NOTA TÉCNICA:

# SOBRE LAS SOLUCIONES AL PROBLEMA DE DURACIÓN*

**Héctor Gutiérrez L.**

El problema de duración se refiere al momento óptimo de cortar los árboles que han estado creciendo por años, el que es metodológicamente parecido al de cuánto añejar el vino o en qué edad vender los conejos. Este es un clásico problema de evaluación de proyectos que pareciera haberse olvidado. En efecto, el Reporte de la Comisión Sobre la Enseñanza de la Economía en los EE.UU. (1991), de la Sociedad de Economistas Norteamericanos, señala, en su página 1.044:

> *"... Un miembro de la Comisión notó que estudiantes brillantes (de programas para graduados) que no tenían dificultad para comprender argumentos matemáticos complejos titubeaban al preguntarles sobre cuestiones estándar de microeconomía de pregrado –tal como cuándo cortar los árboles".*

En esta Nota Técnica se revisa el problema de duración y, sin intentar ser original, véase Labbé (1985), se discute sobre las soluciones clásicas y sus diferencias, más una explicación de cómo compatibilizar la intuición con resultados formales.

## 1. El PROBLEMA ESTÁNDAR DE CUÁNDO CORTAR LOS ÁRBOLES

Considere la situación del gráfico 1, que muestra los beneficios netos que se obtendrían, dependiendo de la edad de corte de los árboles.

El gráfico 1 ilustra sobre una situación característica de este tipo de problemas: los beneficios por hectárea de bosque son mayores mientras más viejos sean los árboles, y que, después de unos pocos años, éstos crecen, pero a tasa decreciente: cada vez crecen menos.

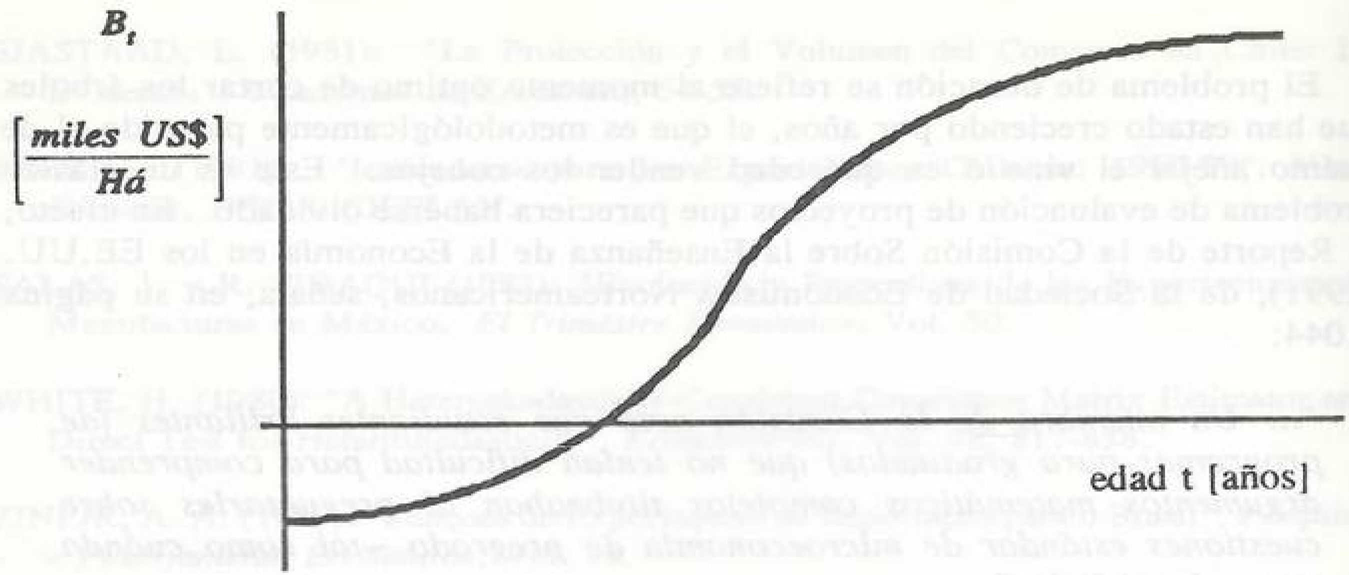
Es importante que no exista confusión al interpretar la información del gráfico anterior, pues no se trata de los flujos de caja netos (FCN) que se obtendrían, sino del único FCN a la fecha del corte de los árboles; en el gráfico se indica cuál de ellos en función del año de corta.

* *Estudios de Economía*, publicación del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Chile, vol.20, nº1, junio 1993.

** Se agradece el financiamiento de la Dirección Técnica de Investigación de la Universidad de Chile, proyecto C-3300/9212. Profesor e investigador, Departamento de Economía, Universidad de Chile.

## GRÁFICO 1

## BENEFICIOS NETOS DE CORTAR LOS ÁRBOLES DEPENDIENDO DE LA EDAD DE CORTE




En este problema existe una ventaja para postergar la corta: se obtendrían mayores beneficios. Pero eso no es necesariamente deseable, porque la postergación puede hacerlos disminuir en términos de valor presente. La intuición indica que una regla simple para determinar la edad de corta de los árboles es la siguiente:

*El momento óptimo de cortar es cuando el aumento de beneficios (la ventaja) sea insuficiente para compensar la pérdida de valor presente con la postergación en la corta.*

Posteriormente se concluirá que esa intuición es perfectamente correcta; sin embargo, existe alguna confusión al respecto, así que se propone ir un poco más lento.

Primero, reconozcamos los FCN de plantar árboles en el año 0 y cortarlos n años más tarde. Esto se esquematiza en el cuadro 1.[1]

[1] Los flujos de caja intermedios al inicial de (inversión) y al final y (de beneficios, por la corta de los árboles, al momento de explotación del bosque), que se muestran en el cuadro 1, se han supuesto nulos, siguiendo la tradición para estudiar este problema de duración. Sin embargo, dichos y flujos intermedios no serían nulos si hubieran costos de operación, tal como usualmente ocurre, tanto por actividades para cuidar el bosque en crecimiento como por las de manejo de él, para hacer podas y raleos; estas últimas actividades de manejo podrían, incluso, generar ingresos netos.
No obstante lo anterior, la simplificación de ignorar flujos intermedios no afecta las conclusiones que se obtendrán y basta con considerar a $B_n$ como ingresos netos de costos de operación, teniendo la precaución de contabilizar equivalentes financieros al momento de corta, para costos que se incurran en años anteriores al de explotación del bosque.

## CUADRO 1

## FCN DE CORTAR ÁRBOLES CON N AÑOS DE EDAD

| *Año* | *FCN* |
|---|---|
| 0 | -I |
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| o | o |
| o | o |
| o | o |
| n-1 | 0 |
| n | $B_n$ |

Ahora, y siguiendo la clásica regla de oro de maximizar el Valor Actualizado Neto, VAN, de una inversión, interesa identificar un procedimiento para encontrar el $n^*$ que maximiza el VAN. Ello conduce a estudiar alternativas de cortar los árboles a los 18 años, a los 19 años y así sucesivamente. Sin embargo, esas alternativas, excluyentes entre sí, involucran distinta vida y sería incorrecto comparar directamente los VAN; es necesario adoptar un supuesto de reinversión antes de comparar.

En el proyecto de plantar árboles se puede suponer que se volverá a plantar una vez que se corten los árboles maduros, que es un supuesto de repetición de proyecto a la misma escala, esto es, el problema de comparar proyectos alternativos de distinta vida se resuelve de la manera convencional: se pueden comparar $VAN_{\to\infty}$, que notacionalmente representa el VAN de plantar y replantar árboles interminablemente. Se procedería como sigue.

$$\underset{(n)}{MAX}\ VAN_{\to\infty} = -I + \frac{B_n}{(1+i)^n} + \frac{-I}{(1+i)^n} + \frac{B_n}{(1+i)^{2n}} + \cdots =$$

$$= \left[ -I + \frac{B_n}{(1+i)^n} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(1+i)^n} + \cdots \right] =$$

$$= \left[ -I + \frac{B_n}{(1+i)^n} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(1+i)^n - 1} \right] = VAN \left[ \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right],$$

donde VAN representa el valor actualizado neto de plantar una sola generación de árboles.

El lector puede comprobar por sí mismo que no resulta sencillo encontrar una regla simple para calcular $n^*$. Ello involucra derivar la expresión $VAN_{\to\infty}$ con respecto a n, y encontrar el $n^*$ que anula esa derivada. Por eso resulta mejor resolver el problema por tanteo. Para ilustrarlo, considere el siguiente ejemplo (que se usará extensivamente en esta Nota):

$I = 14$ [miles de US$ por hectárea]
$B_n = 10 \cdot \ln(1+n)$ [miles de US$ por hectárea].

Como se deduce, $B_n$ es una función creciente con la edad n de los árboles, pero creciente a tasa decreciente (cada vez, crecen menos) y es una función estrictamente cóncava.

Aplicando las fórmulas del $VAN_{\to\infty}$ se obtiene que $n^* = 8$ años, para $i=4\%$, de acuerdo a lo mostrado en el cuadro 2.

**CUADRO 2**

**$VAN_{\to\infty}$(N) DEL PROBLEMA DE CUÁNDO CORTAR LOS ÁRBOLES**

*(en miles de US$ por hectárea, moneda del... )*

| *Edad de corte de los árboles* | *$VAN_{\to\infty}$(4%)* |
|---|---|
| 3 | -15,1 |
| 4 | -1,7 |
| 5 | 4,1 |
| 6 | 6,6 |
| 7 | 7,5 |
| 8 | 7,6 · |
| 9 | 7,3 |
| 10 | 6,8 |

## 2. LAS DISTINTAS SOLUCIONES AL PROBLEMA DE CUÁNDO CORTAR LOS ÁRBOLES

En la literatura existe alguna confusión porque históricamente se han propuesto otros dos procedimientos para identificar $n^*$. El mostrado antes, basado en $VAN_{\to\infty}$, se conoce como la *solución de Faustmann*.

Un procedimiento alternativo es buscar el $n^{**}$ que maximiza el VAN sin repetir el proyecto y encontrar la *solución de Fisher*. El otro es encontrar $n^{+}$ que maximiza la tasa interna de retorno y encontrar la *solución de Boulding*. Véase, cuadro 3.[2]

## CUADRO 3

### SOLUCIONES AL PROBLEMA DE CUÁNDO CORTAR LOS ÁRBOLES

*(en miles de US$ por hectárea, moneda del... )*

| *Edad de corte de los árboles* | *VAN(4%)* | *$VAN_{\infty}$ (4%)* | *TIR (%)* |
|---|---|---|---|
| 3 | -1,68 | -15,10 | negativo |
| 4 | -0,24 | -1,67 | 3,55 |
| 5 | 0,73 | 4,08 | 5,06 |
| 6 | 1,38 | 6,58 | 5,64 |
| 7 | 1,80 | 7,51 | 5,81 + |
| 8 | 2,05 | 7,63 * | 5,80 |
| 9 | 2,18 | 7,32 | 5,68 |
| 10 | 2,20 ** | 6,78 | 5,53 |
| 11 | 2,14 | 6,11 | 5,35 |

$n^{**}$(de Fisher) = 10 años
$n^{*}$(de Faustmann) = 8 años
$n^{+}$(de Boulding) = 7 años

Del cuadro 3 se deben extraer conclusiones del porqué los momentos óptimos de cortar los árboles difieren. El $n^{**}$ de Fisher considera el n que maximiza el VAN sin repetir: Sugiere que lo mejor que se puede hacer después del "con proyecto" (plantar árboles y cortarlos) es *nada*, que viene a ser un "sin proyecto". Luego, si ello fuera cierto, convendrá no cortar los árboles a los 8 años, porque, para esa edad de los árboles, la tasa a la cual crecen los beneficios es superior al costo de oportunidad de cortarlos. Esto se prueba fácilmente al comprobar que esperar un año tiene los siguientes efectos:

- Se gana $B_9 = 10 \cdot \ln(9+1) =$ US$ 23.026/Há, en el año 9, y
- Se deja de ganar $B_8 = 10 \cdot \ln(8+1) =$ US$ 21.972/Há, que permitirían acumular $B_8 \cdot (1+i) = 21.972 \cdot 1{,}04 =$ US$ 22.851 /Há al año 9;

y, claramente, convendría postergar el corte de los árboles un año.

[2] La solución de Faustmann data de 1849 y fue redescubierta en 1957 por Gaffney; la de Fisher aparece propuesta en 1907, pero probablemente es más antigua; la de Boulding aparece citada en 1966. Ver citas bibliográficas de Hirshleifer (1970), sección 3.D; nota 32 en p. 80, nota 39 en p. 85 y nota 45 en p. 89.

Es interesante comprobar que $n^{**} = 10$ años. No conviene postergar la corta del año 10 al año 11, porque:

- Se ganaría sólo $B_{11} = 10 \cdot \ln(11+1) =$ US$ 24.849/Há en el año 11, y
- Se dejaría de ganar $B_{10} = 10 \cdot \ln(10+1) =$ US$23.979/Há en el año 10, que permitirían acumular $B_{10} \cdot (1+i) =$ US$24.938/Há al año 11.

Por otra parte, tampoco convendrá adelantar la corta al año 9, porque:

- Se ganaría sólo $B_9 = 10 \cdot \ln(9+1) =$ US$23.026/Há en el año 9, que permitirían acumular $B_9 \cdot (1+i) =$ US$23.947/Há al año 10, y
- Se perdería $B_{10} =$ US$ 23.979/Há en el año 10.

Esto es, la clave para encontrar $n^{**}$ es detectar el año en que la tasa a la cual crecerían los beneficios es menor que el costo de capital (y no conviene aplazar) y para el cual la tasa a la que venían creciendo los beneficios es mayor que el costo de capital (y no conviene adelantar):

$$\frac{B_{(n^{**}+1)}}{B_{(n^{**})}} < 1 + i < \frac{B_{(n^{**})}}{B_{(n^{**}-1)}}$$

Note que en ese resultado no tiene influencia la inversión inicial, mientras no sea tan grande como para hacer VAN < 0. Note, además, que si n pudiera adoptar valores no enteros, $n^{**}$ sería aquel n que satisface:

$$\frac{B_{(n^{**}+1)}}{B_{(n^{**})}} - 1 = i.$$

Esta última relación indica que el momento óptimo de cortar los árboles es cuando la tasa a la cual crece el valor de una hectárea de bosques coincide con la tasa de interés i. Ello valida la intuición inicial mencionada en la sección anterior, cuando se afirmó que "el momento óptimo de cortar sería cuando el aumento de beneficios (la ventaja) sea insuficiente para compensar la pérdida de valor presente con la postergación en la corta".

Sin embargo, aquí es fácil confundirse: ¿Es que la edad óptima de corte *no es* $n^*$ (de Faustmann) que maximiza $VAN_{-\infty}$, sino $n^{**}$(de Fisher), que maximiza el VAN sin repetir? Esta cuestión tiene su importancia por dos razones: 1) Compatibilizar intuición con procedimientos formales de cálculo, y 2) Si fuera correcto maximizar VAN sin repetir (que involucra comparar proyectos de distinta vida), las conclusiones estándares que aparecen en los textos de evaluación de proyectos deberían revisarse, pues siempre se recomienda igualar vidas, para comparar entre proyectos mutuamente excluyentes entre sí.

La aclaración de esta interrogante pasa a ser, entonces, una cuestión a la que debe prestarse atención. Veamos primero algo respecto a la intuición; después se examinará el punto con más formalidad.

Aquí es importante darse cuenta de que si se tuviera la oportunidad de poder replantar árboles, entonces el verdadero costo de capital no es la tasa de interés i: existe una mejor oportunidad que ésa, reinvirtiendo *parte* de los excedentes obtenidos al vender el bosque en replantar árboles (para obtener un VAN positivo); la parte de $B_n$ que se podría reinvertir es $I < B_n$. Ello, en definitiva, por un mayor costo de oportunidad del capital, haría que convenga adelantar la fecha de corte, lo que explica por qué $n^*$ (de Faustmann) $< n^{**}$ (de Fisher).

Ahora conviene tener presente la correcta interpretación de la solución de Boulding, que es el $n^+$ que maximiza el TIR. Suponga que por alguna razón se ha plantado una fracción de la tierra disponible, quedando el resto sin plantar. Ello podría ocurrir por una restricción de capital que impide plantar toda la superficie. Luego, en ese contexto, cualquier excedente de caja que genere el proyecto puede ser reinvertido en plantar parte de la superficie sin árboles; ésta es una situación más atractiva que reinvertir sólo parte de $B_n$ en replantar árboles, porque se invertiría *todo* $B_n$.

El lector puede reconocer en esa situación el supuesto implícito en el cálculo del TIR: que los fondos se reinvierten en el proyecto mismo. Luego, como resulta mejor crecer en superficie plantada que dejar de plantar, la tasa de interés de mercado deja de representar el verdadero costo de capital y la solución de Fisher sería incorrecta: el verdadero costo de capital sería mayor a i, por lo que $n^+$ (de Boulding) $< n^{**}$ (de Fisher).

Pero se puede obtener aún otra conclusión: La posibilidad de aumentar la superficie plantada es también mejor que replantar la misma superficie, por lo que $n^+$(de Boulding) $< n^*$ (de Faustmann). En conclusión, las posibilidades de reinversión afectan el verdadero costo de oportunidad del capital y, mientras mayor sea éste, antes convendrá cortar los árboles. Ello conduce a:

$$n^+\text{(de Boulding)} \ < \ n^*\text{ (de Faustmann)} \ < \ n^{**}\text{ (de Fisher)},$$

que es la explicación de lo obtenido en el cuadro 3.

## 3. EL EFECTO DE INCORPORAR EL VALOR DE LA TIERRA

Queda aún por extraer una segunda conclusión clave: que existe un error en las conclusiones anteriores o una imperfección de mercado. Examinemos el punto en detalle, lo que nos lleva al terreno de lo formal.

Volviendo al ejemplo de cálculo, supongamos que la inversión inicial I corresponde exclusivamente al costo de plantar los árboles y que erróneamente se ha excluido el costo de la superficie a plantar. Corrijamos ese error.

Al tratar de corregir el error, debemos asignar un cierto valor a la hectárea de tierra. Si éste es T, la solución de Faustmann sería el $n^*$ que resuelve el siguiente problema:

$$\underset{(n)}{MAX}\ VAN_{\to\infty} = -T - I + \frac{B_n}{(1+i)^n} + \frac{-I}{(1+i)^n} + \frac{B_n}{(1+i)^{2n}} + \dots =$$

$$= -T + \left[ -I + \frac{B_n}{(1+i)^n} \right] \left[ 1 + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots \right] =$$

$$= -T + \left[ -I + \frac{B_n}{(1+i)^n} \right] \left[ \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Esta expresión difiere de la anterior solamente en que se ha agregado el valor de la tierra T, que debería comprarse en el año 0. Como T no depende de n, eso no cambia para nada el resultado. Sin embargo, ello no sería el caso para las soluciones de Fisher y Boulding. La búsqueda del $n^{**}$(de Fisher) induciría a maximizar el VAN del proyecto sin repetir:

$$\underset{(n)}{MAX}\ VAN = -T - I + \frac{B_n}{(1+i)^n} + \frac{T}{(1+i)^n} \ ,$$

donde se ha agregado la inversión inicial T en el año cero, pero también la recuperación de esa inversión en el último año, cuando se corten los árboles.

Adoptemos un supuesto sobre el valor de la tierra; supongamos:

$$T^* = \left[ -I + \frac{B_n}{(1+i)^{n*}} \right] \left[ \frac{(1+i)^{n*}}{(1+i)^{n*} - 1} \right] \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

El supuesto (2) tiene una razón de ser. Si la plantación de árboles es una oportunidad disponible para todos los inversionistas, ¿por qué razón $VAN_{\to\infty} \neq 0$? Libre entrada al mercado significa que todos querrán comprar tierra, plantarla y hacer el buen negocio de obtener un $VAN_{\to\infty} > 0$; eso produciría un exceso de demanda por la tierra que haría subir su precio; la haría subir hasta que desaparezca el exceso de oferta, cuando $VAN_{\to\infty} \approx 0$. Tal como se deduce, ese es un argumento de eficiencia de mercado; adoptemos ese supuesto. Con el valor supuesto para T, la solución de Fisher se transforma en:

$$\underset{(n)}{MAX} \quad VAN = -T^{*}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]+\left[-I+\frac{B_{n}}{(1+i)^{n}}\right]=$$

$$= -\left[-I+\frac{B_{n^{*}}}{(1+i)^{n^{*}}}\right]\left[\frac{(1+i)^{n^{*}}}{(1+i)^{n^{*}}-1}\right]\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]+\left[-I+\frac{B_{n}}{(1+i)^{n}}\right],$$

de donde se obtiene: VAN(para $n=n^{*}$) = 0. Más aún, puede demostrarse que el máximo VAN posible es para $n=n^{*}$, por lo que $n^{**} = n^{*}$. La demostración es la siguiente. En el problema:

$$\underset{(n)}{MAX} \quad VAN = -T^{*}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{n}}\right]+\left[-I+\frac{B_{n}}{(1+i)^{n}}\right] =$$

$$= \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{n}}\left\{-T^{*}+\left[-I+\frac{B_{n}}{(1+i)^{n}}\right]\left[\frac{(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right]\right\},$$

se debe encontrar $n^{**}$ que satisfaga:

$$\frac{dVAN^{**}}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\frac{(1+i)^{n^{**}}-1}{(1+i)^{n^{**}}}\right)\left\{-T^{*}+\left(-I+\frac{B_{n^{**}}}{(1+i)^{n^{**}}}\right)\left(\frac{(1+i)^{n^{**}}}{(1+i)^{n^{**}}-1}\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{(1+i)^{n^{**}}-1}{(1+i)^{n^{**}}}\right)*\frac{d}{dn}\left\{-T^{*}+\left(-I+\frac{B_{n^{**}}}{(1+i)^{n^{**}}}\right)\left(\frac{(1+i)^{n^{**}}}{(1+i)^{n^{**}}-1}\right)\right\}=0$$

por lo que basta demostrar que cada sumando se anula para $n^{**}=n^{*}$. De la solución de Faustmann sabemos que la derivada del segundo sumando se anula para $n=n^{*}$ (ver ecuación (1)) y el primero también se anula para $n=n^{*}$, por el valor de $T^{*}$ (ver ecuación (2)). Eso completa la demostración.

La demostración anterior indica que si el mercado es "perfecto" en asignar el valor a la tierra, la solución de Faustmann coincide con la de Fisher: $n^{*}$(de Faustmann) = $n^{**}$(de Fisher). Y podemos agregar un corolario: si el mercado no es "perfecto" para asignar valor a la tierra, $n^* \neq n^{**}$. En particular, si el precio está subvaluado (tal como en el ejemplo numérico de antes), $n^* < n^{**}$.

Quedan, sin embargo, dos cuestiones pendientes: 1) Probar que la solución de Boulding, aquel $n^+$ que maximiza la TIR, también coincide con las de Faustmann y Fisher (no mediar un error o una imperfección de mercado), y 2) Como compatibilizar intuición con ese resultado. Abordemos primero la cuestión de $n^+ = n^{**} = n^*$.

Adoptando nuevamente el mismo supuesto respecto al valor de T de un mercado "perfecto", el problema de Boulding sería encontrar $n^+$ que maximice la TIR del proyecto, la que se obtiene de la siguiente igualdad:

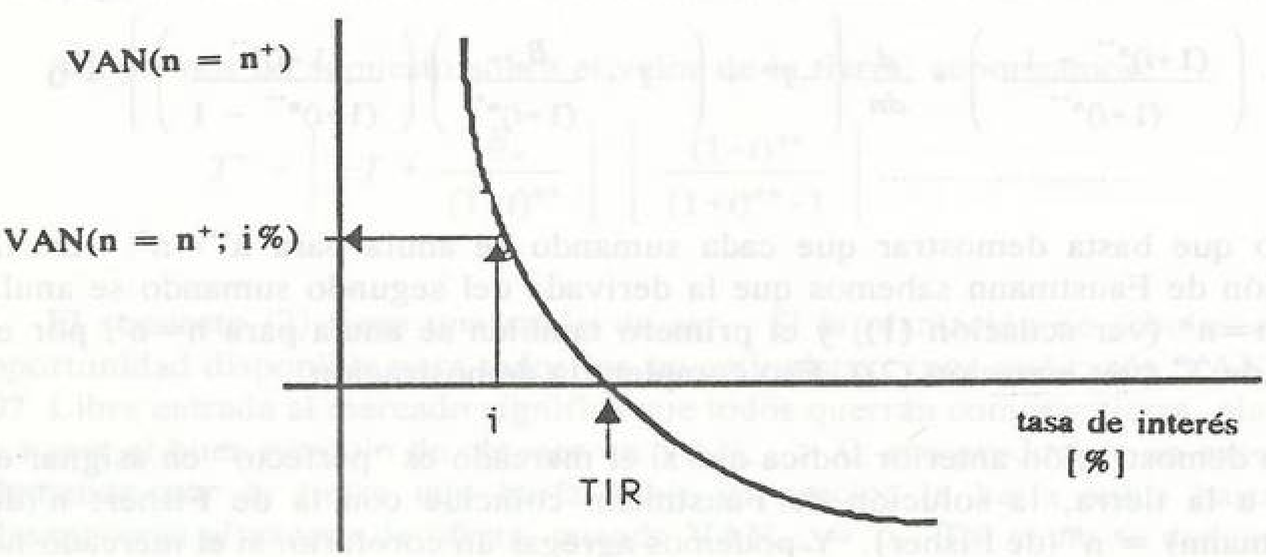
$$VAN = -T^* - I + \frac{B_n + T^*}{(1 + TIR)^n} = 0$$

Ya sabemos que VAN($n=n^{**}$, i%) = 0 por lo que con $n=n^{**}$ se obtendrá TIR=i. Luego, nos interesa saber si existe algún otro n que permita obtener TIR > i. Puede demostrarse que no existe tal n, por lo que $n^+ = n^* = n^{**}$. La demostración es por el absurdo, tal como sigue:

Suponga que existe $n^+ \neq n^{**}$ tal que TIR > i. Eso implica que VAN($n=n^+$; i%) > 0, de acuerdo a lo mostrado en el gráfico 2.

## GRÁFICO 2

## VAN(N=N$^+$) HIPOTÉTICO EN FUNCIÓN DE LA TASA DE INTERÉS



Pero lo anterior es imposible porque se demostró (para la solución de Fisher) que el máximo VAN (i%) posible es para $n=n^{**}$, el que es nulo (no positivo). Luego, no existe tal $n^+$. Eso completa la demostración.

Finalmente se aborda el problema buscando una respuesta intuitiva. La intuición indica (tal como ya se indicó), que la edad óptima de corta es aquélla donde la tasa de crecimiento de los beneficios coincide con la tasa de costo de capital. Se había deducido (para n no necesariamente entero):

$$\frac{B_{n^*+1}}{B_{n^*}} - 1 = i.$$

Pero esa expresión puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{B_{n^*+1}}{(1+i)} = B_{n^*} \ ,$$

que tiene una lógica muy clara: si se posterga la corta desde el año n al n+1:

- Se pierde el beneficio $B_n$, y
- Se gana el beneficio $B_{n+1}$ un año más tarde.

Y $n^*$ corresponde a aquel n donde el beneficio (en valor presente al año n) coincide con el costo.

En un mercado de capitales perfecto, y para cualquier solución que se adopte (Faustmann, Fisher o Boulding), la verdadera tasa de costo de capital es común. Sin embargo, en la ecuación anterior con costos y beneficios de postergar, se omitió considerar el valor de la tierra, lo que es un error. Reconsiderando para incluir el valor de la tierra y corregir el error, se tienen los siguientes efectos de postergar la corta desde el año n al año n+1:

- Se pierde el beneficio $B_n$,
- Se gana el beneficio $B_{n+1}$ un año más tarde,
- Se deja de vender la tierra con valor T en el año n, y
- Se recibe el valor T por la venta de la tierra en el año n+1.

En valor presente (donde $VAN_{n \to n+1}$ representa el valor actualizado neto, al año n, de postergar la corta desde el año n al año n+1):

$$VAN_{n \to n+1} = -B_n + \frac{B_{n+1}}{(1+i)} - T + \frac{T}{(1+i)} \ ;$$

adoptando el supuesto de mercado de capitales perfecto y su correspondiente valor de la tierra se obtendrá:

$$VAN_{n \to n+1} = -B_n + \frac{B_{n+1}}{(1+i)} - \frac{i}{(1+i)} \left\{ -I + \frac{B_{n^*}}{(1+i)^{n^*}} \right\} \left\{ \frac{(1+i)^{n^*}}{(i+i)^{n^*} - 1} \right\}$$

Ahora, con fines de chequeo y utilizando los datos del ejemplo numérico ($I=14$; $B_t=10 \cdot \ln(t+1)$; $i=4\%$), se obtienen los resultados presentados en el cuadro 4.

## CUADRO 4

## EFECTOS DE POSTERGAR LA CORTA DE LOS ÁRBOLES AL CONSIDERAR EL VALOR DE LA TIERRA

| $n$ | $B_n$ | $B_{n+1}$ | $T^*$ | $VAN_{n \to n+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 19,46 | 20,79 | 7,63 | +0,24 |
| 7 | 20,79 | 21,97 | 7,63 | +0,04 |
| • 8 | 21,97 | 23,03 | 7,63 | -0,13 |
| 9 | 23,03 | 23,97 | 7,63 | -0,26 |
| 10 | 23,97 | 24,85 | 7,63 | -0,38 |

Los resultados del $VAN_{n \to n+1}$ mostrados en el cuadro 4 indican que es correcto seguir la regla de que "el momento óptimo de cortar sería cuando el aumento de beneficios (la ventaja) sea insuficiente para compensar la pérdida de valor presente con la postergación en la corta" (tal como se indicó en la primera sección), en la medida que se incluyan los costos y beneficios asociados al costo de oportunidad de la tierra y que sea válido el supuesto de mercado de capitales perfecto. Esta conclusión se obtiene al constatar en el cuadro 4 que el primer $VAN_{n \to n+1}$ negativo es para $n=8$ y que corresponde al mismo resultado $n^*=8$ de determinarlo a partir de la solución de Faustmann (con o sin valor de la tierra).[3]

[3] En este punto conviene revisar lo que se menciona en la literatura de evaluación de proyectos, referente al problema de duración: Fontaine (1992), sección III.F, pp. 94-101, menciona las tres soluciones, aunque de una manera particular. En general, puede afirmarse que la intuición económica que expone es comparable a la presentada en esta Nota, con notables aciertos en la dirección del efecto que tienen las imperfecciones de mercado sobre el valor de la tierra. El problema es tratado en forma discreta, tal como en esta Nota.
Copeland y Weston (1988), sección 3.C.2., pp. 50- 55, enuncian las tres soluciones al problema de duración, asignando el mismo rol al valor de la tierra que en esta Nota y arribando a la misma conclusión. Bierman y Smidt (1993), capítulo 12, pp. 276-281, obtienen los mismos resultados, inclusive respecto al valor de la tierra, pero sin mencionar la solución de Boulding ni aludir a imperfecciones de mercado. Estos dos "clásicos" tratan el problema en tiempo continuo.
Hirshleifer (1970), sección 3.D, pp. 81-92, también enuncia las tres soluciones, pero la imperfección de mercado la relaciona con la tasa de descuento, sin mencionar el rol del precio de la tierra.

## 4. CONCLUSIONES

En esta Nota Técnica se ha expuesto cómo resolver un problema clásico de evaluación de proyectos. Si bien los resultados no son originales, se descubre cómo validar la intuición aplicada a este problema.

Para finalizar, una reflexión. Se ha demostrado que si existiera un mercado "perfecto" y la tierra fuera valorada "perfectamente", las tres soluciones al problema de duración coinciden. La lección que se puede obtener de eso es la siguiente.

Si se encontrara un proyecto de VAN positivo, ello puede ocurrir porque la tierra está subvaluada. Esa es una interesante posibilidad de obtener ganancias. Pero se debe ser cuidadoso al concluir respecto a ello, porque tal vez el mejor negocio es comprar tierra y esperar que suba de precio para venderla, sin necesidad de plantarla. Bastaría esperar a que se resuelva la imperfección de mercado y ésta suba de precio.

Una razón para que la tierra no suba de precio lo suficientemente rápido como para hacer una ganancia fácil es que exista mucha tierra no cultivada. En esa situación, se estaría en presencia de un caso donde la solución de Boulding es aplicable y convendría cortar árboles relativamente jóvenes. Pero hay que ser cuidadoso. Tal vez la explicación es *simplemente* un error en estimar costos o beneficios, una advertencia que debiéramos tomar muy en serio (en vez de precipitarnos a concluir que se ha encontrado una imperfección de mercado).

Por otra parte, un examen rápido de la actitud que tienen la empresas forestales llevará a detectar que no existe uniformidad en la edad de corte de los árboles. Algunas cortan pino insigne de 17 años; otras de 20 años e incluso de 26 años, como parece ser la tendencia actual. Esto se explica, probablemente, por diferente costo de capital de las empresas, naturalmente influida por el hecho de que aún existe tierra con aptitud forestal que no está plantada; esto sugiere, a su vez, que la tierra todavía no alcanza su valor, donde desaparecen oportunidades para obtener un VAN positivo.

Brealey y Myers (1991), sección 6-3, pp. 97-98, recomiendan utilizar la solución de Fisher, sin estudiar el rol que juega el valor de la tierra en la decisión.

Mishan (1982) enuncia la solución de Fisher en su capítulo 31 y la solución de Boulding en su capítulo 32; parece recomendar la solución de Faustmann en su nota de pie de página 2 del capítulo 32, indicando que la solución correcta requiere usar su "procedimiento de normalización" expuesto en el capítulo 38, aunque sin mostrarlo realmente. Tampoco hace alusión al precio de la tierra.

Otros clásicos que no tratan el tema son los siguientes: 1) Blank y Tarquin (1991); 2) DeGarmo, Sullivan y Bontanelli (1993); 3) Sapag y Sapag (1991); 4) Taylor (1976); 5) Thuesen y Fabrycky (1989); 6) Van Horne (1986); y 7) Young (1993).

Todo esto ratifica, en cierto sentido, la conclusión de la Comisión Sobre la Enseñanza de la Economía en los EE.UU. de la Sociedad de Economistas Norteamericanos, ver Krueger *et.al.* (1991), de que este problema pareciera haberse olvidado.

## REFERENCIAS


BIERMAN, H. y S. SMIDT (1993): *The Capital Budgeting Decision. Economic Analysis of Investment Projects*, 8a. edición de Macmillan Publishing, EE.UU.

BLANK, L. y A. TARQUIN (1991): *Ingeniería Económica*, 3a. edición de McGraw-Hill, Colombia.

BREALEY, R. y S. MYERS (1991): *Principles of Corporate Finance*, 3a. edición de McGraw-Hill, EE.UU.

COPELAND, T. y J. WESTON (1988): *Financial Theory and Corporate Policy*, 3a. edición de Addison-Wesley Publishing, EE.UU.

DEGARMO, P.; W. SULLIVAN y J. BONTANELLI (1993): *Engineering Economy*, 9a. edición de Macmillan Publishing, EE.UU.

FONTAINE, E. (1992): *Evaluación Social de Proyectos*, 8a. edición revisada de Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago.

HIRSHLEIFER, J. (1970): *Investment, Interest, and Capital*, Prentice-Hall, EE.UU.

KRUEGER, A. *et. al.* (1991): "Report of the Comission on Graduate Education in Economics", *Journal of Economic Literature* Vol. XXIX, 1.035-1.053.

LABBE, F. (1985): "Una Revisión del Problema de Duración a la Luz de un Mercado Perfecto", *Paradigmas en Administración*, primer semestre. Departamento de Administración, Universidad de Chile, 65-83.

MISHAN, E. (1982): *Cost-Benefit Analysis. An Informal Introduction*, 3a. edición de George Allen & Unwin Ltd., Londres.

SAPAG, N. y R. SAPAG (1991): *Preparación y Evaluación de Proyectos*, 2a. edición de McGraw-Hill Interamericana, México.

TAYLOR, G. (1976): *Ingeniería Económica. Toma de Decisiones Económicas*, 7a. reimpresión de Limusa, México.

THUESEN, G. y W. FABRYCKY (1989): *Engineering Economy*, 7a. edición de Prentice-Hall, EE.UU.

VAN HORNE, J. (1986): *Fundamentals of Financial Management*, 6a. edición de Prentice-Hall, EE.UU.

YOUNG, D. (1993): *Modern Engineering Economy*, editado por John Willey & Sons, EE.UU.