \gamma)_{k-1}^+ + C_C)) \\ \lambda_1 \widehat{B}_k^U \widehat{S}_k^{aU \lambda_1 - 1} + \lambda_2 \widehat{D}_k^U \widehat{S}_k^{bU \lambda_2 - 1} &= 0 \\ \lambda_1 \widehat{B}_k^U \widehat{S}_k^{aU \lambda_1 - 1} + \lambda_2 \widehat{D}_k^U \widehat{S}_k^{bU \lambda_2 - 1} &= (R_k + e^{-\rho T_k} R_{k-1}^+). \end{aligned}$$

**Definición 6.4.** Sea  $k \geq 1$  se define la aproximación asintótica utilizando la cota inferior por

$$\widehat{H}_k^L(S) \triangleq \begin{cases} -C_C & \text{si } S \leq \widehat{S}_k^{aL} \\ \widehat{B}_k^L S^{\lambda_1} + \widehat{D}_k^L S^{\lambda_2} - M/r & \text{si } \widehat{S}_k^{aL} < S < \widehat{S}_k^{bL} \\ (R_k + e^{-\rho T_k} \mathcal{R}_{k-1}) S - (C_k + e^{-r T_k} \mathcal{C}_{k-1}) & \text{si } \widehat{S}_k^{bL} \leq S, \end{cases}$$

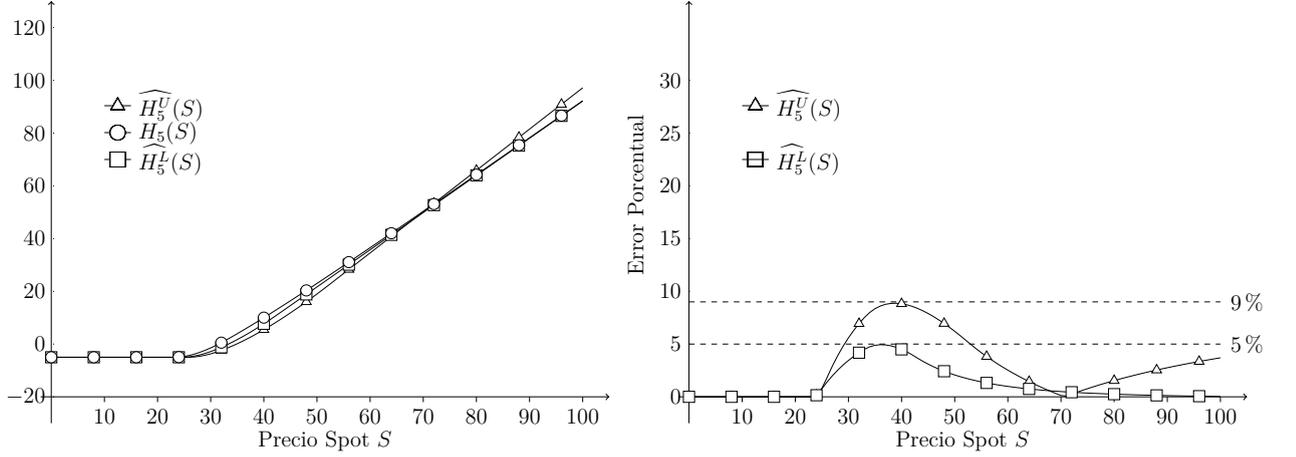


Figura 6.2: *Panel Izquierdo:* Valor de las funciones  $V_5$  (círculo),  $\widehat{V}_5^U$  (triángulo) y  $\widehat{V}_5^L$  (cuadrado) a medida que el precio spot varía. *Panel Derecho:* Error relativo de  $\widehat{V}_5^U$  (triángulo) y  $\widehat{V}_5^L$  (cuadrado) con respecto a  $V_5$ . Las líneas punteadas marcan el máximo error relativo.

donde  $\widehat{B}_k^L, \widehat{D}_k^L$  y  $\widehat{S}_k^{aL}, \widehat{S}_k^{bL}$  son constantes determinadas por el siguiente sistema (smooth pasting y value matching).

#### Sistema 6.5.

$$\begin{aligned} \widehat{B}_k^L \widehat{S}_k^{aL \lambda_1} + \widehat{D}_k^L \widehat{S}_k^{bL \lambda_2} - M/r &= -C_C \\ \widehat{B}_k^L \widehat{S}_k^{aL \lambda_1} + \widehat{D}_k^L \widehat{S}_k^{bL \lambda_2} - M/r &= (R_k + e^{-\rho T_k} \mathcal{R}_{k-1})S - (C_k + e^{-r T_k} \mathcal{C}_{k-1}) \\ \lambda_1 \widehat{B}_k^L \widehat{S}_k^{aL \lambda_1 - 1} + \lambda_2 \widehat{D}_k^L \widehat{S}_k^{bL \lambda_2 - 1} &= 0 \\ \lambda_1 \widehat{B}_k^L \widehat{S}_k^{aL \lambda_1 - 1} + \lambda_2 \widehat{D}_k^L \widehat{S}_k^{bL \lambda_2 - 1} &= (R_k + e^{-\rho T_k} \mathcal{R}_{k-1}). \end{aligned}$$

La Figura 6.2 grafica el valor de la función exacta (en círculo) en función del precio spot, y además las aproximaciones lineales recién presentadas, utilizando los datos de la Tabla 6.1. Es posible notar que la aproximación lineal utilizando la cota inferior (en cuadrado) presenta un comportamiento similar al de la función valor exacta. Por otro lado, la aproximación lineal que utiliza la cota superior (en triángulo) parece mejorar sustancialmente en comparación con  $H_5^U$ .

En lo que sigue, se pretende comparar el desempeño de estas aproximaciones lineales con el valor real de la función y las aproximaciones ya desarrolladas. Es decir, interesa comparar los valores  $\mathcal{H}_k^L, \mathcal{H}_k^U, \widehat{H}_k^L, \widehat{H}_k^U$  y  $H_k$ , todo esto en un contexto práctico. Para realizar estas comparaciones se utilizará la siguiente medida del error.

**Definición 6.6.** Sea  $\mathcal{H}_k(S)$  un aproximación cualquiera de  $H_k(S)$ . Entonces se define

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}_k) \triangleq \frac{100}{S_{\max} - S_{\min}} \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{|\mathcal{H}_k(S) - H_k(S)|}{|H_k(S)|} dS, \quad (6.6)$$

donde  $S_{\min}, S_{\max}$  representan los valores mínimos y máximos del intervalo donde se está estudiando la calidad de la aproximación.

Esta definición es básicamente un error relativo promedio en el intervalo  $[S_{\min}, S_{\max}]$ . Entonces, por ejemplo, si se consideran los valores presentados en las Figuras 6.1 y 6.2 se obtienen los siguientes errores relativos promedio.

Aproximación $\mathcal{H}$	$\mathcal{E}(\mathcal{H})$
$H_5^L$	0.38 %
$H_5^U$	18.66 %
$\widehat{H}_5^L$	0.44 %
$\widehat{H}_5^U$	7.13 %

Cuadro 6.2

Los resultados en la Tabla 6.2 confirman lo discutido anteriormente. Claramente  $H_5^L$  es la mejor aproximación para  $H_5$  en términos del error relativo promedio. Por otro lado,  $\widehat{H}_5^L$  presenta resultados bastante buenos en términos del error relativo promedio. En términos prácticos, se podría preferir utilizar  $\widehat{H}_5^L$  en lugar de  $H_5^L$ , pues  $H_5^L$  requiere la resolución de varios sistemas no lineales (ver Corolario 5.23) mientras que para calcular  $\widehat{H}_5^L$  sólo se necesita resolver un sistema de ecuaciones.

A continuación se procede a hacer variar los parámetros  $\sigma^2$  y  $K$  y analizar el comportamiento de las aproximaciones. Los resultados obtenidos son presentados en las siguientes tablas. En la Tabla 6.3, a la izquierda, se hace variar el valor de  $\sigma^2$  que representa la

$\sigma^2$	$H_5^L$	$H_5^U$	$\widehat{H}_5^L$	$\widehat{H}_5^U$
0.05	0.33	18.01	0.35	6.85
0.10	0.54	17.52	0.54	6.72
0.15	0.71	17.06	0.71	6.53
0.20	0.86	16.70	0.86	6.31
0.25	1.00	16.39	1.00	6.09
0.30	1.13	16.10	1.10	5.88
0.35	1.26	15.82	1.26	5.68
0.40	1.37	15.55	1.37	5.51
0.45	1.47	15.30	1.47	5.45
0.50	1.57	15.07	1.57	5.44

$K$	$H_5^L$	$H_5^U$	$\widehat{H}_5^L$	$\widehat{H}_5^U$
0.5	0.33	28.29	0.33	15.69
1.0	0.28	13.07	0.28	7.32
1.5	0.23	8.31	0.23	4.65
2.0	0.14	3.95	0.14	2.20
2.5	0.14	4.95	0.14	2.77
3.0	0.05	1.59	0.05	0.89
3.5	0.01	0.44	0.01	0.25
4.0	0.09	3.06	0.09	1.71
4.5	0.01	0.66	0.01	0.37
5.0	0.00	0.13	0.00	0.07

Cuadro 6.3: Sensibilidad de la solución. A la izquierda se muestra el error promedio al hacer variar  $\sigma^2$ . A la derecha se muestra el error promedio al hacer variar  $K$ .

volatilidad del precio del cobre  $S_t$ , y se calcula el error relativo promedio  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ . Como es posible observar, al aumentar  $\sigma^2$ , el error asociado a  $H_5^L$  aumenta y lo mismo ocurre con  $\widehat{H}_5^L$ . Por otro lado, el error asociado a  $H_5^U$  y  $\widehat{H}_5^U$  disminuye con el aumento de  $\sigma^2$ . En general, se puede observar que las aproximaciones “inferiores” presentan el mejor comportamiento (comparadas con las “superiores”), incluso al hacer variar la volatilidad del precio del cobre. A la derecha se hace variar la capacidad de producción  $K$  y se calcula el error relativo promedio  $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ . En este caso, para todas las aproximaciones se puede observar que al aumentar  $K$ , el error relativo promedio tiende a cero. Ésto parece indicar

que asintóticamente en  $K$  tanto la cota inferior como la superior convergen al valor real de la función.

En general, en todas las instancias las aproximaciones con el menor error corresponden a las “inferiores”, y ambas se comportan de manera similar. Luego, en la práctica se podría utilizar indistintamente una de éstas para tomar decisiones. Sin embargo, se debería preferir la aproximación lineal pues es más simple de calcular.

## 6.2. Aplicación a una Instancia Real

En la presente sección se aplican los resultados obtenidos a una instancia similar a una real. Como se vió en la sección anterior, las aproximaciones “inferiores” presentan el mejor comportamiento, por lo que en esta sección sólo éstas serán consideradas. En cuanto a la instancia, ésta representa el sector *El Diablo*, perteneciente a la división *El Teniente* de CODELCO.

La división *El Teniente*, ubicada a 80 kilómetros al sur de Santiago y a 2.500 metros sobre el nivel del mar, centra sus operaciones en la explotación de la mina subterránea de cobre más grande del mundo. Esta mina, que comenzó a ser explotada en 1904, posee 2.400 kilómetros de galerías subterráneas. El Teniente produce más de 400.000 toneladas métricas finas anuales de cobre en la forma de lingotes refinados a fuego (RAF), y cátodos de cobre al año<sup>1</sup>.

En el año 2006 el sector *El Diablo* de esta división estaba próximo a comenzar su operación (actualmente esta siendo extraído)<sup>2</sup>. En ese año, debido al diseño de la mina se consideró una secuencia de extracción específica ( $N1$ , ver Tabla 6.4). Dada esta secuencia, en esta sección se dividen los aproximadamente 230 millones de toneladas de mineral de este sector en 10 bloques. Las características de estos bloques y su distribución espacial están dadas en la Tabla 6.4 y la Figura 6.3 respectivamente.

Como fue señalado en la Definición 4.4, el costo marginal de producción  $A^\theta$  ([ US\$/lb ] ) debería depender de cuánto ha sido extraído. Por lo tanto, cada secuencia debería tener un vector distinto de costo marginal de producción. En particular, dada una secuencia  $\pi$ , se considera que este costo aumenta linealmente en la distancia desde el primer bloque de la secuencia al bloque en extracción. Esto es

$$A_j^\pi = 4.857 + 0.0162 \cdot d_{\pi_1\pi_j},$$

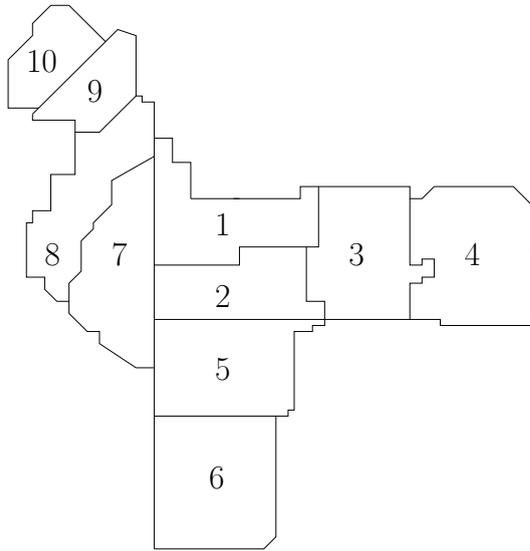
donde  $d_{ij}$  representa la distancia entre los bloques  $i$  y  $j$ , la Tabla 6.5 contiene estas distancias calculadas en metros. Ambos parámetros de esta recta fueron estimados utilizando costos de producción en *El Teniente* del año 2006.

Además para los parámetros restantes se consideran los siguientes valores. En cuanto a la capacidad de producción  $K$ , se considera de 7.3[Millón Ton/año]. El costo de cierre será  $C_C = 0.01$ [Billón US\$]<sup>3</sup>, el costo de mantención en caso de que se decida detener el proyecto será  $M = 0.03$  [Billón US\$/año]. Finalmente, se utiliza  $r = 0.12$ ,  $\rho = 0.063$  y  $\sigma = 0.233$ .

<sup>1</sup>Fecha de visita: 2014-01-15. Web: [http://www.codelco.com/nosotros/prontus\\_codelco/2011-08-02/195321.html](http://www.codelco.com/nosotros/prontus_codelco/2011-08-02/195321.html)

<sup>2</sup> Para este trabajo se utilizarán los datos similares a los que estaban disponibles en 2006.

<sup>3</sup>Aquí Billón corresponde a mil millones o  $10^9$ .

Figura 6.3: Distribución espacial de *El Diablo*.

Bloque	$Q_j$ [Ton]	$L_j$ [%]	$T_j$ [años]
1	21415510	0.827	2.93
2	21268610	0.915	2.91
3	29526438	0.823	4.04
4	28351480	0.881	3.88
5	24854221	0.845	3.40
6	23931346	0.848	3.28
7	21476937	0.768	2.94
8	26110339	0.727	3.58
9	14913691	0.694	2.04
10	13126378	0.776	1.80

Secuencia	Orden
N1	1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
N2	10-9-8-7-1-2-5-3-4-6
N3	4-3-2-1-7-8-9-10-5-6
N4	6-5-2-1-3-4-7-8-9-10
N5	1-2-7-8-9-10-5-6-3-4
N6	1-2-5-3-7-8-6-4-9-10

Cuadro 6.4

Para cada secuencia se calcula tanto el valor esperado de la solución exacta, como el de la aproximación lineal presentada en la sección anterior. Para distintos valores del precio inicial (en [cUS\$/lb]), las Tablas 6.6 y 6.7 resumen los resultados. En términos generales se puede observar que a medida que el precio inicial  $S$  aumenta, el error relativo disminuye. Lo anterior está relacionado con el hecho de que a medida que  $S$  aumenta  $H_k(S)$  converge a una función lineal, la cual es similar a la parte lineal de  $\widehat{H}_k^L$ . Como última observación, los resultados muestran que  $N5$  es la secuencia óptima, esto último difiere con lo planteado por los expertos mineros en el diseño original del sector *El Diablo*.

$d_{ij}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	90	190	321	191	314	159	189	275	367
2	90	0	102	234	174	295	157	240	350	438
3	190	102	0	133	233	336	182	299	424	507
4	321	234	133	0	343	425	272	399	532	607
5	191	174	233	343	0	124	327	380	454	547
6	314	295	336	425	124	0	450	503	569	661
7	159	157	182	272	327	450	0	128	263	335
8	189	240	299	399	380	503	128	0	136	209
9	275	350	424	532	454	569	263	136	0	93
10	367	438	507	607	547	661	335	209	93	0

Cuadro 6.5: Distancia en metros entre los bloques en *El Diablo*

Precio S	N1			N2			N3		
	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)
50	-0.002	-0.003	89.0	-0.002	-0.003	95.7	-0.007	-0.008	20.5
100	0.329	0.317	3.6	0.329	0.317	3.7	0.289	0.274	5.2
150	0.852	0.828	2.8	0.853	0.829	2.8	0.774	0.745	3.8
200	1.504	1.466	2.5	1.506	1.467	2.6	1.380	1.332	3.4
250	2.269	2.214	2.4	2.271	2.215	2.5	2.090	2.021	3.3
300	3.136	3.062	2.3	3.139	3.064	2.4	2.895	2.803	3.2
350	4.098	4.004	2.3	4.103	4.006	2.4	3.789	3.671	3.1
400	5.150	5.033	2.3	5.156	5.036	2.3	4.766	4.620	3.1
450	6.288	6.146	2.3	6.295	6.149	2.3	5.823	5.646	3.1
500	7.508	7.339	2.2	7.516	7.343	2.3	6.956	6.745	3.0
550	8.806	8.609	2.2	8.815	8.614	2.3	8.162	7.916	3.0
600	10.179	9.953	2.2	10.190	9.958	2.3	9.438	9.154	3.0

Cuadro 6.6: Valor de la función (en [Billón US\$]) para las secuencias  $N1, N2$  y  $N3$ . La columna  $H_{10}$  representa el valor exacto de la función, la columna  $\widehat{H}_{10}^L$  representa el valor aproximado de la función y la columna Err(%) es el error relativo entre estas dos funciones.

Precio S	N4			N5			N6		
	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)	$H_{10}$	$\widehat{H}_{10}^L$	Err(%)
50	-0.010	-0.010	0.0	0.012	0.007	37.5	0.000	-0.001	413.3
100	0.221	0.214	3.1	0.407	0.384	5.6	0.344	0.331	3.8
150	0.637	0.623	2.2	1.006	0.961	4.4	0.883	0.857	2.9
200	1.160	1.137	1.9	1.750	1.678	4.1	1.553	1.512	2.7
250	1.773	1.741	1.8	2.622	2.519	3.9	2.339	2.280	2.5
300	2.469	2.426	1.8	3.611	3.473	3.8	3.231	3.151	2.5
350	3.241	3.186	1.7	4.708	4.531	3.8	4.220	4.117	2.4
400	4.086	4.017	1.7	5.908	5.688	3.7	5.302	5.174	2.4
450	5.000	4.916	1.7	7.206	6.939	3.7	6.471	6.317	2.4
500	5.979	5.880	1.7	8.597	8.280	3.7	7.725	7.542	2.4
550	7.021	6.906	1.6	10.077	9.707	3.7	9.059	8.846	2.4
600	8.124	7.991	1.6	11.643	11.217	3.7	10.472	10.226	2.4

Cuadro 6.7: Valor de la función (en [Billón US\$]) para las secuencias  $N4, N5$  y  $N6$ . La columna  $H_{10}$  representa el valor exacto de la función, la columna  $\widehat{H}_{10}^L$  representa el valor aproximado de la función y la columna Err(%) es el error relativo entre estas dos funciones.

# Capítulo 7

## Conclusión

Se formuló un modelo matemático de planificación minera de largo plazo, el cual considera la aleatoriedad del precio del cobre. En principio, el modelo planteado tiene como variables de decisión: la secuencia de extracción, la capacidad de producción y el timing (cuando se debe extraer un determinado bloque). Desde un punto de vista de Control Óptimo Estocástico y Programación Dinámica Estocástica, este modelo presenta una alta complejidad pues combina elementos discretos (secuencia de extracción) y continuos (capacidad de producción y timing). Dada la alta dificultad que presenta el modelo, se decidió simplificarlo, considerando que la secuencia de extracción y capacidad de producción están fijos. De esta forma, sólo se debe decidir el timing de extracción.

El problema resultante es planteado como uno de Programación Dinámica Estocástica. En que las tres variables de estado originales propuestas en la Sección 4.3, se reducen sólo al precio del cobre. Luego, dado un determinado precio del mineral interesa calcular  $H_k(S)$ , que representa el valor descontado del proyecto minero. Utilizando argumentos encontrados en la literatura es posible establecer que  $H_k(S)$  debiese satisfacer el set de ecuaciones (5.4)-(5.8). Sin embargo, no se ha podido dar una demostración rigurosa de este hecho. De modo que se recurre a dos aproximaciones, una que acota inferiormente y otra superiormente al problema original. Estas aproximaciones, luego son generalizadas a una familia más grande de aproximaciones:  $(\alpha, \eta, \gamma)$ -**Aproximaciones**. Para esta familia, fue posible encontrar condiciones sobre los parámetros que permiten demostrar rigurosamente que tienen solución y, que esta solución corresponde a una serie de tiempos de parada del tipo threshold (ver Teorema 5.17).

Un aspecto interesante del tipo de solución obtenida, es que permite una sencilla implementación algorítmica. En efecto, en la Sección 5.4 se presenta un algoritmo que en una cantidad reducida de iteraciones permite calcular tanto los thresholds como los parámetros correspondientes a las aproximaciones.

A partir del Corolario 6.1, se concluyó que la familia de aproximaciones propuesta tiene un comportamiento asintótico lineal. Según la Proposición 5.3, este último hecho es una característica heredada del problema original. Es esta característica la que motiva a proponer dos nuevas aproximaciones:  $\widehat{H}_k^L(S)$  y  $\widehat{H}_k^U(S)$ . En las instancias examinadas en la Sección 6.1, es posible observar que ambas aproximaciones,  $\widehat{H}_k^L(S)$  y  $H_k^L(S)$ , tienen los mismo, bajos, errores respecto al valor real de la función valor,  $H_k(S)$ . Dada la facilidad que involucra el cálculo de  $\widehat{H}_k^L(S)$  (sólo se debe resolver un sistema no lineal) y su buena

calidad al aproximar  $H_k(S)$ , se sugiere la utilización de ésta para determinar el valor del proyecto minero.

En la Sección 6.2, se aplica a una instancia real los resultados obtenidos. Y se comprueba empíricamente la calidad de  $\widehat{H}_k^L(S)$  como aproximación para el valor del proyecto minero. De hecho, para rangos actuales de precio del metal, entre 300-400 [cUS\$/lb], el error relativo de la aproximación lineal fluctúa entre 1% y 4%.

Como se ha comentado, durante este trabajo sólo se ha abordado una arista de la problemática. En primer lugar, está pendiente la incorporación de la flexibilidad de la secuencia de extracción. Si bien en la práctica los expertos mineros suelen evaluar determinadas secuencias de extracción, como fue hecho en la Sección 6.2, resulta interesante poder considerar la opción de ir ajustando dinámicamente la secuencia de extracción de los bloques a medida que se va adquiriendo información acerca del precio del cobre. La gran complicación de este problema es combinatorial. En efecto, para un determinado estado  $(S, K, \mathfrak{N})$  (ver formulación en la Sección 4.3), donde  $|\mathfrak{N}| = n$ , sería necesario calcular la ganancia óptima esperada,  $V(S, K, \mathfrak{N})$ . Pero esto habría que hacerlo para todos los subconjuntos de tamaño  $n$  de  $\mathcal{N}$ . Por lo tanto, si  $|\mathcal{N}| = m$  habría que resolver  $V(S, K, \mathfrak{N})$ ,  $m!/(m-n)!n!$  veces. Lo cual, claramente, puede requerir considerable esfuerzo computacional.

En cuanto a la expansión de capacidad de producción, también está pendiente su estudio. Para abordar este problema, considerando la secuencia de extracción fija, se podría proceder de manera similar a como se hizo para  $H_k(S)$ . Para esto, se podrían considerar nuevamente las aproximaciones y calcular los valores de los thresholds y constantes, pero esta vez en función de la capacidad de producción,  $K$ . Además, se podría utilizar nuevamente una aproximación lineal (considerando valores de  $S$  grandes). De todas formas, por razones de tiempo, el desarrollo de éste debe ser postergado para una siguiente etapa de investigación.

Por otro lado, también sería interesante explorar la posibilidad de considerar múltiples puntos de extracción. Ésto es, que más de un bloque pueda ser extraído simultáneamente. Este nuevo setup plantea una nueva problemática, la cual tiene que ver con la coordinación durante la extracción. En efecto, si se consideran dos bloques,  $k$  y  $j$ , para que estos puedan ser extraídos en forma simultánea deberían respetar restricciones de seguridad como, por ejemplo, no ser bloques adyacentes. Por otro lado, dependiendo de la distribución espacial de los bloques podría ocurrir que a partir de cierto instante sólo sea posible tener un punto de extracción. Por lo menos, estos dos puntos deberían ser tomados en cuenta si se desea seguir esta línea de investigación.

Finalmente, es importante hacer notar que si bien las técnicas desarrolladas en esta memoria fueron aplicadas en un contexto minero, también es posible aplicarlas en otros que posean características similares. En particular, se podría aplicar en problemas del tipo de recursos naturales, como son la extracción de petróleo o gas natural.

# Bibliografía

- [1] Jorge Alarcón. *Evaluación de la Resolución en Paralelo de un Problema Estocástico de Planificación Minera de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2012. Memoria para optar al título de ingeniero civil industrial.
- [2] Søren Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Springer, New York, second edition, 2003.
- [3] Michel J Brennan and Eduardo S Schwartz. Evaluating Natural Resources Investments. *Journal of Business*, 58:135–157, 1985.
- [4] Rodrigo Caro. *Optimización de la Planificación Integrada Minero-Metalúrgica de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2006. Memoria para optar al título de ingeniero civil industrial e ingeniero civil químico.
- [5] P. Collin-Dufresne Casassus, J. Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates. *The Journal of Finance*, LX(5):2283–2331, 2005.
- [6] Comisión Chilena del cobre. *Anuario de Estadísticas del Cobre y Otros Minerales 1993-2012*. Santiago, Chile, 2012.
- [7] R. Pindyck Dixit, A. *Investment Under Uncertainties*. Princeton University Press, NJ, 1994.
- [8] Myron Scholes Fisher Black. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–659, 1973.
- [9] E. Schwartz Gibson, R. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, 45:959–976, 1990.
- [10] Marcel Goic. *Formulación e Implementación de un Modelo de Programación Matemática para la Planificación de Largo Plazo en Minería a Cielo Abierto*. Santiago, Chile, 2003. Tesis para optar al título de magíster en gestión de operaciones.
- [11] Mario Guajardo. *Programación Dinámica Estocástica en un Problema de Planificación Minera*. Santiago, Chile, 2007. Tesis para optar al título de magíster en gestión de operaciones.
- [12] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [13] MATLAB. *version 8.1.0.604 (R2013a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2013.

- 
- [14] R C Merton. The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–183, 1973.
- [15] Pablo Santibañez. *Metodología para la Evaluación y Optimización de Planes Mineros de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2000. Trabajo de memoria de título.
- [16] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, sixth edition, 2007.
- [17] Gapeev Pavel V and Hans Rudolf Lerche. Discounted optimal stopping for diffusions-free-boundary versus martingale approach. *CDAM research report*, pages 1–18, 2009.
- [18] Goran Peskir. *Optimal Stopping and Free Boundary Problems*. Birkhauser Verlag, Boston, 2006.
- [19] Huyên Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer Verlag, Berlin, 2009.
- [20] P. Ekkehard Kopp Robert J. Elliott. *Mathematics of Financial Markets*. Springer, New York, second edition, 2005.
- [21] Paul A Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 6, 2001.
- [22] Denis Sauré. *Enfoque de Opciones Reales Para la Optimización de los Planes Mineros de Largo Plazo*. Santiago, Chile, 2003. Tesis para optar al título de magíster en gestión de operaciones.
- [23] Eduardo S Schwartz. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. *Journal of Business*, 52:923–973, 1997.
- [24] J. Smith Schwartz, E. Short term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46:893–911, 2000.
- [25] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Verlag, NewYork, 2004.
- [26] K.F. McCardle Smith, J.E. Options in the real world: Lessons learned in evaluating oil and gas investments. *Management Science*, 47:1–15, 1999.
- [27] Carlos Villa. *Resolución de un Problema Estocástico de Planificación Minera de Largo Plazo Para el Proyecto Quetena de CODELCO*. Santiago, Chile, 2012. Tesis para optar al título de magíster en gestión de operaciones.