



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES GEOLÓGICAS BASADA EN LA TEORÍA DE  
COMPRESSED SENSING

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

HERNÁN ALBERTO CALDERÓN AMOR

PROFESOR GUÍA:  
DR. JORGE SILVA SÁNCHEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
DR. JULIÁN ORTIZ CABRERA  
DR. MARCOS ORCHARD CONCHA

SANTIAGO DE CHILE  
15 DE ABRIL DE 2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL  
TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO  
POR: HERNÁN ALBERTO CALDERÓN AMOR  
FECHA: 15 DE ABRIL DE 2014  
PROFESOR GUÍA: DR. JORGE SILVA SÁNCHEZ

## RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES GEOLÓGICAS BASADA EN LA TEORÍA DE COMPRESSED SENSING

En el ámbito de interpolación geoestadística, el principal problema para estimar variables regionalizadas es la baja cantidad de datos medidos. Este tipo de problemas están extremadamente indeterminados, es decir, presentan una mayor cantidad de grados de libertad que restricciones, lo que deriva en múltiples soluciones.

Este trabajo aborda el problema de interpolación de perfiles de permeabilidad desde un enfoque de reconstrucción de imágenes. En particular, el trabajo es motivado por el reciente desarrollo de la teoría *RIPless* de *Compressed Sensing*, herramienta que ha introducido un nuevo paradigma de adquisición de datos, permitiendo muestrear a tasas muy por debajo de las establecidas por las técnicas convencionales. El enfoque consiste en modelar las estructuras multicanal como imágenes que presentan una descomposición *sparse* en algún dominio transformado y utilizar esta información para reconstruir la imagen original a partir de un muestreo sub-crítico y no estructurado. Ésta es la principal diferencia con los métodos tradicionales, los cuales utilizan modelos estadísticos como información a priori para el proceso de estimación.

La principal contribución de este trabajo fue la contextualización del problema de interpolación espacial en el marco de *Compressed Sensing*, generando claras conexiones con los resultados teóricos de esta nueva herramienta. De este análisis, se formuló el problema de selección de base óptima, el cual indicó que bajo el esquema de medición aleatoria de píxeles, la DCT es la base que permite inducir un determinado error de reconstrucción con la menor cantidad de mediciones, superando incluso a las transformadas wavelet.

En la línea de los resultados obtenidos, este enfoque presenta prometedores desempeños, incluso en el régimen sub-crítico del 2% al 4% de datos medidos. En cuanto a los aspectos prácticos de procesamiento, la descomposición en distintos niveles de escala (bloques) para su reconstrucción y posterior promedio, mostró mejorías sustanciales en la estimación de las variables de permeabilidad. También se constató que, dada la naturaleza binaria de las imágenes estudiadas, una etapa de categorización genera importantes mejoras en los desempeños del método.

Finalmente, esta memoria abrió diversas ramas de estudio para trabajos futuros, dentro de los cuales destacan: implementación de otros algoritmos; estudio de técnicas de post-procesamiento más elaboradas; extender el análisis a diferentes estructuras o modelos geológicos; incorporación de información a priori en esquemas de reconstrucción; y uso conjunto de métodos convencionales y regularización *sparse*.

# Agradecimientos

A lo largo de mi vida han habido muchas personas que me han acompañado e influenciado para convertirme en la persona que hoy en día soy. Algunos ya no están, otros reaparecen de vez en cuando y otros aun mantienen su apoyo incondicional. La intención de este pequeño escrito es agradecer a cada uno de ellos, ya que sin su apoyo y compañía, este viaje no habría sido lo mismo.

En primer lugar agradecer al profesor Jorge Silva por sus invaluable consejos, por motivarme a realizar investigación, y permitir mi inicio y desarrollo en el mundo de la docencia, los cuales con el tiempo descubrí son mi pasión. A los miembros de la comisión: al profesor Julián Ortiz por la gran ayuda, apoyo y motivación para el desarrollo de este trabajo, y al profesor Marcos Orchard por su simpatía, disposición y consejos.

Como no mencionar al *team-IDS*. Gracias por esas infinitas sobremesas, por su buena disposición, simpatía, los resfríos por el aire acondicionado e innumerables risas, y por sobre todo, sus incontables consejos tanto en lo personal como en lo académico. A mis amigos universitarios, muchas gracias por todas esas experiencias y ayuda en estos siete años. Gracias por esas tardes de videojuegos, por sus ñoñerías, esas cervezas en la “terrancia” (muchas en algunos casos), cartagua, los partidos de futbol, clases de salsa, por los piscinazos en mi cumpleaños, viajes a Aculeo y tardes en el HBH. A mis amigos que a pesar del tiempo y largos periodos en que no nos vemos, siguen estando presentes desde el colegio. A mis amigos que han estado siempre desde el CPV, gracias por esas incontables tardes y noches de PES, SMASH, cerveza y papas fritas, pelambres, consejos, “depresiones”, pichangas y apoyo incondicional. A todos, gracias por su amistad.

Finalmente, agradezco profundamente a mi familia por su apoyo, paciencia y cariño durante todos estos años. A mi madre Marianela Amor y mi padre Hernán Calderón, por sus consejos y dedicación. A mis hermanas Javiera y Antonieta por su – no tan infinita, pero ahí está – paciencia, sobre todo en los momentos difíciles, y por su ayuda y regalónés cada vez que estuve lesionado (que no son pocas). A mi “compañera” Valeria Tapia por su increíble, incondicional y constante apoyo y cariño durante mi vida universitaria (algunos sostienen la teoría de que no hubiera sacado la carrera sin ella, la cual no descarto del todo). Por sus preocupaciones y asertivos consejos, los cuales me permiten ser una mejor persona, en muchos aspectos, de lo que era antes de conocerla.

A todos, MUCHAS GRACIAS!

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes Generales . . . . .	1
1.2. Antecedentes Específicos . . . . .	1
1.3. Objetivo General . . . . .	2
1.4. Objetivos Específicos . . . . .	2
1.5. Estructura de la Memoria . . . . .	3
<b>2. Revisión Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1. Métodos Convencionales . . . . .	4
2.1.1. Interpolador de Kriging . . . . .	4
2.1.2. Simulación Multi-Punto . . . . .	5
2.2. Compressed Sensing . . . . .	7
2.2.1. Muestreo Lineal . . . . .	8
2.2.2. Definiciones de Compressed Sensing . . . . .	8
2.2.3. Minimización en norma- $\ell_1$ . . . . .	9
2.3. Transformaciones Separables . . . . .	11
2.3.1. Transformada Coseno Discreta 1D . . . . .	11
2.3.2. Transformada Wavelet 1D . . . . .	12
2.3.3. Transformaciones 2D . . . . .	12
2.4. Indicadores de Comparación entre Señales . . . . .	14
<b>3. Contextualización del Problema de Interpolación Espacial en la Teoría de Compressed Sensing</b>	<b>16</b>
3.1. Modelamiento e Hipótesis del Problema . . . . .	16
3.2. Vectorización . . . . .	17
3.3. Matriz de Muestreo, Isotropía y Coherencia . . . . .	18
3.4. Formalización del Problema . . . . .	19
3.5. Selección de Base Óptima . . . . .	19
3.6. Metodología de Trabajo . . . . .	20
<b>4. Resultados Experimentales</b>	<b>23</b>
4.1. Selección de Base Óptima . . . . .	23
4.2. Análisis Inter-bloque . . . . .	26
4.3. Variabilidad inducida por la Matriz de Muestreo . . . . .	30
4.4. Selección de Bloques para Reconstrucción Promedio . . . . .	33

<b>5. Conclusiones</b>	<b>35</b>
5.1. Trabajo Futuro . . . . .	35
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>A. Demostraciones</b>	<b>41</b>
A.1. Demostración Proposición 1 . . . . .	41
A.2. Construcción Matriz de Transformación Wavelet . . . . .	42
A.2.1. Construcción Matriz de Transformación Wavelet de Orden Superior .	42
A.3. Demostración de Isotropía de la Matriz de Muestreo . . . . .	43
<b>B. Imágenes Complementarias</b>	<b>44</b>
B.1. Proceso de Categorización . . . . .	44
B.2. Análisis Inter-bloque . . . . .	45
B.3. Variabilidad inducida por Matriz de Muestreo . . . . .	48
B.4. Desempeños según la Orientación del Perfil . . . . .	49

# Índice de Tablas

4.1. Coherencia de los dominios DCT y wavelet inducida por filtros <i>Daubechies</i> de orden 1 al 9 con cinco niveles de profundidad. . . . .	25
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

# Índice de Figuras

2.1. Ejemplo de imágenes con los mismos modelos variográficos . . . . .	6
2.2. Ilustración de Metodología Simulación Multi-punto . . . . .	6
2.3. Geometría de regularización <i>sparse</i> . . . . .	10
2.4. Diagrama de Transformación Wavelet . . . . .	12
2.5. Diagrama de Transformación Wavelet 2D . . . . .	13
3.1. Ejemplo de imagen multicanal de $200 \times 200$ pixeles . . . . .	16
3.2. Ilustración de Compresibilidad en Perfiles de Permeabilidad . . . . .	17
3.3. Ejemplo de Imágenes Multicanal . . . . .	21
3.4. Metodología Propuesta . . . . .	21
4.1. Coeficientes Transformados para el perfil presentado en la Figura 3.1 . . . . .	23
4.2. Índice de Capacidad de Compresión $\kappa(x, U, \epsilon)$ para perfil en Figura 3.1 . . . . .	24
4.3. Índice de Selección de Base definido en Ecuación (3.8) . . . . .	25
4.4. Reconstrucción de CS para distintos tamaños de bloque con el 4% de los datos . . . . .	26
4.5. Métrica de aproximación <i>sparse</i> para base DCT . . . . .	27
4.6. Desempeños de reconstrucción para indicador SNR . . . . .	28
4.7. Desempeños de reconstrucción para indicador MSSIM . . . . .	29
4.8. Reconstrucciones Promedio para distintos nivel de adquisición . . . . .	30
4.9. Ilustración de variabilidad como función de la matriz de muestreo . . . . .	31
4.10. Desempeño promedio y desviación estándar . . . . .	32
4.11. Desempeños promedio de CS como función del número de bloques . . . . .	33
B.1. Ilustración de mejora debido al proceso de categorización . . . . .	44
B.2. Reconstrucción de CS para distintos tamaños de bloque con el 10% de los datos . . . . .	45
B.3. Reconstrucción de CS para distintos tamaños de bloque con el 4% de los datos . . . . .	46
B.4. Reconstrucción de CS para distintos tamaños de bloque con el 2% de los datos . . . . .	47
B.5. Ilustración de variabilidad como función de la matriz de muestreo . . . . .	48
B.6. Reconstrucciones para imagen multicanal horizontal . . . . .	49
B.7. Reconstrucciones para imagen multicanal vertical . . . . .	50
B.8. Reconstrucciones para imagen multicanal diagonal . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes Generales

En el contexto de exploración terrestre, el principal problema para caracterizar propiedades físicas del subsuelo es la escasa información a la cual se tiene acceso, ya sea por motivos estructurales, como por motivos económicos. La rama de la geociencia encargada de la caracterización de variables regionalizadas distribuidas en el espacio mediante el uso de herramientas estadísticas es la Geoestadística. En particular, la interpolación de datos a partir de un conjunto muy reducidos de muestras conforma la esencia de problemas inversos en geociencia. Ejemplos clásicos y atinentes para Chile son la exploración minera para la determinación de zonas con alta ley de cobre y la caracterización de canales subterráneos.

Dentro de los métodos convencionales para tratar con la falta de información (datos) se destacan aquellas técnicas que incorporan información de un modelo, ya sea inferido a partir de los mismo datos (variograma), o proporcionado por expertos o imágenes características del fenómeno estudiado (simulación) [1, 2]. Estos últimos corresponden a la familia de enfoques estocásticos, donde la variabilidad toma un rol fundamental y es representativo de la incertidumbre del modelo. Usualmente estos esquemas de interpolación no proporcionan una única solución, a diferencia de diversas técnicas, como por ejemplo, en el ámbito de procesamiento de imágenes.

### 1.2. Antecedentes Específicos

En el marco de procesamiento de señales, las técnicas de reconstrucción de imágenes son un conjunto de enfoques utilizados para eliminar las distorsiones y/o ruido adicionados a una imagen debido a tanto el proceso de captura de ésta como la transmisión por medio de un canal. Típicamente, el proceso de adquisición es modelado de la siguiente manera

$$y = A(x + \omega) + \eta \tag{1.1}$$



donde  $x$  representa la imagen,  $y$  los datos observados,  $A$  la matriz de distorsión,  $\omega$  la incertidumbre asociada a la variable  $x$  y  $\eta$  ruido aditivo asociado a la captura de las muestras. Enfoques clásicos de reconstrucción de imágenes son: *image denoising*, *deblurring*, *inpainting*, *zooming* y *super-resolution* [3–5]. Es en este contexto que el problema de interpolación de datos en geoestadística puede ser abordado no como un problema de simulación, selección de modelo o preservación de estadísticos, si no, como un enfoque donde la información a priori se incorpore a partir de un modelo de señal, el cual es universal, independiente de la estructura o datos observados.

La reciente introducción de la teoría de *Compressed Sensing* (CS) ha generado un nuevo paradigma en el problema de muestreo y reconstrucción de señales [6–10]. En palabras simples, CS ofrece un esquema de adquisición y compresión simultáneos que permite muestrear a tasas muy por debajo de la estipulada por el teorema de muestreo clásico. La teoría estandar establece cotas muy elevadas a las cuales la información debe ser adquirida, lo cual genera problemas tales como: capacidad de almacenamiento, transmisión, procesamiento, limitaciones de *hardware* y elevado costo económico. CS busca la resolución de problemas indeterminados, es decir, sistemas con una mayor cantidad de incógnitas que ecuaciones, basado en la idea de que la señal sub-muestreada pertenece a un subconjunto del espacio original.

Este trabajo aborda el problema de interpolación geoestadística desde un enfoque de reconstrucción de imágenes. En particular, el trabajo es motivado por el reciente desarrollo de *the RIPless Theory of Compressed Sensing* [11]. Este nuevo paradigma rompe con la resolución clásica considerando un nuevo tipo de información estructural: un modelo de señal dado por la descomposición en un espacio transformado.

### 1.3. Objetivo General

Estudiar, desarrollar e implementar la técnica de *Compressed Sensing* para la resolución de problemas inversos en geoestadística, aplicado a la caracterización de perfiles de permeabilidad binarios presentes en el subsuelo.

### 1.4. Objetivos Específicos

- Introducir este nuevo paradigma como una alternativa a la resolución de problemas inversos en geoestadística.
- Adquirir una base de datos que represente suficientemente bien el fenómeno y/o estructura de los perfiles de permeabilidad.
- Caracterizar las propiedades de las imágenes geológicas en función de los diversos dominios transformados estudiados.
- Contextualizar el problema de interpolación espacial en la teoría de CS. Determinar el esquema de muestreo y base óptima.

- Implementar y resolver en Matlab el problema de optimización que plantea CS para imágenes 2D.
- Calcular las métricas de desempeño. Determinar los regímenes de operación, desempeños promedios e incertidumbre del método.

## 1.5. Estructura de la Memoria

El trabajo se estructura de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta la revisión bibliográfica. Se incluye una breve descripción del estado del arte del problema y se detallan los conceptos básicos de *Compressed Sensing* para la comprensión del trabajo.
- En el Capítulo 3 se presenta la implementación del trabajo. En esta sección se incluye: el modelamiento del problema, las hipótesis de trabajo, la contextualización del problema bajo la teoría de *Compressed Sensing*, la selección de base óptima y la metodología utilizada.
- En el Capítulo 4 se muestran y analizan los resultados obtenidos.
- En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo y las posibles líneas de investigación futuras.

# Capítulo 2

## Revisión Bibliográfica

En el ámbito de interpolación geoestadística, el principal problema para estimar variables regionalizadas es la baja cantidad de datos medidos. Típicamente este tipo de problemas están extremadamente indeterminados, es decir, presentan una mayor cantidad de grados de libertad que restricciones, lo que deriva en múltiples soluciones. Es en este caso que incorporar información a priori, ya sea de un modelo variográfico, una imagen [1, 2], o un modelo de señal [9], es fundamental para la estimación óptima de los datos ocluidos.

### 2.1. Métodos Convencionales

Existen diversas técnicas que permiten inferir la información faltante, como por ejemplo *vecinos más cercanos* e *inverso de la distancia*. Sin embargo, estos métodos presentan diversas falencias en cuanto a: la incorporación de modelos analíticos, posibles agrupaciones de los datos y preservación de continuidad de la variable estudiada. Enfoques que mejoran considerablemente estos desempeños son: interpolación de *Kriging* y métodos de simulación.

#### 2.1.1. Interpolador de Kriging

*Kriging* [12] es un conjunto de métodos de interpolación espacial que permiten la predicción de variables regionalizadas a partir del conocimiento parcial de éstas. Éste pertenece a la familia de mínimos cuadrados y propone que las variables ocluidas se pueden modelar como una combinación lineal de los datos conocidos. Luego, el problema consiste en encontrar los ponderadores óptimos para la regresión. El modelo estadístico utilizado es el variograma [12], el cual proporciona una medida de la disimilitud entre los datos según su distancia de separación.

Existen diversas variantes y extensiones de este método, pero la construcción del *kriging*

se caracteriza por presentar 4 principios básicos:

1. **Abstracción:** las variables regionalizadas son consideradas variables aleatorias, es decir, poseen una función de distribución de probabilidad (PDF por su sigla en inglés) y funciones de correlación con el resto de las variables distribuidas en el espacio.
2. **Linealidad:** el estimador  $\hat{\mathcal{X}}_0$ , donde  $\mathcal{X}$  es la variable aleatoria, es una combinación lineal afín de las variables medidas, es decir

$$\hat{\mathcal{X}}_0 = \lambda_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathcal{X}_i \quad (2.1)$$

donde  $\hat{\mathcal{X}}_0$  es el estimador de la variable  $\mathcal{X}$  en la posición a estimar,  $\lambda$  el vector de parámetros de la regresión y  $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^p$  el conjunto de datos medidos.

3. **Insesgo:** el estimador debe tener un valor esperado que coincida con el de la variable aleatoria a estimar.

$$\mathbb{E}\{\mathcal{X}_0 - \hat{\mathcal{X}}_0\} = 0 \quad (2.2)$$

4. **Optimalidad:**  $\lambda$  es escogido de tal manera de minimizar la esperanza del error cuadrático (LMSE).

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmin}_{\lambda \in \mathbb{R}^{p+1}} \mathbb{E}\{(\mathcal{X}_0 - \hat{\mathcal{X}}_0)^2\} \quad (2.3)$$

Algunas características del *kriging* son: considera disposición espacial en el proceso de estimación, como cercanía a datos medidos y redundancia entre estos; permite incluir información de un modelo, como el variograma; otorga solución única; considera zonas con redundancia o sobre-muestreo, distribuyendo los pesos  $\{\lambda_i\}$  según corresponda; y es un estimador insesgado (por construcción).

Este enfoque puede generar regresiones negativas, lo cual no se condice con la realidad y hay que tener ciertas consideraciones en los procesos de cálculo. Es un método no automatizado, y que varía fuertemente según la expertiz de quien genera el modelo. En cuanto al uso de modelos variográficos, éste puede ser no adecuado, dado que diversas estructuras, incluso siendo muy diferentes perceptualmente, presentan variogramas similares [13], lo cual descalifica al variograma como modelo representativo unívoco del fenómeno estudiado.

### 2.1.2. Simulación Multi-Punto

Por otro lado, Simulación Multipunto (MPS por su sigla en inglés) es una técnica de interpolación ampliamente utilizada en caracterización de estructuras geológicas [13–17]. MPS identifica cuatro problemas respecto a los métodos clásicos: los datos son insuficientes para caracterizar un modelo, tanto estadístico como estructural, por lo que es necesario incorporar

más información en el proceso de estimación; modelos basados en estadísticos de primer y segundo orden, como el variograma, no permiten replicar estructuras realistas, siendo incapaces de discriminar entre diferentes modelos (ver Figura 2.1); no incorporan información experta en el proceso de estimación; y obtener modelos estadísticos analíticos es altamente complejo. Este enfoque utiliza un conjunto pequeño de mediciones para reconstruir una imagen, simulando los pixeles restantes acorde a una estructura previamente establecida, mediante estadísticos de orden superior e información estructural.

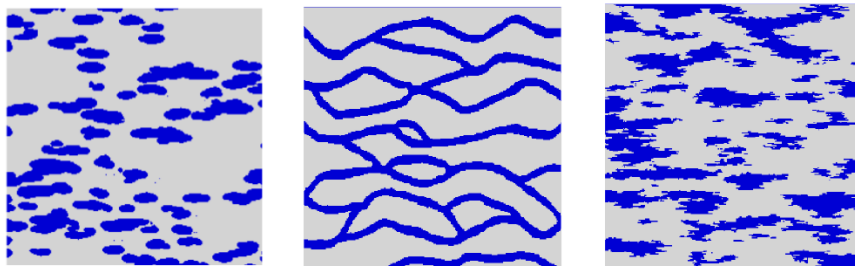


Figura 2.1: Ejemplo de imágenes con los mismos variogramas. Imagen extraída de [13].

Para incorporar información experta y estadísticos de mayor orden, esta técnica hace uso de imágenes de entrenamiento con el fin de extraer el modelo estructural y las distribuciones condicionales necesarias para la estimación [1, 18], factor decisivo en el desempeño de esta técnica. El principio del método se explica a continuación:

1. Se escoge vía Monte-Carlo un objeto aleatorio (pixel) desconocido y se determinan sus  $q$  vecinos más cercanos donde exista conocimiento de la variable en cuestión, como se muestra en la Figura 2.2.a.
2. Se estima la probabilidad condicional  $p(x|y)$ , determinando la frecuencia relativa para cada posible valor de la variable  $x$  condicionado a los  $q$  vecinos seleccionados (evento), a partir de la imagen de entrenamiento (ver Figura 2.2.b).
3. Luego, el valor del pixel se obtiene mediante la simulación de la variable dadas las distribuciones estimadas en el punto anterior.

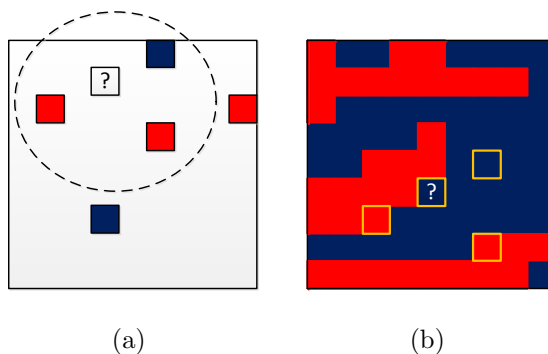


Figura 2.2: Ilustración de Metodología Simulación Multi-punto. (a) Imagen de datos adquiridos y (b) ejemplo de búsqueda de patrones en imagen de entrenamiento.

## 2.2. Compressed Sensing

La teoría clásica de adquisición de datos, basada en el *Teorema del Muestreo* de Shannon-Nyquist [19, 20], propone un esquema minucioso y estructurado que preserva íntegramente la información contenida en la señal muestreada, condicionando la tasa a la cual ésta debe ser adquirida. Este teorema establece que una señal de ancho de banda limitado puede ser representada unívocamente a partir de sus muestras equiespaciadas. Sin embargo, las señales naturales contienen información de alta frecuencia, y por consiguiente, las tasas de muestreo suelen ser muy elevadas.

**TEOREMA 1. *Teorema del Muestreo.*** Sea  $x(t)$ , y su respectiva transformada de fourier  $X(F)$ , una señal de soporte finito tal que  $|X(F)| = 0 \forall F > B$ . Sea  $x(n) = (x(n/F_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  la versión muestreada de  $x(t)$  a intervalos equiespaciados por  $T_s = \frac{1}{F_s}$ . Luego, es posible recuperar la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x(n)$ , utilizando el interpolador mostrado en la Ecuación (2.4), si  $2B < F_s$ .

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \text{sinc}(tF_s - n) \quad (2.4)$$

En el marco de procesamiento de imágenes, la interpolación de datos (píxeles) es conocida como *Inpainting*. El objetivo de esta técnica es inferir los píxeles faltantes a partir de los datos observados e información a priori (esparsidad, estructura, modelos estadísticos). En los últimos años, el concepto de esparsidad<sup>1</sup> ha tomado gran relevancia en este tipo de problemáticas, puesto que los objetos de interés (imágenes) típicamente están contenidos en un subconjunto de dimensión considerablemente más pequeña que la imagen en cuestión [3, 21, 22]. Desde este punto de vista, la teoría de *Compressed Sensing* (CS) [6–10] ha motivado y contribuido de manera sustancial al desarrollo de nuevas técnicas de adquisición de datos y reconstrucción de señales. CS ha establecido garantías teóricas en la resolución de problemas indeterminados, y ha sido aplicada en diversas problemáticas y ramas científicas [7, 23–26]. Esta teoría ha permitido el diseño de distintos escenarios de adquisición, lo cual ha derivado en estrategias mucho más inteligentes de muestreo. En palabras simples, CS ofrece un esquema de adquisición y compresión simultáneos. Explota la redundancia característica presente en las señales naturales (imágenes, sonido, por mencionar algunas) para reducir considerablemente la cantidad de mediciones necesarias para su adquisición, incluso muy por debajo de la cota proporcionada por el teorema del muestreo de Shannon-Nyquist [19, 20].

Dentro de la filosofía de CS, existen dos teorías: *RIP*<sup>2</sup> y *RIPless*. En particular, la teoría *RIPless* de CS, recientemente elaborada por Candès y Plan [11], ofrece diversas garantías para problemas donde la matriz de adquisición presenta una determinada estructura y la redundancia de la señal no es suficiente para garantizar un buen desempeño. Estipula la

---

<sup>1</sup>En inglés, el concepto *sparsity* hace referencia a la propiedad de una señal de ser representada con una cantidad de coeficientes mucho menor que la dimensión de ésta (ver Definición 1). Sin embargo, su traducción literal no es representativa de la idea que se desea ilustrar. Es por ésto, que durante el desarrollo de esta memoria se hace uso de la palabra *esparsidad*, la cual no existe en el vocabulario español, pero sí refleja el concepto que se desea plasmar.

<sup>2</sup>Para mayor detalle sobre la teoría RIP de CS, ver [27]

necesidad de realizar un balance entre la complejidad de la señal y la ortogonalidad de las bases de adquisición y compresión.

Jafarpour, en [23], desarrolla diversos estudios experimentales que muestran el potencial de CS en la resolución de este tipo de problemáticas. Si bien, provee un claro marco experimental, no realiza ninguna conexión con la teoría actual. Tampoco establece criterios de desempeños ni realiza estudios sistemáticos en cuanto a las características o propiedades de señal de las imágenes geológicas.

En esta sección se presentan las definiciones y teoremas de CS necesarios para su estudio e implementación. En particular, las propiedades descritas son proporcionadas por el trabajo *the Probabilistic and RIPless theory of Compressed Sensing* desarrollado por Candès y Plan [11]. Esta teoría es elaborada sobre la idea de un muestreo lineal aleatorio, es decir, donde la matriz  $A$  en (2.5) es generada a partir de  $m$  realizaciones i.i.d de un objeto aleatorio  $\{a \sim \rho(a)\} \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.2.1. Muestreo Lineal

Como se mencionó anteriormente, en el marco de CS el esquema de adquisición es lineal, es decir, cada muestra se obtiene como una suma ponderada de las componentes del vector  $x$ . Luego, se define el vector de datos  $y$  como

$$y = Ax \in \mathbb{R}^m \tag{2.5}$$

donde  $y$  representa los datos observados,  $x$  la señal original y  $A$  la matriz de muestreo de dimensión  $m \times n$ , con  $m \lll n$ . CS estipula que bajo ciertas condiciones sobre  $A$  y  $x$ , es posible reconstruir la señal original a partir de las muestras  $y$  de manera perfecta o casi perfecta. [11]

### 2.2.2. Definiciones de Compressed Sensing

**DEFINICIÓN 1.** *Sea un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $x$  es  **$k$ -sparse** si como máximo tiene  $k$  coeficientes distintos de cero, es decir*

$$\text{soporte}(x) = |\{x(i) : x(i) \neq 0\}| \leq k \tag{2.6}$$

donde  $x(i)$  es la componente  $i$ -ésima del vector  $x$ . Al conjunto de todas las señales  $k$ -sparse se denota como  $\Sigma_k$ , y en base a ésto, se define la mejor aproximación  $k$ -sparse,  $x_k$ , como aquella señal que minimiza el funcional

$$x_k = \underset{\tilde{x} \in \Sigma_k}{\operatorname{argmin}} \|x - \tilde{x}\|_p \tag{2.7}$$

en alguna norma  $\ell_p$ .

**DEFINICIÓN 2.** Sea un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $x$  es **compresible** si existen  $C, p \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|x(n_i)| \leq Ci^{-\frac{1}{p}} \quad (2.8)$$

donde  $|x(n_i)| \leq |x(n_{i-1})|$ , es decir, la magnitud de sus coeficientes decae polinomialmente a medida que se recorren las componentes de  $x$  de forma descendente. Esta propiedad representa la capacidad de  $x$  de ser aproximada por una señal  $k$ -sparse.

Dadas estas nociones de estructuras de señales, que enfocan el análisis en el soporte de éstas, CS provee resultados en la línea del algoritmo de reconstrucción, Ecuación (2.11), y el número crítico de mediciones para garantizar, con una alta probabilidad, la reconstrucción perfecta o sub-óptima de  $x$ . Antes de postular el teorema de CS, es necesario establecer condiciones sobre la matriz de muestreo  $A$  en (2.5).

**DEFINICIÓN 3.** Se dice que una matriz  $A$  satisface la **propiedad isotrópica** si ésta es generada por realizaciones *i.i.d* de un vector aleatorio  $a(w)$  de tal modo que

$$\mathbb{E}\{aa^\dagger\} = I_{n \times n} \quad (2.9)$$

Notar que  $\mathbb{E}\{aa^\dagger\}$  corresponde a la matriz de correlación de  $a(w)$ , y por consiguiente, las componentes del vector  $a(w)$  deben ser no-correlacionadas y de varianza unitaria.

**DEFINICIÓN 4.** Sea una matriz  $A$  generada por realizaciones de un vector aleatorio  $a(w)$ . Entonces, se define la coherencia  $\mu$  de  $A$  como

$$\max_i |a(w, i)|^2 \leq \mu \quad (2.10)$$

donde  $a(w, i)$  es la componente  $i$ -ésima del vector aleatorio  $a(w)$ .

Considerando las definiciones anteriores, CS establece que es posible reconstruir una señal *sparse* o aproximadamente *sparse* bajo un escenario crítico de sub-muestreo.

### 2.2.3. Minimización en norma- $\ell_1$

Como se mencionó con anterioridad, el fomentar esparsidad es fundamental para obtener un buen rendimiento. En este contexto, la regularización con norma  $\ell_1$  ha mostrado sobresalientes desempeños en promover soluciones *sparse*, como se ejemplifica en la Figura 2.3 [3, 21, 22]. Si bien, la norma  $\ell_0$ <sup>3</sup> permite la reconstrucción exacta de una señal con soporte mínimo, éste corresponde a un problema combinatorial, el cual en la práctica es intratable computacionalmente. Además, no presenta buenos desempeños en imágenes compresibles ni es robusto a datos ruidosos. En general, cualquier norma  $\ell_q$  tal que  $0 \leq q \leq 1$  fomenta esparsidad en la solución, pero  $q = 1$  es el caso crítico donde aun se tiene un problema de optimización convexo.

---

<sup>3</sup>Se define la norma  $\ell_0$  de una señal como la cantidad de coeficientes no nulos presentes en ella.



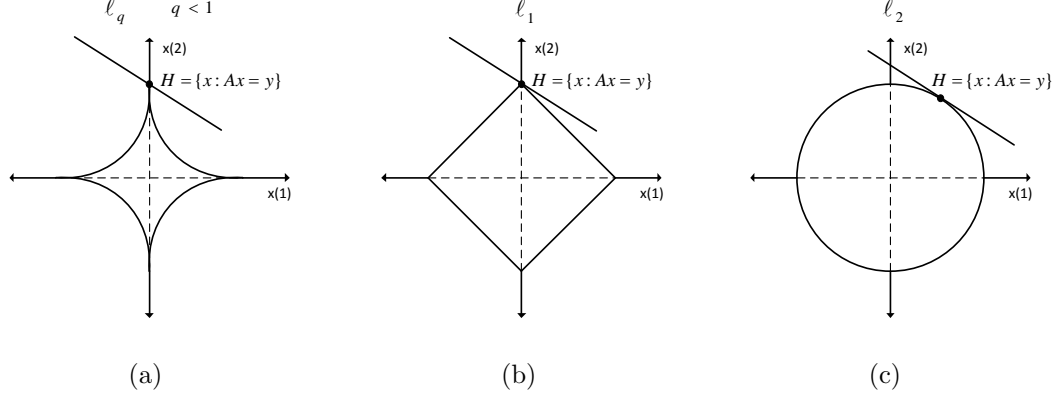


Figura 2.3: Geometría de regularización *sparse*. (a) Bola en norma  $\ell_q$  con  $0 < q < 1$ , donde se observa que no corresponde a un problema convexo, pero promueve soluciones *sparse*. (b) Bola en norma  $\ell_1$ , donde se aprecia que el problema es convexo y la solución promueve esparsidad. (c) Bola en norma  $\ell_2$ , donde se aprecia que la solución no necesariamente es *sparse*.

En particular, el problema clásico es denominado *basis pursuit* (BP), Ecuación (2.11), el cual es un problema convexo de minimización en norma  $\ell_1$  y puede ser resuelto mediante programación lineal [9, 28, 29]. Existen diversos algoritmos desarrollados para resolver el problema de minimización convexa BP, tales como: soluciones *greedy* con desempeños garantizados: *Orthogonal Matching Pursuit* [30, 31]; *iterative hard-thresholding* [32]; y *Co-Samp* [33], por mencionar algunos dentro de la literatura. Donoho, en [34], establece condiciones bajo las cuales las soluciones del problema de optimización en norma  $\ell_0$  (combinatorial e inviable computacionalmente) y BP (convexo y con garantías bien establecidas) coinciden. A continuación se presenta el resultado principal de CS.

**TEOREMA 2.** [11, Th. 1.2]. *Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  una señal arbitraria. Sea  $y$  las muestras adquiridas a través del operador lineal  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $m < n$ , mostrado en la Ecuación (2.5). Consideremos  $\hat{x}$  como la solución del siguiente problema de optimización convexa*

$$\hat{x} = \underset{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{x}\|_1 \quad \text{s.a. } A\tilde{x} = y. \quad (2.11)$$

*Luego, si  $A$  satisface la propiedad isotrópica mostrada en (2.9), entonces para todo nivel de esparsidad  $k \in \mathbb{N}$  y constante  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , con probabilidad  $1 - 6/n - 6e^{-\beta}$ , se tiene que*

$$\|\hat{x} - x\|_2 \leq \frac{C_1(1 + \alpha)}{\sqrt{k}} \|x - x_k\|_1 \quad (2.12)$$

*si la cantidad de datos adquiridos (filas de la matriz  $A$ ) cumple con*

$$m \geq C_\beta \cdot \mu \cdot k \cdot \log n \quad (2.13)$$

*donde  $\mu$  es la coherencia definida según (2.10),  $\alpha = \sqrt{\frac{(1+\beta)k\mu \log n \log m \log^2 k}{m}}$ ,  $C_\beta = (1 + \beta)C_0$  y  $C_{0,1}$  constantes.*

**OBSERVACIÓN 1.** *Del Teorema 2 se desprenden importantes observaciones:*

1. *Los factores relevantes que definen la cantidad de muestras críticas son la esparsidad (o compresibilidad) y la coherencia  $\mu$  de la matriz de muestreo (Ecuación (2.13)).*
2. *El error de reconstrucción está acotado por el error de aproximación  $k$ -sparse de  $x$  (Ecuación (2.12)).*
3. *Si la señal  $x \in \Sigma_k$ , entonces la reconstrucción es perfecta (ver Ecuación (2.12)).*
4. *En el caso de que  $k \lll n$ , la cantidad de muestras críticas se encuentra muy por debajo de  $n$  y de la cota establecida por el teorema del muestreo.*

## 2.3. Transformaciones Separables

En el ámbito de procesamiento de señales, típicamente la extracción de características o tratamiento de datos se realiza posterior a una transformación de éstos. El objetivo de esta transformación varía según la aplicación, dentro de las cuales destaca la compresión de datos. La DCT (*Discrete Cosine Transform*), transformación utilizada en el algoritmo JPEG [35], y *Wavelets*, utilizada en el reciente algoritmo de compresión JPEG2000 [36], son dos casos emblemáticos en compresión de datos. En diversos escenarios se ha establecido la superioridad de las *wavelets*, en particular la familia inducida por los filtros *Daubechies* [37], sobre la DCT en cuanto a capacidad de compresión. Ambos espacios transformados presentan sus respectivas matrices de transformación y extensiones al caso bidimensional, las cuales se detallan a continuación.

### 2.3.1. Transformada Coseno Discreta 1D

La *Transformada Coseno Discreta* (DCT por su sigla en inglés, [38]) es una de las transformaciones más utilizadas en procesamiento de señales, más precisamente en audio, procesamiento de imágenes y compresión de datos. Esta base proporciona información en frecuencia, al igual que la transformada de Fourier (FFT), pero a diferencia de esta última, trabaja únicamente con valores reales, lo cual permite disminuir la carga computacional. La DCT ofrece altos niveles de compresibilidad concentrando mayoritariamente la energía en las bajas frecuencias. La expresión utilizada se muestra en la ecuación (2.14)

$$z(k) = \alpha_k \sum_{i=1}^n x(i) \cos\left(\frac{\pi(2i-1)(k-1)}{2n}\right) \quad (2.14)$$

donde

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{n}} & \sim \end{cases} \quad (2.15)$$

o equivalentemente en su representación matricial  $z = \Phi x$ , con  $\Phi(i, j) = \alpha_i \cos\left(\frac{\pi(2j-1)(i-1)}{2n}\right)$ .

### 2.3.2. Transformada Wavelet 1D

El objetivo de esta sección es presentar los conceptos básicos para la construcción de las matrices de transformación wavelet, a pesar de que finalmente no fueron utilizadas en los procesos de reconstrucción. Los motivos de esta decisión se detallan en la Sección 4.1. Los aspectos prácticos de la implementación matricial de esta transformación se incluyen en el apéndice, al igual que el desarrollo de matrices de mayor orden de profundidad.

La familia de transformaciones *wavelet*, en particular las *Daubechies* (Db, [37]), son un conjunto de operadores que permiten obtener altos niveles de compresión en la mayoría de las señales naturales. A diferencia de la FFT y DCT, las Db presentan una resolución tanto temporal como en frecuencia, permitiendo comprimir mientras se mantiene la estructura original de los datos. Particularmente, presentan excelentes desempeños comprimiendo señales continuas por tramos, propiedad presente en los perfiles de permeabilidad considerados en este trabajo. Como se ilustra en la Figura 2.4, esta transformación se obtiene mediante procesos de decimación, es decir, etapas de filtrado y *downsampling*, organizando los coeficientes en diferentes niveles de escala, dependiendo de la cantidad de iteraciones sobre la banda de aproximación.

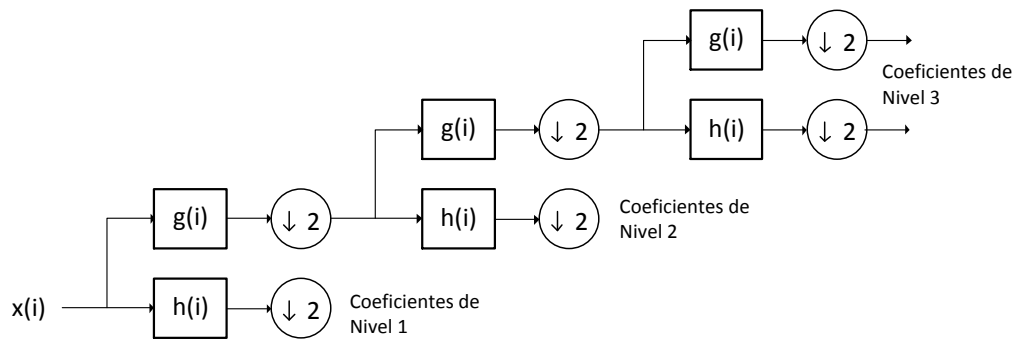


Figura 2.4: Diagrama de Transformación Wavelet.  $g(i)$  representa un filtro pasa-bajo y  $h(i)$  un filtro pasa-alto.

### 2.3.3. Transformaciones 2D

Como se mencionó anteriormente, las transformaciones descritas presentan una extensión a espacios bidimensionales. No obstante, existe una familia de dominios que permiten reducir el problema matricial (imágenes) al análisis vectorial, preservando las dependencias estructurales entre los coeficientes transformados. Este tipo de espacios presentan un esquema de

transformación con orientaciones verticales y horizontales. Más precisamente, dada una imagen  $X \in \mathbb{R}^{N \times M}$ , se dice que la base es separable si el proceso puede descomponerse en dos etapas: la transformación de cada columna de forma independiente y la transformación de cada fila resultante. En otras palabras, una transformación separable es aquella que opera de forma independiente sobre cada dimensión del objeto. Matemáticamente, esta definición se expresa como

$$Z = \Phi X \Psi^\dagger \quad ; \quad X = \Phi^\dagger Z \Psi \quad (2.16)$$

donde  $X$  representa la imagen,  $Z$  la imagen transformada,  $\Phi$  la matriz de transformación de tamaño  $N \times N$  y  $\Psi$  la misma matriz de transformación de tamaño  $M \times M$ . En la Ecuación (2.17) se muestra la expresión para el cálculo de la transformación DCT 2D. En la Figura 2.5 se muestra el esquema de transformación wavelet *Daubechies* para imágenes 2D.

$$Z(i, j) = \alpha_i \alpha_j \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M X(i, j) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)(i-1)}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2l-1)(j-1)}{2M}\right) \quad (2.17)$$

donde

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{si } i = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \sim \end{cases} \quad \alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} & \text{si } j = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{M}} & \sim \end{cases} \quad (2.18)$$

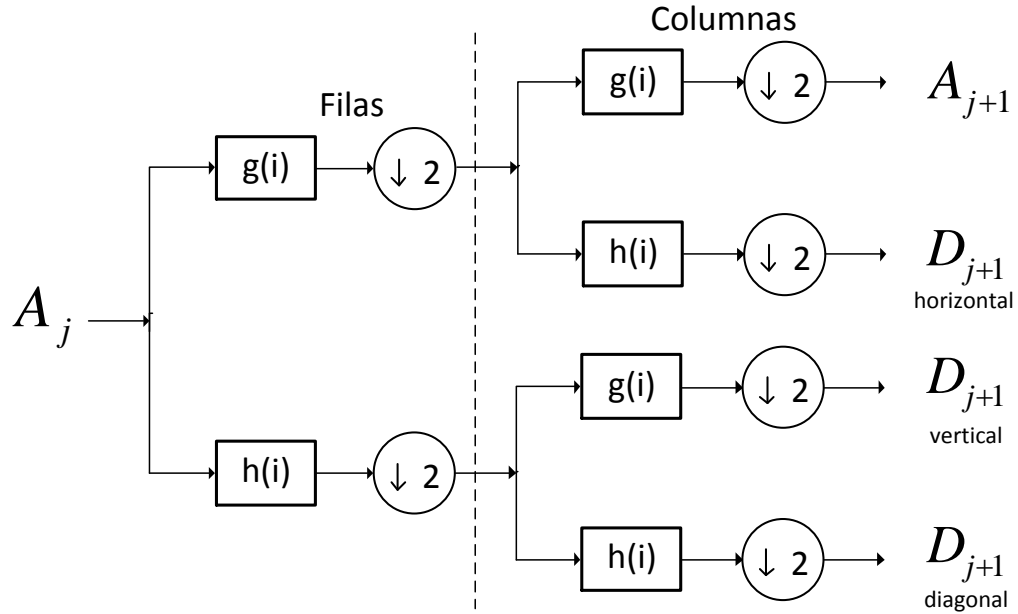


Figura 2.5: Diagrama de Transformación Wavelet 2D.  $g(i)$  representa un filtro pasa-bajo y  $h(i)$  un filtro pasa-alto.  $A_j$  representa la banda de aproximación con  $j$  niveles de profundidad,  $D_{j+1}$  los detalles de la sub-imagen  $A_j$  en la iteración  $j + 1$ .

## 2.4. Indicadores de Comparación entre Señales

Para caracterizar los desempeños de reconstrucción de imágenes, es necesario establecer métricas que permitan identificar y cuantificar la similitud entre la señal original (imagen geológica) y su respectiva reconstrucción. En geoestadística, uno de los criterios convencionales para establecer desempeños está basado en la reproducción de modelos estadísticos [39], algunos de los cuales se muestran a continuación:

- **Reproducción de Datos:** este criterio consiste en verificar que el sesgo y varianza en las posiciones medidas son pequeños. Tanto *Kriging* como los métodos de simulación estiman de forma perfecta, y con varianza nula, los datos en las posiciones conocidas, es decir,  $\hat{\mathcal{X}}_i = \mathcal{X}_i$ , donde  $\mathcal{X}_i$  pertenece al conjunto de datos medidos. Luego, para verificar esta propiedad, se utiliza la gráfica conformada por los puntos  $(\hat{\mathcal{X}}_i, \mathcal{X}_i)$  y se verifica que ésta se distribuye en la recta de pendiente unitaria.
- **Reproducción de Histogramas:** en este caso, se verifica que el histograma objetivo sea reproducido por los datos una vez realizada la simulación. Este histograma a priori puede ser obtenido a través de las mediciones directas o mediante el uso de modelos geológicos de entrenamiento (MPS). En otras palabras, se busca que la distribuciones a priori y a posteriori sean similares. Es importante señalar que esta figura de mérito solo se requiere en los métodos de simulación. En *Kriging*, el histograma no se preserva dado el efecto de suavizamiento que este genera.
- **Reproducción de Estadísticos Promedio:** este método de evaluación consiste en verificar que las estadísticas globales, más precisamente, los momentos de primer y segundo orden, en promedio se mantienen en torno a la media y varianza del histograma o distribución a priori respectivamente, es decir, que el proceso de estimación sea ergódico. Con el fin de comprobar esta propiedad, para cada realización se calcula la media y varianza de su respectivo histograma. Luego, con ello se genera un histograma global de cada momento. Finalmente, para una cantidad suficiente de realizaciones, se desearía que la esperanza de las medias coincida con el valor esperado a priori, y que la media de las varianzas coincida con la varianza a priori.
- **Reproducción de Variograma:** el variograma es un estadístico de segundo orden que busca cuantificar la disimilitud entre los datos como función de la distancia de separación. El variograma es calculado para diversas realizaciones (escogidas de forma aleatoria) y comparado con el modelo variográfico a priori.

En el marco de procesamiento de señales, el error cuadrático medio (MSE por su sigla en inglés, [40]) es un índice clásico de comparación entre señales. Una variante de este indicador es la *razón señal a ruido* (SNR por su sigla en inglés), la cual indica la diferencia (o error en el marco de reconstrucción) porcentual entre dos señales en decibeles.

$$SNR = -20 \log \left( \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \right) \quad (2.19)$$

Este índice realiza una comparación punto-a-punto con la señal original. Sin embargo, éste podría no ofrecer un indicador adecuado, puesto que un error elevado en una componente no necesariamente significa un mal desempeño en cuanto a la reconstrucción o reproducción de la estructura geológica. Generalmente, las métricas de evaluación conllevan un análisis perceptual, típicamente realizado por un experto. El *índice de similitud estructural* (SSIM por su sigla en inglés, [41]) es un indicador de similitud entre imágenes. A diferencia del SNR, el SSIM busca cuantificar la diferencia perceptual existente entre dos imágenes. Las características que mide el SSIM son: la luminosidad, el contraste y la estructura<sup>4</sup>. Bajo ciertas simplificaciones, el indicador se calcula según la siguiente expresión

$$SSIM(X, Y) = \left( \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1} \right) \left( \frac{2\sigma_{xy} + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \right) \quad (2.20)$$

donde  $C_1, C_2$  son constantes,  $\mu_x$  la media de la imagen  $X$ ,  $\sigma_x^2$  la varianza de la imagen  $X$  (análogo para la imagen  $Y$ ) y  $\sigma_{xy}$  la covarianza entre las imágenes. Si  $X$  e  $Y$  son similares, entonces el valor del indicador será cercano a 1. Por el contrario, si las imágenes son diferentes, entonces el índice presentará valores cercanos a 0.

La capacidad perceptual humana se caracteriza por percibir y extraer la estructuras observadas. Es por esto que la aplicación de este indicador a la imagen en su totalidad no tiene sentido, pues las estructuras internas no son identificadas. Con el fin de capturar dichas estructuras, se descompone la imagen en  $M$  bloques disjuntos y el operador descrito en (2.20) se calcula sobre las nuevas sub-imágenes. Finalmente, el índice se calcula como

$$MSSIM = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M SSIM(X_i, Y_i) \quad (2.21)$$

donde  $X_i$  es el bloque  $i$ -ésimo de  $X$ ,  $Y_i$  es el bloque  $i$ -ésimo de  $Y$ ,  $M$  la cantidad de bloques y  $SSIM(\cdot, \cdot)$  el operador definido en la Ecuación (2.20).

---

<sup>4</sup>Para mayor detalle ver [41].

# Capítulo 3

## Contextualización del Problema de Interpolación Espacial en la Teoría de Compressed Sensing

### 3.1. Modelamiento e Hipótesis del Problema

El problema consiste en la estimación de variables regionalizadas, más precisamente, de indicadores categóricos de permeabilidad, a partir de sondajes distribuidos en el espacio. Se modelan los datos como pixeles pertenecientes a una imagen 2D (en escala de grises y en el plano XY), y por ende, los datos a estimar representan pixeles ocluidos (ver Figura 3.1). Cada medición es asociada a un pixel, con lo cual se construye una imagen que representa la distribución de permeabilidad presente en el subsuelo. La posición de los datos conocidos es aleatoria, y presenta una distribución uniforme en el espacio, como se muestra en la Figura 3.1.b.

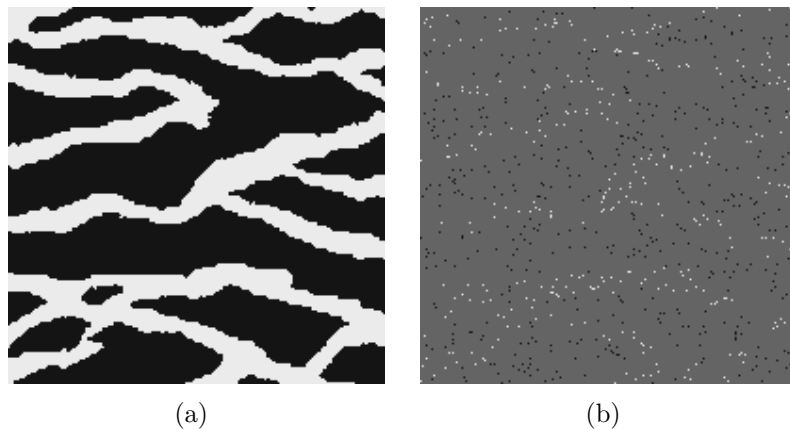


Figura 3.1: Ejemplo de imagen multicanal de  $200 \times 200$  pixeles. (a) Imagen original y (b) imagen incompleta con el 2% de datos. Los pixeles de color gris representan datos que deben ser estimados.

El reciente desarrollo de la teoría *RIPless* de CS [11] ofrece diversas garantías teóricas para la resolución de problemas inversos donde el proceso de adquisición presenta una determinada estructura, como en el presente caso. La principal hipótesis que garantiza buenos desempeños de CS es que las imágenes de perfiles de permeabilidad presentan elevados niveles de compresión, es decir, son bien aproximadas por una cantidad de datos mucho menor en relación al tamaño de la imagen. En la Figura 3.2 se ilustra el grado de compresibilidad de las imágenes consideradas en el desarrollo de este trabajo, en la cual queda de manifiesto que las imágenes son bien representadas por un conjunto muy reducido de datos (coeficientes transformados). En variados enfoques y algoritmos [21, 22], el fomentar soluciones *sparse* es la principal característica para la selección de los diccionarios (bases) a utilizar. Sin embargo, en [11] establecen que bajo ciertos procesos de muestreo, la esparsidad (o compresibilidad) no es la única figura de mérito relevante, y por ende, el diccionario debe ser escogido en función del esquema de adquisición utilizado.

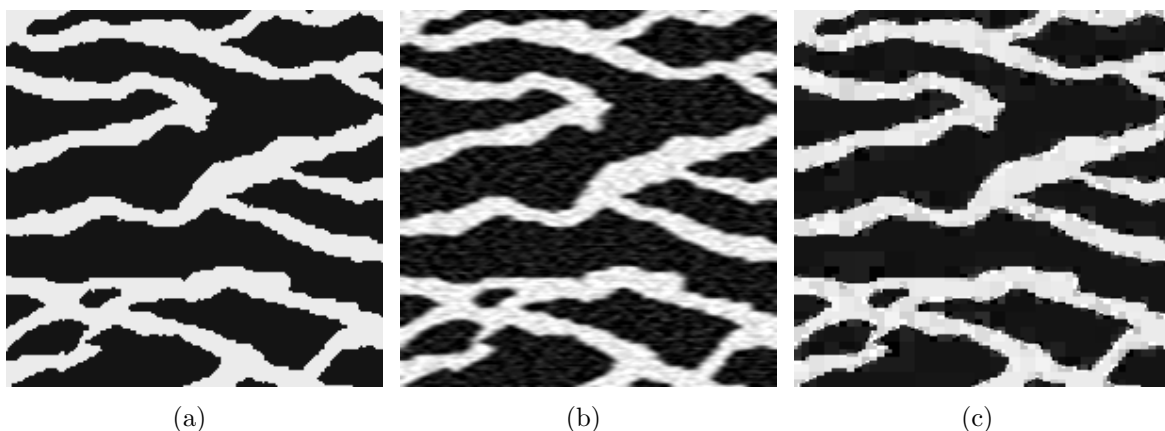


Figura 3.2: Ilustración de Compresibilidad en Perfiles de Permeabilidad. (a) Imagen original, (b) aproximación con el 5% de los coeficientes más significativos en el dominio DCT y (c) aproximación con el 5% de los coeficientes más significativos en el dominio wavelet.

## 3.2. Vectorización

Como se estipuló en la Sección 2.2, la teoría de CS está definida para señales unidimensionales. La extensión natural a la reconstrucción bidimensional (imágenes) es vectorizar la matriz concatenando las filas de ésta. Sin embargo, en general se tiene que el operador de vectorización y transformación no conmutan, ya que las transformaciones a matrices permiten extraer información estructural y dependencias espaciales, las que son eliminadas al realizar la vectorización. En esta sección se propone un método que permite encontrar la matriz de transformación  $U$  tal que  $\text{vec}(\Phi X \Psi^\dagger) = U \cdot \text{vec}(X)$ .

**PROPOSICIÓN 1.** *Sea la matriz  $X \in \mathbb{R}^{N \times M}$  y su transformación  $Z = \Phi X \Psi^\dagger \in \mathbb{R}^{N \times M}$ . Adicionalmente, considere las versiones vectorizadas  $x = \text{vec}(X)$  y  $z = \text{vec}(Z)$ . Luego, existe*



una matriz  $U$  tal que  $z = Ux$  con

$$U(:, M(i-1) + j) = \text{vec}(\phi_i \cdot \psi_j^\dagger) \quad \text{con } (i, j) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\} \quad (3.1)$$

donde  $\phi_i$  es la columna  $i$ -ésima de  $\Phi$  y  $\psi_j$  la columna  $j$ -ésima de la matriz  $\Psi$ . Adicionalmente, si  $\Phi$  y  $\Psi$  definen una transformación ortonormal, entonces dicha propiedad es heredada por  $U$ .

Este resultado es fundamental para la reducción del problema bidimensional al esquema clásico de CS. Mediante este procedimiento se garantiza que las dependencias espaciales presentes en las transformaciones 2D prevalecerán una vez realizada la vectorización. Ver apéndice para la demostración. En lo que respecta al resto del trabajo, las ecuaciones y proposiciones hacen referencia al problema vectorizado, asumiendo la equivalencia planteada en la proposición 1.

### 3.3. Matriz de Muestreo, Isotropía y Coherencia

En la Figura 3.1 se presenta un ejemplo de imagen multicanal. Es directo apreciar que la imagen no es *sparse* ni compresible, puesto que todos los valores son distintos de cero. Sin embargo, es posible obtener una representación equivalente de la imagen que sí posea características redundantes (esparsidad o compresibilidad) aplicando sobre ésta una transformación  $U$ . En otras palabras, la señal  $x$  es *sparse* en un dominio transformado. Denotaremos como  $U^\dagger$  la matriz de transformación, que para efectos del estudio se considerará ortonormal;  $x$  el vector representativo de la imagen; y  $z$  la imagen en el dominio alternativo, con lo que se tiene que

$$x = Uz \quad ; \quad z = U^\dagger x \quad (3.2)$$

donde  $\dagger$  representa el operador de trasposición.

Como se mencionó en la Sección 3.1, la posición de los datos medidos sigue una distribución uniforme, lo cual condiciona la matriz de medición  $A$  del problema. Luego, la matriz de muestreo se construye escogiendo de forma aleatoria  $m$  filas de la matriz identidad. Si la  $i$ -ésima fila es escogida, entonces  $x(i)$  formará parte del conjunto de datos medidos. Es simple demostrar que este tipo de matrices cumple con la propiedad isotrópica definida en (2.9), salvo por un factor de normalización  $\sqrt{n}$ . Es más, si  $A$  satisface (2.9), entonces la matriz  $A \cdot U$  también, en tanto  $U$  sea una transformación ortonormal<sup>1</sup>. Luego, si se define  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  como la matriz formada por las  $m$  filas seleccionadas de la matriz identidad,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz de transformación y  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  la matriz de muestreo equivalente, entonces el proceso de adquisición se puede expresar como

$$y = \sqrt{n} \tilde{A} x = \sqrt{n} \tilde{A} U z = A z \in \mathbb{R}^m \quad (3.3)$$

donde  $z$  es una señal *sparse*.

---

<sup>1</sup>Ver apéndice para la demostración

Dada la nueva matriz de adquisición mostrada en (3.3), es directo notar que ésta corresponde a la selección aleatoria de filas de la matriz  $U$  ponderadas por un factor  $\sqrt{n}$ . Luego, considerando la definición de coherencia establecida en la Ecuación (2.10), la expresión para  $\mu$  está dada por

$$\mu(U) = n \max_{i,j} \langle a_i, u_j \rangle^2 = n \max_{(i,j)} |u_{ij}|^2 = NM \max_{i,j,p,q} |\phi_p(i)\psi_q(j)|^2 \quad (3.4)$$

donde  $a_i$  es la fila  $i$ -ésima de la matriz de muestreo  $\tilde{A}$ ,  $u_j$  la columna  $j$ -ésima de la matriz  $U$ ,  $u_{ij} = U(i, j)$ ,  $\phi_p(i) = \Phi(i, p)$  y  $\psi_q(j) = \Psi(j, q)$ .

### 3.4. Formalización del Problema

Una vez identificados los elementos necesarios para la implementación de CS, a continuación se presenta la derivación directa del Teorema 2 para señales compresibles en dominios alternativos.

**TEOREMA 3.** [11]. *Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  una señal arbitraria y  $z$  sus respectivos coeficientes transformados dada una base  $U$ . Sea  $y$  el vector de muestras adquiridas seleccionando de forma aleatoria componentes del vector  $x$ , como se muestra en la Ecuación (3.3). Consideremos  $\hat{z}$  como la solución del siguiente problema de optimización convexa*

$$\hat{z} = \underset{\tilde{z} \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{z}\|_1 \quad \text{s.t. } y = A\tilde{z} = \sqrt{n}\tilde{A}U\tilde{z} \quad (3.5)$$

Luego, para todo nivel de esparsidad  $k \in \mathbb{N}$  y constante  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , con probabilidad  $1 - 6/n - 6e^{-\beta}$ , se tiene que, si  $m \geq C_\beta \mu(U)k \log n$ , entonces

$$\|\hat{x} - x\|_2 = \|\hat{z} - z\|_2 \leq \frac{C_1(1 + \alpha)}{\sqrt{k}} \|z - z_k\|_1 \quad (3.6)$$

donde  $\mu(U)$  es la coherencia definida según (3.4),  $\hat{x} = U\hat{z}$  y  $\alpha$  la constante definida en el Teorema 2.

### 3.5. Selección de Base Óptima

El Teorema 3 es válido para cualquier transformación, y establecer la base óptima se presenta como uno de los factores decisivos para la obtención de un buen desempeño. El desafío principal de la interpolación en la geociencia es el caracterizar modelos geológicos a partir de una cantidad muy reducida de mediciones. Es por esto que el criterio establecido para la selección de la transformación  $U$  es la minimización de la cantidad de muestras críticas necesarias para inducir un error de reconstrucción  $\varepsilon$  (ver Ecuación (2.13)). Como se estableció previamente en la Sección 2.2, los factores más condicionantes sobre la cantidad de muestras críticas son: la coherencia, la cual depende del esquema de muestreo  $\sqrt{n}\tilde{A}$  (fijo para

efectos del problema) y el dominio transformado  $U$  (ver Ecuación (3.4)); y la esparsidad, la cual depende únicamente de la capacidad de compresión de la matriz  $U$ .

Para cuantificar la compresibilidad de una base  $U$ , el análisis es basado en la Ecuación (3.6), la cual ofrece una cota para el error de reconstrucción en el dominio canónico (píxeles) en función del error de aproximación en el dominio transformado. Dado que  $\alpha \leq \log^{\frac{3}{2}} n$  (ver Teorema 2), es posible estandarizar el procedimiento para cualquier nivel de adquisición o transformación. Luego, definimos la *capacidad de compresión*  $\kappa$  como

$$\kappa(x, U, \epsilon) = \min \left\{ 1 \leq k \leq n : \frac{\|z - z_k\|_1}{\sqrt{k}} \leq \epsilon \right\} \quad (3.7)$$

donde  $z = Ux$ ,  $z_k$  la mejor aproximación  $k$ -sparse de  $z$ ,  $U$  la matriz de transformación y  $\epsilon$  la tolerancia del error. Notar que el factor  $\frac{\|z - z_k\|_1}{\sqrt{k}}$  es proporcional a la cota del error de reconstrucción establecida por la teoría de CS, Ecuación (3.6), y por ende,  $\kappa$  proporciona un indicador de que tan *sparse* es la señal a reconstruir.

Finalmente, dada una colección de bases  $\{U_j : j \in \mathcal{J}\}$ , la definición de capacidad de compresión en (3.7) y la coherencia definida en (3.4), el criterio se basa en la minimización de la siguiente expresión.

$$j^*(\epsilon) = \operatorname{argmin}_{j \in \mathcal{J}} \mu(U_j) \cdot \kappa(x, U_j, \epsilon) \quad (3.8)$$

Notar que  $\mu(U_j) \cdot \kappa(x, U_j, \epsilon)$  es un factor proporcional al nivel de adquisición crítico establecido en la Ecuación (2.13), donde se han descartado los términos independientes del dominio transformado.

## 3.6. Metodología de Trabajo

En esta sección se establece la metodología definida para el desarrollo del trabajo. Para la obtención de una base de datos representativa de los perfiles de permeabilidad, se utilizó el algoritmo de simulación multipunto FILTERSIM [16] desarrollado en SGeMS [42]. En particular, se generaron cien imágenes categóricas de  $200 \times 200$  píxeles con diversas orientaciones. Se enfoca arbitrariamente el análisis en imágenes horizontales, puesto que la teoría de CS es invariante a la orientación del canal en cuestión<sup>2</sup>. La Figura 3.3 muestra algunos ejemplos de las imágenes multicanal generadas mediante MPS.

El principal limitante de este tipo de problemas de optimización es la gran carga computacional que implica la resolución de éste. Con el fin de reducir dicha carga, el enfoque

---

<sup>2</sup>En el apéndice B.4 se proporcionan reconstrucciones con distintas imágenes y orientaciones, con el fin de ilustrar la conjetura anterior. Estas imágenes no son incluidas en el análisis puesto que no se realizaron estudios sistemáticos sobre ellas, y sólo se incorporan para ilustrar la invarianza de CS ante la estructura de canal observada.

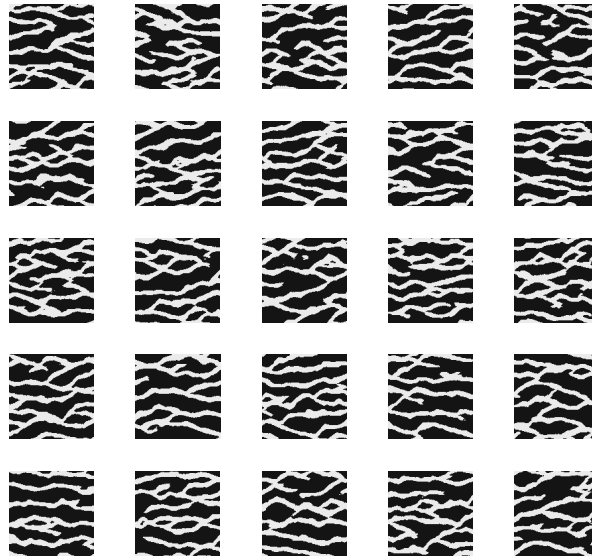


Figura 3.3: Ejemplo de imágenes multicanal generadas para el desarrollo de este trabajo.

usualmente utilizado consiste en descomponer la imagen en bloques de dimensión menor, permitiendo reducir el costo de cómputo considerablemente de  $\mathcal{O}(n \log n)$  [43] a  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{l} \log n\right)$ , donde  $l$  representa la cantidad de sub-problemas. El esquema de adquisición permite dicho desacoplamiento, a diferencia de otros esquemas de muestreo o teorías (RIP por mencionar un ejemplo). El algoritmo utilizado para resolver el problema de optimización planteado en (3.5) es  $\ell_1$ -MAGIC, desarrollado por Candès y Romberg [44].

En la Figura 3.4 se presenta un esquema de bloques de la metodología propuesta, la cual se detalla a continuación.

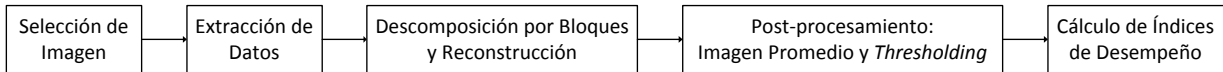


Figura 3.4: Metodología propuesta para el desarrollo del trabajo.

1. Se selecciona una imagen de la base de datos obtenida mediante MPS.
2. Se realizan los estudios de selección de base óptima.
3. Se extrae un determinado porcentaje de datos de forma aleatoria con distribución uniforme. Se repite el proceso para diversos niveles de adquisición  $p$  (1-10 %).
4. Se descompone la imagen en bloques de tamaño  $L \times L$  y se resuelve el problema de optimización (3.5) para cada sub-imagen generada. Se repite para diversos tamaños de bloque  $L$  (de  $40 \times 40$  a  $200 \times 200$  pixeles), con la finalidad de establecer si existen ganancias al incorporar información a distintos niveles de escala.
5. Los resultados obtenidos para cada conjunto de datos son procesados: las soluciones

para cada tamaño de bloque son promediadas y posteriormente la reconstrucción es categorizada. La primera etapa permite integrar los diferentes niveles de escala, y la segunda busca explotar el conocimiento *a priori* de la variable estudiada.

6. Los puntos 3, 4 y 5 se repiten para distintas matrices de muestreo, es decir, variando la posición de los datos medidos, con el fin de estudiar la variabilidad en cuanto a la realización del operador de adquisición.
7. Finalmente se calculan los índices de desempeños establecidos previamente en la Sección 2.4.

# Capítulo 4

## Resultados Experimentales

### 4.1. Selección de Base Óptima

Como se estableció en la Sección 2.3, se consideraron para el estudio dos bases emblemáticas en cuanto a compresión de datos: la transformada coseno (DCT) y las transformaciones wavelet inducidas por la familia de filtros de dos canales *Daubechies* (Db). En relación a las bases wavelets, se exploraron filtros de orden 1 al 9, con niveles de profundidad que variaban entre 1 y 5 iteraciones. Ejemplos de los coeficientes transformados se presentan en la Figura 4.1.

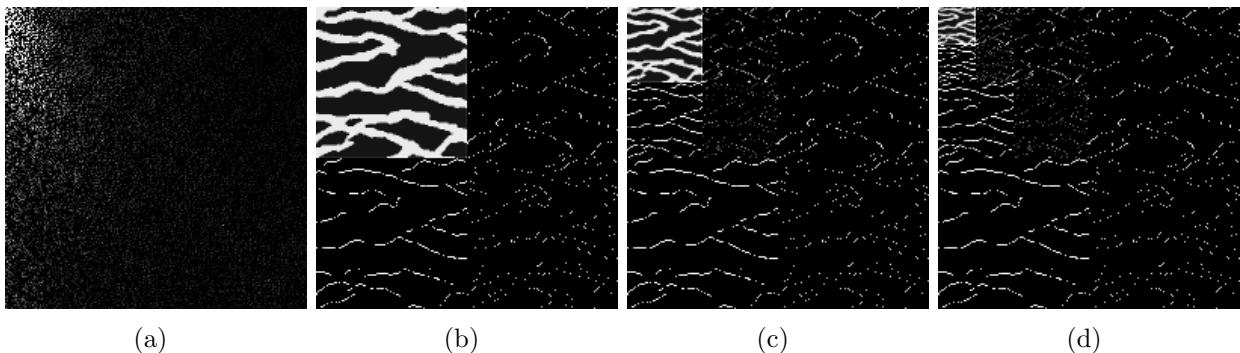


Figura 4.1: Coeficientes transformados para el perfil presentado en la Figura 3.1. (a) Coeficientes transformados DCT, (b) coeficientes de la wavelet de *haar* con un nivel de profundidad, (c) coeficientes de la wavelet de *haar* con dos niveles de profundidad y (d) coeficientes de la wavelet de *haar* con tres niveles de profundidad.

Se puede apreciar la capacidad de compactación de la energía en ambas bases (complementar con Figura 3.2). En el caso de la DCT, la concentración se genera en torno a las bajas frecuencias, debido a la propiedad de continuidad por tramos que presentan las imágenes multicanal estudiadas en este trabajo. Sin embargo, las Dbs presentan una capacidad superior de compresión en este tipo de estructuras, ya que capturan de buena forma las discontinuidades, a diferencia de la DCT, la cual necesitaría un elevado número de componentes

de alta frecuencia para identificarlas. También se puede apreciar la capacidad de preservar la estructura original de la imagen en la familia de transformaciones Dbs.

En la Figura 4.2 se muestra la evolución del indicador de compresión  $\kappa(\cdot)$  para las bases estudiadas, aplicado al perfil de la Figura 3.1. Notar que  $\kappa(\cdot)$  es un índice relacionado con: el error de reconstrucción inducido por el algoritmo de optimización (Ecuación (3.6)), con la capacidad de compresión de la base y es uno de los factores predominantes en el nivel de adquisición crítico de la Ecuación (2.13). La superioridad de las bases wavelets de orden inferior es clara sobre la DCT, en lo que respecta a la compresibilidad que éstas proporcionan en los perfiles de permeabilidad. En otras palabras, para un nivel de tolerancia  $\epsilon$  dado, las representaciones *sparse* necesarias por las Dbs de orden inferior son de menor complejidad (requieren una menor cantidad de coeficientes) que en el caso de la DCT. En particular, la wavelet de *haar* (Db1) presenta los mejores desempeños, superando en todo rango de error al resto de las bases. En general, se aprecia un comportamiento persistente al aumentar el orden del filtro  $Dbx$ . Este se explica por la naturaleza intrínseca de los canales de permeabilidad y la estructura de los elementos de la base Db1. Como se mencionó con anterioridad, los perfiles estudiados presentan zonas continuas por tramos y discontinuidades abruptas en los cambios de permeabilidad, características presenten también en los átomos<sup>1</sup> de la wavelet de *haar*.

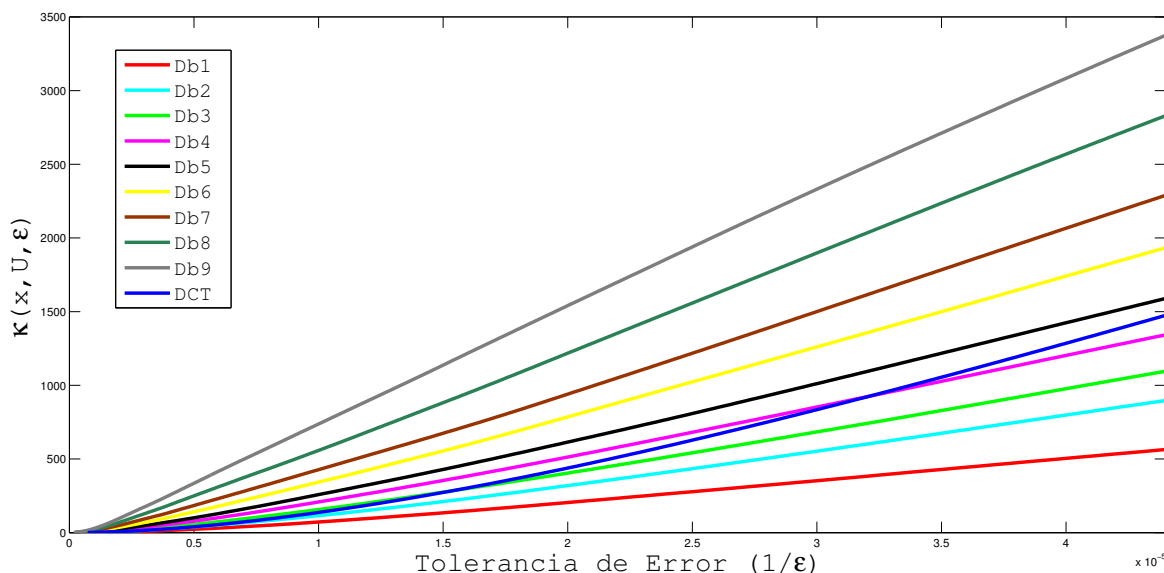


Figura 4.2: Índice de Capacidad de Compresión  $\kappa(x, U, \epsilon)$  para perfil presentado en la Figura 3.1. Cada curva representa la evolución de  $\kappa(x, U, \epsilon)$  como función de  $1/\epsilon$  para una base en particular. DCT hace referencia a la transformada coseno y  $Dbx$  a la base wavelet de orden  $x$  con 5 niveles de profundidad.

Cuando se introduce el factor de coherencia en el análisis, es decir,  $\mu(U)$  definida en la

<sup>1</sup>Átomos hace referencia a los elementos pertenecientes a una base.

Ecuación (3.4), la tendencia mostrada en la Figura 4.2 se invierte, presentándose como base óptima el dominio DCT por sobre wavelet. La Figura 4.3 presenta los resultados obtenidos al integrar  $\mu(U)$  en el estudio. En la gráfica se muestra el logaritmo del indicador de selección de base definido en (3.8) como función del error tolerado  $1/\epsilon$ . Se puede observar que la ganancia en compresibilidad presentada en la Figura 4.2 no compensa la alta coherencia del dominio wavelet. Matemáticamente, la base DCT está normalizada por el largo de la señal (ver Ecuación (2.14)), con lo que, dada la definición de coherencia en (3.4), se obtiene un valor de  $\mu(DCT) = 4$  constante, a diferencia de las *Dbx*, las cuales están normalizadas por el largo del filtro  $l$ , y por ende, presentan una coherencia proporcional a  $n/l$ . Una razón más fundamental de este comportamiento se obtiene al incorporar en el análisis la resolución temporal presente en las *Db*s. Al preservar información temporal (o espacial en el caso de imágenes), esta base es altamente coherente con el espacio de medición (dominio de los píxeles), y por ende, la coherencia, que puede ser vista como el producto interno entre los elementos de la base de medición y transformación, presenta un valor elevado. Por otro lado, el dominio de la frecuencia es completamente incoherente (FFT) o casi perfectamente incoherente (DCT) con el espacio canónico, lo que deriva en valores pequeños de  $\mu(U)$ . En la Tabla 4.1 se presentan los valores numéricos de  $\mu(U)$  obtenidos en el análisis, donde se aprecian los altos valores para la familia *Daubechies*.

Tabla 4.1: Coherencia de los dominios DCT y wavelet inducida por filtros *Daubechies* de orden 1 al 9 con cinco niveles de profundidad.

$\sqrt{\mu(U)}$	DCT	Daubechies								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2.00	100.00	139.95	130.21	102.20	104.92	112.84	106.33	91.30	86.41

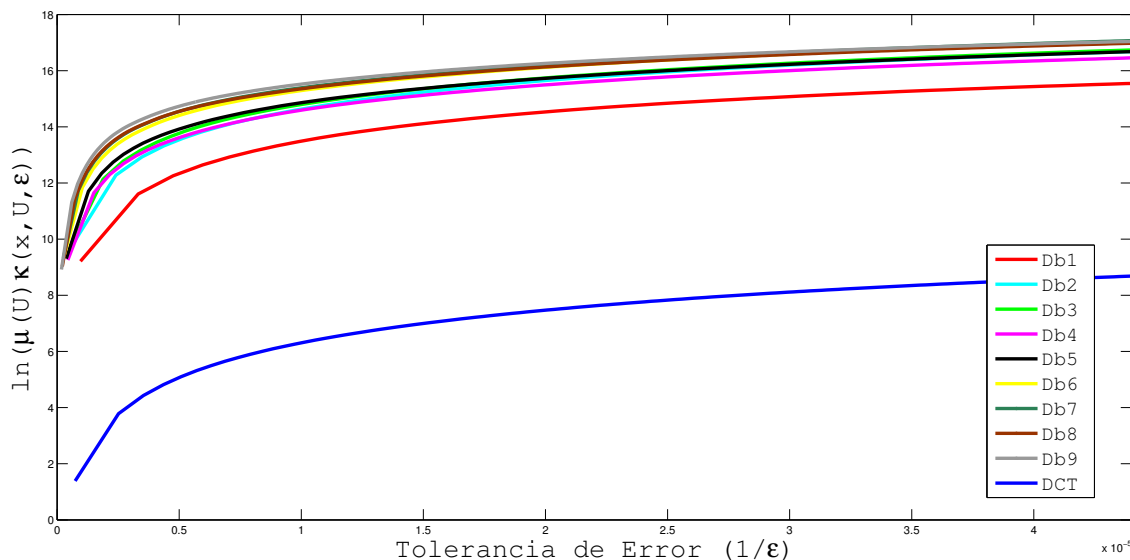


Figura 4.3: Índice de Selección de Base definido en Ecuación (3.8) para perfil en Figura 3.1. Cada curva representa la evolución de  $\ln(\mu(U)\kappa(x, U, \epsilon))$  como función de  $1/\epsilon$  para una base en particular. DCT hace referencia a la transformada coseno y *Dbx* a la base wavelet de orden  $x$  con 5 niveles de profundidad.



En conclusión, dado el esquema de adquisición establecido en la Sección 3.1, el cual selecciona píxeles de forma aleatoria con distribución uniforme, la DCT es la mejor base (dentro del conjunto de bases estudiadas) que permite inducir un error de reconstrucción  $\varepsilon$  con la menor cantidad de mediciones. En consecuencia, la DCT es la base utilizada en los procesos de reconstrucción mostrados en las siguientes secciones.

## 4.2. Análisis Inter-bloque

En la Figura 4.4 se presentan los resultados para distintos tamaños de bloques. Cada sub-bloque es reconstruido de forma independiente. Si bien, en promedio cada sub-imagen presenta la misma cantidad de muestras, existe la probabilidad de que en determinados sectores de la imagen exista una mayor concentración de datos, lo cual explica la presencia de bloques con una mejor reconstrucción. Como se puede apreciar, el descomponer la imagen introduce artefactos que deterioran las soluciones del algoritmo, afectando los desempeños obtenidos. No obstante, como se observa en la Figura 4.4.(h), estos efectos pueden ser merendados mediante un proceso que consiste en promediar las estimaciones obtenidas para los distintos niveles de escala (tamaños de bloque). Incluso, se mostrará que promediar las diversas reconstrucciones permite mejorar sustancialmente los desempeños de estimación, incluso por sobre los indicadores obtenidos al considerar la imagen completa.

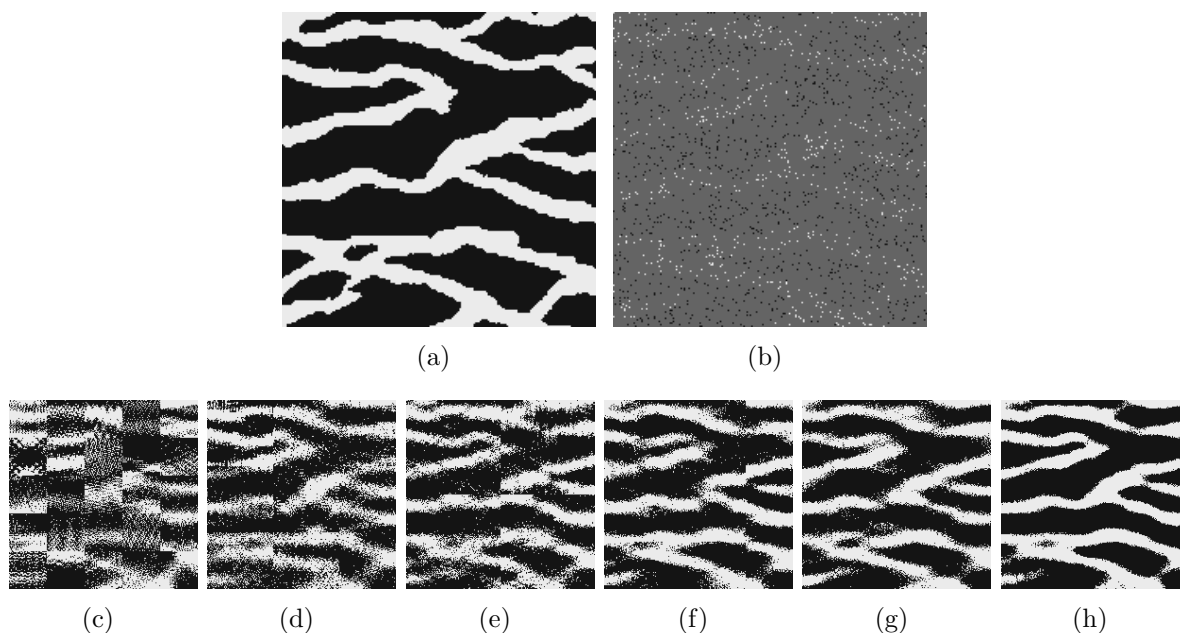


Figura 4.4: Reconstrucción de *Compressed Sensing* para distintos tamaños de bloque con el 4% de los datos medidos. (a) Perfil de permeabilidad original, (b) datos adquiridos, (c) reconstrucción utilizando bloques de  $40 \times 40$  píxeles, (d) reconstrucción utilizando bloques de  $70 \times 70$  píxeles, (e) reconstrucción utilizando bloques de  $100 \times 100$  píxeles, (f) reconstrucción utilizando bloques de  $150 \times 150$  píxeles, (g) reconstrucción utilizando bloques de  $200 \times 200$  píxeles y (h) reconstrucción Promedio.

La Figura 4.4 muestra los resultados obtenidos para una realización de la matriz de muestreo  $A$  con un nivel de adquisición del 4% de pixeles medidos<sup>2</sup>. Como se detalló en la Sección 3.6, la reconstrucción se realiza seccionando la imagen en bloques (de  $40 \times 40$  a  $200 \times 200$  pixeles, Figuras 4.4.c-g), con lo que luego se calcula la reconstrucción promedio (Figura 4.4.h). Finalmente, cada imagen es categorizada conservando la proporción de datos de alta y baja permeabilidad obtenida a partir de las mediciones. Esta etapa proporciona mejoras sustanciales en los desempeños de estimación, debido principalmente a la característica binaria de las imágenes consideradas en este trabajo<sup>3</sup>.

De los resultados mostrados en la Figura 4.4 se desprende que conforme aumenta el tamaño de bloque de las sub-imágenes, la calidad de las reconstrucciones aumenta, en desmedro de la carga computacional, la cual también aumenta. Una razón superficial es que los artefactos incorporados debido a las transiciones entre los bloques disjuntos disminuyen. Una razón más fundamental es que los grados de libertad, es decir, los coeficientes significativos, crecen de forma sub-lineal con respecto al tamaño de la señal. En otras palabras, al aumentar el tamaño de la imagen a reconstruir, ésta se vuelve más compresible, logrando ser representada con una menor cantidad de coeficientes. En consecuencia, bajo un mismo nivel de muestreo, más estructura es capturada por los datos, con lo cual el algoritmo de reconstrucción es capaz de inferir de mejor manera los datos faltantes. En la Figura 4.5 se presenta el indicador de comparación entre señales SNR. La gráfica muestra el error de aproximación  $-20 \log(\|x - x_k\|_2 / \|x\|_2)$  como función de la esparsidad  $k$  [%], donde  $x_k$  representa la mejor aproximación  $k$ -sparse de  $x$  en el dominio DCT. Como se puede apreciar, a medida de que el bloque aumenta de tamaño, las representaciones  $k$ -sparse aproximan de mejor manera al perfil original.

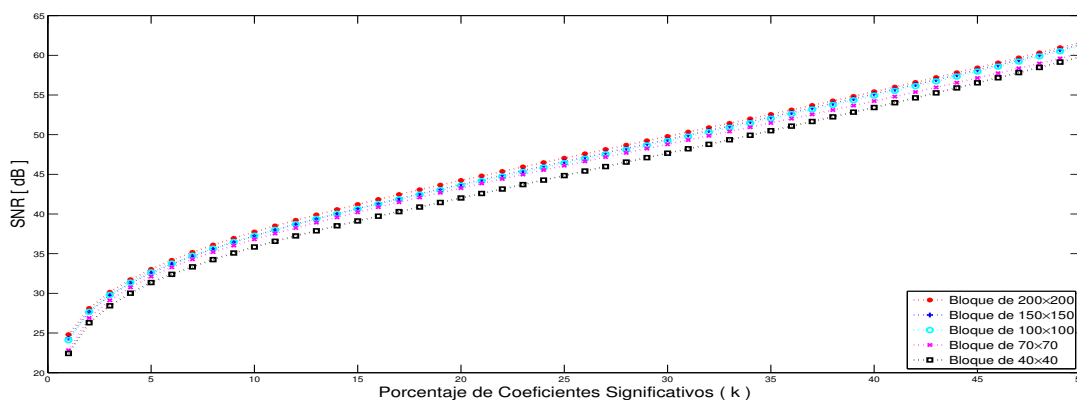
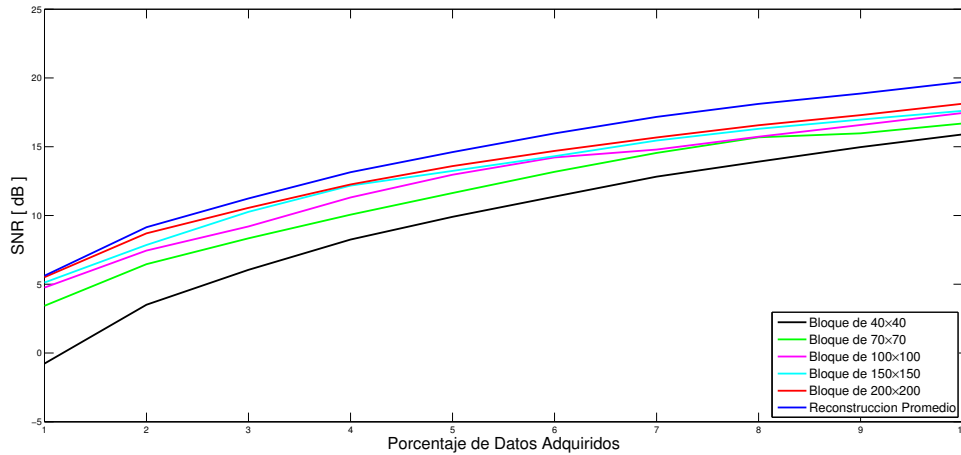


Figura 4.5: Métrica de aproximación *sparse* para base DCT. Curva SNR calculada según Ecuación (2.19). Las curvas son presentadas como función del porcentaje de coeficientes significativos para diferentes tamaños de bloque.

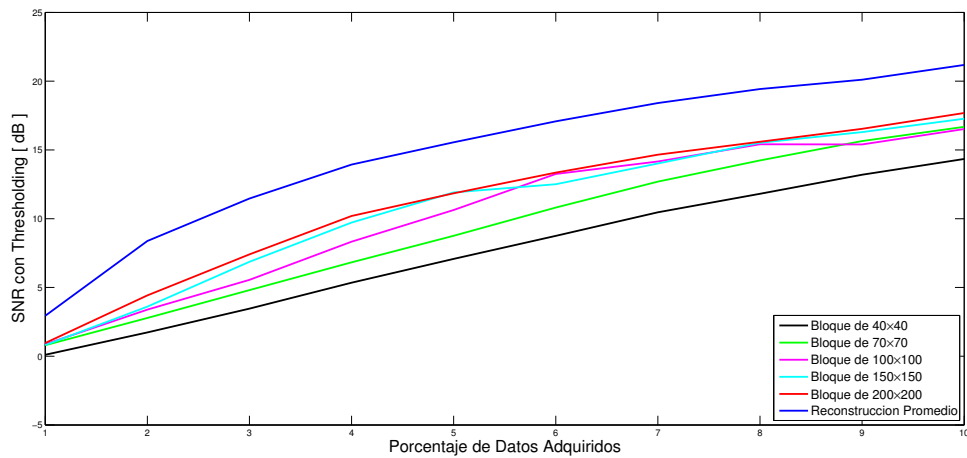
<sup>2</sup>En el apéndice B.2 se proporciona una mayor cantidad de reconstrucciones con el fin de ilustrar el efecto inducido al descomponer la imagen original en sub-bloques. Se presentan diversas realizaciones de la matriz de muestreo para distintos niveles de adquisición.

<sup>3</sup>En el apéndice B.1 se ilustra la ganancia obtenida al categorizar las soluciones proporcionadas por el algoritmo de reconstrucción.

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran los resultados promedio obtenidos como función del tamaño de bloque utilizado en el esquema de reconstrucción y el porcentaje de pixeles adquiridos (1-10%), sobre un total de 25 realizaciones de la matriz de muestreo  $A$ . En ambos casos, se observa una mejora en la calidad de las soluciones conforme aumenta el tamaño de bloque, en particular, en el régimen del 2-5% de mediciones para sub-imágenes de baja dimensión. Adicionalmente, se presentan los resultados con y sin post-procesamiento (categorización), donde se aprecia una mejora sustancial en los indicadores de desempeño para un nivel de adquisición del 2% o superior.



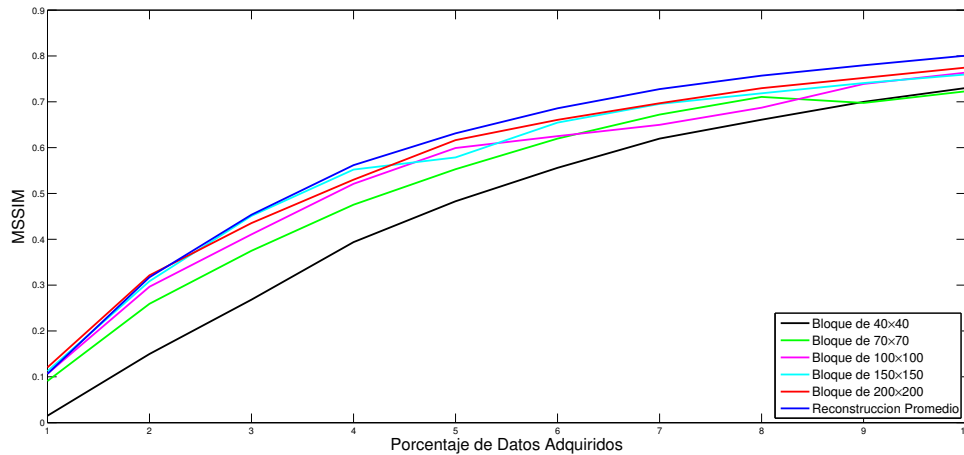
(a)



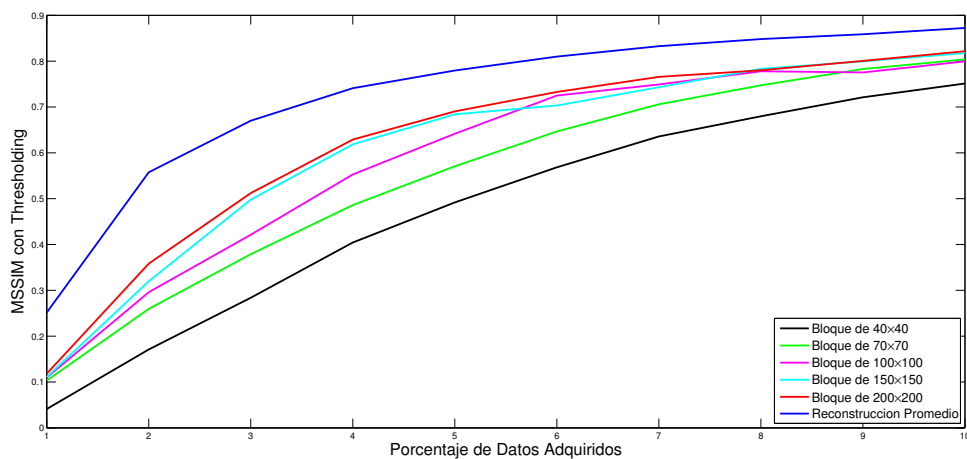
(b)

Figura 4.6: . Desempeños de reconstrucción para indicador SNR como función del porcentaje de pixeles medidos. Cada curva representa un tamaño de bloque distinto. (a) Resultados de CS sin categorización y (b) resultados de CS con etapa de categorización.

De los resultados mostrados en las Figuras 4.6 y 4.7 es posible constatar que la solución promedio sobre todos los tamaños de bloque permite mejorar considerablemente los



(a)



(b)

Figura 4.7: . Desempeños de reconstrucción para indicador MSSIM como función del porcentaje de píxeles medidos. Cada curva representa un tamaño de bloque distinto. (a) Resultados de CS sin categorización y (b) resultados de CS con etapa de categorización.

desempeños en ambos indicadores. Esta estrategia, en conjunto con el proceso de categorización establecen el mejor escenario de reconstrucción. La reconstrucción promedio (ver Figura 4.4.h) incrementa significativamente la calidad de la solución en comparación a los desempeños individuales de cada bloque (ver Figuras 4.4.c-g). Cada nivel de escala introduce artefactos a la reconstrucción, los cuales son reducidos al promediar todas las soluciones obtenidas, puesto que los artefactos particulares son filtrados<sup>4</sup>, y sólo prevalecen las características (patrones o estructuras) persistentes en cada solución. Sin embargo, no existe justificación de este fenómeno en la teoría *RIPless* de CS [11], y su comprensión es objeto de análisis para un trabajo futuro. En consecuencia, el incremento en el desempeño mediante el promedio de las soluciones a diferentes escalas es una estrategia muy relevante e interesante de ana-

<sup>4</sup>En el marco de filtrado de señales, promediar datos representa un filtro pasa-bajos.

lizar, en cuanto a la aplicación práctica en este enfoque de estimación de variables geológicas.

Finalmente, para el mejor escenario de reconstrucción (imagen promedio y categorización de la solución), la Figura 4.8 presenta ejemplos de resultados para una realización de la matriz de muestreo. Como primera observación, es claro el elevado desempeño, desde un punto de vista perceptivo, para un nivel de adquisición superior al 4%. Un resultado más interesante es el presentado en la última columna de la Figura 4.8, en donde se observa que este enfoque permite reproducir las estructuras presentes en el perfil original, incluso en un régimen sub-crítico de muestreo del 2%.

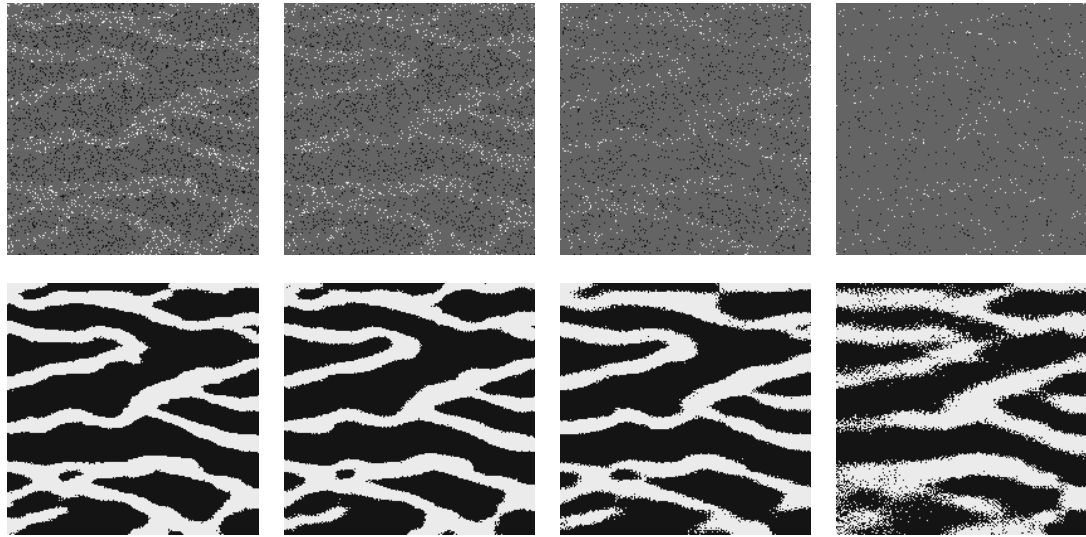


Figura 4.8: Reconstrucciones Promedio para distintos nivel de adquisición. La primera fila presenta las imágenes con datos ocluidos. Los pixeles grices representan datos no medidos. La segunda fila presenta las reconstrucciones promedio para una realización de la matriz de muestreo. De izquierda a derecha por columna: nivel de adquisición del 10 %, 8 %, 5 % y 2 % respectivamente.

### 4.3. Variabilidad inducida por la Matriz de Muestreo

Dado que la matriz de muestreo  $A$  es un objeto aleatorio, es importante establecer la variabilidad intrínseca que el proceso de adquisición induce sobre los desempeños de reconstrucción. Para ello, y como se describió previamente, se generaron 25 realizaciones de la matriz de medición para cada porcentaje de datos medidos. En definitiva, el objetivo de esta sección es establecer que tan robusto es CS en cuanto a la posición de los datos adquiridos y verificar la relación que existe entre esta variabilidad y la cantidad de mediciones.

Con el fin de ilustrar la variabilidad de CS, en la Figura B.8 se muestran los resultados de reconstrucción para el mejor escenario establecido en la sección anterior. Los resultados se presentan para distintas realizaciones de la matriz de muestreo (organizado por columnas) y distintos niveles de adquisición (organizado por filas). Se puede apreciar que para un nivel de

adquisición del 5% de los píxeles o superior, CS es casi invariante a la realización específica de la matriz aleatoria  $A$ , definida en la Ecuación (3.3). Por otro lado, en el régimen del 2% de datos medido, mostrado en la última fila de la Figura B.8, la variabilidad es mayor, debido a que la escasa información aumenta la probabilidad de descomponer la imagen en bloques con una cantidad de datos insuficientes para el proceso de reconstrucción en el esquema por bloques establecido anteriormente, y en consecuencia, esto deriva en una alta incertidumbre. En general, y como se esperaba, la variabilidad aumenta conforme disminuye la cantidad de datos medidos. Formalmente, esto se muestra en la Figura 4.10 donde se presentan los

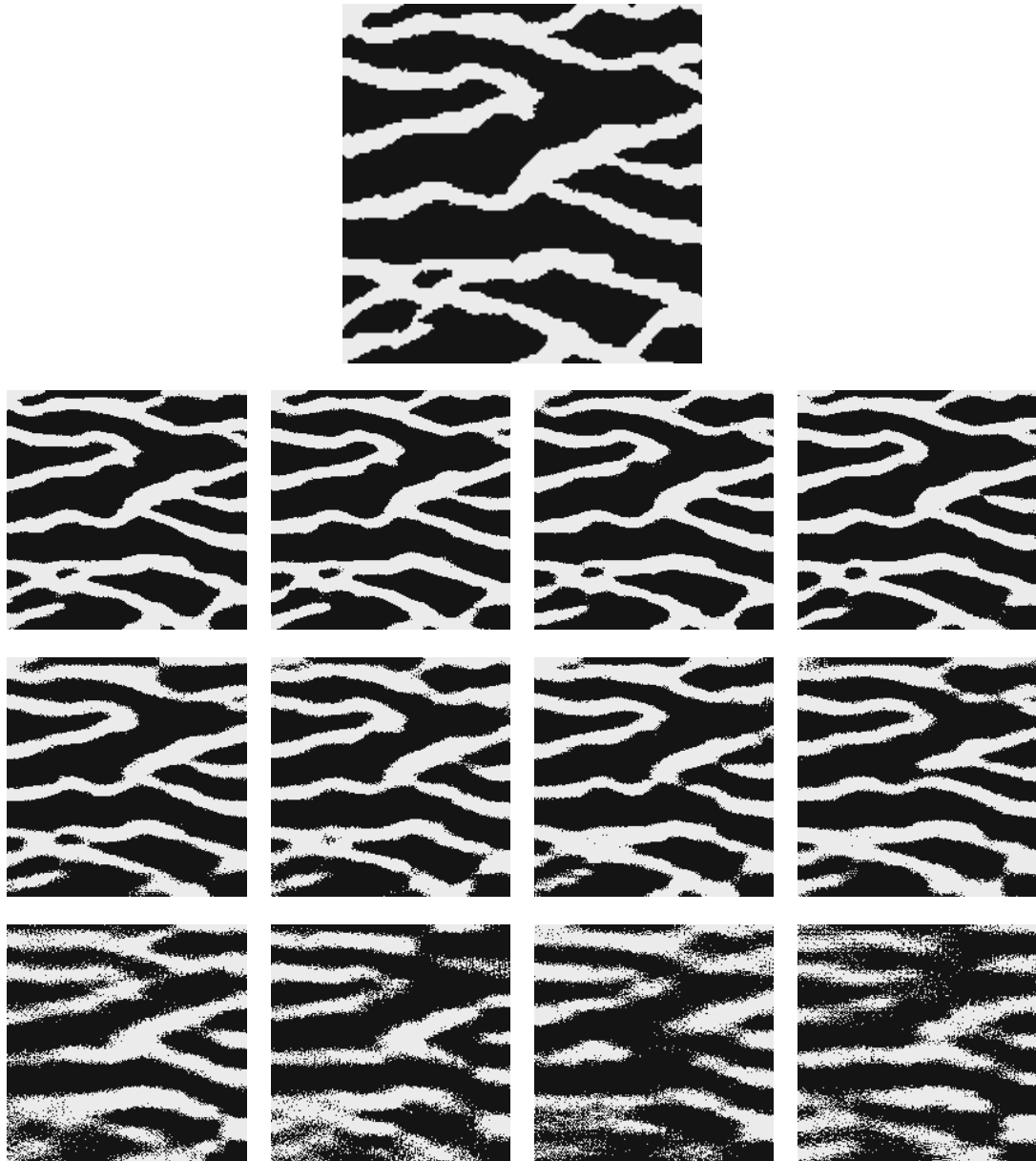
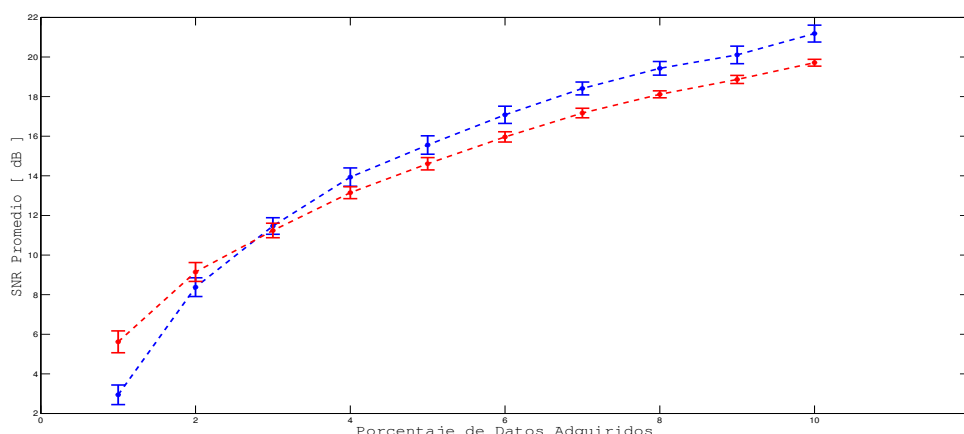
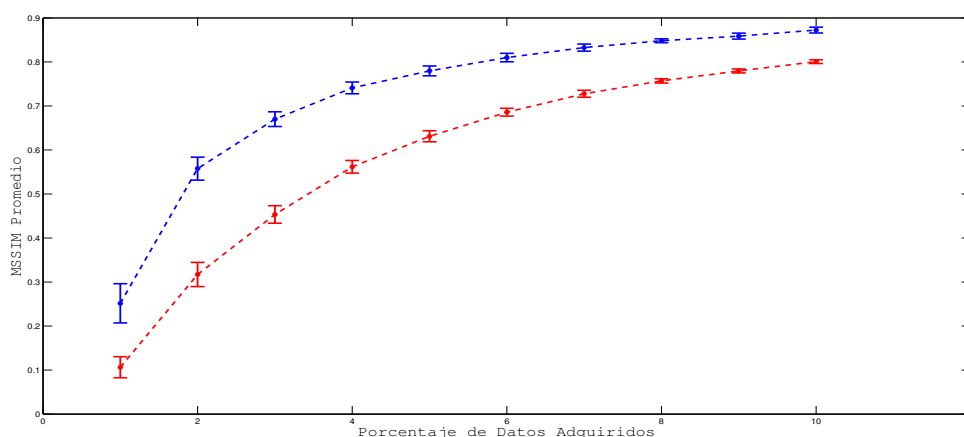


Figura 4.9: Ilustración de variabilidad como función de la matriz de muestreo. Cada columna representa una realización independiente de  $A$ . La primera columna representa la mejor solución obtenida según índice MSSIM y la cuarta columna la peor reconstrucción. Desde arriba hacia abajo por fila: perfil original, nivel de adquisición del 10%, del 5% y del 2% respectivamente.

resultados promedio con sus respectivas desviaciones estándar para distintos niveles de muestreo. En cada gráfica se muestran los resultados con y sin proceso de categorización, donde se aprecia directamente la mejora al incorporar esta etapa en el estudio. Sin embargo, si bien existe mejora en cuanto al sesgo de la estimación (promedio), aumenta la varianza con respecto a la solución promedio original de CS. Esto se debe a que CS ofrece soluciones continuas, y por ende, las diferencias entre una realización y otra son menores. Este efecto también explica los resultados para SNR mostrados en 4.10, donde se aprecia que categorizar la imagen reconstruida para niveles de adquisición bajos (1-3%) no ofrece mejoría en cuanto al error cuadrático medio. No obstante, estos efectos no se aprecian en el indicador MSSIM, puesto que la categorización permite mejorar la estimación de la estructura de canal de la imagen original. En conclusión, la variabilidad es un factor intrínseco en este tipo de esquemas, debido a la naturaleza aleatoria del operador de medición, y está fuertemente ligada al nivel de adquisición del problema.



(a)



(b)

Figura 4.10: Desempeño promedio y desviación estándar de la solución promedio sobre 25 realizaciones de la matriz de muestreo. (a) Indicador SNR y (b) indicador MSSIM. La curva azul representa los datos categorizados y la curva roja los datos directamente proporcionados por CS.

## 4.4. Selección de Bloques para Reconstrucción Promedio

Los primeros inconvenientes detectados sobre la reconstrucción por bloques fueron: la pérdida de compresibilidad al reducir el tamaño de la imagen a reconstruir y los artefactos incorporados en la solución debido a las transiciones entre bloques contiguos, efecto reducido mediante la obtención de la solución promedio. Sin embargo, los resultados obtenidos para niveles de adquisición bajos (1-3 %) y tamaños de bloques pequeños ( $40 \times 40$  -  $90 \times 90$  pixeles) muestran que dichas soluciones presentan desempeños que se encuentran muy por debajo que los obtenidos para las reconstrucciones promedio. Ésto se atribuye al limitado número de datos presentes en las sub-imágenes generadas, lo que hace casi imposible obtener o inferir cualquier estructura presente en los datos. En consecuencia, estas imágenes reconstruidas podrían no aportar o incluso deteriorar las soluciones promedio obtenidas (ver Figura B.8). Ésto inspira la idea de generar un criterio de selección de bloques, más precisamente, de determinar el tamaño de bloque mínimo dentro del esquema de reconstrucción planteado en la secciones anteriores, con el fin de mejorar los desempeños y reducir tiempo de cómputo.

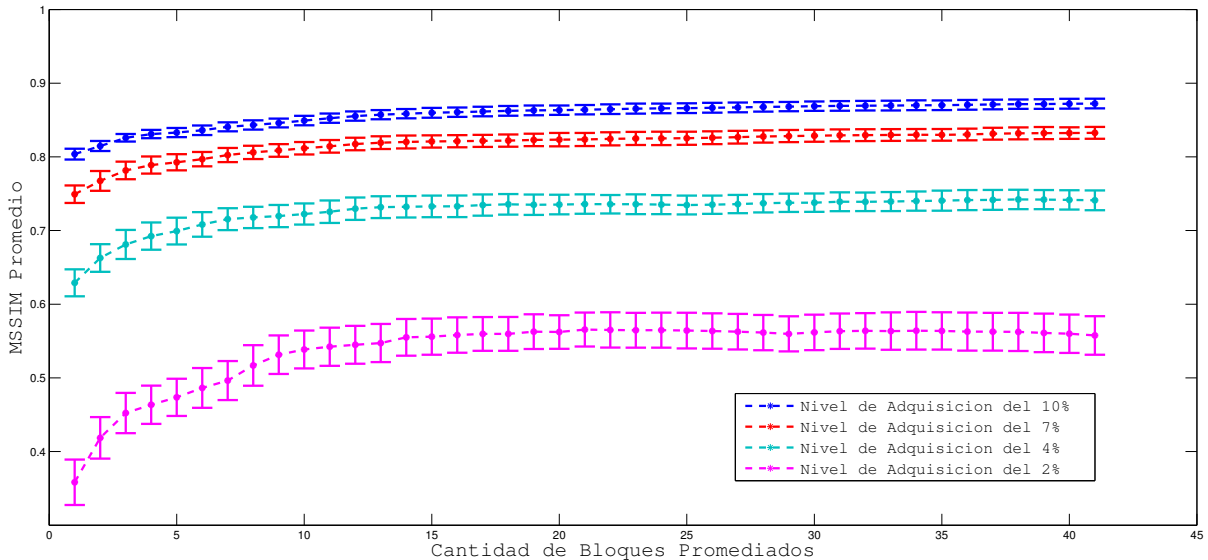


Figura 4.11: Desempeños promedio y desviación estándar de CS como función del número de bloques considerados en la reconstrucción promedio. Los resultados son calculados sobre 25 realizaciones de la matriz de muestreo. El indicador MSSIM se calcula sobre las versiones categorizadas de la soluciones proporcionadas por el algoritmo de reconstrucción.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.11, en la cual se presenta el indicador MSSIM promedio sobre 25 realizaciones de la matriz de medición, como función de la cantidad de bloques considerados en la reconstrucción promedio, comenzando desde los



bloques de mayor tamaño<sup>5</sup>. Las curvas corresponden a los niveles de adquisición del 10 %, 7 %, 4 % y 2 %. De la gráfica mostrada, es posible distinguir tres conclusiones relevantes en cuanto al desempeño e incertidumbre de las soluciones obtenidas. En primera instancia, se observa que la variabilidad intrínseca de las soluciones proporcionadas por CS no es función de la cantidad de bloques promediados, siendo casi invariante a través de toda la curva. Como segundo comentario, existe una ganancia progresiva al incorporar un nuevo bloque de reconstrucción para niveles de adquisición superiores al 4 %. En el régimen del 1-3 %, integrar bloques de menor tamaño inducen un leve deterioro en el desempeño promedio. Finalmente, para el caso umbral de diez soluciones promediadas, la ganancia es marginal, y por ende, el tiempo de cómputo se reduce considerablemente al no requerir la reconstrucción mediante la descomposición en bloques pequeños ( $40 \times 40 - 90 \times 90$  píxeles).

---

<sup>5</sup>Solo se proporciona el indicador MSSIM ya que el índice SNR presenta el mismo comportamiento.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los objetivos de esta memoria se cumplieron a cabalidad. Se logró desarrollar e implementar la técnica de *Compressed Sensing* para la reconstrucción de canales de permeabilidad, realizando un minucioso estudio en cuanto a las propiedades de señal de las imágenes consideradas en el trabajo y generando claras conexiones con las garantías teóricas de CS.

Un nuevo esquema de resolución de problemas inversos en geoestadística para perfiles de permeabilidad es propuesto y desarrollado en este trabajo, formulando el problema en el marco de procesamiento de señales, bajo un estado aleatorio y sub-crítico de muestreo. Este nuevo enfoque muestra prometedores resultados en el desafío de interpolación geológica, presentando buenos desempeños incluso en el escenario bajo el 4% de datos adquiridos. Una de las principales contribuciones de este trabajo es la contextualización de esta problemática en el marco de *Compressed Sensing*, donde una clara conexión con los resultados teóricos de CS (en particular, la nueva teoría *RIPless* de CS) y procesos prácticos de refinamiento de señales se han establecido. De este análisis teórico, se ha justificado el uso de la DCT como la base óptima que permite reducir la cantidad de muestras necesarias para inducir un determinado nivel de error, incluso superando a la familia de las wavelets *Daubechies*, a pesar de que éstas presentan niveles de compresión superiores a la DCT. En cuanto al uso del algoritmo de reconstrucción de CS, la descomposición del perfil en bloques, y la posterior integración de éstos en una única solución (imagen promedio) ha mostrado ser un buen enfoque para mejorar los resultados proporcionados por CS. Finalmente, la inclusión de una etapa de categorización presenta una sustancial mejora en los desempeños de estimación de la variable estudiada, incluso en los regímenes de sub-muestreo bajo el 4% de datos medidos.

### 5.1. Trabajo Futuro

En palabras simples, la idea fundamental de este trabajo es capturar la estructura de la imagen a través de la organización de sus coeficientes en algún dominio transformado (DCT), y utilizar esta información a priori para estimar las variables faltantes. Es en este proceso

donde se encuentra la principal diferencia con los métodos convencionales, donde la fuente de información es incorporada mediante modelos estadísticos, obtenidos a través de imágenes de entrenamiento (MPS), y/o directamente de los datos medidos. En consecuencia, el uso conjunto de ambos enfoques, es decir, la incorporación de información estructural desde un modelo de señal e información estadística de métodos tradicionales, podría generar mejoras a los desempeños presentados en este trabajo. En esta línea, la incorporación de datos simulados al conjunto de datos medidos, distinguiendo la incertidumbre en cada dato simulado, podría ser un caso de estudio muy interesante, puesto que existen garantías bien establecidas en la teoría de CS para problemas inversos en ambientes ruidosos. En cuanto a la teoría de CS, se han desarrollado diversas técnicas que permiten incorporar información adicional en la estructura de la señal reconstruida, tales como enfoques bayesianos, dependencias en el dominio transformado o modificación de la función objetivo. En consecuencia, la incorporación de información adicional es fundamental para la mejora de los desempeños obtenidos.

En el contexto de reproducción de estructuras geológicas, la aplicación de CS a otros modelos geológicos, como litología, modelos en tres dimensiones, fenómenos no estacionarios o variables continuas, es una arista que necesariamente debe ser estudiada. La dificultad radica en la complejidad de dichos modelos, lo cual limita fuertemente los desempeños de CS.

En cuanto a los algoritmos y técnicas de procesamiento de datos utilizados en este trabajo, es imperante su estudio y refinamiento con el fin de mejorar los desempeños del problema clásico de CS. En el ámbito computacional, existen diversos métodos que permiten abordar el problema estándar de CS (*basis pursuit*). Sin embargo, el análisis de algoritmos alternativos a la resolución de problemas de optimización con restricciones, basados en otras teorías (como *message-passing* [45]) se presenta como un interesante caso de estudio. En el marco del problema denominado *inpainting*, diversos algoritmos han sido desarrollados [3, 21, 22], y su estudio e implementación podrían ser de gran aporte al enfoque de resolución de problemas inversos en geoestadística planteado en este trabajo.

En cuanto a la naturaleza de las variables regionalizadas, en variados escenarios éstas representan categorías, y por ende, una reconstrucción continua no tiene sentido. En esta línea, existen estudios en el escenario de reconstrucción categórica o binaria de CS [46, 47], lo cual permitiría incorporar la etapa de categorización en el problema de optimización directamente.

Finalmente, y como se mostró en la sección de resultados, la resolución a distintos niveles de escala y la categorización permiten una mejora sustancial en la estimación de las variables ocluidas. Es por ésto, que el análisis y desarrollo de técnicas de post-procesamiento más elaboradas, que permitan depurar las soluciones proporcionadas por CS (eliminar artefactos y mejorar la conectividad por mencionar algunos aspectos), es fundamental para futuros trabajos.

# Bibliografía

- [1] G. Mariethoz and P. Renard, “Reconstruction of incomplete data sets or images using direct sampling,” *Mathematical Geosciences*, vol. 42, pp. 245–268, 2010.
- [2] J. M. Ortiz and C. V. Deutsch, “Indicator simulation accounting for multiple-point statistics,” *Math. Geol.*, vol. 36, no. 5, pp. 545–565, 2004.
- [3] M. Elad, J.-L. Starck, P. Querre, and D. Donoho, “Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA),” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 19, no. 3, pp. 340 – 358, 2005.
- [4] I. Daubechies and G. Teschke, “Variational image restoration by means of wavelets: Simultaneous decomposition, deblurring, and denoising,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 19, no. 1, pp. 1 – 16, 2005.
- [5] S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang, “Super-resolution image reconstruction: a technical overview,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 20, pp. 21–36, May 2003.
- [6] E. Candès and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 4203 – 4215, dec. 2005.
- [7] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489 – 509, 2006.
- [8] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Commun. on Pure and Appl. Math.*, vol. 59, pp. 1207–1223, 2006.
- [9] D. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289 – 1306, 2006.
- [10] E. Candès and T. Tao, “Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp. 5406–5425, Dec. 2006.
- [11] E. Candès and Y. Plan, “A probabilistic and RIPless theory of compressed sensing,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 57, no. 11, pp. 7235–7254, 2011.

- [12] P. K. Kitanidis, *Introduction to geostatistics: applications to hydrogeology*. Cambridge Univ Press, 1997.
- [13] S. Strebelle, “Conditional simulation of complex geological structures using multiple points statistics,” *Math Geol*, vol. 34, no. 1, pp. 1–22, 2002.
- [14] F. Guardiano and M. Srivastava, “Multivariate geostatistics: Beyond bivariate methods,” in *Geostatistics-Troia*, (Amsterdam), pp. 133–144, Kluwer Academic, 1993.
- [15] B. Arpat and J. Caers, “Conditional simulations with patterns,” *Math. Geol.*, vol. 39, no. 2, pp. 177–203, 2007.
- [16] J. Wu, A. Boucher, and T. Zhang, “A SGeMS code for pattern simulation of continuous and categorical variables: FILTERSIM,” *Comput. Geosci.*, vol. 34, no. 12, pp. 1863–1876, 2008.
- [17] T. Huang, D.-T. Lu, X. Li, and L. Wang, “Gpu-based snesim implementation for multiple-point statistical simulation,” *Comput. Geosci.*, vol. 54, pp. 75–87, Apr. 2013.
- [18] A. Journel and T. Zhang, “The necessity of a multiple-point prior model,” *Math. Geol.*, vol. 38, no. 5, pp. 591–610, 2006.
- [19] H. Nyquist, “Certain topics in telegraph transmission theory,” *Trans. AIEE*, vol. 47, pp. 617–644, Apr. 1928.
- [20] C. E. Shannon, “Communication in the presence of noise,” *Proc. of IRE*, vol. 37, pp. 10–21, Jan. 1949.
- [21] M. Fadili, J.-L. Starck, and F. Murtagh, “Inpainting and zooming using sparse representations,” *The Computer Journal*, vol. 52, no. 1, pp. 64–79, 2009.
- [22] G. Yu, G. Sapiro, and S. Mallat, “Solving inverse problems with piecewise linear estimators: From gaussian mixture models to structured sparsity,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 21, no. 5, pp. 2481–2499, 2012.
- [23] B. Jafarpour, V. K. Goyal, D. B. McLaughlin, and W. T. Freeman, “Transform-domain sparsity regularization for inverse problems in geosciences,” *Mathematical Geosciences*, vol. 74, no. 5, pp. R69–R83, 2010.
- [24] N. Shental, A. Amir, and O. Zuk, “Identification of rare alleles and their carriers using compressed sensing,” *Nucleic Acids Research*, vol. 38, no. 19, p. e179, 2010.
- [25] J. McEwen and Y. Wiaux, “Compressed sensing for radio interferometric imaging: Review and future direction,” in *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on*, pp. 1313–1316, Sept 2011.
- [26] J. Gemmeke, H. Van Hamme, B. Cranen, and L. Boves, “Compressive sensing for missing data imputation in noise robust speech recognition,” *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, vol. 4, no. 2, pp. 272–287, 2010.

- [27] E. Candès, “The restricted isometry property and its applications for compressed sensing,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. I 346, pp. 589–592, 2008.
- [28] S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 20, no. 1, pp. 33–61, 1998.
- [29] D. Donoho and X. Huo, “Uncertainty principles and ideal atomic decomposition,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 7, pp. 2845–2862, 2001.
- [30] S. Mallat and Z. Zhang, “Matching pursuit with time-frequency dictionaries,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, pp. 3397–3415, Dec. 1993.
- [31] J. Tropp and A. Gilbert, “Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [32] T. Blumensath and M. Davies, “Iterative hard thresholding for compressive sensing,” *Appl. Com. Harmon. Anal.*, vol. 27, pp. 265–274, Nov. 2009.
- [33] M. Elad, *Sparse and Redundant Representations*. Springer New York, first edition ed., 2010.
- [34] D. L. Donoho, “For most underdetermined systems of linear equations the minimal  $l_1$ -norm solution is also the sparsest solution,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 6, pp. 797–829, 2006.
- [35] G. K. Wallace, “The jpeg still picture compression standard,” *Commun. ACM*, vol. 34, pp. 30–44, April 1991.
- [36] A. Skodras, C. Christopoulos, and T. Ebrahimi, “The jpeg 2000 still image compression standard,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 18, pp. 36–58, sep 2001.
- [37] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, third ed., 2009.
- [38] J.-L. Starck, F. Murtagh, and J. M. Fadili, *Sparse Image and Signal Processing*. Cambridge Univ Press, 2010.
- [39] O. Leuangthong, J. McLennan, and C. Deutsch, “Minimum acceptance criteria for geostatistical realizations,” *Natural Resources Research*, vol. 13, pp. 131–141, September 2004.
- [40] Z. Wang and A. Bovik, “Mean squared error: Love it or leave it? a new look at signal fidelity measures,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 26, pp. 98–117, Jan 2009.
- [41] W. Zhou, A. Bovik, H. Sheikh, and E. Simoncelli, “Image quality assessment: from error visibility to structural similarity,” *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 600–612, 2004.
- [42] N. Remy, A. Boucher, and J. Wu, *Applied Geostatistics with Applied Geostatistics with*

*SGeMS: A User's Guide*. Cambridge University Press., 2009.

- [43] S. Kunis and H. Rauhut, “Random sampling of sparse trigonometric polynomials II - orthogonal matching pursuit versus basis pursuit,” *Foundations of Computational Mathematics*, vol. 8, no. 6, pp. 737–763, 2008.
- [44] E. Candès and J. Romberg, “ $\ell_1$ -MAGIC : Recovery of sparse signals via convex programming.” <http://users.ece.gatech.edu/~justin/l1magic/>, October 2005.
- [45] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message-passing algorithms for compressed sensing,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 106, no. 45, pp. 18914–18919, 2009.
- [46] A. Bourquard and M. Unser, “Binary compressed imaging,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 1042–1055, March 2013.
- [47] U. Nakarmi and N. Rahnavard, “Bcs: Compressive sensing for binary sparse signals,” in *MILITARY COMMUNICATIONS CONFERENCE, 2012 - MILCOM 2012*, pp. 1–5, Oct 2012.

# Apéndice A

## Demostraciones

### A.1. Demostración Proposición 1

Sea  $x, z \in \mathbb{R}^n$  las representaciones vectoriales de las matrices  $X, Z \in \mathbb{R}^{N \times M}$  respectivamente, con  $Z = \Phi X \Psi^\dagger$ . Luego, se cumple que

$$X(k, i) = x[M(k-1) + i] \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, M \end{array} \quad (\text{A.1})$$

Considere la base canónica de matrices de tamaño  $N \times M$ ,  $\{\hat{\mathcal{M}}_{ij}\}$ . Entonces, para cualquier matriz  $X \in \mathbb{R}^{N \times M}$  se tiene que

$$X = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X(i, j) \hat{\mathcal{M}}_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Considerando la transformación separable definida en la Ecuación (2.16), se tiene que

$$\begin{aligned} Z &= \Phi X \Psi^\dagger \\ &= \Phi \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X(i, j) \hat{\mathcal{M}}_{ij} \right) \Psi^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X(i, j) \left( \Phi \hat{\mathcal{M}}_{ij} \Psi^\dagger \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X(i, j) \phi_i \psi_j^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Luego, la familia de matrices  $\{\phi_i \psi_j^\dagger\}_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  son una base de la transformación separable definida por el par  $(\Phi, \Psi)$ . Finalmente, si definimos la matriz  $U$  tal que

$$U(\cdot, M(i-1) + j) = \text{vec} \left( \phi_i \psi_j^\dagger \right) \quad (\text{A.4})$$



donde  $U(\cdot, k)$  representa la columna  $k$ -ésima de  $U$ , se tiene que  $z = Ux$ . Además, si  $\Phi, \Psi$  definen matrices ortonormales, entonces  $U$  hereda dicha propiedad.

$$\begin{aligned}
\langle u_p, u_q \rangle &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \phi_{k_1}(i) \psi_{l_1}(j) \phi_{k_2}(i) \psi_{l_2}(j) \\
&= \left( \sum_{i=1}^N \phi_{k_1}(i) \phi_{k_2}(i) \right) \left( \sum_{j=1}^M \psi_{l_1}(j) \psi_{l_2}(j) \right) \\
&= \langle \phi_{k_1}, \phi_{k_2} \rangle \cdot \langle \psi_{l_1}, \psi_{l_2} \rangle \\
&= \delta(k_1 - k_2) \delta(l_1 - l_2)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

## A.2. Construcción Matriz de Transformación Wavelet

Para caracterizar de forma matricial la transformación wavelet, es necesario establecer el proceso de decimación mostrado en la Figura 2.4 como un operador sobre vectores. Sea el vector  $x \in \mathbb{R}^n$  y el filtro pasa-bajo  $g(k)$  definido como

$$z(k) = g_\ell x(k) + g_{\ell-1} x(k-1) + \cdots + g_1 x(k-\ell+1) \tag{A.6}$$

Este proceso puede ser representado mediante la construcción de la siguiente matriz de filtrado.

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & g_1 & \cdots & g_\ell & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & 0 & \cdots & g_1 & \cdots & g_\ell & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

con lo que se tiene que  $z = \tilde{G}x$ . La etapa de *downsampling* se obtiene eliminando las componentes pares de  $z$ , o equivalentemente, eliminando las filas pares de  $\tilde{G}$ , obteniendo una nueva matriz  $G \in \mathbb{R}^{n/2 \times n}$  y el vector transformado  $z_a = Gx \in \mathbb{R}^{n/2}$ . Del mismo modo se define la matriz de filtrado pasa-alto  $H$ , obteniendo  $z_d = Hx \in \mathbb{R}^{n/2}$ . Luego, los coeficientes transformados se obtienen a través de la expresión en (A.8).

$$z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \cdot x = \Phi x \tag{A.8}$$

En general, los filtros son diseñados tal que los coeficientes de éstos generen una base ortonormal, lo que se traduce en que  $\Phi^{-1} = \Phi^\dagger$ .

### A.2.1. Construcción Matriz de Transformación Wavelet de Orden Superior

Las transformaciones wavelet de orden superior se obtienen mediante la aplicación sucesiva de la transformación sobre la banda de aproximación  $z_a$ . Como supuesto, consideremos que

$\Phi_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la matriz definida en (A.8), es diádica. Luego, si definimos la matriz

$$\mathcal{W}_k = \left( \begin{array}{c|c} \Phi_{\frac{n}{2^{k-1}}} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{I}_k \end{array} \right) \quad (\text{A.9})$$

donde  $\Phi_{\frac{n}{2^{k-1}}}$  es la matriz de transformación de tamaño  $\frac{n}{2^{k-1}} \times \frac{n}{2^{k-1}}$  e  $\mathcal{I}_k$  representa la matriz identidad de tamaño  $(1 - \frac{1}{2^{k-1}})n \times (1 - \frac{1}{2^{k-1}})n$ , entonces la transformación de orden  $k$ ,  $\Phi^{(k)}$ , se puede expresar como

$$\Phi^{(k)} = \mathcal{W}_k \Phi^{(k-1)} \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Demostración de Isotropía de la Matriz de Muestreo

Sea el vector aleatorio  $a(w) \sim \rho$  que toma valores dentro de la familia de vectores  $\{a_i\}_{i=1}^n$  definidos como

$$a_i(j) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

con probabilidad  $\mathbb{P}\{a(w) = a_i\} = \rho_i$ . Luego, la matriz  $A$  generada por realizaciones i.i.d del vector aleatorio  $a(w)$  satisface la propiedad isotrópica (Ecuación (2.9)) ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{aa^\dagger\} &= \sum_{i=1}^n a_i a_i^\dagger \rho_i \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{M}}_i \\ &= I_{n \times n} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde  $\hat{\mathcal{M}}_i(j, k) = \delta(i - j)\delta(i - k)$ . Notar que el caso desarrollado en el trabajo considera  $\rho_i = \frac{1}{n}$ .

Un corolario directo de esta propiedad es que si  $A$  es isotrópica, entonces  $B = U \cdot A$  también satisface la propiedad de isotropía, en cuanto  $U$  sea una base ortonormal.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{b_i b_i^\dagger\} &= \mathbb{E}\{(U a_i)(U a_i)^\dagger\} \\ &= \mathbb{E}\{U \cdot a_i a_i^\dagger \cdot U^\dagger\} \\ &= U \cdot \mathbb{E}\{a_i a_i^\dagger\} \cdot U^\dagger \\ &= U \cdot I \cdot U^\dagger \\ &= I_{n \times n} \end{aligned}$$

# Apéndice B

## Imágenes Complementarias

### B.1. Proceso de Categorización

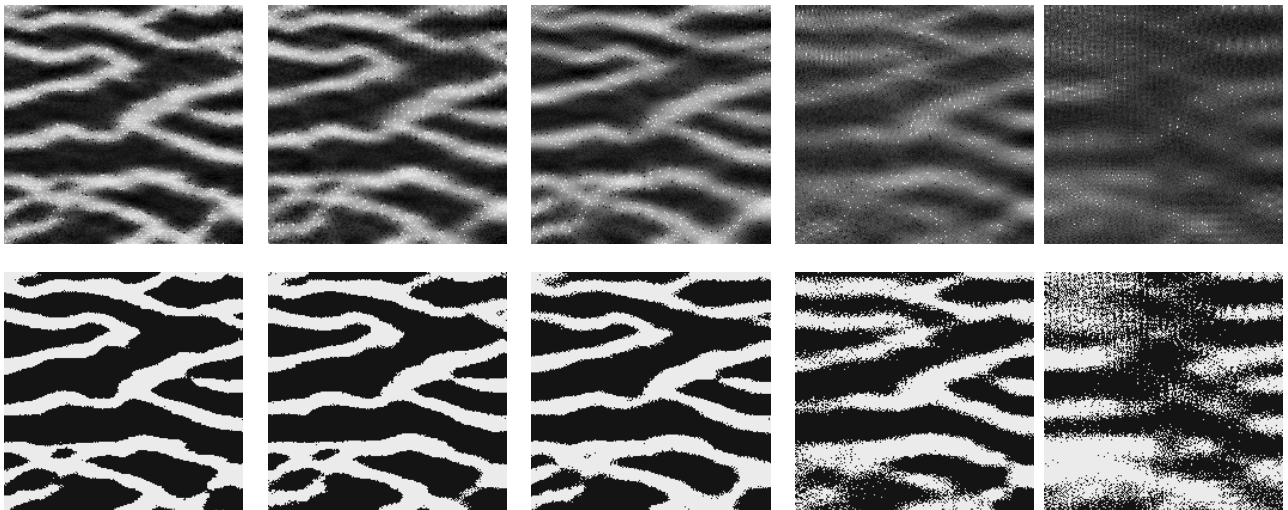


Figura B.1: Ilustración de mejora debido al proceso de categorización. La primera fila presenta las reconstrucciones promedio sin proceso de categorización. La segunda fila presenta las soluciones promedio categorizadas. De izquierda a derecha por columnas: nivel de adquisición del 10 %, 7 %, 5 %, 2 % y 1 % respectivamente.

## B.2. Análisis Inter-bloque

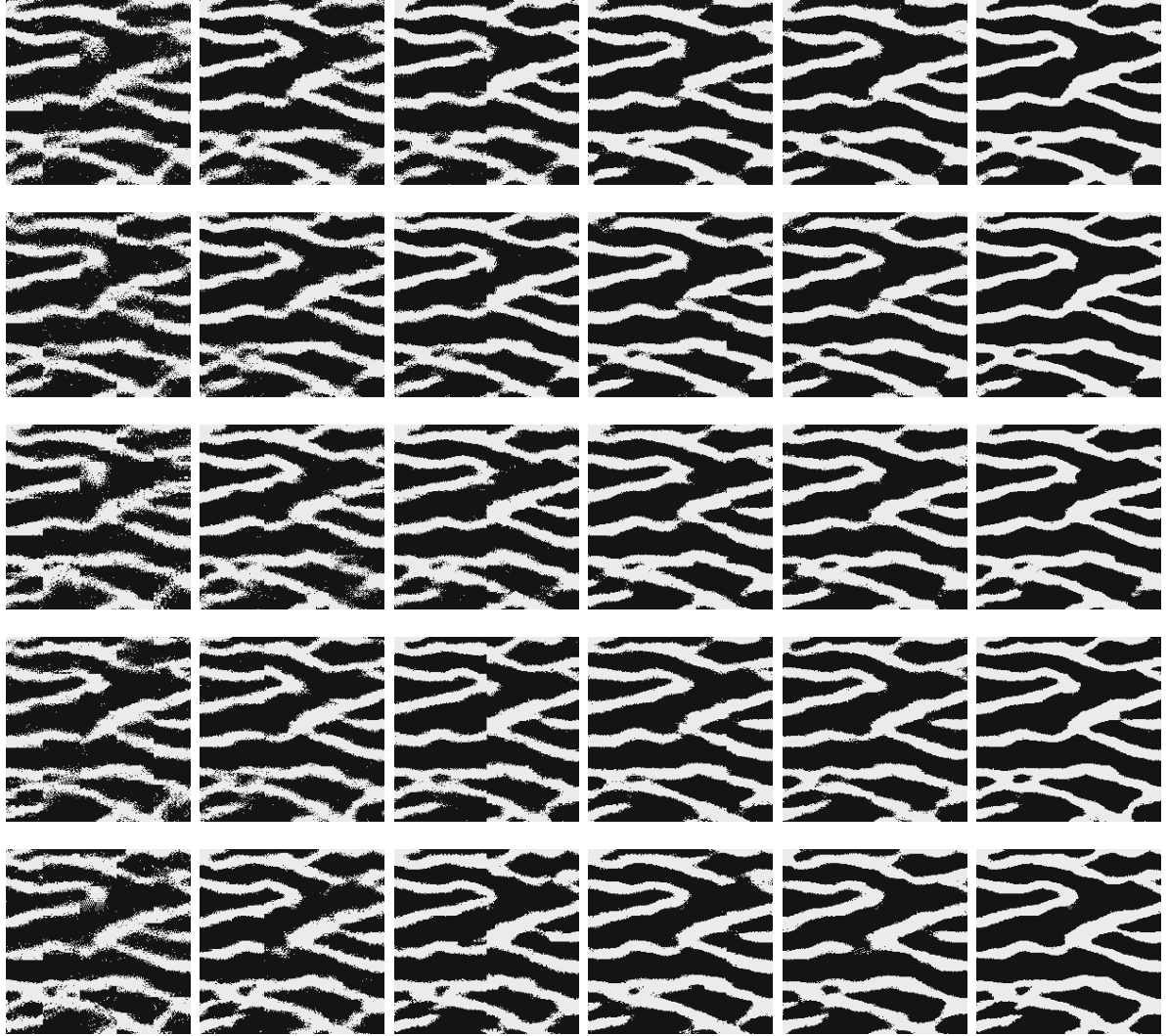


Figura B.2: Reconstrucción de *Compressed Sensing* para distintos tamaños de bloque con el 10% de los datos medidos. Cada fila representa una realización de la matriz de muestreo y cada columna un tamaño de bloque particular. De izquierda a derecha por columna: descomposición en bloques de tamaño  $40 \times 40$ ,  $70 \times 70$ ,  $100 \times 100$ ,  $150 \times 150$ ,  $200 \times 200$  y reconstrucción promedio.

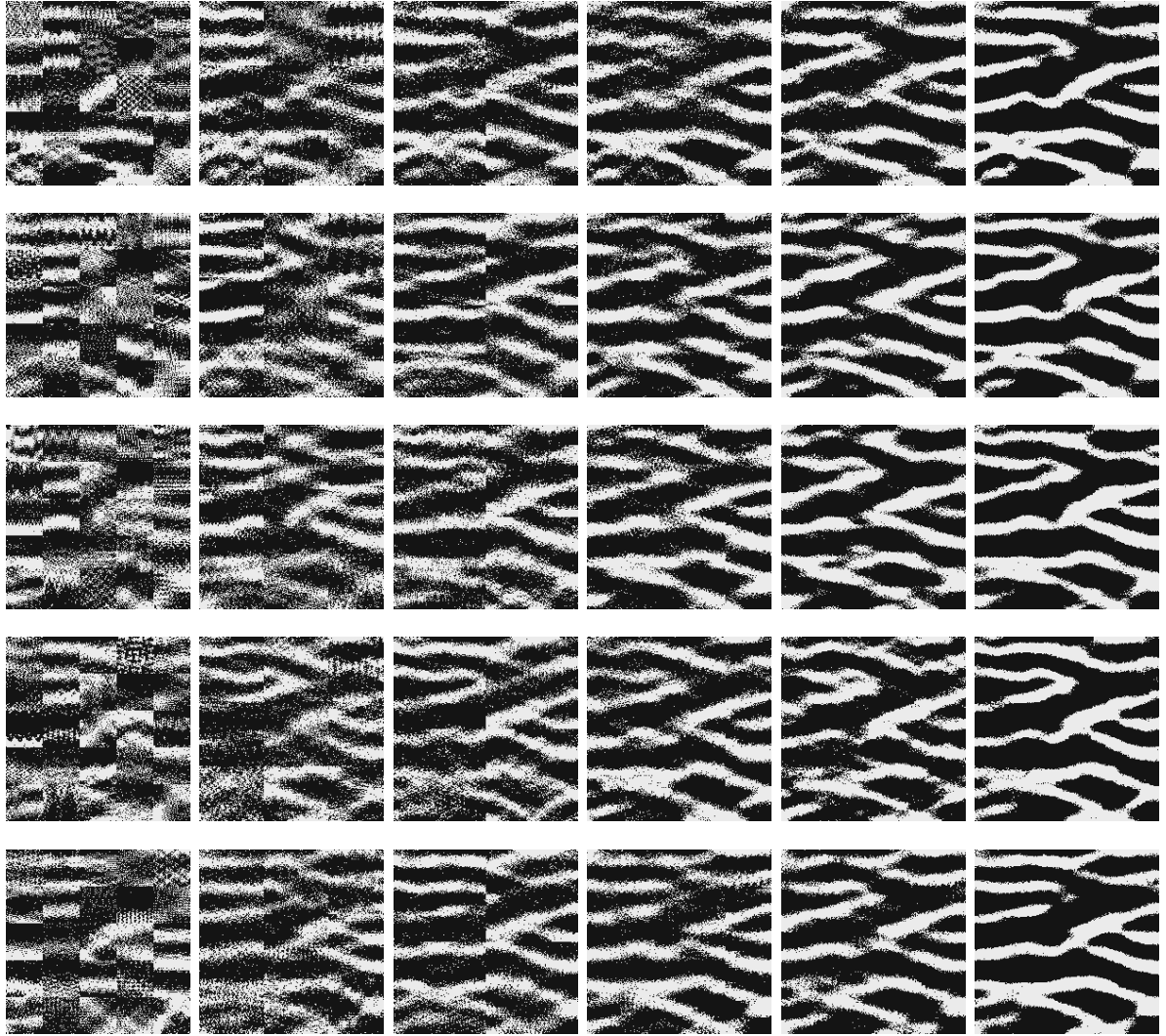


Figura B.3: Reconstrucción de *Compressed Sensing* para distintos tamaños de bloque con el 4% de los datos medidos. Cada fila representa una realización de la matriz de muestreo y cada columna un tamaño de bloque particular. De izquierda a derecha por columna: descomposición en bloques de tamaño  $40 \times 40$ ,  $70 \times 70$ ,  $100 \times 100$ ,  $150 \times 150$ ,  $200 \times 200$  y reconstrucción promedio.

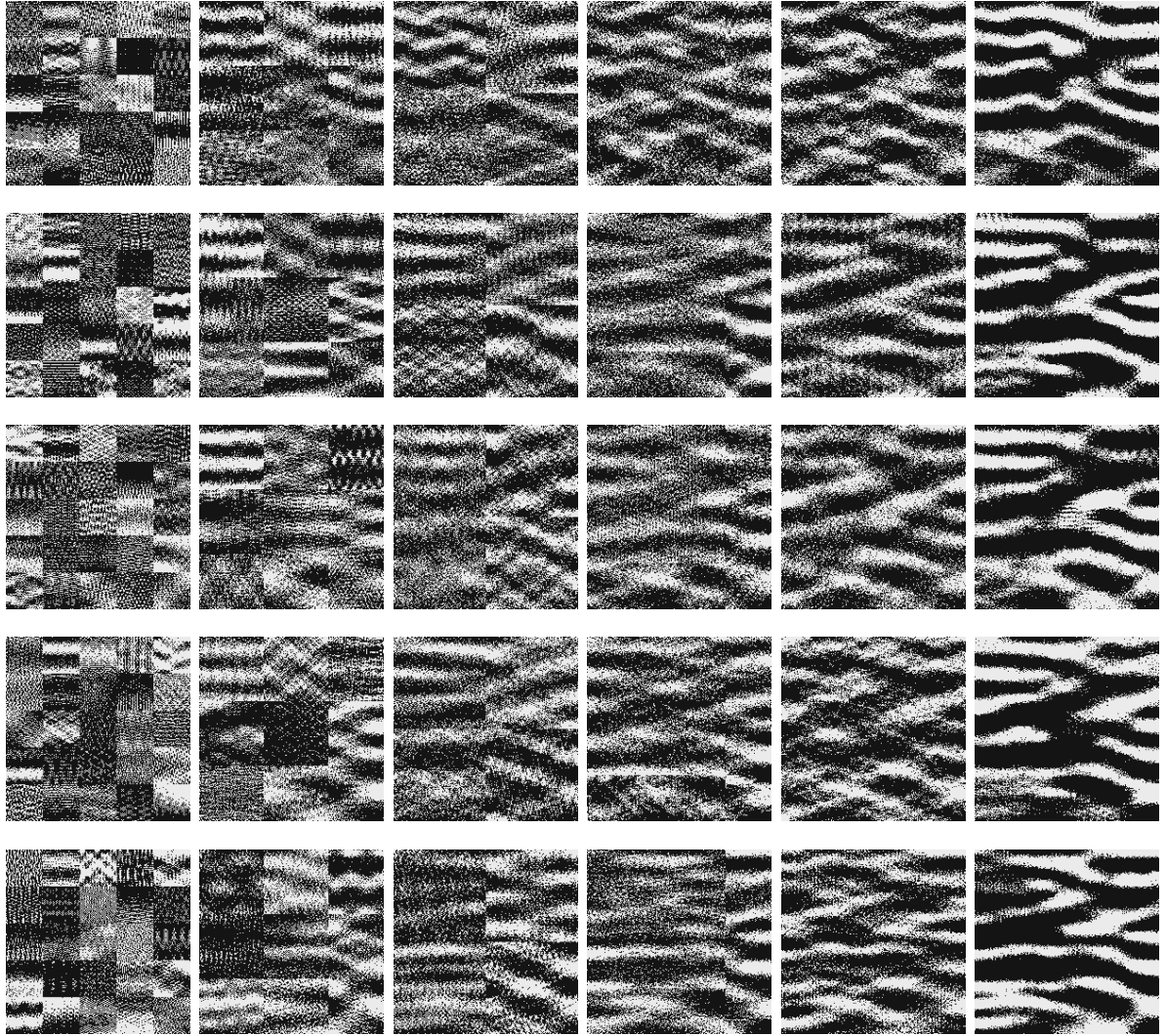


Figura B.4: Reconstrucción de *Compressed Sensing* para distintos tamaños de bloque con el 2% de los datos medidos. Cada fila representa una realización de la matriz de muestreo y cada columna un tamaño de bloque particular. De izquierda a derecha por columna: descomposición en bloques de tamaño  $40 \times 40$ ,  $70 \times 70$ ,  $100 \times 100$ ,  $150 \times 150$ ,  $200 \times 200$  y reconstrucción promedio.

### B.3. Variabilidad inducida por Matriz de Muestreo

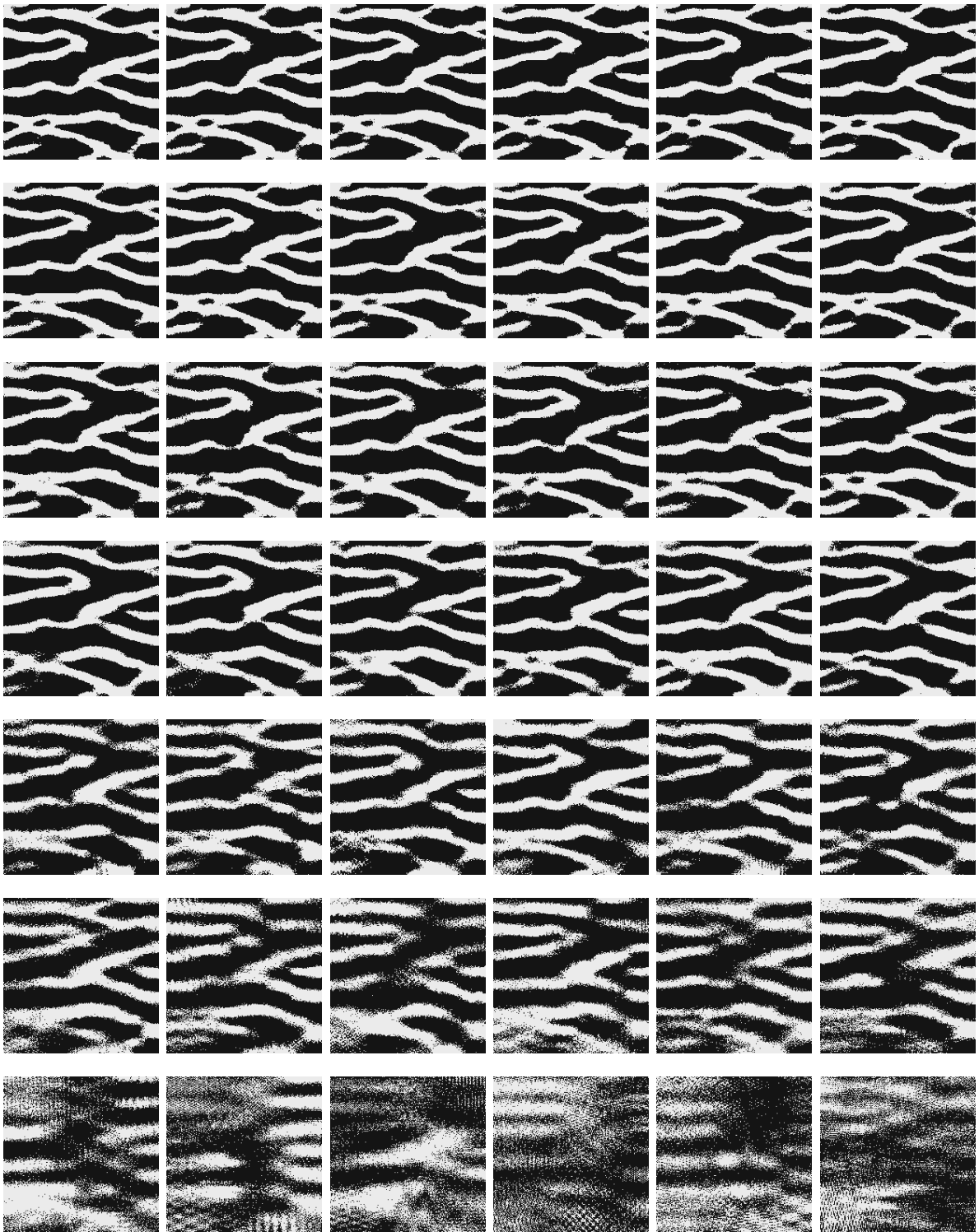


Figura B.5: Ilustración de variabilidad como función de la matriz de muestreo. Cada columna representa una realización independiente de  $A$  y cada fila un nivel de adquisición distinto. Desde arriba hacia abajo por fila: nivel de muestreo del 10 %, 8 %, 6 %, 5 %, 3 %, 2 % y 1 % respectivamente.

## B.4. Desempeños según la Orientación del Perfil

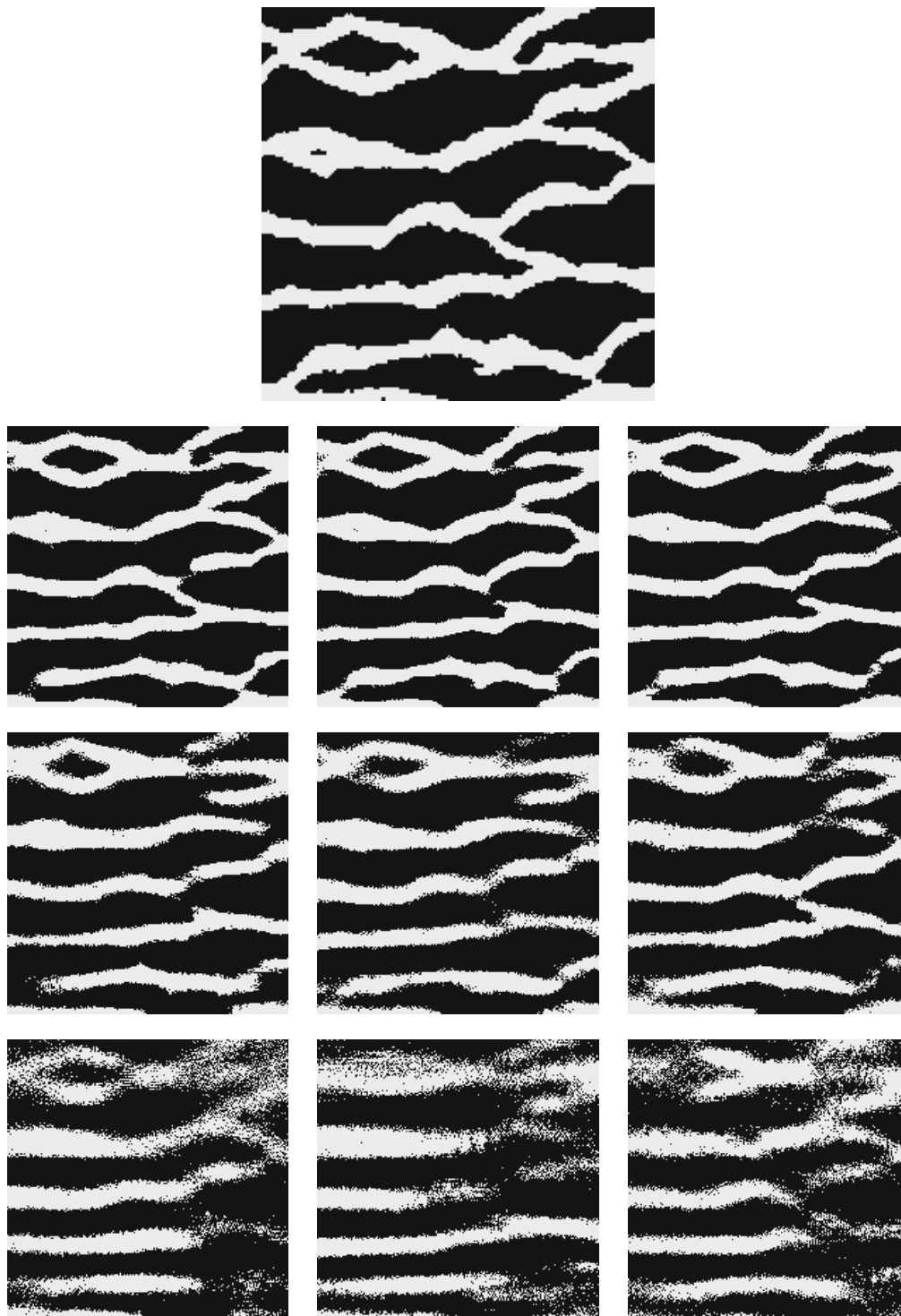


Figura B.6: Reconstrucciones para imagen multicanal horizontal. Cada columna representa una realización independiente de la matriz de muestreo. Cada fila representa un nivel de adquisición distinto. Desde arriba hacia abajo por fila: perfil original, nivel de adquisición del 10 %, 4 % y 2 % respectivamente.



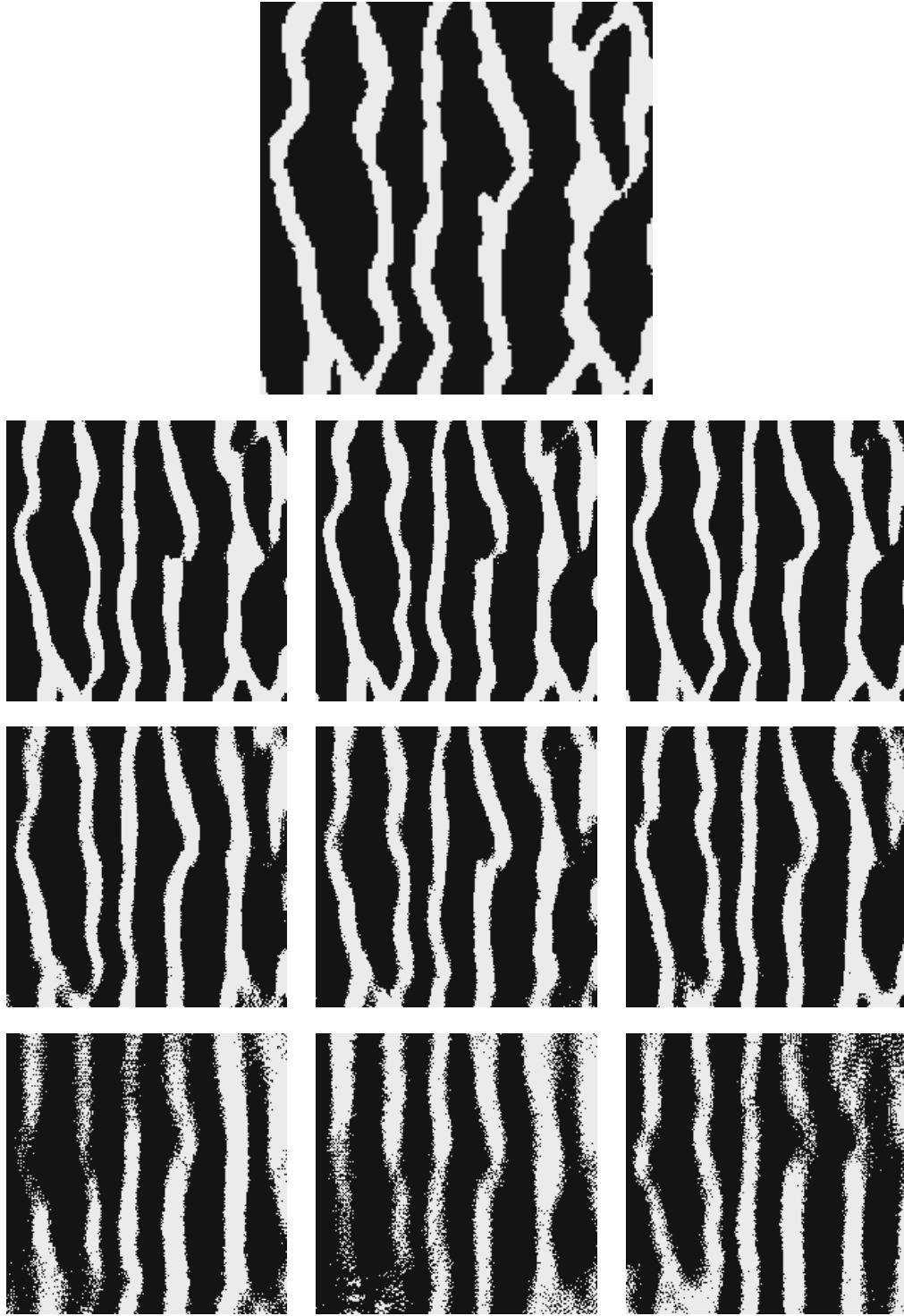


Figura B.7: Reconstrucciones para imagen multicanal vertical. Cada columna representa una realización independiente de la matriz de muestreo. Cada fila representa un nivel de adquisición distinto. Desde arriba hacia abajo por fila: perfil original, nivel de adquisición del 10 %, 4 % y 2 % respectivamente.

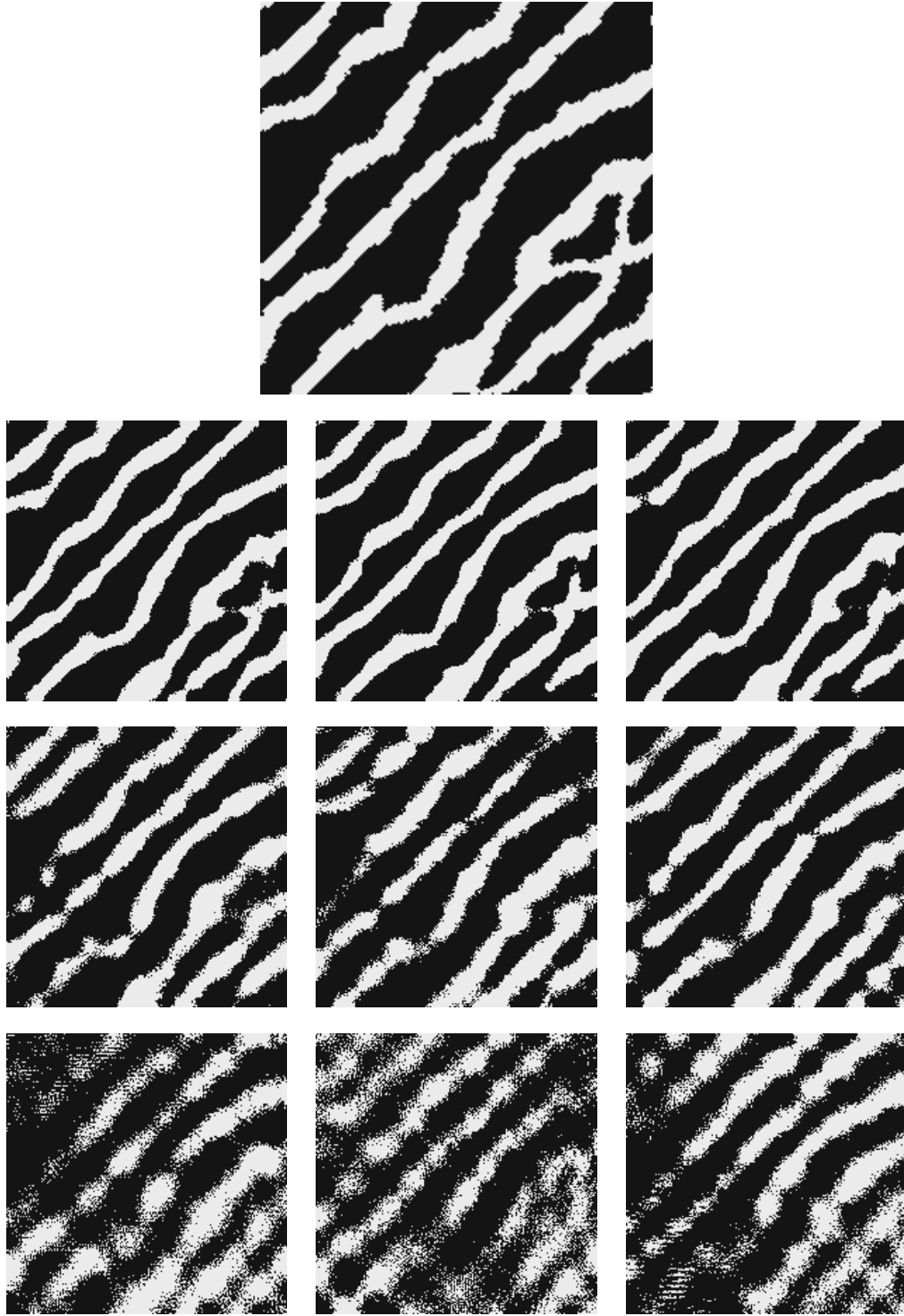


Figura B.8: Reconstrucciones para imagen multicanal diagonal. Cada columna representa una realización independiente de la matriz de muestreo. Cada fila representa un nivel de adquisición distinto. Desde arriba hacia abajo por fila: perfil original, nivel de adquisición del 10 %, 4 % y 2 % respectivamente.