



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

CUBRIMIENTOS DE VÉRTICES POR COMPONENTES CONEXAS
MONOCROMÁTICAS EN MULTICOLOREOS DE ARISTAS DE GRAFOS
COMPLETOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SEBASTIÁN FELIPE BUSTAMANTE FRANCO

PROFESOR GUÍA:
MAYA JAKOBINE STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN
MARTÍN MATAMALA VÁSQUEZ

SANTIAGO DE CHILE
2014

Resumen

La presente memoria tiene como objetivo un estudio general sobre componentes monocromáticas en multicoloreos de aristas de grafos completos, o dicho de otro modo, un coloreo de aristas de multigrafos completos. En particular, el tema de mayor importancia consiste en una generalización de una importante clase de problemas relacionados con la *Conjetura de Ryser*, la cual habla de una cota universal para el número de componentes conexas monocromáticas necesarias para cubrir todos los vértices de un grafo con sus aristas coloreadas, y donde tal cota solo depende del número de colores utilizados. Los resultados presentes en la memoria son fruto de distintas formas de abordar determinados problemas relacionados con la generalización mencionada y que, por fortuna, resultaron no solo ser útiles para los propósitos para los que fueron ideados, sino que algunos de ellos poseen interés por sí mismos.

En primer lugar el motivo de estudio se centra en la cantidad de vértices que podemos asegurar para alguna de las componentes monocromáticas inducidas en un multicoloreo de aristas arbitrario en grafos bipartitos, para luego extender el resultado a grafos completos.

Posteriormente se estudia una cota de vértices para multicoloreos de grafos tales que pueden ser cubiertos con tres componentes conexas monocromáticas y no pueden ser cubiertos con dos componentes conexas monocromáticas, pero si aislamos cualquiera de sus vértices entonces el resto de ellos pueden ser cubiertos por dos componentes monocromáticas. Este tipo de multicoloreos será llamado 3-crítico.

Finalmente se introduce la generalización de un caso particular de la *Conjetura de Ryser*, que consiste en encontrar cotas, dependientes del número de colores utilizados, para multicoloreos de aristas de grafos completos. En particular, se restringe el estudio para multicoloreos de aristas uniformes, los cuales se definen como multicoloreos donde todas las aristas tienen el mismo número de colores. Primero se muestran cotas superiores generales, luego cotas inferiores, para finalmente estudiar determinados casos de manera particular y concluir cotas de manera estricta.

*A mi familia,
Verónica, Carmen, Luis y Daniela.*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por su amor y apoyo incondicionales. A mi madre, Verónica, quien siempre ha estado conmigo brindándome consejos y ofreciéndome su ayuda cada vez que la he necesitado. A mi abuela, Carmen, por su exquisita compañía, sus interminables mimos y su genial humor. A mi abuelo, Luis, quien no solo ha sido mi abuelo, sino también un padre y quien siempre me ha prestado su ayuda cuando lo he necesitado. A mi hermana, Daniela, por su alegría y jovialidad, sin la cual muchos momentos difíciles habrían sido aún peores. Son lo más importante que tengo y a quienes dedico este trabajo.

Agradecer a mis profesores. A mi profesora guía, Maya Stein, por su apoyo, ayuda, paciencia y buena onda durante la memoria. Sus valiosos consejos fueron fundamentales, no solo para este trabajo, sino que para mi formación. A José Soto, por su apoyo como profesor coguía, quien me aconsejó y me dió nuevas formas de ver los problemas. A Martan Mata-mala por sus observaciones y consejos. Fue un agrado trabajar con ellos y aprender de su experiencia.

Agradecer a mis amigos que estuvieron presentes a lo largo de todo este proceso. A Víctor, Pablomun y Tonho, quienes escucharon mis problemas con la memoria y aportaron con novedosas ideas. A Sylvia, Nacho, Alf y Mauro, quienes han sido mis compañeros de viaje y de los que guardo excelentes recuerdos que me acompanaran por el resto de mi vida. A Richi, una de las mejores personas que he conocido y quien me ha soportado durante tantos años, desde cuando jugábamos a la pelota durante la infancia, pasando por el colegio y ahora durante la carrera. A Bastián y Niko, dos de las personas mas nobles que me ha tocado conocer, con quienes las conversaciones siempre fueron interesantes y cuyos consejos fueron valiosísimos. Podra decir mucho de cada uno del resto de mis amigos y compañeros de generación. Su compañia ha sido importantísima para superar estos años de estudio. A mis hermanos mayores del DIM: Javi, Conti, Orly y Pasti, con quienes he compartido buenísimos momentos y con quienes he tenido geniales conversaciones.

Agradecer a mis amigos del colegio, Nicolás, Juan e Iván. Latas y mucho más he compartido con ustedes, han estado conmigo en las buenas y en las malas y están en muchos de los mejores recuerdos que tengo.

Agradecer a Daniela, mi compañera e importantísimo soporte, por su cariño y apoyo.

Agradecer también a los funcionarios del DIM, Oscar Mori, Gladys Cavallone y eterin, por su ayuda y excelente disposición. Son fundamentales para todos nosotros.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Definiciones básicas de multicoloreos de aristas	6
1.2. Estado del arte	7
2. Resultados generales en r-multicoloreos de aristas	11
3. Cota de vértices para r-multicoloreos de grafos completos 3-críticos	15
4. Cotas para el número de cubrimiento τ en r-multicoloreos k-uniformes de grafos completos	20
4.1. Construcciones de multicoloreos con número de cubrimiento τ no trivial . . .	20
4.2. Cotas superiores para el número de cubrimiento τ	23
Conclusión	31
Bibliografía	33

Índice de figuras

2.1. Doble estrella, formada por la unión (a través de la arista punteada) de dos estrellas (en líneas continuas).	11
3.1. Diagramas de la ubicación de las componentes I_u, J_u e I_v para el caso de cardinalidad dos del lema 3.3	17
3.2. Diagramas de la ubicación de la componente J_v y el vértice w para el caso de cardinalidad dos del lema 3.3	18
4.1. Ejemplo del lema 4.1	21
4.2. Plano afín de orden 3	22
4.3. Obtención de un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k + 1$	25
4.4. Obtención de un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k$	26
4.5. Obtención de cubrimiento por componentes monocromáticas de tamaño 4 para 6-multicoloreo de aristas 2-uniforme.	27
4.6. Obtención de cubrimiento por componentes monocromáticas de tamaño 2 para φ , que contradice su 3-criticidad.	30

Introducción

La historia de los coloreos de aristas se remonta a 1880, en un artículo de Tait [21] donde relaciona el teorema de los cuatro colores (en esa época con carácter de conjetura) con coloreos propios de aristas en grafos planares 3-conexos. Varios años más tarde, en 1916, König probaría en [15] su famoso teorema, que establece que el máximo emparejamiento en un grafo bipartito es igual a su mínimo cubrimiento de aristas por vértices.

El teorema de König es equivalente a varios y conocidos teoremas, como el de Menger, relacionado con la conexidad en grafos; Max Flow - Min Cut y Birkhoff-von Neumann, dos de los teoremas más conocidos en optimización combinatorial; Dilworth, uno de los principales teoremas de la teoría del orden; entre otros. Esto es sólo una muestra de lo fundamental de éste teorema dentro de la combinatoria y es el que, en mayor medida, motiva esta memoria a través de una generalización llamada *Conjetura de Ryser*, que fue formulada en la tesis de Henderson [13], alumno de Ryser, en 1971.

Un *hipergrafo* \mathcal{H} es un conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ de subconjuntos, llamados *aristas*, de algún conjunto base, cuyos elementos son llamados *vértices*. Un hipergrafo \mathcal{H} se dice *r-uniforme* si todas sus aristas son del mismo tamaño, r . Un hipergrafo r -uniforme se dice *r-partito* si su conjunto de vértices $V(\mathcal{H})$ puede ser particionado en conjuntos V_1, \dots, V_r de tal modo que cada arista intersecta cada V_i en exactamente un vértice. En particular, un grafo bipartito es un hipergrafo 2-uniforme 2-partito.

Un *emparejamiento* en un hipergrafo \mathcal{H} es un conjunto de aristas disjuntas de a pares. El número de emparejamiento, $\nu(\mathcal{H})$, de un hipergrafo \mathcal{H} es el tamaño máximo de un emparejamiento en \mathcal{H} . Un *cubrimiento* de un hipergrafo \mathcal{H} es un subconjunto de $V(\mathcal{H})$ que intersecta todas las aristas de \mathcal{H} . El número de cubrimiento, $\tau(\mathcal{H})$, de \mathcal{H} es el tamaño mínimo de un cubrimiento de \mathcal{H} .

En este contexto, el teorema de König puede ser formulado del siguiente modo: si \mathcal{H} es un hipergrafo 2-uniforme (es decir, un grafo) 2-partito (bipartito), entonces $\tau(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H})$. En términos más generales, $\tau \geq \nu$ para todo hipergrafo, ya que por cada arista de un emparejamiento es necesario un vértice distinto para cubrir cada una de ellas. Además, en un hipergrafo \mathcal{H} r -uniforme se tiene que $\tau \leq r\nu$, pues la unión de las aristas de un emparejamiento maximal forman un cubrimiento de \mathcal{H} .

La *Conjetura de Ryser* es una extensión del teorema de König a hipergrafos r -partitos r -uniformes:

Conjetura de Ryser *Para todo hipergrafo r -partito r -uniforme \mathcal{H} (donde $r > 1$) se tiene $\tau(\mathcal{H}) \leq (r - 1)\nu(\mathcal{H})$.*

Posteriormente a la publicación de la conjetura, Gyárfás en [9] observó que si la *Conjetura de Ryser* se restringe a hipergrafos intersecantes, es decir, cuando $\nu = 1$, entonces la conjetura puede ser reformulada en términos de *coloreos de aristas* de grafos completos, que es la estructura que será generalizada en la presente memoria. Cabe destacar que estos coloreos no constituyen coloreos propios de aristas y los temas tratados en esta memoria no guardan relación con resultados sobre coloreos propios.

Un coloreo de aristas de un grafo G es una función φ que va desde el conjunto de aristas $E(G)$ al conjunto $\{1, \dots, r\}$, y se dirá que el par (G, φ) es un r -coloreo de aristas de G .

Una *componente conexa monocromática* en color i del r -coloreo de aristas (G, φ) es un subgrafo H de G , conexo y maximal en el sentido de la cantidad de vértices, con la propiedad de que $\varphi(e) = i$ para toda arista en $E(H)$. También se dirá que esta estructura es una componente conexa monocromática de G inducida por φ .

Un *cubrimiento por componentes monocromáticas* de un r -coloreo de aristas (G, φ) es un conjunto de componentes conexas monocromáticas de G inducidas por φ , tales que la unión de los vértices de tales componentes es igual al conjunto de vértices de G . El número de cubrimiento, $\tau(G, \varphi)$, es el tamaño mínimo de un cubrimiento por componentes monocromáticas de (G, φ) .

En este contexto, la reformulación de Gyárfás de la *Conjetura de Ryser* para hipergrafos intersecantes es la siguiente:

Conjetura de Ryser (reformulación de Gyárfás) *Para todo r -coloreo de aristas de un grafo completo (K_n, φ) (donde $r > 1$) se tiene $\tau(K_n, \varphi) \leq r - 1$.*

La *Conjetura de Ryser*, en su forma más general, se sabe cierta para $r = 2$, pues en este caso es equivalente al teorema de König. Después de los resultados parciales [11] y [20], el resultado $k = 3$ fue resuelto recientemente por Aharoni [1], en 2001, utilizando un interesante método topológico desarrollado en [2]. Además, en [8] se demostró una versión fraccionaria de la conjetura para el caso general.

En el caso particular de la *Conjetura de Ryser* para hipergrafos intersecantes, la conjetura se sabe cierta para $r = 4$ y $r = 5$, casos demostrados por Duchet en [5], cuya demostración se utiliza de base en un artículo de Haxell y Scott [12] para demostrar que cuando $r = 4$ y $r = 5$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\tau(\mathcal{H}) \leq (r - \varepsilon)\nu(\mathcal{H})$, para \mathcal{H} hipergrafo r -partito r -uniforme. El resto de los casos siguen abiertos y la investigación se ha centrado en estudiar la estructura de los objetos de estudio, ya sea en hipergrafos r -partitos r -uniformes o en r -coloreos de aristas de grafos completos.

La reformulación de Gyárfás de la conjetura de Ryser guarda especial parecido, por su formulación, a los números de Ramsey $r(G, H)$, que corresponde al menor número natural n tal que, en cualquier 2-coloreo (digamos rojo y azul) de aristas de un grafo completo K_n , existe una copia roja de G o una copia azul de H . Sin embargo, para esta formulación de la conjetura

de Ryser lo que se busca es encontrar subgrafos monocromáticos (o equivalentemente, árboles monocromáticos) cuya unión de vértices sea igual al conjunto de vértices completos.

Existen versiones más fuertes que la conjetura de Ryser para r -coloreos de aristas de grafos completos, como la propuesta en [6] por Erdős, Gyárfás y Pyber, donde se conjetura que es posible particionar los vértices de un grafo completo con sus aristas coloreadas con r colores en $r - 1$ árboles monocromáticos. En el mismo artículo se demuestra la conjetura para los casos $r = 2$ y $r = 3$, siendo el caso $r = 2$ equivalente a la observación hecha por Erdős y Rado de que un grafo o su complemento es conexo. Además proponen una conjetura análoga para ciclos monocromáticos, y demuestran que es posible particionar los vértices de un r -coloreo de aristas de un grafo completo en a lo más $cr^2 \log(r)$ ciclos monocromáticos. En la misma línea, Gyárfás conjetura que es posible particionar los vértices de un r -coloreo de aristas de un grafo completo en r caminos monocromáticos. Hasta el momento, la conjetura ha sido probada para $r = 3$ en [19] por Pokrovskiy en el año 2011, siendo esto lo mejor que se sabe al respecto.

Otros resultados relacionados con este problema se pueden encontrar en [14], donde se demuestra que encontrar un cubrimiento de aristas por vértices óptimo en hipergrafos r -partitos uniformes es NP-difícil, así como también se demuestra en [3] que si un hipergrafo r -partito no contiene una estructura llamada *tornado* entonces la conjetura de Ryser para hipergrafos intersectantes es cierta para el hipergrafo en particular.

El trabajo presentado en esta memoria reproduce algunos de estos resultados para una estructura más general llamada r -multicoloreo de aristas. Un r -multicoloreo de aristas de un grafo G , denotado también por (G, φ) es análogo a un r -coloreo de aristas, con la salvedad de que permite más de un color por arista. Los conceptos de componente conexa monocromática y número de cubrimiento tienen la misma definición para r -multicoloreos de aristas que la dada anteriormente, para r -coloreos de aristas. Adicionalmente, diremos que un r -multicoloreo de aristas de un grafo G es k -uniforme si el número de colores por arista es fijo e igual a k . Finalmente, cabe mencionar que los r -multicoloreos de aristas k -uniformes pueden representarse como multihipergrafos k -intersectantes, es decir, hipergrafos con aristas repetidas tal que cada par de aristas se intersecta en k vértices.

La estructura de los r -multicoloreos de aristas generaliza a los r -coloreos de aristas, pues los últimos corresponden a r -multicoloreos de aristas 1-uniformes. Además, es evidente que $\tau \leq r$ para todo r -multicoloreo de aristas de un grafo completo, pues las componentes conexas monocromáticas inducidas por las aristas incidentes a un vértice dado forman un cubrimiento por componentes monocromáticas del grafo completo de tamaño a lo más r .

La principal motivación de los resultados presentados es intentar verificar, para distintos parámetros r, k , dos extensiones de la conjetura de Ryser para r -multicoloreos de aristas k -uniformes, encontrando cotas no triviales para el número de cubrimiento que sean lo más cercanas a la conjetura y, en algunos casos, igual.

Organización

En el primer capítulo se introducen las definiciones más importantes que serán utilizadas a lo largo de la memoria, así como también se presentan los principales resultados que existen a la fecha con respecto a la conjetura de Ryser y la equivalencia entre las conjeturas para hipergrafos r -partitos r -uniformes intersectantes y r -multicolores de aristas 1-uniformes.

En el segundo capítulo, se estudia el tamaño en vértices de alguna componente conexa monocromática que se puede asegurar en cualquier r -multicoloreo de aristas, generalizando un resultado anterior demostrado en [16] y [18], siendo el principal resultado el siguiente lema.

Lema 2.3 *En un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo hay una componente conexa monocromática con al menos $kn/(r-1)$ vértices.*

Este lema llevará a la formulación de la conjetura equivalente a la de Ryser en r -multicolores de aristas k -uniformes.

Conjetura 2.4 *En todo r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo (K_n, φ) (donde $r > 1$ y $k \geq 1$) se tiene $\tau(K_n, \varphi) \leq \lceil (r-1)/k \rceil$.*

Además, se presenta un algoritmo que, en caso de que la conjetura de Ryser sea cierta, representa una $(1-1/e)$ -aproximación a un cubrimiento de vértices por $\lceil (r-1)/k \rceil$ componentes conexas monocromáticas.

En el tercer capítulo se introduce el concepto de r -multicoloreo t -crítico, con $t > 0$ natural, para posteriormente demostrar el teorema principal del capítulo, correspondiente a una cota para el tamaño de vértices de un r -multicoloreo 3-crítico de un grafo completo.

Teorema 3.5 *Si (K_n, φ) es un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n entonces $n \leq r + \binom{r}{2}$.*

Finalmente, en el cuarto capítulo se estudian cotas inferiores y superiores para el número de cubrimiento en r -multicolores de aristas k -uniformes. Para las cotas inferiores se presentarán construcciones con un número de cubrimiento alto, mientras que para las cotas superiores se encontrarán cubrimientos de un determinado tamaño para multicolores arbitrarios, fijando los parámetros r y k . Se propone una versión más débil de la conjetura 2.4, que coincide con la conjetura de Ryser para r -multicolores de aristas 1-uniformes de grafos completos, y cuya formulación es la siguiente.

Conjetura 4.5 *Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo K_n . Entonces $\tau(K_n, \varphi) \leq r - k$.*

Este capítulo utiliza técnicas desarrolladas en las mismas demostraciones, así como también resultados mostrados en los capítulos anteriores, para los dos últimos resultados, que demuestran que cuando $r = 6$ y $k = 2$, la cota de la conjetura débil 4.5 es cierta y que cuando $r = 5$ y $k = 2$ la cota de la conjetura fuerte 2.4 se alcanza.

Capítulo 1

Preliminares

La estructura básica sobre la que se trabajará es el *grafo*, que gráficamente se representa como un conjunto de puntos (llamados *vértices*) unidos por líneas (llamadas *aristas*). En general, asumiremos que los grafos son *simples*, es decir, no poseen bucles (arista que parte y termina en el mismo vértice) ni aristas dobles (dos aristas con los mismos términos). Los grafos permiten estudiar fenómenos discretos, representando relaciones entre pares de entidades, las que se representan por vértices.

Formalmente, un grafo es un par $G = (V, E)$ de conjuntos donde E son subconjuntos de dos elementos de V . Los elementos de V son llamados *vértices*, mientras que los elementos de E son llamados *aristas*, que son las que representan relaciones entre vértices. En general, al conjunto de vértices de un grafo G se le denota $V(G)$, así como a su conjunto de aristas se le denota $E(G)$. En términos notacionales y por simplicidad, será frecuente utilizar uv para referirnos a una arista $\{u, v\}$.

En general, a menos que se diga lo contrario, se asumirá que los grafos son distintos al *grafo trivial*, cuyos conjuntos de vértices y aristas son vacíos. Para un grafo G diremos que un vértice $u \in V(G)$ es *incidente* con una arista $e \in E(G)$ si $u \in e$. Además, diremos que un vértice u es *adyacente* a un vértice v si uv es una arista de $E(G)$.

Un concepto fundamental para esta memoria es el de *conexidad*. Un grafo G se dice *conexo* si todo par de vértices de G está unido por un *camino* en G . Un camino es un grafo $P = (V, E)$ si su conjunto de vértices es de la forma $V = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ y su conjunto de aristas es de la forma $E = \{u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k\}$, para algún k natural (distinto de cero) y donde los vértices u_i , $i = 0, \dots, k$, son todos distintos. Además, diremos que un subgrafo H de G (es decir, H es un grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$) es una *componente conexa* de G si H es un subgrafo conexo de G maximal en la cantidad de vértices.

1.1. Definiciones básicas de multicolores de aristas

El principal objeto de estudio de esta memoria corresponde a los multicolores de aristas, cuya definición formal sigue inmediatamente.

Definición 1.1 Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se dirá que el par (G, φ) es un r -multicolor de aristas de G si φ es una función de la forma

$$\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, r\}) \setminus \{\emptyset\}.$$

Además, se dirá que φ es k -uniforme si $|\varphi(e)| = k$ para todo $e \in E$.

Los multicolores de aristas corresponden, gráficamente hablando, a colorear las aristas de un grafo G con, eventualmente, más de un color. En particular, si φ es un r -multicolor de aristas k -uniforme de un grafo G , entonces las aristas de G están coloreadas con a lo más r colores y k colores en cada arista. Esto hace de un r -multicolor de aristas un r' -multicolor de aristas para todo r' mayor o igual a r .

Definición 1.2 Sea (G, φ) un r -multicolor de aristas de G . Se dirá que un subgrafo I de G es una componente conexa monocromática en color i si I es una componente conexa en el grafo

$$G_i = (V(G), E_i), \quad E_i = \{e \in E(G) : i \in \varphi(e)\}.$$

Además, se denotará al conjunto de componentes conexas monocromáticas en color i de G como $ccm_i(G, \varphi)$ y se denotará como $ccm(G, \varphi)$ a la unión sobre $i \in \{1, \dots, r\}$ de los conjuntos $ccm_i(G, \varphi)$.

Una observación importante acerca de las componentes conexas monocromáticas es que, si I es una de ellas en color i de un r -multicolor (G, φ) , entonces las aristas que salen de ella no se encuentran coloreadas con el color i , pues de lo contrario se podrían agregar tales aristas junto al vértice al que llega fuera de I para formar un grafo conexo en G_i con más vértices, contradiciendo la maximalidad de vértices de las componentes conexas. Además, toda arista induce tantas componentes conexas monocromáticas como colores posea, pues todo par de vértices relacionados por una arista e , junto a la arista misma, forman un subgrafo conexo en G_i , para todo $i \in \varphi(e)$, el cual claramente pertenece a una componente conexa en G_i .

Definición 1.3 Sea (G, φ) un r -multicolor de aristas de G . Se dirá que $\mathcal{R} \subseteq ccm(G, \varphi)$ es un cubrimiento de vértices por componentes conexas monocromáticas de G para φ de tamaño k si la cardinalidad de \mathcal{R} es igual a k y $\bigcup_{U \in \mathcal{R}} V(U) = V(G)$.

El problema que encontrar cubrimientos de vértices por componentes monocromáticas de tamaño menor o igual a k puede ser visto como una clase de instancias del problema SETCOVER, uno de los 21 problemas computacionales NP-completos de Karp [14], que consiste en, dados una familia \mathcal{U} de subconjuntos de un conjunto base y un entero k , encontrar un subconjunto de \mathcal{U} de tamaño menor o igual a k tal que la unión de los elementos de tal subconjunto sea igual al conjunto base. En el caso de un r -multicolor de aristas (G, φ) los elementos del conjunto \mathcal{U} corresponden a los vértices de las componentes conexas monocromáticas en $ccm(G, \varphi)$.

Esta memoria se enfoca en encontrar cubrimientos de vértices por componentes conexas monocromáticas del menor tamaño posible. Para formalizar el concepto del menor cubrimiento, a continuación se define el *número de cubrimiento*.

Definición 1.4 Sea (G, φ) un r -multicoloreo de aristas de un grafo G . Se define el número de cubrimiento $\tau(G, \varphi)$ como la mínima cardinalidad posible de un cubrimiento de vértices por componentes conexas monocromáticas de (G, φ) , es decir,

$$\tau(G, \varphi) = \min_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}|,$$

con \mathcal{R} cubrimiento de vértices por componentes conexas monocromáticas de (G, φ) .

La conjetura que se propone es una extensión a la conjetura de Ryser para r -multicoloreos de aristas 1-uniformes, usualmente llamados r -coloreos de aristas, de grafos completos. Para r -multicoloreos de aristas k -uniformes, se propone la siguiente conjetura, que involucra el número de cubrimiento.

Conjetura 2.4 En un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo (K_n, φ) (donde $r > 1$) se tiene $\tau(K_n, \varphi) \leq \lceil (r-1)/k \rceil$.

1.2. Estado del arte

La conjetura de Ryser fue propuesta en una tesis doctoral de Henderson [13] de 1971, quien fue alumno de Ryser. El contexto original de la conjetura era sobre hipergrafos r -partitos r -uniformes, que corresponden a hipergrafos donde existe una partición de los vértices $\{V_1, \dots, V_r\}$ tal que cada arista intersecta a cada V_i en a lo más un vértice (r -partito) y todas sus aristas tienen exactamente r vértices (r -uniformidad). Un caso de particular importancia es cuando el hipergrafo es intersectante, es decir, el máximo emparejamiento es de cardinalidad uno o, equivalentemente, todo par de aristas tiene intersección no vacía. Además, el número de cubrimiento $\tau(\mathcal{H})$ para un hipergrafo \mathcal{H} corresponde al mínimo número de vértices que intersectan a todas las aristas. En este contexto, la conjetura de Ryser es como sigue.

Conjetura 1.5 (Conjetura de Ryser para hipergrafos r -partitos r -uniformes intersectantes) En un hipergrafo r -partito r -uniforme intersectante \mathcal{H} se tiene que $\tau(\mathcal{H}) \leq r - 1$.

Obviamente, $\tau(\mathcal{H}) \leq r$ en este caso, pues los vértices de cada arista es un cubrimiento.

Seis años más tarde, Gyárfás nota en [9] que la conjetura 1.5 es equivalente a la reformulación de Gyárfás de la conjetura de Ryser. Por lo fundamental del resultado, se demuestra esta equivalencia a continuación.

Teorema 1.6 Las siguientes conjeturas son equivalentes:

- (1) (Ryser para hipergrafos r -partitos r -uniformes intersectantes) Para todo hipergrafo r -partito r -uniforme intersectante \mathcal{H} se tiene que $\tau(\mathcal{H}) \leq r - 1$.

(2) (Ryser para r -coloreos de aristas de grafos completos) Para todo r -coloreo de aristas de un grafo completo (K_n, φ) se tiene que $\tau(K_n, \varphi) \leq r - 1$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, se supondrá que la conjetura de Ryser para hipergrafos r -partitos r -uniformes intersectantes es cierta.

Sea (K_n, φ) un r -coloreo de aristas de un grafo completo K_n . Cabe notar que si existe un vértice $u \in V(K_n)$ tal que en sus aristas incidentes solo es posible contabilizar $r - 1$ colores, entonces la conjetura de Ryser en formulación de coloreos de aristas de grafos completos es cierta, pues basta tomar las $r - 1$ estrellas monocromáticas con centro u que forman un cubrimiento de vértices. Dicho esto, se supondrá que para todo vértice y para cada color existe una arista incidente al vértice que tiene ese color.

Sea $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), \mathcal{E}(\mathcal{H}))$ el hipergrafo con vértices $V(\mathcal{H}) = ccm(K_n, \varphi)$ y aristas $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{E_u : u \in V(K_n)\}$, donde $E_u \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$ contiene las componentes conexas monocromáticas en $ccm(K_n, \varphi)$ a las que pertenece el vértice u .

Se tiene que el hipergrafo \mathcal{H} es r -partito r -uniforme, pues si se considera la partición de vértices $\{V_1, \dots, V_r\}$ donde $V_i = ccm_i(K_n, \varphi)$, cada arista de \mathcal{H} representa un vértice de K_n conteniendo las componentes conexas monocromáticas que lo contienen, que son exactamente r y una en cada partición de vértices. Además es intersectante, pues cualquier par de vértices pertenecen a la misma componente conexas monocromática en $ccm_i(K_n, \varphi)$ para cada i en la arista que los une.

Luego, por (1), existen a lo más $r - 1$ vértices $U_1, \dots, U_{r-1} \in V(\mathcal{H})$ (que representan componentes conexas monocromáticas en el r -coloreo de aristas de K_n) que intersectan todas las aristas de $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ (que representan vértices contenidos en las componentes monocromáticas inducidas por sus aristas incidentes), es decir que existen a lo más $r - 1$ componentes conexas monocromáticas que cubren todos los vértices, implicando así la Conjetura de Ryser para r -coloreos de aristas de grafos completos.

Recíprocamente, supongamos que la conjetura de Ryser para r -coloreos de aristas de grafos completos es cierta.

Sea \mathcal{H} un hipergrafo r -partito r -uniforme intersectante, con partición de vértices $\{V_1^{\mathcal{H}}, \dots, V_r^{\mathcal{H}}\}$ y se considera el grafo completo K^* donde $V(K^*) = \mathcal{E}(\mathcal{H})$. Sea (K^*, φ) un r -coloreo de aristas satisfaciendo que $\varphi(E_1 E_2) = \{i\}$, para algún i tal que $\emptyset \neq E_1 \cap E_2 \subseteq V_i^{\mathcal{H}}$.

Luego, por (2), existen U_1, \dots, U_l componentes conexas monocromáticas en $ccm(K^*, \varphi)$ y en colores $1, \dots, l$, respectivamente, con $l \leq r - 1$, que cubren todos los vértices de K^* . Para cada una de estas componentes conexas monocromáticas U_i de (K^*, φ) se escoge un vértice u_i de \mathcal{H} en $V_i^{\mathcal{H}}$ del siguiente modo: si la componente U_i es trivial, digamos $U_i = \{E\}$, entonces escogemos $u_i \in E \cap V_i^{\mathcal{H}}$, el cual es claramente único. De lo contrario, escogemos u_i como el vértice que comparten todas las aristas de $U_i \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{H})$ en $V_i^{\mathcal{H}}$. Los vértices u_i forman un cubrimiento de aristas para el hipergrafo \mathcal{H} , pues U_1, \dots, U_l es un cubrimiento de vértices de K^* , los que representan las aristas de \mathcal{H} intersectadas por los vértices u_i . Esto demuestra la implicancia faltante.

Luego, ambas conjeturas son equivalentes. \square

En el mismo artículo, Gyárfás muestra la equivalencia de las siguientes proposiciones.

Teorema 1.7 ([9]) *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- *En todo r -coloreo de aristas de K_n existe una componente monocromática con al menos $n/(r-1)$ vértices.*
- *Si r particiones son dadas en un conjunto base de n elementos tal que cada par de elementos está cubierto por algún bloque de las particiones entonces una de las particiones tiene un bloque de tamaño al menos $n/(r-1)$ vértices.*
- *Si un (multi) hipergrafo r -partito intersectante tiene n aristas entonces tiene un vértice de grado al menos $n/(r-1)$.*

La demostración del primer ítem del teorema 1.7 hace uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Una generalización de ese resultado se presenta en el capítulo 2, por lo que se presenta a continuación la desigualdad.

Teorema 1.8 *Sean x, y vectores de un espacio prehilbertiano. Entonces*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

La conjetura de Ryser para r -coloreos de aristas de grafos completos fue demostrada, a través de su equivalencia con la versión de hipergrafos r -partitos r -uniformes intersectantes, por Duchet en [5] para los casos $r = 4$ y $r = 5$, y esto es lo mejor que se sabe hasta el momento. Los resultados para estos valores de r permitieron demostrar en [12] el siguiente teorema.

Teorema 1.9 *Si \mathcal{H} es un hipergrafo r -partito r -uniforme entonces existe una constante positiva ε tal que $\tau(\mathcal{H}) \leq (r - \varepsilon)\nu(\mathcal{H})$.*

En relación a la conjetura general, recientemente Aharoni, en [1] demostró la conjetura de Ryser para el caso $r = 3$, haciendo uso de un interesante método topológico desarrollado en [2], que generaliza el teorema de Hall.

Teorema 1.10 *Si \mathcal{H} es un hipergrafo 3-partito 3-uniforme, entonces $\tau(\mathcal{H}) \leq 2\nu(\mathcal{H})$.*

En los teoremas anteriores, $\nu(\mathcal{H})$ denota la cardinalidad de un emparejamiento máximo de aristas de \mathcal{H} , donde un emparejamiento de aristas de un hipergrafo \mathcal{H} corresponde a un conjunto de aristas cuya intersección por pares es vacía.

Por último, Füredi demuestra en [8] una versión fraccionaria del teorema de Ryser.

Teorema 1.11 *Si \mathcal{H} es un hipergrafo r -partito entonces $\tau^*(\mathcal{H}) \leq (r-1)\nu(\mathcal{H})$.*

En el teorema 1.11, $\tau^*(\mathcal{H})$ corresponde al número de cubrimiento fraccionario de \mathcal{H} , que

corresponde al mínimo valor de $\sum_{v \in V(\mathcal{H})} t(v)$, entre todas las funciones $t : V(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen $t(v) \geq 0$ para todo vértice $v \in V(\mathcal{H})$ y $\sum_{v \in E} t(v) \geq 1$ para toda arista $E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})$.

Capítulo 2

Resultados generales en r -multicoloreos de aristas

Es de interés preguntar acerca del tamaño de componentes monocromáticas que se pueden asegurar en todo r -multicoloreo de aristas de K_n . El primer resultado de este capítulo extiende a r -multicoloreos de aristas el resultado de H. Liu, R. Morris, N. Prince y D. Mubayi (en [16], [18]) en r -coloreos de aristas de grafos bipartitos completos, que establece que siempre existe una componente conexa monocromática de tamaño al menos n/r , con n el número de vértices del grafo bipartito.

Definición 2.1 Una doble estrella es un árbol obtenido de unir los centros de dos estrellas disjuntas por una arista.

Una doble estrella se puede ver en la figura 2.1. Cabe destacar que una estrella es, en particular, una doble estrella, considerando un vértice por sí mismo como una estrella.

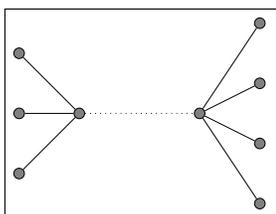


Figura 2.1: Doble estrella, formada por la unión (a través de la arista punteada) de dos estrellas (en líneas continuas).

Teorema 2.2 En un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo bipartito completo en n vértices hay una doble estrella monocromática con al menos kn/r vértices.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(K_{l,m}, \varphi)$ un r -multicoloreo de aristas k -uniforme del grafo bipartito completo $K_{l,m}$, con $l + m = n$.

Para una arista $uv \in E(K_{l,m})$ se define $c_i(uv)$ como la suma de los grados en color i de los vértices u y v , $d_i(u)$ y $d_i(v)$, respectivamente.

Sean A, B las particiones de $K_{l,m}$. Luego, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{ab \in E(K_{l,m})} \sum_{i \in \varphi(ab)} c_i(ab) &= \sum_{a \in A} \sum_{i=1}^r d_i^2(a) + \sum_{b \in B} \sum_{i=1}^r d_i^2(b) \\ &\geq |A|r \left(\frac{\sum_{a \in A} \sum_{i=1}^r d_i(a)}{|A|r} \right)^2 + |B|r \left(\frac{\sum_{b \in B} \sum_{i=1}^r d_i(b)}{|B|r} \right)^2 \\ &= |A||B|k^2 \left(\frac{|A| + |B|}{r} \right) \end{aligned}$$

Luego, existe $ab \in E(K_{l,m})$ e $i \in \varphi(ab)$ con $c_i(ab) \geq \frac{k(|A|+|B|)}{r} = \frac{k(l+m)}{r} = \frac{kn}{r}$. Esta arista une las estrellas monocromáticas en color i con centros a y b , generando la doble estrella monocromática pedida. \square

Cabe destacar que para que la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tenga con igualdad es necesario que el grado de cada color sea igual para todo vértice, de modo que si r no divide a kn o a km entonces la desigualdad es estricta y se obtiene una doble estrella monocromática con al menos $\lfloor 1 + kn/r \rfloor$ vértices.

Corolario 2.3 *En un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo hay una componente conexa monocromática con al menos $kn/(r-1)$ vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme del grafo completo K_n , y sea $A \in ccm(K_n, \varphi)$ una componente conexa monocromática de (K_n, φ) . Sin pérdida de generalidad, se dirá que $A \in ccm_r(K_n, \varphi)$.

Si la cardinalidad de A es mayor o igual a $kn/(r-1)$ entonces el resultado es cierto.

De lo contrario, se considera el grafo bipartito completo X con particiones $V(A)$ y $V(K_n) \setminus V(A)$, y aristas $E(V(A), V(K_n) \setminus V(A))$, y el r -multicoloreo de aristas $\varphi|_X$, donde $\varphi|_X$ denota la función φ restringida a las aristas de X .

Se tiene que $\varphi|_X$ tiene $r-1$ colores, es decir, $\varphi|_X$ es un $(r-1)$ -multicoloreo de aristas, pues por ser A componente conexa monocromática el color r no se encuentra en ninguna arista X .

De este modo, utilizando el Teorema 2.2 en el $(r-1)$ -multicoloreo de aristas k -uniforme $\varphi|_X$ de X , se obtiene una doble estrella monocromática con al menos $kn/(r-1)$ vértices. \square

Observación De manera análoga al caso bipartito, la desigualdad de Cauchy-Schwarz utilizada en el Teorema 2.2 dice que si $r-1$ no divide a $k\lceil kn/(r-1) \rceil$ o a $k\lfloor n(r-1-k)/(r-1) \rfloor$ entonces existe una componente monocromática en $ccm(K_n, \varphi)$ con al menos $\lfloor 1 + kn/(r-1) \rfloor$ vértices.

Esta observación será de especial utilidad en el capítulo 3, donde será utilizada para

mostrar que un determinado grafo debe tener una componente conexa monocromática con un vértice más que lo que indica la cota del corolario 2.3.

La cota del corolario 2.3 es la mejor posible, pues si k es igual a 1 y r es el sucesor de una potencia de un número primo, es posible construir [10] un r -multicoloreo 1-uniforme de un grafo completo en el que todas las componentes conexas monocromáticas tienen exactamente $n/(r-1)$ vértices. Es precisamente esta construcción la que hace de la cota de la *Conjetura de Ryser* en coloreos de aristas la mejor posible.

De particular interés es notar que, para r -multicoloreos 1-uniformes de grafos completos, el corolario 2.3 establece que una proporción de $1/(r-1)$ vértices pertenecen a una componente conexa monocromática, mientras la conjetura de Ryser establece que sería el recíproco de este número, es decir $r-1$, las componentes conexas monocromáticas necesarias para cubrir los vértices del grafo completo. Esto motiva la siguiente conjetura para r -multicoloreos k -uniformes, basándose en la misma observación de que existe una proporción de $k/(r-1)$ vértices en una componente conexa monocromática.

Conjetura 2.4 *En todo r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo (K_n, φ) (donde $r > 1$ y $k \geq 1$) se tiene $\tau(K_n, \varphi) \leq \lceil (r-1)/k \rceil$.*

En este contexto, surge de manera natural el problema de cubrir la mayor cantidad de vértices con un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de un r -multicoloreo de aristas de un grafo completo de tamaño $\lceil (r-1)/k \rceil$. El siguiente resultado dice qué tan bien es posible cubrir vértices con esa cantidad de componentes conexas monocromáticas utilizando un algoritmo glotón.

Teorema 2.5 *El algoritmo glotón que consiste en seleccionar las $\lceil (r-1)/k \rceil$ mayores (en el sentido de la cantidad de vértices) componentes conexas monocromáticas de un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo es una $(1 - 1/e)$ -aproximación al problema de cubrimiento de vértices con $\lceil (r-1)/k \rceil$ componentes conexas monocromáticas en grafos completos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme del grafo completo K_n .

Por el corolario 2.3, existe una componente conexa monocromática $A_0 \in ccm(K_n, \varphi)$ que cubre al menos $\frac{kn}{r-1}$ vértices, de modo que faltan por cubrir a lo más $\frac{n(r-1-k)}{r-1}$ vértices de K_n .

Si retiramos los vértices de A_0 y consideramos el r -multicoloreo de aristas k -uniforme restringido al grafo completo resultante y utilizando nuevamente el corolario 2.3, existe una componente conexa monocromática $A_1 \in ccm(K_n \setminus V(A_0), \varphi|_{K_n \setminus V(A_0)})$ que cubre al menos $\frac{kn(r-1-k)}{(r-1)^2}$ vértices. De este modo, faltan por cubrir a lo más $n - \frac{kn}{r-1} - \frac{kn(r-1-k)}{(r-1)^2}$ vértices de K_n , que es igual a $n(1 - \frac{k}{r-1})^2$.

Repetiendo lo anterior de manera iterativa, se obtienen componentes conexas monocromáticas $A_2, \dots, A_{\lceil (r-1)/k \rceil}$ que dejan sin cubrir a lo más $n(1 - \frac{k}{r-1})^{\lceil (r-1)/k \rceil}$ vértices de K_n , los que son menos que n/e vértices.

Luego, el algoritmo siempre cubre al menos $n(1 - 1/e)$ vértices de K_n . □

El corolario 2.3 será de fundamental utilidad para demostrar que la cota de la conjetura fuerte 2.4 se alcanza cuando $r = 5$ y $k = 2$. En particular, también se hará uso de la observación que sucede al corolario 2.3.

Por otro lado, el problema computacional subyacente en el teorema 2.5 guarda gran parecido con una clase de instancias del problema del cubrimiento máximo, el cual no tiene un algoritmo de aproximación con tasa de aproximación mejor que $(1 - 1/e)$ a menos que $\text{NP} \subseteq \text{DTIME}(n^{\mathcal{O}(\log \log n)})$, como demuestra Feige en [7]. Esta última tasa de aproximación es igual a la mostrada en el teorema 2.5, por lo que un estudio en términos de complejidad computacional de este último y su eventual relación con el problema del cubrimiento máximo constituye una línea de trabajo futuro sobre el problema tratado en esta memoria.

Capítulo 3

Cota de vértices para r -multicolores de grafos completos 3-críticos

En este capítulo se estudia el máximo número de vértices que puede tener un r -multicoloreo de aristas de un grafo completo (K_n, φ) , donde $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a 3 y el r -multicoloreo cumple la propiedad de que el complemento de cualquier vértice puede ser cubierto por dos componentes conexas monocromáticas. Para esto, se introduce la siguiente definición:

Definición 3.1 *Se dice que el r -multicoloreo de aristas φ de G es τ -crítico si*

$$\tau(G \setminus \{v\}, \varphi|_{G \setminus \{v\}}) < \tau(G, \varphi)$$

para todo $v \in V(G)$. Además, se dirá que φ es t -crítico si φ es τ -crítico y $\tau(G, \varphi) = t$.

El concepto de τ -criticidad captura la minimalidad, en el sentido de vértices, de los r -multicolores de aristas de grafos con parámetro τ fijo.

En particular, para r -multicolores de aristas 3-críticos se hará uso de una estructura que permite sintetizar información relevante, lo que lleva a definir las *funciones 3-críticas*.

Definición 3.2 *Sea (G, φ) un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo G . Se dice que $f : V(G) \rightarrow \{A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, r\}) \setminus \emptyset : |A| \leq 2\}$ es una función 3-crítica para φ si:*

- (1) *Si $f(v) = \{i\}$ entonces existen componentes conexas monocromáticas $I, I' \in ccm_i(K_n, \varphi)$ tales que $V(I) \cup V(I') = V(G) \setminus \{v\}$,*
- (2) *Si $f(v) = \{i, j\}$ entonces existen componentes conexas monocromáticas $I \in ccm_i(K_n, \varphi)$ y $J \in ccm_j(K_n, \varphi)$ tales que $V(I) \cup V(J) = V(G) \setminus \{v\}$.*

Además, se dirá que las componentes conexas monocromáticas I, I' o I, J , según corresponda, están referenciadas por f a través de v .

Cabe destacar que si un r -multicoloreo de aristas (K_n, φ) es 3-crítico, entonces ninguna componente I referenciada por f a través de un vértice v puede tener un solo vértice, pues la segunda componente referenciada por v , junto a una componente que contenga a la arista

entre v y el único vértice de I formarían un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño dos. Además, claramente hay un número finito de funciones 3-críticas para cada r -multicoloreo de aristas 3-crítico y no son necesariamente únicas. Esto pues, para el primer caso, tenemos un número finito de componentes conexas monocromáticas para cubrir los vértices de un grafo, y para el segundo caso es posible que exista más de una opción de cubrimiento para el complemento de un vértice. Es por este último motivo que, a continuación, se presenta una manera adecuada de escoger una función 3-crítica para un r -multicoloreo de aristas 3-crítico dado, con el objetivo final de poder acotar el número de vértices de este tipo de multicolores de aristas en grafos completos.

Lema 3.3 *Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n , y sea f una función 3-crítica para φ . Si f satisface*

- (1) $|f(v)| \leq |f'(v)|$ para todo $v \in V(G)$ y para toda f' función 3-crítica para φ , es decir, f minimiza, entre todas las funciones 3-críticas para φ , el número de colores para cubrir el complemento de cada vértice, y
- (2) si $|f(v)| = 2$ entonces las componentes I, J referenciadas por f a través de v son maximales en el sentido de la inclusión con respecto a otras componentes conexas monocromáticas en $ccm(K_n, \varphi)$, esto es, si $V(I) \subseteq V(K)$ o $V(J) \subseteq V(K)$ para algún $K \in ccm(K_n, \varphi)$, entonces $V(I) = V(K)$ o $V(J) = V(K)$, según corresponda,

entonces f es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Para estudiar la inyectividad de f se particionan los vértices según la cardinalidad de su imagen, que puede ser uno o dos, a través de f y se tratan ambos casos de manera separada.

Para el primero de los casos, sea $u \in V(K_n)$ con $f(u) = \{i\}$. Luego, existen componentes conexas monocromáticas $I_u, I'_u \in ccm_i(K_n, \varphi)$ tales que $V(I_u) \cup V(I'_u) = V(K_n) \setminus \{u\}$. En particular, u satisface las siguientes propiedades:

- a) No existe una arista e incidente a u con $i \in \varphi(e)$. En caso contrario, u pertenece a la misma componente conexas monocromática en color i que el otro extremo de la arista e , logrando cubrir los vértices de K_n con dos componentes conexas monocromáticas, contradiciendo la propiedad de 3-criticidad, y
- b) todo vértice v distinto de u posee una arista incidente en color i , pues $v \in V(I_u) \cup V(I'_u)$.

A modo de contradicción, se supondrá que existe $v \in V(G)$ distinto de u tal que $f(v) = f(u) = \{i\}$. Entonces v satisface las mismas propiedades anteriores, lo que es una contradicción, pues por a) aplicado a v , v no tiene aristas incidentes en color i ; y por b) aplicado a u , v posee al menos una arista incidente en color i . Luego, no existen dos vértices con la misma imagen si tales imágenes tienen cardinalidad uno.

Para el segundo caso, sea $u \in V(G)$ con $f(u) = \{i, j\}$, $i \neq j$. Luego, existen componentes conexas monocromáticas $I_u \in ccm_i(K_n, \varphi)$, $J_u \in ccm_j(K_n, \varphi)$ tales que $V(I_u) \cup V(J_u) = V(G) \setminus \{u\}$.

A modo de contradicción, se supondrá que existe v distinto de u tal que $f(v) = f(u) = \{i, j\}$, junto a sus respectivas componentes conexas monocromáticas referenciadas por f , $I_v \in ccm_i(K_n, \varphi)$ y $J_v \in ccm_j(K_n, \varphi)$ que cubren el complemento de v . Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $v \in I_u$, como se puede ver en la figura 3.1(a). Cabe destacar que en la figura se muestra al vértice v fuera de la intersección entre I_u y J_u , pero no es necesariamente así y no se hace uso de aquello en esta demostración.

Para entender la disposición de la componente I_v (ver figura 3.1(b)) es pertinente aclarar los siguientes puntos:

- Las componentes I_u e I_v son disjuntas. Si tales componentes tuvieran un vértice en común entonces serían la misma componente ya que son del mismo color i , pero $v \notin I_v$.
- La componente I_v contiene al vértice u , pues de lo contrario estaría contenida en la componente J_u , ya que $V(I_u) \cap V(I_v) = \emptyset$. Por la propiedad (2) de f , si $I_v \subseteq J_u$, entonces $I_v = J_u$. Pero entonces se podría cubrir el complemento de u con las componentes I_u e I_v , lo que entra en contradicción con la propiedad (1) de f , pues el complemento de u pudo haber sido cubierto con solo un color.

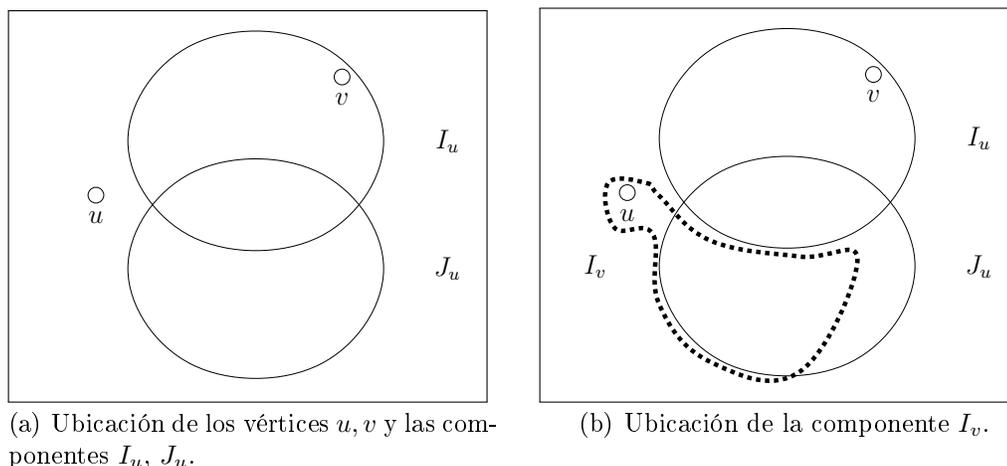


Figura 3.1: Diagramas de la ubicación de las componentes I_u, J_u e I_v para el caso de cardinalidad dos del lema 3.3

Por otro lado, la componente J_v debe cubrir todo lo que no cubre la componente I_v , salvo v , como se muestra en la figura 3.2(a).

Finalmente, hay que notar que debe existir un vértice $w \in V(J_u) \setminus (V(I_u) \cup V(I_v))$, con $w \neq v$, pues las componentes I_u e I_v no cubren todos los vértices o de lo contrario el número de cubrimiento sería dos. Además, w es distinto de v pues éste último pertenece a I_u .

Dicho lo anterior, el vértice w debe pertenecer a las componentes conexas monocromáticas J_u y J_v de modo que tales componentes son iguales (ver figura 3.2(b)).

Sin embargo, tales componentes cubren todos los vértices salvo u y v , ya que J_v cubre todo lo que no cubre I_v y J_u contiene a $I_v \setminus \{u\}$, y se podrían cubrir los vértices del grafo con la componente J_u (que es igual a J_v) y cualquier componente conexa monocromática inducida por la arista uv , contradiciendo que $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a tres.

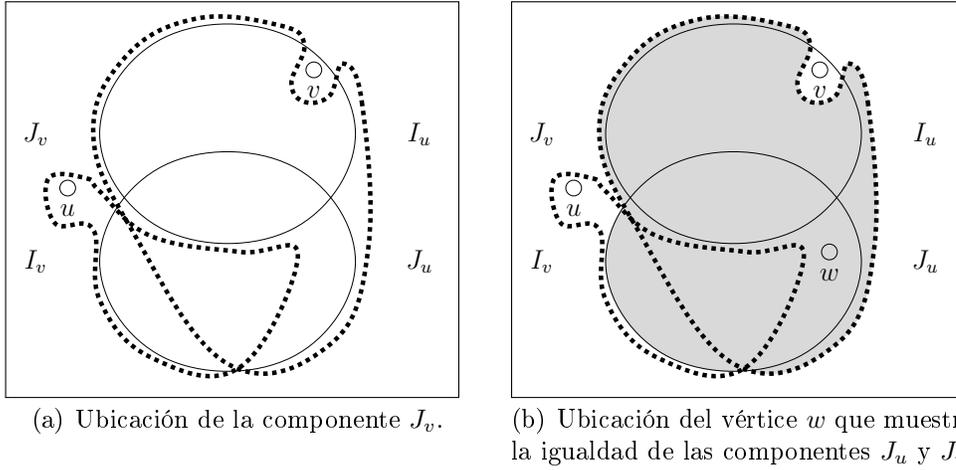


Figura 3.2: Diagramas de la ubicación de la componente J_v y el vértice w para el caso de cardinalidad dos del lema 3.3

Luego, no existen dos vértices con la misma imagen si tales imágenes tienen cardinalidad dos, y junto al resultado de cardinalidad uno, se puede concluir que f es inyectiva. \square

Lema 3.4 Si (K_n, φ) es un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n entonces existe una función f con las propiedades del lema 3.3.

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n . Entonces se puede construir una función f con las propiedades del lema 3.3 de manera glotona, como se explica en el algoritmo 1.

Algoritmo 1 Algoritmo de construcción de una función 3-crítica

Entrada: (K_n, φ) , donde φ es un r -multicoloreo 3-crítico de aristas del grafo completo K_n .

Salida: Una función 3-crítica para φ con las propiedades del lema 3.3.

- 1: Inicializar $f(u) \leftarrow \emptyset$ para todo $u \in V(K_n)$, $I' \leftarrow \emptyset$, $J' \leftarrow \emptyset$.
 - 2: **para** $u \in V(K_n)$ **hacer**
 - 3: **para** $I \in ccm_i(K_n, \varphi)$, $J \in ccm_j(K_n, \varphi)$ con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $V(I) \cup V(J) = V(K_n) \setminus \{u\}$ **hacer**
 - 4: **si** $i = j$ **entonces**
 - 5: Asignar $f(u) \leftarrow \{i\}$.
 - 6: Pasar al siguiente vértice.
 - 7: **si no**
 - 8: **para** $K \in ccm(K_n, \varphi)$ **hacer**
 - 9: Asignar a I', J' dos componentes conexas monocromáticas distintas que no sean subconjunto estricto de otras entre I', J', I, J y K .
 - 10: Asignar $f(u) = \{i, j\}$, donde $I' \in ccm_i(K_n, \varphi)$ y $J' \in ccm_j(K_n, \varphi)$.
 - 11: **fin para**
 - 12: **fin si**
 - 13: **fin para**
 - 14: Asignar $I' \leftarrow \emptyset$, $J' \leftarrow \emptyset$.
 - 15: **fin para**
-

Cabe destacar que la existencia de las componentes I', J' de la novena línea del algoritmo se deduce de que, de no existir tales componentes, entonces una de ellas contendría a las otras cuatro. Sin embargo, esto entraría en contradicción con que $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a

tres, pues tal componente contendría todos los vértices salvo u y junto a una componente conexa monocromática que contenga a u se podrían cubrir los vértices de K_n con esas dos componentes.

Además, el algoritmo retorna una función 3-crítica, pues entre las líneas 4 y 6 se asegura el cumplimiento de la propiedad (1), mientras que entre las líneas 7 y 9 se asegura la maximalidad en el sentido de la inclusión con respecto a otras componentes conexas monocromáticas, cumpliendo así la propiedad (2). \square

Teorema 3.5 *Si φ es un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n entonces $n \leq r + \binom{r}{2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función 3-crítica para φ con las propiedades del lema 3.3. Como f es inyectiva, entonces n no puede ser mayor a la cardinalidad del conjunto de llegada de f , compuesto por los subconjuntos de tamaño uno y dos de $\{1, \dots, r\}$ y cuya cardinalidad es $r + \binom{r}{2}$.

Luego, si φ es un r -multicoloreo de aristas 3-crítico de un grafo completo K_n entonces $n \leq r + \binom{r}{2}$. \square

Un resultado similar para hipergrafos, por Mansour, Song y Yuster [17], establece que si \mathcal{H} es un hipergrafo r -partito r -uniforme intersectante y $\tau(\mathcal{H}) \geq r - 1$, entonces \mathcal{H} tiene al menos $(3 - 1/\sqrt{18})r(1 - o(1))$ aristas y conjeturan que existen construcciones de hipergrafos con $\Theta(r)$ aristas y número de cubrimiento al menos $r - 1$, lo que en el contexto de r -multicolores de aristas 1-uniformes vendrían a ser vértices.

A diferencia del resultado anterior, el teorema 3.5 establece que las construcciones minimales de r -multicolores de aristas 3-críticos de grafos completos tienen $\mathcal{O}(r^2)$ vértices. Este resultado podría generalizarse para r -multicolores t -críticos con $t > 3$, con un trabajo combinatorial análogo bastante más complicado o bien con una técnica distinta.

Capítulo 4

Cotas para el número de cubrimiento τ en r -multicoloreos k -uniformes de grafos completos

La extensión de la Conjetura de Ryser expresada en la conjetura 2.4 presenta una cota superior para τ dependiente de r y k , para r -multicoloreos k -uniformes de grafos completos. El objetivo de este capítulo es estudiar más profundamente esta cota, intentando aproximarse lo más posible a la conjetura 2.4 y, en algunos casos, obteniendo un resultado ajustado, haciendo uso de herramientas que se introducen en este capítulo así como también de algunos resultados mostrados en los capítulos anteriores.

4.1. Construcciones de multicoloreos con número de cubrimiento τ no trivial

Cuando se habla de cota inferior para τ , nos referimos a la existencia de un multicoloreo de aristas de un grafo G con un determinado valor de τ . Este tipo de construcciones no solo permiten conocer mejor la estructura del multicoloreo de aristas, sino que también son útiles para saber qué tan ajustadas son las cotas superiores que serán vistas más adelante.

Claramente la cota inferior trivial para el número de cubrimiento τ en r -multicoloreos k -uniformes de grafos completos arbitrarios es, para todo r y para todo k (con $k < r$), igual a uno pues es necesaria al menos una componente conexa monocromática para cubrir un vértice.

El primer resultado de este capítulo corresponde a un lema de amplificación, en el sentido de que permite utilizar un multicoloreo de aristas uniforme dado con parámetro τ para construir otro multicoloreamiento de aristas uniforme con el mismo parámetro τ , pero amplificando por un factor entero los parámetros del número de colores totales y el número de colores por arista.

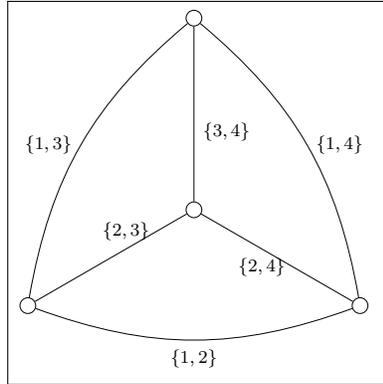
Lema 4.1 Si (G, φ) es un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo G , entonces para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un jr -multicoloreo de aristas jk -uniforme (G, φ') con $\tau(G, \varphi') = \tau(G, \varphi)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea (G, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo G , y $j \in \mathbb{N}$.

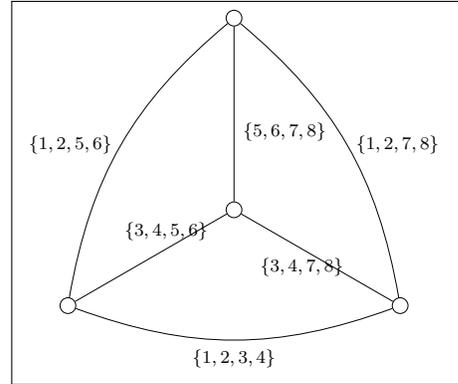
Se denotan por C_i , para $i \in \{1, \dots, r\}$, al conjunto $\{j(i-1)+1, j(i-1)+2, \dots, j(i-1)+j\}$, y se define la función φ' , para $e \in E(G)$, como $\varphi'(e) = \cup_{i \in \varphi(e)} C_i$.

Claramente (G, φ') es un jr -multicoloreo jk -uniforme de G , pues la unión de los conjuntos C_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$, es igual al conjunto $\{1, \dots, jr\}$; y cada arista tiene jk colores pues la cardinalidad de $\varphi(e)$ es igual a k para todo $e \in E(G)$ (por la k -uniformidad de φ), los conjuntos C_i son disjuntos pues particionan a $\{1, \dots, jr\}$ y cada conjunto C_i tiene cardinalidad j .

Finalmente, dado que existe una biyección entre los conjuntos $\{i\}$ y C_i , y por ser los conjuntos C_i disjuntos, es posible recuperar desde φ' la función φ , por lo que $ccm_i(G, \varphi)$ es igual a $ccm_{i'}(G, \varphi')$ para todo $i' \in C_i$, lo que permite concluir que $\tau(G, \varphi')$ es igual a $\tau(G, \varphi)$. \square



(a) 4-multicoloreo de aristas 2-uniforme con τ igual a 2.



(b) 8-multicoloreo de aristas 4-uniforme con τ igual a 2 construido a partir de la figura 4.1(a)

Figura 4.1: Ejemplo del lema 4.1

En [10] se muestra una forma de construir r -multicoloreos 1-uniformes con número de cubrimiento τ igual a $r - 1$. Para su construcción se considera un plano afín finito de orden $r - 1$.

Un plano afín finito de orden $r - 1$ consiste en un conjunto base V llamados puntos, con $|V| = (r - 1)^2$, y L una familia de subconjuntos de V llamados líneas, que satisfacen las siguientes tres propiedades: dados dos puntos distintos existe una única línea que los contiene; dada una línea $l \in L$ y un punto $p \in V$ tal que $p \notin l$, existe una única línea l' distinta de l tal que $p \in l'$ y $l \cap l' = \emptyset$; y existe un conjunto de cuatro puntos de los cuales tres no pertenecen a una misma recta. En un plano afín finito de orden $r - 1$ y bajo la relación de paralelismo de rectas, se generan r clases paralelas de rectas, como se demuestra en [4].

Dicho lo anterior, se considera el grafo completo $K_{|V|}$ junto al siguiente coloreo de aristas:

para $i = 1, 2, \dots, r$ se asigna $\varphi(uv) = i$ si los vértices u y v pertenecen a una recta de la i -ésima clase paralela. Con esto, cada componente conexa monocromática tiene tamaño $r - 1$, de modo que se necesitan al menos $r - 1$ componentes para cubrir los $(r - 1)^2$ vértices.

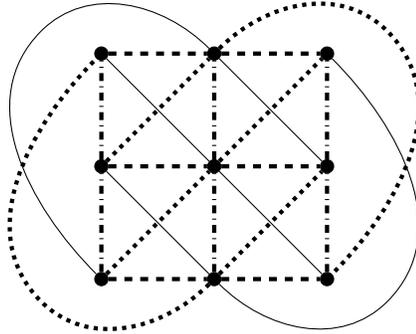


Figura 4.2: Plano afín de orden 3

En [4] se demuestra la existencia de planos afines finitos si su orden es potencia de un número primo. El siguiente teorema hace uso de las construcciones anteriores junto al lema 4.1 para obtener cotas en coloreos k -uniformes, con k mayor o igual a 2.

Teorema 4.2 *Si $r \geq ik$ e $i - 1$ es potencia de un número primo, entonces existe un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo con número de cubrimiento τ igual a $i - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un i -multicoloreo de aristas 1-uniforme con número de cubrimiento τ igual a $i - 1$, el que existe por la construcción presentada en [10]. Por el lema 4.1, se puede construir un ik -multicoloreo de aristas k -uniforme φ' con número de cubrimiento τ igual a $i - 1$.

Además, un ik -multicoloreo de aristas es, en particular, un r -multicoloreo de aristas si $r \geq ik$, por lo que bajo esta condición (K_n, φ') constituye un r -multicoloreo de aristas k -uniforme con número de cubrimiento τ igual a $i - 1$. \square

El último resultado referente a cotas inferiores para el número de cubrimiento muestra construcciones explícitas y no triviales para obtener multicoloreos de aristas de grafos completos con cubrimientos mínimos mayores o iguales a dos.

Teorema 4.3 *Si $r \geq 3$ y $k \leq r - 2$ entonces existen r -multicoloreos de aristas k -uniformes con número de cubrimiento $\tau \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Si se tiene un r -multicoloreo de aristas k -uniforme y se retira un número fijo i , con $i < k$, de colores por arista entonces se obtienen r -multicoloreos $(k - i)$ -uniformes con número de cubrimiento mayor o igual al original, pues quitar colores de las aristas solo aumenta el número de componentes conexas monocromáticas disponibles para cubrir vértices, cuyos tamaños en vértices son menores o iguales a las componentes anteriores.

Por lo anterior, basta construir, para cada r , un r -multicoloreo de aristas $(r-2)$ -uniforme con número de cubrimiento τ igual a dos.

Sea K_r un grafo completo en r vértices y sean $K_{r-1}^1, \dots, K_{r-1}^r$ los subgrafos completos de K_r en $r-1$ vértices obtenidos al retirar cada uno de los r vértices de K_r . Se define el coloreo φ , para cada $e \in E(K_r)$, del siguiente modo: $i \in \varphi(e)$ si $e \in E(K_{r-1}^i)$.

Se tiene que (K_r, φ) es un r -multicoloreo de aristas, pues hay un color por cada uno de los r subgrafos completos en $r-1$ vértices de K_r . Además es $(r-2)$ -uniforme, pues cada arista en $E(K_r)$ pertenece al conjunto de aristas de $r-2$ de los r subgrafos completos en $r-1$ vértices de K_r .

Finalmente, si enumeramos los vértices de K_r de modo que el subgrafo K_{r-1}^i se obtiene al retirar el i -ésimo vértice, se tiene que el vértice i no tiene aristas incidentes con color i , de modo que no existe una componente conexa monocromática en $ccm_i(K_r, \varphi)$ que cubra todos los vértices. Como esto ocurre para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces se tiene que $\tau(K_r, \varphi) \geq 2$. Por otro lado, como el vértice i no tiene aristas incidentes con color i , entonces $\{i\} \in ccm_i(K_r, \varphi)$, de modo que se pueden cubrir los vértices de K_r con las componentes conexas monocromáticas K_{r-1}^i e $\{i\}$.

Luego, $\tau(K_r, \varphi)$ es igual a dos. □

Una de estas construcciones, en particular un 4-multicoloreo de aristas 2-uniforme con número de cubrimiento τ igual a dos, se puede ver en la figura 4.1(a).

4.2. Cotas superiores para el número de cubrimiento τ

En esta sección se estudiarán cotas superiores generales para el número de cubrimiento τ , en el sentido de que son válidas independientemente del multicoloreo de aristas utilizado mientras se satisfagan las condiciones que se expliciten. Estas cotas superiores permitirán, junto a los resultados de la sección anterior, concluir que en algunos casos la cota encontrada es la mejor posible, coincidiendo todos estos casos con la conjetura 2.4 para r -multicoloreos de aristas k -uniformes.

Teorema 4.4 *Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo K_n . Si $r \leq 2k+1$, con $k \geq 2$, entonces $\tau(K_n, \varphi) \leq r-k$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo K_n y, sin pérdida de generalidad, sea $U \in ccm_r(K_n, \varphi)$ una componente conexa monocromática en color r tal que $V(U) \neq V(K_n)$, pues de lo contrario U cubre todos los vértices y $\tau(K_n, \varphi)$ sería igual a uno, cumpliendo así el resultado.

Sea X el grafo bipartito completo con biparticiones $V(U), V(K_n) \setminus V(U)$ y consideremos, abusando de la notación, (X, φ) el $(r-2)$ -multicoloreo de aristas k -uniforme de X dado por la restricción de φ a X . Además, sea $e = uv \in E(X)$ una arista arbitraria de X , de la cual

se asume, sin pérdida de generalidad, que $\{1, \dots, r - k - 1\} \subseteq \varphi(e)$. Cabe destacar que es posible asumir lo anterior pues la restricción $r \leq 2k + 1$ es equivalente a $k \geq r - k - 1$, por lo que hay suficientes colores por arista.

Sean $U_1 \in ccm_1(K_n, \varphi), \dots, U_{r-k-1} \in ccm_{r-k-1}(K_n, \varphi)$ las componentes conexas monocromáticas inducidas por la arista e en los colores $\{1, \dots, r - k - 1\}$ que suponemos pertenecen a $\varphi(e)$.

Si la unión de los vértices de las componentes conexas monocromáticas U_1, \dots, U_{r-k-1} cubren todos los vértices entonces se tiene el resultado. De lo contrario, se verá que basta solo una componente conexa monocromática adicional para cubrir todos los vértices.

Se supondrá que $C = \bigcup_{i=1}^{r-k-1} V(U_i)$ es distinto de $V(K_n)$. Luego, para todo vértice $u' \in V(U)$ tal que $u' \notin C$, se tiene que $\{1, \dots, r - k - 1, r\} \cap \varphi(u'v) = \emptyset$ pues

1. si para algún $i \in \{1, \dots, r - k - 1\}$ se tiene que $i \in \varphi(u'v)$ entonces u' pertenecería a la componente conexa monocromática U_i , pero $u' \notin C$, conjunto que contiene a $V(U_i)$, y
2. si $r \in \varphi(u'v)$ entonces el vértice v pertenecería a la componente conexa monocromática U , pero $v \in V(K_n) \setminus V(U)$.

Además, la cardinalidad de $\varphi(u'v)$ es k y el número de colores que no están presentes es justamente $r - k$, de modo que $\varphi(u'v) = \{r - k, \dots, r - 1\}$.

De manera análoga se concluye que, para $v' \in V(K_n) \setminus V(U)$ tal que $v' \notin C$, se tiene $\varphi(uv') = \{r - k, \dots, r - 1\}$ (ver figura 4.3(a)).

Por la arbitrariedad de u' y v' , se tiene que existen estrellas monocromáticas en colores i para todo $i \in \varphi(u'v) = \varphi(uv')$, con centros u y v , y puntas $V(U) \setminus C$ y $V(K_n) \setminus (V(U) \cup C)$ respectivamente, de modo que las componentes conexas monocromáticas que las contienen, digamos A_1 y A_2 , junto a las componentes U_1, \dots, U_{r-k-1} forman un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k + 1$ (ver figura 4.3(b)).

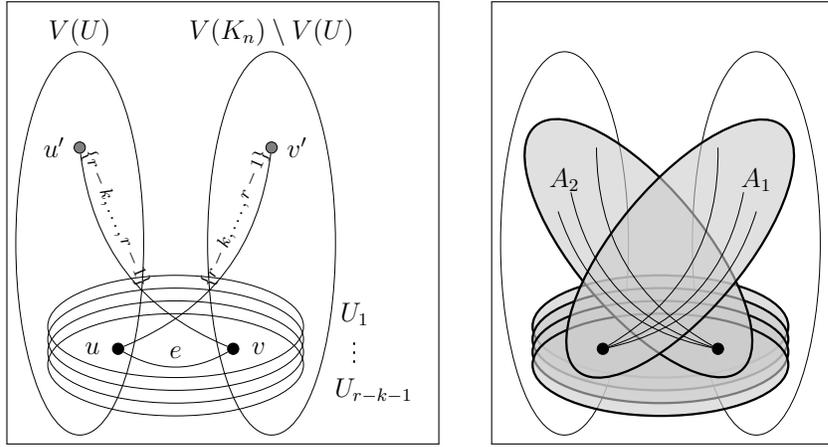
Finalmente, notando que $\varphi(uu') \subseteq \{r - k, \dots, r\}$ y que, por principio del palomar, $\varphi(uu') \cap \varphi(uv') \neq \emptyset$, entonces basta escoger un color de la intersección anterior para notar que las componentes A_1 y A_2 son en realidad la misma componente conexa monocromática, digamos U' , en el color escogido, obteniendo así, junto a las componentes U_1, \dots, U_{r-k-1} , un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k$ (ver figuras 4.5(a) y 4.5(b)).

Luego, $\tau(K_n, \varphi) \leq r - k$. □

El teorema 4.4 lleva a proponer una conjetura más débil que la conjetura 2.4.

Conjetura 4.5 *En todo r -multicoloreo de aristas k -uniforme de un grafo completo (K_n, φ) se tiene $\tau(K_n, \varphi) \leq r - k$.*

Esta conjetura también generaliza a la conjetura de Ryser para r -multicoloreos de aristas 1-uniformes de grafos completos, pues se obtiene en ambas conjeturas la cota $r - 1$. Además,



(a) Diagrama de X , junto a las aristas $e, u'v, uv'$ y los colores de las dos últimas.

(b) Diagrama de X , junto a las componentes A_1 y A_2 que contienen estrellas monocromáticas.

Figura 4.3: Obtención de un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k + 1$.

el teorema 4.4 permite concluir que, cuando $k = r - 1$ y $k = r - 2$, las cotas de la conjetura débil 4.5 se alcanzan y concuerdan con la conjetura 2.4. El primero de ellos hace uso de una simple observación, que es que el número de cubrimiento τ es siempre mayor o igual a uno, mientras que para el segundo de los casos se hará uso del teorema 4.3, que explicita construcciones con número de cubrimiento τ igual a dos.

Corolario 4.6 *Si $k = r - 1$ y $r \geq 3$ entonces la cota de la conjetura 4.5 se alcanza.*

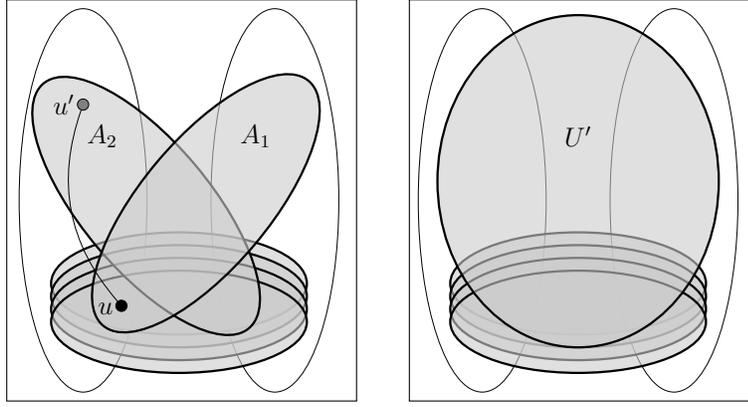
DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un r -multicoloreo de aristas $(r-1)$ -uniforme de un grafo completo K_n , con $r \geq 3$. Se tiene que $r \leq 2(r-1) + 1$ y $r-1 \geq 2$, pues $r \geq 3$, por lo que se satisfacen las hipótesis del teorema 4.4 y se tiene que $\tau(K_n, \varphi) \leq r - (r-1)$, es decir, su número de cubrimiento es menor o igual a uno. Como el menor valor para un número de cubrimiento es uno, se concluye que $\tau(K_n, \varphi)$ es exactamente igual a uno y así se tiene que en este caso la cota de la conjetura 4.5 (y de la conjetura 2.4) se alcanza. \square

Corolario 4.7 *Si $k = r - 2$ y $r \geq 4$ entonces la cota de la conjetura 4.5 se alcanza.*

DEMOSTRACIÓN. Para este caso se satisfacen las hipótesis del teorema 4.4 pues $r \leq 2(r-2) + 1$ y $r \leq (r-2) + 2$ pues $r \geq 4$. Luego, para todo r -multicoloreo de aristas $(r-2)$ -uniforme φ de un grafo completo K_n se tiene que $\tau(K_n, \varphi) \leq r - (r-2)$, es decir, su número de cubrimiento es menor o igual a dos.

Por otro lado, el teorema 4.3 nos dice que existen r -multicoloreos de aristas $(r-2)$ -uniformes de grafos completos con número de cubrimiento τ igual a dos, por lo que la cota de la conjetura 4.5 (y de la conjetura 2.4) se alcanza. \square

Observación Una propiedad fundamental de los multicoloreos de aristas de grafos completos



(a) Arista uu' que muestra la igualdad de las componentes A_1 y A_2 .

(b) Componente U' , que junto a las componentes U_1, \dots, U_{r-k-1} cubren todos los vértices.

Figura 4.4: Obtención de un cubrimiento por componentes conexas monocromáticas de tamaño $r - k$.

en el teorema 4.4, cuyas hipótesis la aseguran, es que exista una arista que se encuentre en $r - k - 1$ componentes conexas monocromáticas de manera simultánea. En virtud de lo anterior, si se pudiera asegurar la existencia de una arista con la propiedad anterior en un multicolorado de aristas, entonces el resultado del teorema 4.4 vale.

El teorema 4.4 tiene como hipótesis que los r -multicolores de aristas k -uniformes de grafos completos cumplan $r \leq 2k + 1$ y $k \geq 2$. En particular, cuando $k = 2$, el caso $r = 6$ no queda cubierto por el teorema. El siguiente resultado muestra que, incluso en este caso, es posible acotar el número de cubrimiento τ del mismo modo.

Teorema 4.8 Si (K_n, φ) es un 6-multicolorado de aristas 2-uniforme de un grafo completo K_n entonces $\tau(K_n, \varphi) \leq 4$.

DEMOSTRACIÓN. Sea (K_n, φ) un 6-multicolorado de aristas 2-uniforme de un grafo completo K_n y, sin pérdida de generalidad, sea $U \in ccm_6(K_n, \varphi)$ una componente conexa monocromática en color 6.

Si $V(U) = V(K_n)$ entonces $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a uno, de modo que se asumirá que $V(U) \neq V(K_n)$.

Sea X el grafo bipartito completo con particiones $V(U)$ y $V(K_n) \setminus V(U)$ y φ' el r -multicolorado de aristas k -uniforme de X dado por la restricción de φ a X . Además, sea $e = uv \in E(X)$ una arista arbitraria y asumamos sin pérdida de generalidad que $\varphi'(e) = \{1, 2\}$. Sean $U_1 \in ccm_1(K_n, \varphi)$ y $U_2 \in ccm_2(K_n, \varphi)$ las componentes conexas monocromáticas en colores 1, 2, respectivamente, inducidas por la arista e .

Se consideran los conjuntos de vértices A_3, A_4, A_5 de $V(U) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2))$ donde $A_i = \{u' \in V(U) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2)) : i \notin \varphi(u'v)\}$, para $i \in \{3, 4, 5\}$.

Primero, notemos que $\{A_3, A_4, A_5\}$ es una partición de $V(U) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2))$, pues

1. si $u' \notin A_i, \forall i \in \{3, 4, 5\}$, entonces $\varphi(u'v) = \emptyset$ pues la arista $u'v$ no contiene los colores 1 y 2 por estar u' fuera de las componentes U_1, U_2 , ni los colores 3, 4, 5 por no pertenecer a A_3, A_4 o A_5 , ni tampoco 6 pues v no pertenece a la componente U en color 6 de modo que las aristas que salen de los vértices de U no tienen el color 6, lo que contradice el hecho de que (K_n, φ) es 2-regular, ya que la arista $u'v$ no podría tener ningún color, y
2. si $u' \in A_i \cap A_j$ para algun par $i, j \in \{3, 4, 5\}$ (con $i \neq j$), entonces $\varphi(u'v)$ no contiene los colores 1, 2 por estar u' fuera de las componentes U_1, U_2 , no contiene al color 6 ya que $u' \in U$ y $v \notin U$, y no contiene los colores i y j por estar en $A_i \cap A_j$. Luego, $|\varphi(u'v)| \leq 6 - 2 - 1 - 2 < 2$, lo que contradice la 2-uniformidad de φ .

Segundo, notemos que si existe un color en $\varphi(u'u) \cap \varphi(u'v)$, entonces la arista u, v pertenece a tres componentes conexas monocromáticas, correspondientes a las dos que inducen la arista uv más la componente del color de la intersección anterior, por lo que la observación que sucede al teorema 4.4 nos permite asegurar la cota del enunciado.

Si lo anterior no pasa, entonces los triángulos u, v, u' , con $u' \in A_i$, son heterocromáticos, es decir, no hay dos aristas con algún color en común. En tal caso, $\varphi(uu') = \{i, 6\}$, de modo que $V(U) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2))$ está cubierto, junto al vértice u , por una estrella monocromática en color 6. De manera análoga, $(V(K_n) \setminus V(U)) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2))$ también está cubierta, junto al vértice v , por una estrella monocromática en color 6, obteniendo así, con las componentes conexas monocromáticas que contienen las estrellas mencionadas, un cubrimiento por componentes monocromáticas de tamaño 4 (ver figuras 4.5(a) y 4.5(b)).

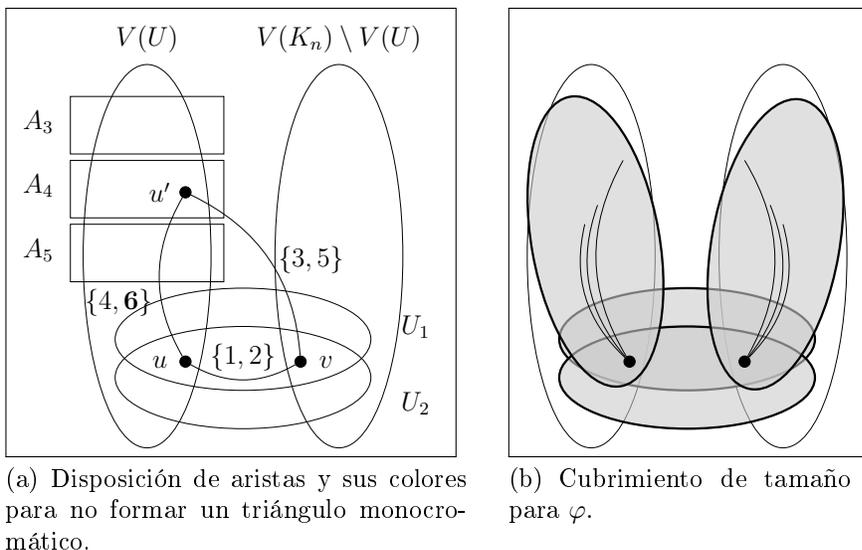


Figura 4.5: Obtención de cubrimiento por componentes monocromáticas de tamaño 4 para 6-multicoloreo de aristas 2-uniforme.

Luego, $\tau(K_n, \varphi) \leq 4$. □

Un caso de particular interés para la conjetura 2.4 es cuando $r = 5$ y $k = 2$, es decir, 5-multicolores de aristas 2-uniformes de grafos completos, pues es el caso con parámetros r y

k más pequeños tales que hay una diferencia entre la conjetura y el teorema 4.4. La conjetura dice que el número de cubrimiento τ para estos casos es menor o igual a dos, mientras que el teorema 4.4 sitúa la cota superior en tres.

El siguiente resultado muestra que la conjetura es correcta para este caso.

Teorema 4.9 *Si $r = 5$ y $k = 2$ entonces la cota de la conjetura 2.4 se alcanza.*

DEMOSTRACIÓN. Razonando por contradicción, y por el teorema 4.4, se supondrá que existe un 5-multicoloreo de aristas 2-uniforme (K_n, φ) con $\tau(K_n, \varphi)$ igual a tres. Sin pérdida de generalidad, se puede escoger el multicoloreo de aristas minimal en el número de vértices, por lo que se asume que φ es 3-crítico.

Una observación importante para este tipo de multicoloreos es que todo trío de vértices $u, v, w \in V(K_n)$ pertenece a alguna componente conexa monocromática de $ccm(K_n, \varphi)$, lo que será llamado, por simplicidad, *propiedad de triángulos*, pues en las tres aristas que forman el triángulo entre los vértices u, v y w hay 6 etiquetas de colores, mientras que el parámetro r es 5, por lo que deben haber dos aristas con algunos de sus colores en común, conectando así los tres vértices en tal color.

Por un lado, el corolario 2.3 establece que siempre debe haber una componente conexa monocromática $U \in ccm(K_n, \varphi)$ con al menos $n/2$ vértices. Esto, junto a la propiedad de triángulos, permite notar que si $n - \lceil n/2 \rceil \leq 3$ entonces $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a dos, pues existe una componente U que cubre al menos $\lceil n/2 \rceil$ y los restantes, que son a lo más tres, están cubiertos por otra componente gracias a la propiedad de triángulos.

Luego, $n \geq 8$, pues φ es 3-crítico.

Por otro lado, el teorema 3.5 establece que $n \leq 15$, dando espacio a que existan vértices cuyo complemento puede ser cubierto por dos componentes conexas monocromáticas en el mismo color (a lo más 5) y vértices cuyo complemento puede ser cubierto por dos componentes conexas monocromáticas en distinto color (a lo más 10). Se verá que el caso de componentes conexas monocromáticas en el mismo color no es posible para este tipo de multicoloreo de aristas, permitiendo acotar superiormente a n por 10. Para ver esto se supondrá la existencia de un vértice en K_n tal que existe un color que no está presente en sus aristas incidentes, pues los vértices cuyos complementos pueden ser cubiertos por dos componentes cumplen esta propiedad.

En efecto, se supondrá sin pérdida de generalidad que existe $u \in V(K_n)$ tal que u no tiene aristas incidentes con color 5 y que no sean triviales (singletons). Luego, se seleccionan tres componentes conexas monocromáticas U_1, U_2, U_3 , eventualmente triviales, que contengan a u , las que asumiremos pertenecen a $ccm_1(K_n, \varphi)$, $ccm_2(K_n, \varphi)$ y $ccm_3(K_n, \varphi)$, respectivamente.

Sea $v \in V(K_n) \setminus (V(U_1) \cup V(U_2) \cup V(U_3))$. Se tiene que $\varphi(uv) = \{4\}$, pues v no está cubierto por las componentes U_1, U_2, U_3 , lo que implica que los colores 1, 2 y 3 no pertenecen a $\varphi(uv)$; y u no tiene aristas incidentes en color 5. Sin embargo esto contradice que φ es 2-uniforme.

Luego, no existen vértices cuyo complemento pueda ser cubierto por dos componentes conexas monocromáticas en el mismo color, lo que permite acotar superiormente a n por 10, por lo que K_n debe tener 8, 9 o 10 vértices. Además, una observación útil es que todos los vértices de K_n tienen al menos una arista incidente en cada color.

Para los casos $n = 8, 9, 10$, el corolario 2.3 establece que existen componentes conexas monocromáticas que cubren al menos 4, 5 y 6 vértices, respectivamente, dejando fuera, en cada uno de estos casos, cuatro vértices. Los casos $n = 8$ y $n = 9$ son aplicación directa del corolario, mientras que el caso $n = 10$ hace uso de la observación que sucede al corolario y que indica que la desigualdad es estricta, pues 4 no divide a 10.

Estos cuatro vértices no pueden ser cubiertos por solo una componente conexa monocromática, pues entraría en contradicción con la 3-criticidad de φ . Esto implica que, entre estos cuatro vértices, el color 5 debe estar en aristas paralelas. Para los cuatro colores restantes, dos de ellos deben aparecer en tres aristas y los otros dos colores en dos aristas. Luego, la estructura de estos cuatro vértices junto a las aristas entre ellos es exactamente igual a la figura 4.6(a), asumiendo que la componente del corolario 2.3 es en color 5 y salvo renombramiento de los colores 1, 2, 3, 4, de los vértices y la elección de los colores que aparecen tres o dos veces, pues el resto de las configuraciones es cubrible por solo una componente. De ahora en adelante, se supondrá que éste es el 5-multicolorado de aristas 2-uniforme restringido a estos cuatro vértices.

Si se consideran los vértices 3, 4 y u en la componente U (que asumiremos en color 5) que asegura el corolario 2.3, entonces por la propiedad de triángulos éstos se encuentran cubiertos simultáneamente por alguna componente conexa monocromática.

Esta componente solo puede ser en color 1 o 2, pues

1. si es en color 3 entonces los vértices 1, 2, 3 y 4 serían cubribles por el camino monocromático $3u421$, contradiciendo que los vértices fuera de U no son cubribles por solo una componente conexa monocromática.
2. de manera análoga, si es en color 4, entonces los vértices 1, 2, 3 y 4 serían cubribles por el árbol monocromático de aristas $u4, u3, 13$ y 23 , contradiciendo que los vértices fuera de U no son cubribles por solo una componente conexa monocromática.
3. no puede ser en color 5, pues entre los vértices de U y el resto no hay aristas en color 5.

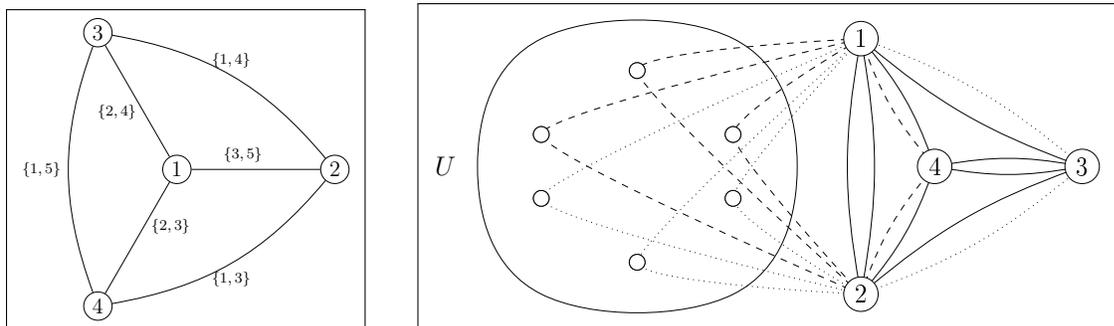
Además, las componentes en color 1 comparten a los vértices 3 y 4, de modo que en realidad es una sola componente $U_1 \in ccm_1(K_n, \varphi)$. Del mismo modo, todas las componentes en color 2 son en realidad una sola componente $U_2 \in ccm_2(K_n, \varphi)$.

Finalmente, en U es posible cubrir todos los vértices con U_1 o U_2 , los que además cubren a los vértices 3 y 4. Sin embargo, el vértice 1 pertenece a la componente U_2 a través de las aristas 13 y 14, y el vértice 2 pertenece a la componente U_1 a través de las aristas 23 y 24, por lo que $\tau(K_n, \varphi)$ es igual a dos, lo que contradice la 3-criticidad de φ .

Luego, no existen 5-multicolorados de aristas 2-uniformes 3-críticos de grafos completos, de modo que $\tau(K_n, \varphi) \leq 2$. Además, por el teorema 4.3 existen 5-multicolorados de aristas

2-uniformes de grafos completos que alcanzan la cota, lo que permite concluir el teorema. □

En la figura 4.6(b) se puede ver un diagrama para el caso $n = 10$, donde los vértices cubiertos por la componente U_1 aparecen en línea punteada mientras los cubiertos por la componente U_2 aparecen en línea rayada. Por comodidad, las dos aristas mostradas entre cada par de los vértices fuera de U representan cada uno de los dos colores en la arista.



(a) Distribución de colores en los cuatro vértices no cubiertos por la componente que asegura el corolario 2.3.

(b) Cubrimiento de tamaño 2 para φ en el caso $n = 10$.

Figura 4.6: Obtención de cubrimiento por componentes monocromáticas de tamaño 2 para φ , que contradice su 3-criticidad.

Los resultados de este capítulo recogen observaciones hechas con anterioridad, como las construcciones de r -multicolores de aristas 1-uniformes con un número de cubrimiento alto y hacen uso de los resultados expuestos en los capítulos anteriores para establecer cotas para el número de cubrimiento en r -multicolores de aristas k -uniformes que en algunos casos son inmejorables. A modo de resumen, la tabla 4.1 contiene las cotas superiores que se alcanzan para el número de cubrimiento de un r -multicolor de aristas (K_n, φ) y distintos valores de r y k . En particular, la columna correspondiente a $k = 1$ es producto de trabajos anteriores, mientras que el resto de los valores son fruto del trabajo de esta memoria, correspondientes a las diagonales $k = r - 1, k = r - 2$ y el caso $r = 5, k = 2$.

$r \backslash k$	1	2	3	4
2	1*			
3	2*	1*		
4	3*	2*	1*	
5	4*	2**	2*	⋯
6	?	?	?	⋯

Tabla 4.1: Cotas superiores exactas para $\tau(K_n, \varphi)$. Los valores con un asterisco indican que las cotas de las conjeturas 4.5 y 2.4 se alcanzan, mientras que el valor con dos asteriscos indica que solo la conjetura 2.4 se alcanza.

De particular interés son los casos $k = r - 3$ pues la conjetura débil 4.5 acota superiormente el número de cubrimiento por tres, mientras que el teorema 4.3 entrega construcciones con número de cubrimiento igual a dos. El caso $r = 5$ y $k = 2$ es uno de estos y es posible, con un análisis más profundo, resolver más de este tipo de casos con el procedimiento mostrado en el teorema 4.9.

Conclusión

La presente memoria se ha enfocado en el estudio de las componentes conexas monocromáticas para r -multicolores de aristas, motivado por la conjetura de Ryser para hipergrafos así como sus restricciones y equivalencias con r -colores de aristas. En particular, esta conjetura no tuvo mayor desarrollo entre su planteamiento en los años setenta y los años noventa, donde empezaron a aparecer pequeños avances estudiando las estructuras que alcanzan las cotas propuestas por la conjetura. El avance más importante es probablemente el de Aharoni, quien en [1] demuestra que la conjetura es cierta cuando $r = 3$.

Este trabajo trata un tema no estudiado previamente, que es precisamente el de r -multicolores de aristas, generalizando resultados anteriores para r -colores de aristas y planteando conjeturas más generales que las existentes y consistentes con ellas, desde el momento que los r -multicolores de arista 1-uniformes pueden ser vistos como r -colores de aristas.

En particular, en el capítulo 2 generalizó un teorema acerca del tamaño de componentes conexas monocromáticas que pueden asegurarse en cualquier r -multicolor de aristas k -uniforme, así como también se presentó un algoritmo glotón que constituye una $(1 - 1/e)$ -aproximación al problema del mejor cubrimiento de vértices con $\lceil (r - 1)/k \rceil$ componentes conexas monocromáticas. El primero de estos resultados no es mejorable en el caso $k = 1$, como lo muestran las construcciones que se explicitan en el capítulo 4, y un análisis con respecto a la forma de la cota invita a establecer la primera conjetura (y más fuerte) de esta memoria. Para el segundo de estos resultados, la literatura existente hace pensar que no existe un algoritmo mejor en condiciones estándar, como se muestra en [7].

En el capítulo 3 se encontró una cota superior para los vértices de un grafo completo multicolorado con r colores, sin necesidad de la hipótesis de k -uniformidad, estableciéndola en $\mathcal{O}(r^2)$. Un trabajo anterior [17] muestra que se necesitan al menos $\Omega(r)$ vértices en r -multicolores de aristas 1-uniformes con $\tau \geq r - 1$ y conjetura que existen construcciones con $\tau \geq r - 1$ y $\Theta(r)$ vértices.

Finalmente, en el capítulo 4 se hace uso de las herramientas elaboradas en los capítulos anteriores, así como también en el mismo capítulo, para mostrar construcciones con un número de cubrimiento alto, así como también cotas superiores para el número de cubrimiento dependiendo de los parámetros r y k .

Además, se presenta una conjetura basada en una cota general que es más débil que la presentada en el capítulo 2, pero que sigue siendo consistente con la conjetura de Ryser para el caso de r -colores de aristas. Para distintos parámetros r y k se demuestra que la

conjetura fuerte se alcanza, mientras que otros casos que escapan a las restricciones de una cota concordante con la conjetura débil se demuestra que ésta también se cumple.

Trabajo futuro

Los resultados de esta memoria están lejos de cerrar preguntas de manera categórica y, más aún, genera preguntas de gran interés que por tiempo, dificultad o por alejarse de los temas principales no se estudiaron.

Ejemplo de esto constituye el algoritmo glotón para cubrir vértices con $\lceil (r-1)/k \rceil$ componentes conexas monocromáticas del capítulo 2 y los indicios de que no es posible encontrar un mejor algoritmo de aproximación. Probablemente argumentos similares a los mostrados en [7] permitan concluir que efectivamente no se puede hacer nada mejor a menos que $NP \subseteq TIME(n^{\mathcal{O}(\log \log n)})$, sin embargo se decidió enfocar el trabajo a preguntas más cercanas a la conjetura de Ryser.

En el capítulo 3 se estudian los r -multicolores 3-críticos, dejando abierto el estudio de los r -multicolores t -críticos para $t > 3$. Tal vez sea posible, utilizando argumentos similares a los presentados en el correspondiente capítulo, encontrar cotas para otros valores de t . Este resultado nació del intento de probar que $\tau \leq 2$ para 5-multicolores 2-uniformes y resultó poseer un gran interés propio, más allá de permitir la resolución del caso mencionado. Por este motivo profundizar en este tema permitiría comprender mejor la estructura de los r -multicolores τ -críticos.

El capítulo 4 deja muchas preguntas abiertas. En particular, se propone una conjetura débil que se verifica para una infinidad de casos. Tal vez sea posible encontrar una técnica que permita probar esta conjetura para todos los casos, lo que podría ayudar no solo a probar casos determinados de la conjetura fuerte propuesta, sino también en la resolución de más casos de la conjetura de Ryser original. Mirando el teorema 3.5 simultáneamente con el teorema 4.4, resultan de especial interés los casos con $k = r - 3$, pues el máximo número de cubrimiento para estos casos es tres y existen construcciones, gracias al teorema 4.3, con número de cubrimiento dos. En particular el caso $r = 5$ y $k = 2$ es uno de éstos, y con técnicas similares podría ser posible demostrar más casos, siendo el caso $r = 6$ y $k = 3$ el candidato natural para ser estudiado inmediatamente después.

Otras líneas de estudio que se abren es hacer un estudio análogo al presentado en esta memoria, pero buscando cubrimientos por otras estructuras monocromáticas, como caminos, ciclos, etcétera. También es posible estudiar, en vez de cubrimientos, particiones por estas estructuras, tema que ha sido tratado anteriormente en [6] y [19], por nombrar algunos.

Finalmente, y a modo de conclusión, el trabajo realizado abre una nueva dimensión a la conjetura de Ryser para hipergrafos intersectantes y se solucionan muchos casos de la extensión. Estos resultados podrían ser de utilidad para la comprensión y resolución de la conjetura original, así como también de las conjeturas derivadas de la extensión presentada, lo que hace interesante a este trabajo, principalmente desde el punto de vista combinatorial.

Bibliografía

- [1] Ron Aharoni. Ryser’s conjecture for tripartite 3-graphs. *Combinatorica*, 21(1):1–4, 2001.
- [2] Ron Aharoni and Penny Haxell. Hall’s theorem for hypergraphs. *Journal of Graph Theory*, 35(2):83–88, 2000.
- [3] Douglas Altner and J Paul Brooks. Coverings and matchings in r-partite hypergraphs. *Networks*, 59(4):400–410, 2012.
- [4] Lynn Margaret Batten. *Combinatorics of finite geometries*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] Pierre Duchet. *Représentations, noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*. PhD thesis, Thèse, Paris, 1979.
- [6] Paul Erdős, András Gyárfás, and László Pyber. Vertex coverings by monochromatic cycles and trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 51(1):90–95, 1991.
- [7] Uriel Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM (JACM)*, 45(4):634–652, 1998.
- [8] Zoltán Füredi. Maximum degree and fractional matchings in uniform hypergraphs. *Combinatorica*, 1(2):155–162, 1981.
- [9] András Gyárfás. Partition coverings and blocking sets in hypergraphs. *Communications of the Computer and Automation Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 71:62, 1977.
- [10] András Gyárfás. Large monochromatic components in edge colorings of graphs: a survey. In *Ramsey Theory*, pages 77–96. Springer, 2011.
- [11] Penny Haxell. A note on a conjecture of Ryser. *Periodica Mathematica Hungarica*, 30(1):73–79, 1995.
- [12] Penny Haxell and Alex Scott. On Ryser’s conjecture. *The electronic journal of combinatorics*, 19(1):P23, 2012.
- [13] John Robert Henderson. *Permutation decompositions of $(0, 1)$ -matrices and decomposition transversals*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1971.

- [14] Richard Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. Springer, 1972.
- [15] Dénes König. Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, 34:104–119, 1916.
- [16] Henry Liu, Robert Morris, and Noah Prince. Highly connected monochromatic subgraphs of multicolored graphs. *Journal of Graph Theory*, 61(1):22–44, 2009.
- [17] Toufik Mansour, Chunwei Song, and Raphael Yuster. A comment on Ryser’s conjecture for intersecting hypergraphs. *Graphs and Combinatorics*, 25(1):101–109, 2009.
- [18] Dhruv Mubayi. Generalizing the ramsey problem through diameter. *The electronic journal of combinatorics*, 9(R41):1, 2002.
- [19] Alexey Pokrovskiy. Partitioning edge-coloured complete graphs into monochromatic cycles and paths. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 106:70–97, 2014.
- [20] Endre Szemerédi and Zsolt Tuza. Upper bound for transversals of tripartite hypergraphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, 13(4):321–323, 1982.
- [21] Peter Guthrie Tait. Remarks on the colouring of maps. In *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, volume 10, pages 501–503, 1880.