



**UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE MINAS**

**KRIGING Y SIMULACIÓN SECUENCIAL DE INDICADORES CON PROPORCIONES  
LOCALMENTE VARIABLES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL DE MINAS**

**TAMARA FREZ RÍOS**

**PROFESOR GUÍA:  
XAVIER EMERY**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN  
MANUEL REYES JARA  
ALEJANDRO CÁCERES SAAVEDRA**

**SANTIAGO DE CHILE  
2014**

## RESUMEN

En la actualidad, los modelos geológicos son generalmente construidos de modo determinístico, imposibilitando la cuantificación de la incertidumbre asociada. Si bien en la minería se le da mayor enfoque a variables continuas como las leyes minerales, un estudio previo de variables categóricas provee subdivisiones con mayor homogeneidad geológica y estadística. Además se es capaz de agregar información importante sobre procesos mineros posteriores.

El kriging de indicadores con proporciones localmente variables posee una limitante teórica que se pretende mejorar con este estudio. Este método utiliza sólo un variograma global para cada indicador. Dada la influencia que se tiene de las medias de los indicadores sobre su varianza, la meseta del variograma varía con esta media, lo que no se está considerando. Se propone un método que sí considere estas variaciones, utilizando una variable indicador transformada, más específicamente, a la variable indicador se le resta su media variable para centrar en cero, y además se estandariza para eliminar el efecto del cambio de varianza.

El análisis se lleva a cabo a través de dos casos de estudio. El primer estudio consta de la estimación por kriging de indicadores tradicional y con la mejora propuesta, sobre una base de datos sintética con un indicador. A este caso también se le realiza un análisis de sensibilidad para revisar los resultados. El segundo caso de estudio consta de la simulación secuencial de indicadores sobre una base de datos real de una veta, contando con información de un muestreo por canales. Se comparan ambas metodologías y se validan los modelos a través de jack-knife.

De las estimaciones resultantes del primer caso, se hace un estudio de los errores promedio y varianza del kriging promedio. Los resultados para ambas metodologías son similares, a excepción de la varianza del kriging, la cual para el método propuesto presenta menores valores y una alta influencia de la media del indicador. Este resultado se mantiene a pesar de disminuir los datos muestreados y cambiar el variograma de los datos sintéticos.

Las simulaciones del caso de estudio real, en ambas metodologías, resultaron similares. De acuerdo a un análisis de errores cuadráticos, se simularon más bloques con menor error para la metodología propuesta que en la tradicional. Mediante un jack-knife se validan los modelos y se comparan sus porcentajes de aciertos. Ambas metodologías poseen porcentajes de aciertos iguales, incluso con distintos modelos variográficos.

En conclusión, si bien el método propuesto muestra mejoras respecto al método tradicional, estas no son lo suficientemente significativas como para declararlo mejor método. Ambas metodologías presentan resultados de alto porcentaje de acierto, pero entre sí son muy similares. A pesar de esto, el nuevo método presenta las ventajas de tener mayor respaldo teórico, menores tiempos de simulación y una mejor cuantificación de los errores de estimación a través de la varianza del kriging.

## ABSTRACT

Geological models are often constructed deterministically, preventing the quantification of the associated uncertainty. In mining, the principal focus is given to continuous variables, as mineral grades, but it is also important to notice that a previous study of the categorical variables provides geological and statistical homogeneity. Furthermore, this adds important information about subsequent mining process.

Indicator kriging with varying local mean has a theoretical limiting which is intended to improve with this study. This method uses only one global variogram for the indicators. Given the influence the indicator mean has over its variance, the variogram sill varies with the mean, which is not being considered. A new method that considers the variations is proposed. This method modifies the indicator by subtracting the varying mean and standardizing the variable.

Two case studies are analyzed. The first one consists on estimating a synthetic database with one indicator by traditional indicator kriging and by the proposed method. A sensitivity analysis is also executed. The second case study consists on simulating a real database with information of a vein, by sequential indicator simulation. The models are validated through jack-knife.

The resulting estimates of the first case study are analyzed through mean error and mean kriging variance. The results for both methods are very similar, excepting the mean kriging variance, which is lower for the proposed method, and also shows an important influence of the indicator mean. These results maintain despite lowering the sampled data and changing the synthetic database variogram.

Simulations of the real case study are similar for both methodologies. According to a mean squared error analysis more blocks are simulated with minor squared error using the proposed method than with the traditional method. The jack-knife is used to validate the models. The success percentages are compared for both methodologies. These are very similar, even with different variographic models.

Although the proposed method shows improvements compared to the traditional method, these are not significant enough to state it as a better methodology. Both methods present high success percentage, but are very similar to each other. Despite this, the proposed method has the advantage of greater theoretical support, shorter simulation time, and a better quantification of estimation error through kriging variance.

A mi familia y Cristian

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo, ánimo, enseñanzas y amor entregados en estos 24 años. Gracias por dejarme ser, por no cuestionarme mis locuras y por siempre estar ahí. A mis tatas por siempre inculcarme el estudiar y el esforzarme por ser profesional, a mi mamá por facilitarme la vida para enfocarme en los estudios, por tu alegría y cariño, a mi hermana por motivarme a sacar la carrera, y a mi angelito Manuel que espero nos siga cuidando siempre.

También a mi pololo Cristian, gracias por tratar de ayudarme incluso cuando me negaba a pedirte ayuda. Por la paciencia y amor en estos 5 años, y esperemos que por muchos más. Te amo mucho amor.

No sé si alguna vez lo lea, pero también quiero agradecer a don Ricardo Sánchez. Mi abuelito postizo, quien inspiró mi amor por las matemáticas y me apoyó quizás sin darse cuenta enormemente cuando lo necesitaba. Sigo buscando la vuelta de cachenco y espero no volver a usar el chaquetón de la supertonta.

Agradecer a quienes me ayudaron en mi paso por Beauchef. A mis amigos en plan común, Patitox, Feto, Chino y Pato, gracias por dejarme ser su macho alfa ese tiempo. A los mineros, Nico, Cami, Osvald, Hölck, Mono, Vale, Jany. Más de alguna vez nos quedamos estudiando, haciendo informes, all night long, y algún viajecillo por ahí. Gracias por la ayuda, buena disposición y buena onda, por no cuestionar mi a veces excesivo silencio ni mi talento para encontrarle un doble sentido a las cosas.

Gracias a Xavier Emery, por creer en mí y permitirme desarrollar este proyecto, por ser un excelente docente y guía. Muchas gracias por la paciencia y enseñanzas entregadas a mí y a todos sus alumnos.

A mis amigas de la vida, Anita, Nicky, Vero y Karito. Por siempre saber decirme las cosas de frente, ayudarme a crecer y ser mejor persona. Las quiero mucho!

Gracias a CONICYT por el financiamiento de esta memoria a través del proyecto 1130085. También a AMTC y Laboratorio ALGES por las herramientas entregadas para el desarrollo de este trabajo.

## TABLA DE CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	Motivación del trabajo.....	2
1.2.	Objetivos.....	3
1.2.1.	Objetivo General.....	3
1.2.2.	Objetivos Específicos.....	3
1.3.	Alcances.....	3
2.	ANTECEDENTES.....	4
2.1.	Antecedentes Generales.....	4
2.1.1.	Variable Regionalizada.....	4
2.1.2.	Función Aleatoria.....	4
2.1.3.	Kriging.....	6
2.1.4.	Simulación.....	7
2.2.	Modelamiento Geoestadístico de Incertidumbre.....	8
2.3.	Enfoque de Indicadores.....	8
2.3.1.	Codificación de información a Indicadores.....	8
2.3.2.	Kriging de Indicadores.....	11
2.3.3.	Simulación Secuencial de Indicadores.....	12
2.4.	Simulación por Bandas Rotantes.....	13
3.	METODOLOGÍA.....	16
3.1.	Metodología Caso Sintético.....	17
3.2.	Metodología Caso Real.....	18
3.3.	Kriging de indicadores con medias variables tradicional.....	18
3.4.	Kriging de indicadores con medias variables propuesto.....	19
3.5.	Simulación secuencial de indicadores con proporciones variables tradicional.....	19
3.6.	Simulación secuencial de indicadores con proporciones variables propuesta.....	20
4.	CASO DE ESTUDIO I: BASE DE DATOS SINTÉTICA.....	21
4.1.	Creación Base de Datos.....	21
4.2.	Procesamiento de Datos para Estimación.....	26
4.3.	Análisis de Sensibilidad.....	28
5.	CASO DE ESTUDIO II: BASE DE DATOS VETA BATEAS.....	32
5.1.	Geología.....	33
5.2.	Mineralización.....	36

5.2.1.	Descripción de la mineralización .....	36
5.2.2.	Vetas mineralizadas .....	37
5.2.3.	Veta Bateas .....	37
5.3.	Operación Minera .....	38
5.4.	Estudio Exploratorio de Datos .....	39
5.5.	Procesamiento de Datos .....	43
5.6.	Análisis Variográfico .....	45
5.6.1.	Mapa Variográfico.....	46
5.6.2.	Variogramas experimentales y modelados .....	46
6.	RESULTADOS y ANÁLISIS .....	49
6.1.	Caso de Estudio I .....	49
6.1.1.	Análisis de Sensibilidad .....	54
6.2.	Caso de Estudio II.....	57
6.2.1.	Modelo Omnidireccional.....	58
6.2.2.	Modelo con anisotropía en la dirección Este-Oeste .....	60
6.2.3.	Validación Modelo Omnidireccional .....	62
6.2.4.	Validación Modelo con anisotropía en la dirección Este-Oeste.....	62
7.	CONCLUSIONES.....	63
	BIBLIOGRAFÍA .....	65
	ANEXOS .....	66
	Anexo A: Código SISIM modificado para propuesta. ....	67

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Proceso codificación variable a indicadores [8] .....	10
Figura 2: Ejemplo Kriging Indicadores [8] .....	11
Figura 3: Normalización probabilidades [8].....	12
Figura 4: Ejemplo Simulación Secuencial de Indicadores [8] .....	13
Figura 5: Principio de Bandas Rotantes en 2D [1] .....	14
Figura 6: Representación gráfica variograma.....	16
Figura 7: Esquema Metodología general Caso Sintético .....	17
Figura 8: Esquema Metodología general Caso Real .....	18
Figura 9: Esquema Creación Base de Datos Sintética.....	21
Figura 10: Variograma Datos Gaussianos .....	22
Figura 11: Mapa Media Variable.....	23
Figura 12: Mapa Media Indicador .....	24
Figura 13: Esquema ejemplo Datos Sintéticos Realización 50 .....	25
Figura 14: Variogramas experimentales y Modelados .....	27
Figura 15: Variograma Datos Gaussianos Análisis Sensibilidad .....	29
Figura 16: Esquema ejemplo Datos Sintéticos Realización 50 Sensibilidad .....	30
Figura 17: Variogramas Experimentales y Modelados Análisis Sensibilidad .....	31
Figura 18: Mapa Ubicación Caylloma [13].....	32
Figura 19: Columna estratigráfica Distrito Caylloma [13].....	34
Figura 20: Mapa Vetas Distrito Caylloma [13].....	35
Figura 21: Esquema Método Explotación [14] .....	39
Figura 22: Vista desde arriba veta .....	41
Figura 23: Vista desde arriba veta rotada .....	42
Figura 24: Vista Transversal veta rotada.....	42
Figura 25: Vista Longitudinal veta rotada.....	43
Figura 26: Vista Longitudinal veta y canales rotados .....	43
Figura 27: Cota Simulada e interacción con canales .....	44
Figura 28: Proporciones bloques en veta, cota 4482,5 .....	44
Figura 29: Media Local Veta Cota 4482,5 .....	45
Figura 30: Media variable canales.....	45
Figura 31: Mapa Variográfico planta 4482,5 Método Tradicional .....	46
Figura 32: Mapa Variográfico planta 4482,5 Método Propuesto.....	46
Figura 33: Variogramas Omnidireccionales Modelados .....	47
Figura 34: Variogramas Direccionales Modelados .....	47
Figura 35: Resultados estimaciones realización 50.....	49
Figura 36: Comparación mapas Error Promedio según metodología.....	50
Figura 37: Comparación mapas Error Absoluto Promedio según metodología.....	51
Figura 38: Comparación Mapas Error Cuadrático según metodología .....	52
Figura 39: Mapa Varianza del Kriging según metodología .....	53
Figura 40: Resultados Estimaciones Realización 50 Análisis Sensibilidad .....	54
Figura 41: Comparación mapas error promedio sensibilidad.....	55
Figura 42: Comparación Mapas error absoluto sensibilidad .....	55
Figura 43: Comparación Mapas error cuadrático sensibilidad.....	56
Figura 44: Comparación Mapas Varianza Kriging sensibilidad .....	57
Figura 45: Resultados Simulaciones modelo omnidireccional.....	58



Figura 46: Mapas Errores cuadráticos simulaciones Modelo Omnidireccional.....	59
Figura 47: Resultados Simulaciones Modelo E-W.....	60
Figura 48: Mapas Errores cuadráticos Simulaciones Modelo E-W .....	61

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Resumen minerales presentes [14].....	36
Tabla 2: Estadísticas básicas muestreo por canales.....	39
Tabla 3: Correlación entre leyes minerales .....	40
Tabla 4: Estadísticas básicas largo de canales.....	40
Tabla 5: Coordenadas Modelo de Bloques.....	40
Tabla 6: Estadísticas básicas proporciones veta.....	41
Tabla 7: Ranking menor error cuadrático.....	52
Tabla 8: Ranking menor error cuadrático análisis de sensibilidad.....	56
Tabla 9: Ranking menor error cuadrático modelo omnidireccional.....	59
Tabla 10: Ranking menor error cuadrático modelo E-W .....	61

## ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1: Definición Distribución Espacial .....	4
Ecuación 2: Esperanza Matemática.....	5
Ecuación 3: Varianza.....	5
Ecuación 4: Covarianza.....	5
Ecuación 5: Correlograma.....	5
Ecuación 6: Variograma.....	5
Ecuación 7: Estimador de kriging simple.....	7
Ecuación 8: Ponderadores del kriging.....	7
Ecuación 9: Varianza de kriging simple.....	7
Ecuación 10: Función distribución variable categórica.....	8
Ecuación 11: Definición indicadores según umbral de truncación .....	9
Ecuación 12: Estimador Kriging Simple Indicadores .....	11
Ecuación 13: Simulación por Bandas Rotantes.....	14
Ecuación 14: Covarianza simulación .....	14
Ecuación 15: Relación varianza y media.....	16
Ecuación 16: Variable Estimada Método Tradicional.....	19
Ecuación 17: Variable Estimada Método Propuesto .....	19
Ecuación 18: Media Variable .....	22
Ecuación 19: Variable gaussiana con Media Variable .....	23
Ecuación 20: Creación Indicador .....	23
Ecuación 21: Varianza del Kriging Método Tradicional.....	28
Ecuación 22: Varianza del Kriging Método Propuesto .....	28

# 1. INTRODUCCIÓN

La geoestadística es una disciplina dedicada al estudio de fenómenos regionalizados, esto es, fenómenos que se extienden en el espacio presentando cierto nivel de continuidad. Esta provee un conjunto de herramientas estadísticas para incorporar características espaciales al procesamiento de datos. Su aplicación se extiende a través de distintos campos de estudio como minería, ciencias de la tierra, hidrogeología, entre otros.

Enfocándose en el aporte de la geoestadística en minería, la estimación de recursos, al llevarse a cabo en las etapas tempranas de ingeniería del proyecto, es clave para cuantificar y modelar las distintas variables de interés presentes. Ayuda a estudiar e interpretar variables regionalizadas, tales como leyes minerales, densidad, litologías, alteraciones, recuperación metalúrgica. El principal propósito es generar modelos, pese a la incertidumbre presente, a través de técnicas de estimación o simulación, reproduciendo la realidad con el mínimo error posible y/o cuantificando la incertidumbre asociada, siendo estos modelos descriptivos más que interpretativos [1].

Las variables regionalizadas describen matemáticamente los fenómenos regionalizados, y miden propiedades o atributos relacionados al fenómeno. La geoestadística se enfoca en ellas basándose en el concepto de función aleatoria. Dentro de los tipos de funciones aleatorias, es posible encontrar variables continuas (como concentraciones de elementos, permeabilidad), y variables categóricas, las que permiten codificar un conjunto de dominios que dividen el espacio, siendo estas últimas de particular interés en el trabajo a desarrollar.

Pese a que en la minería el principal enfoque se da a variables continuas como las leyes minerales presentes en un yacimiento con potencial de extracción, el estudio de variables categóricas como tipo de roca también es fundamental en la evaluación de un proyecto, pues permite generar mejores modelos de leyes por mayor control geológico y agrega información sobre procesos posteriores a los que será sometido el mineral (desde estimaciones de chancado a través de la dureza, hasta evaluar reactivos a utilizar y su consumo). Vale destacar que también se cree importante el modelar variables categóricas previo a las variables continuas, para contar con subdivisiones más geológica y estadísticamente homogéneas [2].

Actualmente, los modelos geológicos son generalmente construidos a través del conocimiento geológico de especialistas, de forma determinística, imposibilitando la cuantificación de la incertidumbre asociada. Otros enfoques posibles se dan a través de modelos de incertidumbre, que buscan caracterizar los valores no muestreados por distribuciones de probabilidad, condicionadas a los datos disponibles. Los enfoques más comunes utilizando los modelos de incertidumbre, son el modelo multigaussiano y los métodos de indicadores [3], [4]. Si bien el kriging multigaussiano es sencillo y cómodo de usar, también presenta varios inconvenientes por su rigidez en cuanto a las distribuciones en que es aplicable [5].

Este trabajo se orienta hacia la estimación y simulación de variables categóricas a través del método de indicadores con proporciones localmente variables, proponiendo una mejora al procedimiento actualmente en uso. Este método codifica la variable categórica en variables binarias (indicadores), cuyas medias representan las proporciones de las diferentes categorías.

El enfoque actual utiliza kriging simple, con media localmente variable y mantiene un variograma global. Sin embargo, la media y la varianza para una variable indicador están relacionadas.

Si se tiene en cuenta que la meseta de un variograma (covarianza) es la varianza de la variable en cuestión, entonces éste debería ir variando junto a las medias localmente variables. Esta variación no está siendo considerada en los algoritmos actuales y es lo que se pretende estudiar.

Para ello se propone un modelo para el variograma en función de las varianzas y una función correlación global. De esta manera se seguiría el planteamiento tradicional, agregando la mejora propuesta. Se pretende estudiar las mejoras planteadas a través de análisis en una base de datos sintética y en un caso real.

### **1.1. Motivación del trabajo**

Las características de interés del cuerpo mineralizado, no sólo tienen que ver con consideraciones de tipo económico, sino también con otras propiedades de interés del cuerpo mismo, como es, por ejemplo, el tipo de roca en el que se encuentra el yacimiento.

En la actualidad, los modelos geológicos incorporan generalmente a las variables categóricas presentes de forma determinística, es decir, a través de la interpretación que se le da a la información obtenida se tiene un conocimiento perfecto de la ubicación y extensión de una “unidad geológica”. Esta metodología impide cuantificar la incertidumbre presente, dado que no permite conocer la probabilidad de que un cierto punto en el espacio pertenezca a una cierta unidad.

Si bien métodos de estimación de recursos como el kriging son utilizados en la industria, el kriging y simulación de indicadores no son utilizados de manera regular u oficial para estimaciones o simulaciones llevadas a cabo, razón que motiva a desarrollar mejoras a este método.

La principal motivación del presente trabajo consiste en establecer una metodología para modelar variables categóricas (tipo de roca), a través del kriging y simulación de indicadores con proporciones localmente variables, de manera que, al aportar con mayores detalles teóricos en este método y aplicando correcciones en la definición del variograma, se logren modelos más realistas reproduciendo de mejor manera la variabilidad espacial de las categorías, y con esto obtener una mejor delimitación de los tipos de roca para la evaluación de yacimientos.

Al modelar variables continuas de manera posterior a las variables categóricas, se cuenta con subdivisiones geológica y estadísticamente homogéneas. De esta forma, eventualmente se puede mejorar los modelos de leyes por mayor control geológico, y se agrega información sobre procesos posteriores, como por ejemplo, estimaciones respecto al chancado o evaluaciones de reactivos y su consumo.

## **1.2. Objetivos**

### *1.2.1. Objetivo General*

El objetivo general de este trabajo comprende el proceso de implementación de estimación y simulación de variables categóricas, al variar en el espacio las proporciones de las categorías. Esto se realizará mediante el desarrollo de una nueva propuesta al método clásico de kriging de indicadores con proporciones variables.

### *1.2.2. Objetivos Específicos*

Se espera cuantificar la incertidumbre en la extensión espacial de unidades geológicas a través de propuesta de variante al kriging y simulación secuencial de indicadores con medias localmente variables.

También, aplicando la metodología convencional y la mejora propuesta, se pretende comparar los resultados obtenidos y determinar si ésta implica una mejora efectiva y significativa.

## **1.3. Alcances**

Se espera aplicar tanto la metodología clásica como la versión propuesta de estimación y simulación de variables categóricas con proporciones que varían en el espacio, sobre bases de datos reales (datos mineros con información sobre variables categóricas, por ejemplo, tipo de roca) y bases de datos sintéticas. Se restringe el estudio al uso de base de datos con dos tipos de roca, es decir, con sólo un indicador.

La metodología a seguir depende del tipo de base de datos en la que se trabaja. En el caso de la base de datos real, a partir de un modelo geológico interpretado y realizando un jack-knife se pretende comparar la calidad de las simulaciones. Mientras que en el caso de base de datos sintética, primero se procede a muestrear el indicador para luego aplicar los métodos tradicional y propuesto. También se desea estudiar la sensibilidad al método respecto a la cantidad y posición de datos y los variogramas de indicadores.

## 2. ANTECEDENTES

### 2.1. Antecedentes Generales

#### 2.1.1. Variable Regionalizada

Una variable se reconoce como “regionalizada”, al presentar una distribución en el espacio. Dicho de otra manera, las variables regionalizadas representan el valor en el espacio (geográfico o temporal) de un atributo asociado a un fenómeno natural (fenómeno regionalizado), como por ejemplo las leyes minerales son características de una mineralización. Las variables regionalizadas no se restringen sólo al ámbito de la minería, otros ejemplos incluyen la densidad de población en demografía, mediciones de lluvia en pluviometría, etc. La mayoría de las variables presentes en las diversas ciencias de la tierra pueden ser consideradas como variables regionalizadas [6]. Es posible caracterizar una variable regionalizada por:

- Naturaleza: Continua (ej. leyes minerales), discreta, categórica (ej. tipo de roca).
- Dominio de extensión: Dimensiones espaciales abarcadas por la variable.
- Soporte: Volumen sobre el cual es medido la variable. Puede ser puntual o en soportes mayores (soporte bloque).

Para entender de mejor manera un fenómeno regionalizado, se debe generar una representación matemática o modelo. Esto requiere conocimiento sobre la génesis del fenómeno y la distribución de la variable. En general, una variable regionalizada presenta cierta continuidad espacial, pero varía irregularmente a escala local. Por esto, un modelo determinístico puede ser imposible de aplicar. De esta forma, se recurre a los modelos probabilísticos, que permiten formalizar tanto conocimientos como incertidumbres que se tienen del fenómeno regionalizado [7].

#### 2.1.2. Función Aleatoria

En los modelos probabilísticos desarrollados en geoestadística, una variable regionalizada es una realización de una función aleatoria, por lo cual es necesario tener claro el concepto de función aleatoria.

Se considera al valor  $z(x)$  de la variable regionalizada en un lugar  $x$  del campo  $D$ , como una realización de una variable aleatoria  $Z(x)$ . Luego, el conjunto de variables aleatorias  $Z = \{Z(x): x \in D\}$  constituye una función aleatoria.

El grupo de variables aleatorias  $\{Z(x_1), \dots, Z(x_k)\}$  se caracteriza por su distribución espacial, que reúne todas las distribuciones de probabilidad de la forma:

$$F(z_1, \dots, z_k; x_1, \dots, x_k) = \text{Prob}(Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_k) < z_k) \quad \forall z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}, \quad \forall x_1, \dots, x_k \in D$$

ECUACIÓN 1: DEFINICIÓN DISTRIBUCIÓN ESPACIAL

También es posible simplificar la caracterización de la función aleatoria, considerando sólo sus parámetros descriptivos o “*momentos*” de las distribuciones.

- **Momento de primer orden (Esperanza matemática):** Representa la media  $m(x)$  alrededor de la cual se distribuyen los valores de las realizaciones de la función aleatoria.

$$m(x) = E[Z(x)]$$

ECUACIÓN 2: ESPERANZA MATEMÁTICA

- **Momentos de segundo orden:** Se consideran igualmente los siguientes momentos de segundo orden.

- **Varianza:** Constituye una medida de la dispersión de  $Z(x)$  respecto a su valor medio  $m(x)$ . Su raíz cuadrada corresponde a la desviación estándar.

$$\sigma^2(x) = var[Z(x)] = E\{[Z(x) - m(x)]^2\} = E[Z(x)^2] - m(x)^2$$

ECUACIÓN 3: VARIANZA

- **Covarianza:** Entrega una visión de la interacción entre dos variables aleatorias  $Z(x_1)$  y  $Z(x_2)$ .

$$C(x_1, x_2) = cov[Z(x_1), Z(x_2)] = E[Z(x_1)Z(x_2)] - m(x_1)m(x_2)$$

ECUACIÓN 4: COVARIANZA

- **Correlograma:** Se define como el coeficiente de correlación lineal entre dos variables aleatorias  $Z(x_1)$  y  $Z(x_2)$ .

$$\rho(x_1, x_2) = corr[Z(x_1), Z(x_2)] = \frac{cov[Z(x_1), Z(x_2)]}{\sqrt{var[Z(x_1)]var[Z(x_2)]}}$$

ECUACIÓN 5: CORRELOGRAMA

- **Variograma:** Mide la desviación cuadrática promedio entre dos variables. Indica qué tan distintos son los valores entre dos sitios.

$$\gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{2} var[Z(x_1) - Z(x_2)]$$

ECUACIÓN 6: VARIOGRAMA

Bajo el supuesto de estacionaridad, la esperanza y la varianza son constantes (independientes de su ubicación  $x$ ), mientras que la covarianza, el correlograma y el variograma sólo dependen del vector de separación  $h = x_2 - x_1$ . Este supuesto es útil para realizar la inferencia estadística, es decir, para estimar los momentos a partir de un conjunto de datos experimentales. De esta forma, se tienen las siguientes relaciones entre los momentos mencionados:

- La varianza se iguala a la covarianza evaluada en el vector  $h=0$ .

$$\sigma^2 = C(0)$$

- El correlograma es igual al cociente entre covarianza y varianza.

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{C(0)}$$

- El variograma es igual a la diferencia entre varianza y covarianza.

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

Al tender a infinito la norma del vector  $h$ , la covarianza tiende a 0, y por tanto el variograma se iguala a la varianza. Esto explica el que la meseta del variograma sea igual a la varianza.

$$\gamma(\infty) = C(0) = \sigma^2$$

En la práctica, se puede aliviar la hipótesis de estacionaridad, considerando una estacionaridad local (válida a cierta escala) o considerando modelos no estacionarios en algunos momentos (por ejemplo, suponer que la media no es constante, pero que los otros momentos sí son estacionarios).

### 2.1.3. Kriging

Es una herramienta de estimación local de una variable regionalizada. Se utiliza en casos de estimación univariable. Se construye el estimador como una combinación lineal de los datos disponibles, sin sesgo y con varianza de error mínima.

Sus principales propiedades corresponden a:

- Interpolación exacta: La estimación de un sitio con dato, es igual al valor del dato, al mismo tiempo que la varianza de kriging en esa ubicación es nula.
- Insesgo: La media de los errores cometidos en una región de gran tamaño tiende a cero.
- Precisión: La varianza de los errores cometidos es mínima.
- Suavizamiento: La dispersión de los valores estimados es menor a la dispersión de los valores reales, sobre todo en zonas con pocos datos.
- Aditividad: La estimación de la ley de un bloque es igual al promedio de las estimaciones de leyes puntuales en ese bloque.

Para efectos del presente trabajo, es de interés particular el Kriging Simple.

Sean:

$Z$ : función aleatoria asociada a la variable regionalizada

$m$ : media conocida

$C(x_\alpha - x_\beta)$ : covarianza entre variables en sitios  $x_\alpha$  y  $x_\beta$

$x_1, \dots, x_n$ : sitios con datos con valor de  $Z$  conocido.

El estimador en un sitio  $x_0$  corresponde a:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} Z(X_{\alpha})$$

ECUACIÓN 7: ESTIMADOR DE KRIGING SIMPLE

Además se tienen la siguiente relación respecto a los ponderadores y el coeficiente aditivo  $a$ :

$$\begin{pmatrix} C(x_1 - x_1) & \dots & C(x_1 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(x_n - x_1) & \dots & C(x_n - x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x_1 - x_0) \\ \dots \\ C(x_n - x_0) \end{pmatrix}$$

$$a = \left( 1 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \right) m$$

ECUACIÓN 8: PONDERADORES DEL KRIGING

La varianza del error del kriging, que mide la dispersión del error cometido, es:

$$\sigma_{KS}^2(x_0) = C(x_0 - x_0) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0)$$

ECUACIÓN 9: VARIANZA DE KRIGING SIMPLE

#### 2.1.4. Simulación

Una simulación es un modelo numérico que intenta reproducir las características de una variable en estudio, a través de la construcción de una variable regionalizada ficticia. Para poder utilizar la simulación se requiere definir un modelo adecuado de función aleatoria.

Dado que es imposible conocer a cabalidad un fenómeno en la realidad, se recurre a las herramientas de simulación, pues ofrece la ventaja de que las distintas realizaciones de la función aleatoria presentan la misma estructura que la variable regionalizada real, en particular la misma variabilidad espacial, a diferencia del kriging, que a causa del suavizamiento causa que las estimaciones no tengan las mismas propiedades que los valores reales.

También, dada la disposición de múltiples escenarios posibles que entrega la simulación, permite medir la incertidumbre y desarrollar análisis de riesgo.

Las simulaciones se pueden diferenciar en dos tipos, de acuerdo a su interacción con los sitios con datos conocidos, en condicionales y no condicionales. Las simulaciones condicionales, buscan reproducir las distribuciones locales, dependiendo de los datos conocidos, razón por la cual en sitios con datos no hay incertidumbre. En cambio las simulaciones no condicionales buscan reproducir la distribución de la variable regionalizada sin reproducir los valores de los datos en sitios ya conocidos. Para efectos de este trabajo, más adelante se detalla la simulación condicional en indicadores.



## 2.2. Modelamiento Geoestadístico de Incertidumbre

Teniendo como objetivo el simular el valor de una función aleatoria en un punto  $x$  del espacio, es necesario conocer su distribución  $Z(x)$ . Si se tiene una variable categórica, la función distribución coincide con la esperanza condicional de la función indicadora, para cada categoría.

$$\forall z \in \mathbb{R}, F(x; z|n) = E[1_{Z(x)=z} | Z(x_1), \dots, Z(x_n)]$$

ECUACIÓN 10: FUNCIÓN DISTRIBUCIÓN VARIABLE CATEGÓRICA

Dada la complejidad del cálculo de la esperanza condicional, ésta se determina a través de métodos paramétricos o no paramétricos. Los primeros presentan la desventaja de abarcar un número limitado de modelos disponibles, obteniéndose con ello posibles inadecuaciones a los datos. Por otro lado, los métodos no paramétricos, permiten reproducir características presentes en los datos a través de un modelo parcial de la función aleatoria o de una imagen de referencia.

Los enfoques más comunes son modelo multigaussiano (paramétrico) y métodos de indicadores (no paramétrico) [3], [4]. La aplicación del enfoque multigaussiano mencionado anteriormente, presenta varias deficiencias [5].

- Son necesarios supuestos fuertes sobre la distribución espacial de la función aleatoria. Desgraciadamente, la normalidad de las distribuciones experimentales para múltiples puntos no puede ser verificada en la práctica.
- Bajo el modelo multigaussiano, valores extremadamente altos y bajos no presentan correlación espacial, un supuesto a menudo invalidado en la práctica o un modelo no conservador para aplicaciones en que la conectividad de valores extremos es una característica peligrosa.
- La varianza de la función distribución acumulada condicional en el espacio depende sólo de la configuración de los datos, no de los datos mismos.
- No es posible aplicar este método a variables binarias o categóricas, que no tienen distribuciones Gaussianas.

De no sostenerse el supuesto multigaussiano, o de no poderse incorporar información crítica utilizando el enfoque Gaussiano, un método no paramétrico puede ser utilizado.

## 2.3. Enfoque de Indicadores

Dado el enfoque hacia las variables categóricas en este trabajo, se hace particular énfasis a la metodología aplicable a este tipo de variables.

### 2.3.1. Codificación de información a Indicadores

La codificación de indicadores, en general, se hace a través de umbrales. Estos umbrales, indican qué valores de la variable toman los valores 1 y 0 del indicador.

Particularmente para las variables categóricas, estos umbrales corresponden a las distintas categorías existentes, de tal manera que existen la misma cantidad de categorías que de umbrales.

De acuerdo a la ecuación mostrada a continuación, el indicador toma valor 1 cuando el dato que está siendo procesado corresponde a la categoría “k”, y todos aquellos datos que no correspondan a dicha categoría toman valor 0.

$$I_k(x) = 1_{Z(x)=z_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) = z_k \\ 0 & \text{si } Z(x) \neq z_k \end{cases}$$

ECUACIÓN 11: DEFINICIÓN INDICADORES SEGÚN UMBRAL DE TRUNCACIÓN

Esto también puede explicarse gráficamente. En la Figura 1, se tienen datos con información respecto a tres categorías (A, B y C), y se espera estimar la ubicación no muestreada que representa el cuadrado rojo. Se realiza la codificación utilizando tres umbrales, cada uno correspondiente a las categorías presentes.

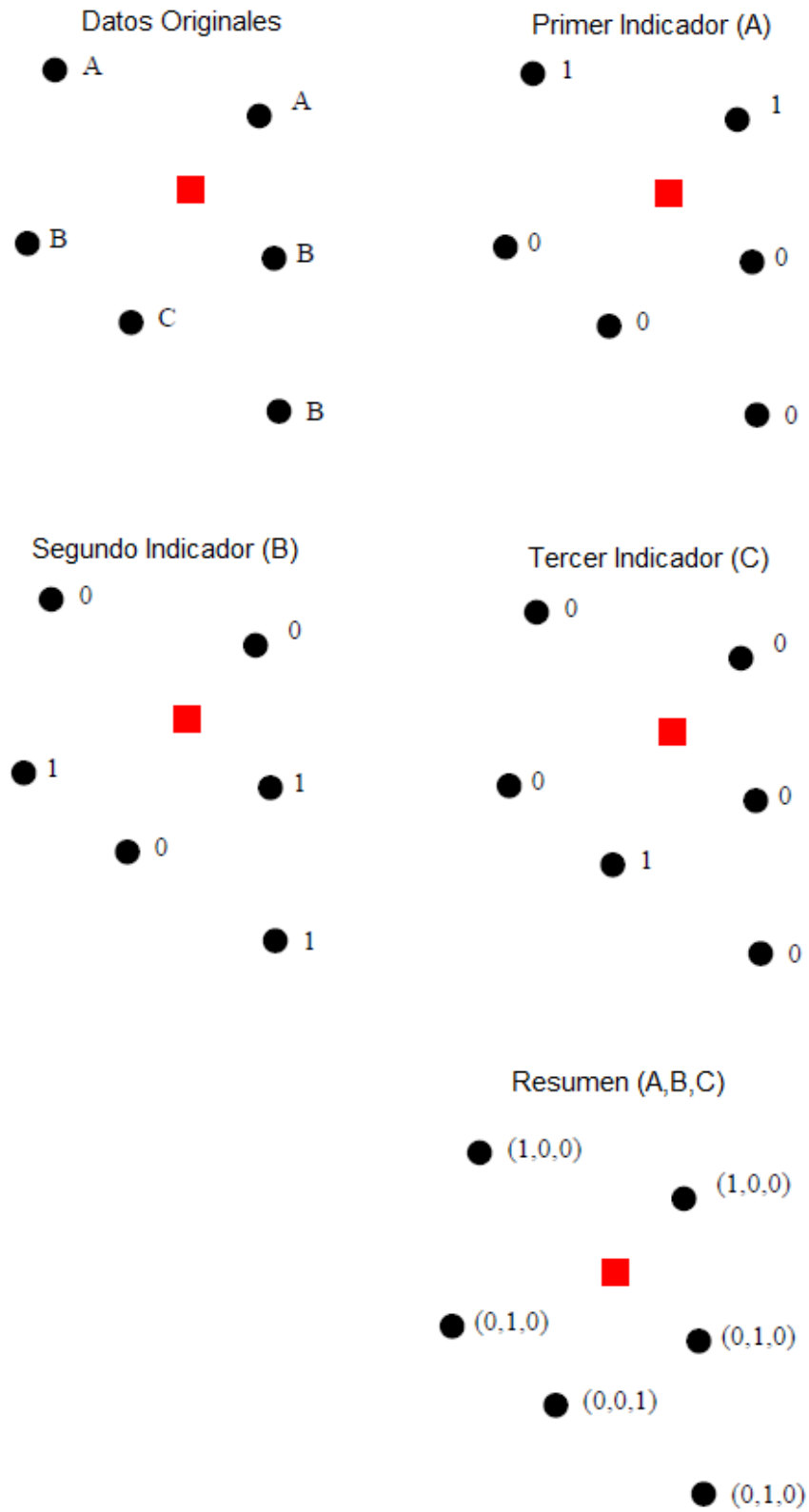


FIGURA 1: PROCESO CODIFICACIÓN VARIABLE A INDICADORES [8]

### 2.3.2. Kriging de Indicadores

Dado que se busca realizar kriging con proporciones variables, la manera de incorporar estas proporciones es a través de cambios en la media del indicador, media conocida en un kriging simple.

Las etapas a seguir en este proceso se listan a continuación [5], [9]:

- Elegir umbrales ( $z_k$ ) correspondientes a categorías.
- Para  $k=1$  a  $K$ ;
  - Codificar datos en indicador.
  - Realizar análisis variográfico.
  - Realizar kriging del indicador, estimando probabilidad condicional de que  $Z(x) = z_k$ .
  - Procesar estimaciones para obtener distribución condicional válida.

De acuerdo a las relaciones conocidas para el kriging simple, el estimador lineal expresado en términos del indicador resulta de la siguiente manera.

$$I_k^*(x) - m_k(x) = \sum_{\alpha=1}^{n(x)} \lambda_{\alpha,k}^{SK} [I_k(x_\alpha) - m_k(x_\alpha)]$$

ECUACIÓN 12: ESTIMADOR KRIGING SIMPLE INDICADORES

Donde  $\lambda_{\alpha,k}^{SK}$  es el ponderador asignado a los datos codificados, y  $m_k(x)$  el valor esperado de  $I_k(x)$ .

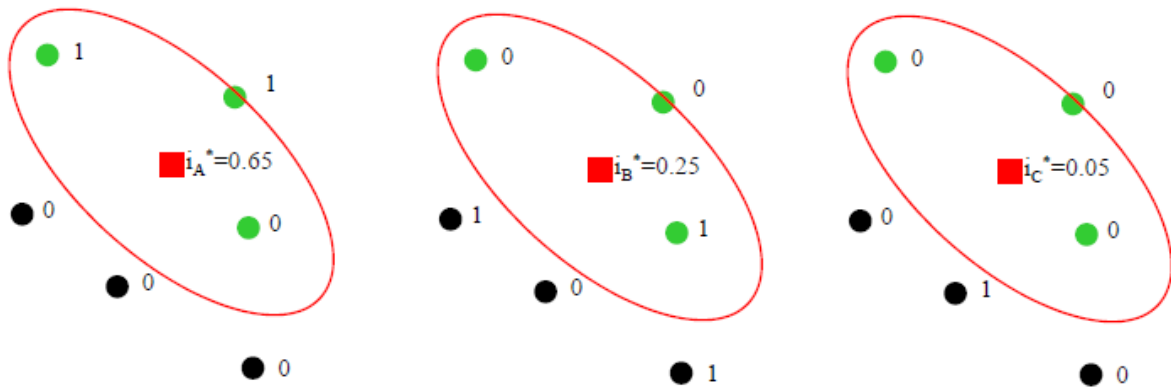


FIGURA 2: EJEMPLO KRIGING INDICADORES [8]

El procesamiento de las estimaciones se lleva a cabo para ajustar la distribución de probabilidades obtenida. Al realizarse los cálculos por separado para cada indicador, la distribución probabilidad acumulada generalmente no toma un valor máximo 1 como debería. De esta forma, se normalizan las probabilidades calculadas, obteniéndose las probabilidades definitivas por categoría.

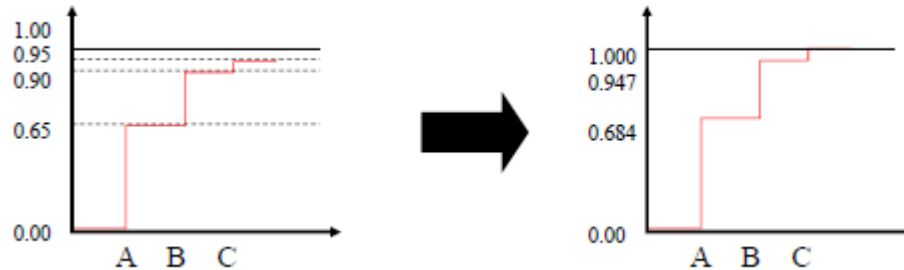


FIGURA 3: NORMALIZACIÓN PROBABILIDADES [8]

El kriging de indicadores presenta una serie de ventajas y desventajas [1]:

- Ventajas:
  - Toma en cuenta la estructura de cada indicador.
  - No requiere un modelado previo de la distribución teórica.
  - No requiere estacionaridad global, sólo local.
  
- Desventajas:
  - Se tiene la misma cantidad de variogramas para modelar que umbrales definidos y, por lo tanto, también la misma cantidad de sistemas de kriging por resolver. Una simplificación comúnmente utilizada, es usar el mismo variograma para todos los umbrales.
  - Ya que el kriging no garantiza que los ponderadores sean no negativos, se está expuesto a obtener indicadores estimados negativos o mayores que 1.

### 2.3.3. Simulación Secuencial de Indicadores

Este algoritmo permite generar realizaciones de variables categóricas o continuas, utilizando el concepto de simulación secuencial y el kriging de indicadores.

La simulación secuencial va utilizando como datos condicionantes no sólo la información muestreada, sino que también la información de datos dentro de la vecindad seleccionada que hayan sido recientemente simulados.

El procedimiento para llevar a cabo la simulación secuencial de indicadores se describe a continuación [5], [9].

- Codificar los datos con vector indicadores.
- Visitar nodos a simular aleatoriamente y visitando cada nodo sólo una vez.
- En cada nodo:
  - Buscar e identificar datos y nodos previamente simulados en una vecindad móvil.
  - Evaluar en cada categoría la probabilidad de ocurrencia de dicha categoría, por kriging de indicadores.

- Construir función distribución acumulada, corrigiendo las probabilidades para evitar desviaciones de relación de orden.
- Simular categoría generando valor aleatorio en  $[0,1]$  y leyendo el cuartil al que corresponda.
- Agregar el valor simulado al conjunto de datos condicionantes.
- Repetir el procedimiento con un distinto camino aleatorio para generar distintas realizaciones.

Se muestra gráficamente la simulación de un nodo, siguiendo la metodología mencionada.

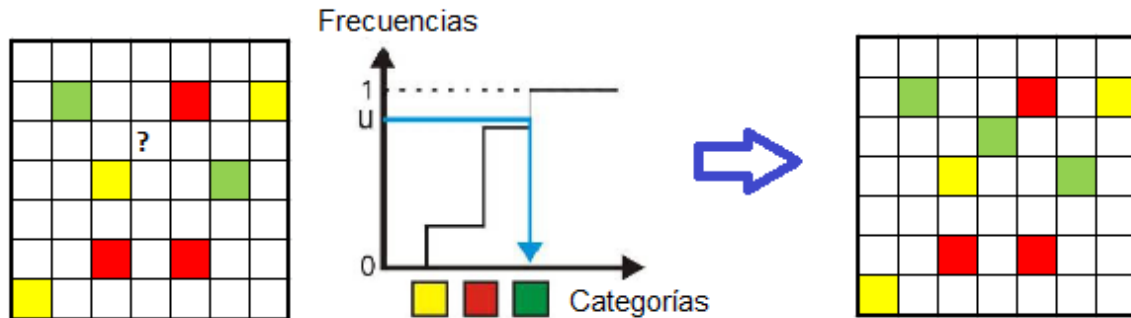


FIGURA 4: EJEMPLO SIMULACIÓN SECUENCIAL DE INDICADORES [8]

## 2.4. Simulación por Bandas Rotantes

Dentro del contexto del caso de estudio sintético, se hace uso de un algoritmo de simulación de variables Gaussianas (bandas rotantes).

El algoritmo de Bandas Rotantes, logra simplificar la simulación en  $R^n$  (multidimensional) a  $R$  (unidimensional).

El método consiste en añadir un gran número de simulaciones independientes definidas en líneas abarcando el plano o el espacio. El valor de la simulación en un punto  $x$ , es la suma de los valores obtenidos en las proyecciones de  $x$  en las diferentes líneas correspondientes a las simulaciones en una dimensión. Más específicamente, si se considera un sistema de  $n_D$  líneas provenientes del origen del espacio y que abarcan el plano regularmente (fotito), el ángulo entre dos líneas adyacentes es  $\frac{\pi}{n_D}$ . Se denota:

- $\theta_t \in [0, \pi[$  ángulo de la línea  $D_t$  con el eje  $x$ .
- $u_t$  vector unitario de  $D_t$ , con componentes  $\cos\theta_t$  y  $\sen\theta_t$ .
- $s_t$  abscisa en  $D_t$ , centrada en el origen.

Simulaciones independientes de media cero  $S_t(s_t)$  y función de covarianza  $K_1(h)$  son asociadas a las  $D_t$  líneas.

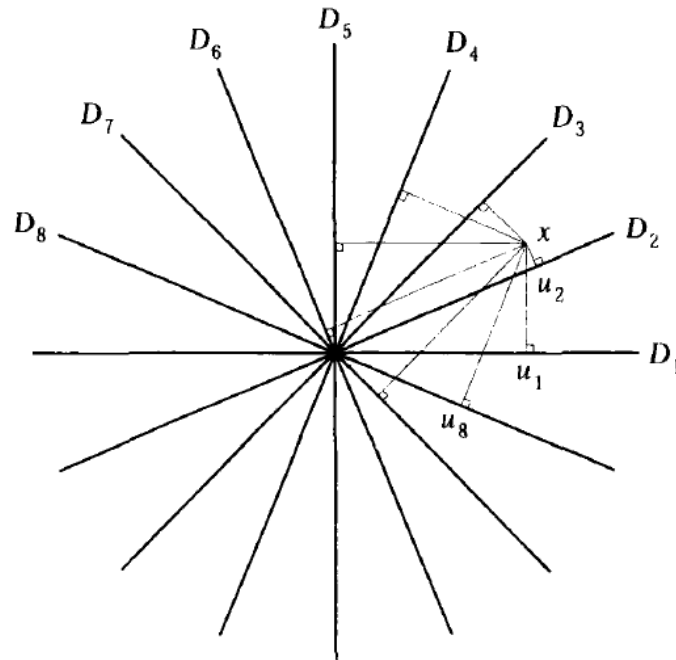


FIGURA 5: PRINCIPIO DE BANDAS ROTANTES EN 2D [1]

Si se considera un punto  $x = (x, y)$  en el plano, Su proyección en  $D_t$  es un punto con abscisa

$$s_t = \langle x, u_t \rangle = x \cos \theta_t + y \sin \theta_t$$

La simulación en  $x$  queda definida por la siguiente relación:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{n_D}} \sum_{t=1}^{n_D} S_t(s_t)$$

ECUACIÓN 13: SIMULACIÓN POR BANDAS ROTANTES

La manera más simple de generalizar el método a más dimensiones es tomando una simulación  $S_1(s)$  con covarianza  $K_1(h)$  en una línea, y definir la dirección de esta línea en  $R^n$  a través de un vector unitario  $u$ , determinado por un punto en la esfera unitaria. La simulación en el punto  $x$  de  $R^n$  queda entonces definido de la siguiente manera:

$$S(x) = S_1(\langle x, u \rangle)$$

Donde  $\langle x, u \rangle$  representa a la proyección del sitio  $x$  en la recta orientada por  $u$ .

La covarianza de  $S(x)$  se expresa como:

$$K_n(h) = \frac{1}{S_n} \int K_1(\langle h, u \rangle) du$$

ECUACIÓN 14: COVARIANZA SIMULACIÓN

Los límites de integración se extienden en la esfera unitaria en  $R^n$ , con  $S_n$  la superficie de esta esfera. Con este procedimiento, la covarianza  $K_n(h)$  es claramente isótropa.

Si bien una sola línea de direcciones aleatorias produce, en promedio, la covarianza deseada, ese tipo de simulación es constante en todos los hiperplanos ortogonales a la línea de modo que la covarianza de la muestra no corresponde a la del modelo: La simulación no es ergódica en la covarianza. En la práctica, se usa la suma normalizada de  $n_D$  simulaciones elementales correspondientes a las  $n_D$  líneas de direcciones regularmente distribuidas o aleatorias. Respecto a la ergodicidad, para un  $n_D$  fijado es preferible usar líneas con direcciones distribuidas lo más regularmente posible. Acorde al teorema del límite central, la simulación resultante posee una distribución aproximadamente multigaussiana.

Este método permite realizar las simulaciones bastante rápido pues es computacionalmente paralelizable. También es importante notar que se aconseja elegir direcciones equi-distribuidas y varios centenares o miles de direcciones. [10]

Por otro lado, la desventaja de simular utilizando el método de las bandas rotantes se resume en los siguientes dos puntos:

1. Encontrar la covarianza  $K_1(h)$  definida en  $R^1$  asociada con la covarianza  $K_n(h)$  en  $R^n$ .
2. Simular funciones aleatorias en líneas con la covarianza  $K_1(h)$ .



### 3. METODOLOGÍA

El kriging de indicadores con proporciones variables, actualmente se encuentra limitado en su aplicación. Si bien utiliza las medias variables de los indicadores en el sistema de kriging simple, utiliza sólo un variograma global para cada indicador.

Se establece que este procedimiento no es del todo correcto, basándose en la relación entre media y varianza, y la relación entre la meseta de un variograma y la varianza de los datos.

Para una variable indicador su media ( $m_I(x)$ ) y varianza ( $\sigma_I^2(x)$ ) están relacionadas de la siguiente forma:

$$\sigma_I^2(x) = m_I(x) * (1 - m_I(x))$$

ECUACIÓN 15: RELACIÓN VARIANZA Y MEDIA

Luego, interpretando que la meseta de un variograma regular corresponde a la varianza de los datos, se entiende que al variar la media, la meseta del variograma del indicador va cambiando, lo cual no está siendo considerado con la metodología actual.

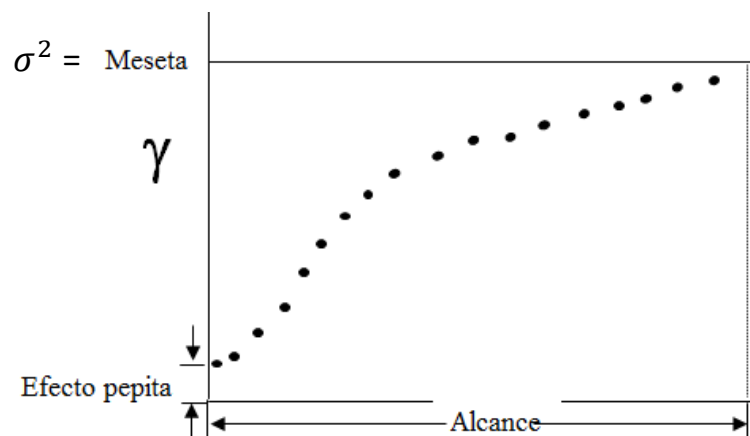


FIGURA 6: REPRESENTACIÓN GRÁFICA VARIOGRAMA

Se busca implementar un cambio en la metodología tradicional del kriging de indicadores con medias variables, que sí considere la variación en la meseta del variograma consecuencia de las variaciones de las medias locales. Esta propuesta consiste en centrar la variable indicador (para utilizar como método de estimación kriging simple de media cero) y estandarizarla utilizando la relación entre varianza y media mencionada anteriormente.

Se espera probar que la mejora usando el método propuesto es efectiva mediante dos casos de estudio. El primer caso de estudio, consta de una base de datos sintéticos, en una malla de 1000x1000 nodos. El segundo caso de estudio consiste en una base de datos real, Veta Bateas, ubicada en Arequipa, Perú.

### 3.1. Metodología Caso Sintético

En el primer caso de estudio, se aplican tanto la metodología tradicional del kriging de indicadores con medias variables, como la variación propuesta. Esto es explicado gráficamente en el siguiente esquema.

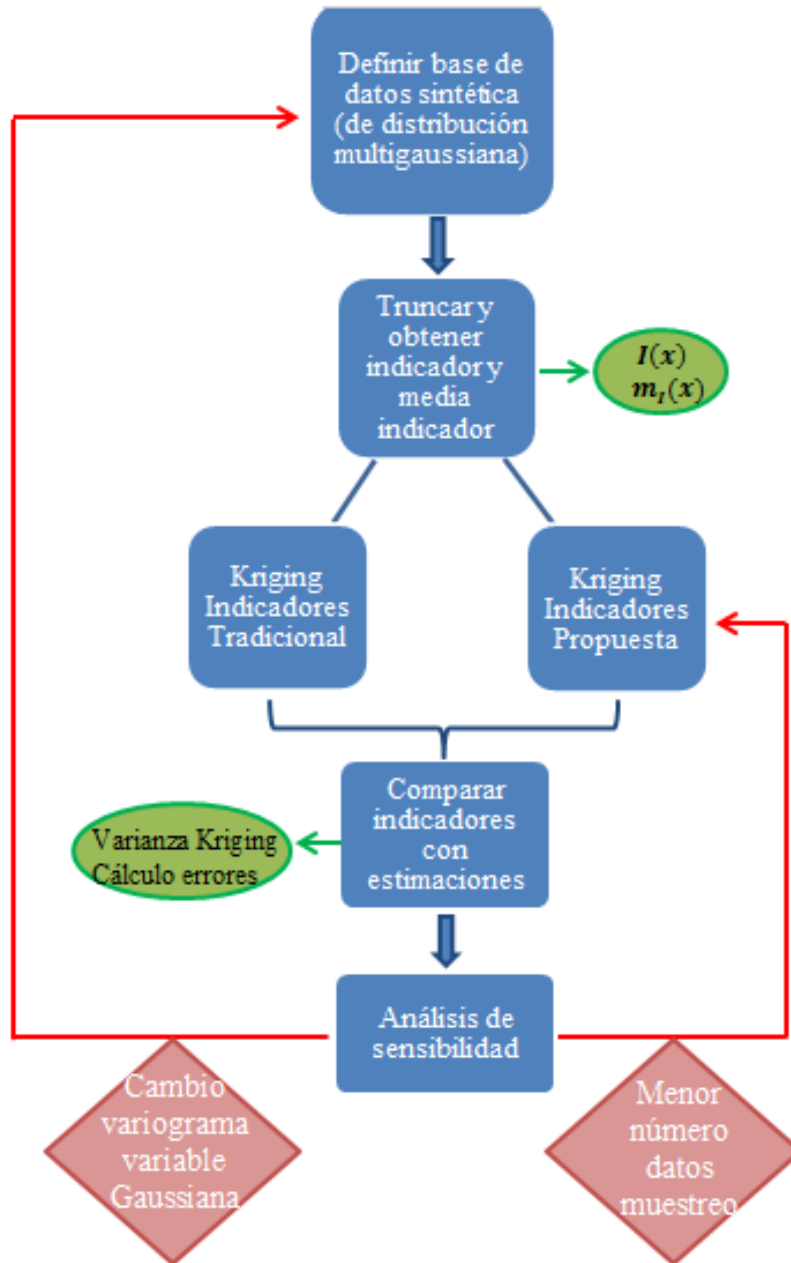


FIGURA 7: ESQUEMA METODOLOGÍA GENERAL CASO SINTÉTICO

Las etapas sobre la generación de la base de datos sintética se detallan en el capítulo 4. Caso de Estudio I: Base de Datos Sintética.

### 3.2. Metodología Caso Real

Mientras en el segundo caso se utiliza un razonamiento similar, pero aplicado a la simulación secuencial de indicadores, es decir, utilizando los datos entregados y tras un procesamiento de éstos para mejorar su uso, se realiza una simulación secuencial de indicadores con proporciones localmente variables de forma tradicional y de la forma propuesta.

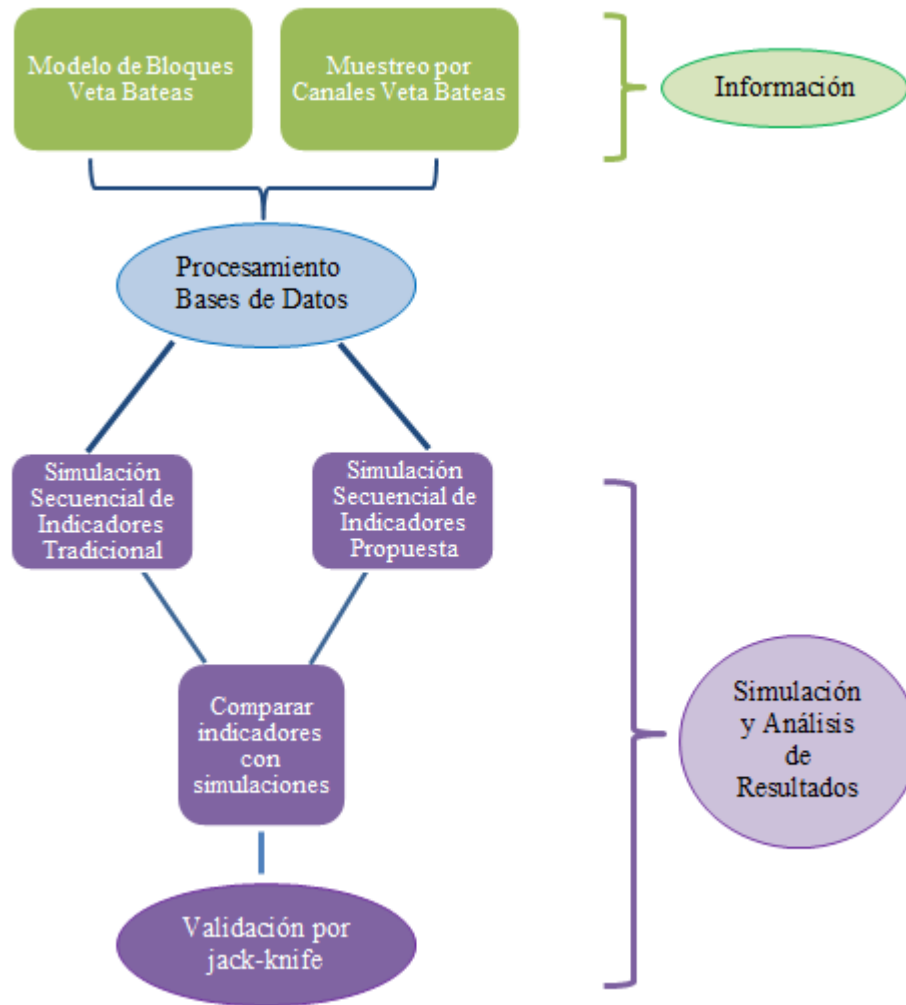


FIGURA 8: ESQUEMA METODOLOGÍA GENERAL CASO REAL

Se explican más en detalle las metodologías tradicionales y propuestas para ambos casos.

### 3.3. Kriging de indicadores con medias variables tradicional

La metodología tradicional del kriging de indicadores con medias variables, se realiza a través de kriging simple utilizando las medias de los indicadores ( $m_I(x)$ ).

Las principales etapas presentes en esta metodología se mencionan a continuación:

- Se seleccionan umbrales de truncación  $z_k$  para obtener las categorías que se espera estimar, siendo  $k$  las categorías presentes.
- Para  $k = 1$  a  $K$ ;
  - Se codifican los datos en indicador.
  - Se centra la variable indicador en cero, según su media variable.

$$J_k(x) = I_k(x) - m_{I_k}(x)$$

ECUACIÓN 16: VARIABLE ESTIMADA MÉTODO TRADICIONAL

- Se realiza muestreo de datos condicionantes.
- Se realiza el análisis variográfico.
- Ejecutar kriging simple de  $J_k(x)$
- Se procesan las estimaciones para obtener una estimación de  $I_k(x)$ .

### 3.4. Kriging de indicadores con medias variables propuesto

Como ya se ha mencionado, el cambio propuesto a la metodología del kriging de indicadores, se basa en la incorporación de la varianza de los datos y en como esta afecta en los variogramas utilizados por el kriging.

Las etapas presentes en esta metodología se mencionan a continuación:

- Se seleccionan umbrales de truncación  $z_k$  para obtener las categorías que se espera estimar, siendo  $k$  las categorías presentes.
- Para  $k = 1$  a  $K$ ;
  - Se codifican los datos en indicador.
  - Se centra la variable indicador en cero, y además se estandariza.

$$J_k(x) = \frac{I_k(x) - m_{I_k}(x)}{\sqrt{m_{I_k}(x) * (1 - m_{I_k}(x))}} \quad \forall m_{I_k} \neq \{0,1\}$$

ECUACIÓN 17: VARIABLE ESTIMADA MÉTODO PROPUESTO

- Se realiza muestreo de datos condicionantes.
- Se realiza el análisis variográfico.
- Ejecutar kriging simple de  $J_k(x)$
- Se procesan las estimaciones para obtener una estimación de  $I_k(x)$ .

### 3.5. Simulación secuencial de indicadores con proporciones variables tradicional

La simulación secuencial de indicadores con proporciones variables tradicional, utiliza como datos condicionantes la información del muestreo por canales; indicadores y medias variables de cada bloque con información, además de las medias locales de los bloques a simular y los

bloques previamente simulados. Esto, dentro de la vecindad elegida para simular. En este caso, la vecindad seleccionada (para datos de muestreo y de bloques simulados) ha sido un elipsoide de radios 20[m], 20[m] y 40[m] en Este, Norte y Cota respectivamente, con un mínimo de cincuenta datos en total dentro de la elipse.

En el caso de estudio real, al tratarse de una veta, originalmente sólo se cuenta con información de las proporciones de la veta presentes en cada bloque. Por esto, para considerar bloques con proporciones menores y bloques que no pertenecieran a la veta, es necesario agregar bloques de “estéril” a su alrededor.

Dentro de la simulación en sí se tienen las siguientes etapas generales:

- Se visita cada nodo aleatoriamente.
- Identificar nodos pertenecientes a vecindad definida.
- Se realiza kriging de indicadores. El indicador ingresado es centrado restándole su media, para realizar un kriging simple de media conocida cero.
- Se simula categoría generando un valor aleatorio en  $[0,1]$  y leyendo el cuartil al que corresponda.
- Se agrega el valor simulado al conjunto de datos condicionantes.
- Se repite el procedimiento, para generar otra realización, a través de distinto camino aleatorio.

Los pasos mencionados se llevan a cabo a través de códigos en Matlab.

### **3.6. Simulación secuencial de indicadores con proporciones variables propuesta**

En el caso de la simulación secuencial de indicadores, con proporciones localmente variables, adaptado a la propuesta, son necesarios ajustes al código en ciertas áreas.

Como ya se ha mencionado, la rutina tradicional centra los datos utilizando su media variable, de forma tal de realizar un kriging simple con media conocida cero.

Lo que se desea en este caso es que, además de centrar estos datos, también se estandaricen. Volviendo a la Ecuación 17, se ajusta el código de Matlab para que al utilizar la misma base de datos que en el método tradicional, estos sean centrados y estandarizados.

Esta acción también requiere que los valores tras ser simulados sean retransformados para poder ser comparados con los indicadores originales, lo cual se incorpora de igual manera a este programa.

Otra modificación necesaria, es el hecho que al tener medias locales iguales a 1 ó 0, la variable se indefina por generarse una división con denominador igual a cero. En ese caso, se establece que los puntos con valores de media local igual a 0 ó 1, al no poder ser simulados por ser indeterminados, toman el valor 1 ó 0. Esto también facilita la simulación al disminuir el tiempo de procesamiento computacional requerido.

Los pasos dentro de la simulación en sí, corresponden a los mismos que en el caso tradicional.

## 4. CASO DE ESTUDIO I: BASE DE DATOS SINTÉTICA

### 4.1. Creación Base de Datos

Una base de datos sintética es tal que los valores y ubicaciones de los puntos son creados dependiendo de los requerimientos necesarios, a través de diversos algoritmos. En este caso, la base de datos sintética se crea a través de simulación por bandas rotantes, adición de una media variable conocida y posterior truncación para obtener un indicador.

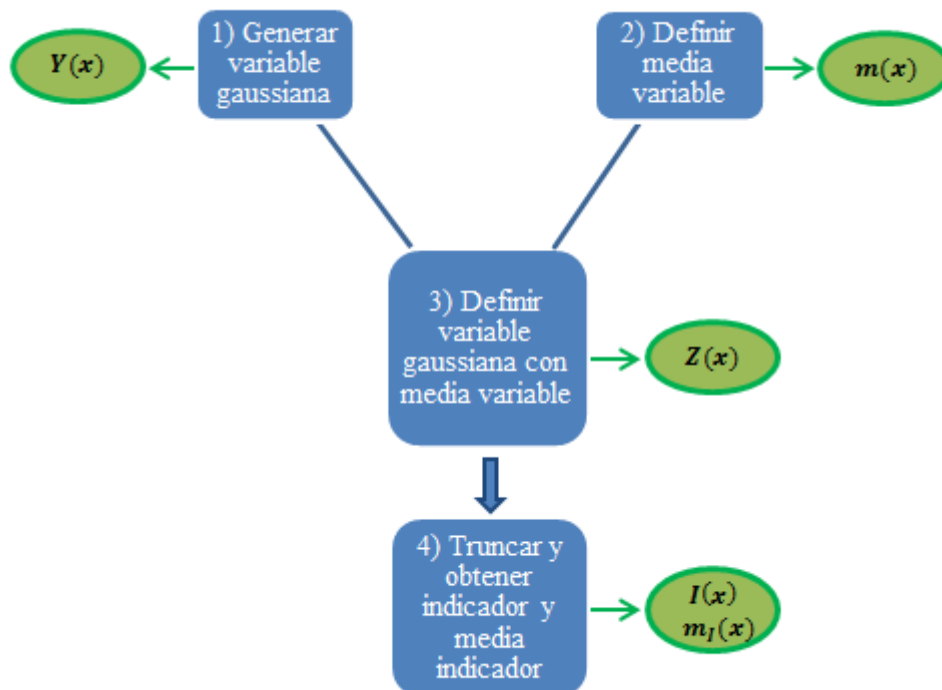


FIGURA 9: ESQUEMA CREACIÓN BASE DE DATOS SINTÉTICA

A continuación se profundizan los pasos mencionados.

1) Inicialmente, se realiza una simulación de una variable Gaussiana  $Y(x)$  estacionaria, con media cero y variograma conocido, a través del programa TBSIM [11]. Esta rutina de Matlab, permite simular valores de acuerdo a parámetros de la grilla deseada y la relación espacial de los datos a través del variograma. También incluye parámetros de la simulación a través de bandas rotantes como el número de bandas, número de realizaciones y semilla. Los parámetros utilizados para la generación de la variable Gaussiana del caso sintético son:

- Grilla regular de 1000x1000 nodos, con datos puntuales a distancia 1.
- Variograma Seno Exponencial de alcance 60, pepa 0,1 y meseta 1.
- Simulación por bandas rotantes con mil bandas y cien realizaciones.

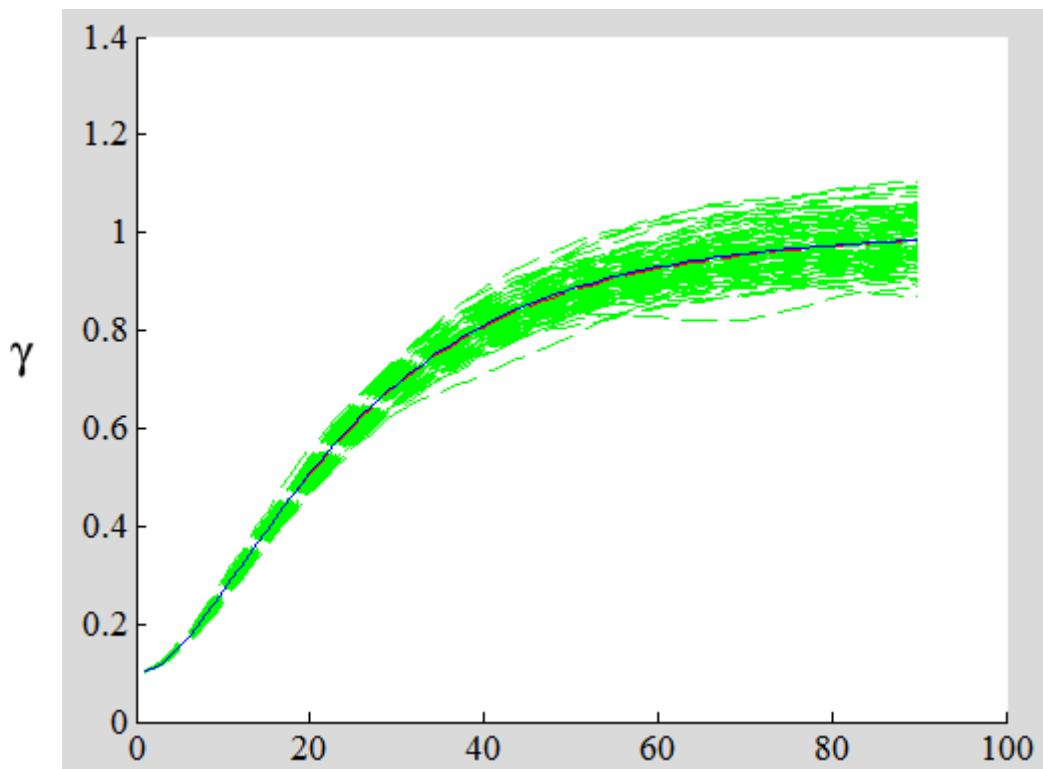


FIGURA 10: VARIOGRAMA DATOS GAUSSIANOS

En la Figura 10 se observan: En verde los variogramas de las 100 realizaciones de datos simulados, en rojo el variograma promedio de las realizaciones, y en azul el variograma ingresado como parámetro. Existe una casi perfecta coincidencia entre estos dos últimos variogramas, lo que indica que la simulación reproduce la variabilidad espacial deseada con exactitud.

2) Luego, se agrega una media variable  $m(x)$  conocida, de la forma:

$$m(x) = 3 * \cos(w * x_1 + \phi_1) * \cos(w * x_2 + \phi_2) - m_{mx}$$

ECUACIÓN 18: MEDIA VARIABLE

Con  $x_1$  y  $x_2$  coordenadas de los puntos de la grilla, y  $m_{mx}$  la media de  $m(x)$ . Se decide que la media variable, al igual que la variable Gaussiana, tenga media nula en el conjunto de puntos de la grilla. Si bien coseno es una función cíclica, no se desea agregar de forma notoria este efecto, por lo cual se eligen los factores  $w = 0,001$ ,  $\phi_1 = 2,3$  y  $\phi_2 = 3,1$ . Para comprobar que no se tenga el efecto de la ciclicidad en la media, ésta es graficada en la grilla.

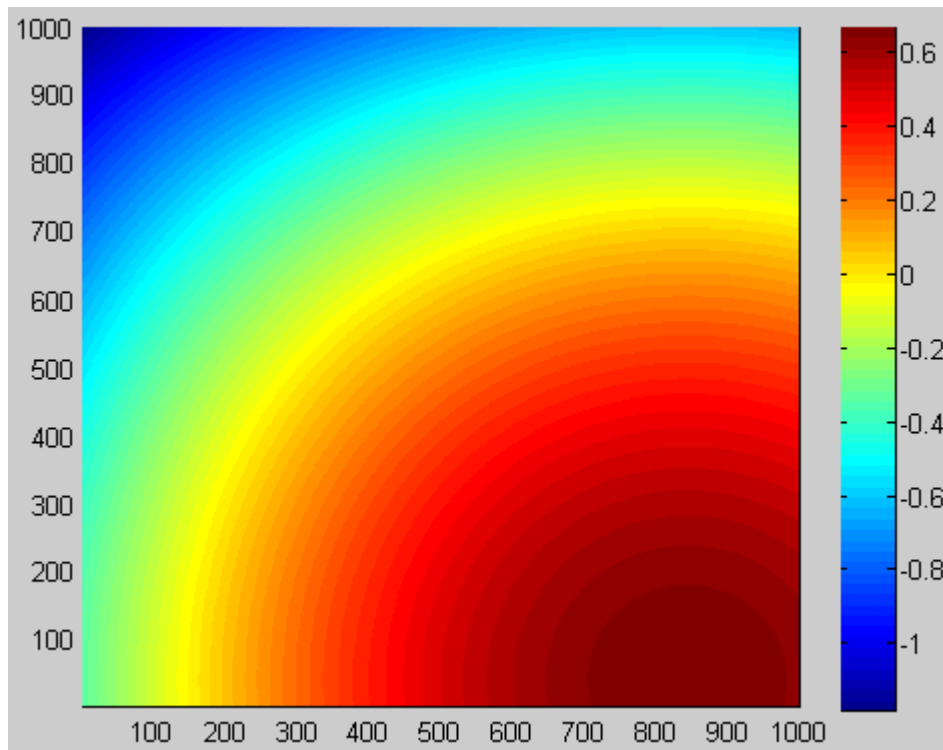


FIGURA 11: MAPA MEDIA VARIABLE

Es posible identificar la influencia de la función coseno, pero al disminuir su frecuencia con los factores, no se tienen influencias cíclicas para el espacio considerado.

- 3) A continuación, se genera la variable Gaussiana con media variable  $Z(x)$ , la cual es la suma de la variable Gaussiana previamente simulada, y la media variable creada:

$$Z(x) = Y(x) + m(x)$$

ECUACIÓN 19: VARIABLE GAUSSIANA CON MEDIA VARIABLE

- 4) Para utilizar kriging de indicadores, es necesario aplicar un umbral de truncación a la variable  $Z(x)$ . Dado que tanto la variable Gaussiana como la media variable están centradas en cero, se decide utilizar cero como umbral de truncación para obtener proporciones similares en ambas categorías del indicador. Se tiene entonces la siguiente definición para el indicador:

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } Z(x) < 0 \end{cases}$$

ECUACIÓN 20: CREACIÓN INDICADOR

También se calcula la media del indicador, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m_I(x) &= \text{Prob}\{Z(x) \geq 0\} \\ &= \text{Prob}\{Y(x) \geq -m(x)\} \\ &= 1 - \text{Prob}\{Y(x) < -m(x)\} \\ &= 1 - G(-m(x)) \end{aligned}$$



Donde  $G$  es la función de distribución Gaussiana.

La media del indicador se emplea para llevar a cabo el cálculo de la variable utilizada en la propuesta, pues siendo ahora un parámetro conocido, es posible centrar y/o estandarizar la variable indicador.

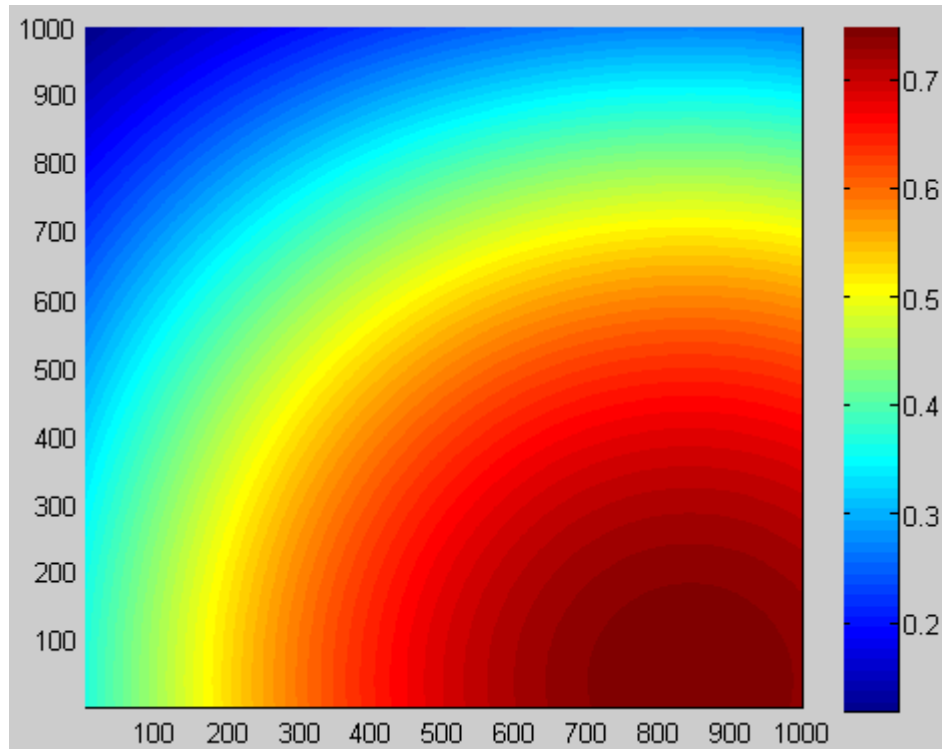


FIGURA 12: MAPA MEDIA INDICADOR

Incorporando todos los pasos anteriores, a modo de ejemplo, se muestra el proceso para una de las realizaciones de los datos (Realización número 50). La numeración de los pasos corresponde a los explicados en la Figura 9.

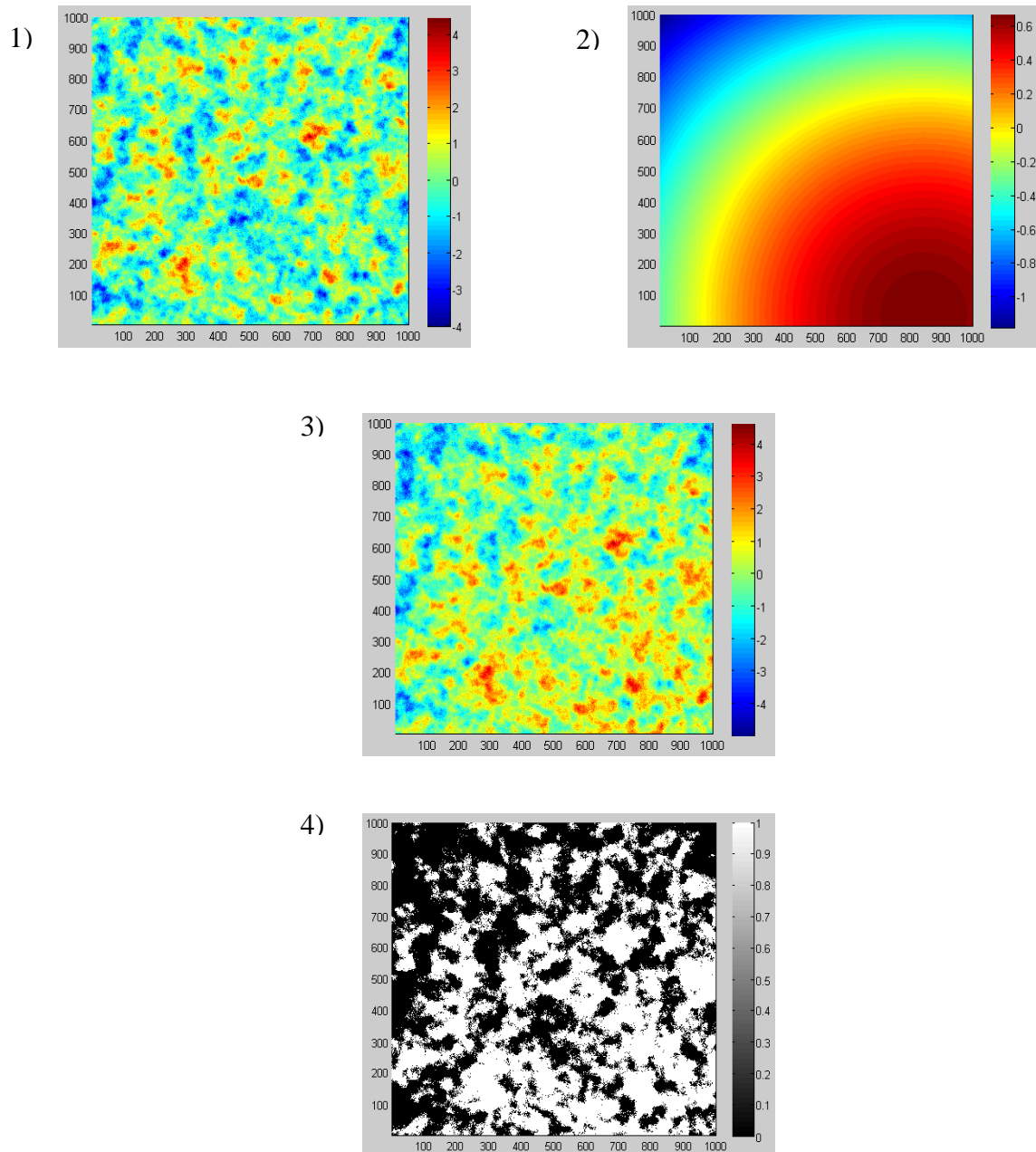


FIGURA 13: ESQUEMA EJEMPLO DATOS SINTÉTICOS REALIZACIÓN 50

## 4.2. Procesamiento de Datos para Estimación

Como se menciona en el capítulo de Metodología, en el caso del kriging de indicadores tradicional, sólo se centra en cero la variable, de tal manera que se puede estimar mediante kriging simple de media cero (Ecuación 16).

Para el caso propuesto, los indicadores son centrados en cero, y además estandarizados, de acuerdo a la Ecuación 17, para poder realizar kriging simple de media cero, con variograma de meseta uno.

Se muestrean las variables respectivas para cada caso a través de un muestreo regular en una grilla de 20x20 datos.

A continuación también se modelan los variogramas para cada caso. Dado que se tienen 100 realizaciones también se tienen 100 variogramas, razón por la cual se modela el variograma promedio de los variogramas de las 100 realizaciones. El modelamiento y visualización de este es realizado con la herramienta Gamsim de GSLIB.

Los modelos obtenidos para cada caso constan de un efecto pepa y un modelo exponencial, cuyos alcances se detallan entre paréntesis, en metros.

$$\begin{aligned}\gamma_I(h)_{Tradicional} &= 0,052 + 0,172 * \exp(65) \\ \gamma_I(h)_{Propuesta} &= 0,22 + 0,778 * \exp(135)\end{aligned}$$

En la Figura 14 se muestran a la izquierda los variogramas graficados de las realizaciones según caso, y a su derecha el variograma promedio de los anteriores junto a su versión modelada. El segmento superior corresponde al caso tradicional y el inferior a la propuesta. Se utiliza variograma omnidireccional.

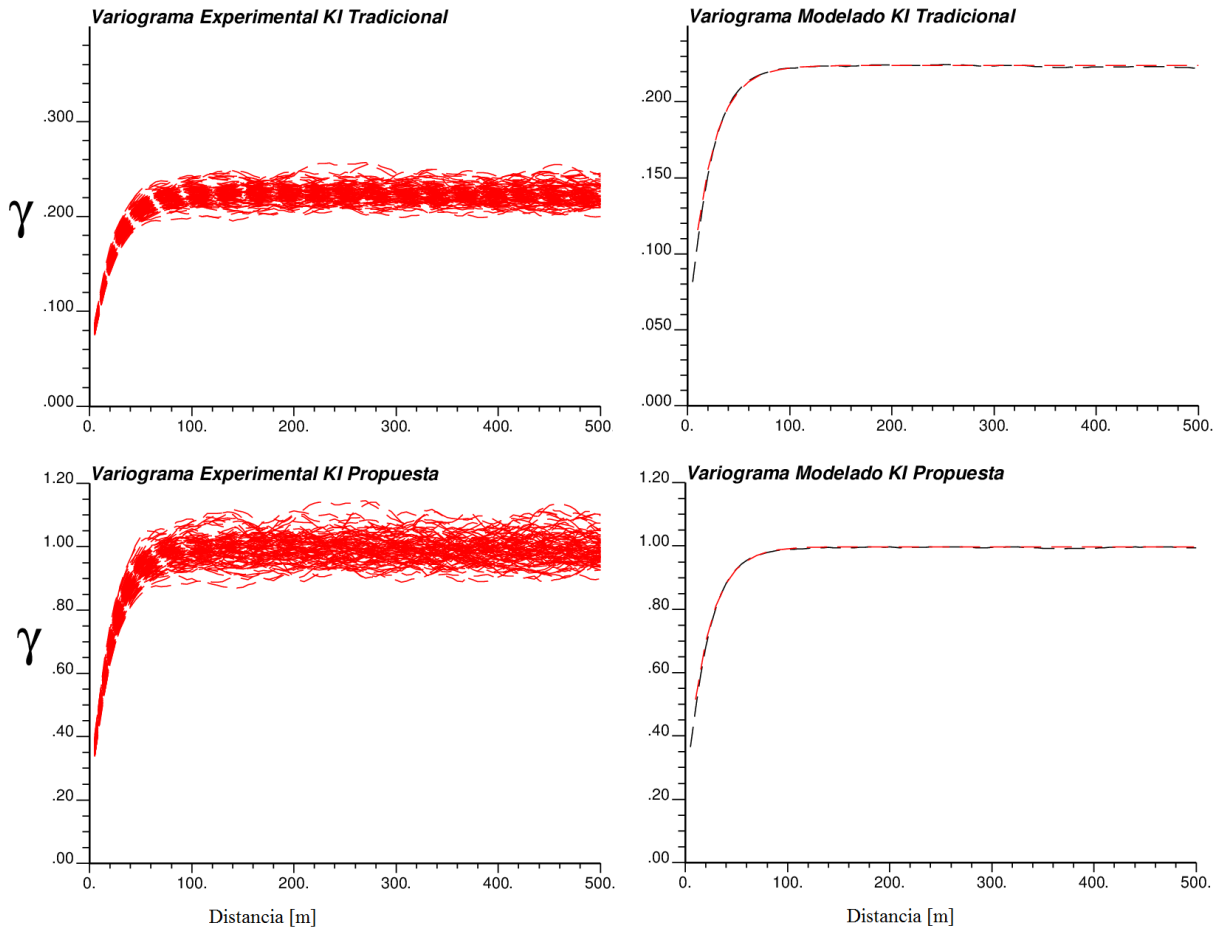


FIGURA 14: VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES Y MODELADOS

Se ejecuta el kriging simple para cada caso mencionado, con sus respectivos variogramas y datos muestreados, en la grilla de 1000x1000, para las 100 realizaciones. Se utiliza una vecindad única para realizar la estimación. Esto es realizado a través de la rutina Cokrige en Matlab [12].

Para comparar el comportamiento de ambas metodologías, primero que todo se debe obtener el indicador estimado a partir de la estimación de  $J(x)$  según el caso que corresponda. Posteriormente, es posible calcular las diferencias entre indicadores originales y estimados.

Con esto se obtienen en cada punto, y respecto a las 100 realizaciones:

- error promedio  $\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{100} I_i(x) - I_i^*(x)}{100}$
- error absoluto promedio  $\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{100} |I_i(x) - I_i^*(x)|}{100}$
- error cuadrático promedio  $\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{100} (I_i(x) - I_i^*(x))^2}{100}$

También se calcula la varianza del kriging promedio en cada punto. Esta se encuentra dentro de los resultados entregados por la rutina Cokrige de Matlab, pero para el caso propuesto debe ser procesada por el cambio de variable que es utilizado.

Se tiene entonces:

$$\sigma_I^{2*} = \sigma_J^{2*}$$

ECUACIÓN 21: VARIANZA DEL KRIGING MÉTODO TRADICIONAL

$$\sigma_I^{2*} = \sigma_J^{2*} * m_I(x) * [1 - m_I(x)]$$

ECUACIÓN 22: VARIANZA DEL KRIGING MÉTODO PROPUESTO

Con:

$$\sigma_I^{2*} = \text{varianza indicadores estimados}$$

$$\sigma_J^{2*} = \text{varianza variable } J(x) \text{ estimada}$$

Es posible mapear todos los análisis anteriormente mencionados, ya que se tiene información para cada punto.

También, para el caso del error cuadrático se realiza un “Ranking”, en el cual se cuenta cuantos puntos de la grilla estimada presentan menores errores utilizando la propuesta versus utilizando el método tradicional.

### 4.3. Análisis de Sensibilidad

Al caso ya estudiado se le suman sensibilidades para poder comparar el comportamiento de la propuesta en otro escenario.

Los parámetros que se cambiaron en este caso son:

- Variograma de variable Gaussiana: Es un variograma seno exponencial, con alcance 150, pepa 0,1 y meseta 1.
- Muestreo datos: Se decide disminuir la cantidad de datos condicionantes para realizar la estimación, por la influencia de estos sobre las estimaciones. Originalmente se disponía de 400 datos muestreados, cantidad que es disminuida a sólo 16. Esto para verificar que la propuesta no presente mejores resultados sólo por la alta cantidad de puntos condicionantes en la estimación.

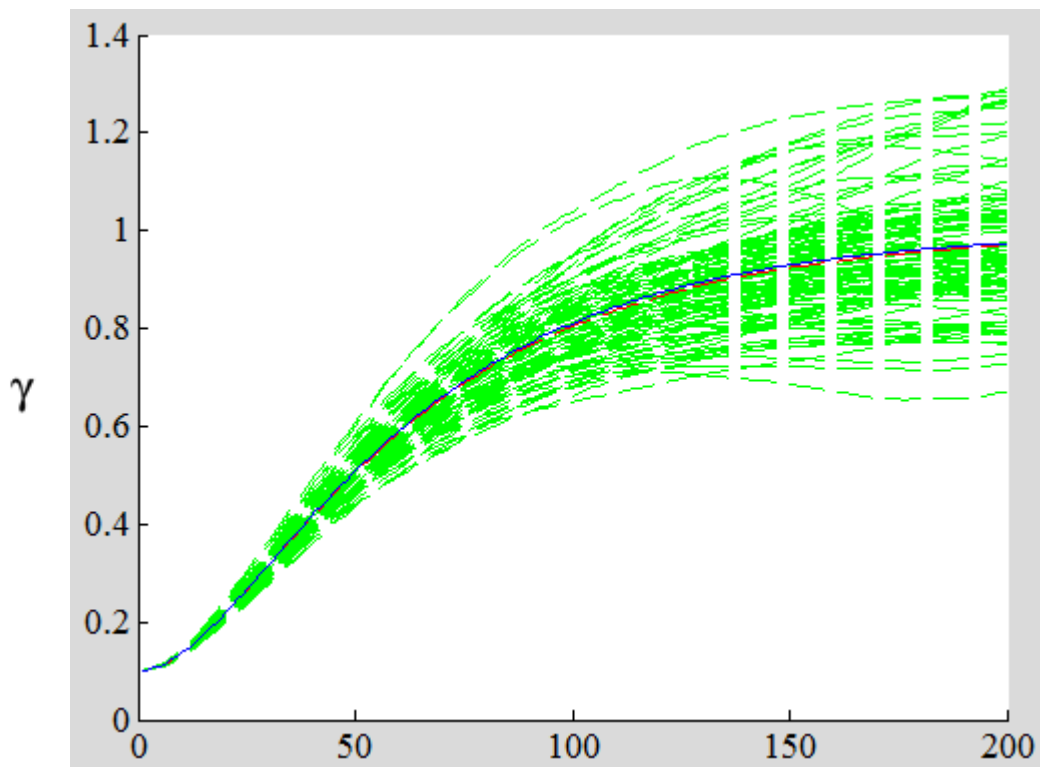


FIGURA 15: VARIOGRAMA DATOS GAUSSIANOS ANÁLISIS SENSIBILIDAD

Se siguen los pasos antes mencionados para crear la nueva base de datos, es decir, se generan 100 realizaciones de los datos Gaussianos con su nuevo variograma a través de simulación por bandas rotantes, se les suma la media variable y se trunca para obtener indicadores. Se mantiene el límite de truncación en cero.

Se muestra a modo de ejemplo el mismo esquema que en la Figura 13, pero aplicando los cambios del análisis de sensibilidad.

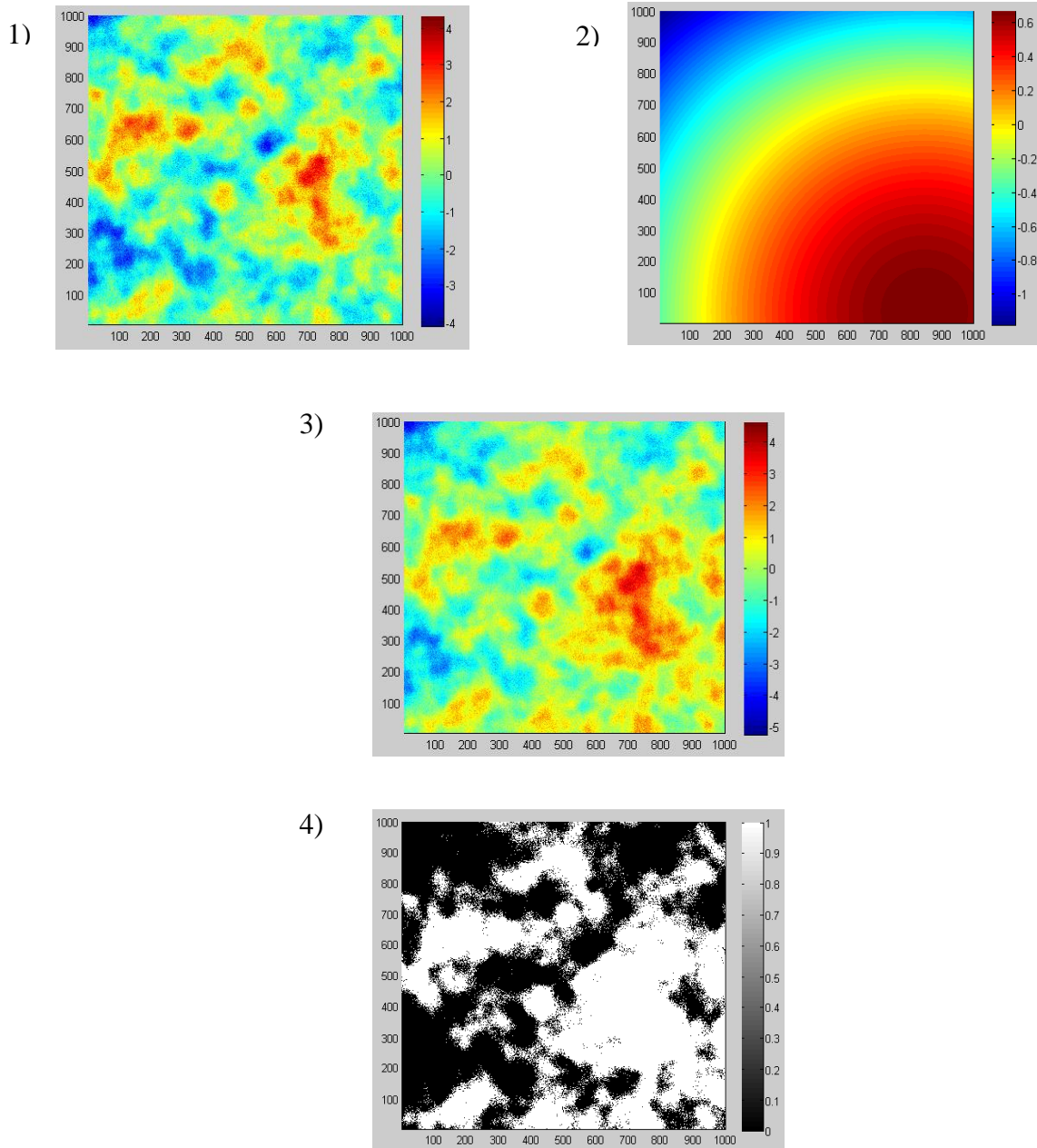


FIGURA 16: ESQUEMA EJEMPLO DATOS SINTÉTICOS REALIZACIÓN 50 SENSIBILIDAD

Luego con la media del indicador, se obtienen las variables  $J(x)$  a estimar para ambas metodologías. Se muestrean sólo 16 puntos de forma regular, y con ellos se estima mediante kriging simple de media cero en una malla de 1000x1000.

Los modelos obtenidos para cada caso constan de un efecto pepa junto a un modelo exponencial cuyos alcances se detallan entre paréntesis, en metros.

$$\begin{aligned}\gamma_I(h)_{Tradicional} &= 0,045 + 0,178 * \exp(-155/h) \\ \gamma_I(h)_{Propuesta} &= 0,2 + 0,8 * \exp(-155/h)\end{aligned}$$

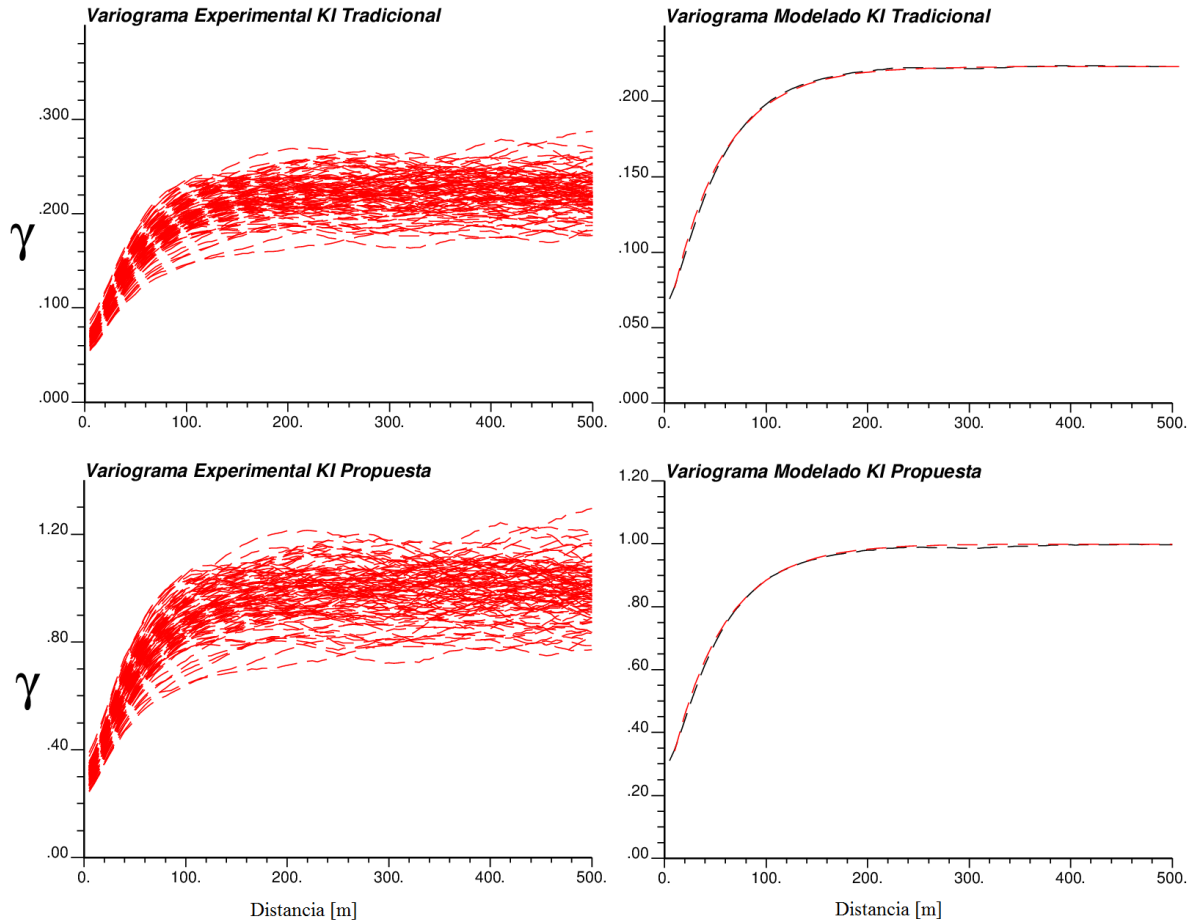


FIGURA 17: VARIOGRAMAS EXPERIMENTALES Y MODELADOS ANÁLISIS SENSIBILIDAD

Los resultados de la estimación entre cada método se comparan nuevamente mediante varianza del kriging, error promedio, error promedio absoluto y error cuadrático promedio entre las realizaciones en cada punto.

Se mapean los errores antes mencionados, dada la información disponible en cada punto de la malla.

Y en el caso del error cuadrático se realiza un “Ranking”, en el cual se cuenta cuantos puntos de la grilla estimada presentan menores errores utilizando la propuesta versus utilizando el método tradicional.

En la Sección 6.1 del presente informe, se muestran los resultados de los análisis explicados.



## 5. CASO DE ESTUDIO II: BASE DE DATOS VETA BATEAS

El distrito minero de Caylloma se encuentra en la provincia del mismo nombre, a 225 kilómetros de la ciudad de Arequipa en Perú, y a 14 kilómetros del poblado de Caylloma. Yace a una altura de entre 4400 y 4800 metros sobre el nivel del mar. Sus coordenadas son en Latitud: 15° 12' 15" S y en Longitud: 71° 51' 40" O.

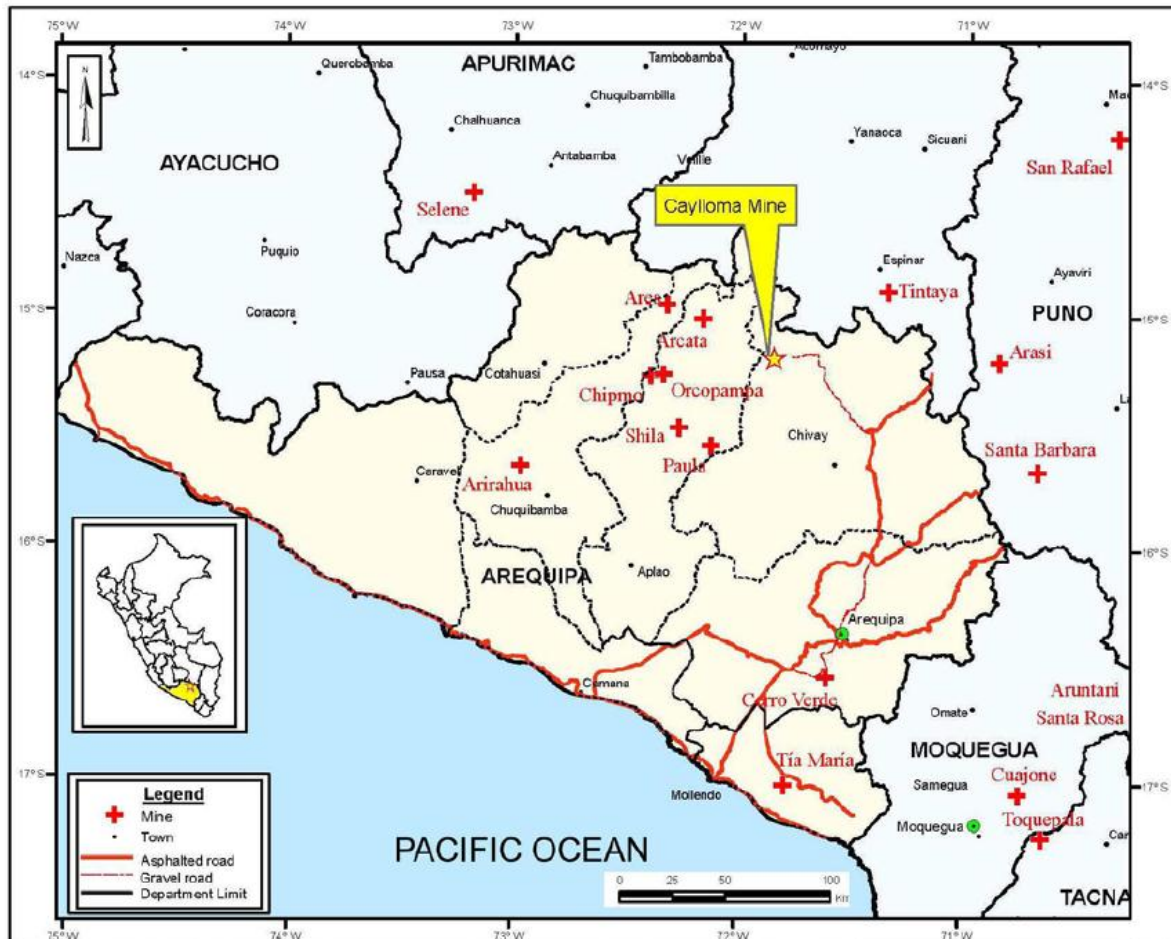


FIGURA 18: MAPA UBICACIÓN CAYLLOMA [13]

La Mina Caylloma es explotada a través de Minera Bateas S.A.C., subsidiaria de Fortuna Silver Mines Inc., utilizando distintos métodos de explotación subterránea, dependiendo del área a explotar.

El distrito posee seis sistemas de vetas importantes. Dentro del sistema San Cristóbal se encuentra la veta Bateas, de la cual se tiene información de muestreo a través de canales.

Su mineralización, es de tipo epitermal, contiene principalmente sulfosales, sulfuros de plata y sulfuros de Zinc-Plomo-Cobre. En el lugar también se encuentra ganga de cuarzo, rodonita y calcita.

Históricamente, este ha sido un lugar importante para la minería, existiendo documentación de actividad minera de parte de mineros españoles en 1620.

## 5.1. Geología

La roca caja en la que se presentan las vetas mineralizadas del distrito Caylloma son de tipo volcánica del período Terciario, pertenecientes al Grupo Tacaza. Ésta yace en discordancia angular sobre una secuencia sedimentaria de cuarcitas, areniscas y lutitas del Jurásico-Cretáceo correspondiente al Grupo Yura. También, existen áreas cubiertas por material volcánico del Plio-Pleistoceno de distintas potencias, junto a sedimentos aluviales y clásticos.

A continuación se detalla la columna estratigráfica del sector.

- Grupo Yura: Formación rocosa expuesta de mayor antigüedad, correspondiente al período Jurásico-Cretáceo. El Grupo está compuesto por ortocuarcitas blancas y grises, limolitas y areniscas oscuras, intercalado con delgadas capas de esquistos negros. En general, la potencia del grupo es de aproximadamente 400 metros.
- Grupo Tacaza: Consiste en una secuencia de lavas y piroclastos intercalados con cenizas, las cuales yacen en discordancia angular sobre las rocas del Grupo Yura. Presenta un color café rojizo, cambiando a verde en zonas de alteración clorítica. La potencia del grupo se estima en 900 metros, y corresponde al período del Mioceno.
- Depósitos volcánicos recientes: Sobre el Grupo Tacaza y con contactos discordantes, se encuentran lavas andesíticas, riolitas, dacitas y tobas de composiciones similares. Presenta afloramientos con pseudo estratificación sub horizontal. Pertenece al período entre el Mioceno y Pleistoceno.
- Depósitos clásticos recientes: La parte baja del valle se encuentra cubierta por materiales aluviales, depósitos coluviales, morrenas y material fluvio-glacial de potencia variable.
- Rocas ígneas intrusivas: Se presentan afloramientos de intrusiones subvolcánicas de composición riolítica, riodacítica y andesítica, junto a diques y domos o cúpulas.

Las dos figuras siguientes muestran la columna estratigráfica detallada previamente, y un mapa geológico del distrito de Caylloma.

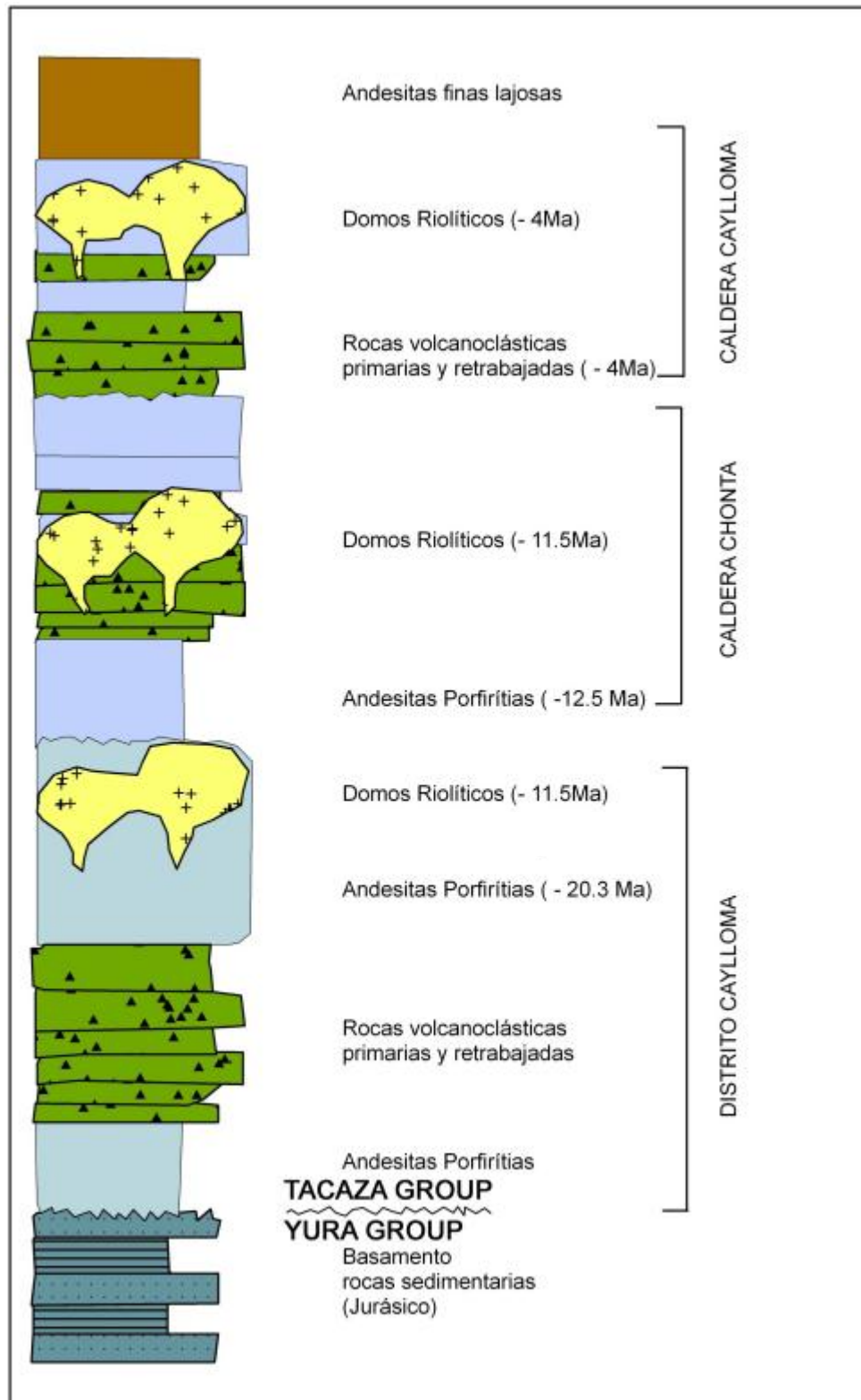
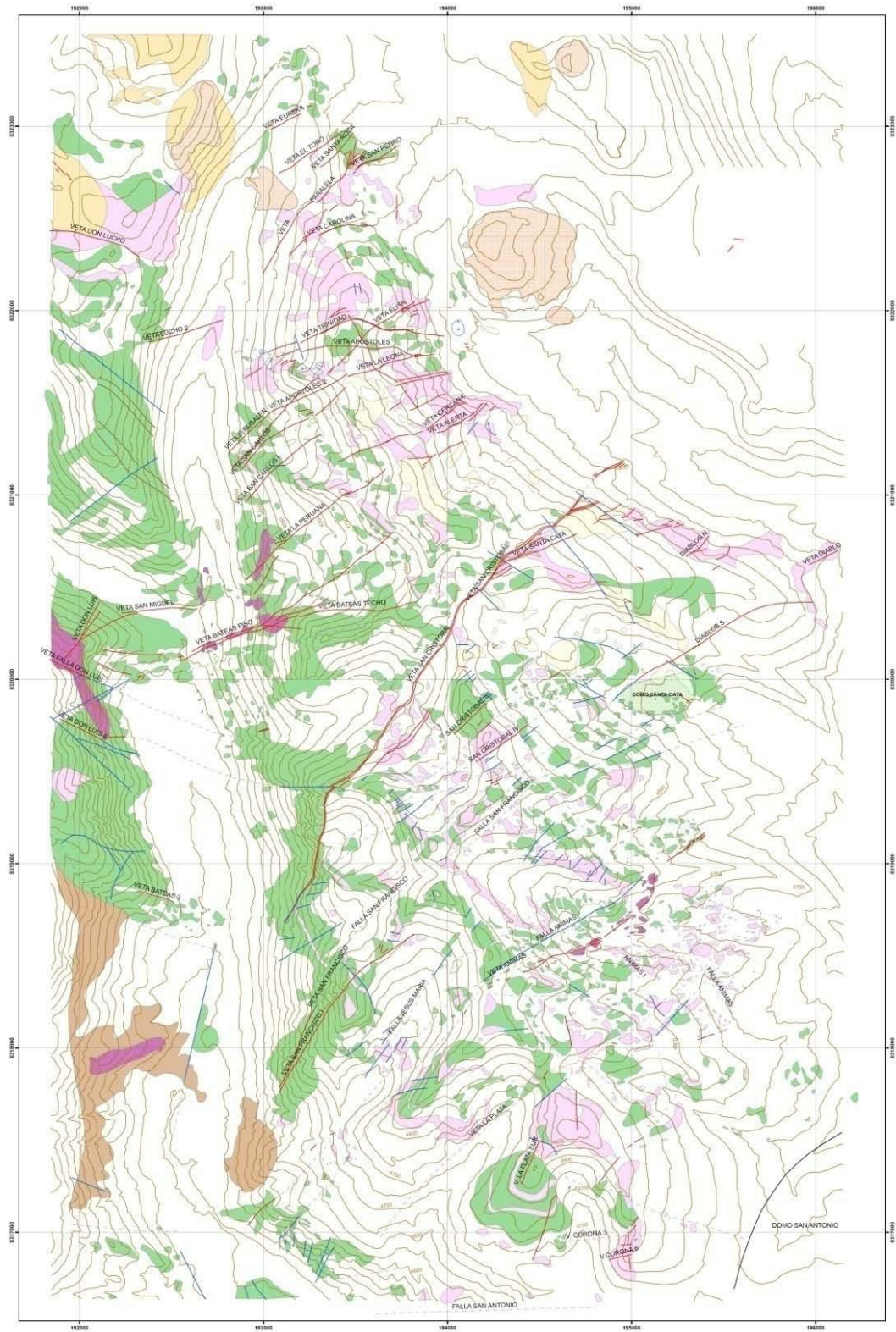


FIGURA 19: COLUMNA ESTRATIGRÁFICA DISTRITO CAYLLOMA [13]



**Leyenda**

<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #f08080; border: 1px solid black;"></span> Roca Volcánicas	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #32cd32; border: 1px solid black;"></span> Andecita	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #ffcc99; border: 1px solid black;"></span> Cuaternario	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #4a7ebb; border: 1px solid black; text-align: center; font-size: 8px;">+</span> Brecha	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #ffcc99; border: 1px solid black;"></span> Domo Riolítico
<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #800080; border: 1px solid black;"></span> Dacitas	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #8b4513; border: 1px solid black;"></span> Roca Sedimentaria	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; border: 1px solid green;"></span> Contacto Aproximado	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #8b4513; border: 1px solid black;"></span> Turba Riolítica	<span style="display:inline-block; width:10px; height:10px; background-color: #32cd32; border: 1px solid black;"></span> Domo Andesítico

<span style="display:inline-block; width:10px; border-bottom: 1px solid blue;"></span> Falla	<span style="display:inline-block; width:10px; border-bottom: 1px solid red;"></span> Veta
--	--

FIGURA 20: MAPA VETAS DISTRITO CAYLLOMA [13]



## 5.2. Mineralización

### 5.2.1. Descripción de la mineralización

Las vetas epitermales presentes en el distrito de Caylloma, se caracterizan por presentar minerales como piritita, esfalerita, galena, calcopirita, marcasita, oro, antimonita, argentopirita y variadas sulfosales con plata. Esta mineralización es acompañada por ganga de cuarzo, rodonita, rodocrosita y calcita.

Coexisten dos tipos distintos de mineralización, la primera responsable principalmente a las altas concentraciones de plata presentes, y la segunda con aportes polimetálicos (Plata, plomo, zinc, cobre y oro). Se cree posible que la mineralización polimetálica se deba a fluidos a altas temperaturas, posiblemente emanados de un skarn profundo, mientras que la mineralización de plata se relaciona a fluidos a menores temperaturas y profundidades.

Se presentan tres tipos de alteraciones hidrotermales: Cuarzo-Adularia, Cuarzo-Ilita y Propilítica. La primera se encuentra restringida a los bordes de las vetas, con un espesor proporcional al de la veta. Se generan vetillas de piritita diseminada en la roca de caja al ocurrir un reemplazo de la matriz volcánica en las rocas por cuarzo. En zonas profundas, la zona de alteración cuarzo-adularita se transforma en cuarzo-ilita al alejarse de la veta mineralizada.

La alteración propilítica se encuentra a través de todo el distrito, probablemente como un componente regional y no relacionado a la mineralización. Esta agrega clorita, calcita y piritita a la zona.

En la tabla a continuación se presenta un resumen de los minerales con mayor presencia en Caylloma.

TABLA 1: RESUMEN MINERALES PRESENTES [14]

<b>Sulfuros</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Sulfosales</b>	<b>Símbolo</b>
Esfalerita	ZnS	Tetrahedrita	$\text{Cu}_{12}\text{Sb}_4\text{S}_{13}$
Galena	PbS	Pirargirita	$\text{Ag}_3\text{SbS}_3$
Calcopirita	$\text{CuFeS}_2$	Proustita	$\text{Ag}_3\text{AsS}_3$
Piritita	FeS		
Marcasita	$\text{FeS}_2$		
Alabandita	MnS		
Bornita	$\text{Cu}_5\text{FeS}_4$		
Covelita	CuS		
<b>Óxidos</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Hidróxidos</b>	<b>Símbolo</b>
Magnetita	$\text{Fe}_3\text{O}_4$	Limonita	$\text{FeO}(\text{OH}) \cdot n\text{H}_2\text{O}$
Hematita	$\text{Fe}_2\text{O}_3$	Psilomelano	$(\text{Ba}, \text{H}_2\text{O})_2\text{Mn}_5\text{O}_{10}$
Pirolusita	$\text{MnO}_2$		
<b>Carbonatos</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Silicatos</b>	<b>Símbolo</b>
Calcita	$\text{CaCO}_3$	Rodonita	$(\text{Mn}^{+2})\text{SiO}_3$
Rodocrosita	$\text{MnCO}_3$	Cuarzo	$\text{SiO}_2$

### 5.2.2. *Vetas mineralizadas*

Se reconocen seis vetas importantes en el distrito, la mayoría con rumbo noreste-sureste y manto hacia el sureste. La roca caja, perteneciente al Grupo volcánico Tacaza corresponde a brechas, lavas y clastos andesíticos.

Las tres vetas ubicadas más al norte contienen mineralizaciones de plata, con un pequeño aporte de metales base y oro, mientras que las ubicadas más al sur corresponden a sistemas polimetálicos con plata, plomo, zinc, cobre y oro.

Ordenadas de norte a sur, se tienen las siguientes vetas:

- Vetas de Plata:
  - Sistema San Pedro: Eureka, Copa de oro, El Toro, San Pedro, Paralela, La Blanca, Santa Rosa, Santa Isabel.
  - Sistema Trinidad: Trinidad, Eliza, Leona, Apóstoles, San Carlos, Jerusalén.
  - Sistema Santo Domingo: Santo Domingo, La Peruana, Alerta, Cercana.
  
- Vetas Polimetálicas
  - Sistema San Cristóbal: San Cristóbal, Santa Catalina, Bateas, Soledad, Silvia.
  - Sistema Antimonio: La Plata, Antimonio.
  - Sistema Ánimas: Ánimas, El Diablo.

De las vetas mencionadas, la de mayor interés a este trabajo corresponde a la Veta Bateas, polimetálica, perteneciente al Sistema San Cristóbal.

### 5.2.3. *Veta Bateas*

La veta Bateas se separa en dos ramas: Bateas Techo al sur, y Bateas Piso al norte.

La veta Bateas Techo aflora a superficie aproximadamente 1.800 metros de longitud. En la cumbre de la colina Vilafro la veta está cubierta por cenizas volcánicas recientes. La roca caja corresponde a andesita con menor proporción de dacita y latita. Ésta presenta un rumbo N70°E y manto 82°SE.

La mineralización polimetálica se presenta en dos zonas definidas. Al noreste, la veta contiene cuarzo opalino y cuarzo calcedonia con presencia de sulfosales de plata, pirita y calcita diseminados. Al sureste de la veta, se encuentra ganga de cuarzo, rodonita, rodocrosita, junto a vetillas de esfalerita, galena, calcopirita y pirita diseminada.

El sector noreste de la veta, posee manto de 52°NW y su rumbo es paralelo al de la veta Bateas Techo. Su mineralización se caracteriza por sulfuros de metales base, esfalerita, galena y pirita diseminada en ganga de cuarzo, calcita, rodonita y rodocrosita.

La Veta Bateas constituye una estructura de alta complejidad, pues en su extremo oeste existe una fractura de 400 metros de extensión.

Esta veta es muestreada a través de sondajes de exploración y también a través de canales. Se dispone de la información del muestreo de canales. Se muestrearon todos los afloramientos de la veta en galerías y piques. Las muestras fueron tomadas cada dos metros en la dirección de la veta. Cada canal tiene entre 20 y 30 centímetros de ancho, y aproximadamente dos centímetros de profundidad. El largo de cada muestra no supera el metro y medio de largo, este era determinado por el geólogo dependiendo de factores como la naturaleza de la veta, alteraciones presentes, entre otros.

La muestra era triturada en el lugar, para asegurar homogeneidad. Posteriormente, era mezclada y separada en cuatro partes iguales, aceptando sólo dos de estas como muestra. Cada muestra pesa entre 2.5 y 3 kilogramos.

### **5.3. Operación Minera**

Minera Caylloma opera extrayendo mineral de varias vetas. En la actualidad opera a un ritmo de 1.300 toneladas al día. Esta producción se logra con la extracción de la veta polimetálica Ánimas y la finalización de la veta Bateas. También se mantiene activa la exploración en la veta Don Luis, veta de altas leyes de oro y plata.

Durante el año 2013 se ha tenido una producción de 568.722 onzas de plata, 545 onzas de oro, 4.729.912 onzas de plomo y 6.467.987 onzas de zinc.

El costo por tonelada procesada se calcula en 87,06 US\$.

El principal método de explotación es overhand cut and fill, o corte y relleno ascendente. Este método se realiza mediante la extracción de niveles horizontales de mineral, iniciando desde los niveles inferiores y avanzando hacia los niveles superiores. Tras ser extraído el mineral, el nivel es rellenado con material estéril hasta tener una altura adecuada para la perforación del próximo nivel. Esto para generar un nuevo piso y para reforzar la excavación.

Este método aplicado en Caylloma, se realiza a través de galerías horizontales separadas entre 25 y 30 metros. Respecto a los desarrollos verticales, se construyen chimeneas espaciadas cada 50 metros, separando la veta en bloques. Estas chimeneas también son utilizadas como cara libre.

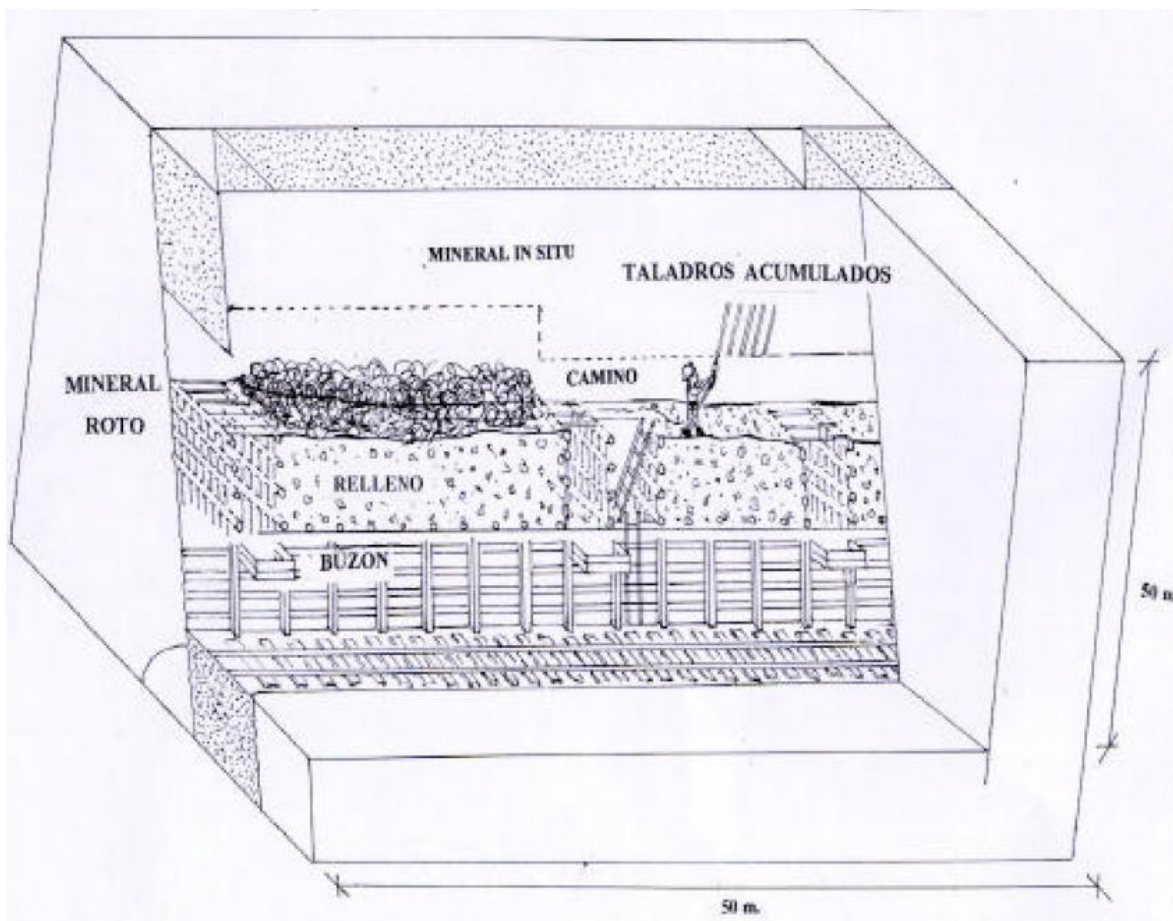


FIGURA 21: ESQUEMA MÉTODO EXPLOTACIÓN [14]

#### 5.4. Estudio Exploratorio de Datos

Se tiene información de esta veta, gracias a un muestreo por canales realizado en aproximadamente 700 metros de longitud de la veta. Se posee información acerca de las leyes de plata, oro, plomo zinc y cobre, sus coordenadas, longitud y orientación de cada una de las muestras [15].

Tras realizar análisis de outliers y de datos duplicados, se mantiene la base de datos como fue entregada.

TABLA 2: ESTADÍSTICAS BÁSICAS MUESTREO POR CANALES

	Ag [ppm]	Au [ppm]	Pb [%]	Zn [%]	Cu [%]
No. muestras	5.736	5.736	5.736	5.736	5.736
Mínimo	2	0,001	0,002	0,002	0,002
Máximo	49.005	45,686	14,636	19,910	17,579
Promedio	1.197,279	0,153	0,994	1,439	0,683
Desv. Est.	3.202,697	1,043	1,432	2,035	1,142
Varianza	10.257.268,901	1,087	2,052	4,142	1,304



Del muestreo, también se desprende un estudio de correlación entre las leyes minerales encontradas.

TABLA 3: CORRELACIÓN ENTRE LEYES MINERALES

	Ag [ppm]	Au [ppm]	Pb [%]	Zn [%]	Cu [%]
Ag [ppm]	1				
Au [ppm]	0,066	1			
Pb [%]	0,543	0,098	1		
Zn [%]	0,460	0,094	0,936	1	
Cu [%]	0,895	0,089	0,757	0,673	1

Las leyes minerales más correlacionadas entre ellas son Plomo y Zinc, Plata y Cobre. Mientras que las menos correlacionadas son Plata y Oro, Oro y Cobre.

Observando la información sobre el largo de los canales, se tienen canales desde centímetros de largo, hasta 2 metros de largo. Sumando todos los canales muestreados, se tienen más de 2 kilómetros de canales.

TABLA 4: ESTADÍSTICAS BÁSICAS LARGO DE CANALES

Largo Canales [m]	
Mínimo	0,01
Máximo	2,52
Medio	0,38
Total	2.181

Junto a los datos de muestreo, también se conoce un modelo de bloques de la veta, que contiene sólo información respecto a si un bloque pertenece a la veta o no, y en caso de que un bloque no sea caracterizado como completamente perteneciente a la veta, se conoce su proporción de volumen correspondiente a ésta, según interpretación de la veta realizada por el geólogo.

TABLA 5: COORDENADAS MODELO DE BLOQUES

	X	Y	Z
Mínimo	2.900,5	19.900,5	4.400,5
Máximo	3.399,5	20.138,5	4.659,5
Dimensiones bloques [m]	1	1	1

Se tienen bloques de 1[m]x1[m]x1[m], en una longitud en el Este (Eje X) de aproximadamente 500 metros, en el Norte de 238 metros. El modelo de bloques se extiende en la vertical en poco menos de 260 metros.

De acuerdo a las proporciones de la veta en cada bloque se tiene la siguiente información.

TABLA 6: ESTADÍSTICAS BÁSICAS PROPORCIONES VETA

Volumen Veta	
Proporción máxima	1
Proporción mínima	0,001
Proporción promedio	0,914
No. bloques	118.633

Se muestran a continuación visualizaciones de los datos de las proporciones de cada bloque que corresponden a la veta, es decir, mientras más rojo sea un bloque, mayor parte de su volumen pertenece a la veta.

En cada una de las figuras, se muestra toda la potencia de la veta, es decir, no son planos en particular, sino vistas de la veta desde ciertos ángulos.

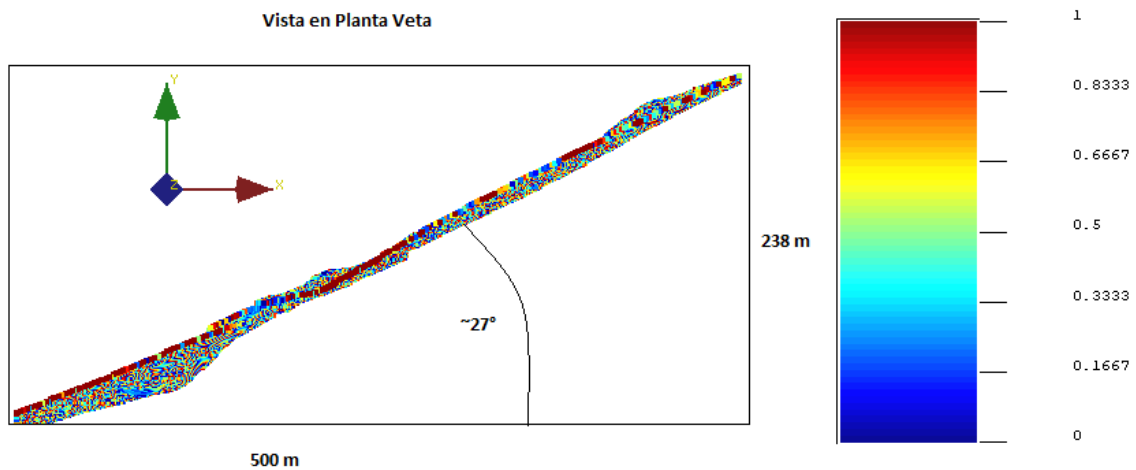


FIGURA 22: VISTA DESDE ARRIBA VETA

También se realizaron visualizaciones de los datos muestreados y del modelo de bloques, posterior a una rotación en  $27^\circ$  de los ejes (más adelante se explica la razón de esta rotación). Las vistas nuevamente consideran todos los bloques pertenecientes al modelo de bloques, no sólo una planta o perfil en particular.

### Vista en Planta Veta

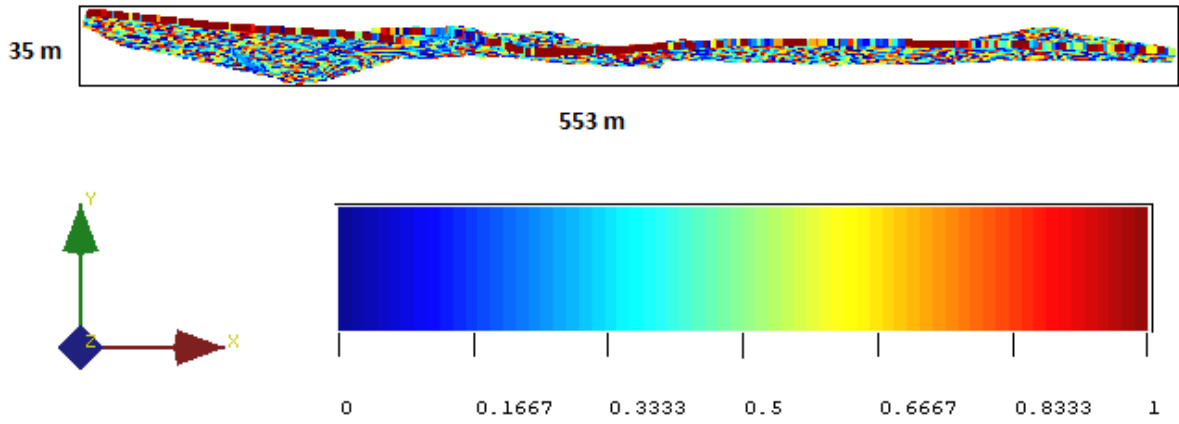


FIGURA 23: VISTA DESDE ARRIBA VETA ROTADA

### Perfil Transversal Veta

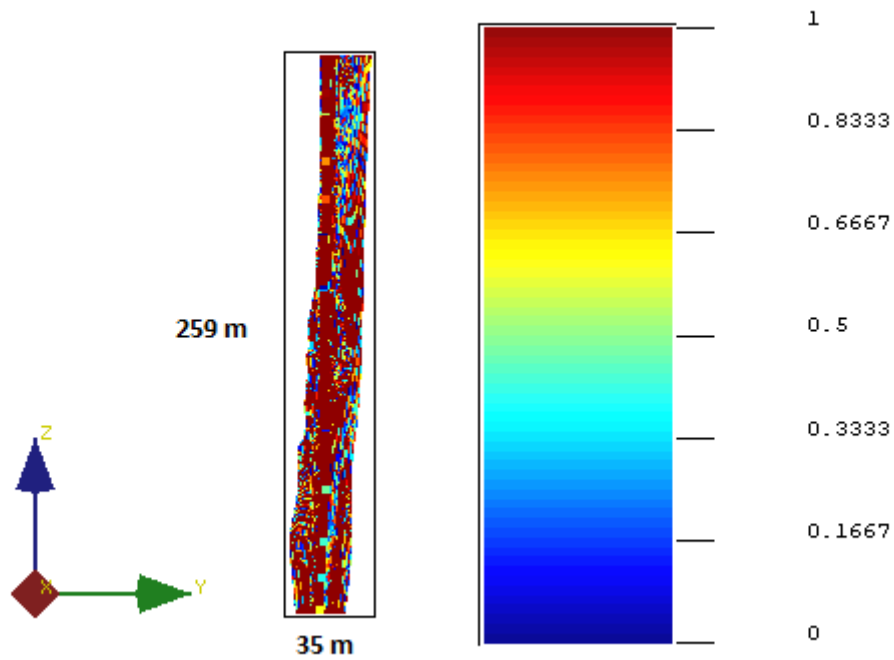


FIGURA 24: VISTA TRANSVERSAL VETA ROTADA

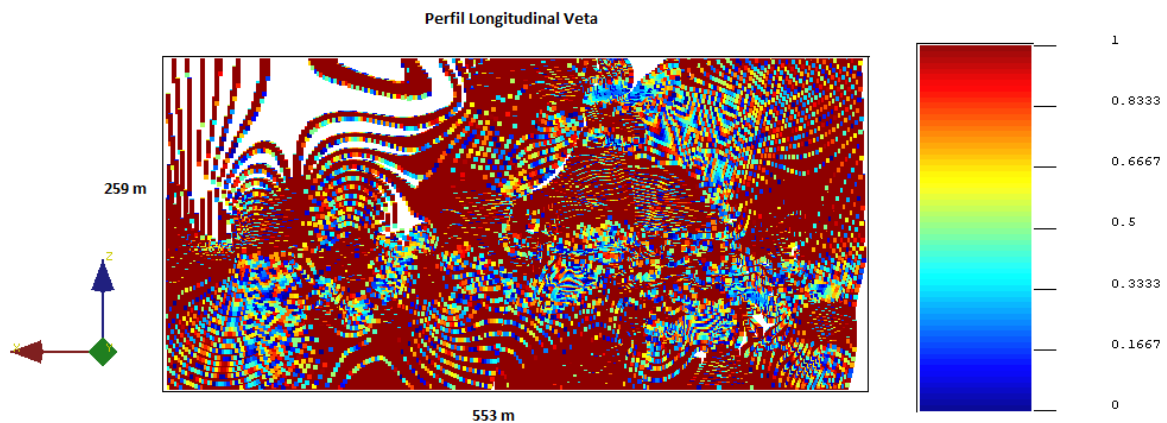


FIGURA 25: VISTA LONGITUDINAL VETA ROTADA

A continuación se muestra en el perfil longitudinal la interacción entre el muestreo por canales, y el modelo de bloques de la veta. En gris se distinguen los datos de la veta, y en azul los datos del muestreo por canales.

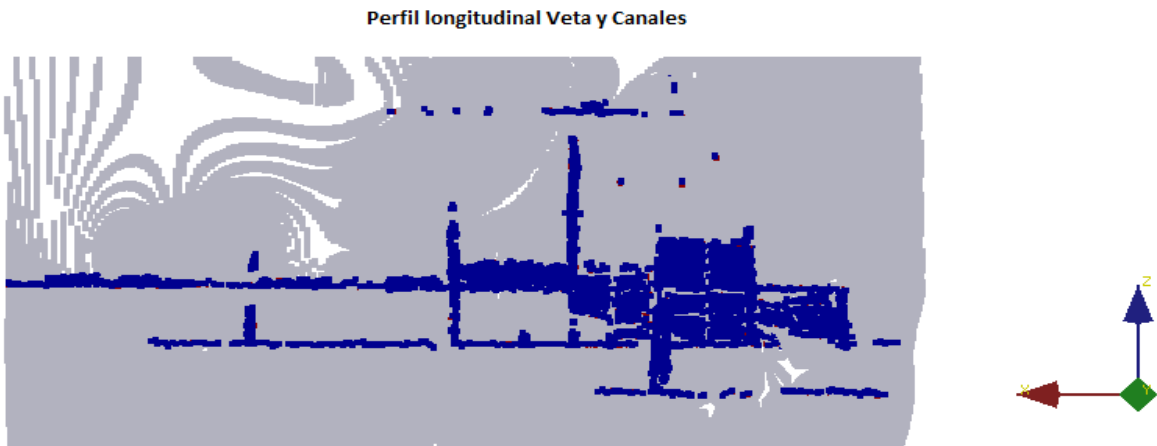


FIGURA 26: VISTA LONGITUDINAL VETA Y CANALES ROTADOS

### 5.5. Procesamiento de Datos

Si bien el modelo de bloques cuenta con información para simular, se requiere generar un borde de datos de estéril para contar posteriormente con un indicador, de lo contrario sólo se contaría con datos de una categoría correspondiente a la veta.

Se realiza un procedimiento similar con los canales conocidos, pasando de 5.736 datos a 16.568. En este caso, en cada extremo de cada canal, se generan dos muestras con el indicador

correspondiente al estéril. Se tiene la precaución de mantener la orientación de los canales al agregar estos datos.

Por la alta cantidad de bloques presentes, se decide simular solamente una planta. Esta es seleccionada de acuerdo a los siguientes requerimientos:

- Suficientes bloques pertenecientes a la veta.
- Suficientes datos de muestreo en la cercanía.

Siguiendo estos requerimientos, se selecciona la planta 4482,5. Es una de las plantas con mayor cantidad de datos pertenecientes a la veta, y se encuentra entre las dos galerías principales de muestreo. En la próxima figura se tiene en negro el muestreo por canales, y en rojo la cota seleccionada.



FIGURA 27: COTA SIMULADA E INTERACCIÓN CON CANALES

La veta posee una orientación en planta bastante particular, rotada en  $27^\circ$  con respecto al eje X. Por esto mismo, es necesario rotar la veta, de tal forma de dejarla paralela al eje X y así no generar un exceso de datos de estéril.

También, dada la baja potencia de la veta (menor a 10 metros en su máxima potencia), se refina la grilla originalmente entregada, se obtienen bloques de 0,5 metros en dirección norte y este. Se realiza interpolación para asignar valores a las locaciones creadas.

La cantidad de bloques que se tienen para simular son 46.367.

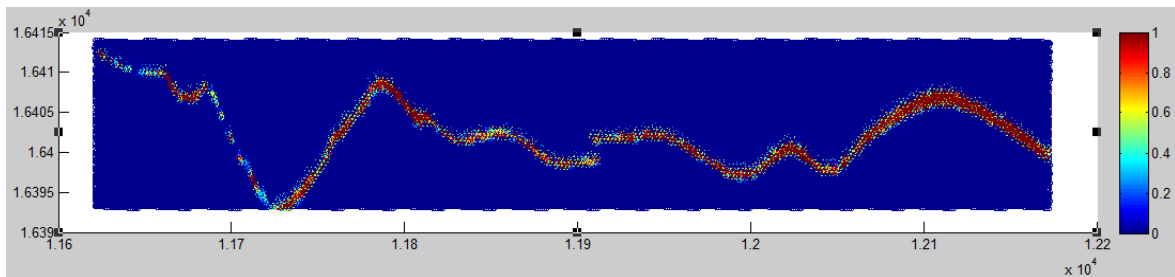


FIGURA 28: PROPORCIONES BLOQUES EN VETA, COTA 4482,5

Dado que el estudio que se lleva a cabo necesita de medias variables, se calculan las medias variables para la veta como para los canales, con una vecindad de radios 5[m]x5[m]x5[m].

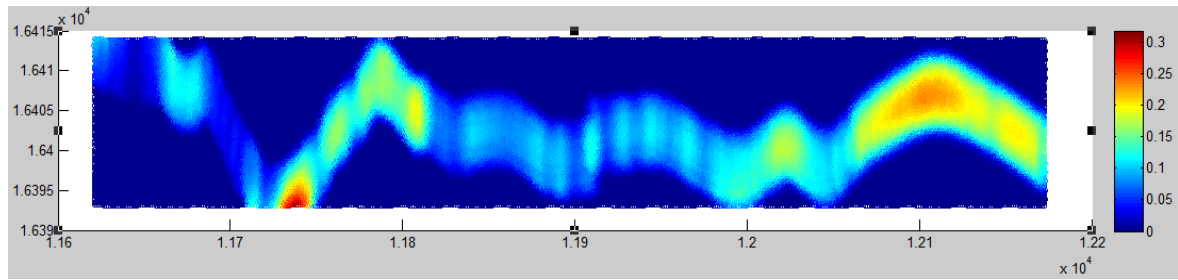


FIGURA 29: MEDIA LOCAL VETA COTA 4482,5

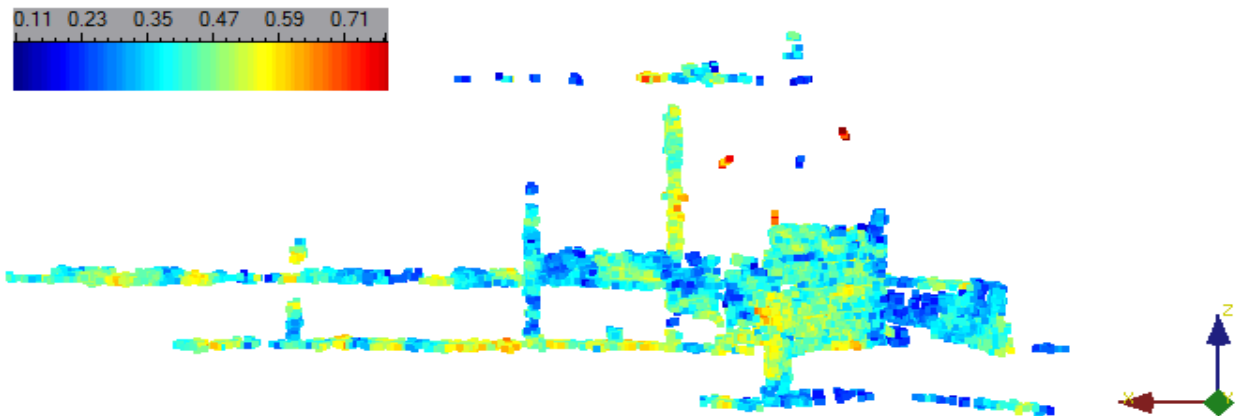


FIGURA 30: MEDIA VARIABLE CANALES

## 5.6. Análisis Variográfico

Para el caso de los variogramas utilizados en la simulación, estos corresponden a la variable  $J(x)$  ya mencionada, que cambia dependiendo de la metodología a estudiar. Dado que se simula sólo una planta, se generan los variogramas experimentales tomando en cuenta sólo datos con locaciones en la planta seleccionada.

### 5.6.1. Mapa Variográfico

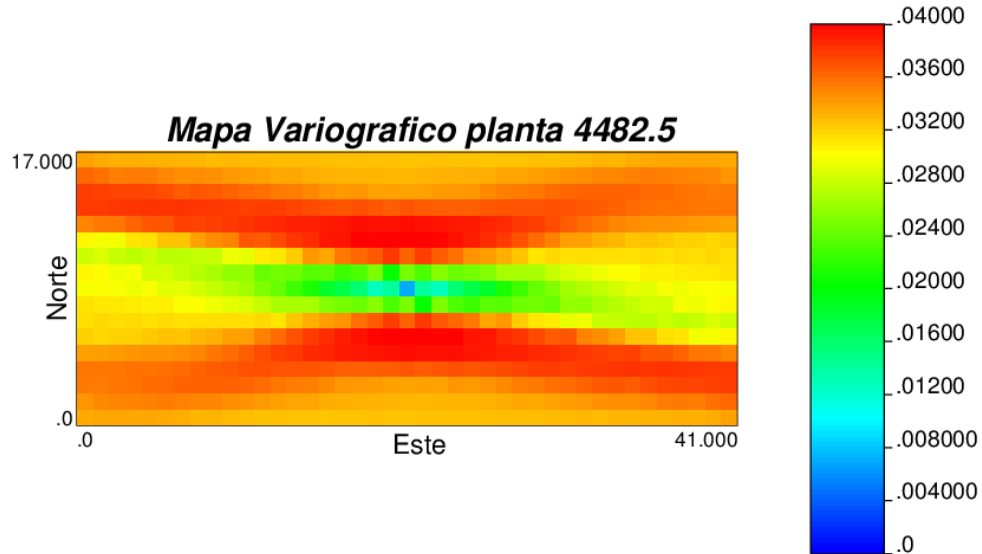


FIGURA 31: MAPA VARIOGRÁFICO PLANTA 4482,5 MÉTODO TRADICIONAL

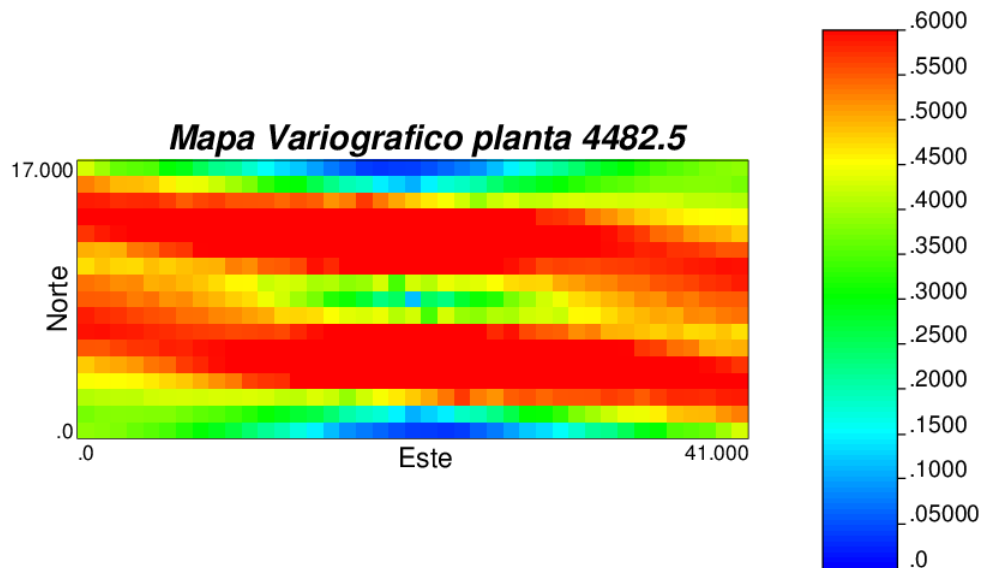


FIGURA 32: MAPA VARIOGRÁFICO PLANTA 4482,5 MÉTODO PROPUESTO

Es posible notar anisotropías presentes en los mapas variográficos para ambos métodos, por lo que se decide generar 2 escenarios de estudio: El primero con un variograma omnidireccional, y otro con variogramas direccionados en Este-Oeste y Norte-Sur. Esto es aplicado a ambas metodologías.

### 5.6.2. Variogramas experimentales y modelados

Los variogramas experimentales para todos los casos se calcularon con:

- Separación de pasos igual a 1 metro.
- Tolerancia al paso de 0,5 metros.

Se modelan los variogramas, dependiendo de la metodología y del tipo de variograma.

Para los variogramas omnidireccionales se tiene una estructura más un efecto pepa, mientras que en el caso de los variogramas orientados se tienen varias estructuras anidadas.

En las dos figuras a continuación, la línea gruesa corresponde al variograma experimental, y la línea punteada al variograma modelado. En el lado izquierdo de las figuras se encuentra el variograma modelado correspondiente al método tradicional, y en el lado derecho el variograma modelado correspondiente al método propuesto.

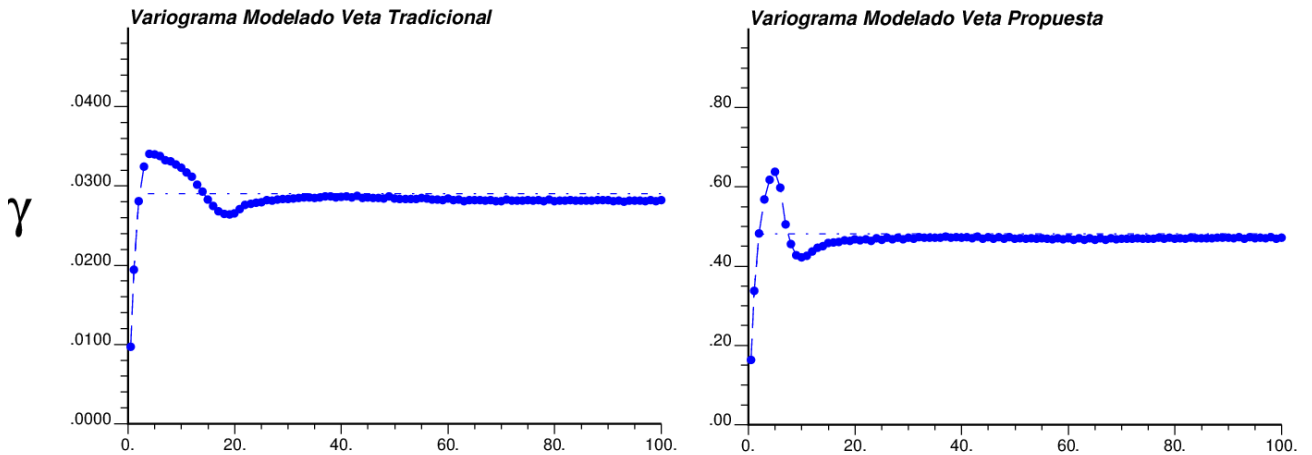


FIGURA 33: VARIOGRAMAS OMNIDIRECCIONALES MODELADOS

Los modelos utilizados siguen las siguientes estructuras, donde se indican los alcances (en metros) entre paréntesis:

$$\gamma_I(h)_{Tradicional} = 0,002 + 0,027 * esf(2.36)$$

$$\gamma_I(h)_{Propuesta} = 0,02 + 0,461 * esf(2.13)$$

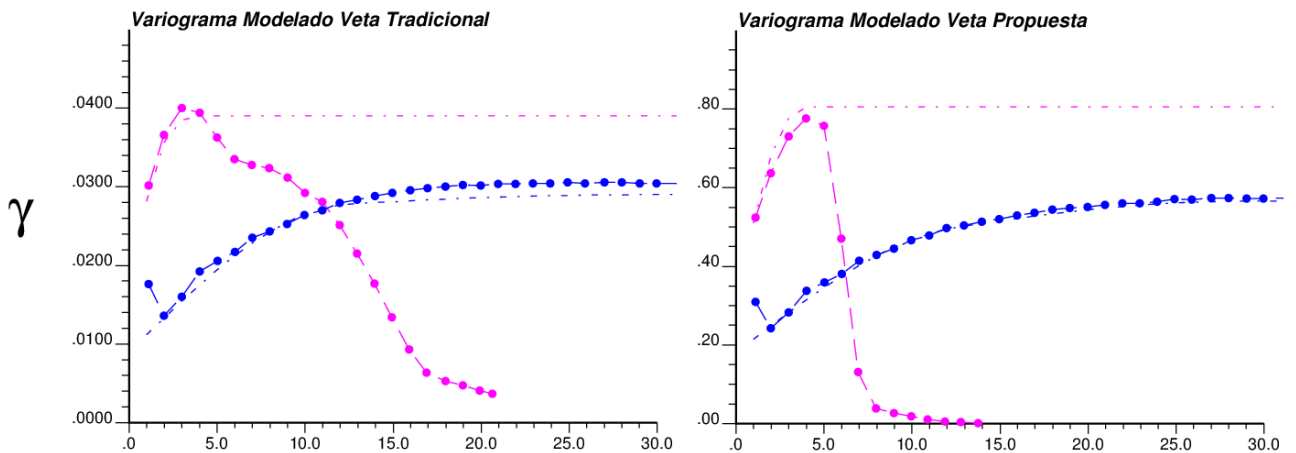


FIGURA 34: VARIOGRAMAS DIRECCIONALES MODELADOS



La dirección Norte-Sur (en el sistema de coordenadas rotadas) se encuentra graficada en rosado, y Este-Oeste en Azul.

Los modelos utilizados constan de las siguientes estructuras:

$$\begin{aligned}\gamma_I(h)_{Tradicional} &= 0,009 + 0,017 * esf(1,6; 12,5; 1,6) + 0,003 * esf(3,6; 29; 3,6) + 0,01 \\ &\quad * esf(3,6; inf; 3,6) \\ \gamma_I(h)_{Propuesta} &= 0,18 + 0,215 * esf(1,6; 12,5; 1,6) + 0,171 * esf(3,9; 29; 3,9) + 0,24 \\ &\quad * esf(3,9; inf; 3,9)\end{aligned}$$

Dada la forma de la veta, en que presenta mayor extensión en la dirección Este-Oeste del sistema de coordenadas rotado, los modelos anisótropos describen la continuidad de la veta de forma más realista que los modelos isótropos.

En la Sección 6.2 del presente informe, se muestran los resultados de los análisis explicados.

## 6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos mediante estimaciones por kriging de indicadores para el primer caso de estudio, y simulaciones secuenciales de indicadores para el segundo caso de estudio. Junto a esto se presentan sus respectivos análisis.

### 6.1. Caso de Estudio I

Tras finalizar las estimaciones utilizando kriging de indicadores con proporciones localmente variables con la base de datos sintética, a través de la metodología tradicional y la metodología propuesta, se realizan diversos análisis para comprobar la efectividad de la propuesta, y si significa una mejora importante.

Primero que todo, es importante comparar los resultados obtenidos con la estimación. En la Figura 35 se tienen los indicadores originales sintéticos, y los mapas de probabilidades de los indicadores obtenidos tras las estimaciones de cada método, correspondientes a la realización 50 de los datos.

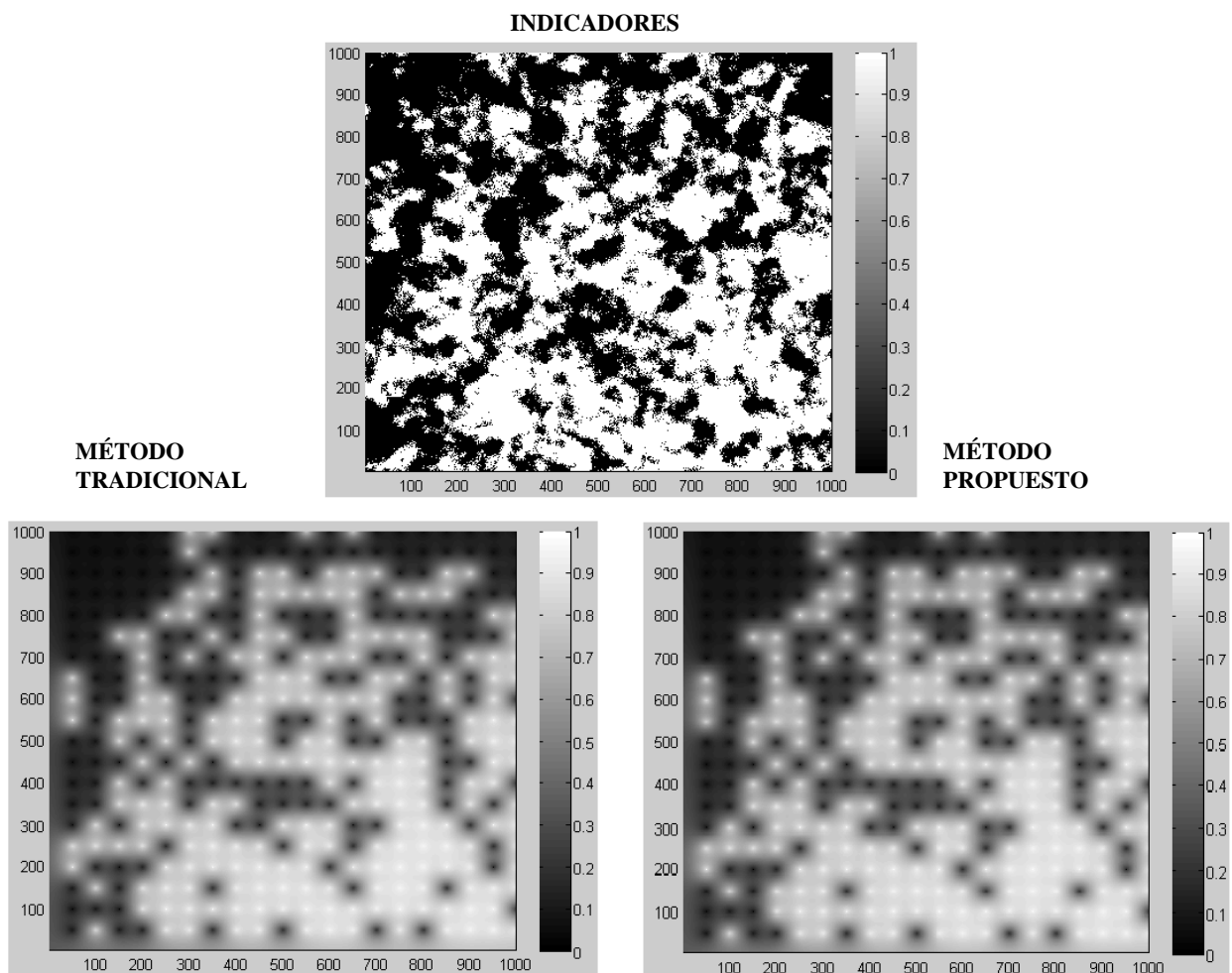


FIGURA 35: RESULTADOS ESTIMACIONES REALIZACIÓN 50

Los mapas de probabilidades de ambos métodos son muy similares entre sí. A su vez, también muestran una imagen similar a los indicadores. Esto indica que, por lo menos para esta realización, no se tienen diferencias notorias entre los resultados de los distintos métodos.

Dado que en la base de datos se tienen 100 realizaciones de los indicadores, se calcula el error en cada punto y en cada realización. Ese error es promediado a través de las realizaciones, para obtener el error promedio de un punto. Se aplica esto también para el error absoluto promedio y para el error cuadrático promedio.

Ya que se conoce el error promedio por punto, es posible generar mapas de errores, y realizar una comparación gráfica del comportamiento de ambas metodologías. De esta forma, se crean mapas para el error promedio, error promedio absoluto y error cuadrático promedio.

También como resultado de las estimaciones, se conoce la varianza del kriging en cada punto de cada realización. Ésta es tratada de igual manera que los errores y se crea un mapa con la varianza del kriging en cada posición, y para cada método.

- Comparación Error Promedio

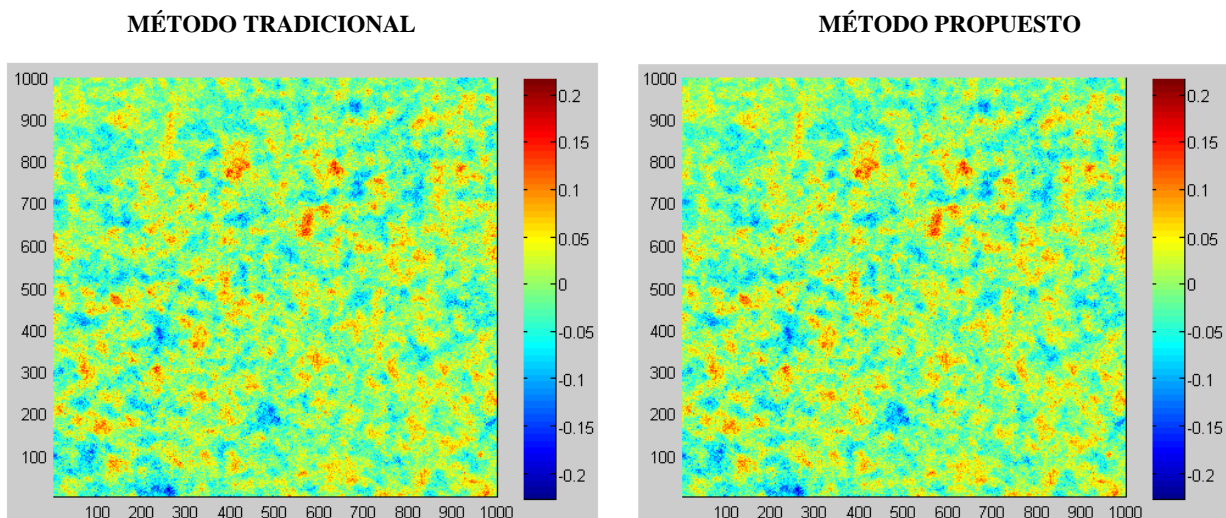


FIGURA 36: COMPARACIÓN MAPAS ERROR PROMEDIO SEGÚN METODOLOGÍA

Se tienen los mapas de errores promedio respecto a las 100 realizaciones, para cada punto estimado. A la izquierda para los valores estimados con el método tradicional, mientras que el mapa del lado derecho corresponde a los valores estimados con el método propuesto. A simple vista no se ven diferencias significativas entre ambos métodos, lo cual indica similitudes entre los resultados de las estimaciones entre ambos métodos.

- Comparación Error Absoluto Promedio

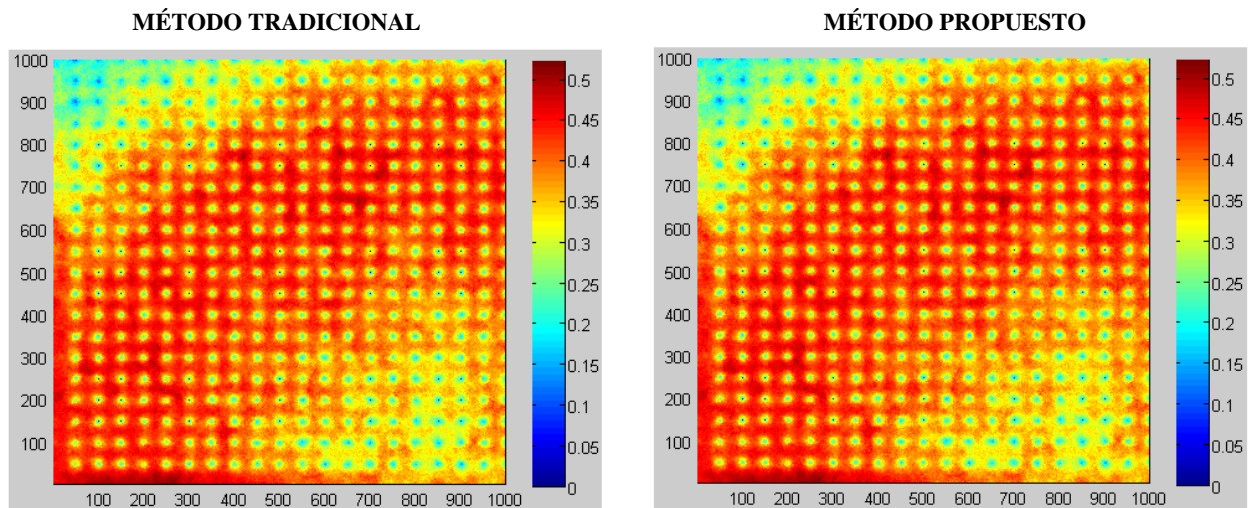


FIGURA 37: COMPARACIÓN MAPAS ERROR ABSOLUTO PROMEDIO SEGÚN METODOLOGÍA

En esta figura se tiene la comparación entre el error absoluto promedio, de las 100 realizaciones, calculado en cada punto y para ambas metodologías. Al lado izquierdo se tiene el mapa resultado de las estimaciones con el método tradicional y al lado derecho el mapa de las estimaciones con el método propuesto. Nuevamente no se observan diferencias importantes entre ambos mapas.

Es posible observar una influencia de la media del indicador en estos mapas. En el extremo superior izquierdo de ambos mapas, y en la esquina inferior derecha, se tienen sectores con menores errores. Esto concuerda con que el sector con media del indicador igual a 0,5 es justo el que se encuentra en medio de estas zonas de menor error. Se entiende entonces, que las zonas con menor error concuerdan con las zonas de menor varianza, según la relación expresada en la Ecuación 15.

También se ve un efecto esperado: la influencia del muestreo de los datos. En las ubicaciones muestreadas se tienen errores menores. El error va aumentando a medida que se aleja del punto muestreado.

- Comparación Error Cuadrático promedio

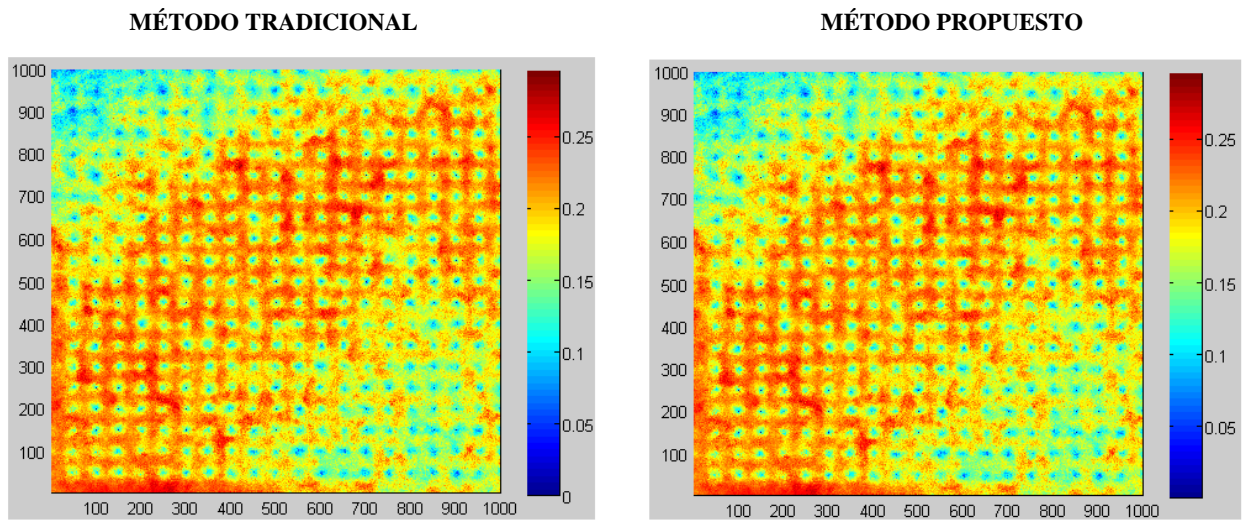


FIGURA 38: COMPARACIÓN MAPAS ERROR CUADRÁTICO SEGÚN METODOLOGÍA

En la Figura 38 se observan los mapas del error cuadrático promedio respecto a las 100 realizaciones, para cada punto simulado. A la izquierda se tiene el mapa correspondiente a los errores cuadráticos promedio de los puntos simulados con el método tradicional, y a la derecha el de los puntos simulados con el método propuesto.

Se vuelve a ver la influencia del muestreo de los datos. En las ubicaciones muestreadas se tienen errores menores. El error va aumentando a medida que se aleja del punto muestreado.

También se muestra coherencia comparando las figuras de error absoluto y error cuadrático, esto por los valores que se tienen. La figura de errores absolutos muestra valores entre 0 y 0,5, mientras que los errores cuadráticos muestran valores entre 0 y 0,25. Por esta razón ambas figuras son prácticamente iguales, a excepción de la escala de colores disminuida para el caso cuadrático.

Se tiene un ranking para comparar el número de puntos mejor estimados con el método propuesto que con el método tradicional, comparado el error cuadrático.

TABLA 7: RANKING MENOR ERROR CUADRÁTICO

	N°	Porcentaje
Puntos menor error cuadrático con método tradicional	491.481	49%
Puntos menor error cuadrático con método propuesto	508.519	51%
Puntos igual error en ambos métodos	0	0%

Un 51% de los puntos posee menor error cuadrático al ser estimado con el método propuesto, aunque la mejoría es muy leve.



- Varianza del Kriging

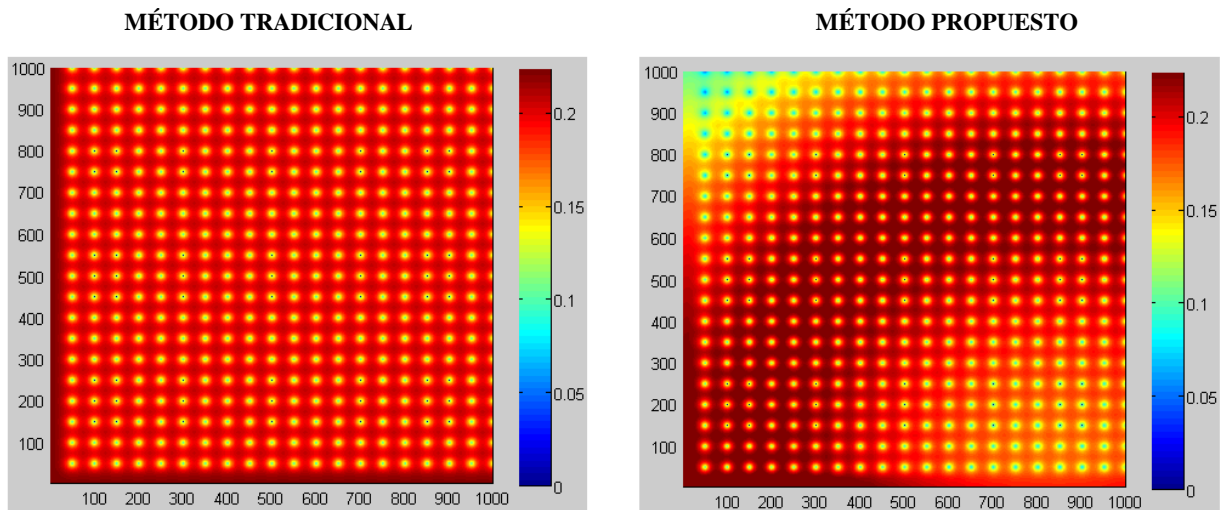


FIGURA 39: MAPA VARIANZA DEL KRIGING SEGÚN METODOLOGÍA

La Figura 39 representa la comparación entre mapas de la varianza del kriging, para el caso estimado con la metodología tradicional (izquierda) y estimado con el método propuesto (derecha).

En el mapa de varianza del método tradicional, se tiene un mapa según lo esperado. En las ubicaciones muestreadas se tienen menores varianzas, las cuales van aumentando al alejarse del punto.

El mapa de varianza del método propuesto, expone también menores varianzas en los puntos muestreados, pero lo que llama la atención de este mapa son los sectores de menor varianza en las esquinas superior izquierda e inferior derecha. Si se realiza una comparación de este mapa con el de la media del indicador (Figura 12) se nota una clara influencia. Los sectores de alta varianza coinciden con los sectores de media cercanos a 0,5. Esto se fundamenta con la Ecuación 15 que muestra la relación entre media y varianza. Según dicha relación, al tenerse medias entre 0 y 1, el valor más alto de la varianza se obtiene al tener media 0,5. De esta forma, se encuentra una alta influencia de la media del indicador sobre la varianza del kriging.

También, es importante destacar que en general los valores de la varianza del kriging de la metodología propuesta son menores a los de la metodología tradicional, hecho que es visible en el mapa.

### 6.1.1. Análisis de Sensibilidad

Se realiza un análisis de sensibilidad para notar los cambios presentes en los resultados al variar el número de datos muestreados y el variograma de los valores sintéticos Gaussianos.

Dentro de los resultados obtenidos, se muestra a modo de ejemplo la comparación entre los indicadores y los resultados de mapa de probabilidad estimados, para la realización 50 de los datos sintéticos.

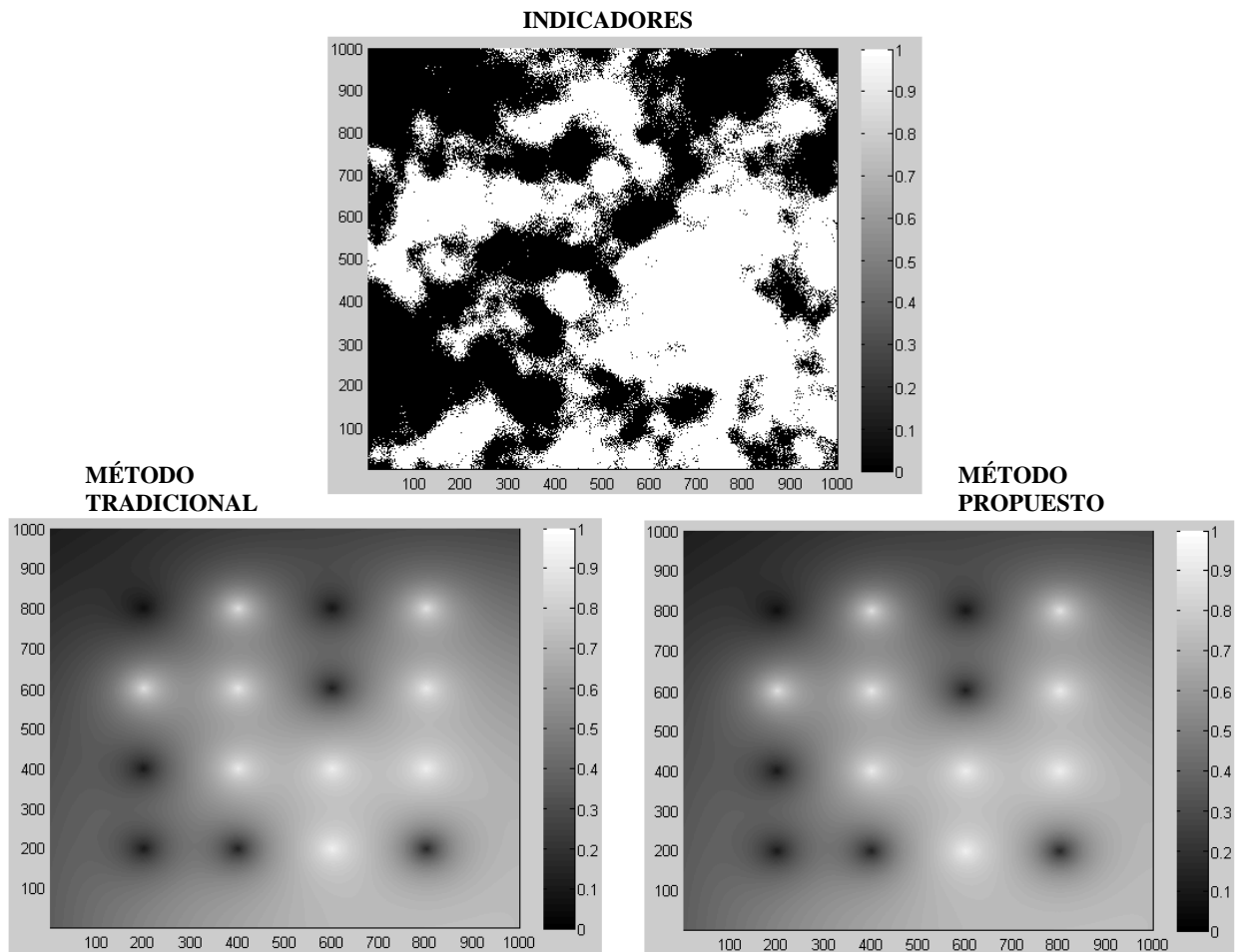


FIGURA 40: RESULTADOS ESTIMACIONES REALIZACIÓN 50 ANÁLISIS SENSIBILIDAD

Nuevamente se obtienen mapas de probabilidades similares entre ambos métodos. A diferencia del caso base de este caso de estudio, se tienen menos zonas de colores, debido a la menor cantidad de puntos utilizados como datos. Se tiene todo un sector central con mayores probabilidades de tener valor 1, luego un borde con alta probabilidad de tener valor cero, y finalmente los sectores más exteriores del mapa tienen valores cercanos a 0,5, lo que indicaría alta incertidumbre.

- Comparación Error Promedio

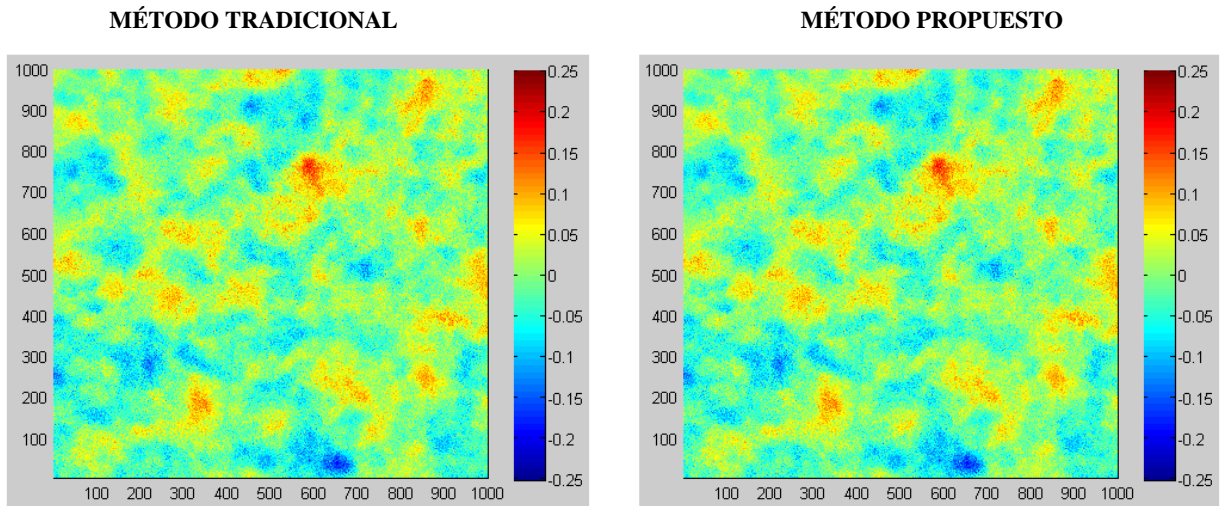


FIGURA 41: COMPARACIÓN MAPAS ERROR PROMEDIO SENSIBILIDAD

Nuevamente los mapas de errores promedio, al ser comparadas ambas metodologías (mapa a la izquierda corresponde al método tradicional y mapa a la derecha corresponde al método propuesto) son bastante similares.

Por otro lado, si se comparan los mapas del análisis de sensibilidad con los obtenidos originalmente, se tiene mayor continuidad en el obtenido tras la sensibilidad. Esto se cree se debe al aumento en el alcance del variograma de los datos Gaussianos, puesto que si se contrasta el mapa con los indicadores para el caso base con el de la sensibilidad, siguen esta misma tendencia. (Figura 13 y Figura 16 respectivamente).

- Comparación Error Absoluto Promedio

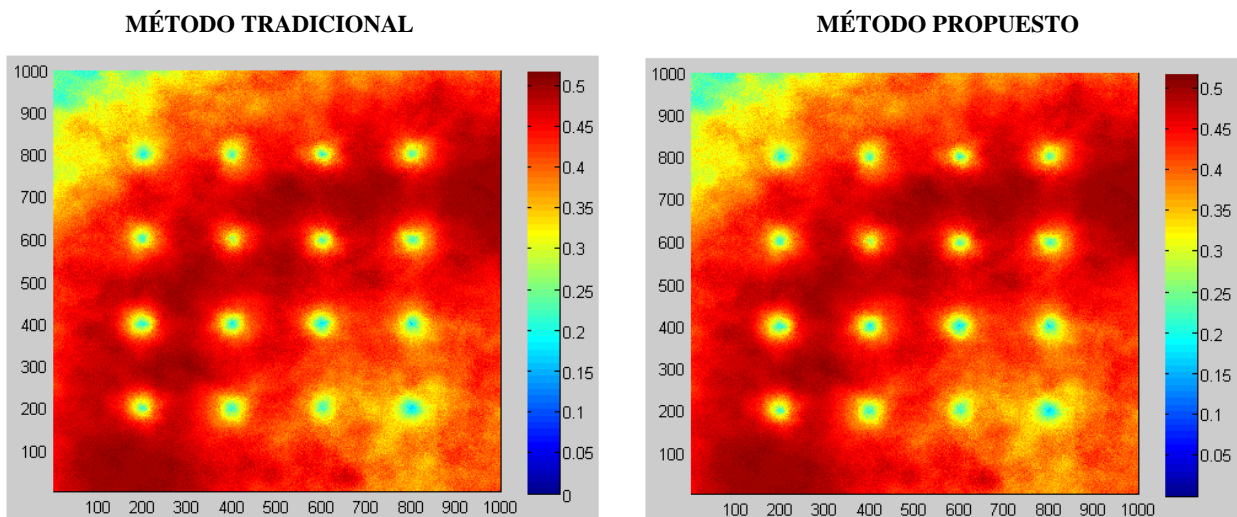


FIGURA 42: COMPARACIÓN MAPAS ERROR ABSOLUTO SENSIBILIDAD



- Comparación Error Cuadrático promedio

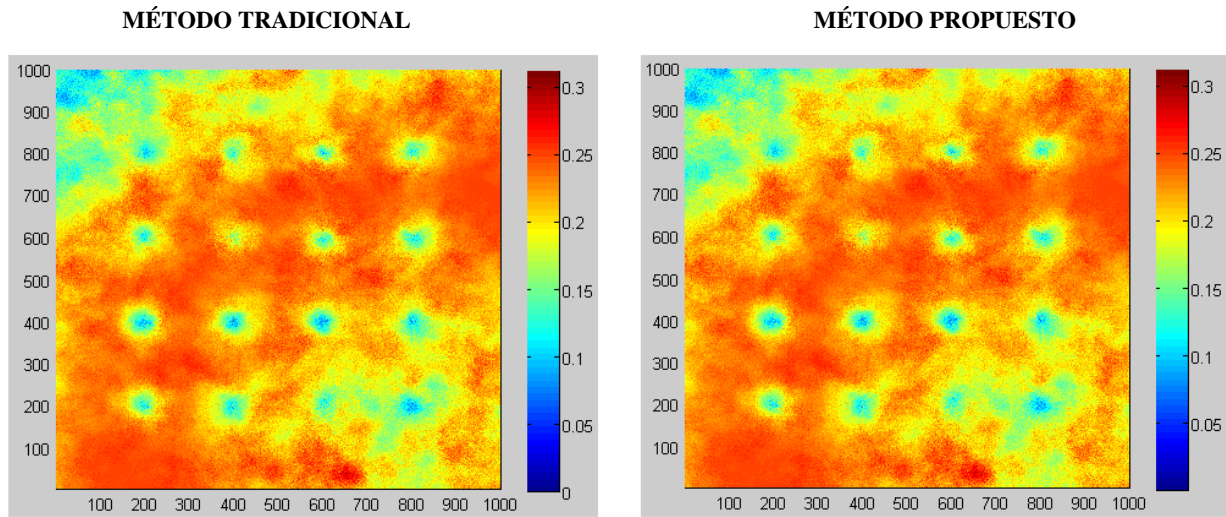


FIGURA 43: COMPARACIÓN MAPAS ERROR CUADRÁTICO SENSIBILIDAD

Se tienen los mapas de error absoluto promedio y error cuadrático promedio, respecto a las 100 realizaciones, para la metodología tradicional (izquierda) y metodología propuesta (derecha).

Respecto a los mapas de errores absolutos y cuadráticos, en ambos casos se sigue la tendencia anterior. Los mapas de ambas metodologías son bastante similares en valores de los errores como en comportamiento. En ambos casos los menores errores se presentan en los puntos muestreados (16 puntos para la sensibilidad) y va aumentando a medida que se va alejando del punto.

La influencia de la media del indicador en este caso es igualmente notoria. Se detectan sectores con menores errores en la esquina superior izquierda y esquina inferior derecha, al igual que en el caso base.

Se tiene un ranking para comparar el número de puntos mejor estimados con el método propuesto que con el método tradicional, comparado el error cuadrático.

TABLA 8: RANKING MENOR ERROR CUADRÁTICO ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

	N°	Porcentaje
Puntos menor error cuadrático con método tradicional	505.237	50%
Puntos menor error cuadrático con método propuesto	493.786	49%
Puntos igual error en ambos métodos	977	1%

Si se comparan estas cifras con las de la Tabla 7, se tiene una disminución en la cantidad de puntos mejor estimados por el método propuesto versus el tradicional, pero aún se tiene una mayoría de los puntos con menor error cuadrático al ser estimados con el método propuesto que con el tradicional.

- Varianza del Kriging

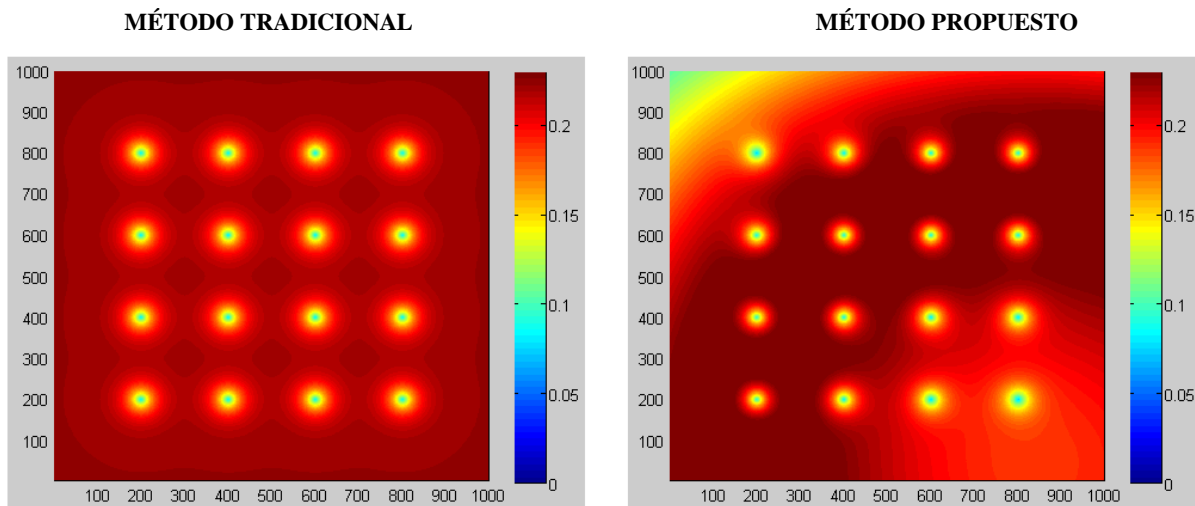


FIGURA 44: COMPARACIÓN MAPAS VARIANZA KRIGING SENSIBILIDAD

Se tienen los mapas de la varianza del kriging promedio respecto a las 100 realizaciones de datos sintéticos, para la metodología tradicional al lado izquierdo y la metodología propuesta al lado derecho.

Ambos métodos siguen la tendencia esperada, es decir, menores varianzas en los puntos muestreados, y un aumento gradual al alejarse de esas zonas. Comparando con el caso base de este caso de estudio, las zonas de disminución de la varianza alrededor de los datos se ven aumentadas en comparación al caso inicial.

En la Figura 44 se observa que, salvo las diferencias obvias por tener menor cantidad de datos, la influencia de la media del indicador sobre la varianza del kriging se hace presente, al igual que en el caso inicial, pues en el mapa del método propuesto nuevamente es identificable la zona de alta varianza que se corresponde con la zona de media del indicador igual a 0,5.

Se podría concluir que el método propuesto presenta mejores resultados en sus estimaciones que el método tradicional, pero no de manera tan significativa como se esperaba. Sin embargo, se tiene una cuantificación más acertada de los errores de estimación a través de la varianza del kriging.

## 6.2. Caso de Estudio II

Se realiza una simulación secuencial de indicadores con proporciones localmente variables, con dos modelos variográficos, debido a las anisotropías presentes en la planta a simular, por la particular forma de la veta. Se completan 100 realizaciones para la simulación, al igual que para las validaciones.

Mediante distintas visualizaciones de errores y cálculo de porcentaje de aciertos se comparan ambos métodos de simulación.

Posteriormente, ambos modelos son validados mediante jack-knife y se calcula el porcentaje de acierto en la simulación. Se simulan 8.745 posiciones de las 16.568 que contiene la grilla utilizada.

### 6.2.1. Modelo Omnidireccional

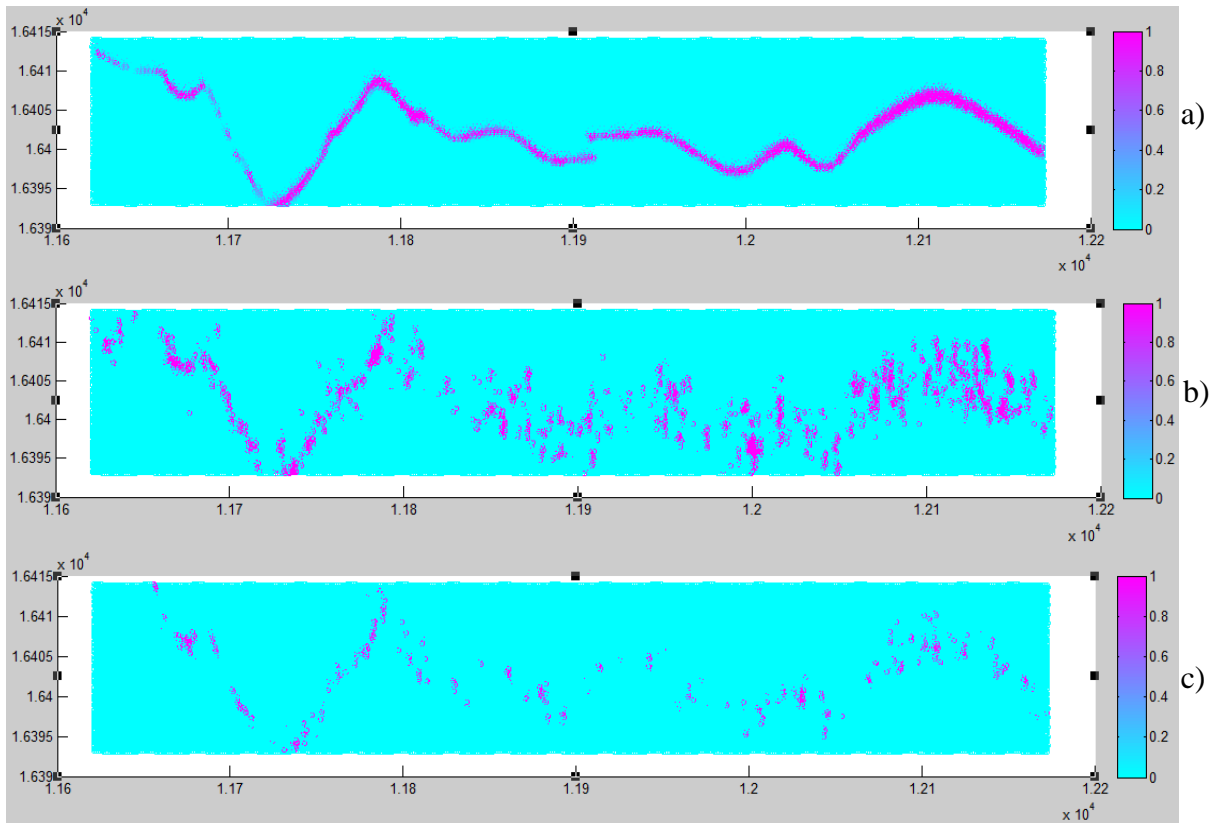


FIGURA 45: RESULTADOS SIMULACIONES MODELO OMNIDIRECCIONAL.

En la Figura 45 se muestran 3 imágenes: a) La cota 4482,5 de la veta interpretada, b) El resultado de la simulación con el método tradicional (realización 50), y c) El resultado de la simulación con el método propuesto (realización 50).

Es posible notar varias diferencias entre la veta “real” y las simuladas. Por un lado, el resultado de la simulación secuencial de indicadores tradicional sigue la forma de la veta, pero a una potencia mucho mayor y de forma discontinua. El resultado de la simulación con la propuesta, también sigue la forma de la veta, con discontinuidades más notorias que el caso tradicional, pero sin agregar más bloques a la veta, como lo hace el primer método. Esta tendencia también es observable en los mapas de errores cuadráticos promedio de las 100 realizaciones de las simulaciones.

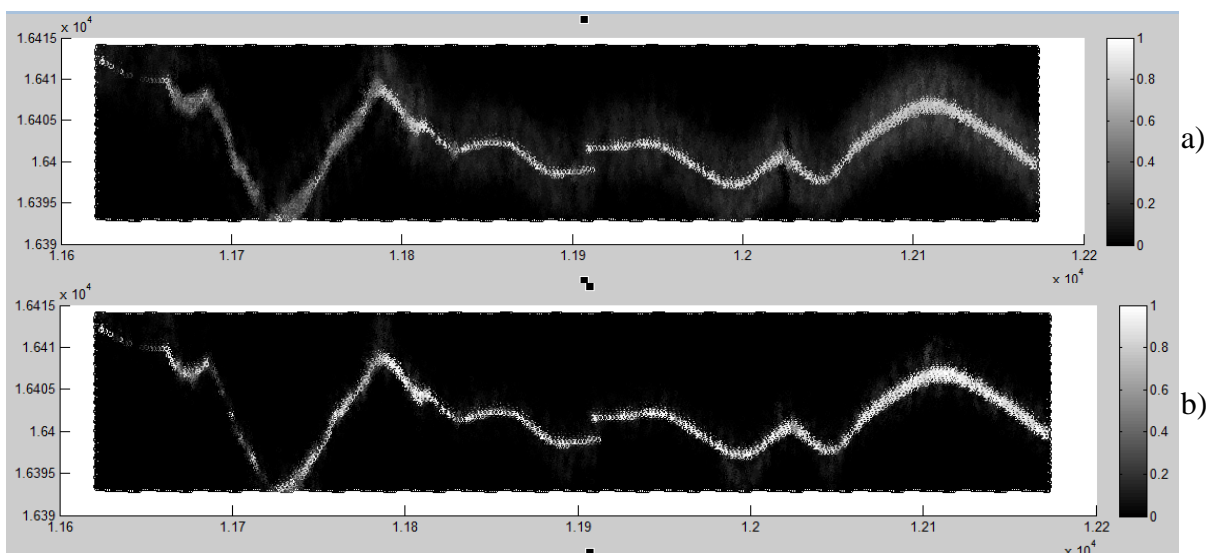


FIGURA 46: MAPAS ERRORES CUADRÁTICOS SIMULACIONES MODELO OMNIDIRECCIONAL

En la Figura 46, el mapa a) corresponde a los errores cuadráticos promedio de las simulaciones con el método tradicional, b) corresponde a los errores cuadráticos promedio de las simulaciones con el método propuesto.

Los errores en el método propuesto se concentran en el sector de la veta misma, mientras que en el método tradicional el error se expande mostrando zonas de error mayores a cero alrededor de la veta.

Junto a este análisis, también se realiza un ranking de cantidad de bloques con menor error, dependiendo del método.

TABLA 9: RANKING MENOR ERROR CUADRÁTICO MODELO OMNIDIRECCIONAL

	N°	Porcentaje
Bloques menor error cuadrático con método tradicional	2.296	5%
Bloques menor error cuadrático con método propuesto	23.483	51%
Bloques igual error en ambos métodos	20.588	44%

La mayoría de los bloques posee menor error cuadrático al ser simulado mediante el método propuesto. En un 44% de los bloques ambos métodos presentan el mismo error, mientras que sólo en un 5% de los bloques se tiene menor error al simular con el método tradicional.

### 6.2.2. Modelo con anisotropía en la dirección Este-Oeste

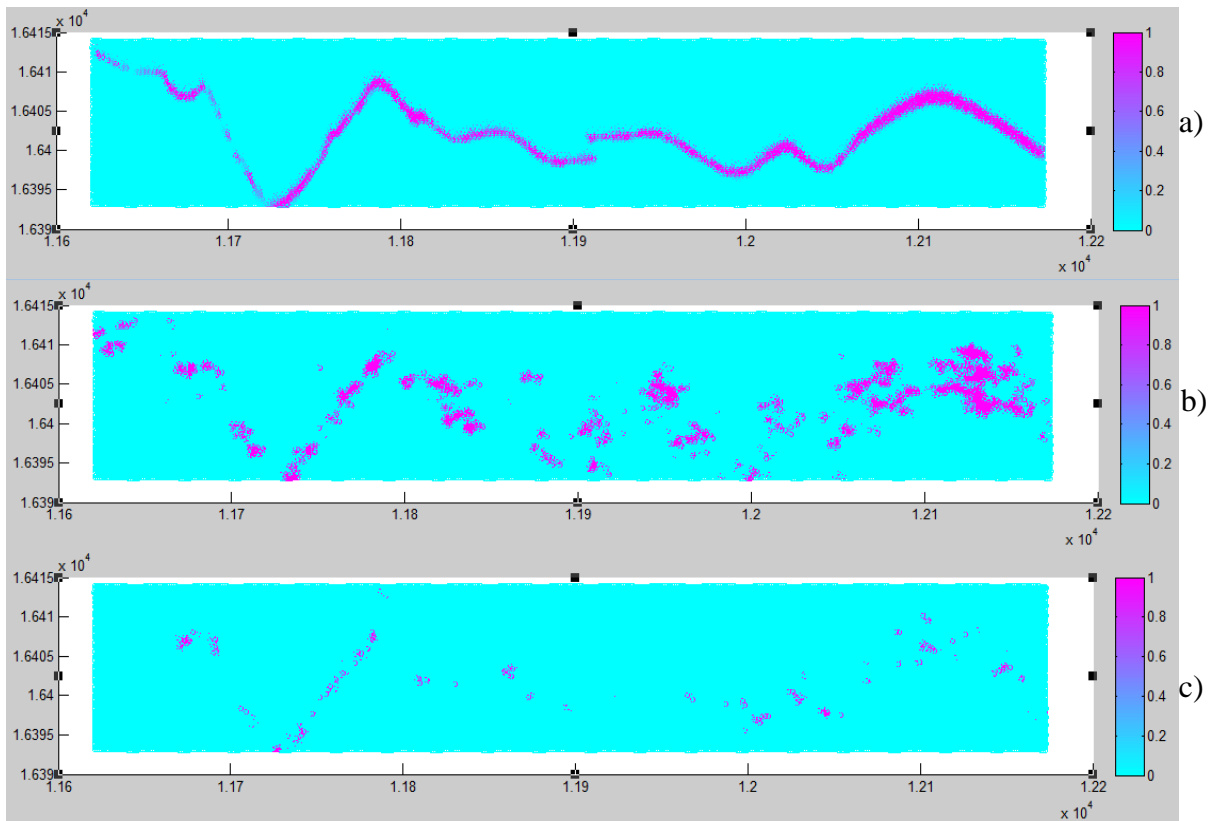


FIGURA 47: RESULTADOS SIMULACIONES MODELO E-W

En la Figura 47 se muestran 3 imágenes: a) La cota 4482,5 de la veta interpretada, b) El resultado de la simulación con el método tradicional (realización 50), y c) El resultado de la simulación con el método propuesto (realización 50).

Nuevamente saltan a la vista las diferencias entre las “vetas simuladas” y la entregada como dato. En ambos casos aumentan los espaciamientos entre los bloques de la veta, haciéndola bastante inconexa. En el método tradicional se tienen algunas aglomeraciones de datos, mientras en el método propuesto aún se mantiene la tendencia a seguir la forma de la veta, pero con muy poca conexión.

En comparación con el modelo omnidireccional, como ya se ha mencionado, se pierde la continuidad de la veta en ambas metodologías. De este hallazgo podría desprenderse el que la simulación secuencial no permite reproducir propiedades como la conectividad de la categoría simulada, pero puede ser de ayuda en otras explicaciones, tales como el cálculo de probabilidades de presencia.

Se realiza nuevamente el análisis de los mapas de errores cuadráticos promedio.

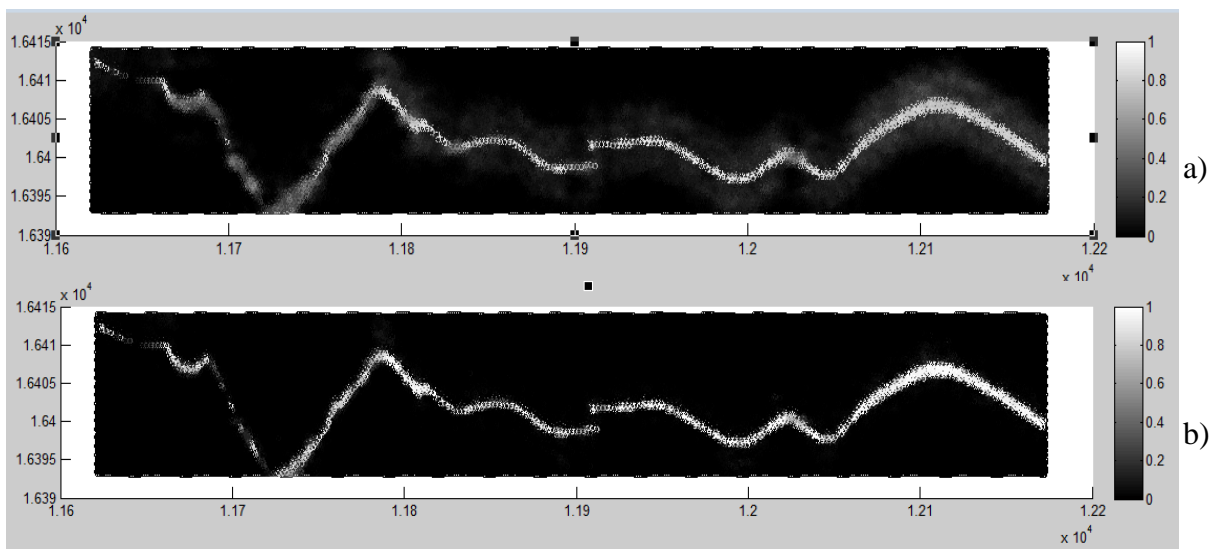


FIGURA 48: MAPAS ERRORES CUADRÁTICOS SIMULACIONES MODELO E-W

En la Figura 48, el mapa a) corresponde a los errores cuadráticos promedio de las simulaciones con el método tradicional, b) corresponde a los errores cuadráticos promedio de las simulaciones con el método propuesto.

El mapa de errores del método tradicional muestra un área alrededor de la veta con errores, mientras que en el método propuesto los errores se centran en el sector de la veta misma.

Se mantiene la tendencia entre ambos modelos, disminuyendo levemente en este la dispersión de los errores al alejarse de la veta.

Se realiza el ranking de cantidad de bloques con menor error cuadrático promedio, dependiendo del método.

TABLA 10: RANKING MENOR ERROR CUADRÁTICO MODELO E-W

	N°	Porcentaje
Bloques menor error cuadrático con método tradicional	1.945	4%
Bloques menor error cuadrático con método propuesto	22.183	48%
Bloques igual error en ambos métodos	22.239	48%

En este caso se tiene una leve disminución en el porcentaje de bloques mejor simulados por el método propuesto. En un 48% de los bloques se tiene el mismo error promedio con ambos métodos, mientras que sólo en un 4% de los bloques simulados el método tradicional presenta un menor error cuadrático promedio que el método propuesto.

### 6.2.3. Validación Modelo Omnidireccional

Para la validación del modelo omnidireccional, se realiza un jack-knife con los datos de canales. Se seleccionan 8.745 datos de los 16.568, los cuales se usan para simular los 7.823 datos restantes.

El porcentaje de aciertos es calculado como el porcentaje de los datos con un cierto valor (1 ó 0) que al ser simulados resultaron con el mismo valor objetivo. Esto es calculado para cada realización, los cuales al sumarse, se obtiene el porcentaje de acierto total.

% Acierto método tradicional	78,3%
% Acierto método propuesto	78,8%

El método propuesto presenta un porcentaje de acierto levemente más alto que el método tradicional. Ambos alcanzan valores cercanos al 80%, pero la diferencia entre ambos es tan pequeña que es posible decir que ambos métodos son igualmente buenos.

### 6.2.4. Validación Modelo con anisotropía en la dirección Este-Oeste

De igual manera se calculan los porcentajes de aciertos para el modelo direccionado.

% Acierto método tradicional	87,2%
% Acierto método propuesto	87,4%

Nuevamente el método propuesto es levemente más alto que el método tradicional, pero la diferencia entre ambos es mínima.

Se tiene un aumento de aciertos utilizando este modelo con respecto al modelo omnidireccional, de 9 puntos porcentuales, lo que se explica por la mayor continuidad espacial de la veta en la dirección este-oeste, la cual se ve reflejada en los modelos variográficos utilizados.

Ambas metodologías son igual de buenas, con casi un 90% de aciertos.

## 7. CONCLUSIONES

El kriging de indicadores con proporciones localmente variables, es una herramienta útil para estimar y posteriormente simular variables categóricas. Permite agregar mayor información a través del uso de una media variable para el o los indicadores de interés.

Con este trabajo se está agregando un detalle teórico que se creía importante probar. Teóricamente hablando, el método propuesto de kriging de indicadores tiene mayor respaldo que el método tradicional, por la incorporación de la media variable dentro del variograma.

Ambas metodologías requieren el conocimiento de una media variable en las ubicaciones a estimar o simular, lo cual es en general una desventaja en algunos casos en que no se cuenta con esa información y se debe recurrir a otros métodos de estimación o simulación.

Puede parecer una desventaja adicional para el método propuesto, el tener que calcular una variable extra (indicador centrado y estandarizado) para simular o estimar. Pero para realizar un kriging simple de media cero con el método tradicional, ya es necesario restar la media local a la variable indicador, por lo que agregar a esto una división para estandarizar la variable no se traduce en un aumento significativo de recursos o tiempo.

Una ventaja que presenta el método propuesto respecto al tradicional, es la disminución en el tiempo de simulación. Esta mejora se presenta principalmente por los puntos con media móvil igual a cero o uno. Dichos puntos al ser transformados a la variable a simular en la propuesta, se indefinen pues el denominador de la ecuación para calcular la variable toma valor cero. Entonces, a estos puntos se les asigna el valor de su media, es decir, si el bloque tiene media 1 ó 0, entonces el “valor simulado” también tendrá ese valor, pues se le asigna sin necesidad de simulación. Esto simplifica la simulación en sí, por lo cual también demora menor tiempo.

Al comparar ambos casos de estudio, se tiene coherencia entre los resultados obtenidos. Por un lado, en el primer caso de estudio utilizando kriging de indicadores, se obtienen resultados similares entre ambas metodologías mediante los distintos análisis realizados. El método propuesto muestra algunas mejoras respecto al tradicional, como es la disminución en la varianza del kriging, pero estos cambios son bastante menores a lo esperado, por lo que se cree que ambos métodos son igualmente buenos estimando. Por otro lado, en el segundo caso de estudio, utilizando simulación secuencial de indicadores, nuevamente se tienen resultados muy similares entre ambas metodologías. Nuevamente se tiene una leve ventaja de parte del método propuesto versus al tradicional. Esto indica que en el fondo no se obtiene una mejora sobresaliente al utilizar la metodología propuesta, como se esperaba.

La principal mejora que puede destacarse del método propuesto versus el método tradicional, es la obtención de una varianza del kriging más realista. Si bien los valores estimados no presentan diferencias significativas, es posible cuantificar de manera más acertada los errores de la estimación a través de la varianza del kriging.



Una prueba llevada a cabo en el segundo caso de estudio fue el refinar la malla de la veta con la intención de tener mayor continuidad en la misma y en sus simulaciones. Desgraciadamente esto no resultó como se esperaba, pues las simulaciones de ambos métodos presentaron discontinuidades de todas formas. La simulación secuencial de indicadores no permite reproducir propiedades como la conectividad de la categoría simulada, mas puede ayudar en el cálculo de probabilidades de presencia.

Este estudio se encuentra limitado solamente a la utilización de un indicador, o dos tipos de roca. Una recomendación sería revisar el comportamiento de estos métodos en algún sistema más complejo incorporando más indicadores.

También se recomienda llevar a cabo un análisis similar al realizado en este estudio, pero con diferentes herramientas computacionales. Si bien Matlab es un software útil para este tipo de cálculos, pues permite la creación de varias rutinas fácilmente editables, posee varias desventajas, como una memoria limitada a la versión del programa, el costo de compras de licencias o complementos, y tiempos de procesamiento largos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. P. Chilès and P. Delfiner, *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. New York: Wiley, 1999.
- [2] C. V. Deutsch, A sequential indicator simulation program for categorical variables with point and block data: BlockSIS, *Computers & Geosciences*, vol. 32, no. 10, pp. 1669-1681, 2006.
- [3] O. Bertoli and J. Vann, Some Comments on Multiple Indicator Kriging (MIK) for Mining Industry Applications, 2002.
- [4] J. Li and A. D. Heap, A Review of Spatial Interpolation Methods for Environmental Scientists, 2008.
- [5] P. Goovaerts, *Geostatistics for natural resources evaluation*. New York: Oxford University Press, 1997.
- [6] A. G. Journel and C. J. Huijbregts, *Mining geostatistics*. London: Academic Press, 1978.
- [7] X. Emery, *Fundamentos de Geoestadística*. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2011.
- [8] X. Emery, *Simulación no Paramétrica*. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2013.
- [9] C. V. Deutsch and A. G. Journel, *GSLIB: Geostatistical software library and user's guide*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [10] X. Emery, *Simulación Estocástica y Geoestadística No Lineal*. Departamento de Ingeniería de Minas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2012.
- [11] X. Emery and C. Lantuéjoul, TBSIM: A computer program for conditional simulation of three-dimensional gaussian random fields via the turning bands method., *Computers & Geosciences*, vol. 32, no. 10, pp. 1615-1628, 2006.
- [12] X. Emery, Cokriging random fields with means related by known linear combinations, *Computers & Geosciences*, vol. 38, no. 1, pp. 136-144, 2012.
- [13] Nielsen, R. L., Milne, S., and Sandefur, R. L., Technical Review (NI 43 -101) Caylloma Project, Chlumsky, Armbrust & Meyer, LLC, Perú, 2009.
- [14] L. A. Valdiviezo, Seguridad e higiene minera en la Compañía Minera Caylloma S.A., Facultad de Geología, Minas, Metalúrgia y Ciencias Geográficas, E.A.P. de Ingeniería de Minas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú, Informe Profesional para optar al Título Profesional de Ingeniero de Minas 2003.
- [15] J. E. Gutiérrez, Modelamiento y estimación de recursos de la veta bateas, Arequipa, 2011.

## **ANEXOS**

## Anexo A: Código SISIM modificado para propuesta.

```
function
sisim(datacoord,datamean,datavalues,simucoord,simumean,dx,dy,dz,model,cc,b,nugget,radius_d
ata,angles_data,octant_data,ndata,radius_nodes,angles_nodes,octant_nodes,nnodes,koption,nreali
z,multigrid,random,seed,filename,header);

%-----
% Sequential indicator simulation
% Conditional simulation, 3D
%-----
%
% USE:
%
sisim(datacoord,datamean,datavalues,simucoord,simumean,dx,dy,dz,model,cc,b,nugget,radius_d
ata,angles_data,octant_data,ndata,radius_nodes,angles_nodes,octant_nodes,nnodes,koption,nreali
z,multigrid,random,seed,filename,header);
%
% INPUT:
%
% CONDITIONING DATA
% -----
% datacoord   : coordinates of data (void for non-conditional simulation)
% datamean    : local mean values at data locations
% datavalues  : conditioning data values
%
% LOCATIONS TARGETED FOR SIMULATION
% -----
% simucoord   : coordinates of locations targeted for simulation
% simumean    : local mean values at target locations
% dx,dy,dz    : grid mesh along x, y and z directions (0 0 0 if locations are not on a grid)
%
% COVARIANCE/VARIOGRAM MODEL
% -----
% model       : covariance model for Gaussian random field (nst * 7 matrix)
%             Each row refers to a nested structure: [type, scale factors, angles]
%             Available types:
%             1: spherical
%             2: exponential
%             3: gamma (parameter b > 0)
%             4: stable (parameter b between 0 and 2)
%             5: cubic
%             6: Gaussian
%             7: cardinal sine
%             8: Bessel J (parameter b > 0.5)
%             9: Bessel K (parameter b > 0)
```

```

%          10: generalized Cauchy (parameter b > 0)
%          11: exponential sine
% cc       : sills of nested structures (nst * 1 vector)
% b        : third parameters for covariance definition (nst * 1 vector)
% nugget   : nugget effect variance
%
% NEIGHBORHOOD PARAMETERS: ORIGINAL DATA
% -----
% radius_data : search radii along rotated y, x, and z axes
% angles_data : angles for anisotropic search
% octant_data : divide into octants? 1=yes, 0=no
% ndata      : number of original data per octant (if octant=1) or in total
%
% NEIGHBORHOOD PARAMETERS: SIMULATED VALUES
% -----
% radius_nodes : if gridded locations: search radii along x, y and z axes
%               if scattered locations: search radii along rotated y, x, and z axes
% angles_nodes : if scattered locations: angles for anisotropic search
% octant_nodes : divide into octants? 1=yes, 0=no
% nnodes      : number of previously simulated nodes per octant (if octant=1 and scattered
locations) or in total
%
% KRIGING PARAMETERS
% -----
% koption    : kriging option (1=SK, 2=OK)
%
% SIMULATION PARAMETERS
% -----
% nrealiz   : number of realizations
% multigrid : number of refinements (multiple grid simulation) (0=not used)
% random    : random simulation sequence? (1=yes,0=regular simulation sequence)
% seed      : seed number for generating random values
% filename  : name of output file
% header    : create a GSLIB header in the output file? 1=yes, 0=no

%-----
% This program uses the following subroutines:
% cova.m           : compute covariance values
% create_paramfile.m : create parameter file
% krigenew.m      : compute kriging weights and covariance
% search.m        : search for neighboring nodes according to radius, angles, octant
% setrot.m        : set up matrix for rotation and reduction of coordinates
% spiral_search.m  : search for neighboring nodes according to spiral strategy

%-----

% Prompt for parameter file if no input is entered
%-----

```

```

if (nargin < 1)

    disp('Which parameter file do you want to use?');
    paramfile = input('','s');

end

% If a single input is entered, it is the parameter file
%-----

if (nargin == 1)
    paramfile = datacoord;
end

% Read from parameter file
%-----

if (nargin < 2)

    if isempty(paramfile)
        paramfile = 'sisim.par';
    end

    fid = fopen(paramfile);

    if (fid < 0)
        fclose('all');
        disp('ERROR - The parameter file does not exist,');
        disp('    Check for the file and try again');
        disp(' ');
        disp('    creating a blank parameter file');
        disp(' ');
        disp('Stop - Program terminated. ');
        create_paramfile;
        return;
    end

    % The parameter file does exist
    fgets(fid); fgets(fid); fgets(fid); fgets(fid);

    tline = fgets(fid);
    i = (find(tline == ' '));
    if ~isempty(i), tline = tline(1:i-1); end
    fid8 = fopen(tline);
    if (fid8 < 0)

```

```

%fclose(fid8);
datacoord = zeros(0,3);
datamean = zeros(0,3);
datavalues = zeros(0,1);
tline = fgets(fid);
tline = fgets(fid);
tline = fgets(fid);
else
    datavalues = dlmread(tline);
    tline = fgets(fid);
    index = str2num(tline);
    datacoord = datavalues(:,index);
    tline = fgets(fid);
    index = str2num(tline);
    datamean = datavalues(:,index);
    tline = fgets(fid);
    index = str2num(tline);
    datavalues = datavalues(:,index);
end

tline = fgets(fid);
i = (find(tline == ' '));
if ~isempty(i), tline = tline(1:i-1); end
fid2 = fopen(tline);
if (fid2 < 0)
    fclose('all');
    error(['Cannot import file ',tline]);
else
    simumean = dlmread(tline);
end

tline = fgets(fid);
index = str2num(tline);
simucoord = simumean(:,index);

tline = fgets(fid);
index = str2num(tline);
simumean = simumean(:,index);

tline = fgets(fid);
option = str2num(tline);
if option(1) == 1, dx = option(2); dy = option(3); dz = option(4); else, dx = 0; dy = 0; dz = 0;
end

tline = fgets(fid);
tline = str2num(tline);
nst = tline(1); nugget = tline(2);

```

```

for i = 1:nst
    tline = fgets(fid);
    tline = str2num(tline);
    model(i,:) = tline([1 3 4 5 6 7 8]);
    cc(i,1) = tline(2);
    b(i,1) = tline(9);
end

tline = fgets(fid);
radius_data = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
angles_data = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
octant_data = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
ndata = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
radius_nodes = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
angles_nodes = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
octant_nodes = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
nnodes = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
koption = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
nrealiz = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
multigrid = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
random = str2num(tline);

tline = fgets(fid);
seed = str2num(tline);

filename = fgets(fid);

```



```

i = (find(filename == ' '));
if ~isempty(i), filename = filename(1:i-1); end

tline = fgets(fid);
header = str2num(tline);

fclose('all');

end

warning('off','all');

% Basic definitions
%-----

nst = size(model,1);
scattered = 0;
if dx == 0
    scattered = 1;
    x0 = simucoord(1,1);
    y0 = simucoord(1,2);
    z0 = simucoord(1,3);
    nx = size(simucoord,1);
    ny = 1;
    nz = 1;
else
    x0 = min(simucoord(:,1));
    y0 = min(simucoord(:,2));
    z0 = min(simucoord(:,3));
    nx = (max(simucoord(:,1))-min(simucoord(:,1)))/dx+1;
    ny = (max(simucoord(:,2))-min(simucoord(:,2)))/dy+1;
    nz = (max(simucoord(:,3))-min(simucoord(:,3)))/dz+1;
end
nxy = nx*ny;
nxyz = nxy*nz;
simu1 = NaN*zeros(nxyz,nrealiz);
simu2 = NaN*zeros(nxyz,nrealiz);
progress0 = 0;
for i = 1:size(datavalues,2)
    datavalues(:,i) = (datavalues(:,i)-datamean(:,1))./(sqrt(datamean(:,1).*(1-datamean(:,1))));
end
if size(datavalues,2)<nrealiz, datavalues = datavalues(:,1)*ones(1,nrealiz); end

% Initialize spiral search
%-----

```

```

if scattered < 1

for i = 1:size(simucoord,1)
    index1 = 1+round((simucoord(i,1)-x0)/dx);
    index2 = 1+round((simucoord(i,2)-y0)/dy);
    index3 = 1+round((simucoord(i,3)-z0)/dz);
    gridmean(index1,index2,index3) = simumean(i);
end
simumean = gridmean(:);

k = 1;
ncells = ceil(radius_nodes./[dx dy dz]);
spiral_size = prod(2*ncells+1);
spiral_coord = zeros(spiral_size,3);
sequence = zeros(spiral_size,1);
a1 = [-ncells(1):ncells(1)]';
a2 = [-ncells(2):ncells(2)]';
a3 = [-ncells(3):ncells(3)]';
l1 = length(a1);
l2 = length(a2);
l3 = length(a3);
spiral_coord = [kron( ones(l2*l3,1),a1 ) kron( ones(l3,1),kron(a2,ones(l1,1)) ) kron(
a3,ones(l1*l2,1) )];

for k = 1:nst
    R = setrot(model,k);
    model_rotationmatrix(:,k) = R;
    coordinates = R*([(dx;dy;dz]*ones(1,spiral_size)).*spiral_coord)';
    coordinates = sqrt(sum(coordinates.^2))';
    sequence = sequence - cc(k)*cova(model(k,1),coordinates,b(k));
end

sequence = sequence + 1e-6*sum(cc)*sqrt(sum(spiral_coord'.*spiral_coord))';
[sequence,index] = sort(sequence);
spiral_coord = spiral_coord(index,:);
spiral_coord(1,:) = [];
spiral_size = spiral_size - 1;
simucoord = zeros(nxyz,3);

else

    search_rotationmatrix_nodes = setrot([1 radius_nodes angles_nodes],1); % rotation-reduction
matrix for node search
    for k = 1:nst
        R = setrot(model,k);
        model_rotationmatrix(:,k) = R;
    end
end

```

```

end

search_rotationmatrix_data = setrot([1 radius_data angles_data],1); % rotation-reduction matrix
for node search

% Prepare multiple grid simulation
%-----

multi = zeros(nxyz,1);
index = [0:nxyz-1]';
iz = floor(index/nxy);
iy = floor(index/nx-iz*ny);
ix = index-iz*nxy-iy*nx;
%index = index+1;

for i = 0:multigrid
    I = find( (ix == floor(ix)) & (iy == floor(iy)) & (iz == floor(iz)) );
    ix = ix/2;
    iy = iy/2;
    iz = iz/2;
    multi(I) = multi(I) + 1;
end

% Define path
%-----

if (random == 0) % regular path
    unif = [0.5:nxyz]'/nxyz - multi;
    [unif,sequence] = sort(unif);
else
    rand('state',seed);
    unif = rand(nxyz,1) - multi;
    [unif,sequence] = sort(unif);
end

% Open output file and prepare output format
%-----

fid = fopen(filename,'w');
outputformat = [];
for i = 1:nrealiz
    outputformat = [outputformat,' %3.0f'];
end
if header > 0
    fprintf(fid,'%1s\n','Simulated values');

```

```

fprintf(fid,'% 1s\n',int2str(nrealiz));
for i = 1:nrealiz
    fprintf(fid,'% 1s\n',['Realization no.',int2str(i)]);
end
end

```

```

% Simulate nodes according to sequence
%-----

```

```

for i = 1:nxyz

```

```

    % Coordinates of node being simulated
    %-----

```

```

    if scattered
        nodecoord = simucoord(sequence(i,:));
        index = sequence(i);
    else
        iz = floor((sequence(i)-1)/nxy);
        iy = floor((sequence(i)-1)/nx-iz*ny);
        ix = sequence(i)-iz*nxy-iy*nx-1;
        nodecoord = [x0+ix*dx,y0+iy*dy,z0+iz*dz];
        index = ix+nx*iy+nxy*iz+1;
    end

```

```

    if simumean(sequence(i)) == 0, simu1(index,:) = 0; continue; end
    if simumean(sequence(i)) == 1, simu1(index,:) = 1; continue; end

```

```

% Find nearest original data
%-----

```

```

data_index = search(datacoord,nodecoord,search_rotationmatrix_data,octant_data,ndata);
datacoord_i = datacoord(data_index,:);
data_i = datavalues(data_index,:);

```

```

% Find nearest previously simulated nodes
%-----

```

```

    if scattered
        node_index = search(simucoord(sequence(1:i-
1),:),nodecoord,search_rotationmatrix_nodes,octant_nodes,nnodes);
        nodecoord_i = simucoord(sequence(node_index),:);
        simu_i = simu2(sequence(node_index),:);
    else
        node_index = spiral_search(spiral_coord,spiral_size,nnodes,index,ix,iy,iz,nx,ny,nz,nxy,simu2);

```

```

iiz = floor((node_index-1)/nxy);
iiy = floor((node_index-1)/nx-iiz*ny);
iix = node_index-iiz*nxy-iiy*nx-1;
nodecoord_i = [x0+iix*dx,y0+iiy*dy,z0+iiz*dz];
simu_i = simu2(node_index,:);
end

% Conditioning kriging
%-----

weights =
krige([datacoord_i;nodecoord_i],nodecoord,model,cc,b,nugget,model_rotationmatrix,koption);
estimate = weights*[data_i;simu_i].*sqrt(simumean(sequence(i)).*(1-simumean(sequence(i))))
+ simumean(sequence(i));
simu1(index,:) = 0+(rand(1,nrealiz)<estimate);
simu2(index,:) = (simu1(index,)- simumean(sequence(i)))/(sqrt(simumean(sequence(i)).*(1-
simumean(sequence(i)))));
simucoord(index,:) = nodecoord;

% Report on progress from time to time
%-----

progress1 = 10*floor(10*i/nxyz);
if (progress1 > progress0)
    disp([' ',num2str(progress1),'% completed']);
    progress0 = progress1;
    pause(0.001);
end

end

% Write in output file
%-----

fprintf(fid,[outputformat,'\n'],simu1');
fclose(fid);

```