



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

INTERPRETACIÓN AUTOMÁTICA DE DIAGRAMAS DE ESTABILIZACIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

JOAQUÍN ANDRÉS BILBAO NIEVA

PROFESOR GUÍA:
RUBÉN BOROSCHEK KRAUSKOPF

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
VIVIANA MERUANE NARANJO
TOMÁS GUENDELMAN BEDRACK

SANTIAGO DE CHILE
2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
POR: JOAQUÍN ANDRÉS BILBAO NIEVA
FECHA: 21/11/2013
PROFESOR GUIA: RUBÉN BOROSCHEK K.

INTERPRETACIÓN AUTOMÁTICA DE DIAGRAMAS DE ESTABILIZACIÓN

Conocer las propiedades dinámicas de una estructura existente en un determinado momento, o a lo largo del tiempo, presenta diversos beneficios para la ingeniería civil. Sin embargo, los métodos de identificación paramétricos requieren actualmente una cantidad considerable de interacción con el usuario, especialmente cuando se utilizan diagramas de estabilización para seleccionar los modos representativos de una estructura.

Lo anterior presenta un gran impedimento en la aplicación de este tipo de métodos de forma continua en una estructura, por lo que la implementación de un sistema automático de interpretación del diagrama de estabilización resulta conveniente. El objetivo del presente trabajo es por lo tanto desarrollar y validar un método de interpretación automático de este diagrama en base a criterios de validación y métodos de agrupamiento.

En virtud de lo anterior se ha verificado el funcionamiento del método desarrollado sobre un modelo de estructura de propiedades conocidas, y analizado en detalle los resultados de la implementación de este sobre el edificio Torre Central de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile (FCFM) el cual está siendo monitoreado desde el año 2009. Dos métodos paramétricos de identificación en conjunto con un algoritmo de optimización han sido utilizados para generar los diagramas de estabilización.

El análisis sobre el edificio contempla además del análisis en detalle de la implementación del método de automatización, un seguimiento modal básico de las propiedades dinámicas identificadas, una evaluación de las fuentes de error asociadas a su evaluación y finalmente una comparación con los resultados obtenidos mediante un método semi-automático de interpretación de diagramas de estabilización.

Los resultados obtenidos indican que es posible generar un método completamente automático para evaluar las propiedades dinámicas con resultados comparables con los del método semi-automático, y tomando en cuenta la dependencia de los resultados sobre la calidad y cantidad de canales utilizados, la posibilidad de implementar un seguimiento modal de la estructura.

TABLA DE CONTENIDOS

1	Introducción	1
1.1	Objetivos	2
1.1.1	Objetivos Generales:	2
1.1.2	Objetivos Específicos:	2
1.2	Organización y Alcances	2
2	Marco Teórico	3
2.1	Modelo Espacio Estado y Métodos de Identificación en el Subespacio Estocástico	3
2.1.1	Modelo Espacio Estado	3
2.1.2	Métodos de Identificación	5
2.1.3	Orden del modelo y Diagrama de estabilización.....	10
2.2	Método de Interpretación Automático	12
2.2.1	Primera Etapa	12
2.2.2	Segunda Etapa	19
2.2.3	Tercera Etapa.....	20
2.2.4	Cuarta Etapa	21
3	Interpretación Automática Modelo de Estructura	23
3.1	Modelo de Estructura.....	23
3.2	Proceso de Automatización	25
3.2.1	Primera Etapa	25
3.2.2	Segunda Etapa	30
3.2.3	Tercera Etapa.....	33
3.2.4	Cuarta Etapa	35
3.3	Resultados	38
4	Interpretación Automática Torre Central	44
4.1	Introducción	44
4.2	Estructura, Instrumentación e Identificación	44
4.3	Análisis particular	48
4.3.1	Primera etapa	48
4.3.2	Segunda etapa.....	50
4.3.3	Tercera etapa	51

4.3.4	Cuarta etapa	53
4.3.5	Resultados.....	54
4.4	Análisis Global	55
4.4.1	Primera Etapa	56
4.4.2	Segunda y Tercera Etapa	59
4.4.3	Cuarta etapa	61
4.4.4	Resultados.....	62
4.5	Análisis Anual.....	65
4.5.1	Año 2009	66
4.5.2	Año 2010	69
4.5.3	Año 2011	75
4.5.4	Año 2012	78
4.5.5	Año 2013	81
4.5.6	Año 2014	84
4.5.7	Resultados.....	86
4.6	Comparación método triple acierto.....	94
4.6.1	Metodología.....	94
4.6.2	Análisis General	99
4.7	Errores.....	102
4.7.1	Mayo de 2010 a Marzo de 2011	103
4.7.2	Marzo de 2011 a Febrero de 2012.....	105
4.7.3	Julio de 2012 a Enero de 2013	106
4.7.4	Marzo de 2013 a Julio de 2014.....	108
5	Conclusiones	111
6	Bibliografía	113
7	Anexo	115
7.1	Algoritmos de identificación.....	115
7.2	Filtro de Kalman	117
7.3	Método de agrupamiento <i>k-means</i>	119
7.4	Agrupamiento jerárquico	121
7.5	Selección de elemento representativo (DBSCAN).....	126
7.6	Criterios débiles de forma modal.....	131

7.6.1	Modelo de estructura amortiguamiento clásico.....	131
7.6.2	Modelo de estructura amortiguamiento no clásico.....	136
7.6.3	Formas modales aleatorias	141
7.6.4	Casos particulares.....	141
7.7	Criterios débiles de energía.....	143

INDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 3.1.1 – Esquema de estructura modelada	23
Figura 3.1.2 – Diagrama de estabilización (SSICOV)	24
Figura 3.1.3 – Diagrama de estabilización (SSIDATA).....	25
Figura 3.2.1 – Resumen criterios débiles 1-3 (SSICOV)	26
Figura 3.2.2 – Resumen criterios débiles 4-6 (SSICOV)	26
Figura 3.2.3 – Resumen criterios débiles 1-3 (SSIDATA).....	27
Figura 3.2.4 – Resumen criterios débiles 4-6 (SSIDATA).....	27
Figura 3.2.5 – Resumen criterios débiles 7-8 (SSIDATA).....	28
Figura 3.2.6 – Resumen criterios fuertes (SSICOV).....	28
Figura 3.2.7 – Resumen criterios fuertes (SSIDATA)	29
Figura 3.2.8 – Diagrama de estabilización, primera etapa (SSICOV)	30
Figura 3.2.9 – Diagrama de estabilización, primera etapa (SSIDATA).....	30
Figura 3.2.10 – Dendrograma (SSICOV).....	31
Figura 3.2.11 – Dendrograma (SSIDATA)	31
Figura 3.2.12 – Diagrama de estabilización, segunda etapa (SSICOV).....	32
Figura 3.2.13 – Diagrama de estabilización, segunda etapa (SSIDATA)	32
Figura 3.2.14 – Agrupamiento tercera etapa (SSICOV)	33
Figura 3.2.15 – Agrupamiento tercera etapa (SSIDATA).....	34
Figura 3.2.16 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (SSICOV).....	34
Figura 3.2.17 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (SSIDATA)	35
Figura 3.2.18 – Frecuencia v/s amortiguamiento (SSICOV)	36
Figura 3.2.19 – Frecuencia v/s amortiguamiento (SSIDATA).....	36
Figura 3.2.20 – Diagrama de estabilización, cuarta etapa (SSICOV)	37
Figura 3.2.21 – Diagrama de estabilización, cuarta etapa (SSIDATA)	37
Figura 3.3.1 – Matriz MAC (SSICOV)	41
Figura 3.3.2 – Matriz MAC (SSIDATA)	41
Figura 4.2.1 – Ubicación geográfica estructura Torre Central (33°27'27.42"S, 70°39'44.50"O). 45	45
Figura 4.2.2 – Planta piso tipo.....	45
Figura 4.2.3 – Ubicación sensores Torre Central	47
Figura 4.3.1 – Diagrama de estabilización (22-09-2009 07:00).....	48
Figura 4.3.2 – Resumen criterios débiles (22-09-2009 07:00).....	49
Figura 4.3.3 – Resumen criterios fuertes (22-09-2009 07:00)	49
Figura 4.3.4 – Diagrama de estabilización, Primera etapa (22-09-2009 07:00).....	50
Figura 4.3.5 – Dendrograma (22-09-2009 07:00)	50
Figura 4.3.6 – Diagrama de estabilización, Segunda etapa (22-09-2009 07:00).....	51
Figura 4.3.7 – Agrupamiento tercera etapa (22-09-2009 07:00).....	52
Figura 4.3.8 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (22-09-2009 07:00)	52
Figura 4.3.9 – Frecuencia v/s amortiguamiento (22-09-2009 07:00).....	53
Figura 4.3.10 – Diagrama de estabilización, Cuarta etapa (22-09-2009 07:00).....	54
Figura 4.4.1 – Resumen canales utilizados.....	56
Figura 4.4.2 – Evolución centroides criterios débiles.	57
Figura 4.4.3 – Histograma centroides criterios débiles.	57
Figura 4.4.4 – Evolución cumplimiento criterios fuertes	58
Figura 4.4.5 – Histograma cumplimiento criterios fuertes.....	58
Figura 4.4.6 – Evolución porcentaje de modos que cumplen CD y CF.	59
Figura 4.4.7 – Histograma porcentaje de modos que cumplen CD y CF.	59

Figura 4.4.8 – Evolución número de grupos formados, número de grupos vacíos	60
Figura 4.4.9 – Histograma número de grupos formados, número de grupos vacíos	60
Figura 4.4.10 – Evolución porcentaje de modos tercera etapa.....	61
Figura 4.4.11 – Histograma porcentaje de modos tercera etapa.....	61
Figura 4.4.12 – Evolución número de modos identificados	62
Figura 4.4.13 – Histograma número de modos identificados.....	62
Figura 4.4.14 – Evolución frecuencias identificadas.....	63
Figura 4.4.15 – Histograma frecuencias identificadas	63
Figura 4.4.16 – Evolución costo computacional identificación e interpretación automática.....	65
Figura 4.4.17 – Histograma costo computacional identificación e interpretación automática.....	65
Figura 4.5.1 – Evolución frecuencia (2009).....	66
Figura 4.5.2 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2009).....	67
Figura 4.5.3 – Modos identificados (2009)	67
Figura 4.5.4 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-4 (2009).....	68
Figura 4.5.5 - Evolución razón de amortiguamiento, modos 5-9 (2009)	68
Figura 4.5.6 – Evolución frecuencia (2010).....	69
Figura 4.5.7 – Evolución frecuencia (2010, enero-febrero).	70
Figura 4.5.8 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2010, enero-febrero).....	70
Figura 4.5.9 – Modos identificados (2010, enero-febrero).....	71
Figura 4.5.10 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2010, enero-febrero).....	71
Figura 4.5.11 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2010, enero-febrero).....	72
Figura 4.5.12 – Evolución frecuencia (2010, marzo-diciembre).....	73
Figura 4.5.13 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2010, marzo-diciembre)	73
Figura 4.5.14 – Modos identificados (2010, marzo-diciembre).....	74
Figura 4.5.15 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2010, marzo-diciembre)	74
Figura 4.5.16 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2010, marzo-diciembre)	75
Figura 4.5.17 – Evolución frecuencia (2011).....	76
Figura 4.5.18 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2011).....	76
Figura 4.5.19 – Modos identificados (2011)	77
Figura 4.5.20 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2011).....	77
Figura 4.5.21 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2011).....	78
Figura 4.5.22 – Evolución frecuencia (2012).....	79
Figura 4.5.23 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2012).....	79
Figura 4.5.24 – Modos identificados (2012)	80
Figura 4.5.25 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2012).....	80
Figura 4.5.26 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-8 (2012).....	81
Figura 4.5.27 – Evolución frecuencia (2013).....	82
Figura 4.5.28 – Frecuencia v/s razón de amortiguamiento (2013).....	82
Figura 4.5.29 – Modos identificados (2013)	83
Figura 4.5.30 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-3,8 (2013).....	83
Figura 4.5.31 – Evolución frecuencia (2014).....	84
Figura 4.5.32 – Frecuencia v/s razón de amortiguamiento (2014).....	85
Figura 4.5.33 – Modos identificados (2014)	85
Figura 4.5.34 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-3,8 (2014).....	86
Figura 4.5.35 –Evolución frecuencias (Seguimiento modal)	87
Figura 4.5.36 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (Seguimiento modal)	87
Figura 4.5.37 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (Seguimiento modal)	88
Figura 4.5.38 – Histograma frecuencias modos 1-4 (Seguimiento modal, 2009-2010).....	88

Figura 4.5.39 – Histograma frecuencias modos 5-9 (Seguimiento modal, 2009-2010).....	89
Figura 4.5.40 – Histograma razón de amort. Modos 1-4 (Seguimiento modal, 2009-2010)	89
Figura 4.5.41 – Histograma razón de amort. Modos 5-9 (Seguimiento modal, 2009-2010)	90
Figura 4.5.42 – Histograma frecuencias modos 1-4 (Seguimiento modal, 2010-2014).....	90
Figura 4.5.43 – Histograma frecuencias modos 5-9 (Seguimiento modal, 2010-2014).....	91
Figura 4.5.44 – Histograma razón de amort. Modos 1-4 (Seguimiento modal, 2010-2014)	91
Figura 4.5.45 – Histograma razón de amort. Modos 5-9 (Seguimiento modal, 2010-2014)	92
Figura 4.6.1 – Diagrama de estabilización (triple acierto, 22-09-2009 07:00)	95
Figura 4.6.2 – Diagrama de estabilización criterio fuerte (triple acierto, 22-09-2009 07:00).....	96
Figura 4.6.3 – Diagrama de estabilización criterios de distancia (triple acierto, 22-09-2009 07:00)	96
Figura 4.6.4 – Diagrama de estabilización despejado (triple acierto, 22-09-2009 07:00)	97
Figura 4.6.5 – Histograma de frecuencia (triple acierto, 22-09-2009 07:00).....	97
Figura 4.6.6 – Diagrama de estabilización columnas estables (triple acierto, 22-09-2009 07:00)	98
Figura 4.6.7 – Frecuencia v/s amortiguamiento (triple acierto, 22-09-2009 07:00)	98
Figura 4.6.8 – Evolución frecuencias identificadas (triple acierto).....	100
Figura 4.6.9 – Evolución frecuencias identificadas.....	100
Figura 4.6.10 – Diagrama de estabilización resumen CD (22-03-2013 22:00).....	101
Figura 4.6.11 – Criterios débiles rango de frecuencia en análisis (22-03-2013 22:00).....	102
Figura 4.7.1 – Evolución frecuencia (caso original v/s eliminación de canales)	103
Figura 4.7.2 – Caso original (05-2010 a 03-2011)	104
Figura 4.7.3 – Canales eliminados (05-2010 a 03-2011)	104
Figura 4.7.4 – Caso original (03-2011 a 02-2012)	105
Figura 4.7.5 – Canales eliminados (03-2011 a 02-2012)	106
Figura 4.7.6 – Caso original (07-2012 a 01-2013)	107
Figura 4.7.7 – Canales eliminados (07-2012 a 01-2013)	107
Figura 4.7.8 – Caso original (03-2013 a 07-2014)	108
Figura 4.7.9 – Canal E7 eliminado (03-2013 a 07-2014).....	109
Figura 4.7.10 – Canales eliminados (03-2013 a 07-2014)	109
Figura 4.7.11 – Frecuencia v/s amortiguamiento (frecuencias estables de bajo amortiguamiento)	110
Figura 4.7.12 – Histograma razones de amortiguamiento (frecuencias estables de bajo amortiguamiento)	110
Figura 7.3.1 – Situación inicial agrupamiento <i>k-means</i>	119
Figura 7.3.2 – Situación final agrupamiento <i>k-means</i>	120
Figura 7.4.1 – Representación gráfica de elementos	121
Figura 7.4.2 – Primera iteración (agrupamiento jerárquico)	122
Figura 7.4.3 – Segunda iteración (agrupamiento jerárquico)	123
Figura 7.4.4 – Tercera iteración (agrupamiento jerárquico).....	123
Figura 7.4.5 – Cuarta iteración (agrupamiento jerárquico)	124
Figura 7.4.6 – Agrupamiento en función de distancia de corte.....	125
Figura 7.5.1 – Diagrama de estabilización tercera etapa (SSICOV)	126
Figura 7.5.2 – Conjunto de modos similares utilizado	126
Figura 7.5.3 – Primera iteración (selección de modo representativo)	127
Figura 7.5.4 – Segunda iteración (selección de modo representativo).....	128
Figura 7.5.5 – Tercera iteración (selección de modo representativo)	128
Figura 7.5.6 – Cuarta iteración (selección modo representativo).....	129
Figura 7.5.7 – Quinta iteración (selección modo representativo).....	130

Figura 7.6.1 – Formas modales modos 1-4 (amortiguamiento clásico)	132
Figura 7.6.2 – Formas modales modos 5-8 (amortiguamiento clásico)	133
Figura 7.6.3 – Formas modales plano complejo, modos 1-4 (amortiguamiento clásico).....	134
Figura 7.6.4 – Formas modales plano complejo, modos 5-8 (amortiguamiento clásico).....	135
Figura 7.6.5 – Formas modales modos 1-4 (amortiguamiento no clásico)	137
Figura 7.6.6 – Formas modales modos 5-8 (amortiguamiento no clásico)	138
Figura 7.6.7 – Formas modales plano complejo, modos 1-4 (amortiguamiento no clásico).....	139
Figura 7.6.8 – Formas modales plano complejo, modos 5-8 (amortiguamiento no clásico).....	140
Figura 7.6.9 – Correlación MPC-MPD	141
Figura 7.7.1 – Norma de transferencia modal	143
Figura 7.7.2 – Contribución modal a la respuesta medida	144
Figura 7.7.3 – Distancia en función de MTN	145
Figura 7.7.4 – Distancia en función de CMM	145
Figura 7.7.5 – CMM (22-09-2009 07:00)	146
Figura 7.7.6 – MTN (22-09-2009 07:00)	146

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.2.1 – Resumen criterios débiles de validación	13
Tabla 2.2.2 – Resumen criterios fuertes de validación.....	13
Tabla 3.1.1 – Propiedades dinámicas modelo de estructura.....	23
Tabla 3.3.1 – Resumen frecuencias (SSICOV)	38
Tabla 3.3.2 – Error frecuencias (SSICOV).....	38
Tabla 3.3.3 – Resumen razones de amortiguamiento (SSICOV).....	38
Tabla 3.3.4 – Error razones de amortiguamiento (SSICOV)	39
Tabla 3.3.5 – Resumen frecuencias (SSIDATA)	39
Tabla 3.3.6 – Error frecuencia (SSIDATA)	39
Tabla 3.3.7 – Resumen razón de amortiguamiento (SSIDATA).....	40
Tabla 3.3.8 – Error razón de amortiguamiento (SSIDATA)	40
Tabla 3.3.9 – Error promedio parámetros identificados.....	40
Tabla 3.3.10 – Centroides (SSICOV).....	42
Tabla 3.3.11 – Centroides (SSIDATA)	42
Tabla 4.3.1 – Resumen Identificación (22-09-2009 07:00).....	54
Tabla 4.5.1 – Resumen modos identificados (Seguimiento modal, 2009-2010).....	92
Tabla 4.5.2 – Resumen modos identificados (Seguimiento modal, 2010-2014).....	93
Tabla 4.6.1 – Resumen modos identificados.....	99
Tabla 7.3.1 – Resumen coordenadas elementos	119
Tabla 7.4.1 – Valores numéricos de elementos considerados.....	121
Tabla 7.4.2 – Distancia entre elementos.....	122
Tabla 7.4.3 – Resumen agrupamiento jerárquico	124
Tabla 7.6.1 – Resumen MPC y MPD (amortiguamiento clásico).....	131
Tabla 7.6.2 – Constantes de amortiguamiento	136
Tabla 7.6.3 – Resumen MPC y MPD (amortiguamiento no clásico).....	136
Tabla 7.6.4 – MPC y MPD (casos particulares).....	142

1 Introducción

Conocer las propiedades dinámicas (como frecuencia, razones de amortiguamiento o formas modales) de una estructura existente en un determinado momento, o a lo largo del tiempo, entrega diversas ventajas en el campo de la ingeniería civil. Entre estas se destacan: la posibilidad de validar modelos estructurales, estudiar el comportamiento de una estructura frente a variables ambientales, e incluso la capacidad de generar un control de calidad y monitoreo de una determinada estructura, lo cual permite garantizar la seguridad y serviciabilidad de la misma.

El proceso de estimar los parámetros modales a partir de mediciones de las vibraciones en una estructura se puede describir en cuatro etapas: recopilación de información (mediciones de aceleración, velocidad y/o desplazamiento), pre-procesamiento de señales, la identificación preliminar del sistema estructural y finalmente establecer un conjunto válido de parámetros modales.

Para todos los sistemas de identificación paramétricos se requiere definir al menos el orden del modelo, el cual corresponde al número de valores propios, y por lo tanto, en teoría, al doble de frecuencias modales de una estructura. A partir de la observación empírica de una gran cantidad de problemas de identificación modal se ha visto que los modos físicos tienden a aparecer aproximadamente a la misma frecuencia cuando se sobreespecifica el orden del modelo. En virtud de lo anterior, los métodos de identificación paramétricos suelen utilizar diversos órdenes del modelo para, a partir de un gráfico de orden del modelo versus frecuencias, lograr determinar aquellos modos representativos de la estructura mediante columnas que presenten frecuencias “estables” o que no varíen ostensiblemente al aumentar el orden del modelo. Estos gráficos son llamados “diagramas de estabilización”.

La interpretación del diagrama descrito anteriormente, o en otras palabras, determinar un conjunto válido de parámetros modales en función de este diagrama, requiere usualmente una cantidad de tiempo considerable de interacción con el usuario. Por lo tanto la automatización de este proceso lograría reducir esta desventaja, e incluso permitiría la aplicación en casos donde se requiere procesar una gran cantidad de información en un corto intervalo de tiempo, por ejemplo, para el monitoreo continuo de una estructura.

En el presente trabajo de título se busca validar un método de interpretación automática de este diagrama desarrollado por Reynders, Houbrechts y De Roeck [1]. Para lo anterior se aplica este método sobre un modelo de estructura de propiedades conocidas y sobre el edificio Torre Central de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) de la Universidad de Chile, el cual está siendo continuamente monitoreado mediante acelerómetros y sensores ambientales.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Generales:

- Validar el método de interpretación automática de diagramas de estabilización propuesto por Reynders, Houbrechts y De Roeck [1]

1.1.2 Objetivos Específicos:

- Analizar el comportamiento del método de automatización ante un determinado sistema de identificación.
- Determinar las características (ventajas, desventajas, rango de aplicación) sobre el comportamiento del método.
- Evaluar los resultados obtenidos de la aplicación de este método de automatización sobre la estructura en estudio.

1.2 Organización y Alcances

En el capítulo 2 se exponen los fundamentos teóricos y las metodologías utilizadas para las diversas etapas del proceso de identificación, y en particular para el método que se busca validar. Inicialmente se muestran los métodos de identificación estocásticos utilizados, así como los conceptos de *orden del modelo* y *diagrama de estabilización*. Posteriormente se muestran en detalle las cuatro etapas del método de interpretación automático.

En el capítulo 3 se ilustra el desglose completo del método de automatización a partir de los dos métodos de identificación utilizados sobre una estructura modelada (y por tanto de propiedades conocidas). Inicialmente se describen las propiedades de la estructura modelada y las características de la identificación de esta. Posteriormente se muestra la aplicación de las cuatro etapas del método de interpretación automático, para finalmente exponer los principales resultados obtenidos de su aplicación.

En el capítulo 4 se aplica y valida el método de automatización sobre la estructura Torre Central. Inicialmente se exponen las principales características de esta estructura y las propiedades del método de identificación utilizado (el cual toma en cuenta los resultados del capítulo previo). Posteriormente se genera un análisis detallado sobre los resultados obtenidos, el cual se divide en un análisis particular donde se ilustra la aplicación de este método sobre cada registro, un análisis global donde se exponen las características globales observadas de las distintas etapas, un análisis anual donde se implementa un seguimiento modal sobre los modos identificados, una comparación con respecto al método de triple acierto para validar y verificar la eficiencia del método de automatización y finalmente se exponen los principales errores observados en el proceso de identificación.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones obtenidas a partir del comportamiento observado del método de identificación sobre el modelo de estructura y sobre la estructura en estudio.

2 Marco Teórico

2.1 Modelo Espacio Estado y Métodos de Identificación en el Subespacio Estocástico

2.1.1 Modelo Espacio Estado

El comportamiento dinámico de un sistema estructural discreto consistente en n_1 masas unidas por resortes y amortiguadores se describe a partir de la ecuación diferencial matricial:

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{v}(t) = \mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_1 \mathbf{u}(t) \quad (2.1.1)$$

Donde \mathbf{M}_1 , \mathbf{C}_1 y $\mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ corresponden a las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema (respectivamente), $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ el vector de desplazamiento para el tiempo continuo t , $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ la fuerza de excitación a la cual es sometida la estructura, la cual se descompone en una matriz $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ que describe las m entradas (solicitaciones) en el espacio, y un vector $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ que describe las m entradas (solicitaciones) en el tiempo. El subíndice 1 es utilizado solo para distinguir estos parámetros de definiciones posteriores que utilizan la misma nomenclatura.

Esta ecuación corresponde a la aproximación mediante elementos finitos de un sistema estructural con solo n_1 grados de libertad, y aunque supone un comportamiento lineal, es una muy buena aproximación para el comportamiento real de una estructura en vibración. A pesar de lo anterior, esta ecuación no se utiliza directamente en la mayoría de los métodos de identificación (paramétricos) por las siguientes razones:

- 1) La ecuación está en tiempo continuo, mientras que las mediciones generalmente se presentan en instantes de tiempo discreto.
- 2) No es posible medir los n_1 grados de libertad de la estructura.
- 3) Se requiere modelar el ruido, debido a que pueden existir otras fuentes de excitación además de $\mathbf{F}(t)$ y en la práctica el ruido en las mediciones siempre está presente.

En virtud de lo anterior, se forma una nueva expresión para esta ecuación (2.1.1) que mejor aborda estos problemas, conocido como el modelo espacio estado (EE) discreto. Este modelo surge a partir de una reestructuración matricial del modelo de elementos finitos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2.1.2)$$

Donde:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_1} \\ -\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{K}_1 & -\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

La matriz $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ se conoce como la matriz de estado, $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ como la matriz de entrada, y $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ como el vector de estado. Además, dada la forma en la que se define esta nueva ecuación, se tiene que $n_2 = 2 \times n_1$. Finalmente, el subíndice c hace referencia a la dependencia continua con respecto al tiempo.

Considerando pasos de tiempos discretos, esta ecuación se puede expresar como (ver por ejemplo [2]):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.1.4)$$

Donde:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{A} - \mathbf{I}]\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c \quad (2.1.5)$$

Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} corresponden a las matrices de estado y de entrada discretas (respectivamente), y el subíndice k hace referencia al intervalo de tiempo $t_k = (k - 1)\Delta t$, tomando en cuenta que k corresponde a un número natural entero mayor o igual a 1.

Por otra parte, dado que resulta prácticamente imposible medir todos los grados de libertad de una estructura, se establece una relación entre los puntos de observación (generados a partir de la ubicación de los sensores sobre la estructura) y la respuesta del sistema. Asumiendo que las mediciones corresponden a l sensores que pueden corresponder a medidas de desplazamiento, velocidad o aceleración en la estructura, se tiene [2]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{v}(t) \quad (2.1.6)$$

Donde $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ corresponde al vector de salidas, \mathbf{C}_a \mathbf{C}_v $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times n_1}$ las matrices de salida para la aceleración, velocidad y desplazamiento (respectivamente). Esta se relaciona con el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ y el vector de entrada $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.1.7)$$

Donde:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{C}_1], \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}_a \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (2.1.8)$$

La matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$ corresponde a la matriz de salida, y $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ a la matriz de transmisión directa. Considerando pasos de tiempo discreto, esta ecuación puede expresarse como:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (2.1.9)$$

El modelo definido a partir de las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.9) se conoce como modelo espacio estado determinístico discreto. Si además se incorporan las componentes estocásticas del ruido, se obtiene el modelo espacio estado determinístico-estocástico discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.1.11)$$

Donde $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ corresponde al ruido del proceso debido a imprecisiones del modelo, y $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ corresponde al ruido asociado a las mediciones debido a imprecisiones de los sensores, ambos términos hacen referencia a la naturaleza estocástica del problema. Por otro lado, los términos asociados al vector de entrada \mathbf{u}_k indican la componente determinística.

Debido a que el problema en estudio toma en cuenta solo las vibraciones ambientales, que se asumen no medibles, la parte determinística no se considera parte del modelo, obteniéndose de esta forma el modelo espacio estado estocástico discreto dado por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.1.13)$$

Si bien los vectores de ruido \mathbf{w}_k y \mathbf{v}_k son cantidades inmensurables, para los métodos de identificación estocásticos se asume que estos son de media cero, de tipo ruido blanco, y con matrices de covarianza:

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (2.1.14)$$

Donde δ_{pq} corresponde a la Delta de Kronecker y \mathbf{E} corresponde al operador de valor esperado.

Finalmente, las propiedades dinámicas del sistema estructural pueden ser determinadas a partir del par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) considerando la descomposición en valores y vectores propios de la matriz de estado:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (2.1.15)$$

Donde $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ contiene los vectores propios en columnas, y $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios discretos λ_{d_i} asociados. Los valores propios continuos se determinan a partir de la siguiente relación:

$$\lambda_{c_i} = \frac{\ln(\lambda_d)}{\Delta t} \quad (2.1.16)$$

Las frecuencias f_i y razones de amortiguamiento β_i se obtienen a partir de los valores propios continuos (por ejemplo ver [3]) :

$$\lambda_{c_i} = -\beta(2\pi f_i) \pm j(2\pi f_i) \sqrt{1 - \beta_i^2} \quad (2.1.17)$$

$$f_i = \frac{|\lambda_{c_i}|}{2\pi} \quad (2.1.18)$$

$$\beta_i = -\frac{\text{real}(\lambda_{c_i})}{|\lambda_{c_i}|} \quad (2.1.19)$$

La ecuación (2.1.17) muestra de manera implícita que los valores propios aparecen en pares conjugados. En otras palabras, a partir de los n_2 valores propios, existen solo n_1 modos asociados (frecuencias y razones de amortiguamiento). Las formas modales (vectores propios) asociadas también aparecen en pares complejos conjugados.

Dado que las formas modales están asociadas a grados de libertad indefinidos espacialmente, resulta necesario relacionarlas a los puntos de observación. Lo anterior se logra a partir de la matriz de salida:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{C} \mathbf{\Psi} \quad (2.1.20)$$

2.1.2 Métodos de Identificación

En la presente sección se muestran brevemente, y enfocados a su aplicación, dos métodos paramétricos de identificación estocásticos conocidos como SSI-COV y SSI-DATA [4]. Estos son complementados con el método de identificación estocástico rápido para múltiples órdenes del modelo (FMO-SSI, por sus siglas en inglés) [5].

El objetivo principal de ambos métodos de identificación se concentra en obtener el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) y como objetivo secundario las matrices de covarianza $(\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$, esto dado su uso en los criterios de validación de energía como se verá en la sección 2.2.1.2.

Inicialmente se muestran las notaciones y propiedades utilizadas por ambos métodos de identificación. Posteriormente se describen ambos métodos, formulando en cada caso la ecuación

base para el uso del método FMO-SSI. Finalmente se presenta un resumen de ambos algoritmos (SSI-COV y SSI-DATA) tomando en cuenta el método FMO-SSI para su implementación.

2.1.2.1 Propiedades del modelo espacio estado

A partir del modelo espacio estado estocástico discreto, ecuaciones (2.1.12) y (2.1.13), se considera que los vectores de ruido son de media cero $\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] = 0$ $\mathbf{E}[\mathbf{v}_k] = 0$, tipo ruido blanco y con matrices de covarianza definidas por la ecuación (2.1.14). Adicionalmente se asume que el proceso estocástico es estacionario $\mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] = \mathbf{\Sigma}$, notando que la matriz de covarianza del estado “ $\mathbf{\Sigma}$ ” es independiente del tiempo. Además se asume que los vectores de ruido son independientes del estado actual $\mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] = 0$ $\mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0$.

Se definen las matrices de covarianzas entre las salidas $\mathbf{\Lambda}_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ y la matriz de covarianza entre la salida y el estado siguiente $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ como:

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (2.1.21)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] \quad (2.1.22)$$

A partir de estas definiciones se pueden determinar las siguientes propiedades:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (2.1.23)$$

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{C} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \quad (2.1.24)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (2.1.25)$$

$$\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad (2.1.26)$$

Se define la matriz de Hankel $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2li \times j}$ a partir de las salidas como:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{j}} \mathbf{Y}_{1|2i} \quad (2.1.27)$$

Donde se ha utilizado la siguiente notación:

$$\mathbf{Y}_{1|i} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_j \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots & \mathbf{y}_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.28)$$

En otras palabras, $\mathbf{Y}_{a|b}$ corresponde a la matriz de Hankel con j columnas y con el primer vector fila, conteniendo las salidas y_a hasta y_b , tomando en cuenta que $a < b$. Es válido plantear que debido a razones estadísticas se considera que $j \rightarrow \infty$. Además, la matriz de Hankel se puede escribir denotando las salidas “pasadas” $\mathbf{Y}_p \in \mathbb{R}^{li \times j}$ y las salidas “futuras” $\mathbf{Y}_f \in \mathbb{R}^{li \times j}$ como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1|i} \\ \mathbf{Y}_{i+1|2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \quad (2.1.29)$$

Los cuales corresponden solo a una subdivisión de esta matriz.

Para que el trasfondo teórico sea válido para ambos sistemas de identificación estocásticos, se asume que el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es observable lo cual implica que todos los modos del sistema pueden ser observados a partir de la salida, y que el par (\mathbf{A}, \mathbf{G}) es controlable, lo cual implica que todos los modos del sistema pueden ser solicitados a partir de la entrada estocástica.

Finalmente se define la matriz de observabilidad extendida $\mathbf{O}_i \in \mathbb{R}^{li \times n_2}$ y la matriz de controlabilidad estocástica inversamente extendida $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{n_2 \times li}$ como:

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.30)$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{AG} \quad \mathbf{G}] \quad (2.1.31)$$

Dado que la matriz \mathbf{O}_i depende del par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) y la matriz \mathbf{C}_i del par (\mathbf{A}, \mathbf{G}) se denominan como matriz de “observabilidad” y matriz de “controlabilidad” respectivamente. Al considerar múltiples submatrices para estas matrices, se añade el apellido “extendida” e “inversamente extendida” (en función de la secuencia que presenta en su construcción cada una de estas matrices).

2.1.2.2 SSI-COV

El método de identificación en el subespacio estocástico a partir de covarianzas (SSI-COV por sus siglas en inglés) se aplica al determinar las matrices de covarianza entre las salidas (2.1.21), en función de las cuales se forma la matriz de Toeplitz $\mathbf{T}_{1|i} \in \mathbb{R}^{li \times li}$

$$\mathbf{T}_{1|i} = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \dots & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \dots & \Lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \dots & \Lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.1.32)$$

Tomando en cuenta la ecuación (2.1.26) esta matriz se puede descomponer en función de las matrices \mathbf{O}_i y \mathbf{C}_i (ecuaciones (2.1.30) y (2.1.31) respectivamente):

$$\mathbf{T}_{1|i} = \mathbf{O}_i \mathbf{C}_i \quad (2.1.33)$$

Esta última relación va a ser utilizada como entrada para el algoritmo FMO-SSI expuesto posteriormente.

Corresponde destacar que, dada la forma en que este método resuelve el problema para encontrar las matrices de estado, no es posible obtener estimaciones directas para las matrices de covarianza $(\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$, y por lo tanto no resulta efectivo para estimar los criterios adicionales de energía dependientes de estos parámetros que se exponen en la sección 2.2.1.3.

2.1.2.3 SSI-DATA

El método de identificación en el subespacio estocástico a partir de los datos (SSI-DATA por sus siglas en inglés) contempla el uso (teórico) del filtro de Kalman (ver Anexo 7.2) para formar la secuencia de estado del filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i \in \mathbb{R}^{2n_2 \times j}$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+j-1}] \quad (2.1.34)$$

Por otro lado, se genera una factorización QR de la matriz de Hankel definida en (2.1.27):

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{Q}^T \quad (2.1.35)$$

Donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ es una matriz ortonormal $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_j$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2li \times j}$ corresponde a una matriz triangular inferior. De esta forma, la matriz \mathbf{H} se puede descomponer como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & 0 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix} \quad (2.1.36)$$

Con $\mathbf{R}_{11} \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ $\mathbf{R}_{21} \in \mathbb{R}^{l \times l_i}$ $\mathbf{R}_{31} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l_i}$ $\mathbf{R}_{22} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ $\mathbf{R}_{32} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l}$ $\mathbf{R}_{33} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times l(i-1)}$
 $\mathbf{Q}_1^T \in \mathbb{R}^{l_i \times j}$ $\mathbf{Q}_2^T \in \mathbb{R}^{l \times j}$ $\mathbf{Q}_3 \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times j}$.

Se realiza una proyección $\mathcal{P}_i \in \mathbb{R}^{l_i \times j}$ de las filas espacio de las salidas futuras \mathbf{Y}_f sobre las filas espacio de las salidas pasadas \mathbf{Y}_p (ver ecuación (2.1.29)) definido como:

$$\mathcal{P}_i = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T (\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T)^\dagger \mathbf{Y}_p \quad (2.1.37)$$

Donde $(\cdot)^\dagger$ corresponde a la pseudo-inversa de una matriz. Usando la descomposición QR (2.1.36), esta proyección se puede escribir como:

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{21} \\ \mathbf{R}_{31} \end{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \quad (2.1.38)$$

Es posible demostrar [6] que esta proyección se puede factorizar entre la matriz de observabilidad \mathbf{O}_i y la secuencia de estado del filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$

$$\mathcal{P}_i = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{X}}_i \quad (2.1.39)$$

A partir de esta última relación se consiguen las matrices (\mathbf{A}, \mathbf{C}) necesarias para caracterizar las propiedades dinámicas, en función del uso del algoritmo FMO-SSI descrito posteriormente.

Adicionalmente, se determinan las matrices de covarianza $(\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$ extendiendo las ecuaciones del modelo espacio estado (2.1.12) y (2.1.13):

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{pmatrix} \quad (2.1.40)$$

Teniendo las matrices (\mathbf{A}, \mathbf{C}) se busca determinar las matrices $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ y $\hat{\mathbf{X}}_i$, de tal forma de obtener los residuales $\boldsymbol{\rho}_w \in \mathbb{R}^{n_2 \times j}$ y $\boldsymbol{\rho}_v \in \mathbb{R}^{l \times j}$, para luego conseguir las matrices de covarianza $(\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$ a partir de las covarianzas de estas.

La matriz $\hat{\mathbf{X}}_i$ surge a partir de la ecuación (2.1.39) y la matriz $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$, a partir de la relación análoga:

$$\mathcal{P}_{i-1} = \mathbf{O}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (2.1.41)$$

Donde la proyección $\mathcal{P}_{i-1} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times j}$ se determina directamente a partir de la descomposición QR (1.36):

$$\mathcal{P}_{i-1} = [\mathbf{R}_{31} \quad \mathbf{R}_{32}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (2.1.42)$$

El procedimiento para obtener las matrices de covarianza se expone dentro del marco del algoritmo FMO-SSI.

2.1.2.4 FMO-SSI

El algoritmo rápido de identificación con múltiples órdenes (FMO) [5] parte con la propiedad de factorización de la llamada matriz de subespacio \mathcal{H}_i , formada a partir de la información de salida (vectores de salida \mathbf{y}_k):

$$\mathcal{H}_i = \mathbf{O}_i \mathbf{Z} \quad (2.1.43)$$

Donde \mathbf{O}_i corresponde a la matriz de observabilidad extendida. Para el caso de SSI-COV la matriz de subespacio corresponde a la matriz de Toeplitz $\mathbf{T}_{1|i}$ (2.1.32) y la relación (2.1.43) se encuentra en (2.1.33), con respecto al caso SSI-DATA, la matriz de subespacio corresponde a la proyección \mathcal{P}_i (2.1.37) y la relación (2.1.43) se encuentra en (2.1.39). La matriz \mathbf{Z} no tiene relevancia en el algoritmo, pero se observa que corresponde a las matrices \mathbf{C}_i y $\hat{\mathbf{X}}_i$ para SSI-COV y SSI-DATA respectivamente.

Conocida la matriz de subespacio \mathcal{H}_i , se realiza la descomposición en valores singulares con el fin de determinar la matriz de observabilidad \mathbf{O}_i :

$$\mathcal{H}_i = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Delta}_0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (2.1.44)$$

$$\mathbf{O}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Delta}_1^{1/2} \quad (2.1.45)$$

La subdivisión de las matrices depende del llamado “orden del modelo” n el cual corresponde al número de valores singulares considerados. En la sección 2.1.3 se describe en detalle este parámetro (junto con la definición de diagrama de estabilización).

Las dimensiones de la matriz de subespacio \mathcal{H}_i tiene las dimensiones de la matriz de Toeplitz $\mathbf{T}_{1|i}$ para el caso de identificación mediante SSI-COV, y las de la proyección \mathcal{P}_i para el caso de identificación SSI-DATA. En ambos casos el número de filas no varía, y es igual al li , es decir, dependiente del número de sensores por el número de pasos de tiempo considerados en la formación de la matriz de Hankel (1.27).

En virtud de lo anterior: $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{li \times n}$ $\mathbf{\Delta}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\mathbf{O}_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$.

Para efectos del presente método el orden del modelo se considera como el máximo orden deseado ($n = n_t$), y se define:

$$\mathbf{O}^\uparrow = \mathbf{O}_{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-2} \end{bmatrix}, \mathbf{O}^\downarrow = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.1.46)$$

Nótese que $\mathbf{O}^\uparrow \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n_t}$ y $\mathbf{O}^\downarrow \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n_t}$ se puede generar directamente a partir de \mathbf{O}_i (eliminando las filas correspondientes), y es fácil ver que cumplen la siguiente relación:

$$\mathbf{O}_t^\uparrow \mathbf{A}_t = \mathbf{O}_t^\downarrow \quad (2.1.47)$$

El subíndice t hace referencia al máximo orden del modelo deseado n_t . La matriz de estado \mathbf{A}_t es la solución al problema de mínimos cuadrados de (2.1.47), una manera de resolver este problema es mediante la descomposición QR:

$$\mathbf{O}_t^\uparrow = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t \quad (2.1.48)$$

Donde $\mathbf{Q}_t \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n_t}$ corresponde a una matriz con columnas ortogonales y $\mathbf{R}_t \in \mathbb{R}^{n_t \times n_t}$ una matriz triangular superior. Definiendo $\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{n_t \times n_t}$ como:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{O}_t^\downarrow \quad (2.1.49)$$

La solución al problema de mínimos cuadrados (2.1.47) está dado por:

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{S}_t \quad (2.1.50)$$

Por otro lado, la matriz de salida $\mathbf{C}_t \in \mathbb{R}^{l \times n_t}$ se obtiene directamente a partir del primer bloque fila de la matriz de observabilidad extendida (2.1.45).

Si bien se pueden emplear las ecuaciones (2.1.44) a (2.1.50) para determinar todos los órdenes del modelo, esta forma de encontrar las matrices de estado implica el cálculo iterativo de la descomposición en valores singulares (2.1.44) y la descomposición QR (2.1.48) que resulta muy costoso computacionalmente para múltiples órdenes del modelo.

Alternativamente, y de manera más rápida y eficiente (razón por la cual el presente algoritmo presenta el apellido “rápido”), se utiliza solo la descomposición QR asociada al máximo orden del modelo deseado, y para cada orden del modelo n_k ($n_k < n_t$) adicional se realiza una partición de \mathbf{R}_t^{-1} y \mathbf{S}_t :

$$\mathbf{R}_t^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k11} & \mathbf{R}_{k12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{k22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k11} & \mathbf{S}_{k12} \\ \mathbf{S}_{k21} & \mathbf{S}_{k22} \end{bmatrix} \quad (2.1.51)$$

Donde $\mathbf{R}_{k11}, \mathbf{S}_{k11} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$. De esta forma la solución al problema de mínimos cuadrados (2.1.47) para cualquier orden del modelo $n_k < n_t$ está dado por [5]:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k11} \mathbf{S}_{k11} \quad (2.1.52)$$

Por otra parte, la matriz de salida $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{l \times n_k}$ se determina al reducir el número de columnas de la matriz de salida \mathbf{C}_t .

Finalmente, para obtener las matrices de covarianza $\{\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}\}$ (solo caso SSI-DATA), las cuales se obtienen a partir de las covarianzas de los residuales en (2.1.40), es necesario resolver los problemas de mínimos cuadrados (2.1.39) y (2.1.41), los cuales se resuelven primero para el máximo orden del modelo buscado, y de forma análoga a las ecuaciones (2.1.51) y (2.1.52) para el resto de los órdenes. La única diferencia radica en la ecuación (2.1.52), en el cual la partición para \mathbf{S}_t es:

$$\mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^{11} \\ \mathbf{S}_k^{21} \end{bmatrix} \quad (2.1.53)$$

Donde $\mathbf{S}_k^{11} \in \mathbb{R}^{n_k \times j}$, es decir, la partición contempla la totalidad de las columnas determinadas en \mathbf{S}_t . Esto se demuestra fácilmente a partir de la demostración análoga para (2.1.52) en [5].

En el anexo 7.1 se presenta un resumen de los algoritmos utilizados para SSI-COV y SSI-DATA, donde para este último se toma en cuenta el cálculo de las matrices de covarianza $\{\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}\}$.

2.1.3 Orden del modelo y Diagrama de estabilización

El orden del modelo corresponde, como ya fue mencionado en la sección anterior, al número de valores singulares considerados en la descomposición SVD de la matriz de subespacio \mathcal{H} . Al mismo tiempo entrega las dimensiones de la matriz de estado \mathbf{A} y de la matriz de salida \mathbf{C} identificadas, y en consecuencia el doble del número de frecuencias, razones de amortiguamiento y formas modales asociadas.

La dependencia de los sistemas de identificación al orden del modelo no se restringe a los métodos estocásticos expuestos anteriormente, sino que abarca la totalidad de los métodos paramétricos de identificación de sistemas estructurales (por ejemplo ERA [7], N4SID [8]). Si bien existen técnicas para encontrar el orden del modelo tal que maximice la capacidad de predicción del método de identificación utilizado [9] el principal objetivo de estos es usualmente,

y para el caso del presente estudio, encontrar el conjunto de modos que representen el comportamiento de la estructura llamado *modos físicos*. Con este objetivo en mente es que se utiliza un amplio rango de órdenes del modelo.

Al utilizar órdenes del modelo distintos al óptimo (e inclusive para el orden del modelo óptimo) es inevitable encontrar modos que no son representativos del sistema o *modos espurios*. La aparición de estos modos es resultado de distintos factores [10].

La herramienta más utilizada en la literatura es el llamado *diagrama de estabilización*. En términos simples, el diagrama de estabilización corresponde a un gráfico de orden del modelo contra las frecuencias obtenidas.

A partir de la observación empírica de numerosos problemas de identificación modal se ha logrado detectar que los modos físicos tienden a aparecer de manera “estable” a partir de un determinado orden del modelo hacia arriba, en virtud de esta observación el diagrama de estabilización muestra aquellos modos estables en forma de columnas. A pesar de lo anterior, detectar las columnas estables no siempre es directo, ya que el diagrama puede verse distorsionado fuertemente por la gran cantidad de modos adicionales presentes, por lo que determinar estas columnas va a ser dependiente del juicio del analista y puede requerir el uso de criterios adicionales para su selección.

En la siguiente sección (2.2) se expone el método de interpretación automática de diagramas de estabilización, o en otras palabras: la detección automática de un conjunto de modos representativos de la estructura a partir del diagrama de estabilización, propuesto por Reynders et al. [1].

Un ejemplo de diagrama de estabilización se encuentra en la Figura 3.1.2 y Figura 3.1.3 para SSICOV y SSIDATA respectivamente.

2.2 Método de Interpretación Automático

El método de interpretación automático se describe en cuatro etapas de agrupamiento:

- 1) Primera Etapa: Todos los modos del diagrama de estabilización se separan entre modos (posiblemente) físicos y (definitivamente) espurios a partir de un método de agrupamiento en base a la mayor cantidad posible de criterios de validación. De esta forma el conjunto de modos espurios se elimina del diagrama. Esta etapa se puede entender como una limpieza inicial del diagrama de estabilización para lograr observar con más claridad las columnas estables.
- 2) Segunda Etapa: A partir del agrupamiento jerárquico del conjunto de modos (posiblemente) físicos se generan grupos de modos similares en base a la distancia entre modos y con una distancia de corte resultado de la primera etapa. La segunda etapa es entendida como la formación de grupos de columnas estables dentro del diagrama de estabilización.
- 3) Tercera Etapa: Los grupos se separan a partir de un método de agrupamiento en dos conjuntos: conjunto de grupos de modos físicos y de modos espurios. El conjunto de grupos de modos espurios se elimina del diagrama y se tiene como resultado entonces un conjunto de grupos de modos físicos. Esta etapa tiene como objetivo determinar las columnas de modos físicos identificados.
- 4) Cuarta Etapa: La última etapa selecciona el modo representativo a cada grupo de modo físico, resultando en un conjunto de modos físicos representativos de la estructura. Esta etapa define por lo tanto el conjunto final de modos representativos de la estructura.

Cabe destacar que en [1] se presentan solo tres etapas de agrupamiento, donde la tercera etapa incluye la selección del modo representativo de cada elemento, pero debido a las distintas formas que se exponen para determinar este modo y a la inclusión de un nuevo método en base al conjunto más “denso”, se asocia al proceso de selección del modo representativo como una etapa adicional.

En las siguientes secciones se presenta en detalle cada etapa.

2.2.1 Primera Etapa

La primera etapa utiliza criterios de validación débiles y fuertes para cada modo identificado. Los criterios de validación corresponden a parámetros normalizados que ayudan a determinar si un modo corresponde a uno físico o espurio. Estos se pueden dividir en criterios débiles que toman un valor en el rango $[0,1]$ o criterios fuertes que toman un valor binario $\{0,1\}$. Dichos criterios se resumen en la Tabla 2.2.1 y Tabla 2.2.2 para los criterios débiles y fuertes respectivamente.

Tabla 2.2.1 – Resumen criterios débiles de validación

<i>Criterio</i>	<i>Nombre</i>	<i>Valor</i>	<i>Ideal Físico</i>	<i>Ideal Espurio</i>
CD1	Dist. de Frecuencia	$d(f_i)$	0	1
CD2	Dist. de Razón de Amortiguamiento	$d(\beta_i)$	0	1
CD3	Dist. Valor Propio (continuo)	$d(\lambda_{ci})$	0	1
CD4	Dist. en función de MAC	$MAC_d(\phi_i)$	1	0
CD5	Colinealidad de la fase modal	$MPC(\phi_i)$	1	0
CD6	Desviación de la fase modal	$MPD(\phi_i)$	0	1
CD7	Norma de transferencia modal	$MTN(i)$	1	0
CD8	Contribución modal a la respuesta medida	$CMM(i)$	1	0

Tabla 2.2.2 – Resumen criterios fuertes de validación

<i>Criterio</i>	<i>Prueba</i>	<i>Físico</i>	<i>Espurio</i>
CF1	$\beta_i > 0$	1	0
CF2	$\beta_i < 20[\%]$	1	0
CF3	$conj(\lambda_{ci})$	1	0
CF4	$conj(\phi_i)$	1	0
CF5	$f < F[Hz]$	1	0

Los criterios débiles de validación utilizados se pueden dividir en *criterios de distancia*, *criterios de forma modal* y *criterios de energía*, expuestos a continuación. Posteriormente se presentan los criterios fuertes utilizados. Finalmente se expone el método de separación del conjunto de modos obtenidos en modos (posiblemente) físicos y (definitivamente) espurios. Cabe destacar que la necesidad de tomar parámetros normalizados en el rango [0,1] recae sobre el método de agrupamiento.

2.2.1.1 Criterios de distancia

Distancia en frecuencia, razón de amortiguamiento y valor propio:

Sean $f_i^k, \beta_i^k, \lambda_{c,i}^k$ la frecuencia, razón de amortiguamiento y valor propio continuo (ecuaciones 2.1.17-2.1.19) asociado al i -ésimo modo del k -ésimo orden del modelo. Dado que la distancia se obtiene de manera análoga para los tres casos, se considera χ_i^k como la representación genérica para cada caso, así la distancia se obtiene como:

$$d(\chi_i^k) = \min \left(\frac{|\chi_i^k - \chi_j^{k-1}|}{\max(|\chi_i^k|, |\chi_j^{k-1}|)} \right) \quad (2.2.1)$$

En palabras, este criterio de distancia corresponde al mínimo del conjunto de distancias entre el modo en análisis y los modos asociados al orden del modelo inmediatamente inferior. Es importante indicar que en el caso de que el modo en análisis corresponda al menor orden del modelo determinado, la distancia se compara con el conjunto de modos asociados al orden del modelo inmediatamente superior, lo cual si bien altera la forma en que se determina este criterio (para los modos asociados al menor orden del modelo), los resultados numéricos obtenidos son

comparables al resto de los modos evaluados (asociados a órdenes mayores). Lo anterior evita descartar los modos asociados al menor orden del modelo.

A partir de la definición de este parámetro, si la distancia tiende a cero implica que existe un modo muy cercano en un orden del modelo inferior, y recordando que la base de la interpretación del diagrama de estabilización está asociada a la estabilidad de los modos, existe una mayor probabilidad de que este modo sea físico. Caso contrario, si la diferencia es mayor (limitada por la unidad) implica que no se presentan modos cercanos y por lo tanto existe una mayor probabilidad de que el modo sea espurio.

Distancia MAC

El criterio de aseguramiento modal (MAC por sus siglas en inglés) [11] corresponde a un coeficiente de correlación entre formas modales:

$$MAC(\phi_i, \phi_j) = \frac{|\phi_i^* \phi_j|^2}{\|\phi_i\|_2^2 \|\phi_j\|_2^2} \quad (2.2.2)$$

Donde $(\cdot)^*$ corresponde a la conjugada traspuesta. Por definición, si ambas formas modales corresponden al mismo modo MAC toma un valor igual a la unidad, y en caso contrario es menor a la unidad (tomando un valor nulo en el caso límite).

La distancia en función de MAC corresponde a la comparación entre el modo en análisis y el orden del modelo inferior de forma análoga a (2.2.1):

$$MAC_d(\phi_i^k) = \max\left(MAC(\phi_i^k, \phi_j^{k-1})\right) \quad (2.2.3)$$

En palabras, el criterio de distancia en función de MAC corresponde al máximo del conjunto de valores MAC entre la forma modal en estudio y las formas modales asociadas al orden del modelo inmediatamente inferior. Las observaciones asociadas a este parámetro son análogas al caso anterior.

2.2.1.2 Criterios de forma modal

Los criterios de forma modal miden la consistencia de la forma modal en el plano complejo. A continuación se presentan dos formas de medir esta consistencia: Colinealidad de la Fase Modal (MPC, por sus siglas en inglés) [12], [1] y Desviación Media de la Fase (MPD, por sus siglas en inglés) [1]. Ambos criterios se estudian en el anexo 7.6.

Colinealidad de la fase modal (MPC)

La colinealidad de la fase modal (MPC) cuantifica la consistencia espacial de las formas modales identificadas. Para modos clásicos el vector de forma modal es real o *monofase*. Bajo el comportamiento monofásico la matriz de covarianza de la parte real e imaginaria de un vector forma modal $\phi_i \in \mathbb{C}^{l \times 1}$ (donde l indica el número de grados de libertad observados) tiene solo un valor propio no nulo, o lo que es equivalente, son colineales.

En virtud de lo anterior, se define MPC como [12]:

$$MPC(\phi_j) = \left[\frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 1 \right]^2 \quad (2.2.4)$$

Donde λ_1 y λ_2 corresponden al mayor y menor valor propio (respectivamente) de la matriz de covarianza:

$$\mathbf{S}_{cov} = \begin{bmatrix} Re(\boldsymbol{\phi}_i)^T Re(\boldsymbol{\phi}_i) & Re(\boldsymbol{\phi}_i)^T Im(\boldsymbol{\phi}_i) \\ Re(\boldsymbol{\phi}_i)^T Im(\boldsymbol{\phi}_i) & Im(\boldsymbol{\phi}_i)^T Im(\boldsymbol{\phi}_i) \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

Donde $Re(\cdot)$ y $Im(\cdot)$ Denotan el operador parte real y parte imaginaria respectivamente.

De esta forma, si la matriz de covarianza tiene solo un valor propio no nulo $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$, es decir si se tiene un comportamiento monofásico, MPC toma un valor igual a 1. En caso contrario, si la fase no está correlacionada, los valores propios van a tender a ser similares conforme la correlación es menor, hasta el límite $\lambda_1 = \lambda_2$ en cuyo caso MPC toma un valor igual a 0.

Desviación media de la fase (MPD)

La desviación media de la fase (MPD) mide el valor promedio ponderado de la desviación de la fase de cada componente de la forma modal con respecto a la fase media. El argumento detrás de este parámetro es análogo al caso anterior: para modos clásicos el vector de forma modal es monofásico, es decir, la fase no varía para cada componente del vector.

La fase media (MP) de la forma modal $\boldsymbol{\phi}_i$ se puede definir como:

$$MP(\boldsymbol{\phi}_i) = \arg \min_{\theta} \left(\frac{\|Im(\boldsymbol{\phi}_i) - \tan(\theta) Re(\boldsymbol{\phi}_i)\|_2^2}{1 + \tan(\theta)} \right) \quad (2.2.6)$$

En palabras, MP corresponde al ángulo “ θ ” de la recta que mejor se adapta en el plano complejo para la forma modal (en el sentido de minimizar la regresión ortogonal).

Este problema se puede resolver a partir de la descomposición en valores singulares de la matriz $[Re(\boldsymbol{\phi}_i) \quad Im(\boldsymbol{\phi}_i)]$ [1].

$$\mathbf{USV}^t = [Re(\boldsymbol{\phi}_j) \quad Im(\boldsymbol{\phi}_j)] \quad (2.2.7)$$

De esta forma:

$$MP(\boldsymbol{\phi}_i) = \text{atan} \left(-\frac{V_{12}}{V_{22}} \right), \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

La desviación de la fase de un elemento de $\boldsymbol{\phi}_i$ puede obtenerse a partir del producto escalar entre $[Re(\boldsymbol{\phi}_{j_o}) \quad Im(\boldsymbol{\phi}_{j_o})]^t$ y $[V_{22} \quad -V_{12}]^t$, donde $\boldsymbol{\phi}_{j_o}$ denota el o -ésimo elemento de $\boldsymbol{\phi}_i$ en análisis. Por lo tanto, el promedio ponderado de la desviación de la fase media se obtiene como:

$$MPD(\boldsymbol{\phi}_j) = \frac{\sum_{o=1}^n w_o \arccos \left| \frac{Re(\boldsymbol{\phi}_{j_o})V_{22} - Im(\boldsymbol{\phi}_{j_o})V_{12}}{\sqrt{V_{12}^2 + V_{22}^2} |\boldsymbol{\phi}_{j_o}|} \right|}{\sum_{o=1}^n w_o}, \quad \sum_{o=1}^n w_o \neq 0 \quad (2.2.9)$$

Donde w_o corresponden a los ponderadores, y se consideran iguales a $|\boldsymbol{\phi}_{j_o}|$ con el fin de entregar mayor peso a los componentes modales de mayor amplitud. Finalmente, dado que el valor que entrega este parámetros es un ángulo, se normaliza con respecto a $\frac{\pi}{4}$ o 45° (dependiendo de las unidades) para obtener un rango de valores entre 0 y 1.

Si la desviación media de la fase es amplia (limitada por $\frac{\pi}{4}$) entonces MPD tomará un valor cercano a la unidad, en caso contrario, si la desviación media de la fase tiende a ser nula, MPD tomará un valor cercano a cero.

2.2.1.3 Criterios de energía

Los criterios de energía corresponden a parámetros que cuantifican la energía asociada a cada modo. A continuación se presentan dos criterios de energía: Norma de Transferencia Modal (MTN) y Contribución Modal a la respuesta Medida (CMM). Ambos criterios se estudian en el anexo 7.7.

Norma de transferencia modal (MTN)

La norma de transferencia modal (MTN) [10] [4] es una medida del error que se genera al extraer un modo del modelo. Esta se define a partir de una descomposición modal del espectro de densidad de potencia positivo de las mediciones (en función de la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$):

$$\mathbf{S}_{yy}^+(\omega) = \frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{\Lambda}_k e^{-kj\omega\Delta t} \quad (2.2.10)$$

Donde $\mathbf{\Lambda}_k$ se define en (2.1.21), y Δt corresponde al espacio de tiempo entre cada medición observada. Tomando en cuenta la ecuación (2.1.26), esta expresión se puede escribir como:

$$\mathbf{S}_{yy}^+(\omega) = \mathbf{C}(e^{j\omega\Delta t}\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}_0 \quad (2.2.11)$$

Esta última expresión se puede descomponer modalmente, obteniendo el espectro de densidad de potencia positivo asociado a cada modo, resultando [10] [4]:

$$\mathbf{S}_{yy,i}^+(\omega) = \boldsymbol{\phi}_i(e^{j\omega\Delta t} - \lambda_i)^{-1} \mathbf{g}_i + \frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}_{0i} \quad (2.2.12)$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad \lambda_i = \Lambda_{(i,i)} \quad \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\Psi}_{(:,i)} \quad (2.2.13)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi} \quad \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\Phi}_{(:,i)} \quad (2.2.14)$$

$$\boldsymbol{\psi}_i^{-1} = \boldsymbol{\Psi}_{(i,:)}^{-1} \quad \mathbf{g}_i = \boldsymbol{\psi}_i^{-1}\mathbf{G} \quad (2.2.15)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{0i} = \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{\psi}_i^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\psi}_i^{-1})^T\boldsymbol{\phi}_i^T \quad (2.2.16)$$

Cabe destacar que se utiliza el subíndice $(:, i)$ para indicar la i -ésima columna, $(i, :)$ la i -ésima fila y el elemento (i, i) de cada matriz asociada. Además, en la expresión para $\mathbf{\Lambda}_{0i}$ (matriz de covarianza modal) se utiliza $\boldsymbol{\Sigma}$ que puede ser obtenida resolviendo la ecuación de Lyapunov en (2.1.23).

El espectro de densidad positivo modal (2.2.12) cumple (por definición):

$$\mathbf{S}_{yy}^+(\omega) = \sum_i \mathbf{S}_{yy,i}^+(\omega) \quad (2.2.17)$$

Finalmente, la MTN del j -ésimo modo se obtiene a partir de:

$$MTN(j) = \|\mathbf{S}_{yy,j}^+(\omega_j)\|_{\infty} = \max \sigma(\mathbf{S}_{yy,j}^+(\omega_j)) \quad (2.2.18)$$

Donde $\sigma(\cdot)$ corresponde al conjunto de valores singulares.

De esta forma para cada orden del modelo, y matrices \mathbf{A} , \mathbf{C} , $\boldsymbol{\Sigma}$ asociadas, se tiene la MTN de cada modo. El valor que toma este parámetro no está normalizado en un rango, sino que para modos de alta energía (o de gran error al extraer este modo) MTN entrega un valor alto, y para modos de

baja energía entrega un bajo valor. Debido a lo anterior, para cada orden del modelo en el cual se determina la MTN se normaliza con respecto al máximo.

Contribución Modal a la respuesta Medida (CMM)

La contribución modal a la respuesta medida (CMM) [13], tal como su nombre lo indica, es una estimación de la contribución de cada modo a la respuesta total (medida). Para determinar este parámetro es necesario primero definir el modelo espacio estado (ecuaciones 2.1.12-2.1.13) en su representación en forma de innovación (expuesto en el anexo 7.2):

$$\boldsymbol{\mu}_{k+1|k} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} + \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}_k \quad (2.2.19)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} \quad (2.2.20)$$

Notando que $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}$ es una estimación de la respuesta de los modos, y $\boldsymbol{\epsilon}_k$ el error asociado, o de manera directa de la ecuación (2.2.20):

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} + \boldsymbol{\epsilon}_k \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k^m + \mathbf{y}_k^e \quad (2.2.22)$$

Donde la ecuación (2.2.22) solo muestra el significado físico, donde \mathbf{y}_k^m es la respuesta modal estimada, y \mathbf{y}_k^e el error asociado. Descomponiendo modalmente, notando que $\boldsymbol{\Lambda}$ es diagonal:

$$\mathbf{y}_k = \left(\sum_i \boldsymbol{\Phi}\mathbf{I}_{m_i}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} \right) + \mathbf{y}_k^e \quad (2.2.23)$$

$$\mathbf{y}_k = \left(\sum_i \mathbf{y}_k^{m_i} \right) + \mathbf{y}_k^e \quad (2.2.24)$$

Donde \mathbf{I}_{m_i} corresponde a una matriz de ceros, excepto en los elementos de la diagonal asociados al modo i y su complejo conjugado (o solo en ese elemento en caso de no existir un par conjugado). Las ecuaciones (2.2.23) y (2.2.24) son equivalentes y corresponden a la descomposición modal de la respuesta estimada: $\mathbf{y}_k^{m_i} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{I}_{m_i}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}$

Finalmente, para determinar la contribución de cada modo a la medición, se definen las matrices de salida \mathbf{Y} , de salida estimada (modal) \mathbf{Y}^{m_i} , y la matriz de error \mathbf{Y}^e :

$$\mathbf{Y} = \sum_i \mathbf{Y}^{m_i} + \mathbf{Y}^e \Leftrightarrow [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \dots \ \mathbf{y}_N] = \sum_i [\mathbf{y}_1^{m_i} \ \mathbf{y}_2^{m_i} \ \dots \ \mathbf{y}_N^{m_i}] + [\mathbf{y}_1^e \ \mathbf{y}_2^e \ \dots \ \mathbf{y}_N^e] \quad (2.2.25)$$

Multiplicando esta ecuación por \mathbf{Y}^T , interesan solo los elementos de la diagonal (por ejemplo el elemento (l, l) de la matriz $(\mathbf{Y}^{m_i}\mathbf{Y}^T)$ es la covarianza entre la medición y la estimación para el canal l del modo i).

$$(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)_D = \sum_i (\mathbf{Y}^{m_i}\mathbf{Y}^T)_D + (\mathbf{Y}^e\mathbf{Y}^T)_D \quad (2.2.26)$$

Donde $(\cdot)_D$ corresponde al operador diagonal ($(\mathbf{X})_D$ es una matriz con ceros fuera diagonal y los valores respectivos de \mathbf{X} en la diagonal). Normalizando por $(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)_D^{-1}$ y pasando las matrices diagonales a vectores con los elementos de las diagonales:

$$\{\mathbf{1}\} = \sum_i \boldsymbol{\Delta}_{m_i} + \boldsymbol{\Delta}_e \quad (2.2.27)$$

Donde $\{\mathbf{1}\}$ es un vector de unos, Δ_{m_i} vector formado por la diagonal de $(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)_D^{-1}(\mathbf{Y}^{m_i}\mathbf{Y}^T)_D$, y Δ_e vector formado por la diagonal de $(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)_D^{-1}(\mathbf{Y}^e\mathbf{Y}^T)_D$. Obsérvese que el número de elementos de estos vectores es igual al número de salidas observadas l . Se define Δ_{m_i} como la contribución del modo i a cada canal (en cada elemento del vector).

De esta forma se define finalmente la Contribución Modal a la respuesta Medida a partir del promedio de cada modo:

$$CMM(j) = \frac{1}{l} \sum \Delta_{m_j} \quad (2.2.28)$$

Teóricamente, los modos físicos tienden a tener mayores valores y los modos espurios tienden a tener valores nulos. Aunque estos valores están limitados naturalmente por la unidad, es válido normalizar este parámetro con respecto al máximo para cada orden del modelo analizado, para acentuar las diferencias.

2.2.1.4 Criterios fuertes

Los criterios fuertes de validación, como ya fue mencionado anteriormente, corresponden a parámetros que toman valores binarios $\{0,1\}$ a partir de los cuales se determina si el modo en análisis corresponde a un modo físico o no. A continuación se presentan los criterios fuertes utilizados:

Límites a la frecuencia y a la razón de amortiguamiento

En condiciones normales las estructuras son siempre estables, por lo que las razones de amortiguamiento β_i de cada modo físico debiesen ser siempre positivas. Adicionalmente modos con razones de amortiguamiento muy grandes son poco usuales, en la práctica razones de amortiguamiento mayores a 20[%] no son realísticos físicamente.

Por otro lado, se puede limitar el límite de frecuencia donde se buscan modos físicos a un valor dependiente de cada estructura.

Presencia de par conjugado

Tal como muestran las ecuaciones 2.1.17-2.1.19 cada modo físico identificado debería presentar un par complejo conjugado tanto para el valor propio λ_{c_i} determinado, como para la forma modal ϕ_i . La presencia de este va a definir si un determinado modo es considerado físico o no.

2.2.1.5 Método de agrupamiento

El método de separación del conjunto de modos identificados consta de dos partes: primero se aplica el método de agrupamiento *k-means* ($k = 2$) en función de los criterios débiles de validación, y sobre el conjunto de modos (posiblemente) físicos obtenidos como resultado, se verifica el cumplimiento de los criterios fuertes.

El método de agrupamiento *k-means* tiene por objetivo dividir un conjunto de elementos en “ k ” subconjuntos o *clusters*. En este caso se buscan dos *clusters*, representativos de modos (posiblemente) físicos y (definitivamente) espurios. Este algoritmo minimiza la suma de las distancias euclidianas cuadráticas entre cada elemento representado por un punto $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{n_{cd}}$ y el centroide del *cluster* más cercano $\{\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_e\} \in \mathbb{R}^{n_{cd}}$ el cual, al mismo tiempo, va a definir a que conjunto de modos va a pertenecer:

$$\{\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_e\} = \operatorname{args\,min}_{\mathbf{p}_{\{e,f\}}} \sum_{l \in \{e,f\}} \sum_{j=1}^{n_e(l)} \|\mathbf{p}_{j,l} - \mathbf{p}_l\|_2^2 \quad (2.2.29)$$

Donde $n_e(l)$ indica el número de elementos asociados a cada cluster y $\mathbf{p}_{j,l}$ indica el conjunto de elementos pertenecientes a cada *cluster*:

$$\mathbf{p}_{j,f} = \{\mathbf{p}_j \mid \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_f\| \leq \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_e\|\}, \quad \mathbf{p}_{j,e} = \{\mathbf{p}_j \mid \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_e\| \leq \|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_f\|\} \quad (2.2.30)$$

La función objetivo (2.2.29) se minimiza en un proceso de optimización iterativo:

- 1) Se definen los centroides $\{\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_e\}$ como el caso de modos idealmente físico y espurio (respectivamente), en otras palabras, toman los valores límites de cada criterio débil.
- 2) Se calcula la distancia euclidiana entre cada punto \mathbf{p}_j y cada centroide $\{\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_e\}$. Cada punto se asigna al centroide más cercano (de menor distancia).
- 3) Se redefinen los centroides de manera tal que se minimice la distancia euclidiana total, esto es: usando (2.2.29) pero con puntos ya definidos a cada *cluster*. De esta forma, se calculan los centroides a partir del promedio de los puntos asociados a cada *cluster*.
- 4) Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que las asignaciones de cada elemento dejen de variar.

Así se tiene cada modo asignado como modo (posiblemente) físico y (definitivamente) espurio. Nótese que la necesidad de tomar parámetros normalizados para los criterios débiles asegura (hasta cierto punto) que cada parámetro tenga la misma ponderación en la división de conjuntos. Este método se ejemplifica en el anexo 7.3.

Finalmente, a partir del conjunto de modos (posiblemente) físicos, se verifica el cumplimiento de todos los criterios fuertes aplicados. De esta forma, el resultado de esta etapa corresponde al conjunto de modos clasificados como modos (posiblemente) físicos que cumplen con todos los criterios fuertes de validación.

2.2.2 Segunda Etapa

La segunda etapa de agrupamiento utiliza un método de agrupamiento jerárquico en función de la distancia entre modos definida como:

$$d(i, j) = \frac{|\lambda_{c_i} - \lambda_{c_j}|}{\max(|\lambda_{c_i}|, |\lambda_{c_j}|)} + 1 - \operatorname{MAC}(\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_j) \quad (2.2.31)$$

Si los modos i y j son similares, la distancia entre los valores propios (normalizados) va a ser cercana a cero y el valor MAC entre las formas modales va a ser cercana a la unidad, por lo que la distancia definida va a tomar un valor cercano a cero. En caso contrario, si los modos no son similares, la distancia adquirirá un valor superior (limitado por 2).

El método de agrupamiento jerárquico corresponde a un proceso iterativo que se puede describir como sigue:

- 1) Se define un número de grupos o “clusters” igual al número de elementos n_e (modos), donde cada cluster contiene solo un elemento.

- 2) Se calcula la distancia entre todos los grupos o “clusters”, y aquellos que presenten la menor distancia forman un nuevo grupo.
- 3) Se vuelve a calcular la distancia entre grupos, pero considerando el nuevo grupo definido, cuya distancia al resto de los grupos corresponde al promedio de las distancias entre cada punto, y se vuelven a agrupar aquellos que presenten la menor distancia.
- 4) El tercer paso se repite hasta obtener un solo grupo que contiene todos los elementos.

El número de iteraciones necesario para terminar el proceso iterativo es igual a $(n_{e1} - 1)$, donde para cada paso se conoce la distancia a la cual se unieron los grupos de menor distancia. Para la partición de los elementos se define una distancia de corte \tilde{d} que indica hasta que iteración se agrupan los elementos. Esta distancia se define como:

$$\tilde{d} = \mu_{e1} + 2\sigma_{e1} \quad (2.2.32)$$

Donde μ_{e1} y σ_{e1} corresponden al promedio y la desviación estándar (respectivamente) del vector \mathbf{e}_1 formado por los criterios débiles de distancia entre valor propio y MAC (2.2.1-2.2.2) sobre el conjunto resultante de la primera etapa:

$$\mathbf{e}_1 = d(\lambda)_1 + 1 - dMAC(\boldsymbol{\phi})_1 \quad (2.2.33)$$

Donde $d(\lambda)_1$ y $dMAC(\boldsymbol{\phi})_1$ corresponden a vectores que representan el valor de cada criterio débil para el conjunto de modos resultantes de la primera etapa.

Obteniéndose de esta forma un conjunto de grupos de modos similares, el cual corresponde al resultado de esta etapa. El anexo 7.4 ejemplifica este procedimiento.

2.2.3 Tercera Etapa

La tercera etapa de agrupamiento se ocupa de encontrar aquellos grupos de modos definidos en la segunda etapa que correspondan a grupos de modos físicos. Bajo el supuesto inicial de la estabilidad de modos físicos, el número de elementos de grupos de modos físicos va a ser mayor en comparación con el número de elementos de grupos de modos espurios. A partir de esta observación se genera una división del conjunto de grupos formados en la segunda etapa a partir del método de agrupamiento *k-means* ($k = 2$) en función del número de elementos.

Dada la posibilidad de que ocurra el caso en el que todos los grupos formados correspondan a grupos de modos físicos, se agrega una cantidad de grupos vacíos igual al número de grupos que contengan un número de elemento mayor que un quinto del número de elementos del grupo más grande.

De esta forma, considerando n_g grupos de modos similares con un número de elementos $g_i \in \mathbb{N}$ asociado a cada uno, y un número de grupos vacíos:

$$n_{ev} = \text{card} \left(\{g_i \mid g_i \geq \frac{1}{5} \max(g_i)\} \right) \quad (2.2.34)$$

Donde $\text{card}(\cdot)$ corresponde al cardinal del conjunto (o número de elementos del conjunto). Se tienen entonces un total de $(n_g + n_{ev})$ grupos tal que:

$$g_i = \begin{cases} g_i & i \leq n_g \\ 0 & i > n_g \end{cases} \quad (2.2.35)$$

Sobre este conjunto de grupos se aplica el método de agrupamiento *k-means*, de forma análoga a la sección 2.2.1.5, donde la función objetivo corresponde a:

$$\{g_f, g_e\} = \operatorname{args\,min}_{g_{\{e,f\}}} \sum_{l=\{e,f\}} \sum_{j=1}^{n_e(l)} \|g_{j,l} - g_l\|_2^2 \quad (2.2.36)$$

Donde $n_e(l)$ indica el número de elementos asociados a cada *cluster* y $g_{j,l}$ indica el conjunto de elementos pertenecientes a cada *cluster* (análogo a ecuación 2.2.30). Esta función se minimiza a partir del proceso iterativo descrito en la sección 2.2.1.5, donde los centroides iniciales corresponden al mayor número de elementos (centroide inicial de grupos físicos) y sin elementos (centroide inicial de grupos espurios). El anexo 7.3 ejemplifica este procedimiento.

El conjunto de grupos de modos físicos obtenidos a partir de la aplicación de *k-means* va a ser el resultado de esta etapa.

2.2.4 Cuarta Etapa

La cuarta etapa busca el elemento representativo de cada grupo de modo físico definido en la etapa anterior. En [1] se exponen tres formas de determinar este elemento: A partir de la mediana del amortiguamiento, a partir del mayor valor de MPC, y a partir del menor valor de MPD.

Debido a que se ha visto que estos métodos no reconocen consistentemente el elemento más representativo (análisis que se muestra en el capítulo 3), se expone una cuarta forma de determinar este elemento a partir del método de agrupamiento espacial basado en densidades para aplicaciones con ruido (DBSCAN, por sus siglas en inglés). El detalle de la aplicación de este método se puede encontrar en [14].

El método DBSCAN se aplica sobre cada grupo en función de la frecuencia y razón de amortiguamiento de cada modo. Este método requiere dos parámetros: El número de elementos mínimo k para que un conjunto de elementos se considere un *cluster*, y la distancia ϵ que puede entenderse como la distancia de observación máxima de cada elemento para encontrar elementos cercanos. El resultado de este método es una clasificación de cada modo a un *cluster*, o en caso contrario, clasificándolo como ruido.

La distancia ϵ se puede definir a partir del número de elementos mínimo k al comparar la densidad de los elementos con la densidad del mismo número de objetos distribuidos uniformemente en el mismo volumen. Si el conjunto de elementos tiene una distribución uniforme, la distancia ϵ tal que se tengan k elementos dentro de esta se puede calcular como [15]:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{Vk\Gamma\left[\frac{n}{2} + 1\right]}{m\sqrt{\pi^n}}} \quad (2.2.37)$$

Donde m corresponde al número de elementos de cada grupo y n al número de dimensiones del espacio ($n = 2$, dado que se observa en el plano frecuencia-amortiguamiento), Γ corresponde a la función Gamma y V es el espacio del volumen formado por los elementos:

$$V = (\max(f) - \min(f)) \times (\max(\beta) - \min(\beta)) \quad (2.2.38)$$

Tomando en cuenta lo anterior, se aplica DBSCAN solo en función de k considerando la distancia ϵ definida en (2.2.37). De esta forma el método para determinar el elemento representativo en función de la densidad es el siguiente:

- 1) Se clasifica cada modo a partir de DBSCAN en función de la frecuencia y amortiguamiento de cada uno. Se considera una cantidad de elementos mínimo $k = 1$ y una distancia definida en (2.2.37).
- 2) Los elementos asociados al *cluster* con mayor número de elementos se mantiene y el resto de los elementos se eliminan.
- 3) Se repiten los pasos 1 y 2 hasta que no se formen más *clusters*, es decir, se considera que todos los elementos son ruido. El elemento representativo corresponde al elemento más cercano al centroide de este conjunto final.

De esta forma, este método asegura encontrar un elemento de cada grupo tal que se encuentre dentro del conjunto más denso de elementos dentro del grupo en estudio. El anexo 7.5 ilustra este procedimiento.

El resultado de esta última etapa corresponde a la formación de un conjunto de modos representativos de la estructura en estudio, y finaliza el proceso de automatización.

3 Interpretación Automática Modelo de Estructura

Con el fin de verificar el funcionamiento e ilustrar los diferentes métodos y parámetros utilizados dentro del método de interpretación automática se utiliza un modelo de estructura de propiedades conocidas.

Inicialmente se muestran tanto las propiedades de la estructura modelada como el proceso de identificación al cual está sujeto. Posteriormente se muestra y analiza cada paso asociado al método de interpretación automático.

3.1 Modelo de Estructura

Se utiliza el modelo de estructura usado por Cara et al. [13], en la Figura 3.1.1 se muestra un esquema de esta estructura.

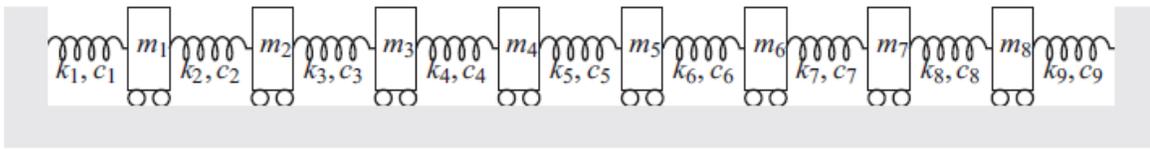


Figura 3.1.1 – Esquema de estructura modelada

El modelo corresponde a una estructura de ocho grados de libertad con propiedades:

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{I}_{8 \times 8} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 2400 & -1600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1600 & 4000 & -2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2400 & 5600 & -3200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3200 & 7200 & -4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4000 & 8800 & -4800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4800 & 10400 & -5600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5600 & 12000 & -6400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6400 & 13600 \end{bmatrix} \left(\frac{N}{m} \right) \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{C}_e = 0.680\mathbf{M}_e + 1.743 * 10^{-4}\mathbf{K}_e \left(\frac{Ns}{m} \right) \quad (3.1.3)$$

Se destaca que la matriz de amortiguamiento \mathbf{C}_e (3.1.3) se considera proporcional a la matriz de masa \mathbf{M}_e y de rigidez \mathbf{K}_e . Las propiedades dinámicas de esta estructura se exponen en la Tabla 3.1.1.

Tabla 3.1.1 – Propiedades dinámicas modelo de estructura.

Modo	f_i [Hz]	β_i [%]
1	2.94	2.00
2	5.87	1.24
3	8.60	1.10
4	11.19	1.10
5	13.78	1.15
6	16.52	1.23
7	19.54	1.35
8	23.12	1.50

Para aplicar los métodos de identificación SSICOV y SSIDATA a esta estructura, se utiliza la siguiente metodología:

- 1) Se aplica una carga aleatoria (media cero) en todos los grados de libertad.
- 2) Se determina la respuesta de la estructura, tomando en cuenta una frecuencia de muestreo $F_s = 50$ [Hz] y un número total de muestras $N = 10.000$. Lo anterior implica un marco de tiempo de 200 [s]
- 3) Para la identificación se consideran los grados de libertad 1, 4 y 8.
- 4) Ambos métodos de identificación contemplan exactamente el mismo registro, eliminando así la dependencia sobre el tipo de sollicitación.

En la Figura 3.1.2 y Figura 3.1.3 se observan los diagramas de estabilización resultantes asociados a SSICOV y SSIDATA respectivamente.

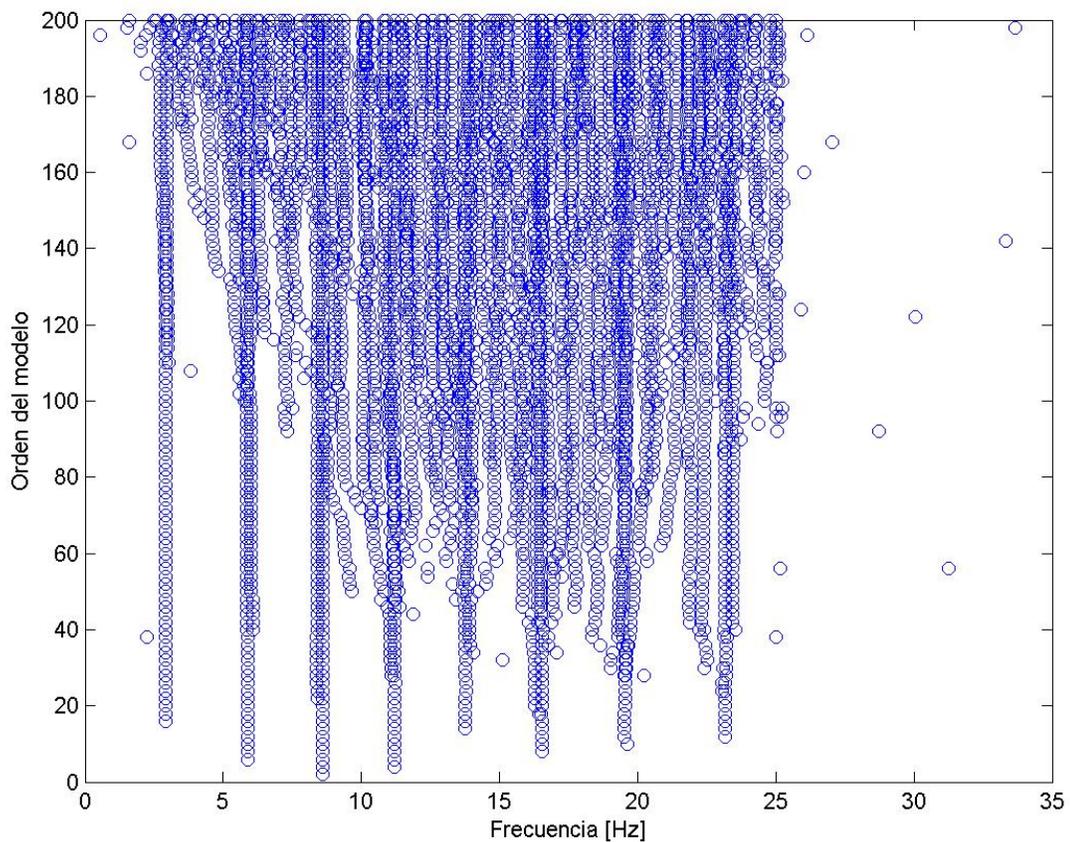


Figura 3.1.2 – Diagrama de estabilización (SSICOV)

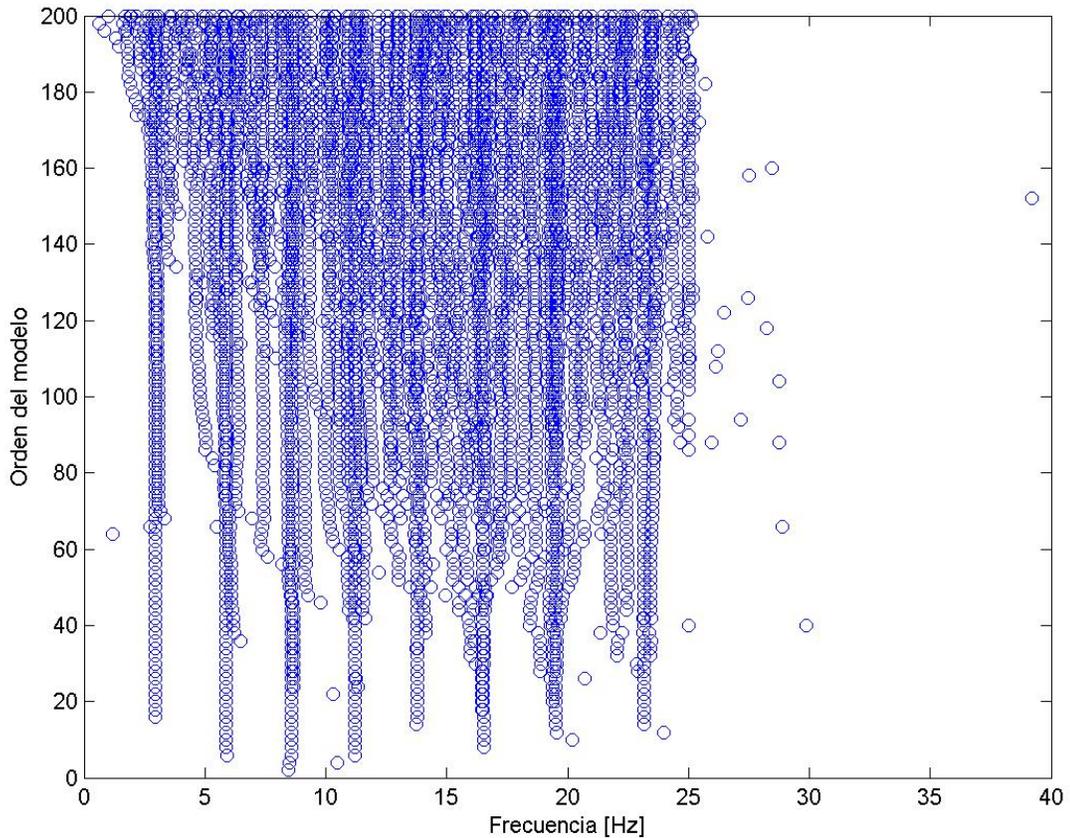


Figura 3.1.3 – Diagrama de estabilización (SSIDATA)

3.2 Proceso de Automatización

A continuación se detalla la aplicación de las distintas etapas que componen el método de automatización

3.2.1 Primera Etapa

La diferencia entre ambos métodos de identificación, en esta etapa, recae sobre el número de criterios débiles considerados, donde solo para SSIDATA se presentan los criterios de energía. En la Figura 3.2.1 y Figura 3.2.2 para SSICOV, y en la Figura 3.2.3 a Figura 3.2.5 para SSIDATA se expone la división mediante el método de agrupamiento *k-means* para cada criterio débil utilizado. Nótese la ausencia de criterios de energía para el caso de análisis mediante SSICOV, en virtud de lo expuesto en 2.1.2.2.

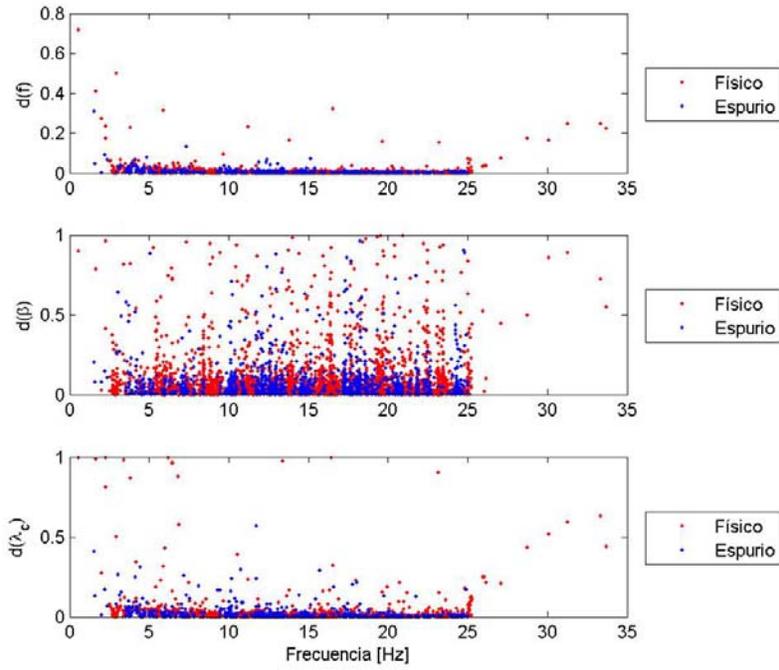


Figura 3.2.1 – Resumen criterios débiles 1-3 (SSICOV)

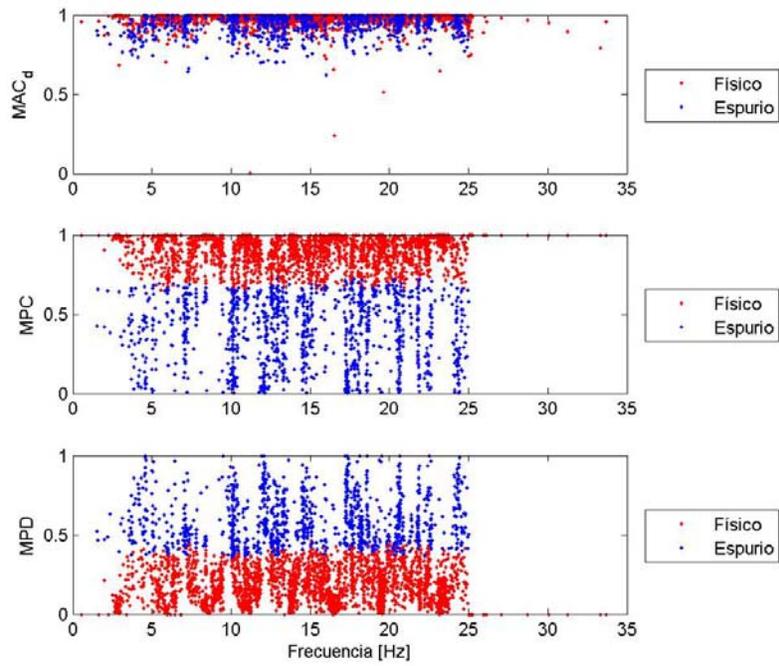


Figura 3.2.2 – Resumen criterios débiles 4-6 (SSICOV)

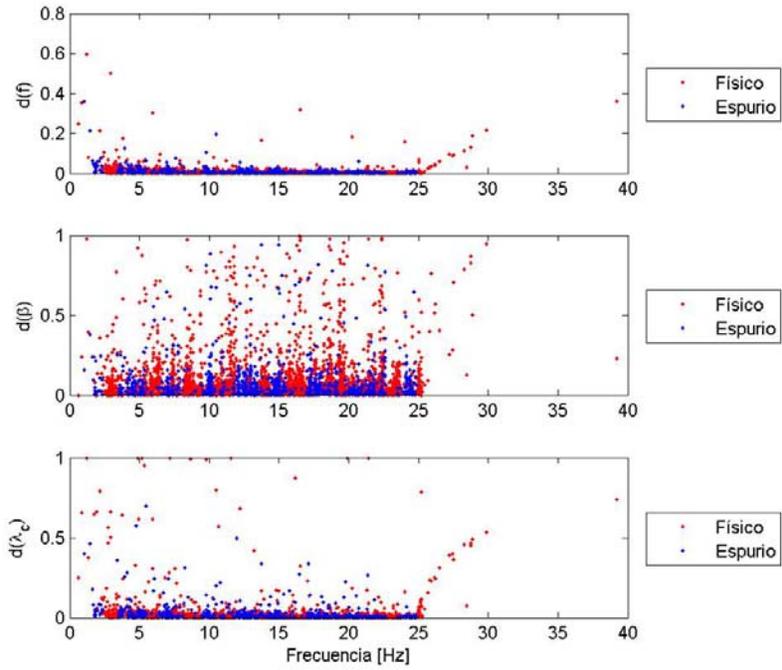


Figura 3.2.3 – Resumen criterios débiles 1-3 (SSIDATA)

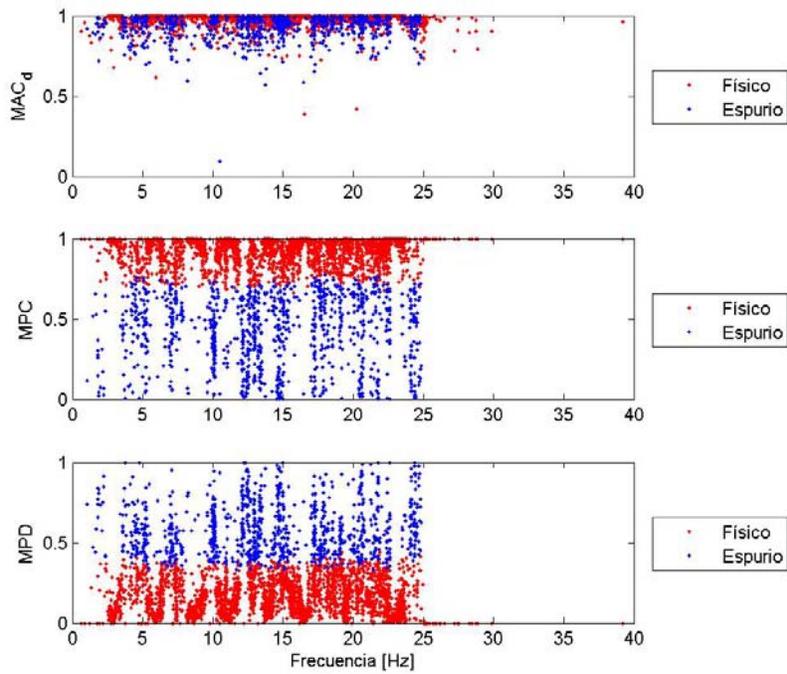


Figura 3.2.4 – Resumen criterios débiles 4-6 (SSIDATA)

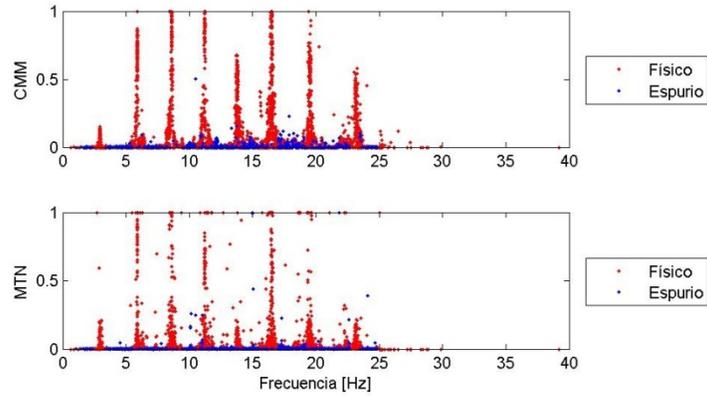


Figura 3.2.5 – Resumen criterios débiles 7-8 (SSIDATA)

La segunda clasificación (a partir de criterios fuertes) se resume en la Figura 3.2.6 para SSICOV y en la Figura 3.2.7 para SSIDATA. En estas se expone además el porcentaje de elementos que cumplen cada criterio.

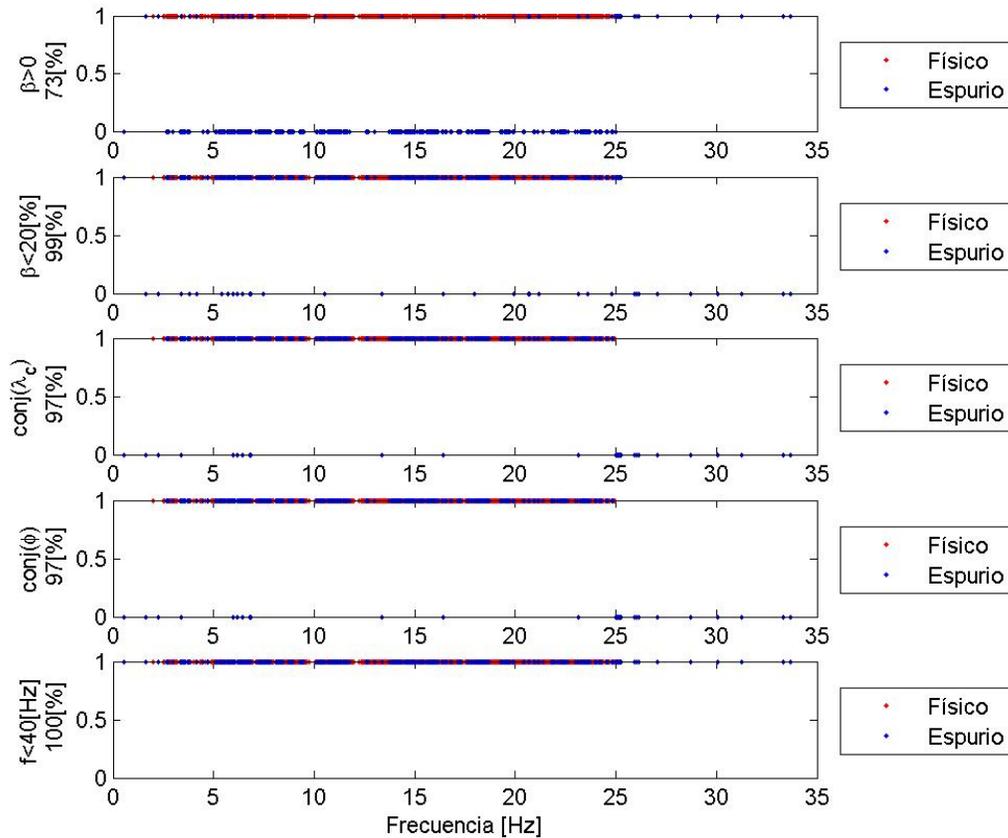


Figura 3.2.6 – Resumen criterios fuertes (SSICOV)

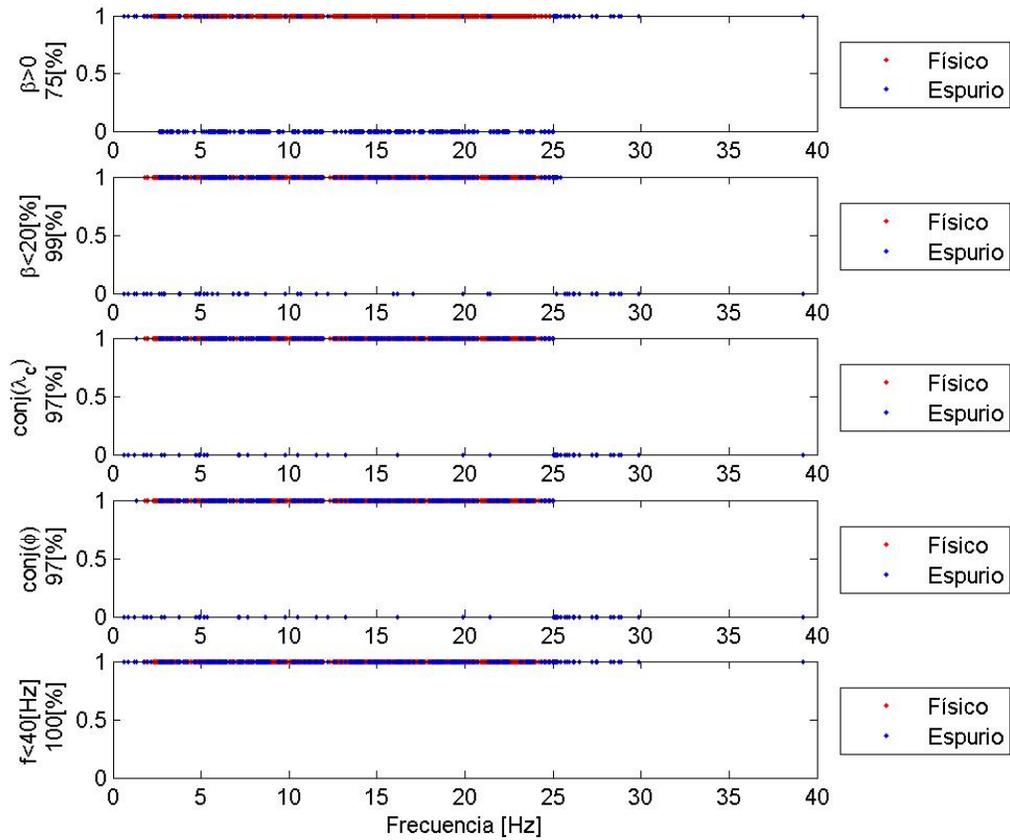


Figura 3.2.7 – Resumen criterios fuertes (SSIDATA)

El resumen de esta etapa en función del diagrama de estabilización se muestra en la Figura 3.2.8 para SSICOV y en la Figura 3.2.9 para SSIDATA.

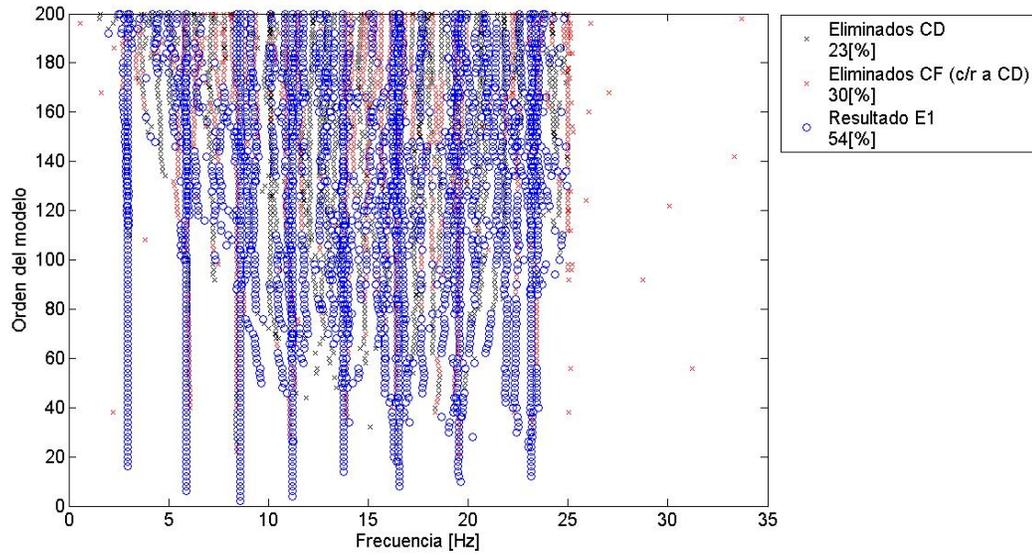


Figura 3.2.8 – Diagrama de estabilización, primera etapa (SSICOV)

(CD: criterio débil, CF: criterio fuerte, E1: Etapa 1)

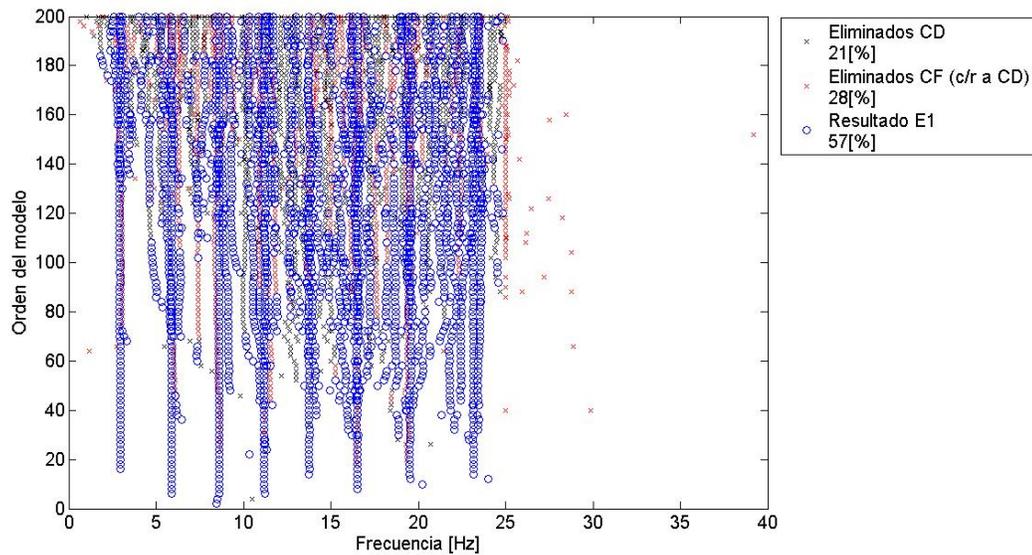


Figura 3.2.9 – Diagrama de estabilización, primera etapa (SSIDATA)

(CD: criterio débil, CF: criterio fuerte, E1: Etapa 1)

3.2.2 Segunda Etapa

En la Figura 3.2.10 y Figura 3.2.11 se muestran los dendrogramas, junto con la distancia de corte (en rojo), para el método SSICOV y SSIDATA (respectivamente). Un dendrograma es un gráfico que señala a qué distancia se une cada grupo formado iterativamente por el método de agrupamiento jerárquico, en el anexo 7.4 se ilustra el proceso de construcción de un dendrograma.

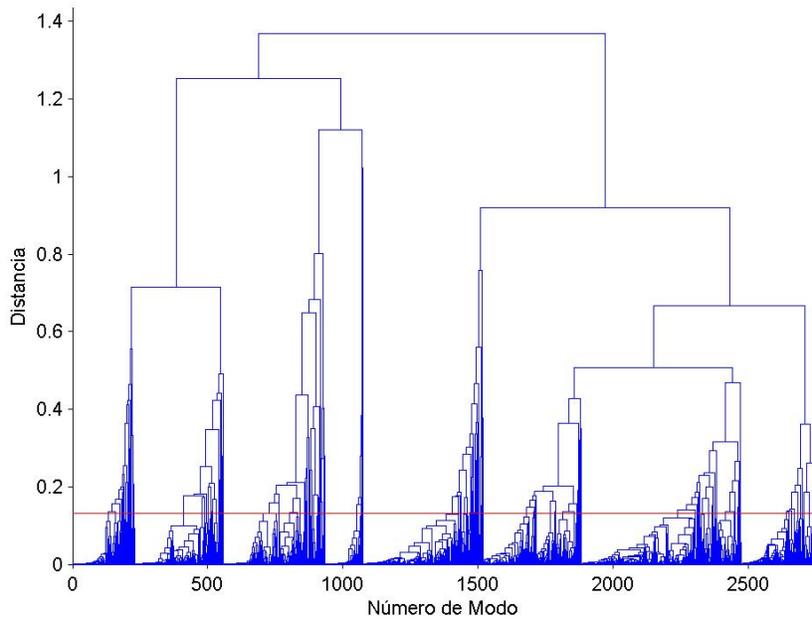


Figura 3.2.10 – Dendrograma (SSICOV)

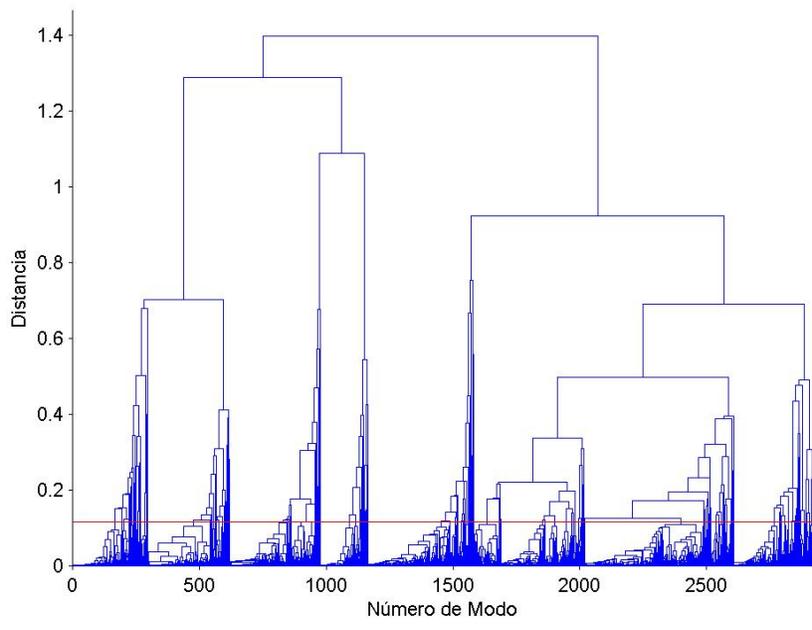


Figura 3.2.11 – Dendrograma (SSIDATA)

En la Figura 3.2.12 y Figura 3.2.13 se muestra a partir de colores, en el diagrama de estabilización, la división del agrupamiento resultante de esta etapa.

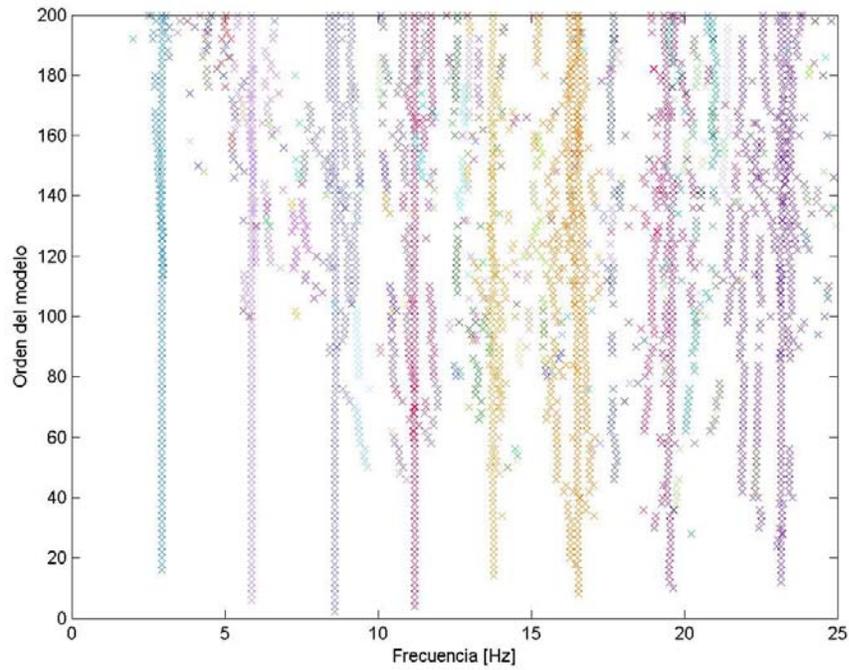


Figura 3.2.12 – Diagrama de estabilización, segunda etapa (SSICOV)

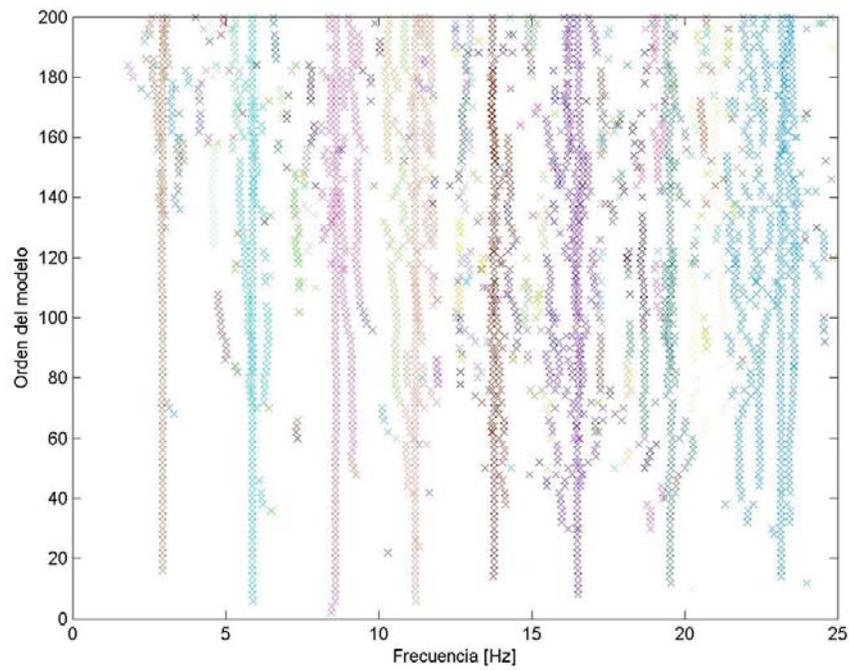


Figura 3.2.13 – Diagrama de estabilización, segunda etapa (SSIDATA)

3.2.3 Tercera Etapa

El agrupamiento en función del número de elementos se reconoce en la Figura 3.2.14 para SSICOV y en la Figura 3.2.15 para SSIDATA. Los grupos de elementos resultantes se resumen a partir del diagrama de estabilización en Figura 3.2.16 y Figura 3.2.17 para SSICOV y SSIDATA, respectivamente.

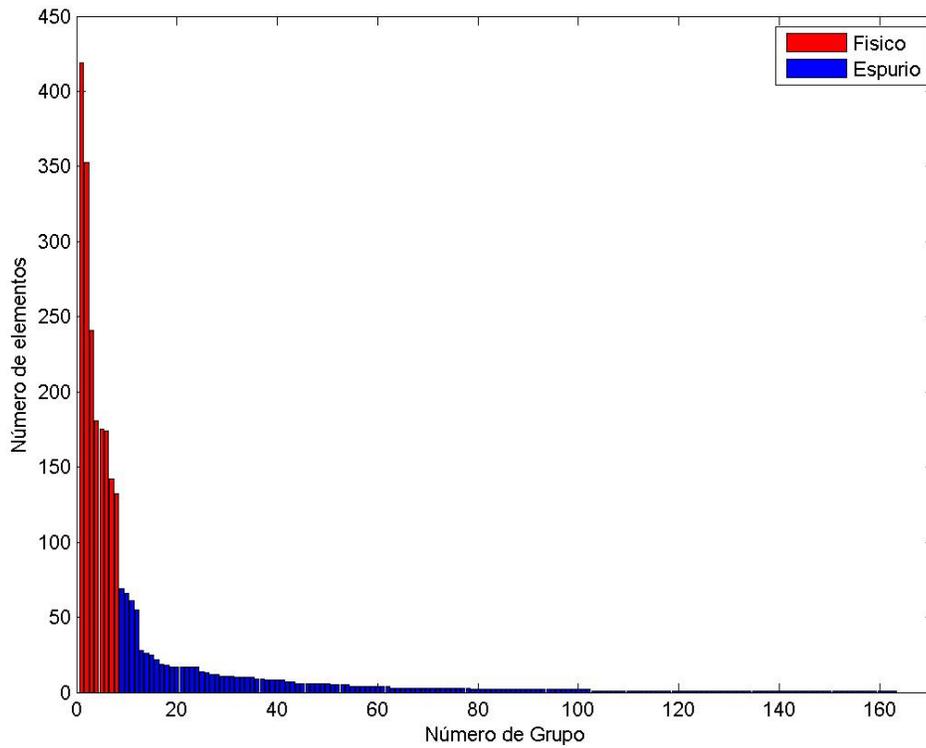


Figura 3.2.14 – Agrupamiento tercera etapa (SSICOV)

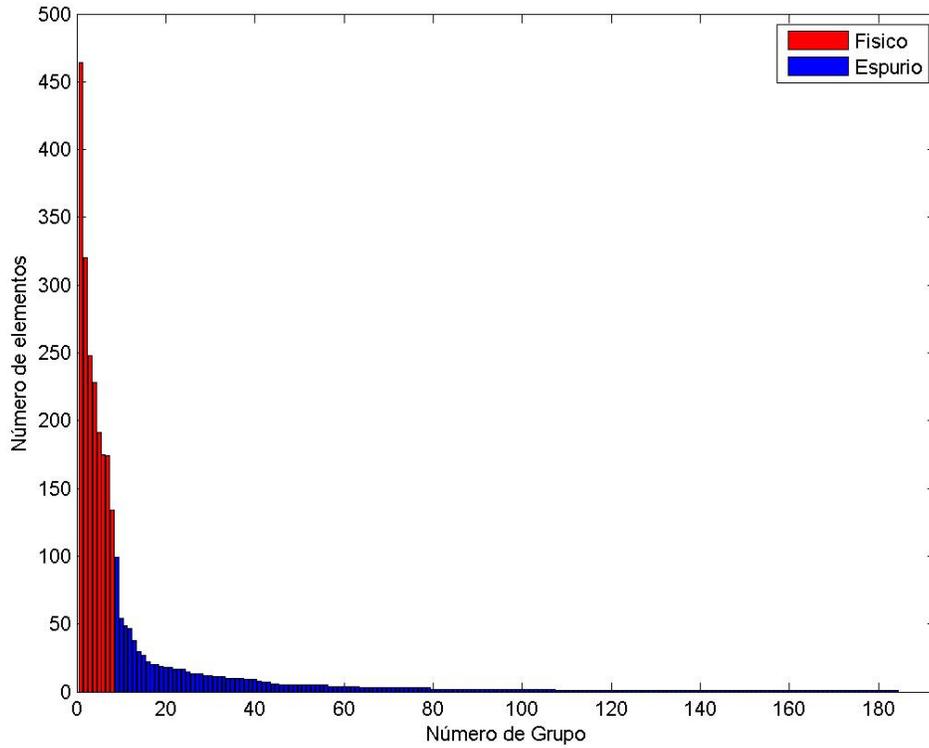


Figura 3.2.15 – Agrupamiento tercera etapa (SSIDATA)

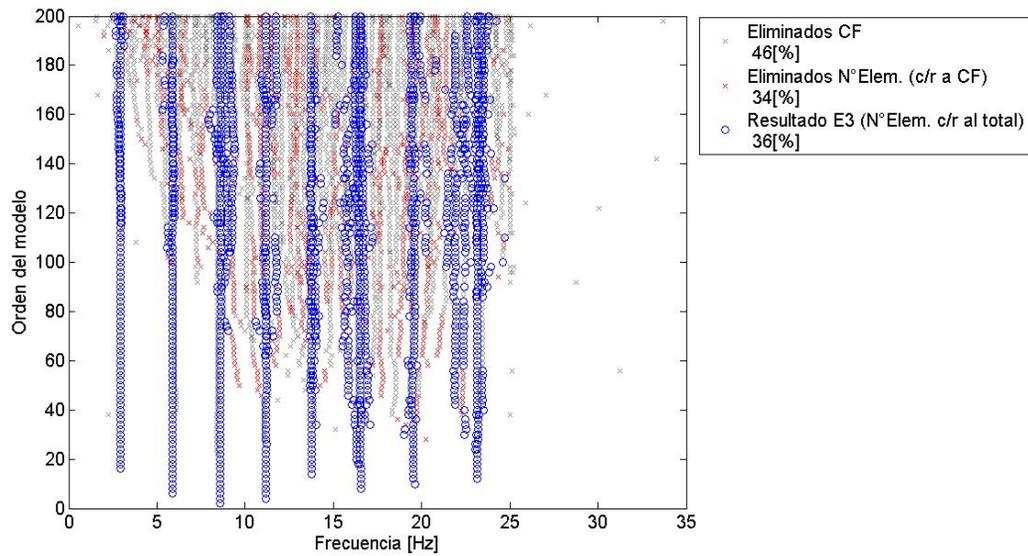


Figura 3.2.16 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (SSICOV)

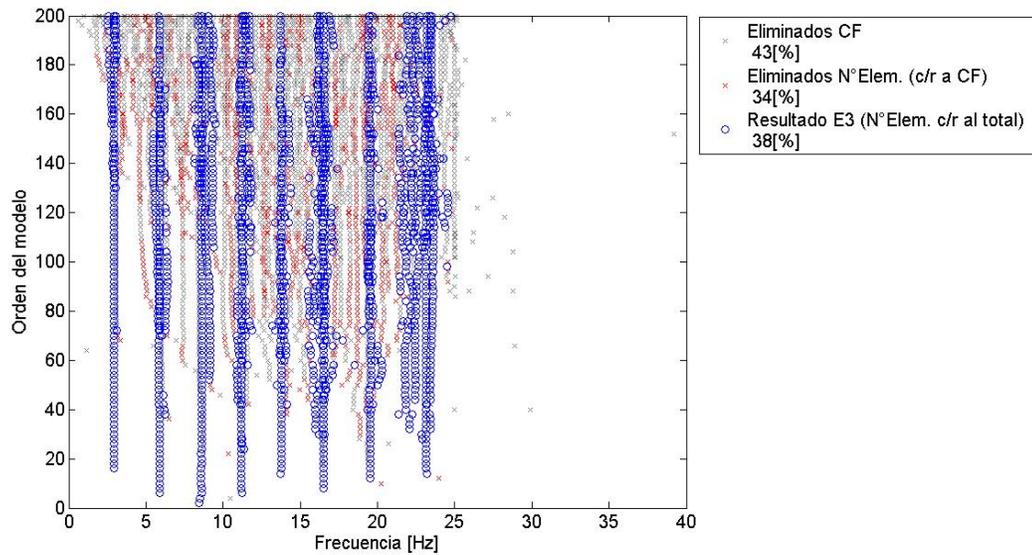


Figura 3.2.17 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (SSIDATA)

(CF: Criterio fuerte, E3: Etapa 3)

3.2.4 Cuarta Etapa

A partir de los grupos de modos obtenidos en la tercera etapa se determina el modo representativo usando cada uno de los métodos descritos en la sección 2.2.4, es decir utilizando la mediana del amortiguamiento, máximo valor MPC, mínimo valor MPD y siguiendo la metodología expuesta en función del método de agrupamiento en base a densidades (DBSCAN). La Figura 3.2.18 y Figura 3.2.19 indican la selección de este modo (usando los cuatro métodos) en el plano frecuencia v/s amortiguamiento para cada modo, mientras que la Figura 3.2.20 y Figura 3.2.21 en función del diagrama de estabilización (para SSICOV y SSIDATA respectivamente).

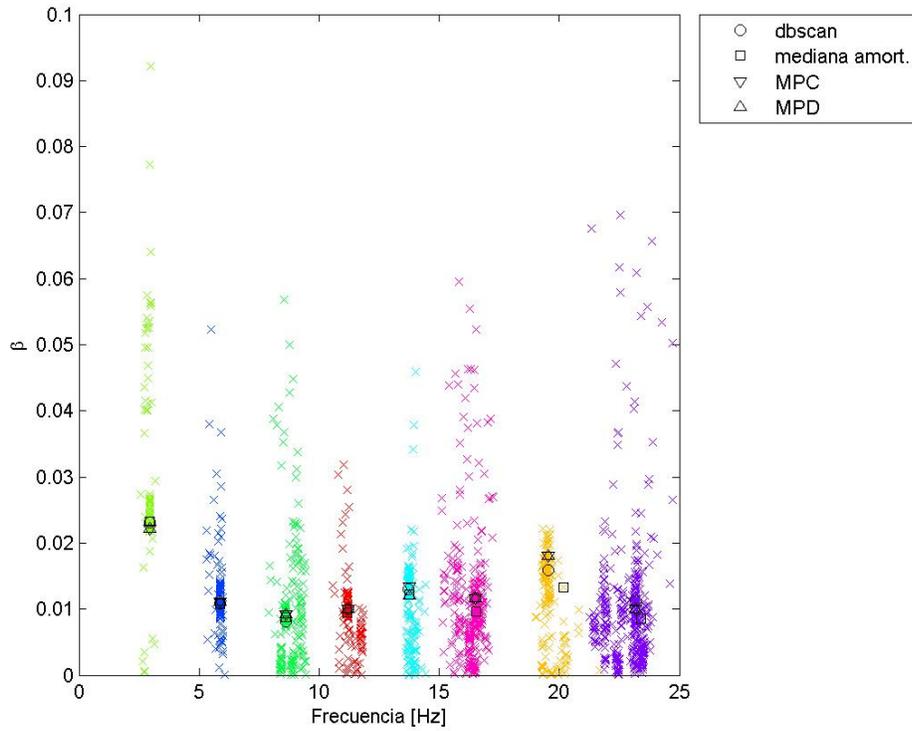


Figura 3.2.18 – Frecuencia v/s amortiguamiento (SSICOV)

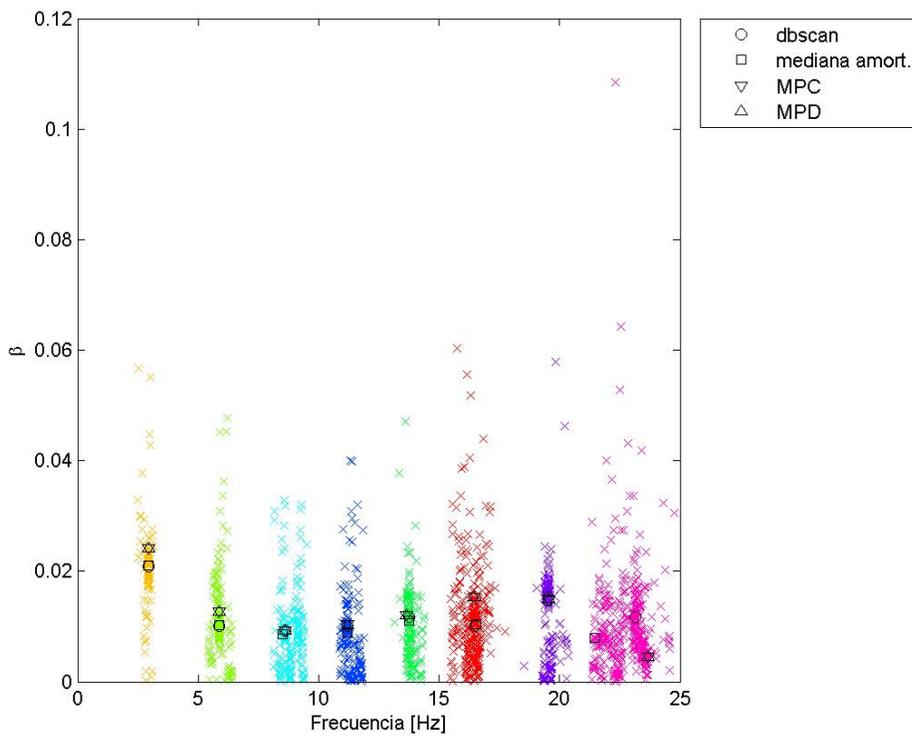


Figura 3.2.19 – Frecuencia v/s amortiguamiento (SSIDATA)

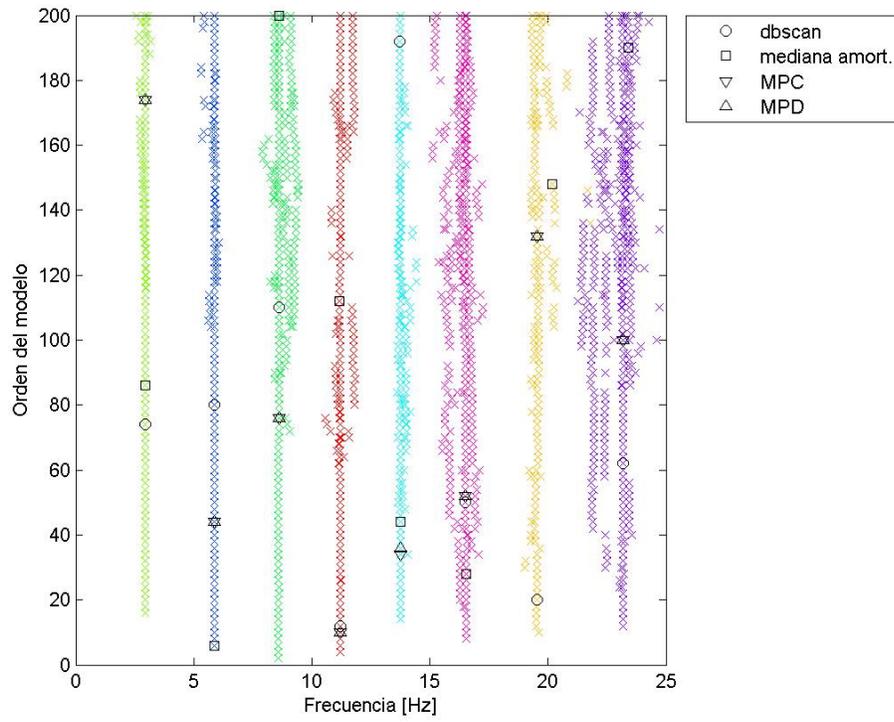


Figura 3.2.20 – Diagrama de estabilización, cuarta etapa (SSICOV)

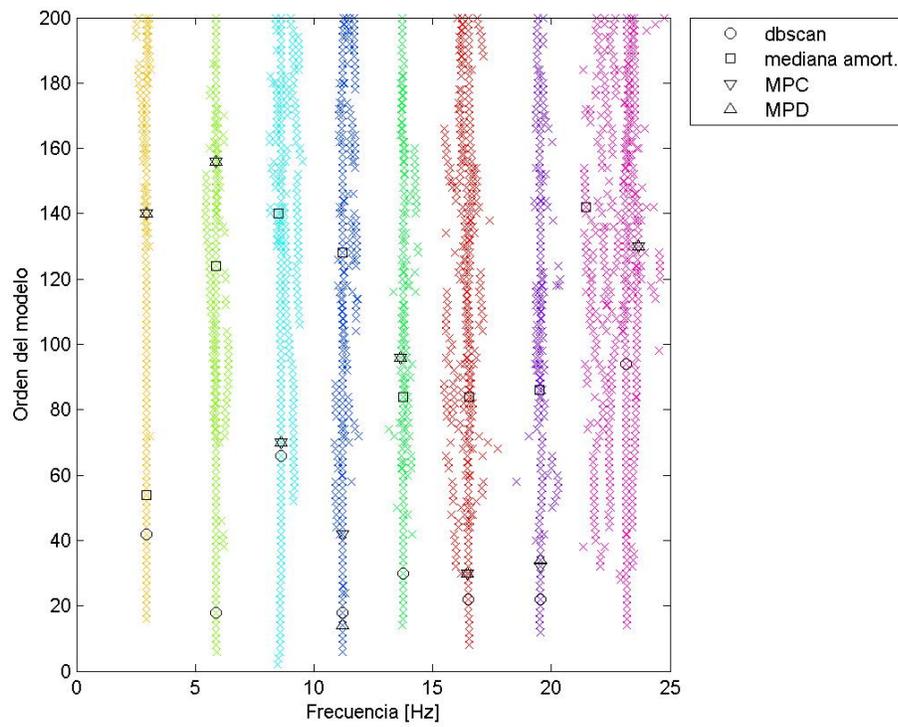


Figura 3.2.21 – Diagrama de estabilización, cuarta etapa (SSIDATA)

3.3 Resultados

En la Tabla 3.3.1 a Tabla 3.3.4 se muestran las frecuencias, razones de amortiguamiento y errores asociados para la identificación mediante SSICOV, y en la Tabla 3.3.5 a Tabla 3.3.8 las frecuencias, razones de amortiguamiento y errores asociados a la identificación mediante SSIDATA. Además, en la Tabla 3.3.9 se reconoce el error promedio entre los modos identificados. Finalmente, en la Figura 3.3.1 y Figura 3.3.2 se expone el valor MAC entre las formas modales reales y las identificadas (mediante SSICOV y SSIDATA respectivamente).

Tabla 3.3.1 – Resumen frecuencias (SSICOV)

<i>Modo</i>	$f_{real}[Hz]$	$f_{dbscan}[Hz]$	$f_{med.amort.}[Hz]$	$f_{MPC}[Hz]$	$f_{MPD}[Hz]$
1	2.94	2.93	2.93	2.94	2.94
2	5.87	5.87	5.87	5.87	5.87
3	8.60	8.61	8.61	8.60	8.60
4	11.19	11.20	11.18	11.20	11.20
5	13.78	13.74	13.75	13.76	13.75
6	16.52	16.51	16.52	16.51	16.51
7	19.54	19.54	20.16	19.55	19.55
8	23.12	23.17	23.39	23.19	23.19

Tabla 3.3.2 – Error frecuencias (SSICOV)

<i>Modo</i>	$e(f_{dbscan})[\%]$	$e(f_{med.amort.})[\%]$	$e(f_{MPC})[\%]$	$e(f_{MPD})[\%]$
1	0.25	0.24	0.08	0.08
2	0.06	0.06	0.03	0.03
3	0.07	0.07	0.03	0.03
4	0.09	0.06	0.09	0.09
5	0.31	0.20	0.15	0.19
6	0.08	0.02	0.09	0.09
7	0.03	3.20	0.05	0.05
8	0.20	1.16	0.29	0.29

Tabla 3.3.3 – Resumen razones de amortiguamiento (SSICOV)

<i>Modo</i>	$\beta_{real}[\%]$	$\beta_{dbscan}[\%]$	$\beta_{med.amort.}[\%]$	$\beta_{MPC}[\%]$	$\beta_{MPD}[\%]$
1	2.00	2.32	2.32	2.22	2.22
2	1.24	1.08	1.08	1.11	1.11
3	1.10	0.81	0.88	0.92	0.92
4	1.10	1.01	0.94	1.01	1.01
5	1.15	1.31	1.22	1.34	1.21
6	1.23	1.17	0.96	1.16	1.16
7	1.35	1.59	1.33	1.81	1.81
8	1.50	1.13	0.86	1.00	1.00

Tabla 3.3.4 – Error razones de amortiguamiento (SSICOV)

<i>Modo</i>	$e(\beta_{dbscan})[\%]$	$e(\beta_{med.amort.})[\%]$	$e(\beta_{MPC})[\%]$	$e(\beta_{MPD})[\%]$
1	15.88	16.19	10.78	10.78
2	12.95	12.86	10.51	10.51
3	26.60	20.29	16.12	16.12
4	7.97	13.89	8.02	8.02
5	13.75	6.69	17.17	5.23
6	4.86	22.17	5.88	5.88
7	17.72	1.39	34.63	34.63
8	24.59	42.88	33.20	33.20

Tabla 3.3.5 – Resumen frecuencias (SSIDATA)

<i>Modo</i>	$f_{real}[Hz]$	$f_{dbscan}[Hz]$	$f_{med.amort.}[Hz]$	$f_{MPC}[Hz]$	$f_{MPD}[Hz]$
1	2.94	2.94	2.94	2.94	2.94
2	5.87	5.87	5.87	5.87	5.87
3	8.60	8.60	8.51	8.60	8.60
4	11.19	11.20	11.21	11.21	11.20
5	13.78	13.77	13.74	13.64	13.64
6	16.52	16.50	16.52	16.46	16.46
7	19.54	19.52	19.50	19.53	19.53
8	23.12	23.15	21.45	23.67	23.67

Tabla 3.3.6 – Error frecuencia (SSIDATA)

<i>Modo</i>	$e(f_{dbscan})[\%]$	$e(f_{med.amort.})[\%]$	$e(f_{MPC})[\%]$	$e(f_{MPD})[\%]$
1	0.22	0.21	0.04	0.04
2	0.03	0.00	0.01	0.01
3	0.01	1.04	0.03	0.03
4	0.08	0.16	0.16	0.07
5	0.07	0.28	1.05	1.05
6	0.10	0.02	0.34	0.34
7	0.07	0.17	0.02	0.04
8	0.14	7.23	2.38	2.38

Tabla 3.3.7 – Resumen razón de amortiguamiento (SSIDATA)

<i>Modo</i>	$\beta_{real}[\%]$	$\beta_{dbscan}[\%]$	$\beta_{med.amort.}[\%]$	$\beta_{MPC}[\%]$	$\beta_{MPD}[\%]$
1	2.00	2.09	2.10	2.42	2.42
2	1.24	1.01	1.02	1.28	1.28
3	1.10	0.93	0.86	0.93	0.93
4	1.10	1.01	0.89	1.04	1.03
5	1.15	1.17	1.11	1.20	1.20
6	1.23	1.01	1.04	1.53	1.53
7	1.35	1.53	1.48	1.49	1.49
8	1.50	1.17	0.80	0.44	0.44

Tabla 3.3.8 – Error razón de amortiguamiento (SSIDATA)

<i>Modo</i>	$e(\beta_{dbscan})[\%]$	$e(\beta_{med.amort.})[\%]$	$e(\beta_{MPC})[\%]$	$e(\beta_{MPD})[\%]$
1	4.72	4.79	20.95	20.95
2	18.66	18.27	2.66	2.66
3	15.79	21.43	15.27	15.27
4	8.04	18.47	4.96	6.38
5	1.79	3.57	4.87	4.87
6	18.12	16.00	24.25	24.25
7	13.79	9.69	10.55	10.64
8	22.11	46.77	70.51	70.51

Tabla 3.3.9 – Error promedio parámetros identificados

<i>Método</i>	<i>Parámetro</i>	$\bar{e}_{dbscan} [\%]$	$\bar{e}_{med.amort.} [\%]$	$\bar{e}_{MPC} [\%]$	$\bar{e}_{MPD} [\%]$
<i>SSICOV</i>	<i>f</i>	0.14	0.63	0.10	0.11
	β	15.54	17.05	17.04	15.55
<i>SSIDATA</i>	<i>f</i>	0.09	1.14	0.50	0.49
	β	12.88	17.37	19.25	19.44

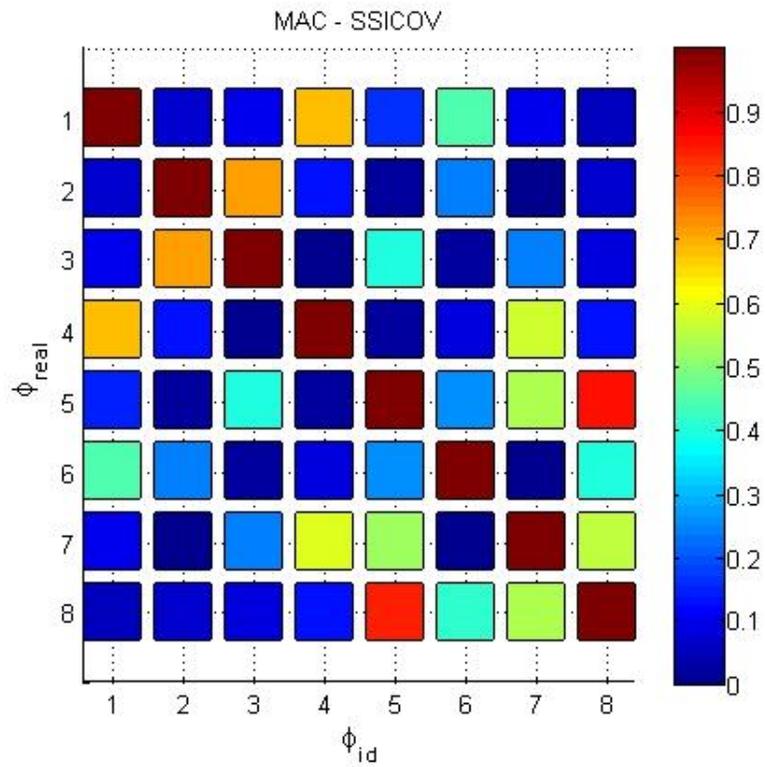


Figura 3.3.1 – Matriz MAC (SSICOV)

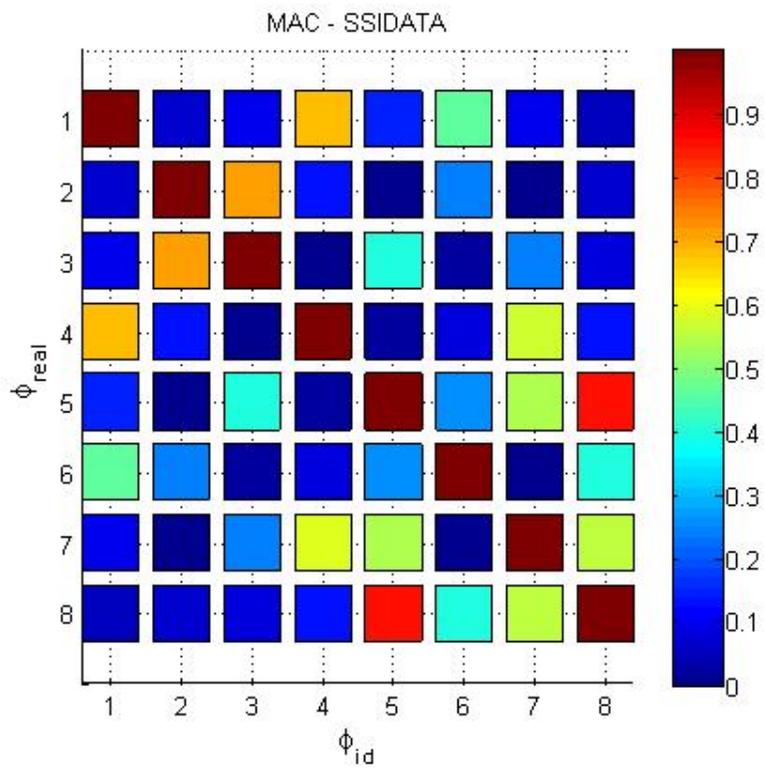


Figura 3.3.2 – Matriz MAC (SSIDATA)

Se observa que, tanto para SSICOV como SSIDATA, los criterios de distancia no logran distinguir consistentemente entre modos físicos y espurios en contraste con los criterios de forma modal y de energía. Para ilustrar lo anterior se presenta en la Tabla 3.3.10 y Tabla 3.3.11 los centroides para cada criterio débil asociados a SSICOV y SSIDATA. Además se presentan en estos la diferencia entre el centroide físico y espurio. Esta diferencia expone la ponderación que mantiene cada criterio dentro de la división en la primera etapa, de esta forma una alta diferencia (positiva) entre el centroide físico y espurio implica una mayor ponderación para un criterio dado, y una baja diferencia (positiva) es indicio de una división pobre por parte del criterio. Finalmente el caso de presentar una diferencia negativa indica que el centroide físico se encuentra más cercano al valor ideal espurio y viceversa, es decir, presentaría una división contraria al esperado, y por lo tanto un resultado no deseable por parte del criterio en evaluación. Nótese que el signo en la diferencia toma es dependiente de los valores ideales físico y espurio de cada criterio.

Tabla 3.3.10 – Centroides (SSICOV)

Criterio	Físico	Espurio	Dif
$d(f)$	0.005	0.006	0.001
$d(\beta)$	0.079	0.088	0.010
$d(\lambda_c)$	0.012	0.014	0.002
MAC_d	0.985	0.945	0.040
MPC	0.926	0.393	0.533
MPD	0.152	0.601	0.449

Tabla 3.3.11 – Centroides (SSIDATA)

Criterio	Físico	Espurio	Dif
$d(f)$	0.005	0.007	0.002
$d(\beta)$	0.082	0.077	-0.006
$d(\lambda_c)$	0.015	0.019	0.004
MAC_d	0.986	0.941	0.046
MPC	0.941	0.419	0.522
MPD	0.133	0.589	0.456
CMM	0.147	0.008	0.139
MTN	0.072	0.007	0.065

La poca eficiencia de los criterios de distancia se acentúa al evaluar numerosas veces este modelo de estructura, donde se ha visto que la división llega a “invertirse”, o en otras palabras, el método de agrupamiento considera como conjunto de modos físicos a los que debiesen ser espurios. Para evitar lo anterior no se utilizan los criterios de distancia en frecuencia y amortiguamiento para el análisis de la estructura Torre Central (capítulo 4).

A partir de los resultados obtenidos se destacan las siguientes observaciones:

- 1) Los criterios débiles asociados a la forma modal logran discriminar entre modos físicos y espurios en mayor grado que los criterios débiles de energía, y estos últimos, junto con el criterio de distancia en función de MAC, en mayor grado que los criterios de distancia. La Tabla 3.3.10 y Tabla 3.3.11 resume esta diferencia.
- 2) El criterio fuerte asociado a amortiguamiento positivo resulta ser el más eficiente en comparación con los otros criterios utilizados mientras que el criterio fuerte asociado al límite de frecuencia resulta ser el menos eficiente dado el alto valor de frecuencia límite utilizado (ver Figura 3.2.6 y Figura 3.2.7).
- 3) El agrupamiento de modos destaca por generar grandes conjuntos de modos físicos (ver Figura 3.2.12 Figura 3.2.13), destacándose la gran cantidad de elementos asociados al modo de mayor frecuencia (abarcando un amplio rango de frecuencias). Esto puede ser mejorado al eliminar criterios débiles poco eficientes o utilizando otros criterios para determinar la distancia de corte.
- 4) La tercera etapa logra determinar los grupos asociados a modos físicos, pero notando que para el caso SSICOV se observa una mejor separación entre grupos en términos de una mayor distancia entre el número de elementos. La Figura 3.2.14 y Figura 3.2.15 ilustran esta observación.
- 5) A partir de la Figura 3.2.18 y Figura 3.2.19, y en conjunto con la Tabla 3.3.1 a Tabla 3.3.9, se observa que el método en función de las densidades (DBSCAN, ver sección 2.2.4) logra determinar de forma más consistente el elemento representativo de menor error. Adicionalmente, se logra observar un mayor error asociado a la razón de amortiguamiento estimada que a la frecuencia estimada.
- 6) Los métodos de identificación SSICOV y SSIDATA generan resultados muy similares, a pesar de la mayor cantidad de criterios débiles empleados en SSIDATA. Esto da cuenta de la una dependencia menor de los resultados con respecto al uso de criterios débiles.
- 7) Las formas modales determinadas presentan una gran correlación con respecto a las formas modales reales, esto se puede observar directamente a partir de la Figura 3.3.1 y Figura 3.3.2, entregando resultados muy similares entre ambos métodos de identificación.

4 Interpretación Automática Torre Central

4.1 Introducción

A continuación se emplea y analiza el proceso de interpretación automático sobre una estructura de nueve pisos. Inicialmente se exponen las características generales de la estructura y su instrumentación, en conjunto con las consideraciones sobre el proceso de interpretación, para posteriormente exponer y evaluar el proceso de automatización.

Dada la gran cantidad de resultados obtenidos se divide el análisis de este proceso desde distintos enfoques:

- 1) Análisis particular: Se expone el procedimiento completo para un registro particular.
- 2) Análisis global: Se expone la evolución de las frecuencias obtenidas y se analiza la efectividad de cada etapa a lo largo del tiempo. Adicionalmente se exponen detalles adicionales considerados en la aplicación de este método.
- 3) Análisis anual: Para cada año se estudia el comportamiento de los modos identificados, y se genera un seguimiento modal simple en función de estos. La necesidad de dividir el análisis anualmente recae en la amplia variación observada de los parámetros modales identificados, y para de esta forma lograr disminuir errores asociados al seguimiento modal efectuado.
- 4) Comparación método de triple acierto: Se compara el resultado de este método de interpretación automático con el método de “triple acierto” para evaluar la existencia de una mejora en la interpretación efectuada por el método automático.
- 5) Errores observados: Se ejemplifican los errores típicos observados a partir del uso del método automático.

4.2 Estructura, Instrumentación e Identificación

La estructura Torre Central se ubica en Beauchef 850, Santiago, Chile, dentro de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. En la Figura 4.2.1 se señala la ubicación geográfica de dicha estructura.

Esta edificación tiene una altura de 30.2 [m] sobre el nivel del suelo, compuesta de 9 pisos más 2 subterráneos, y estructurada en base a muros de hormigón armado de espesor típico de 35 [cm] y losas de 25 [cm] de espesor. La Figura 4.2.2 indica la planta del piso tipo de esta estructura [16].



Figura 4.2.1 – Ubicación geográfica estructura Torre Central (33°27'27.42"S, 70°39'44.50"O).

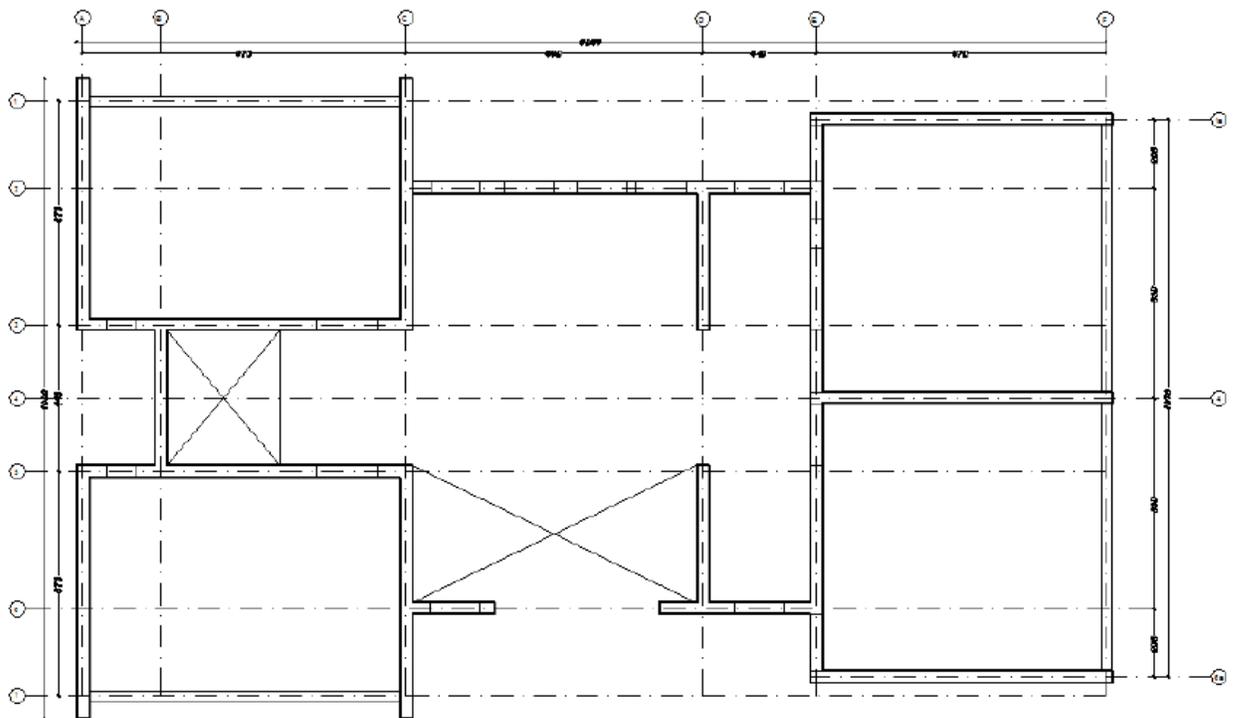


Figura 4.2.2 – Planta piso tipo

La estructura se encuentra instrumentada con ocho acelerómetros uniaxiales, modelo EpiSensor ES-U2 de marca Kinematics; dos ubicados en el primer subterráneo, tres en el tercer piso, y tres en el octavo piso. La ubicación de estos se muestra en la Figura 4.2.3 [17].

Dado que se utilizan métodos de identificación en base a micro-vibraciones ambientales, se utilizan únicamente los sensores del tercer y octavo piso (sensores E4 a E9 según Figura 4.2.3), ya que se asume que los sensores ubicados en el subterráneo no van a ser tan representativos de la respuesta de la estructura, sino que van a estar influidos en mayor grado por las características de la fundación y del suelo.

Se tienen registros de 15 minutos de duración, con una frecuencia de muestreo variable entre distintos periodos (entre 100 y 200 [Hz]) desde el año 2009. Se evalúan las propiedades dinámicas a partir del método de interpretación automático en el rango de tiempo entre Julio de 2009 y Junio de 2014 (en total del orden de 175000 registros).

Acorde a las observaciones obtenidas con respecto a los sistemas de identificación empleados en la estructura modelo (capítulo 3) se utiliza únicamente el método de identificación SSICOV. Además, se consideran solo los órdenes del modelo (pares) entre 50 y 150 ya que de esta manera existe una mayor posibilidad de que los modos físicos ya estén presentes en el diagrama de estabilización, y a su vez se disminuye el costo computacional. Debido a las observaciones expuestas en el capítulo 3, no se utilizan los criterios débiles de distancia asociados a la frecuencia y el amortiguamiento.

Para cada registro se genera un “remuestreo” a una frecuencia de muestreo de 25 [Hz] para disminuir el tiempo de procesamiento, normalizar la frecuencia de muestreo de todos los registros y eliminar frecuencias altas (mayores a 12.5 [Hz]). Finalmente, se utilizan todos los criterios fuertes, limitando la frecuencia a $F = 10[Hz]$.

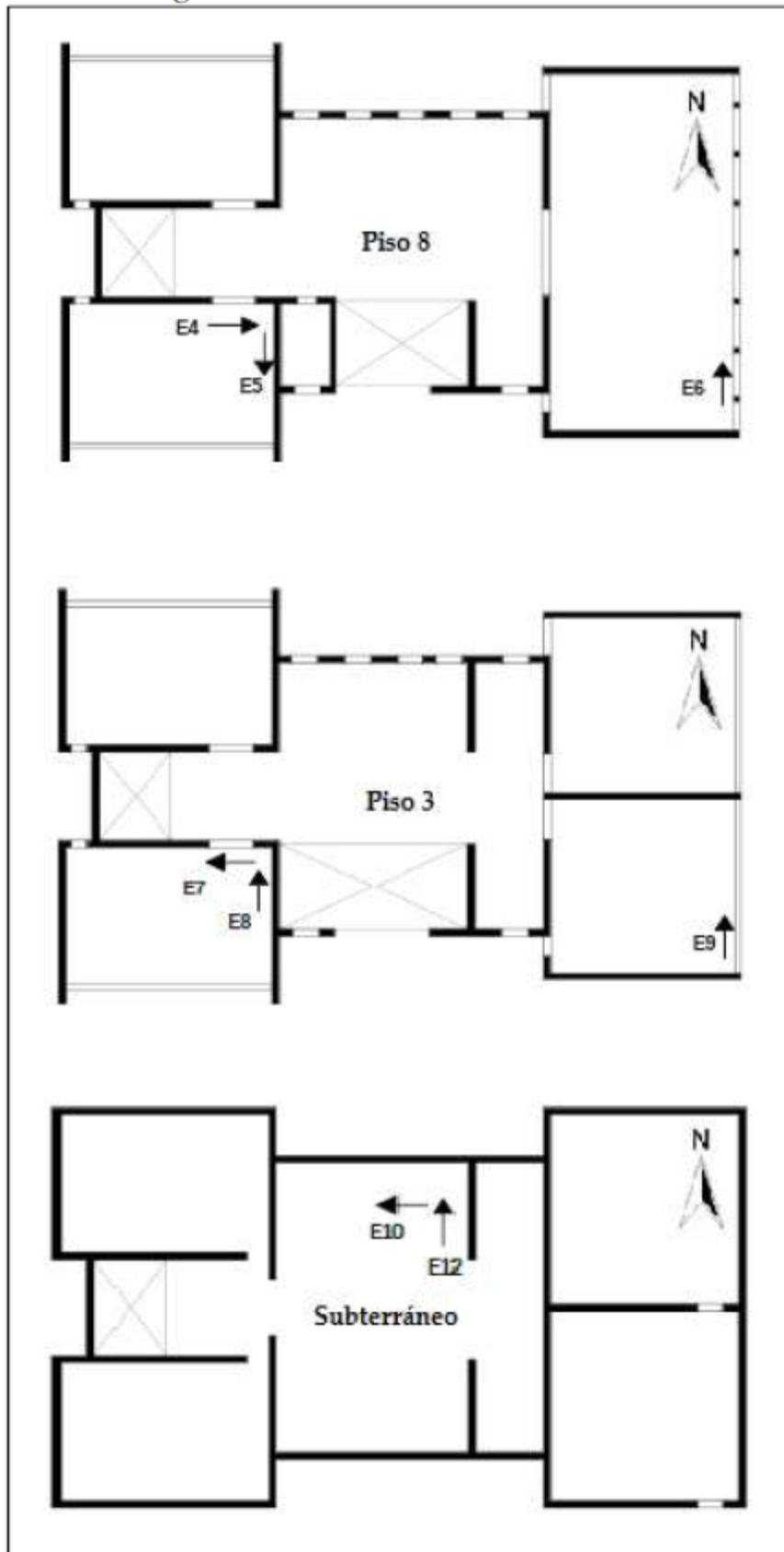


Figura 4.2.3 – Ubicación sensores Torre Central

4.3 Análisis particular

Para ilustrar el proceso de interpretación automática realizado sobre cada registro se expone este en detalle sobre el registro del 22 de septiembre de 2009 (07:00-07:15). La Figura 4.3.1 muestra el diagrama de estabilización inicial donde, como ya se ha mencionado anteriormente, se consideran sólo los órdenes del modelo entre 50 y 150.

En función de este diagrama de estabilización se exponen a continuación las distintas etapas del método de interpretación automático.

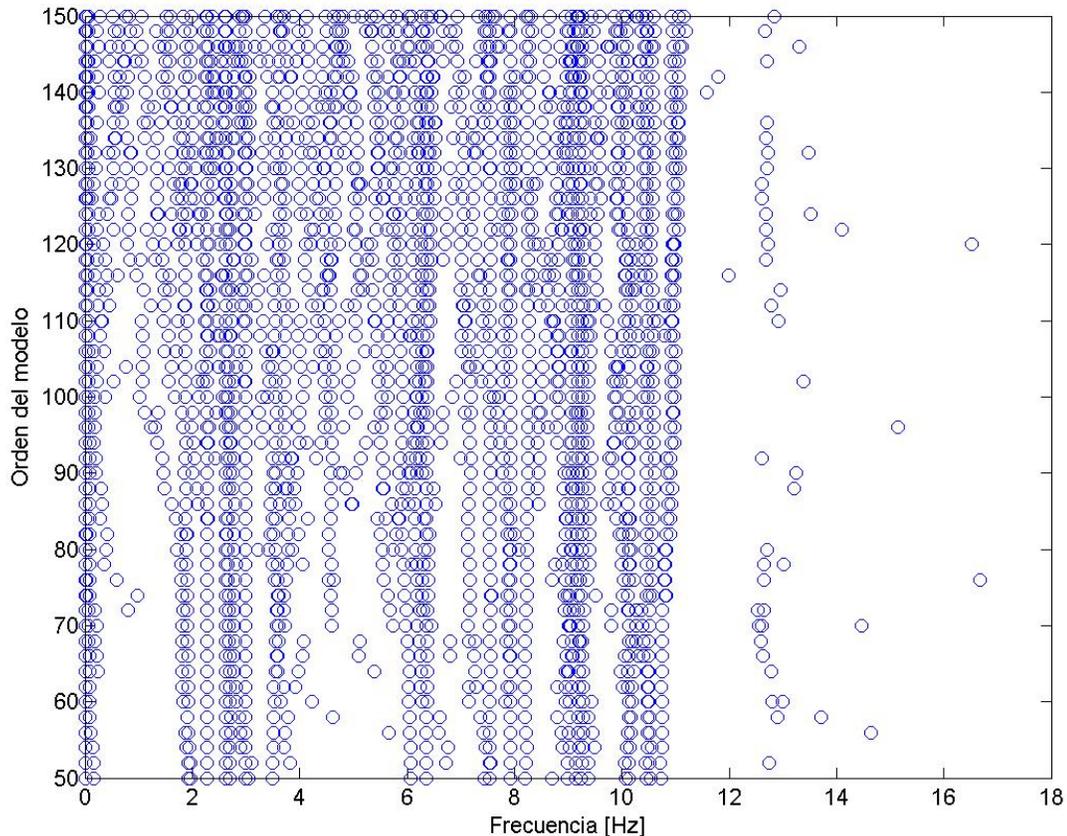


Figura 4.3.1 – Diagrama de estabilización (22-09-2009 07:00)

4.3.1 Primera etapa

La Figura 4.3.2 muestra los criterios débiles utilizados para este procedimiento. Nótese la omisión de criterios de energía (producto del uso de SSICOV) y de criterios de distancia de frecuencia y amortiguamiento (dadas las observaciones expuestas en el capítulo 3). Posteriormente la Figura 4.3.3 presenta un resumen de los criterios fuertes utilizados.

La Figura 3.1.1 muestra el resumen de esta etapa en función del diagrama de estabilización.

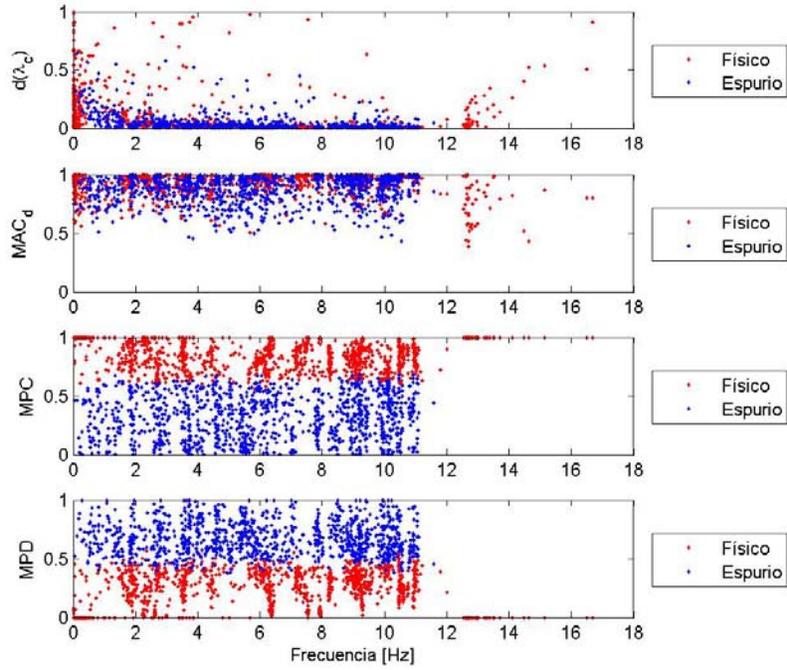


Figura 4.3.2 – Resumen criterios débiles (22-09-2009 07:00)

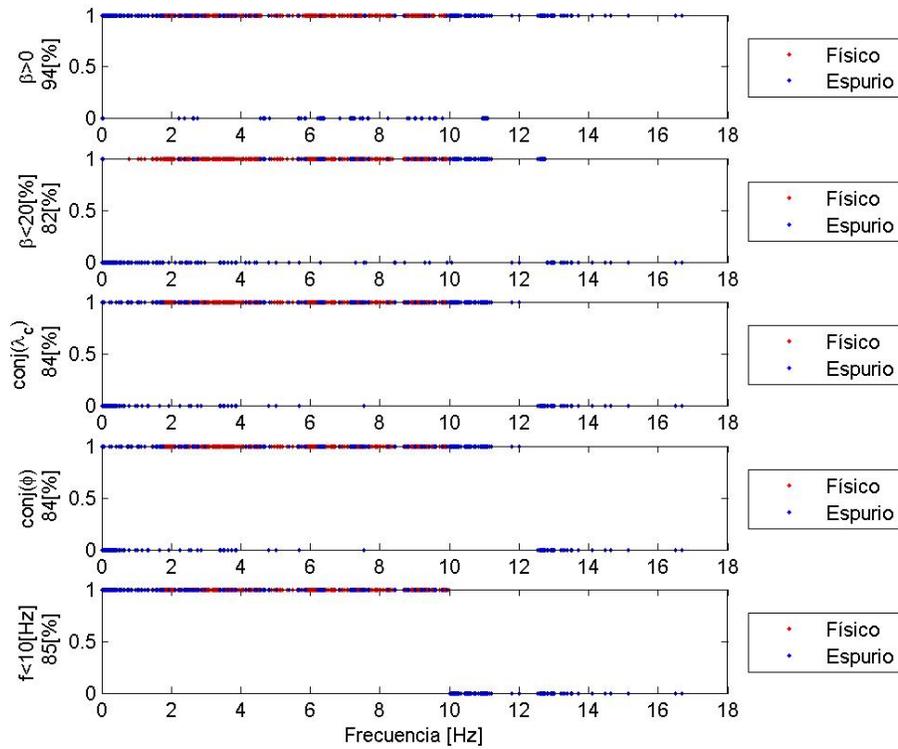


Figura 4.3.3 – Resumen criterios fuertes (22-09-2009 07:00)

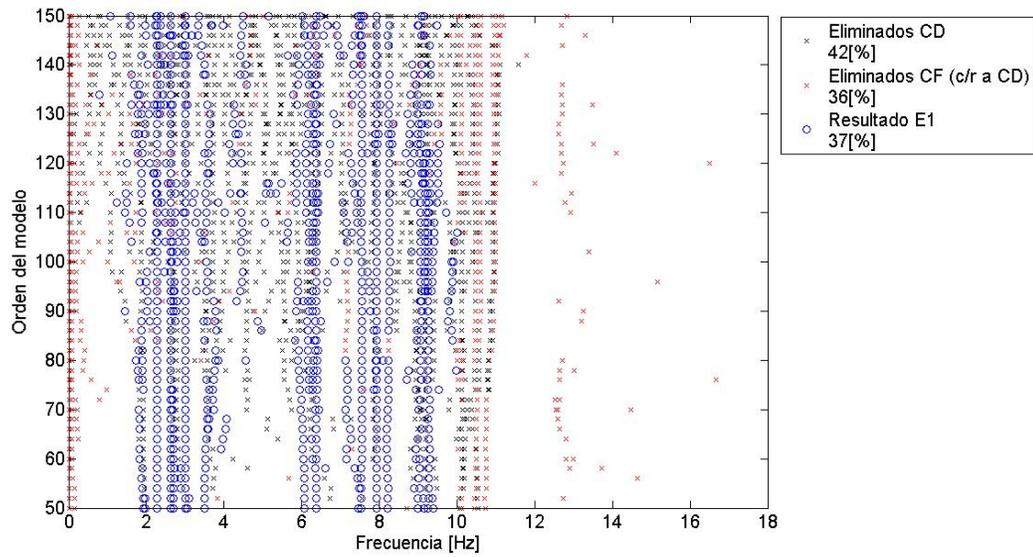


Figura 4.3.4 – Diagrama de estabilización, Primera etapa (22-09-2009 07:00)

4.3.2 Segunda etapa

En la Figura 4.3.5 se muestra el dendrograma asociado al método de agrupamiento jerárquico, y en la Figura 4.3.6 el resumen del agrupamiento a partir del diagrama de estabilización.

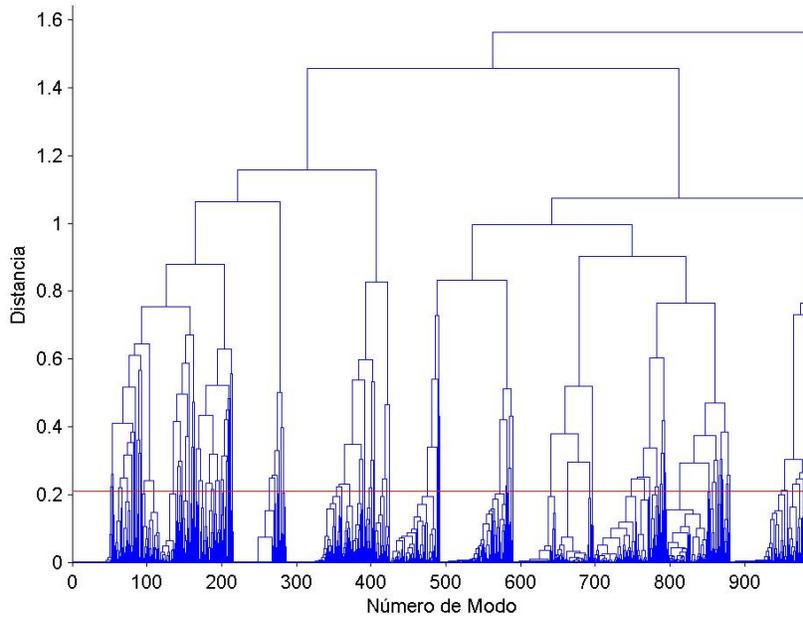


Figura 4.3.5 – Dendrograma (22-09-2009 07:00)

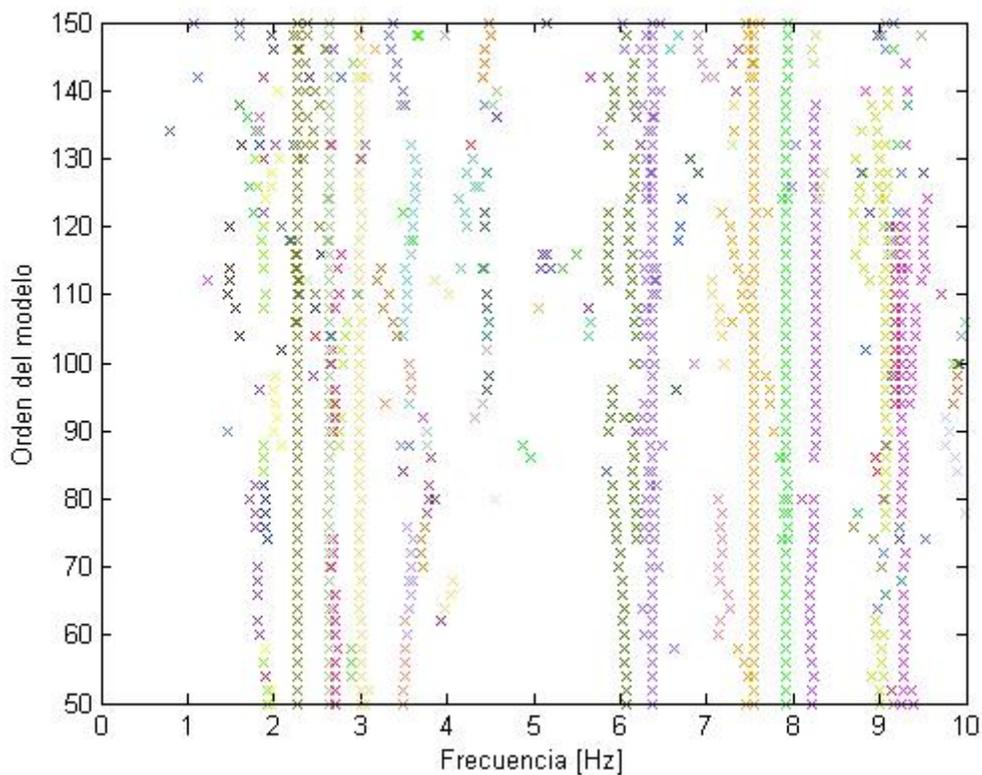


Figura 4.3.6 – Diagrama de estabilización, Segunda etapa (22-09-2009 07:00)

4.3.3 Tercera etapa

La Figura 4.3.6 muestra el agrupamiento mediante el método *k-means* en función del número de elementos de cada grupo, y la Figura 4.3.7 muestra el diagrama de estabilización resultante de esta etapa.

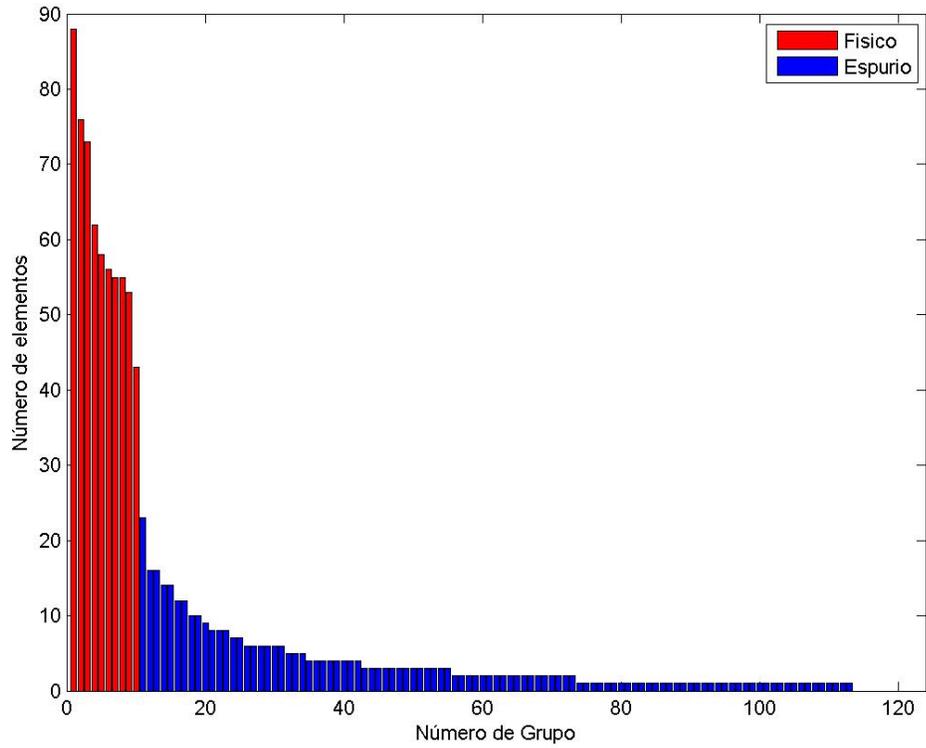


Figura 4.3.7 – Agrupamiento tercera etapa (22-09-2009 07:00)

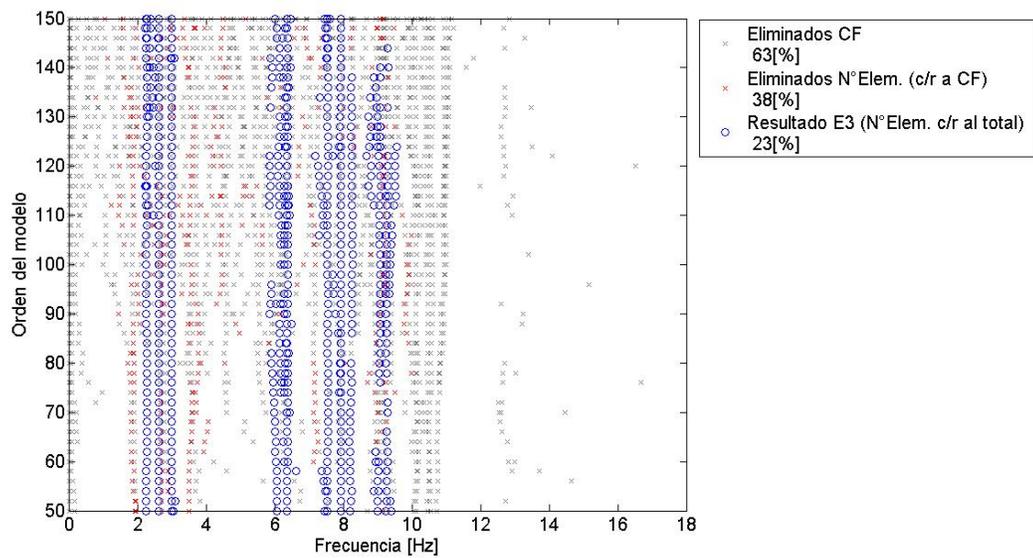


Figura 4.3.8 – Diagrama de estabilización, tercera etapa (22-09-2009 07:00)

4.3.4 Cuarta etapa

La Figura 4.3.9 expone los grupos considerados físicos a partir de la etapa anterior, en conjunto con la selección del modo representativo determinado en función del conjunto más denso. La Figura 4.3.10 expone este resultado a partir del diagrama de estabilización.

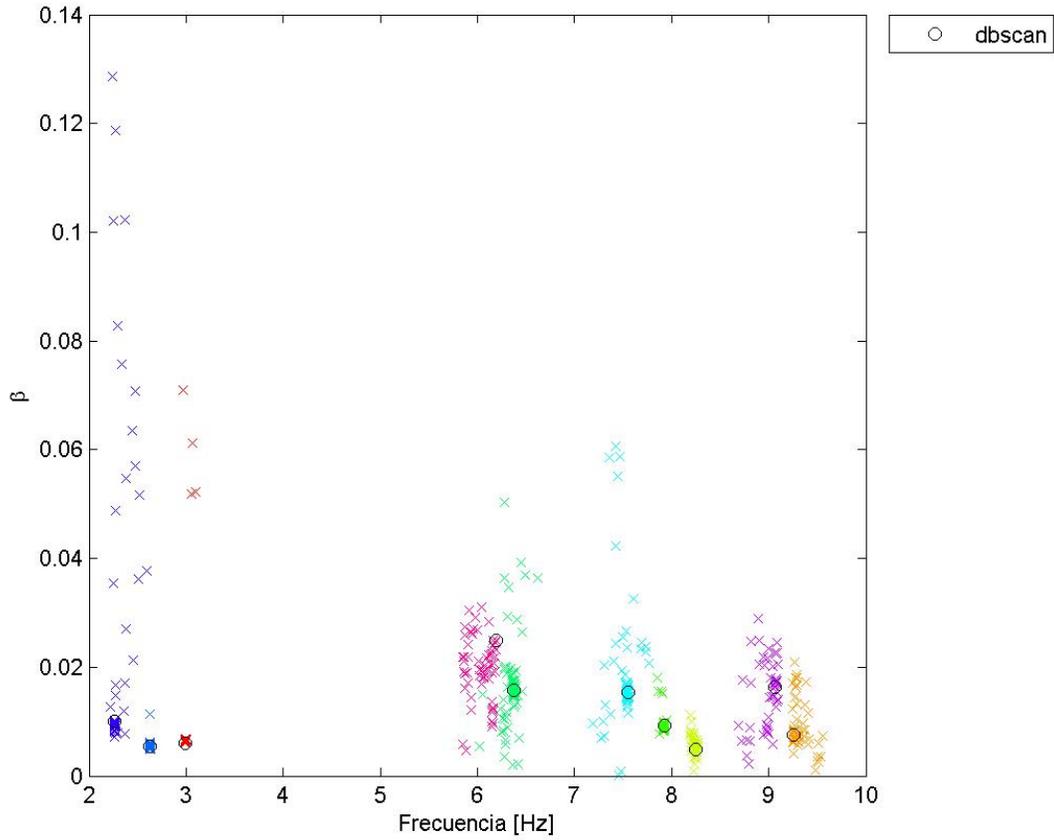


Figura 4.3.9 – Frecuencia v/s amortiguamiento (22-09-2009 07:00)

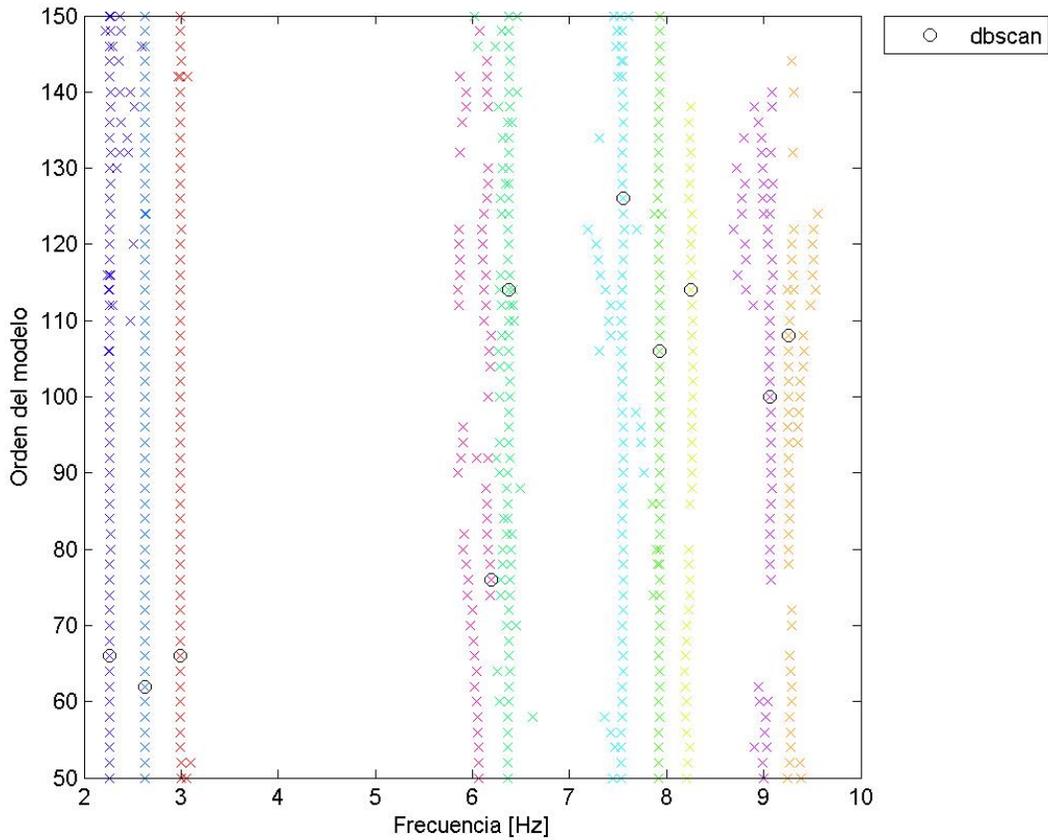


Figura 4.3.10 – Diagrama de estabilización, Cuarta etapa (22-09-2009 07:00)

4.3.5 Resultados

La Tabla 4.3.1 resume los modos obtenidos en función de la frecuencia, razón de amortiguamiento y valores MPC y MPD.

Tabla 4.3.1 – Resumen Identificación (22-09-2009 07:00)

Modo	f_i [Hz]	β_i [%]	$MPC(\phi_i)$	$MPD(\phi_i)$
1	2.27	1.01	0.9999	0.0068
2	2.63	0.54	0.9966	0.0427
3	3.00	0.61	0.9997	0.0146
4	6.19	2.50	0.7003	0.3936
5	6.37	1.58	0.9984	0.0269
6	7.55	1.54	0.9951	0.0520
7	7.93	0.93	0.9974	0.0370
8	8.25	0.50	0.7344	0.3454
9	9.07	1.63	0.8429	0.2987
10	9.26	0.75	0.9643	0.1283

A partir de este análisis se puede observar:

- 1) A partir de la Figura 4.3.1 se muestra la dificultad de detectar columnas estables a simple vista, y la identificación de modos de frecuencia muy bajas (cerca de cero) que probablemente correspondan a modos espurios.
- 2) Los criterios de forma modal presentan una división muy clara, en comparación con los criterios de distancia (en función de MAC y de valor propio). Lo anterior se ilustra en la Figura 4.3.2.
- 3) En función de la Figura 4.3.3 se puede observar que todos los criterios fuertes presentan un cumplimiento relativamente consistente, notando que el criterio asociado a razón de amortiguamiento positivo es el que menos logra detectar modos espurios (en contraste con los resultados obtenidos sobre el modelo de estructura en el capítulo 3). Además se observa que el criterio asociado al límite a la frecuencia toma mayor relevancia dado que existe una cantidad considerable de modos sobre 10 [Hz].
- 4) Destaca la eliminación de posibles columnas estables en frecuencias bajas (cerca de cero) a partir de la aplicación de los criterios fuertes (principalmente por amortiguamiento menor al 20[%] y presencia del par conjugado). Lo anterior se observa a partir de la Figura 4.3.3 y del resumen de la primera etapa a partir del diagrama de estabilización en la Figura 4.3.4, donde además se observa la eliminación de posibles modos físicos superiores a 10[Hz].
- 5) La Figura 4.3.6 expone un agrupamiento poco claro a simple vista por parte de la aplicación de la segunda etapa.
- 6) El proceso de división en función del número de elementos (Figura 4.3.7) expone una división clara e intuitiva, mostrando una diferencia notable entre el número de elementos del conjunto de grupos físicos y espurios.
- 7) Lo anterior destaca en el diagrama de estabilización resultante (Figura 4.3.8), aunque notando la presencia de grupos poco estables en frecuencias cercanas a 6 y 9 [Hz].
- 8) En función de la Figura 4.3.9 y Figura 4.3.10 se puede observar que los primeros tres modos presentan una estabilidad considerable en comparación con modos de frecuencias mayores. Además se logra observar en detalle la imprecisión de los modos cercanos a las frecuencias de 6 y 9 [Hz].
- 9) En función de la alta complejidad del cuarto modo (bajo valor MPC y alto valor MPD, resumidos en la Tabla 4.3.1), y tomando en cuenta la imprecisión observada asociada a esta (mencionada anteriormente), se puede concluir que este no corresponde a un modo representativo de la estructura. La inestabilidad del octavo y noveno modo (observada en la Figura 4.3.9 y Figura 4.3.10) y su alta complejidad (Tabla 4.3.1) entrega mayor dificultad para determinar con seguridad que estos correspondan a modos físicos.

4.4 Análisis Global

A continuación se expone el resultado del proceso de automatización para el intervalo de cuatro años procesados, a partir del cual se expone y analiza el comportamiento de las distintas etapas que componen este proceso.

Dado que se observan canales que presentan errores en intervalos de tiempo considerables, se eliminan estos canales para lograr una mejor identificación. La Figura 4.4.1 muestra los canales utilizados a lo largo del tiempo, y en la sección 4.7 se extiende el análisis sobre estos errores. La

ausencia de canales a principios de 2011 y a fines de 2014 es producto de falta de datos en estos periodos.

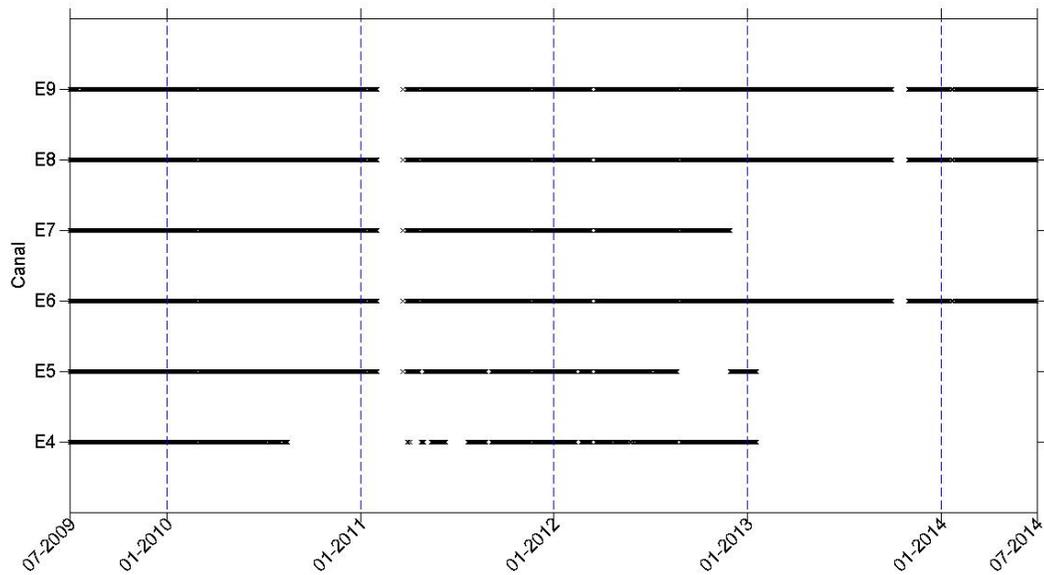


Figura 4.4.1 – Resumen canales utilizados

4.4.1 Primera Etapa

Con el fin de tener una comparación en la efectividad de los distintos criterios débiles utilizados, se expone en la Figura 4.4.2 la diferencia entre centroides del método de agrupamiento *k-means* a lo largo del tiempo, cuyo significado ya ha sido expuesto en la sección 3.3, y en la Figura 4.4.3 el histograma asociado a cada criterio junto con el valor promedio “ μ ”.

En la Figura 4.4.4 y Figura 4.4.5 se muestra la evolución y el histograma (junto con el valor promedio “ μ ”) del porcentaje de modos que cumplen cada criterio fuerte con respecto al total de modos que cumplen los criterios débiles.

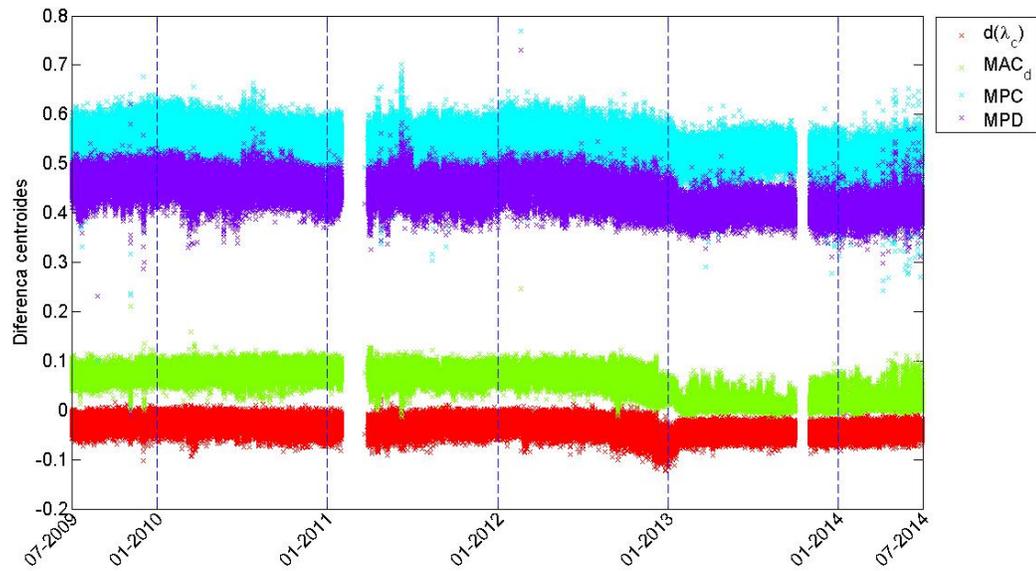


Figura 4.4.2 – Evolución centroides criterios débiles.

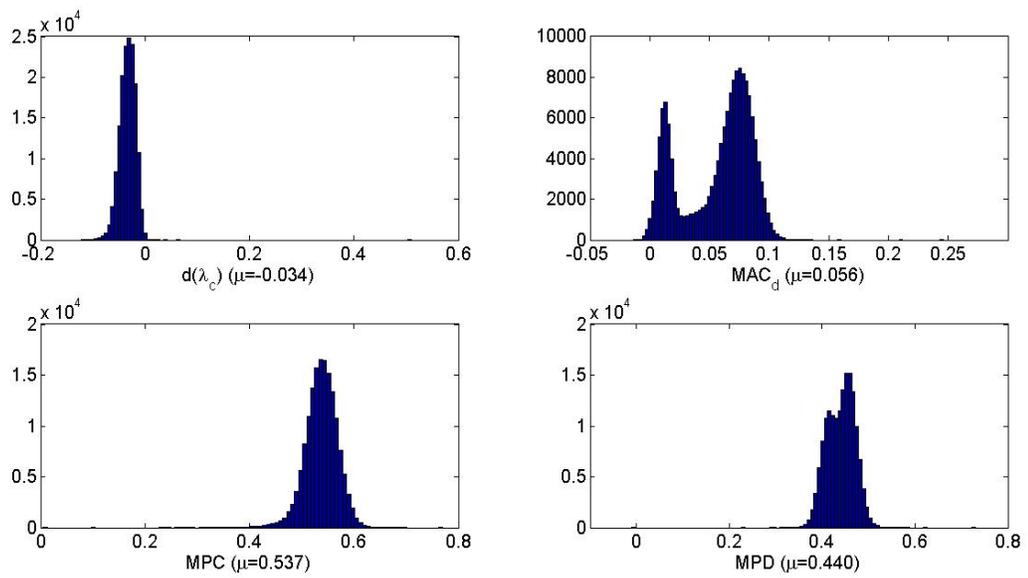


Figura 4.4.3 – Histograma centroides criterios débiles.

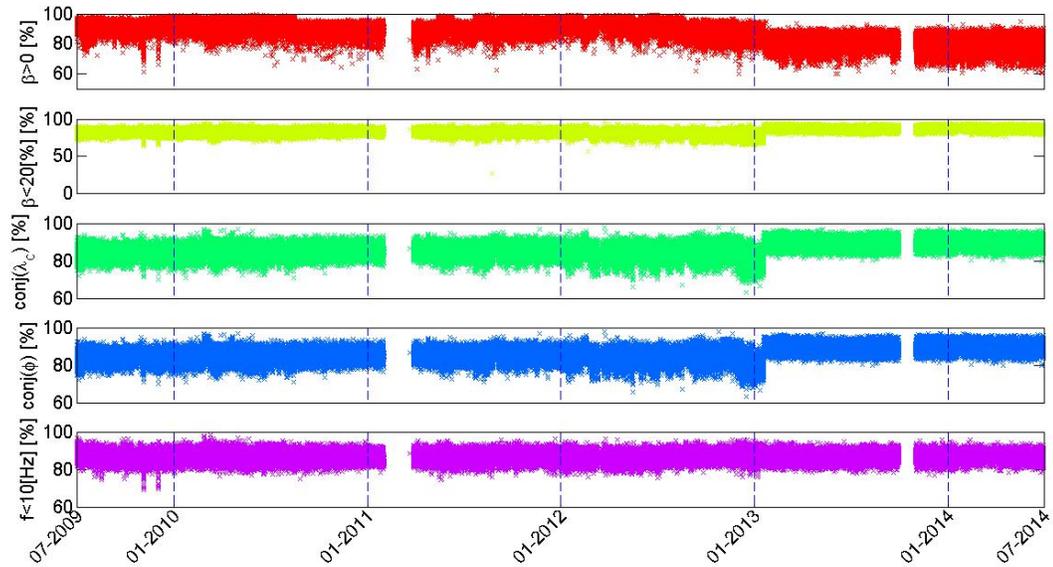


Figura 4.4.4 – Evolución cumplimiento criterios fuertes

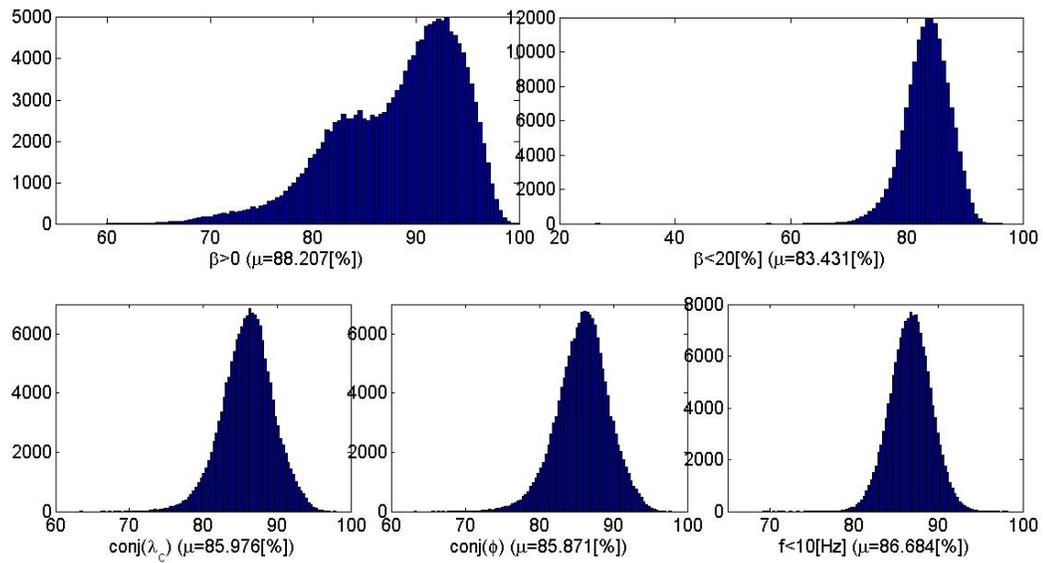


Figura 4.4.5 – Histograma cumplimiento criterios fuertes

Posteriormente, en la Figura 4.4.6 se expone el porcentaje de modos, con respecto al total de modos iniciales, que cumplen los criterios débiles (CD) y que cumplen todos los criterios fuertes (CF). En la Figura 4.4.7 se muestran los histogramas asociados.

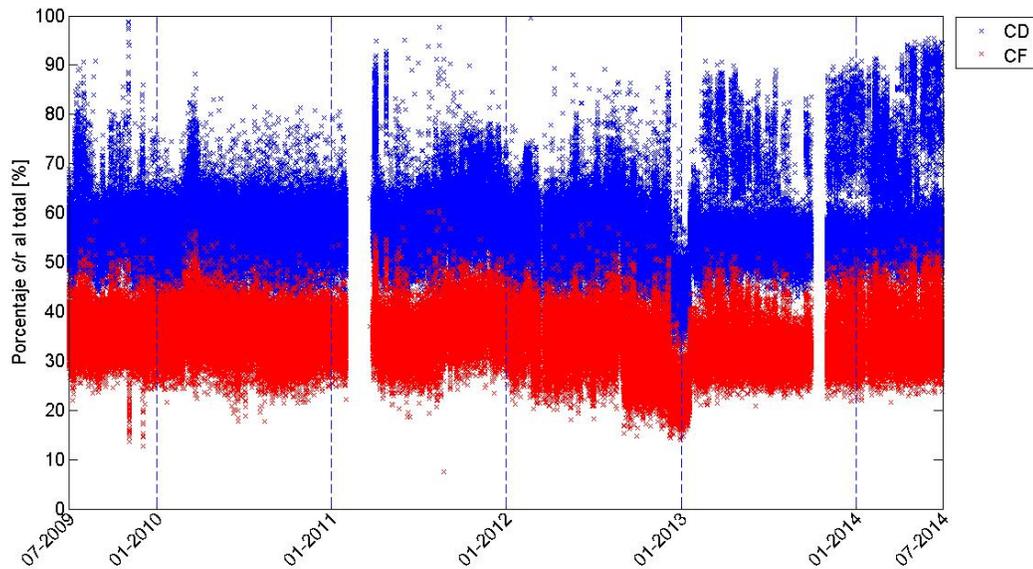


Figura 4.4.6 – Evolución porcentaje de modos que cumplen CD y CF.

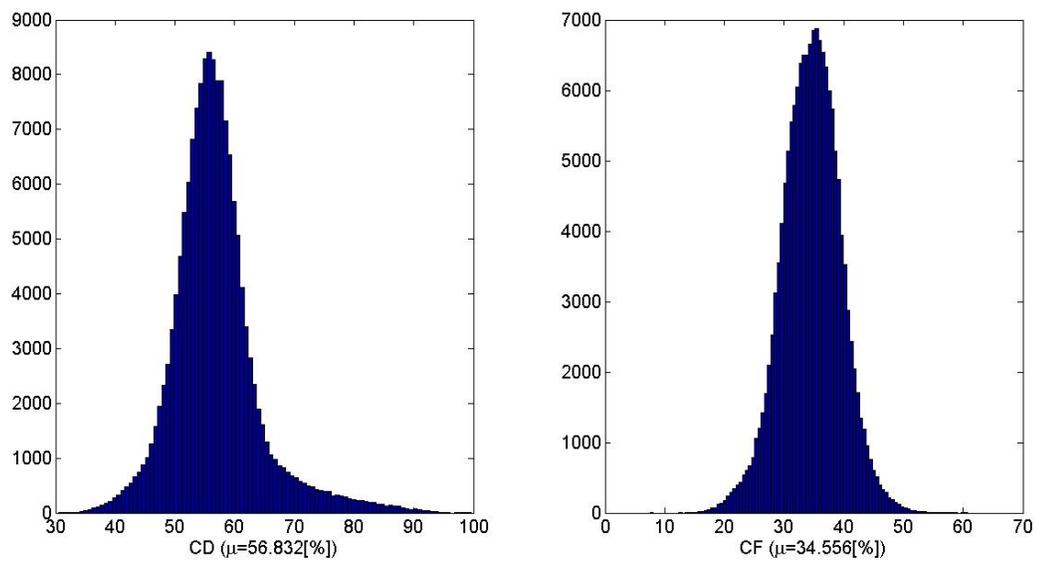


Figura 4.4.7 – Histograma porcentaje de modos que cumplen CD y CF.

4.4.2 Segunda y Tercera Etapa

En la Figura 4.4.8 se expone el número de grupos formados y el número de grupos vacíos creados a lo largo del tiempo, y en la Figura 4.3.9 el histograma asociado. Posteriormente, en la Figura 4.4.10 se expone el porcentaje de modos con respecto al total de modos iniciales que resultan de la tercera etapa, y en la Figura 4.4.11 el histograma asociado.

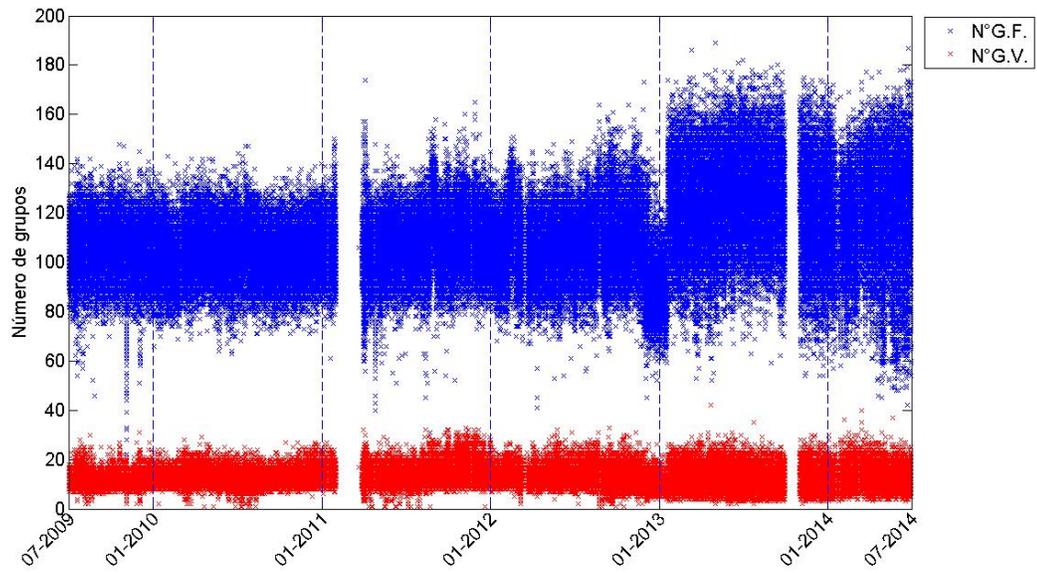


Figura 4.4.8 – Evolución número de grupos formados, número de grupos vacíos

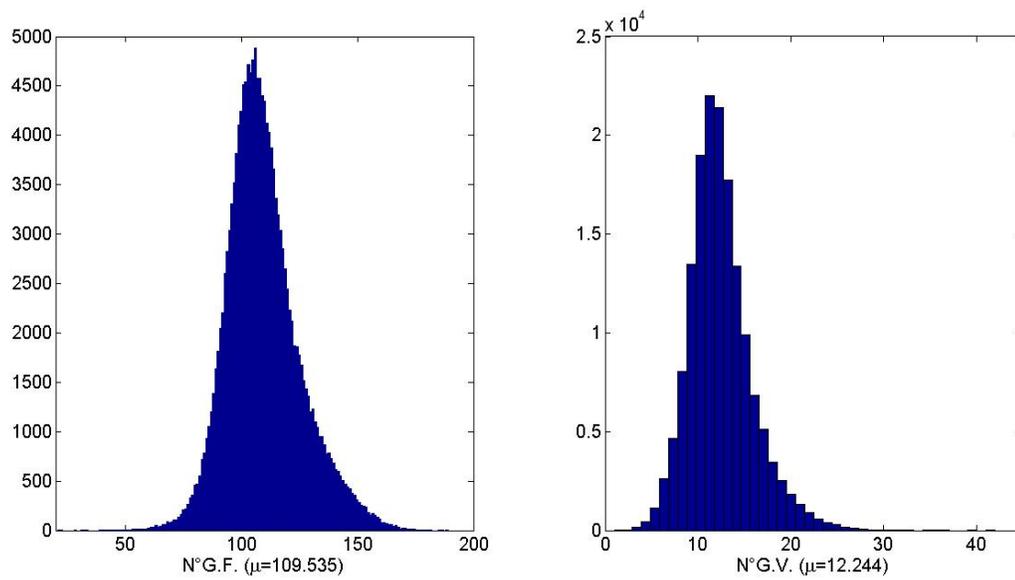


Figura 4.4.9 – Histograma número de grupos formados, número de grupos vacíos

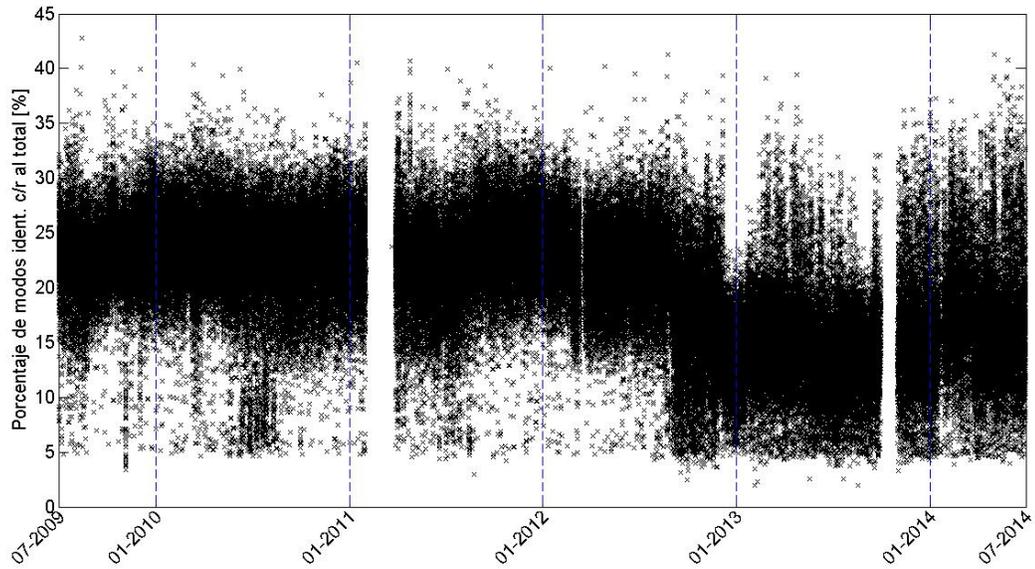


Figura 4.4.10 – Evolución porcentaje de modos tercera etapa

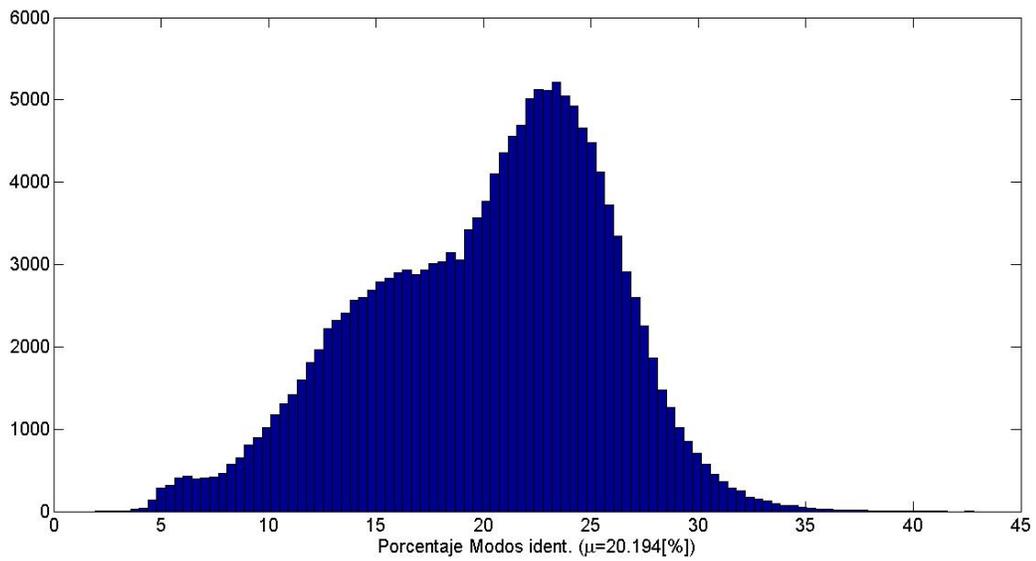


Figura 4.4.11 – Histograma porcentaje de modos tercera etapa.

4.4.3 Cuarta etapa

Se expone la evolución del número de modos identificados a partir de la selección del elemento representativo, a lo largo del tiempo (Figura 4.4.12) y el histograma asociado (Figura 4.4.13).

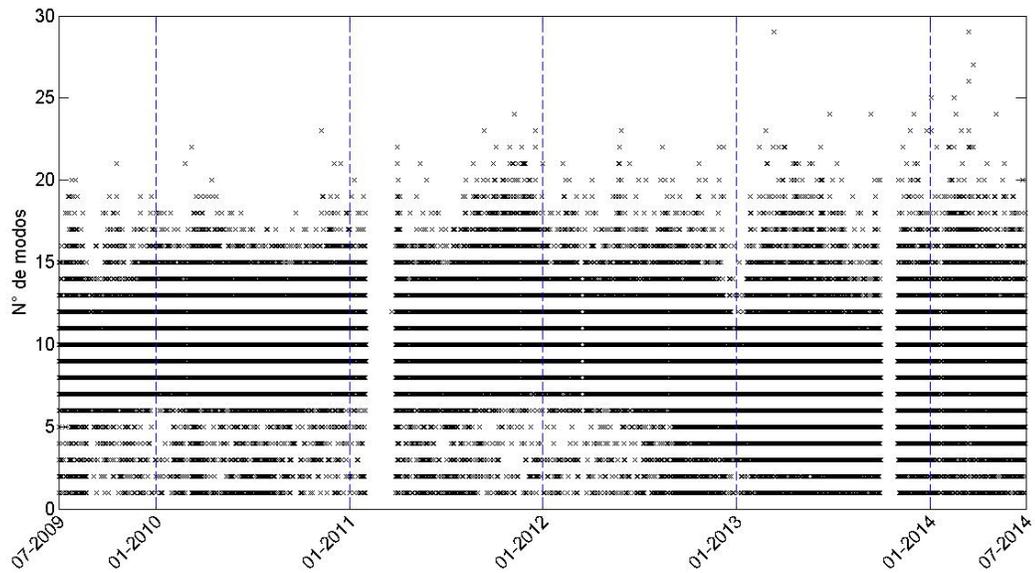


Figura 4.4.12 – Evolución número de modos identificados

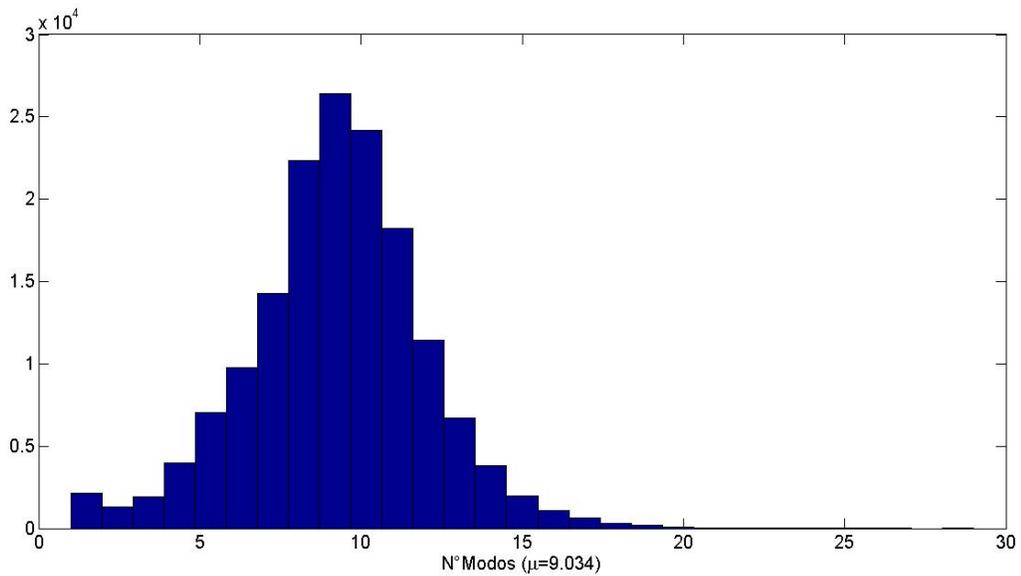


Figura 4.4.13 – Histograma número de modos identificados

4.4.4 Resultados

Las frecuencias obtenidas para cada registro se resumen en la Figura 4.4.14, y en la Figura 4.4.13 se muestra el histograma asociado. Tomando en cuenta que la razón de amortiguamiento no presenta una diferencia notoria entre modos (en comparación con la frecuencia), se dificulta la observación de esta a lo largo del tiempo, es por esto que se realiza un seguimiento modal para lograr discriminar la continuidad de los modos a lo largo de tiempo. En la siguiente sección se realiza este seguimiento modal, así como un análisis más exhaustivo de los resultados obtenidos.

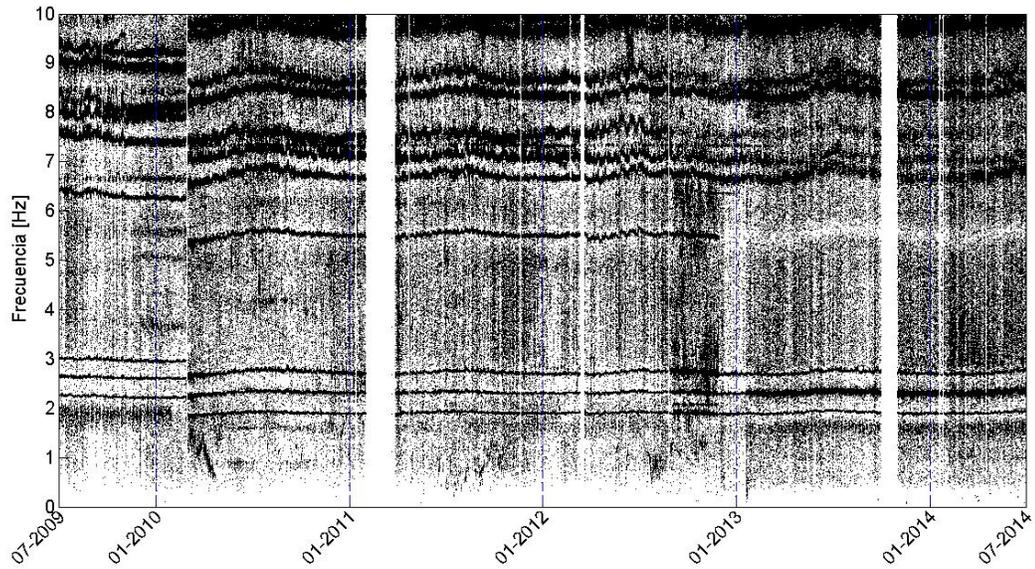


Figura 4.4.14 – Evolución frecuencias identificadas

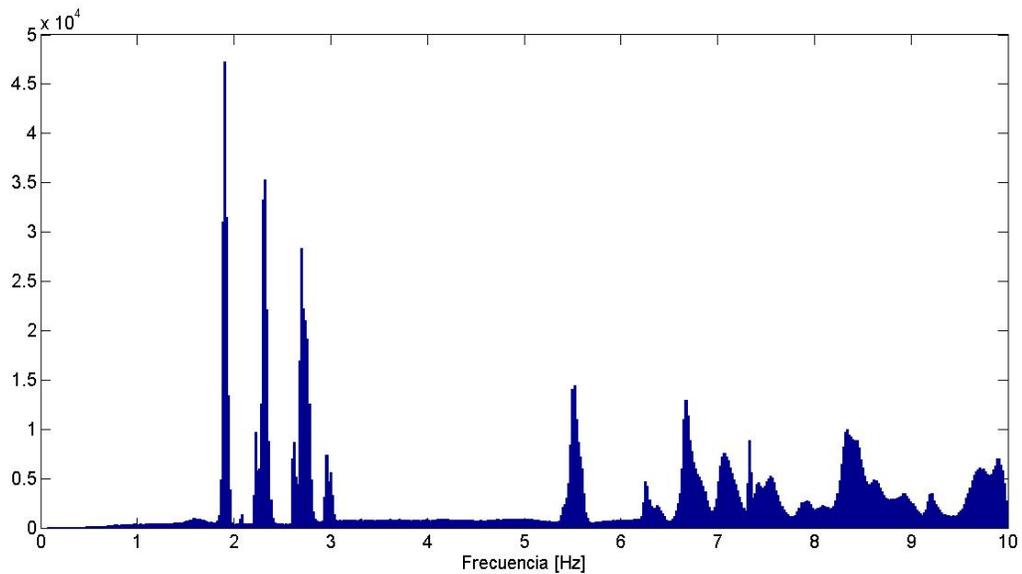


Figura 4.4.15 – Histograma frecuencias identificadas

A partir de los resultados obtenidos destacan las siguientes observaciones:

- 1) La diferencia entre centroides (Figura 4.4.2 y Figura 4.4.3) da cuenta de una discriminación pobre (contrario al esperado, dado su valor negativo) por parte del criterio asociado a la distancia en función del valor propio continuo, justificando la omisión del uso de los criterios de distancia en función de la frecuencia y razón de amortiguamiento. En contraste se observa la amplia ponderación por parte de los criterios de forma modal (MPC y MPD) en el uso del agrupamiento *k-means*, y en considerable menor grado por parte del criterio de distancia en función de MAC. Finalmente se destaca el empobrecimiento global de todos los criterios débiles al disminuir el número de canales (2013-2014).

- 2) A partir de la Figura 4.4.4 y Figura 4.4.5 se observa que todos los criterios eliminan aproximadamente el mismo porcentaje de modos (cerca al 15 [%]), destacando un aumento en el porcentaje para el criterio de amortiguamiento positivo y disminución para el resto de los criterios al disminuir el número de canales (2013-2014), exceptuando el criterio asociado al límite de frecuencia, el cual permanece relativamente estable.
- 3) En función del porcentaje de modos que cumplen los criterios débiles y fuertes (Figura 4.4.6 y Figura 4.4.7) se observa una división relativamente consistente a lo largo del tiempo, la cual disminuye al utilizar un menor número de canales (2013-2014). Además, dado el alto porcentaje de cumplimiento de criterio fuerte con respecto al criterio débil (cerca al 40 [%]), en comparación con el porcentaje de modos eliminados individualmente (cerca al 15 [%]) indica que cada criterio fuerte detecta distintos tipos de modos espurios.
- 4) El número de grupos formados y número de grupos vacíos creados a lo largo del tiempo (Figura 4.4.8 y Figura 4.4.9) es relativamente consistente a lo largo del tiempo, entregando un porcentaje de grupos vacíos creados con respecto al número de grupos formados cerca al 11 [%]. Nótese que esta consistencia disminuye al utilizar un menor número de canales (2013-2014).
- 5) El número de modos resultantes de la tercera etapa (a partir de los cuales se determinan los elementos representativos) con respecto al número de modos iniciales es cerca al 23 [%] previo al periodo 2013-2014, donde disminuye este porcentaje al orden del 15 [%] (Figura 4.4.10 y Figura 4.4.11). Esta variación puede ser resultado de una disminución en el número de columnas estables identificadas o bien columnas menos estables (en términos de una menor cantidad de modos asociados a cada grupo)
- 6) La alta variabilidad del número de modos identificados (Figura 4.4.12 y Figura 4.4.13) indica un trabajo pobre por parte del proceso de automatización, la cual se amplifica al disminuir el número de canales (2013-2014). A pesar de lo anterior, y tomando en cuenta la evolución de las frecuencias identificadas (Figura 4.4.14 y Figura 4.4.15), es posible detectar a simple vista la existencia de una continuidad en al menos nueve frecuencias, la cual disminuye a (al menos) tres en el periodo 2013-2014.
- 7) Finalmente se expone en la Figura 4.4.16 (evolución en el tiempo) y Figura 4.4.17 (histograma) el costo de tiempo en la ejecución del algoritmo de identificación (SSICOV) y del método de interpretación automático. Resulta notable la eficiencia del proceso de automatización con respecto al método de identificación utilizado (SSICOV), donde en promedio el proceso de automatización resulta cerca de dos veces más rápido que el método de identificación.

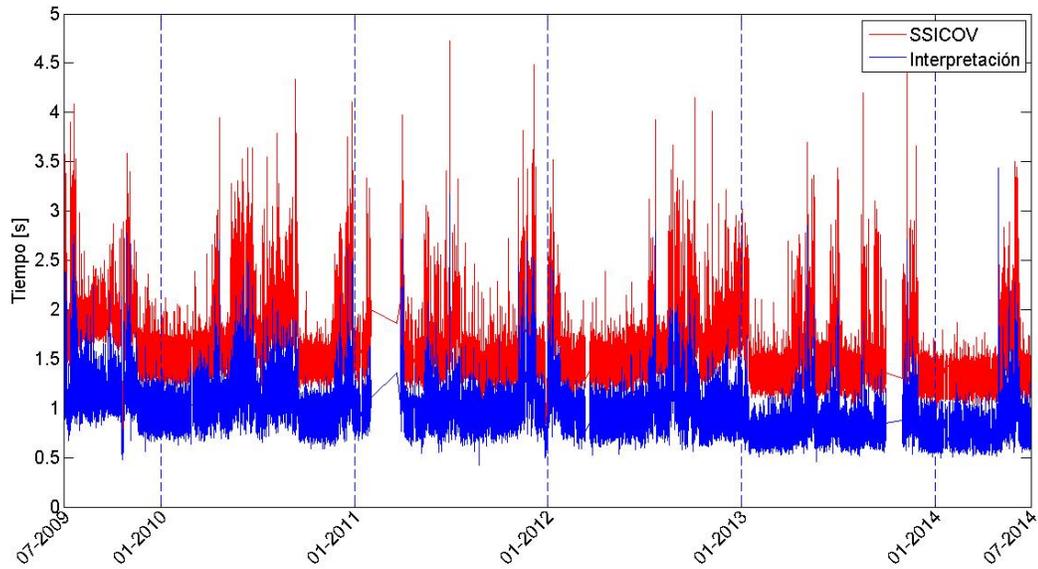


Figura 4.4.16 – Evolución costo computacional identificación e interpretación automática

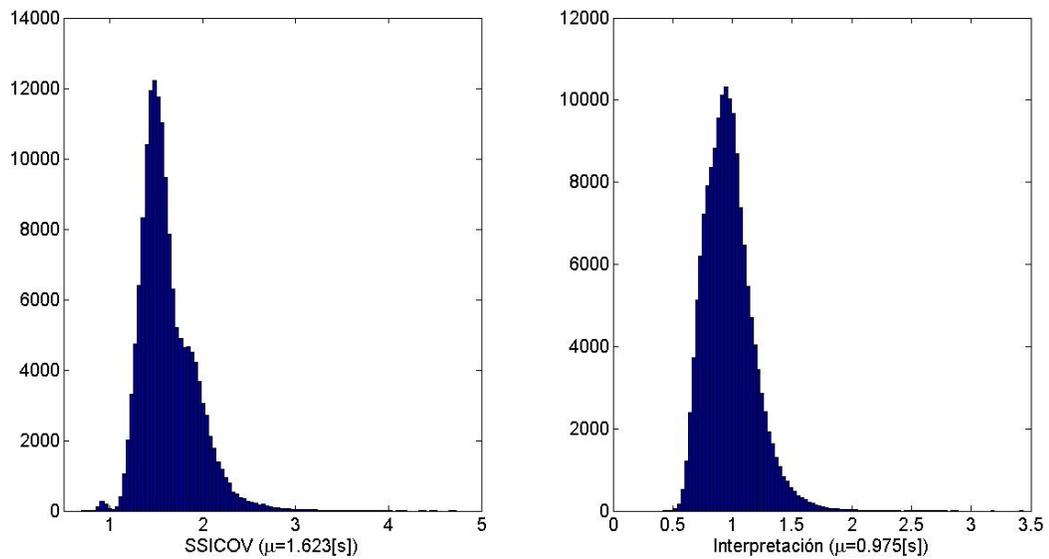


Figura 4.4.17 – Histograma costo computacional identificación e interpretación automática

4.5 Análisis Anual

A continuación se analiza cada año procesado, enfocado a generar un seguimiento modal simple utilizando la siguiente metodología:

- 1) Se grafica cada modo en el plano frecuencia v/s razón de amortiguamiento para detectar grupos o *clusters* de modos similares.
- 2) Para cada grupo observado se crean límites (superior e inferior) a la frecuencia y razón de amortiguamiento, los cuales van a definir estos grupos, considerando que cada uno de

estos grupos está asociado a un determinado modo que evoluciona a lo largo del tiempo. Adicionalmente se determina el centroide asociado a cada grupo.

- 3) Para cada registro se determina el modo más cercano a cada centroide. En caso de que un modo esté asociado a más de un grupo, se asocia solo al grupo más cercano (en función de la distancia al centroide).

El proceso anterior asegura determinar solo un elemento para cada registro asociado a cada grupo, y posibilita la distinción de modos a lo largo del tiempo en función de la frecuencia y razón de amortiguamiento.

La necesidad de generar este análisis anualmente recae en lograr detectar de manera más clara los grupos o *clusters* formados.

4.5.1 Año 2009

La Figura 4.5.1 presenta la evolución de la frecuencia en el tiempo, y la Figura 4.5.2 muestra la frecuencia contra la razón de amortiguamiento obtenida para cada modo. A partir de estas figuras se detectan nueve modos en función de los *clusters* que se generan en la Figura 4.5.2, estos se distinguen en la Figura 4.5.3. Finalmente se expone en la Figura 4.5.4 y Figura 4.5.5 la variación de la razón de amortiguamiento de cada modo identificado a lo largo del tiempo.

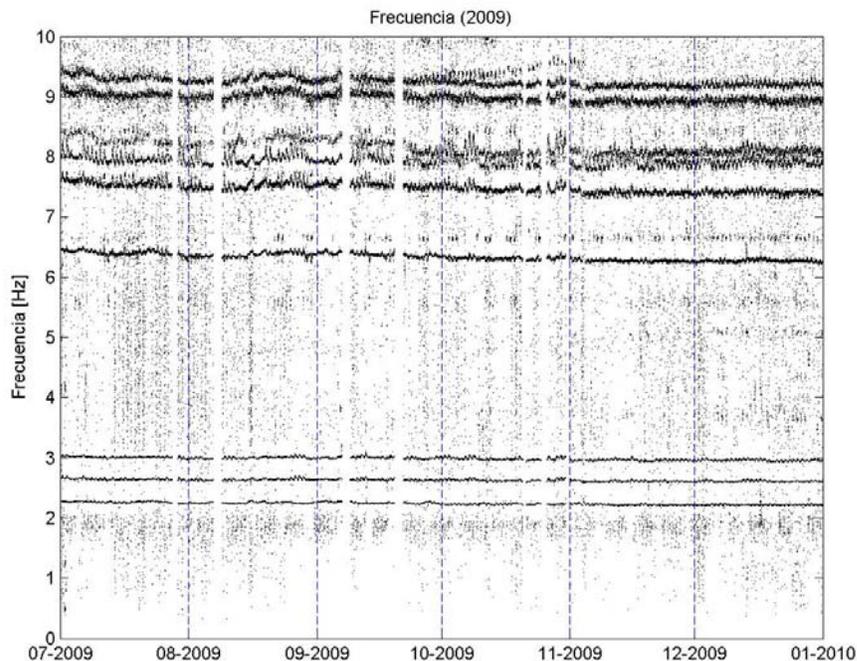


Figura 4.5.1 – Evolución frecuencia (2009)

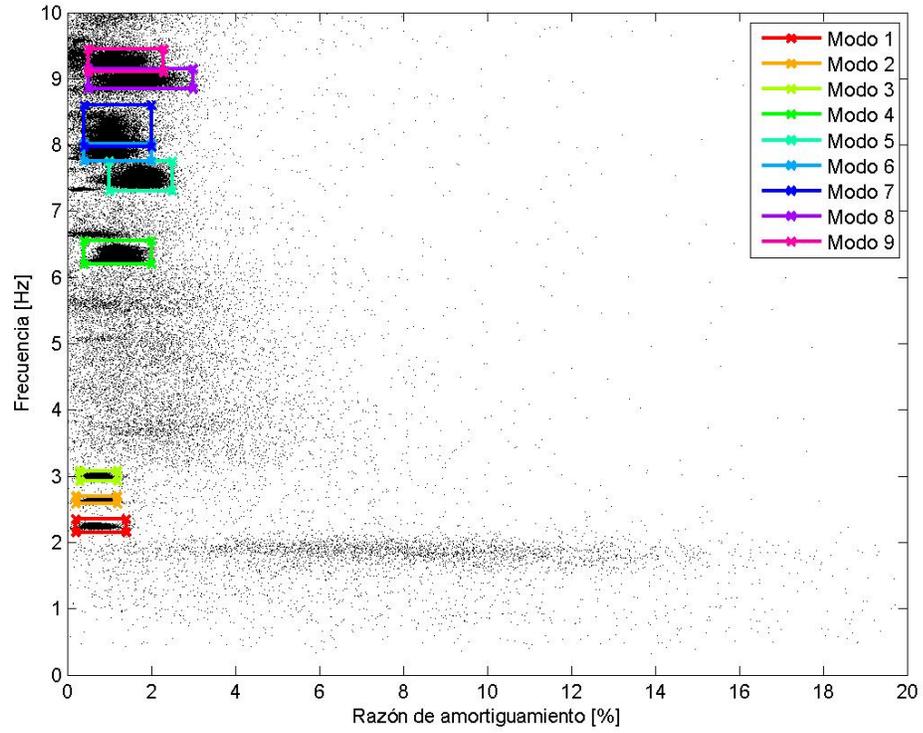


Figura 4.5.2 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2009)

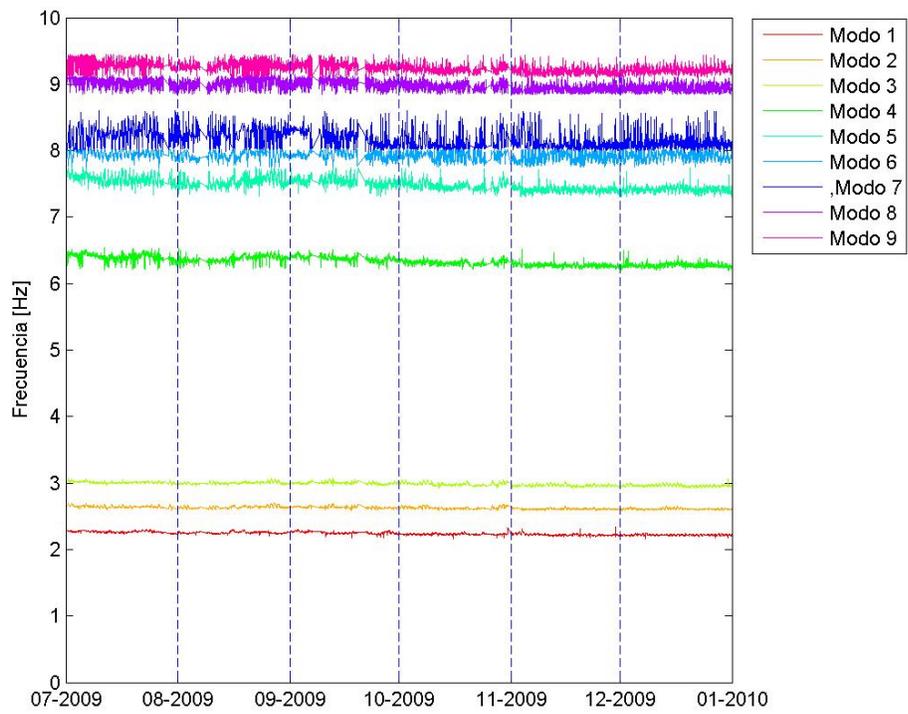


Figura 4.5.3 – Modos identificados (2009)

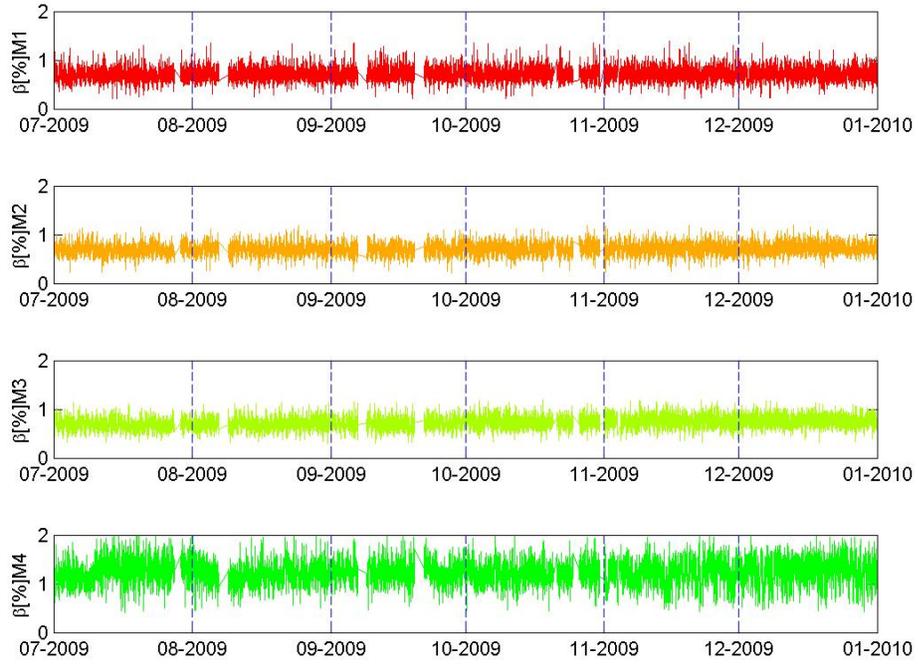


Figura 4.5.4 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-4 (2009)

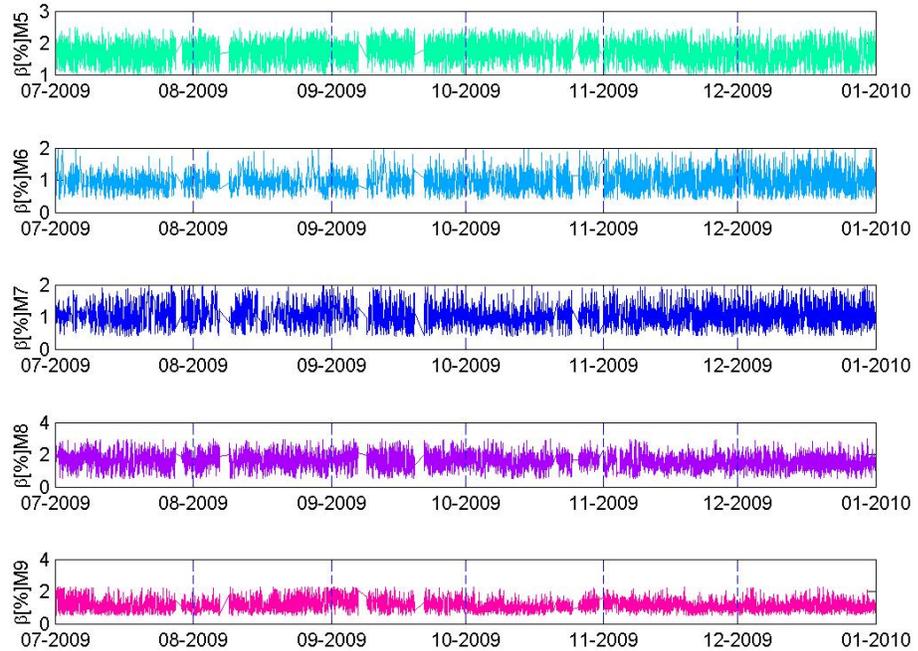


Figura 4.5.5 - Evolución razón de amortiguamiento, modos 5-9 (2009)

4.5.2 Año 2010

La Figura 4.5.6 muestra la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo. A partir de este se observa un cambio notable de las propiedades dinámicas de la estructura a partir de marzo. Tomando en cuenta el terremoto ocurrido el 27 de febrero de 2010, es posible adjudicar este cambio a un daño en la estructura como consecuencia de este evento. Debido a lo anterior se analizan por separado la evolución previa y posterior a este evento.

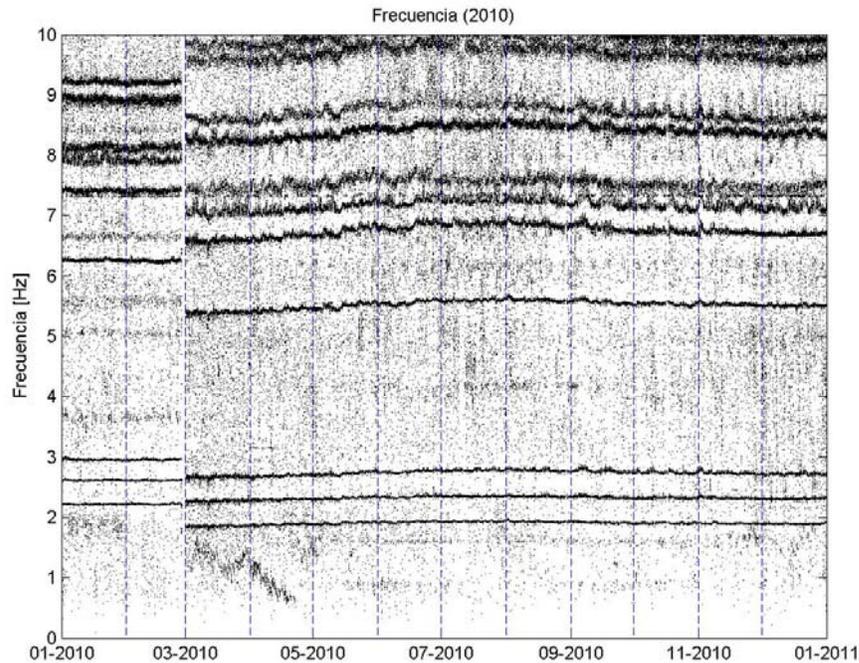


Figura 4.5.6 – Evolución frecuencia (2010)

Previo al evento sísmico

La Figura 4.5.7 muestra la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo, y la Figura 4.5.8 los *clusters* observados en función de la frecuencia y amortiguamiento. A partir de esta se detectan 9 modos, la Figura 4.5.9 revela la evolución de la frecuencia en función de estos modos, mientras que la Figura 4.5.10 y Figura 4.5.11 exponen la razón de amortiguamiento asociado a cada modo.

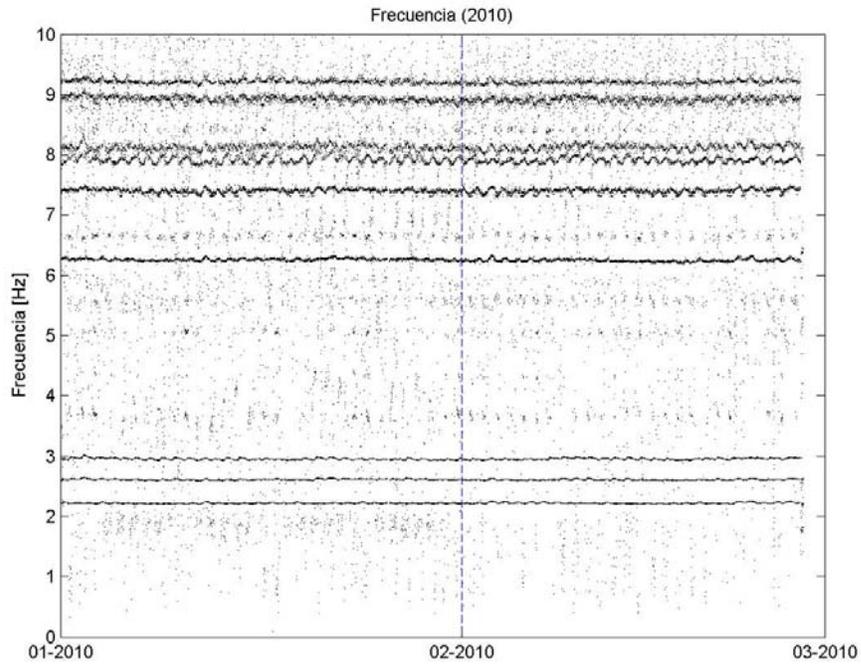


Figura 4.5.7 – Evolución frecuencia (2010, enero-febrero).

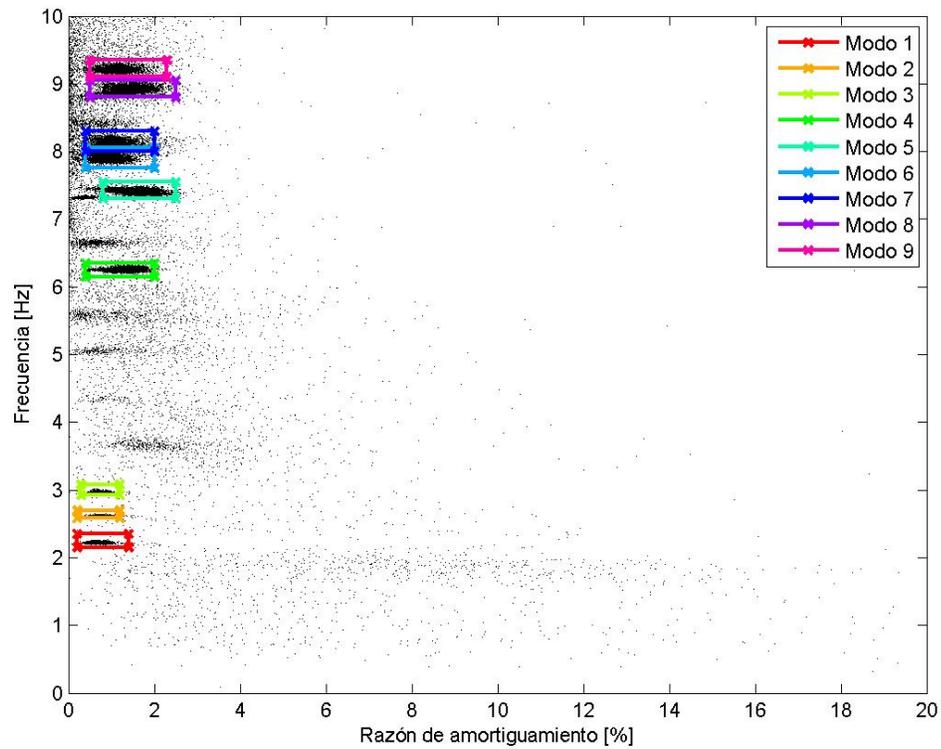


Figura 4.5.8 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2010, enero-febrero).

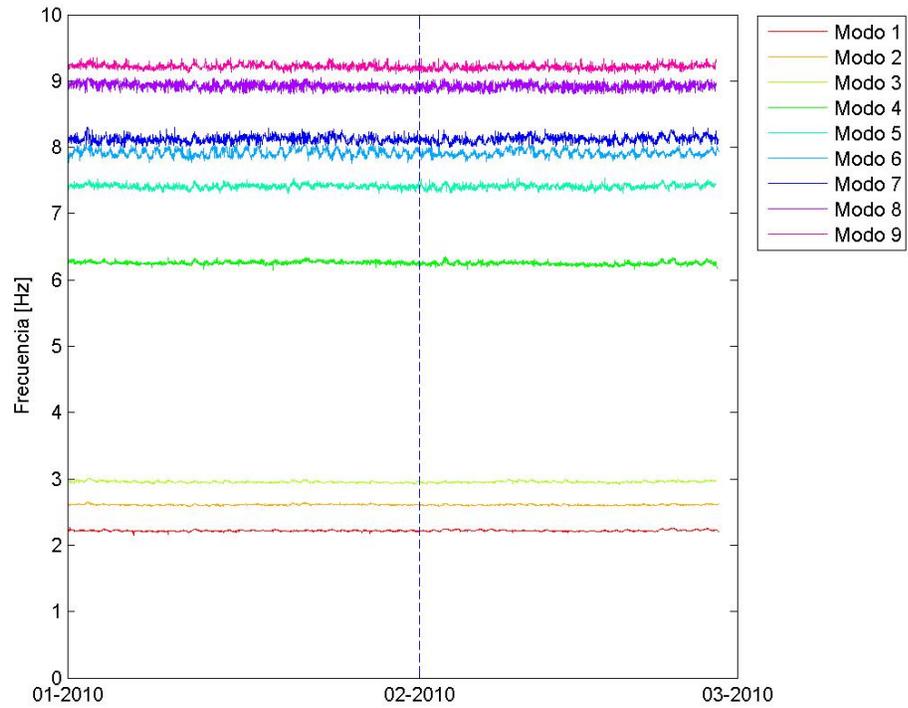


Figura 4.5.9 – Modos identificados (2010, enero-febrero)

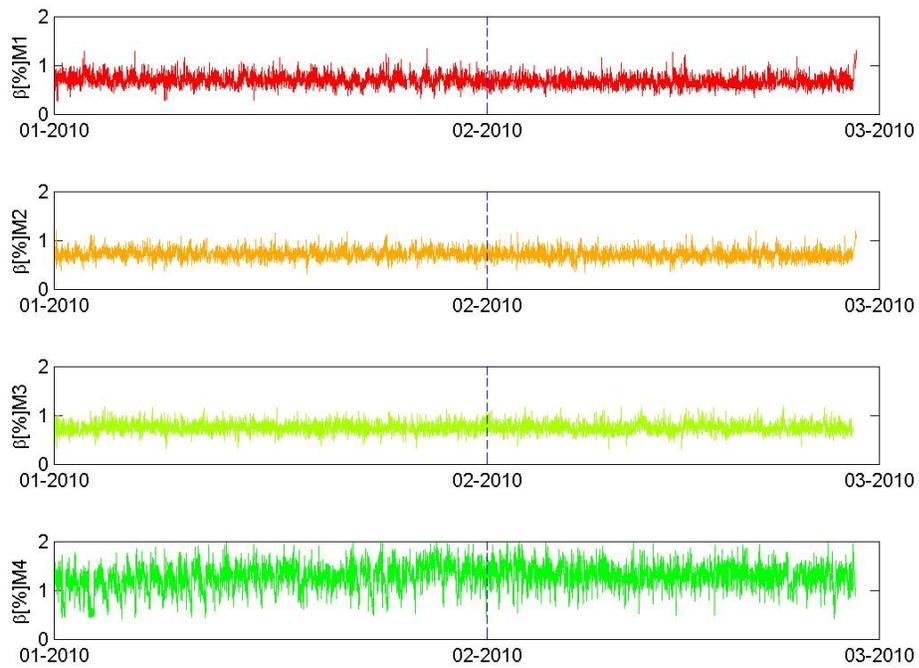


Figura 4.5.10 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2010, enero-febrero).

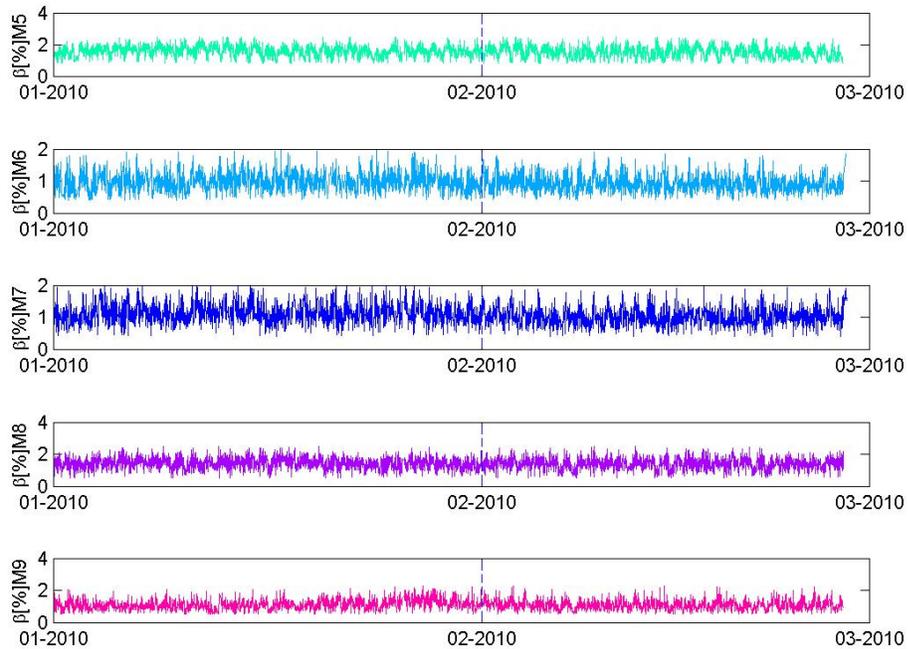


Figura 4.5.11 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2010, enero-febrero).

Posterior al evento sísmico

En la Figura 4.5.12 se muestra la evolución en el tiempo de la frecuencia, y en la Figura 4.5.13 se muestran los *clusters* observados en función de la frecuencia y amortiguamiento. Corresponde indicar que si bien es observable un mayor número de modos que los expuestos a continuación, se consideran solo aquellos que presentan mayor consistencia a lo largo del tiempo. En la Figura 4.5.14 se muestra la evolución de la frecuencia en el tiempo de los modos identificados, y en la Figura 4.5.15 y Figura 4.5.16 se muestra la evolución de la razón de amortiguamiento de estos.

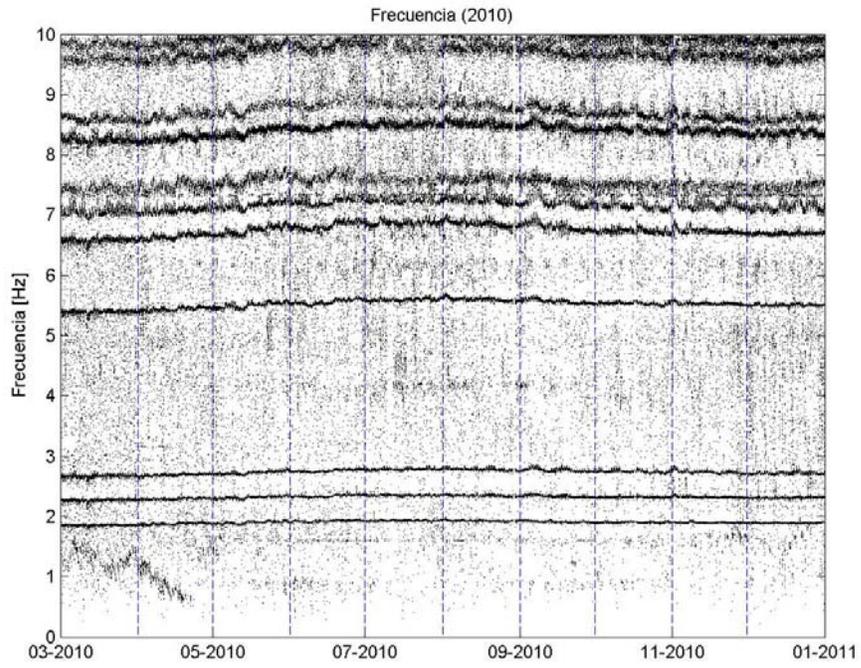


Figura 4.5.12 – Evolución frecuencia (2010, marzo-diciembre).

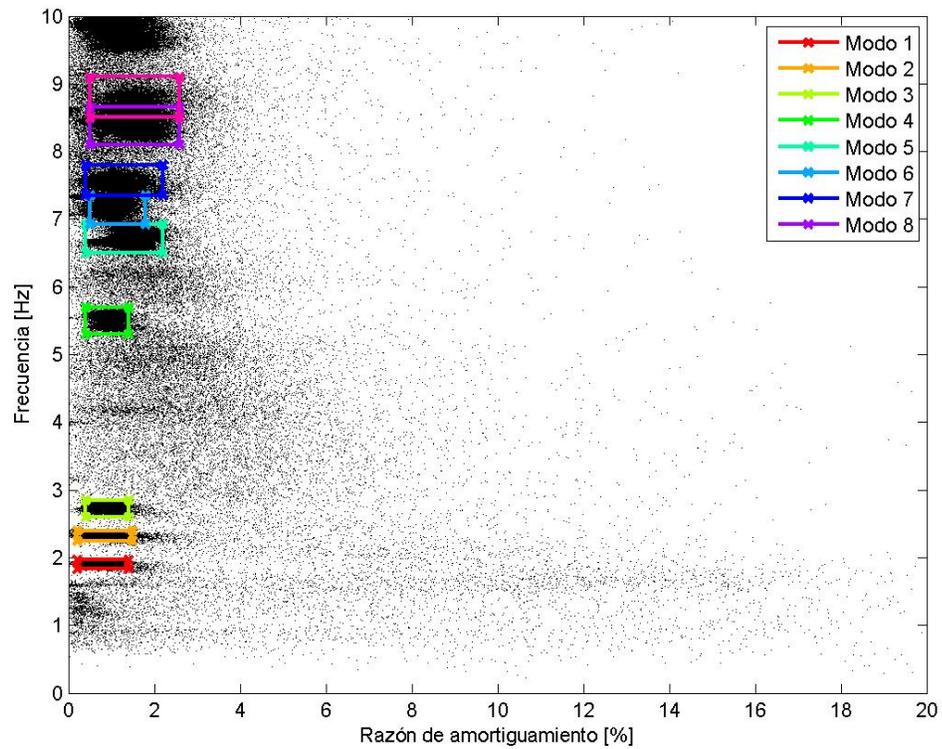


Figura 4.5.13 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2010, marzo-diciembre)

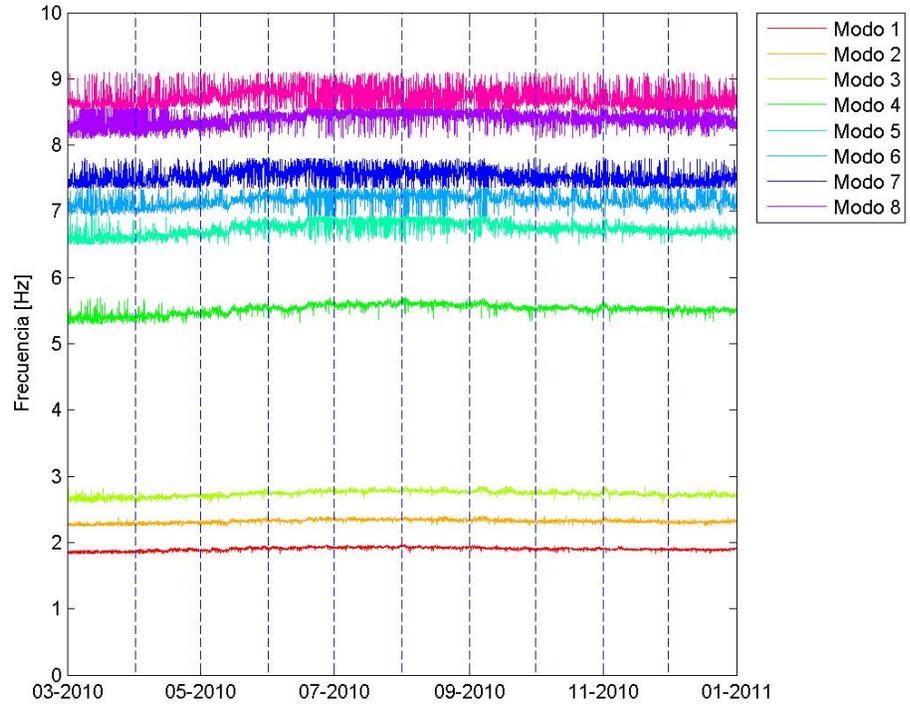


Figura 4.5.14 – Modos identificados (2010, marzo-diciembre)

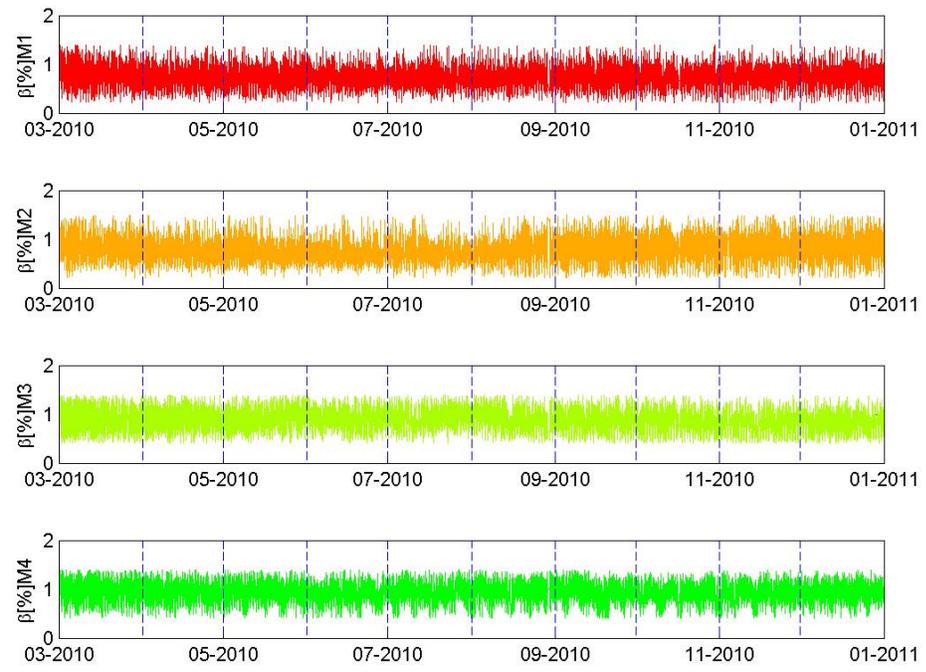


Figura 4.5.15 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2010, marzo-diciembre)

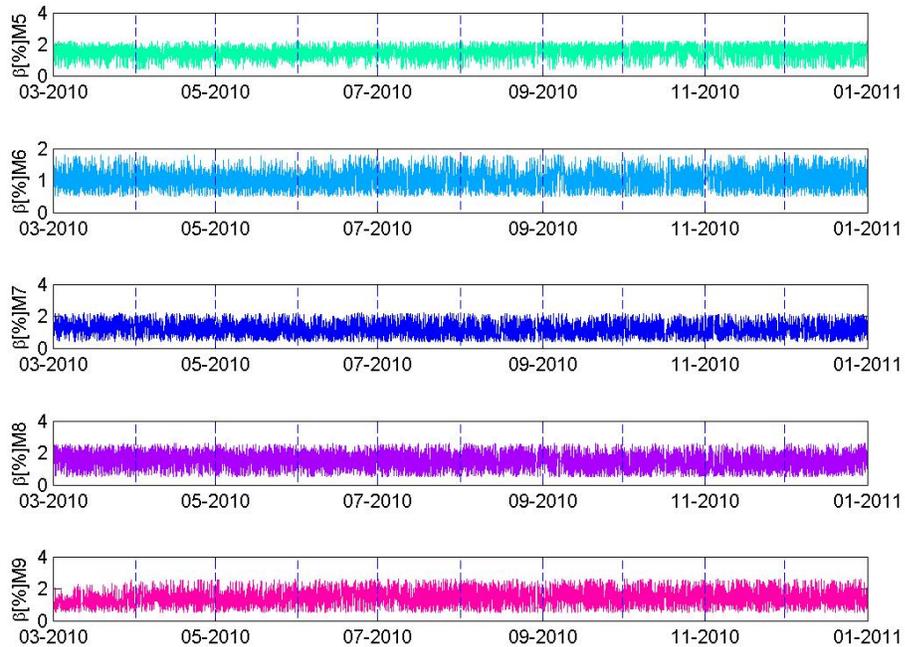


Figura 4.5.16 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2010, marzo-diciembre)

4.5.3 Año 2011

En la Figura 4.5.17 se presenta la evolución de la frecuencia en el tiempo, y en la Figura 4.5.18 se muestra la frecuencia contra la razón de amortiguamiento. De forma análoga al año 2010 (marzo-diciembre) se consideran solo aquellos modos que se presenten de manera consistente a lo largo del tiempo. La Figura 4.5.19 muestra la evolución de la frecuencia de estos modos, y en la Figura 4.5.20 y Figura 4.5.21 se muestra la evolución de la razón de amortiguamiento para cada modo.

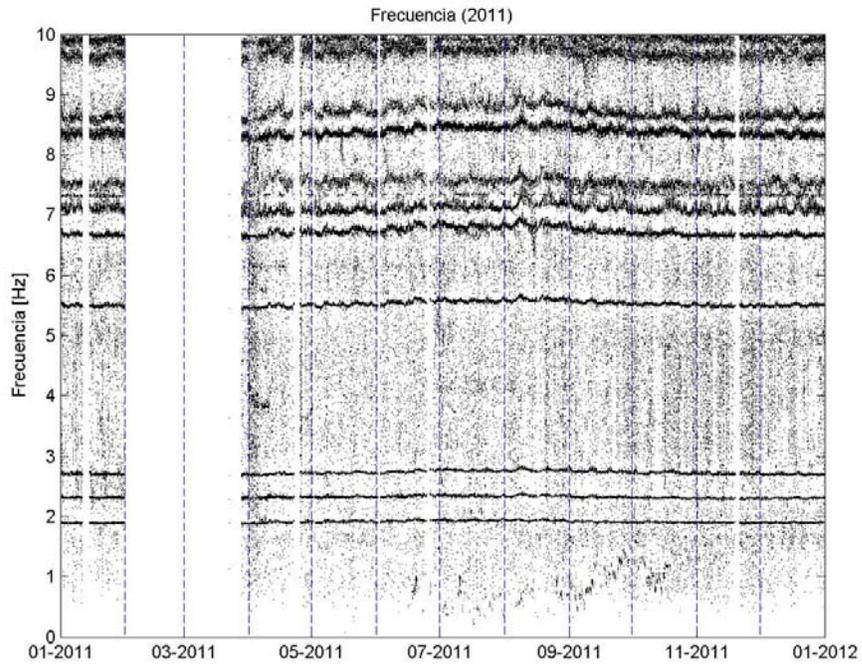


Figura 4.5.17 – Evolución frecuencia (2011)

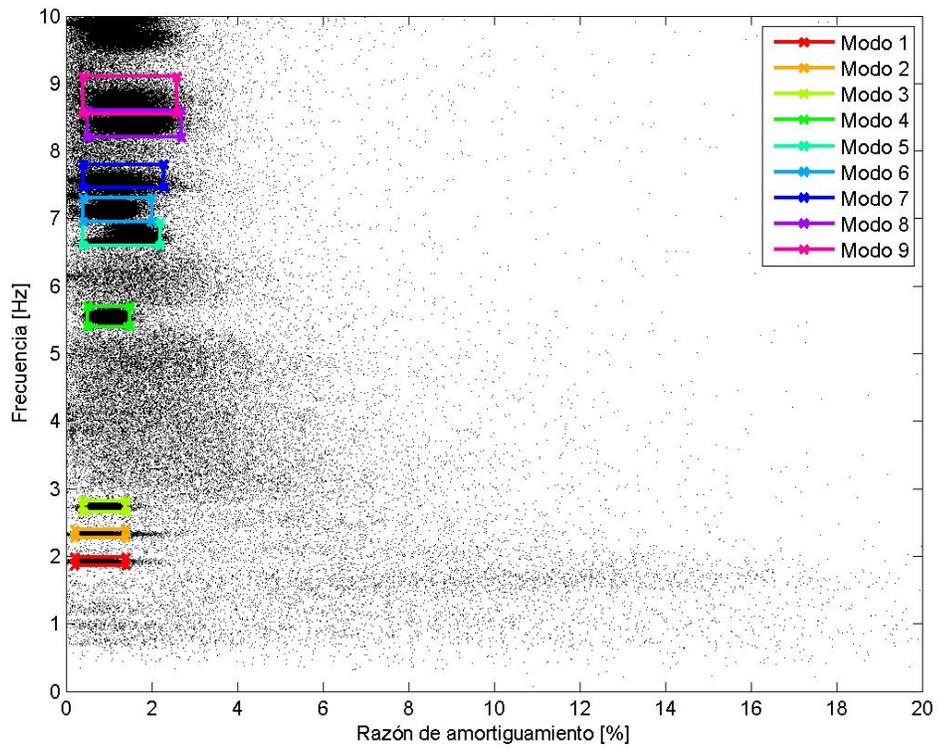


Figura 4.5.18 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2011)

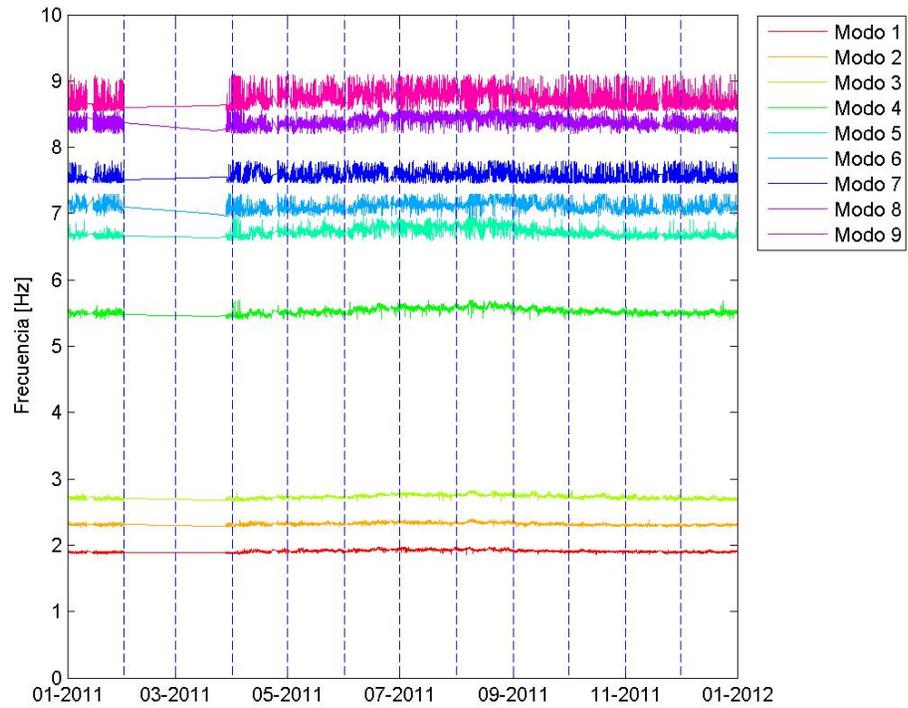


Figura 4.5.19 – Modos identificados (2011)

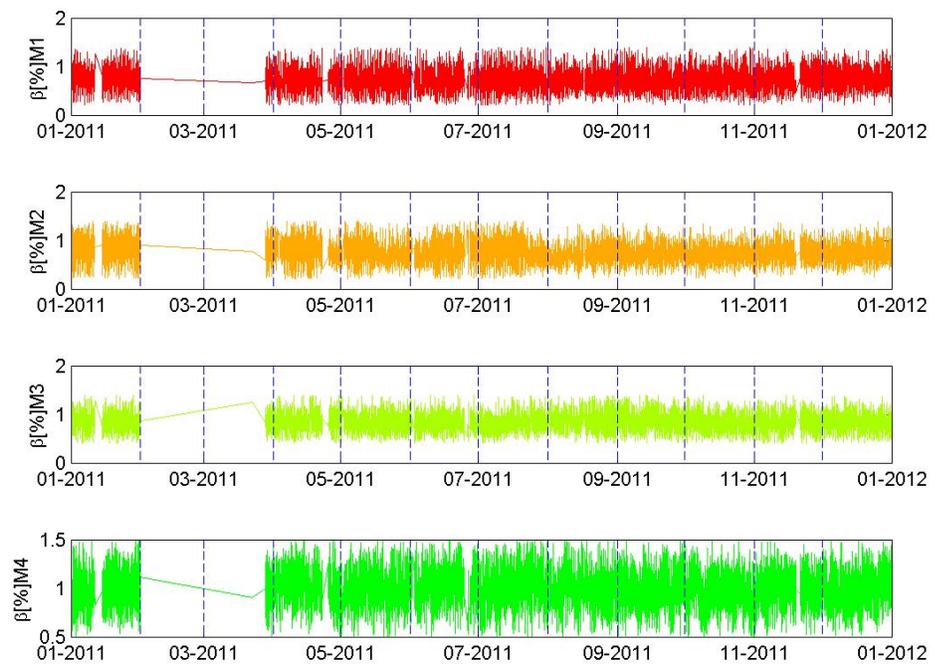


Figura 4.5.20 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2011)

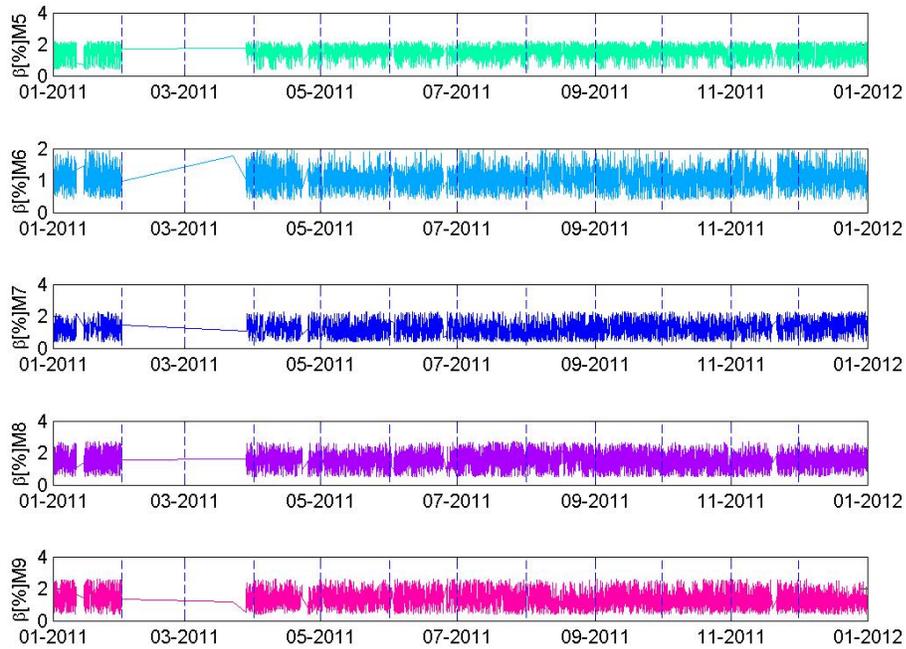


Figura 4.5.21 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (2011)

4.5.4 Año 2012

En la Figura 4.5.22 se muestra la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo. Obsérvese que a finales de noviembre se deja de presentar un modo (cercano a los 5.8 [Hz]), esto es producto del mal funcionamiento del cuarto canal (E7), el cual se elimina de la identificación, y en consecuencia se reduce la cantidad de modos observables (mayor detalle en sección 4.7). La Figura 4.5.23 muestra la frecuencia contra la razón de amortiguamiento. A partir de esta se detectan 7 modos, en la Figura 4.5.24 se muestra la evolución de la frecuencia de estos modos, y en la Figura 4.5.25 y Figura 4.5.26 se muestra la evolución de la razón de amortiguamiento de estos.

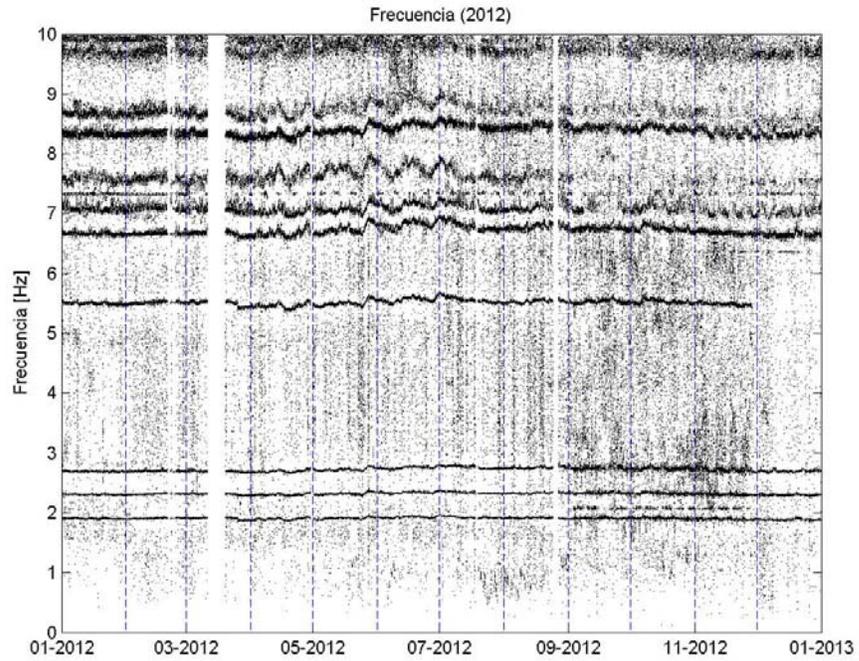


Figura 4.5.22 – Evolución frecuencia (2012)

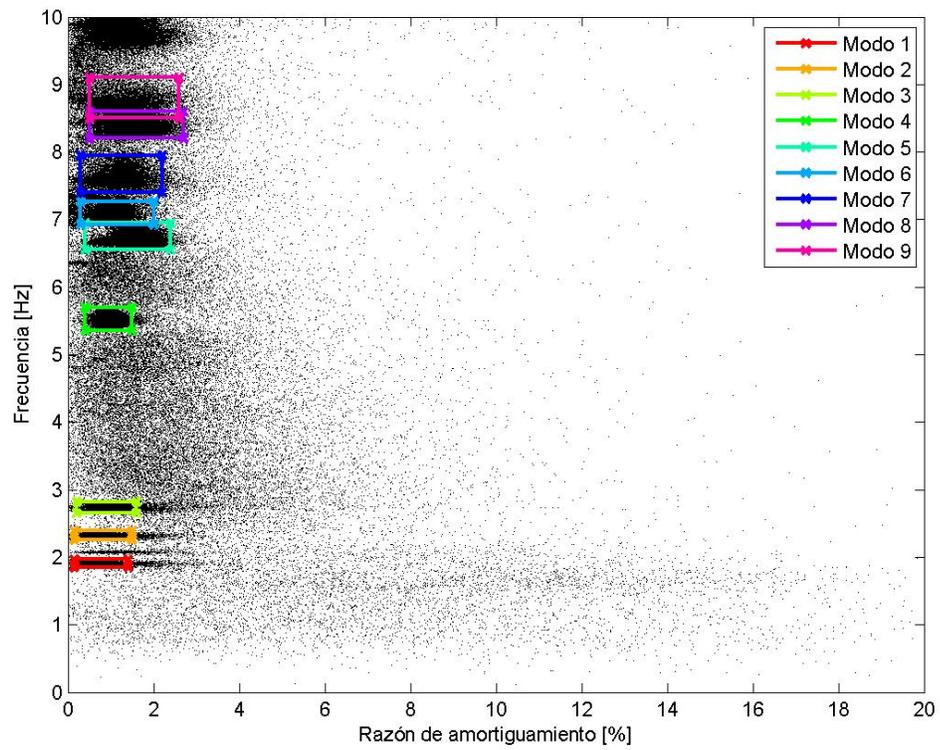


Figura 4.5.23 – Frecuencia v/s amortiguamiento (2012)

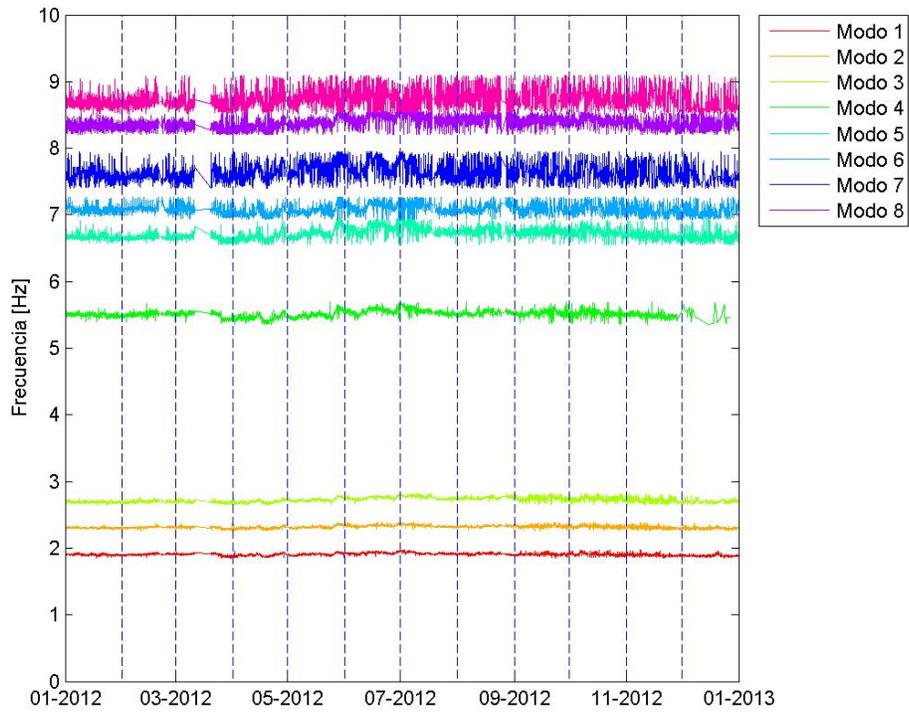


Figura 4.5.24 – Modos identificados (2012)

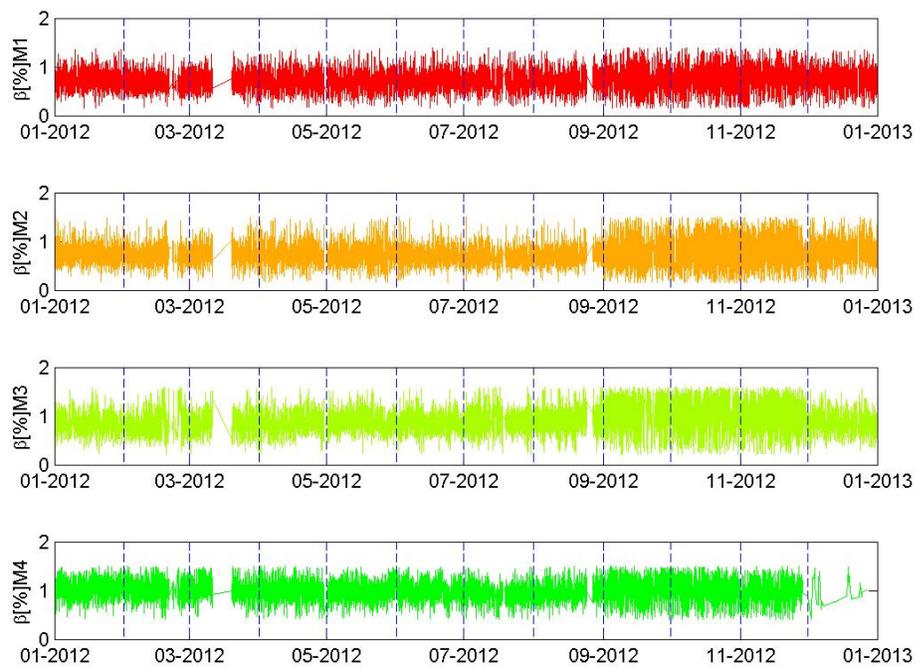


Figura 4.5.25 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (2012)

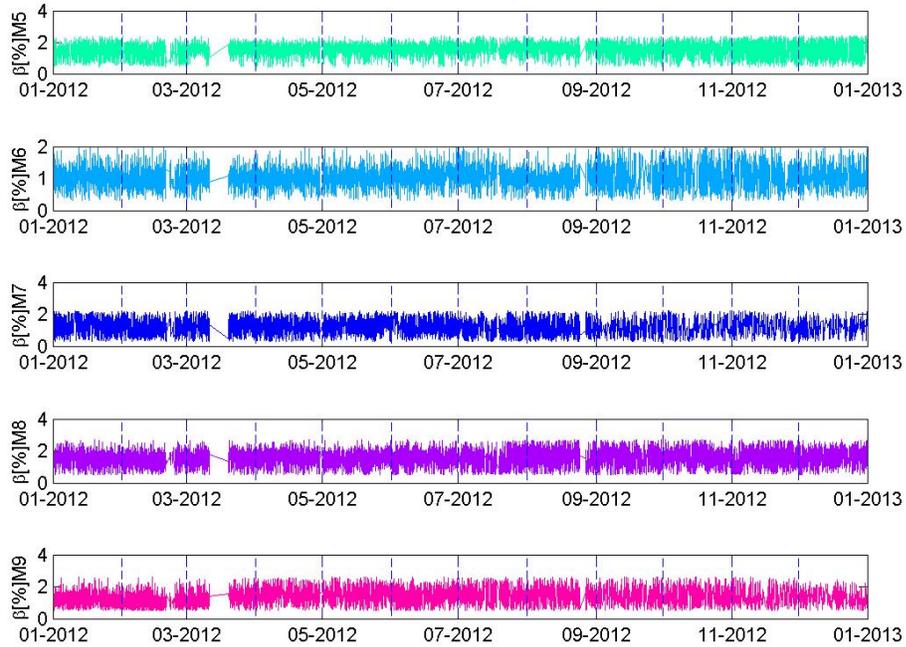


Figura 4.5.26 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-8 (2012)

4.5.5 Año 2013

La Figura 4.5.27 muestra la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo. Se destaca que desde principios de este año (mediados de enero) se elimina el primer, segundo y cuarto canal (E4, E5, E7) debido a su mal funcionamiento. La Figura 4.5.28 muestra los modos (consistentes) observados en la frecuencia contra amortiguamiento, y en la Figura 4.5.29 se muestra la evolución de la frecuencia de estos modos. Posteriormente, en la Figura 4.5.30 se muestra la evolución de la razón de amortiguamiento de los cuatro modos detectados.

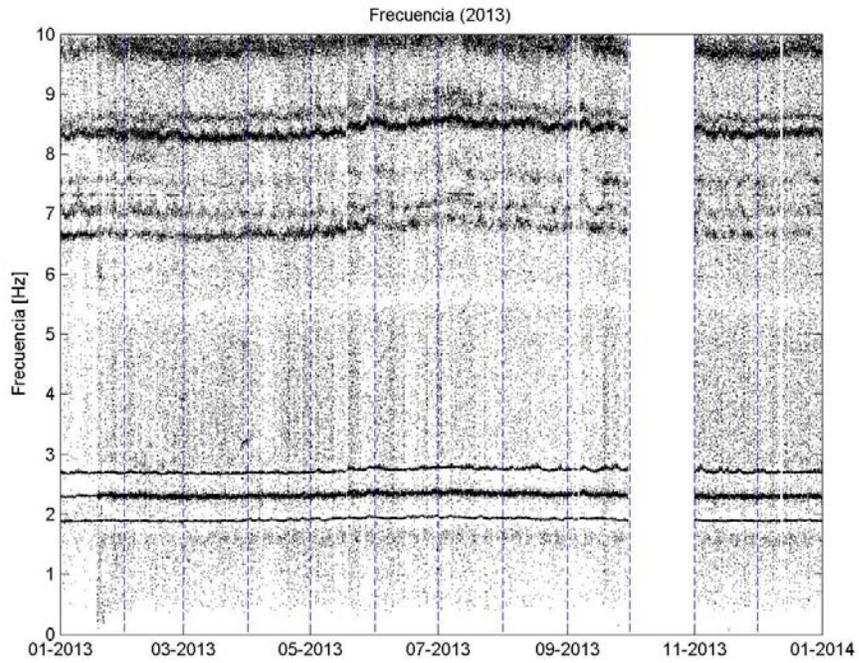


Figura 4.5.27 – Evolución frecuencia (2013)

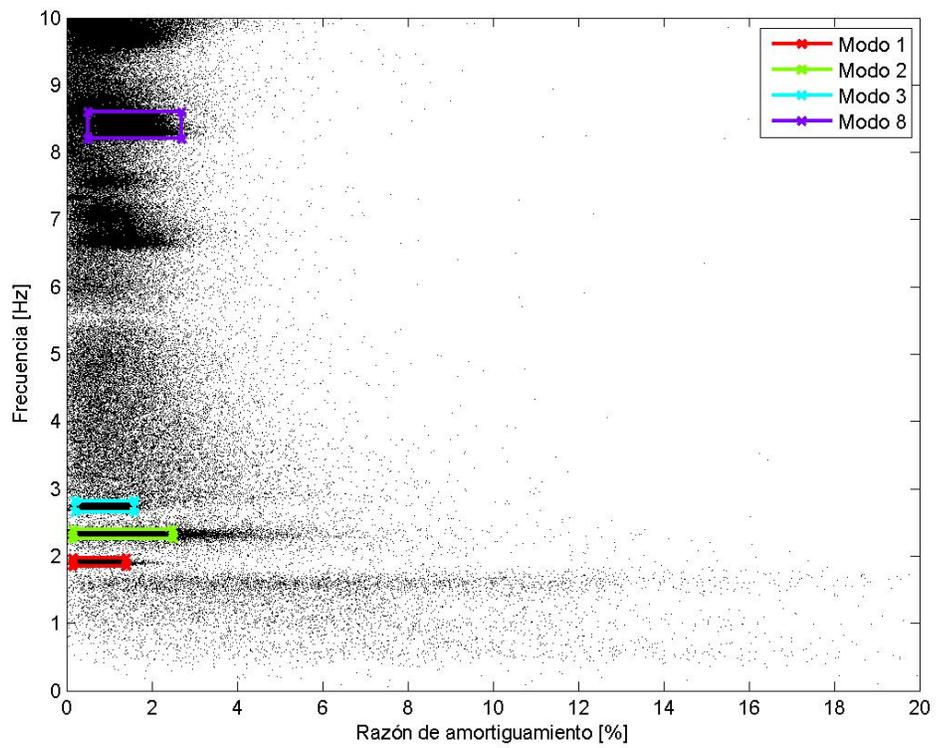


Figura 4.5.28 – Frecuencia v/s razón de amortiguamiento (2013)

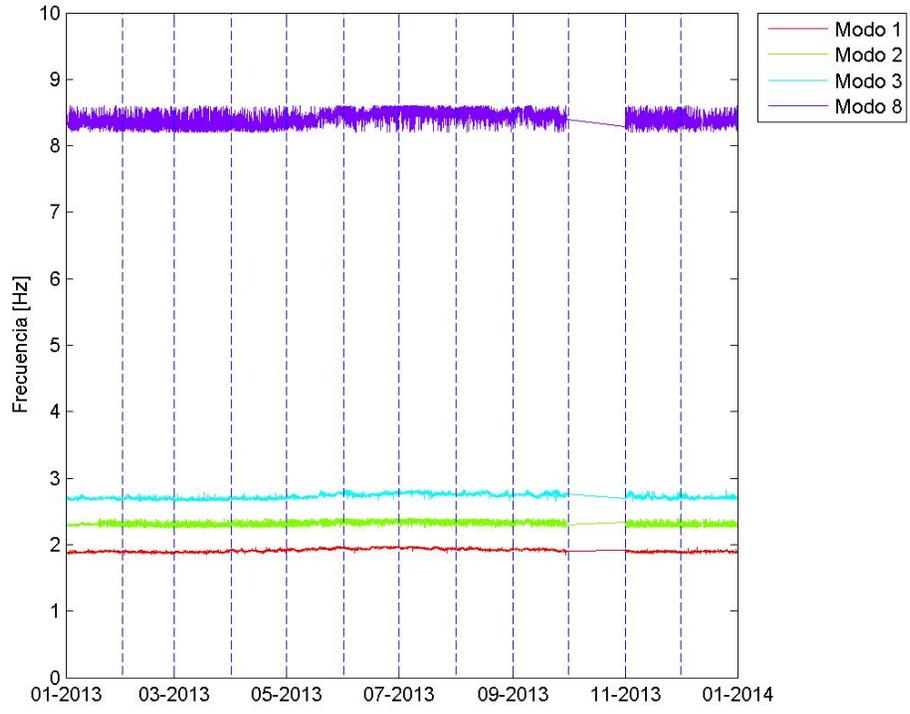


Figura 4.5.29 – Modos identificados (2013)

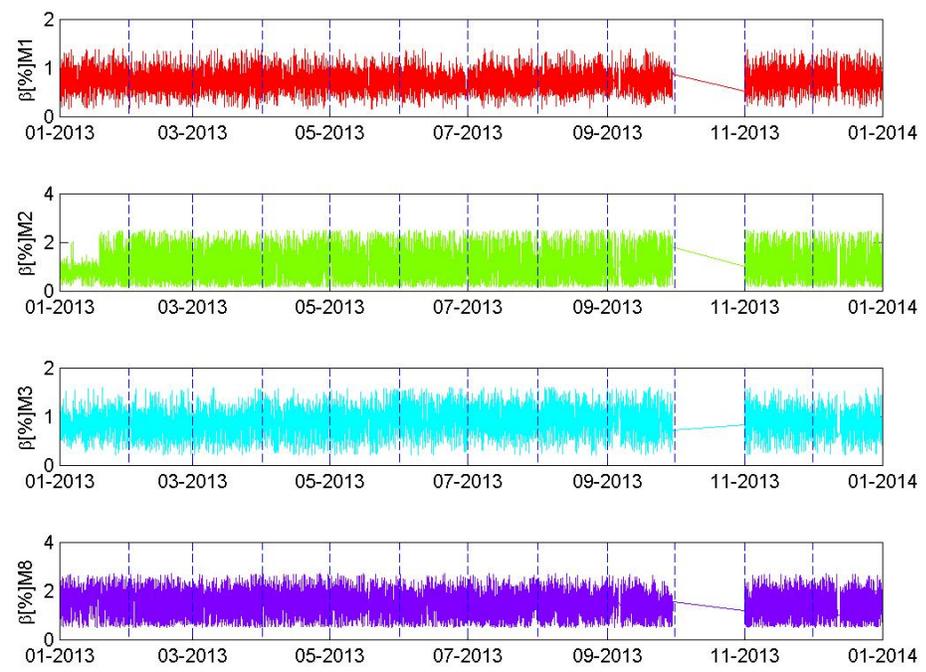


Figura 4.5.30 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-3,8 (2013)

4.5.6 Año 2014

La Figura 4.5.31 muestra la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo, donde se mantiene el mal funcionamiento de los tres canales (E4, E5 y E7). La Figura 4.5.32 muestra los modos observados a partir de la frecuencia y amortiguamiento, y en la Figura 4.5.33 se muestra la evolución de la frecuencia de estos modos. Finalmente en la Figura 4.5.34 se muestran la evolución de la razón de amortiguamiento de dichos modos.

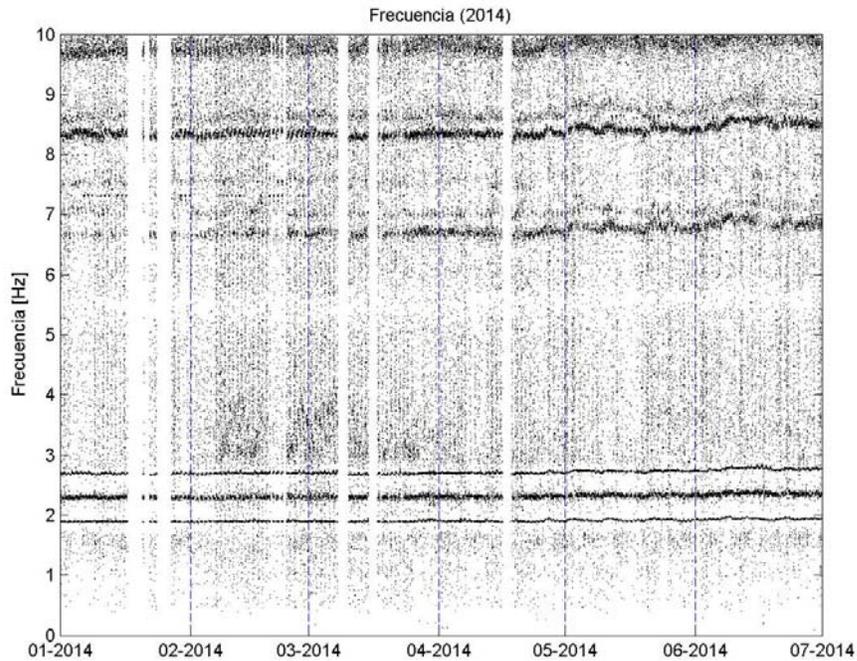


Figura 4.5.31 – Evolución frecuencia (2014)

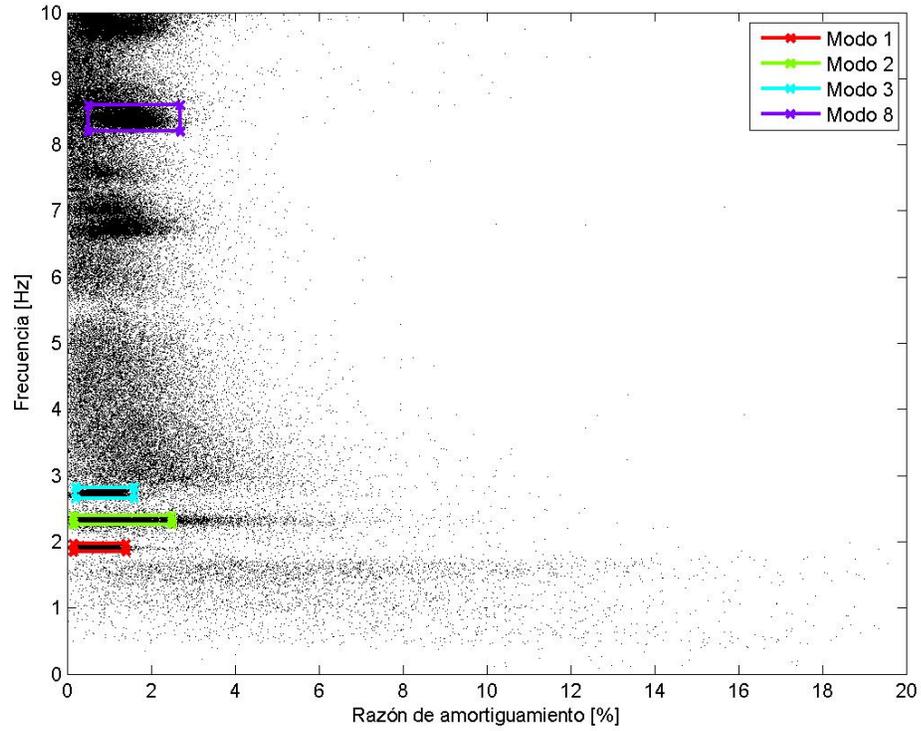


Figura 4.5.32 – Frecuencia v/s razón de amortiguamiento (2014)

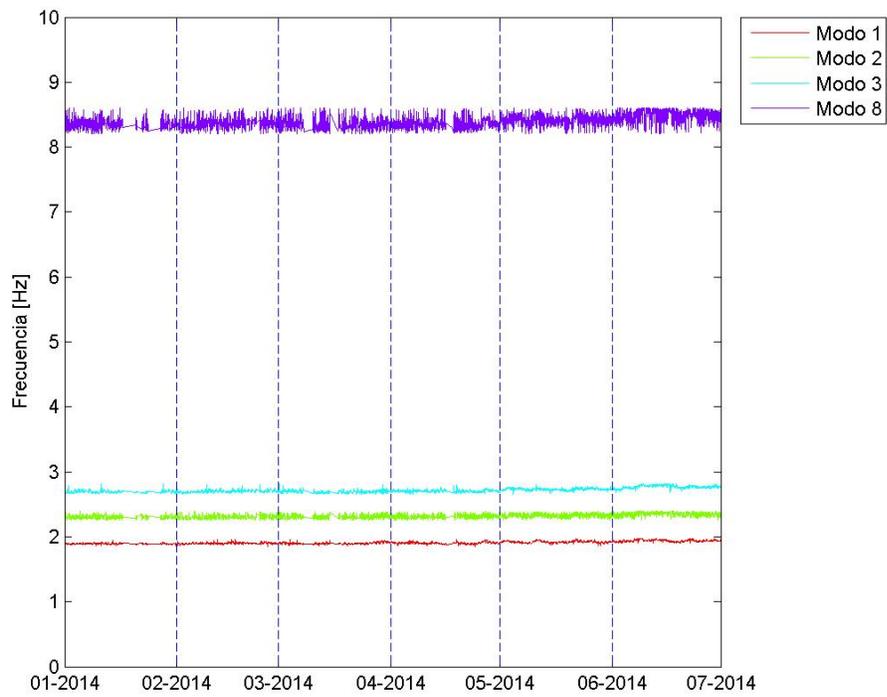


Figura 4.5.33 – Modos identificados (2014)

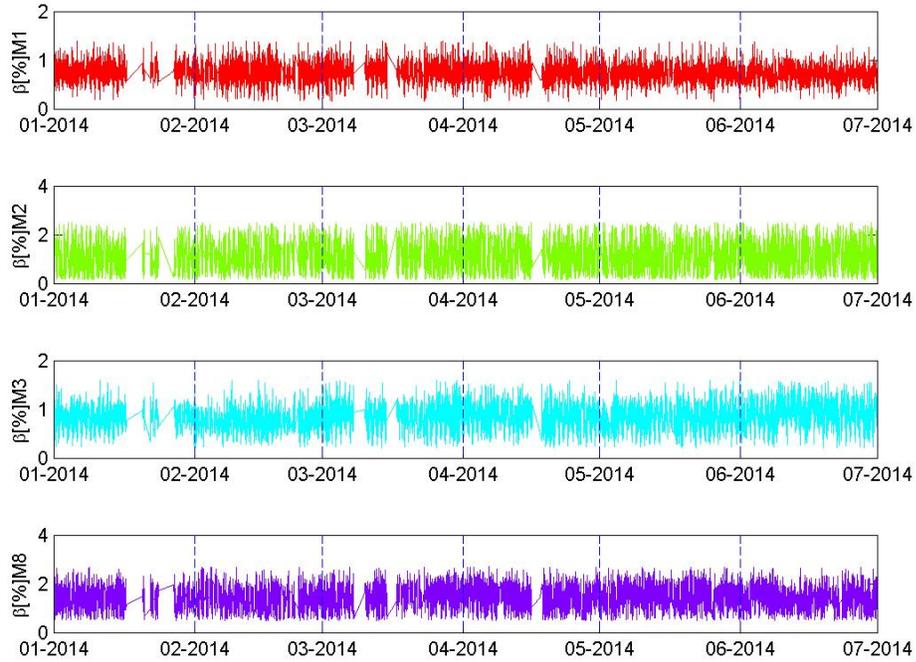


Figura 4.5.34 – Evolución razón de amortiguamiento, modos 1-3,8 (2014)

4.5.7 Resultados

La Figura 4.5.35 resume la evolución de las frecuencias identificadas al aplicar el seguimiento modal, y a continuación en la Figura 4.5.36 y Figura 4.5.37 se resume la evolución de la razón de amortiguamiento para los distintos modos. Posteriormente, en la Figura 4.5.38 a Figura 4.5.45 se muestran los histogramas asociados a la frecuencia y razón de amortiguamiento previo y posterior al evento sísmico.

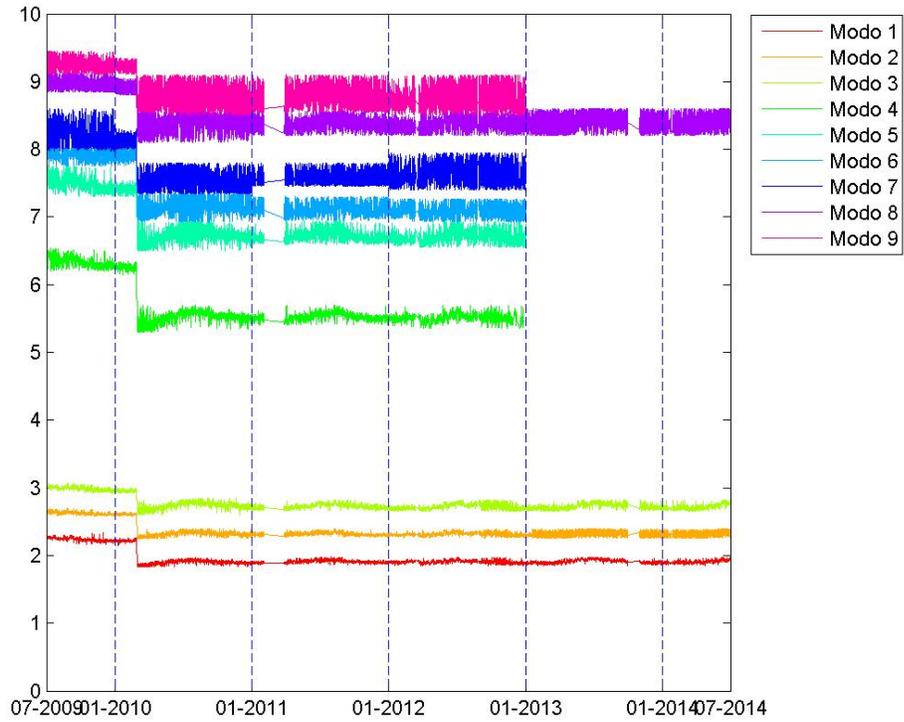


Figura 4.5.35 –Evolución frecuencias (Seguimiento modal)

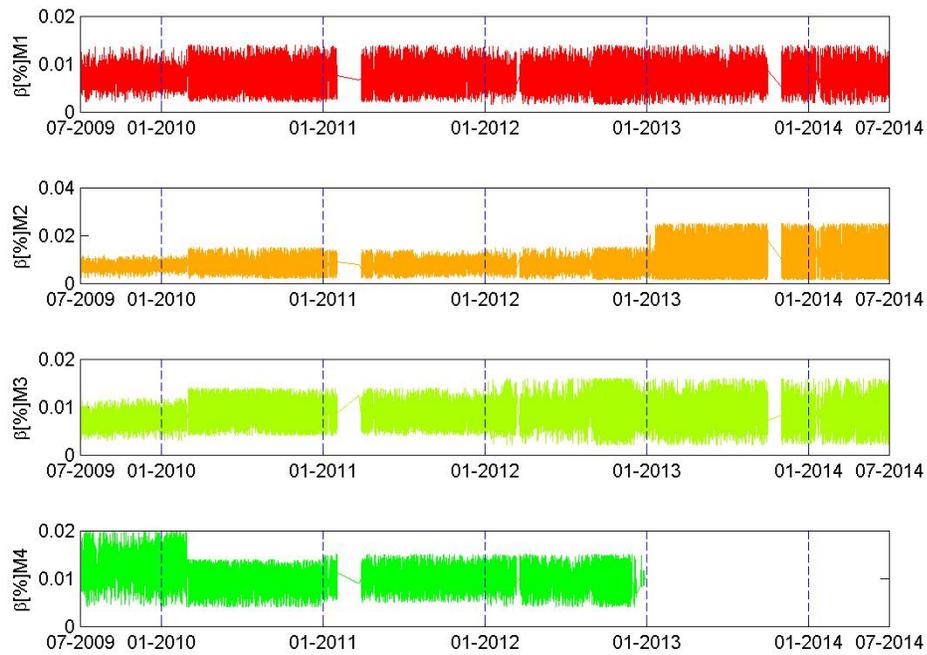


Figura 4.5.36 – Evolución razón de amortiguamiento modos 1-4 (Seguimiento modal)

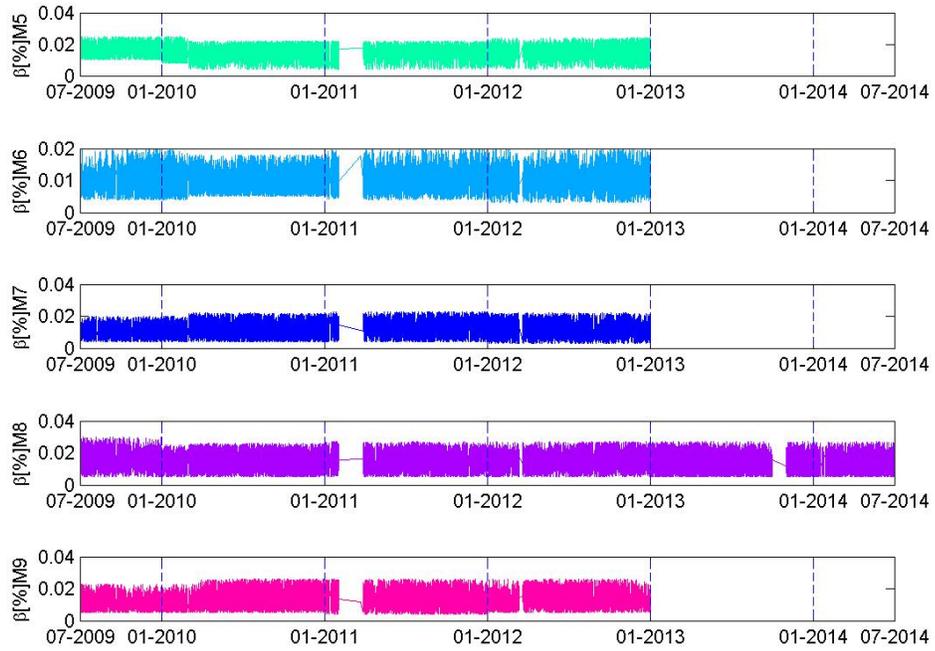


Figura 4.5.37 – Evolución razón de amortiguamiento modos 5-9 (Seguimiento modal)

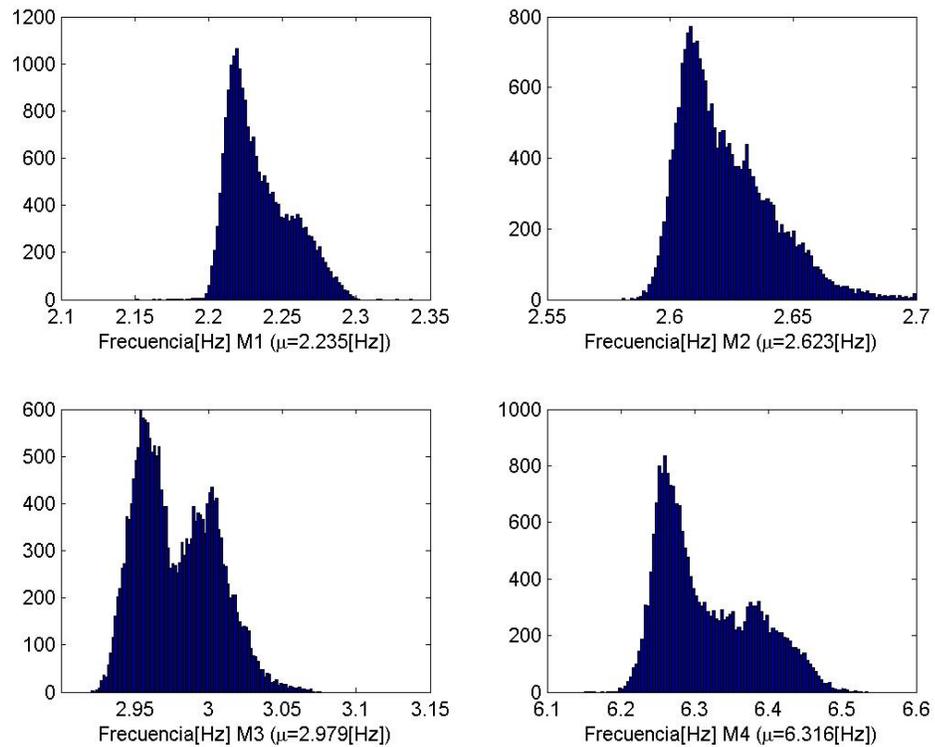


Figura 4.5.38 – Histograma frecuencias modos 1-4 (Seguimiento modal, 2009-2010)

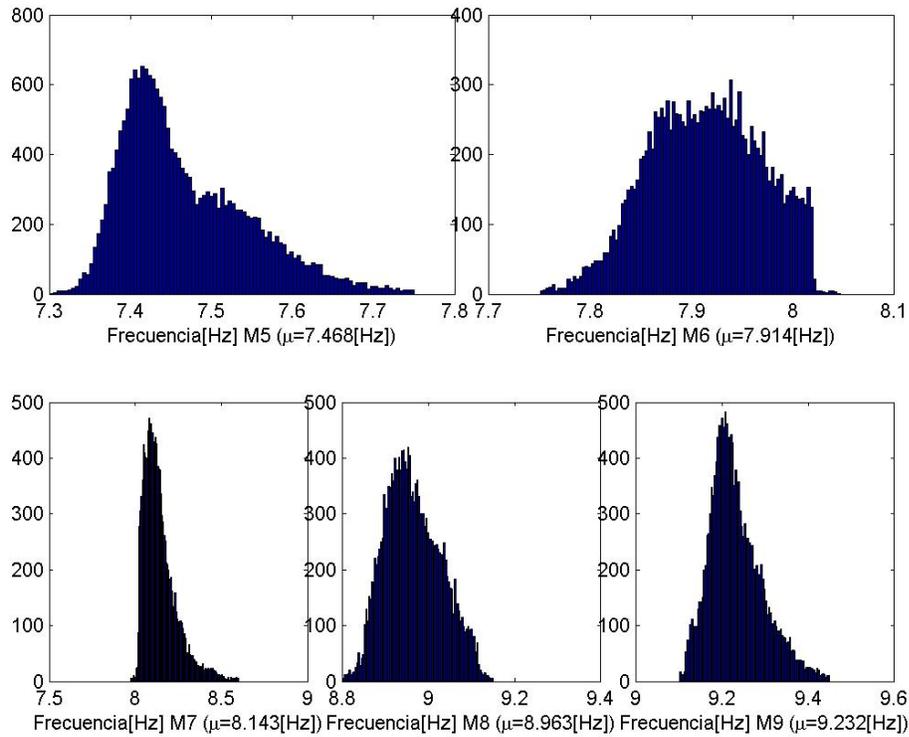


Figura 4.5.39 – Histograma frecuencias modos 5-9 (Seguimiento modal, 2009-2010)

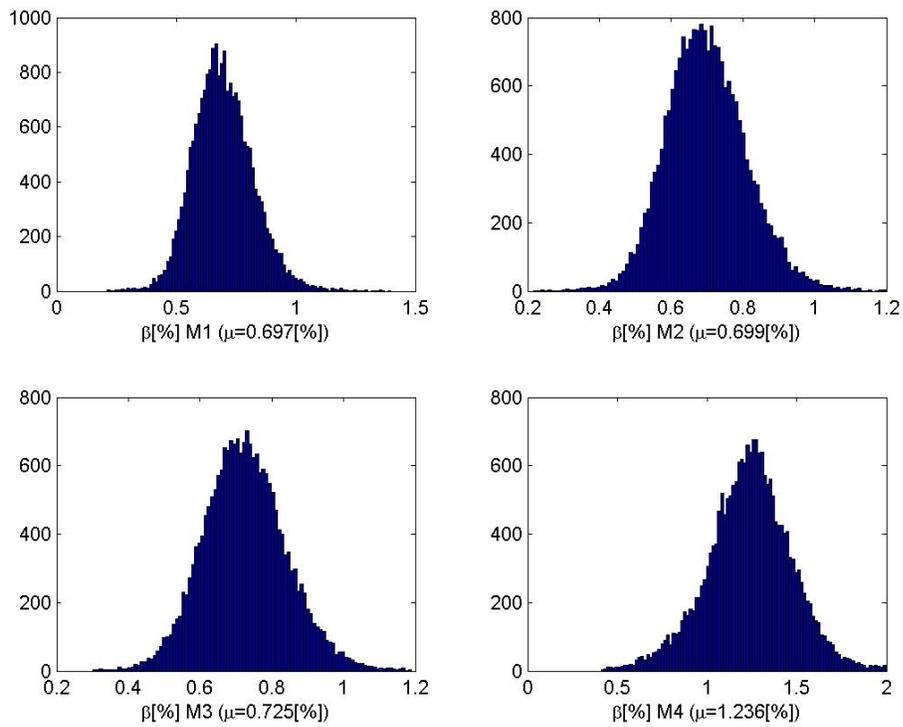


Figura 4.5.40 – Histograma razón de amort. Modos 1-4 (Seguimiento modal, 2009-2010)

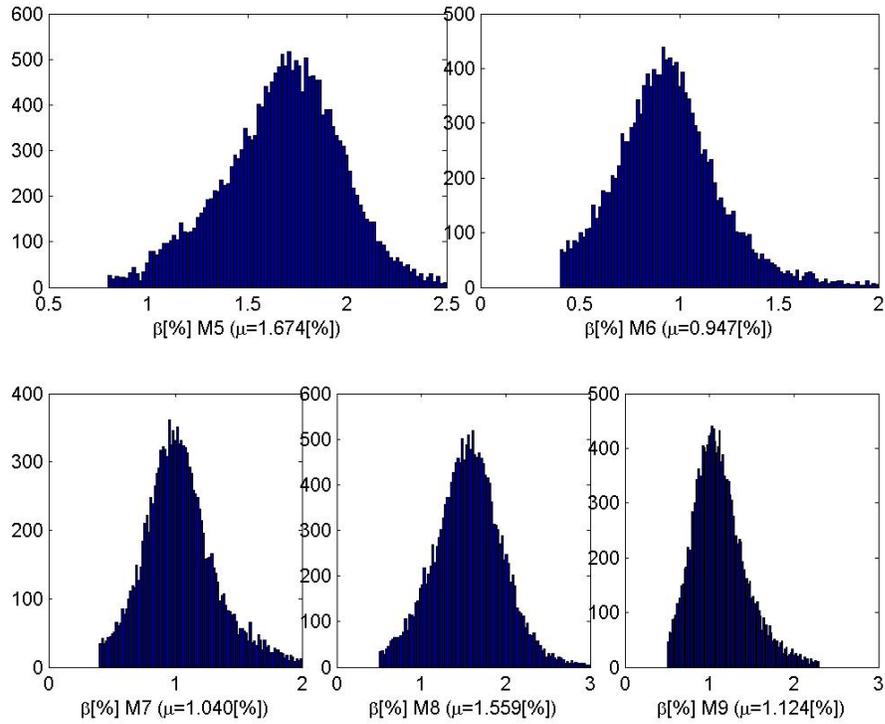


Figura 4.5.41 – Histograma razón de amort. Modos 5-9 (Seguimiento modal, 2009-2010)

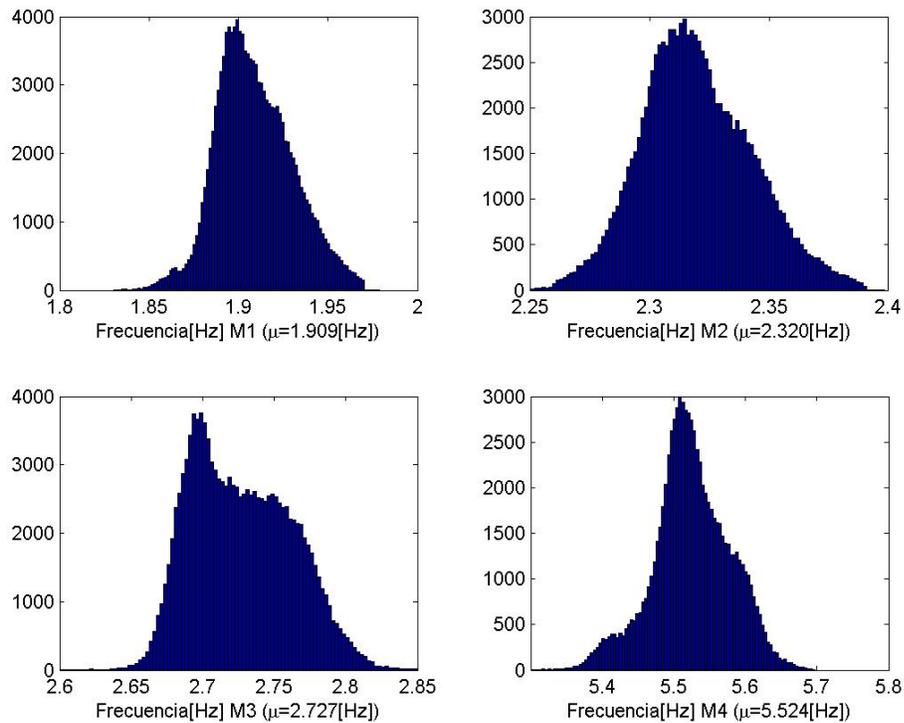


Figura 4.5.42 – Histograma frecuencias modos 1-4 (Seguimiento modal, 2010-2014)

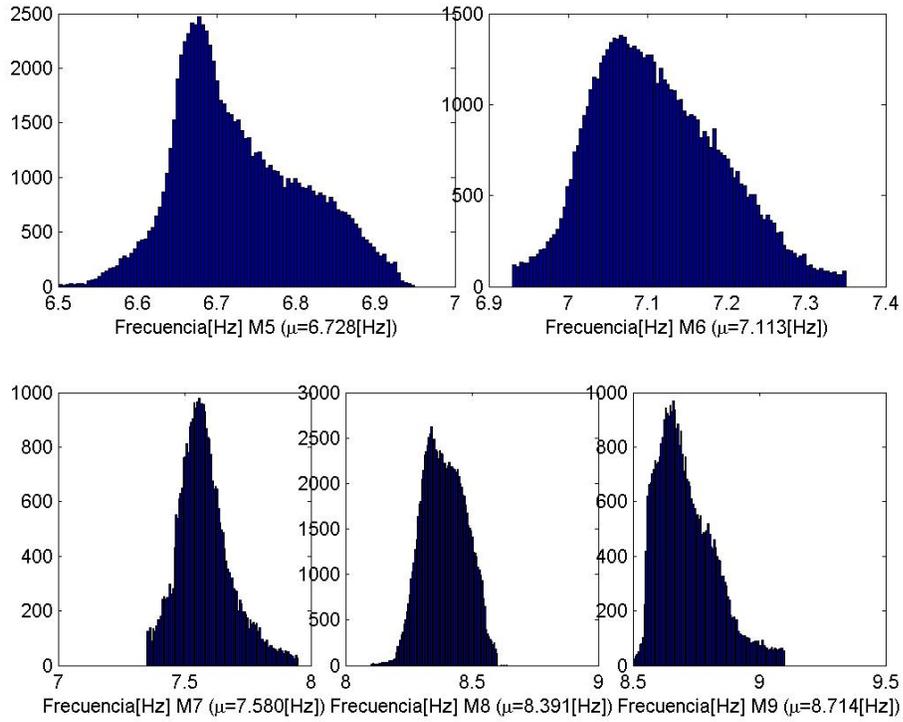


Figura 4.5.43 – Histograma frecuencias modos 5-9 (Seguimiento modal, 2010-2014)

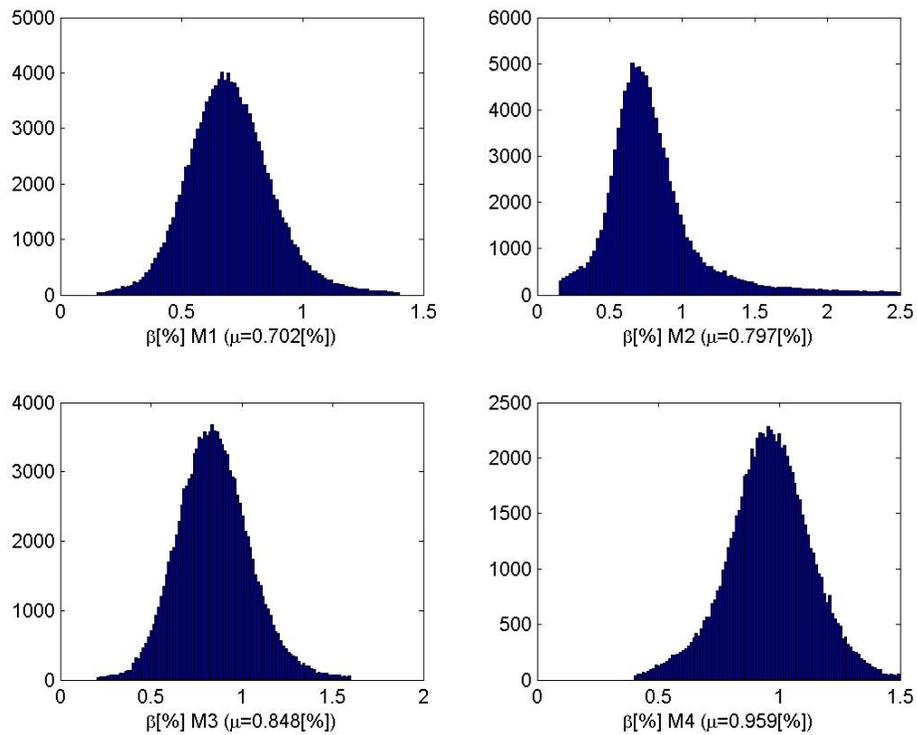


Figura 4.5.44 – Histograma razón de amort. Modos 1-4 (Seguimiento modal, 2010-2014)

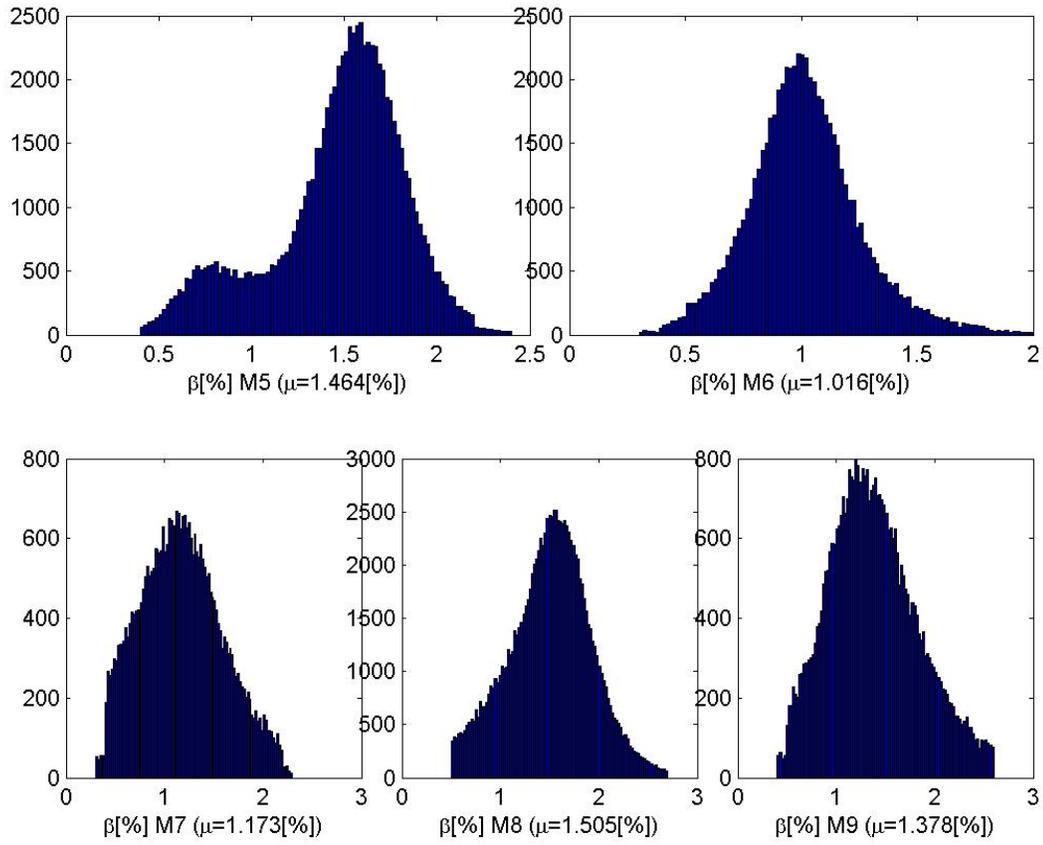


Figura 4.5.45 – Histograma razón de amort. Modos 5-9 (Seguimiento modal, 2010-2014)

La Tabla 4.5.1 y Tabla 4.5.2 presenta un resumen de la frecuencia y razón de amortiguamiento promedio y la desviación estándar asociada (previo y posterior al evento sísmico)

Tabla 4.5.1 – Resumen modos identificados (Seguimiento modal, 2009-2010)

Modo	μ_f [Hz]	σ_f [Hz]	μ_β [%]	σ_β [%]
1	2.235	0.021	0.697	0.127
2	2.623	0.019	0.699	0.113
3	2.979	0.027	0.725	0.117
4	6.316	0.066	1.236	0.236
5	7.468	0.079	1.674	0.298
6	7.914	0.056	0.947	0.260
7	8.143	0.097	1.040	0.285
8	8.963	0.065	1.559	0.406
9	9.232	0.062	1.124	0.317

Tabla 4.5.2 – Resumen modos identificados (Seguimiento modal, 2010-2014)

Modo	μ_f [Hz]	σ_f [Hz]	μ_β [%]	σ_β [%]
1	1.909	0.021	0.702	0.176
2	2.320	0.023	0.797	0.340
3	2.727	0.035	0.848	0.202
4	5.524	0.055	0.959	0.175
5	6.728	0.081	1.464	0.366
6	7.113	0.081	1.016	0.243
7	7.580	0.107	1.173	0.418
8	8.391	0.085	1.505	0.417
9	8.714	0.116	1.378	0.455

A partir de los resultados obtenidos se destaca:

- 1) Se logra observar una mejor precisión para los primeros tres modos (Figura 4.5.35), donde además se logra identificar una probable dependencia de la frecuencia con respecto a las variaciones estacionales de temperatura. Esto tomando en cuenta la relación $f \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, considerando que la masa no varía a lo largo del tiempo, y que (en general) la rigidez de los materiales aumenta al disminuir la temperatura, se puede asociar un aumento en la frecuencia en los meses Junio-Agosto dada la disminución de la temperatura, y de manera inversa en los meses Diciembre-Febrero.
- 2) Lo anterior (variabilidad de la frecuencia en función de factores ambientales) genera un aumento en la dispersión de los histogramas asociados (Figura 4.5.38, Figura 4.5.39, Figura 4.5.42 y Figura 4.5.43) tomando en cuenta además el error asociado al seguimiento modal efectuado.
- 3) A partir de la evolución de la razón de amortiguamiento (Figura 4.5.36 y Figura 4.5.37) y considerando la dispersión asociada en los distintos histogramas (Figura 4.5.40, Figura 4.5.41, Figura 4.5.44 y Figura 4.5.45) se observa la imprecisión de este valor en comparación con la frecuencia.
- 4) En la Tabla 4.5.1 y Tabla 4.5.2 se puede evaluar numéricamente la variabilidad de los distintos modos identificados en función de la desviación estándar (un alto valor implica una mayor variabilidad en la estimación). Nótese que esta variabilidad se acentúa al aumentar la frecuencia (modos superiores).
- 5) Finalmente se destaca que la simpleza del seguimiento modal efectuado, y en particular su independencia con respecto a los vectores de forma modal, acentúa las imprecisiones para los distintos modos. A pesar de lo anterior se rescata la posibilidad de generar estimaciones razonables para las razones de amortiguamiento.

4.6 Comparación método triple acierto

Para determinar la efectividad del método de interpretación automático, se compara con el procesamiento de los registros mediante el método de triple acierto.

El método de triple acierto es un método de interpretación que tiene como objetivo determinar las columnas estables del diagrama de estabilización en función de la frecuencia, razón de amortiguamiento y MAC entre formas modales.

En primer lugar se expone e ilustra el funcionamiento de este método, y posteriormente se comparan los resultados obtenidos con el método de interpretación automático.

4.6.1 Metodología

La metodología utilizada se describe a continuación:

- 1) Se determina la distancia en frecuencia, razón de amortiguamiento y MAC (ecuaciones 2.2.1 - 2.2.2)
- 2) Para obtener un resultado comparable con el método de interpretación automático, se aplican los criterios fuertes de límites a la frecuencia y razón de amortiguamiento. De esta forma, aquellos modos que cumplan con los tres criterios fuertes, y a su vez con los criterios de distancia, van a ser utilizados en la siguiente etapa.
- 3) Aquellos modos que cumplan con una distancia menor al 1% para la frecuencia y MAC, y menor al 5% para la distancia en razón de amortiguamiento, se mantienen en el diagrama de estabilización. A partir de lo anterior el nombre “triple acierto”.
- 4) Se detectan las 10 columnas más estables en función del histograma de frecuencias.
- 5) Se selecciona el elemento representativo de cada columna estable a partir del elemento más cercano al promedio en frecuencia y amortiguamiento.

Para ilustrar esta metodología se analiza el registro del 22 de septiembre de 2009 (07:00-07:15). La Figura 4.6.1 expone el diagrama de estabilización asociado a este registro. Nótese que las consideraciones sobre las propiedades del pre-procesamiento e identificación no varían con respecto al análisis utilizando el método de interpretación automático.

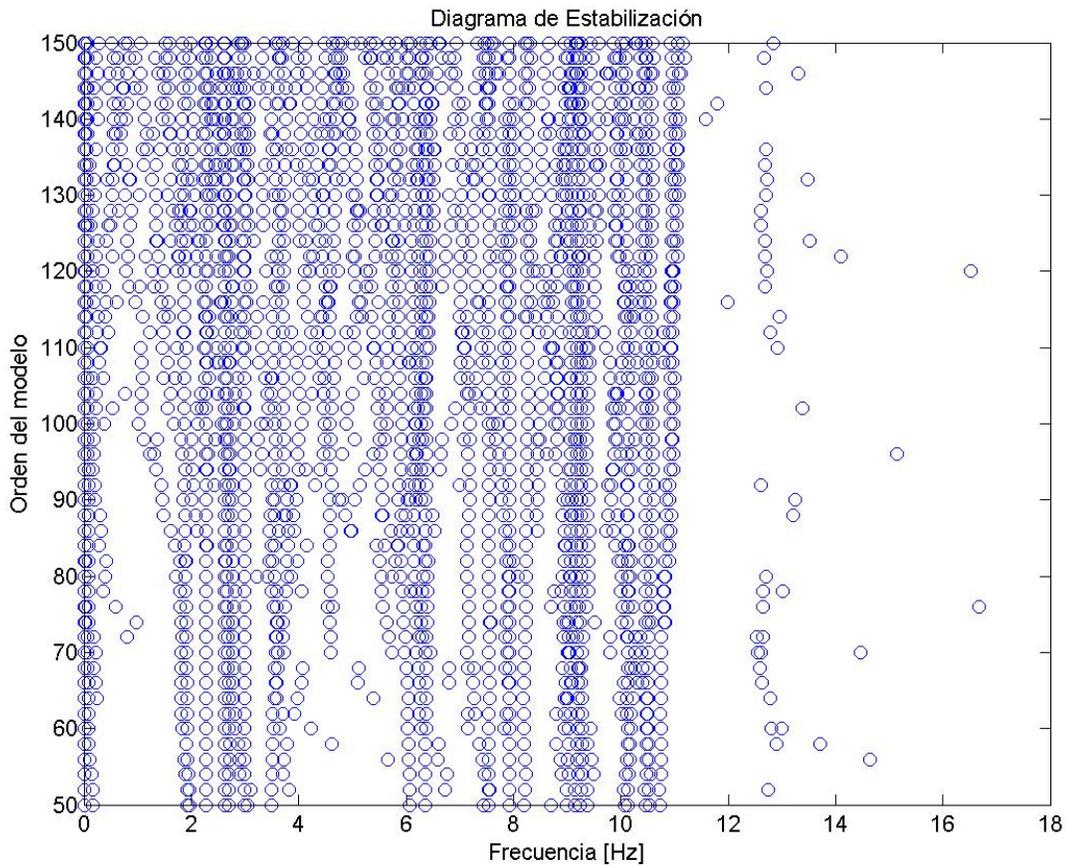


Figura 4.6.1 – Diagrama de estabilización (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

A partir de este diagrama se verifica el cumplimiento de los criterios fuertes que limitan la frecuencia (menor a 10 [Hz]) y razón de amortiguamiento (entre 0 y 20[%]). El resultado se expone en la Figura 4.6.2.

Posteriormente, y sobre los modos identificados que cumplen los criterios fuertes, se evalúa el cumplimiento del rango en frecuencia, razón de amortiguamiento y MAC entre modos. La Figura 4.6.3 expone el cumplimiento de cada criterio de distancia, y en la Figura 4.6.4 el resumen del cumplimiento simultáneo de los tres criterios.

A partir del diagrama despejado, se determinan las 10 columnas estables a partir del histograma en frecuencia. La Figura 4.6.5 expone el histograma en frecuencia, y en la Figura 4.6.6 se resumen las 10 columnas estables determinadas en función del histograma.

Posteriormente, en la Figura 4.6.7 se muestran los conjuntos de modos en el plano frecuencia v/s amortiguamiento y el elemento representativo asociado.

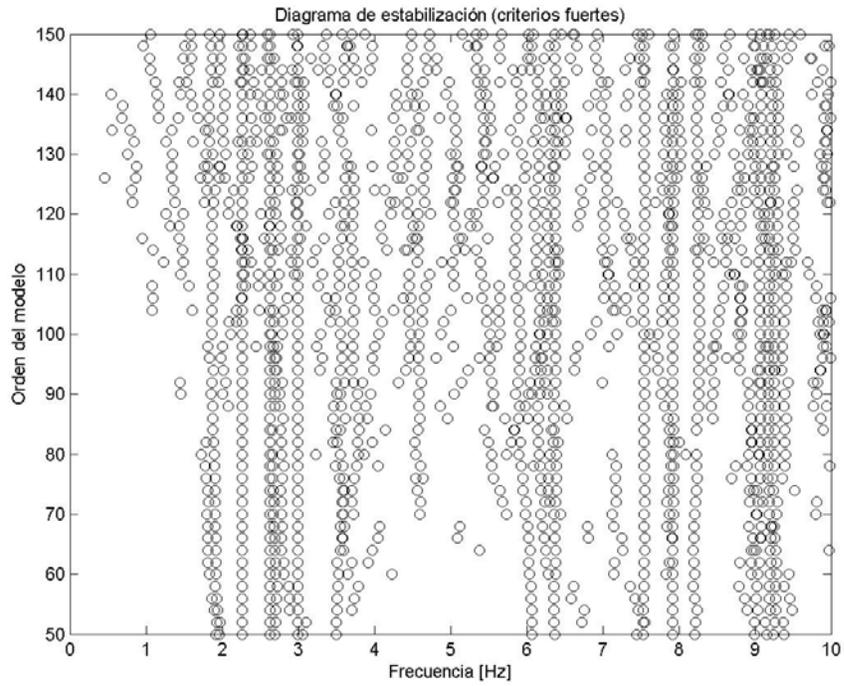


Figura 4.6.2 – Diagrama de estabilización criterio fuerte (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

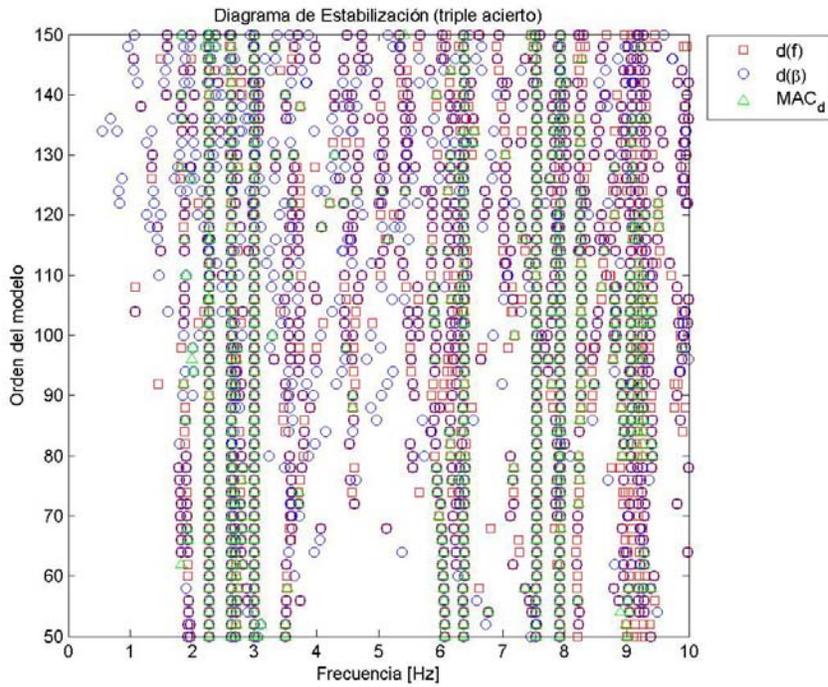


Figura 4.6.3 – Diagrama de estabilización criterios de distancia (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

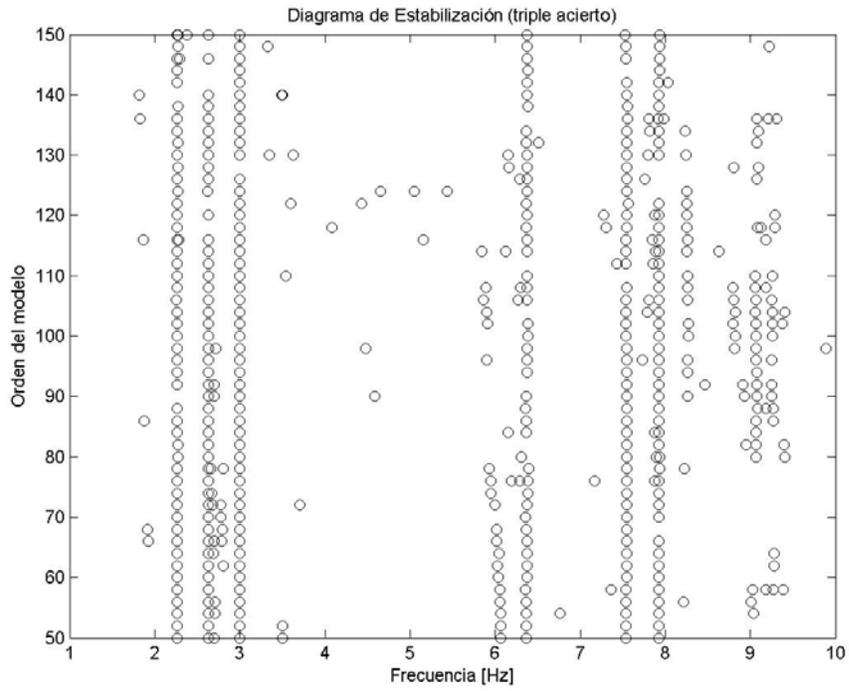


Figura 4.6.4 – Diagrama de estabilización despejado (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

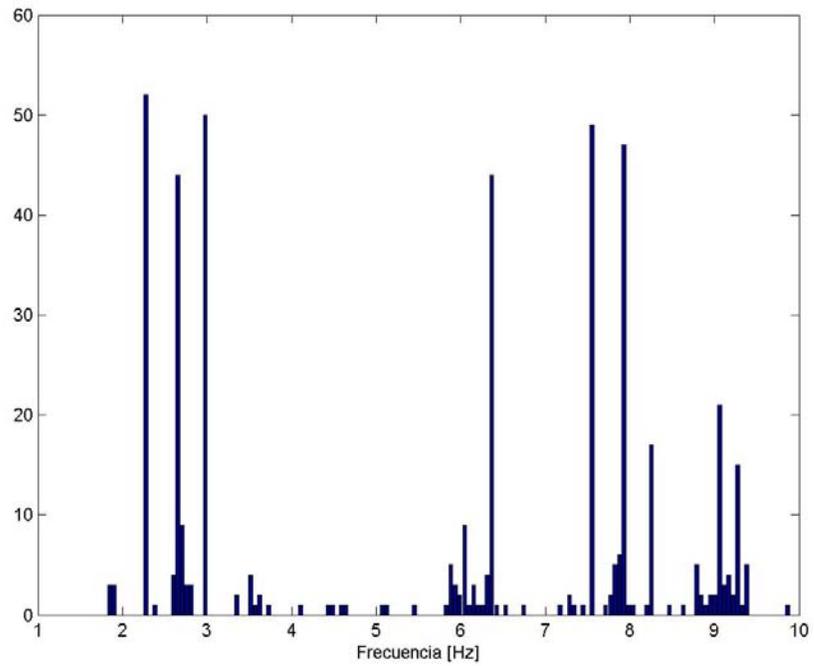


Figura 4.6.5 – Histograma de frecuencia (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

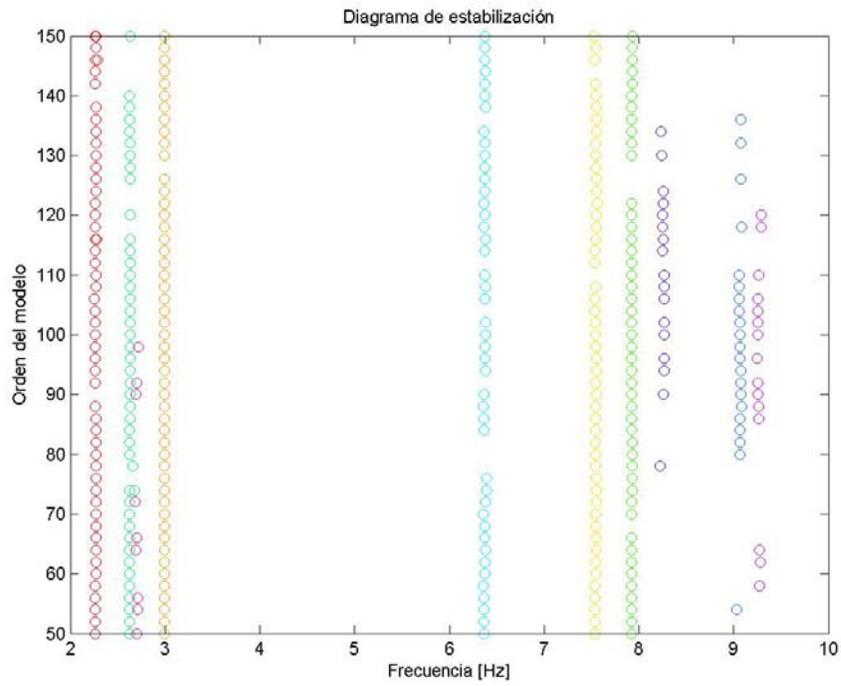


Figura 4.6.6 – Diagrama de estabilización columnas estables (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

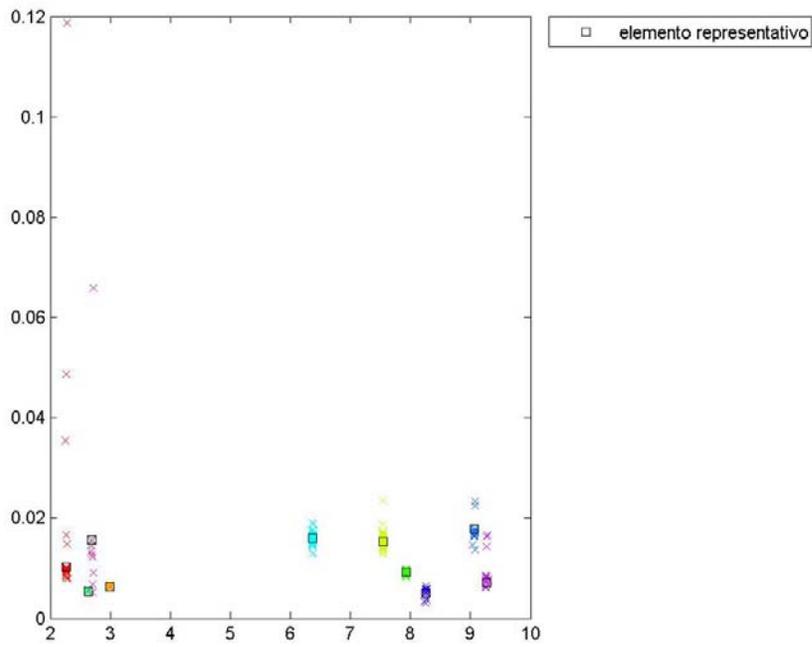


Figura 4.6.7 – Frecuencia v/s amortiguamiento (triple acierto, 22-09-2009 07:00)

En la Tabla 4.6.1 se resumen las frecuencias y razones de amortiguamiento obtenidos mediante este método (subíndice t.a.), y dada la similitud en los modos obtenidas con el método de interpretación automático, se expone también las frecuencias y razones de amortiguamiento obtenidas mediante este método (subíndice i.a.). Adicionalmente se expone la diferencia (absoluta) entre ambos resultados.

Tabla 4.6.1 – Resumen modos identificados

Modo	$f_{t.a.}$ [Hz]	$\beta_{t.a.}$ [%]	$f_{i.a.}$ [Hz]	$\beta_{i.a.}$ [%]	$ \Delta f $ [[Hz]	$ \Delta \beta $ [%]
1	2.27	1.02	2.27	1.01	0.003	0.008
2	2.63	0.53	2.63	0.54	0.000	0.011
3	2.70	1.57	-	-	-	-
4	3.00	0.63	3.00	0.61	0.005	0.021
5	6.37	1.60	6.37	1.58	0.003	0.017
6	7.55	1.53	7.55	1.54	0.005	0.008
7	7.92	0.92	7.93	0.93	0.006	0.008
8	8.26	0.51	8.25	0.5	0.006	0.005
9	9.07	1.78	9.07	1.63	0.001	0.146
10	9.27	0.71	9.26	0.75	0.005	0.044

En función de estos resultados se puede destaca:

- 1) Los modos identificados mediante ambos métodos resultan muy similares entre sí. Salvo el tercer modo identificado, el cual, dada su gran dispersión y baja estabilidad (Figura 4.6.6 y Figura 4.6.7), se puede determinar como un modo no representativo.
- 2) El método del triple acierto no puede ser considerado como un método de interpretación completamente automático ya que requiere definir previamente los valores límites para los criterios de distancia (frecuencia, razón de amortiguamiento y MAC), y el número de modos a detectar.

4.6.2 Análisis General

Se aplica este método sobre el rango de tiempo completo. La Figura 4.6.9 expone la evolución de las frecuencias identificadas a lo largo del tiempo, el cual se compara con el resultado obtenido por el método de identificación automático (Figura 4.6.9, equivalente a Figura 4.4.14)

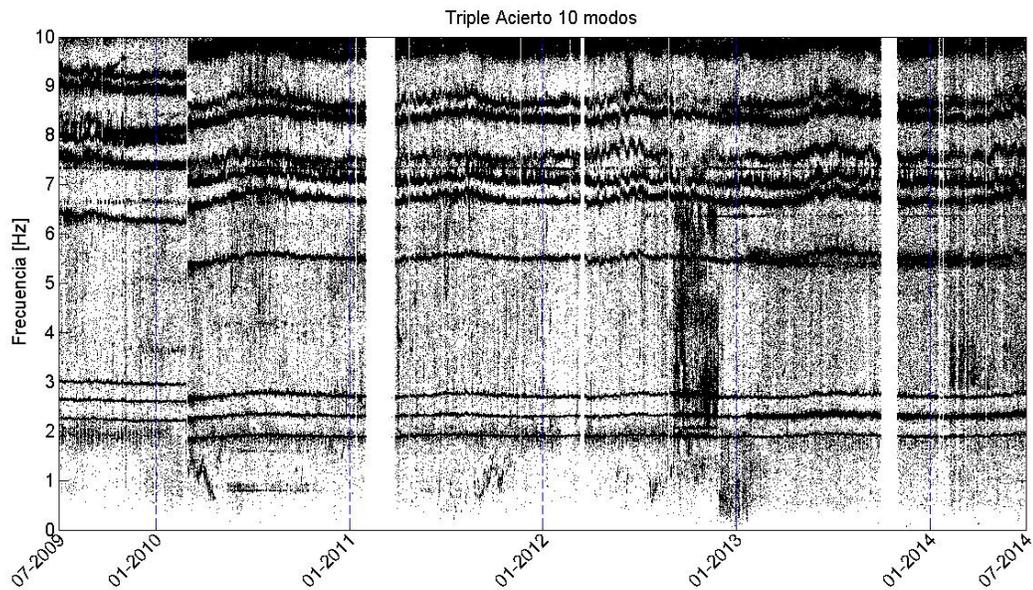


Figura 4.6.8 – Evolución frecuencias identificadas (triple acierto)

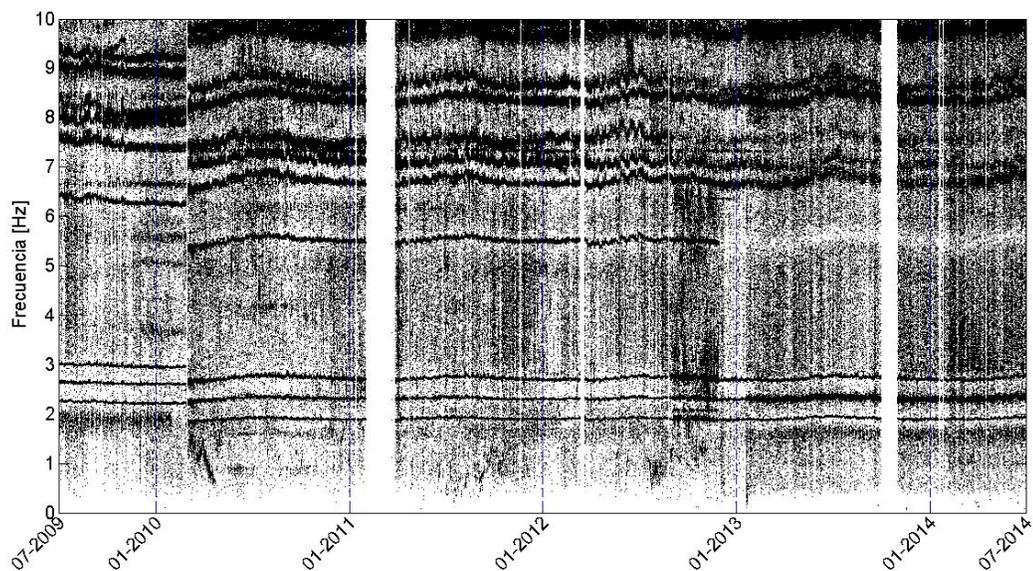


Figura 4.6.9 – Evolución frecuencias identificadas

Si bien las frecuencias observadas a lo largo del tiempo son muy similares para ambos métodos de interpretación, lo cual valida los resultados obtenidos por parte del método de interpretación automático, se logra observar que mediante el uso del método del triple acierto se logra determinar el cuarto modo en el periodo (2013-2014).

Para evaluar la razón de la aparición de esta frecuencia, o la omisión de esta por parte del método de interpretación automático, se analiza el registro del 6 de Marzo de 2013 (22:00-22:15). La Figura 4.6.10 muestra la división a partir del uso del método de agrupamiento *k-means* sobre los criterios débiles (primera etapa), a partir del cual se logra observar que los modos cercanos a la frecuencia del cuarto modo (6 [Hz]) son eliminados. Lo anterior se explica a partir de los valores

tomados por los criterios de forma modal (MPC cercano a 0.4 y MPD cercano a 0.6) los cuales dan cuenta de una forma modal muy compleja para este modo.

Esta situación es resultado del bajo número de canales utilizados, el cual disminuye la eficiencia de los criterios de forma modal, y al mismo tiempo debido a la independencia del método del triple acierto sobre la complejidad de las formas modales.

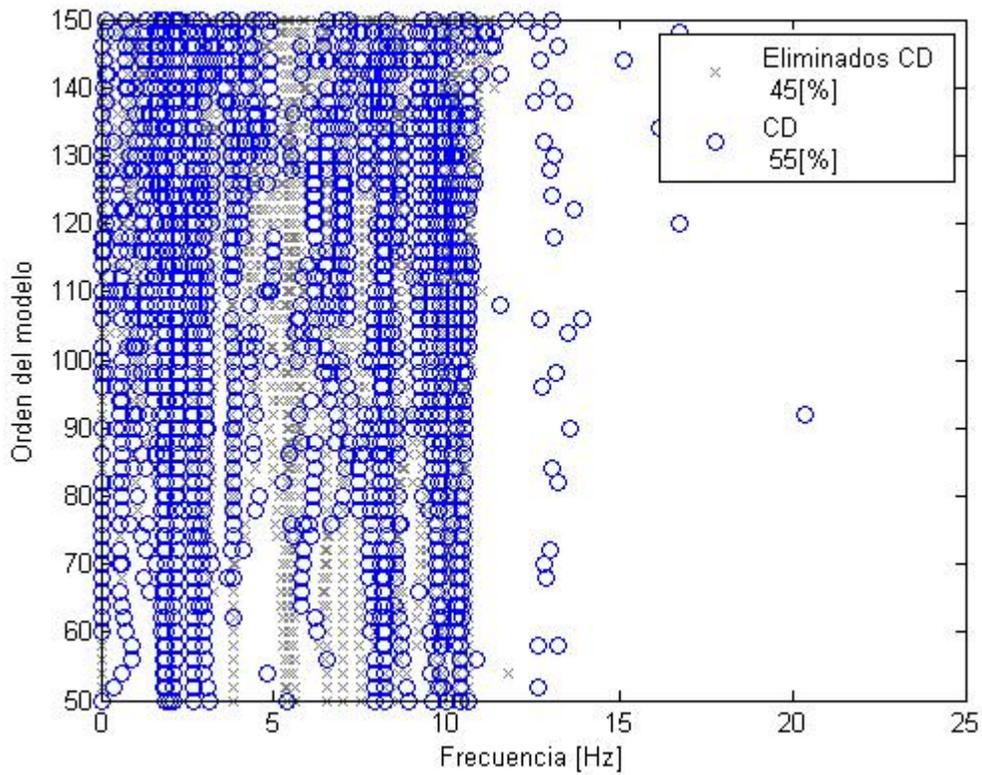


Figura 4.6.10 – Diagrama de estabilización resumen CD (22-03-2013 22:00)

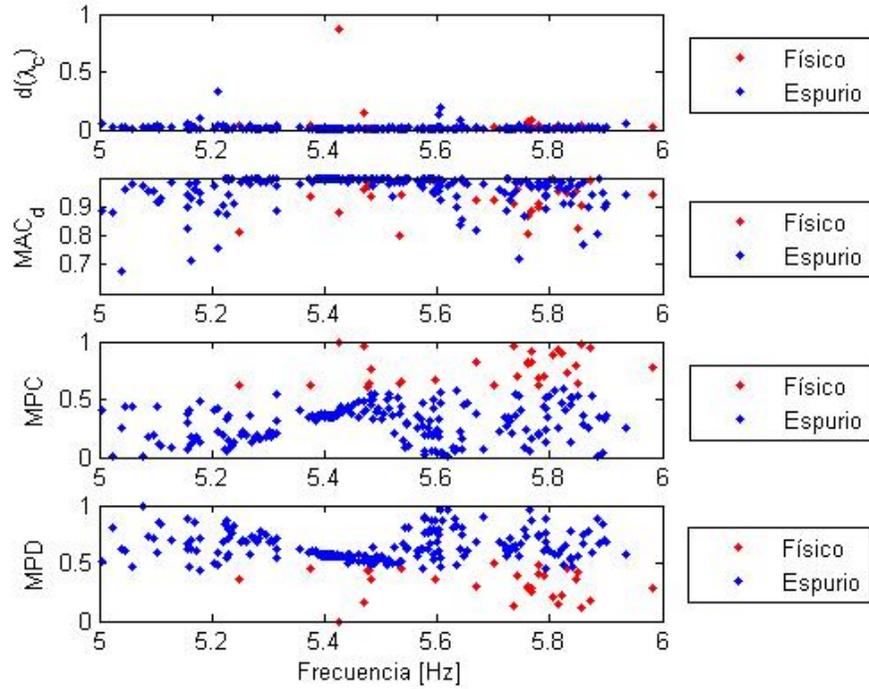


Figura 4.6.11 – Criterios débiles rango de frecuencia en análisis (22-03-2013 22:00)

4.7 Errores

En la presente sección se argumenta el uso de los canales utilizados. En la Figura 4.7.1 se expone la evolución de la frecuencia a lo largo del tiempo para los dos casos: eliminando los canales (resumen en Figura 4.4.1), y utilizando todos los canales.

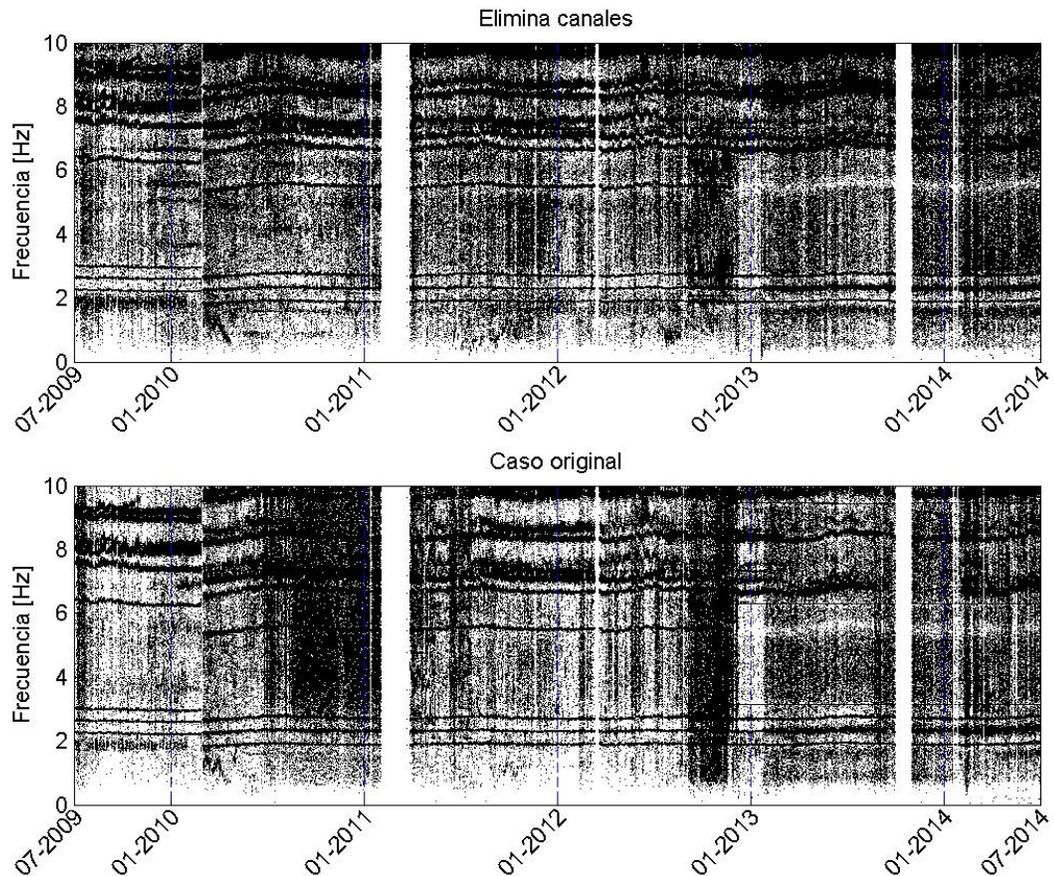


Figura 4.7.1 – Evolución frecuencia (caso original v/s eliminación de canales)

En términos generales, la selección de canales utilizados se determina a partir del valor de la raíz media cuadrática de las señales (RMS). Para ilustrar esta selección se analizan los cuatro rangos de tiempo más relevantes distinguidos a partir de las diferencias expuestas en la Figura 4.7.1 y Figura 4.4.1. Estos son:

- 1) Mayo de 2010 a Marzo de 2011
- 2) Marzo de 2011 a Febrero de 2012
- 3) Julio de 2012 a enero de 2013
- 4) Marzo de 2013 a Julio de 2014

Cabe destacar que el valor RMS entrega una medida de la magnitud de las señales observadas (para cada registro). En particular se puede observar en el análisis posterior un gran número de *peaks* de este valor, los cuales se pueden atribuir a posibles eventos sísmicos u otra alteración a la respuesta medida. Debido al corto intervalo de tiempo de estos *peaks* no se consideran en la eliminación de canales.

4.7.1 Mayo de 2010 a Marzo de 2011

La Figura 4.7.2 expone simultáneamente la evolución de las frecuencias identificadas a lo largo del tiempo, junto con los valores RMS de todos los canales (caso original), y posteriormente, en la Figura 4.7.3 se muestra el mismo gráfico considerando la eliminación de canales.

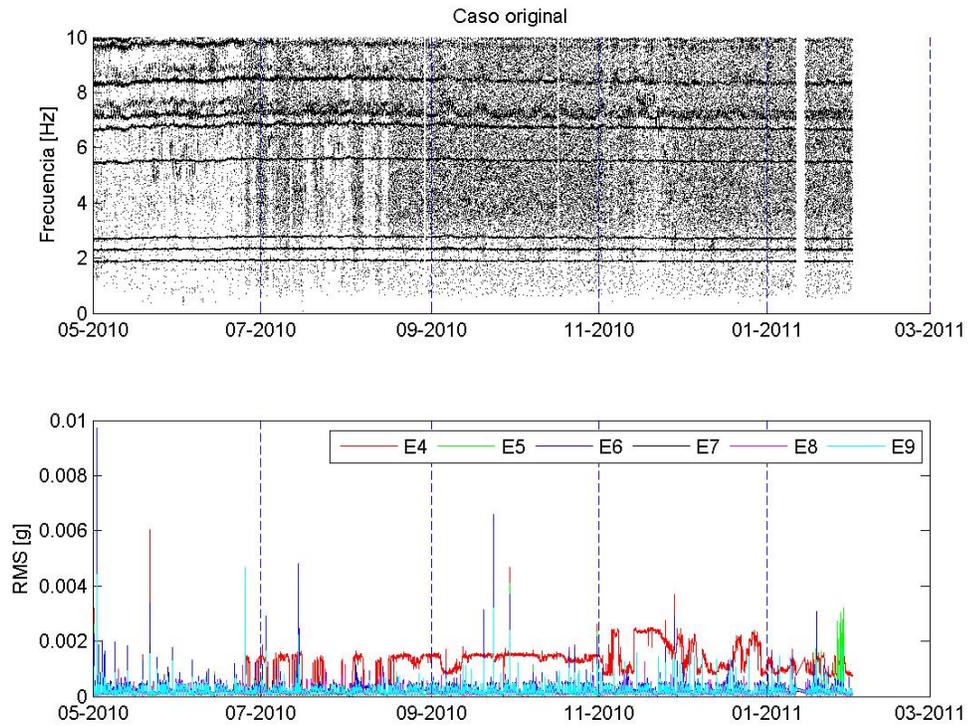


Figura 4.7.2 – Caso original (05-2010 a 03-2011)

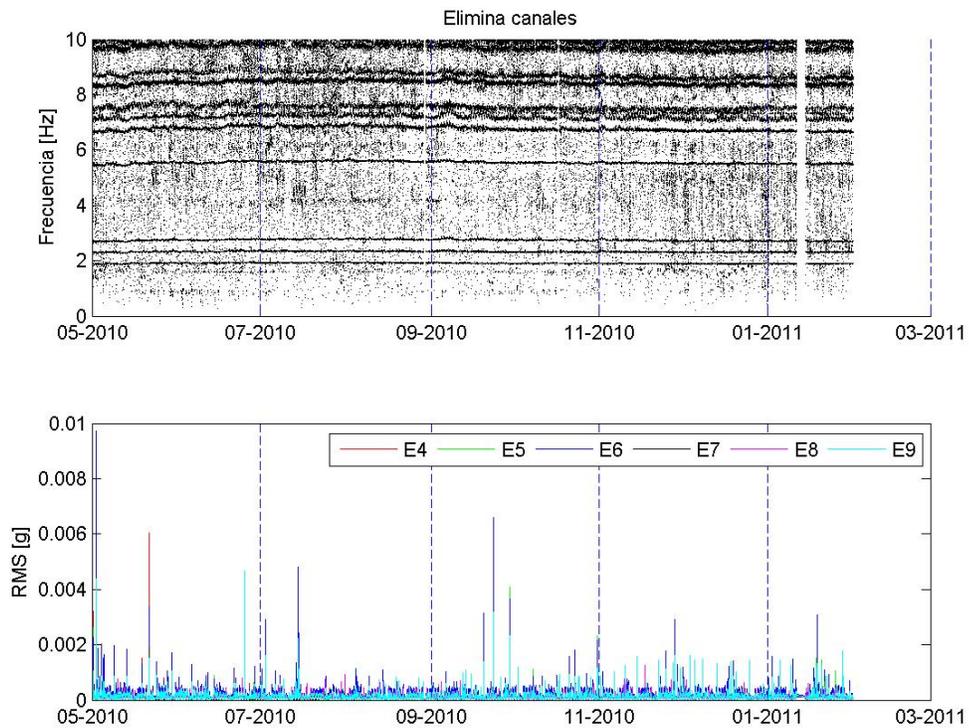


Figura 4.7.3 – Canales eliminados (05-2010 a 03-2011)

Observando la diferencia notoria en el valor RMS del canal E4 (entre Julio de 2010 y Febrero de 2011), y la del canal E5 (entre finales de Enero y principios de Febrero de 2011), con respecto a la del resto de los canales, así como la discontinuidad de estos, se eliminan del análisis. La notable mejora en la resolución de las frecuencias obtenidas (Figura 4.7.3) justifica la omisión de estos canales en el análisis.

4.7.2 Marzo de 2011 a Febrero de 2012

La Figura 4.7.4 y Figura 4.7.5 muestra (para el caso original y al eliminar canales) de forma simultánea la evolución de la frecuencia en el tiempo y los valores RMS para los distintos canales considerados.

Nótese el mal funcionamiento del canal E4 entre Abril y mediados de Mayo de 2011, Junio y finales de Julio de 2011, así como el mal funcionamiento de los canales E4 y E5 entre Agosto y Septiembre del mismo año. Esta situación, en conjunto con la mejor resolución expuesta en la Figura 4.7.5, justifica la omisión de estos canales en el análisis.

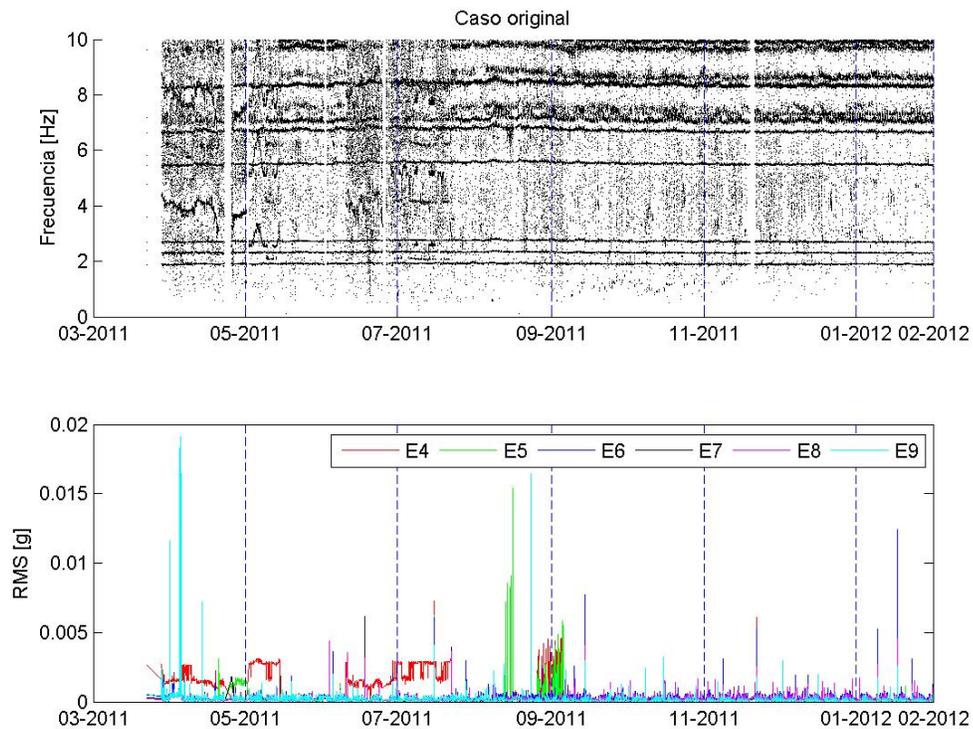


Figura 4.7.4 – Caso original (03-2011 a 02-2012)

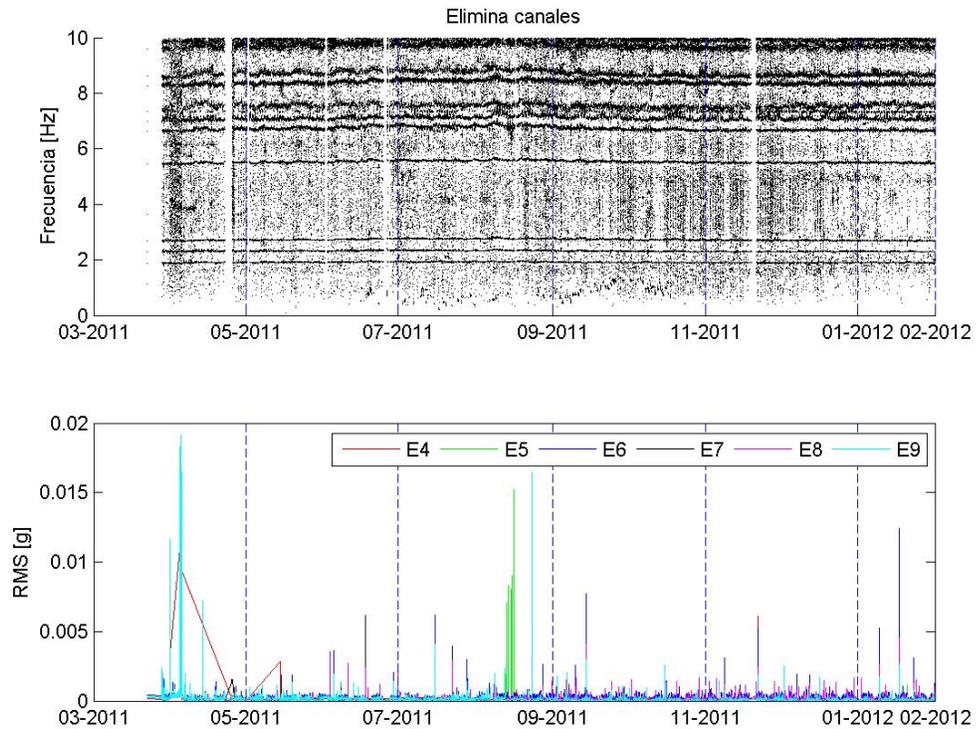


Figura 4.7.5 – Canales eliminados (03-2011 a 02-2012)

4.7.3 Julio de 2012 a Enero de 2013

En la Figura 4.7.6 se expone la evolución de las frecuencias identificadas para el rango de tiempo en estudio y los valores RMS de todos los canales para el caso original, y en la Figura 4.7.7 se exponen los mismos resultados considerando la eliminación de canales.

A partir de la Figura 4.7.6 se logra detectar valores extremadamente altos para el canal E5, lo cual, junto con una mayor resolución de las frecuencias identificadas en la Figura 4.7.7, justifica la eliminación de este canal. Resulta válido mencionar que a partir de fines de 2012 se detecta la aparición de tres frecuencias muy estables en el tiempo (cercas a 3.15 [Hz], 6.3 [Hz] y 9.45 [HZ]). Dado que esta situación se detecta a lo largo de los años 2013 y 2014, se analizan estos modos en detalle en la siguiente sección.

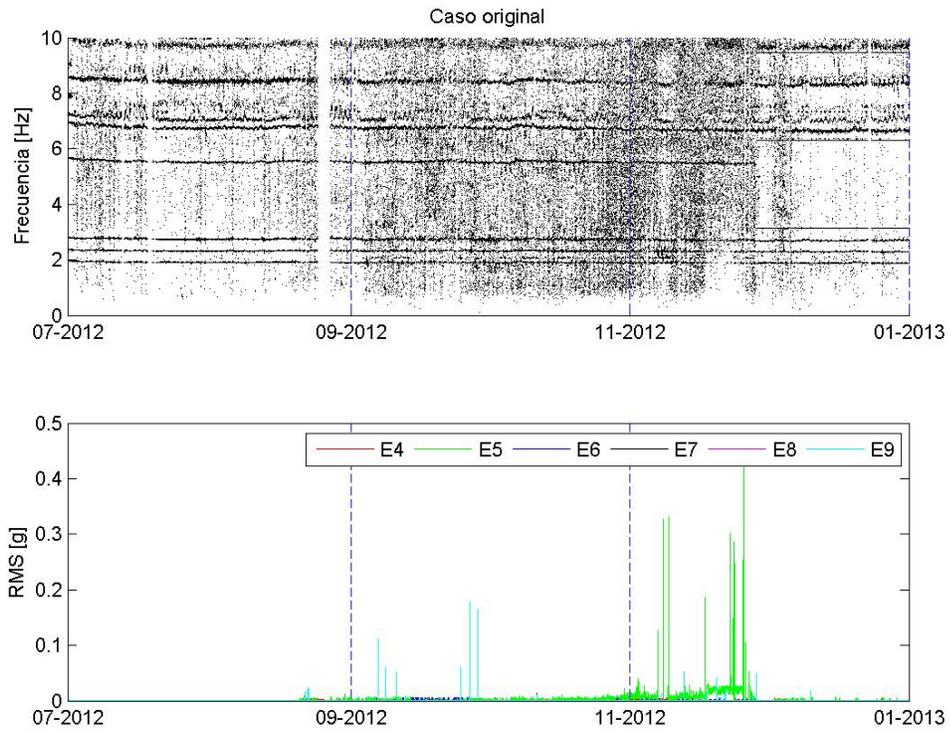


Figura 4.7.6 – Caso original (07-2012 a 01-2013)

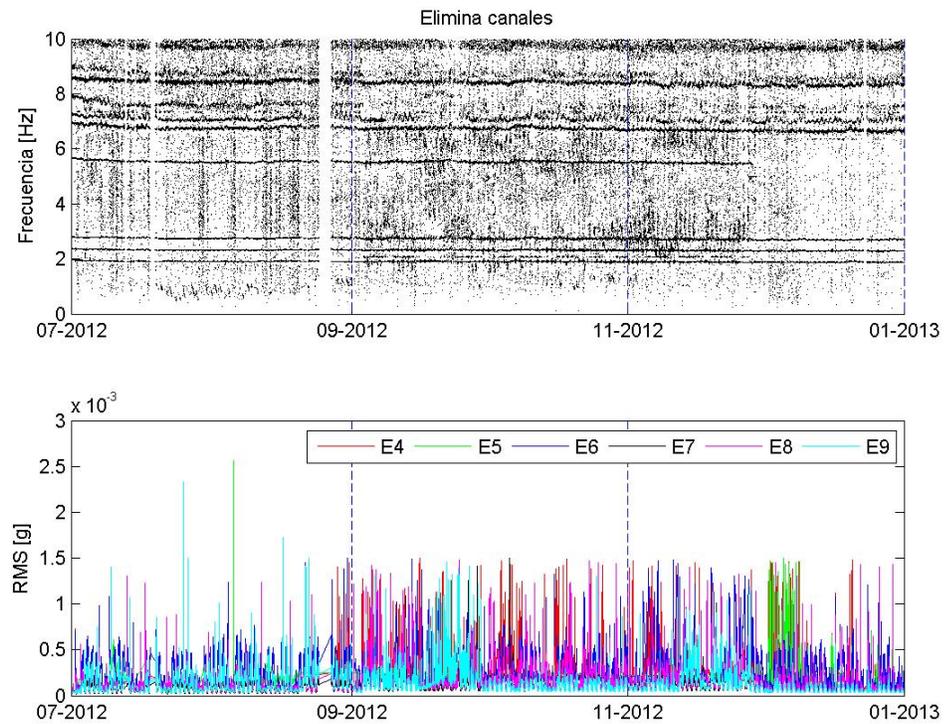


Figura 4.7.7 – Canales eliminados (07-2012 a 01-2013)

4.7.4 Marzo de 2013 a Julio de 2014

La Figura 4.7.8, Figura 4.7.9 y Figura 4.7.10 muestran la evolución de las frecuencias identificadas a lo largo del tiempo en análisis y los valores RMS para los distintos canales, tomando en cuenta (respectivamente) los siguientes casos: Caso original (sin eliminar canales), eliminando el canal E7 y eliminando los canales E4, E5 y E7.

A partir de la Figura 4.7.8 se logran observar las tres frecuencias (3.15 [Hz], 6.3 [Hz] y 9.45 [HZ]) estables a lo largo del tiempo que ya se han observado a finales de 2012. La aparición de estos es resultado de un mal funcionamiento del canal E7 (válido hasta Febrero de 2014), lo cual se justifica en la Figura 4.7.9. Además, dado que estas frecuencias vuelven a aparecer consistentemente en 2014, y observando el mal funcionamiento de los canales E4 y E5 (a partir de los valores RMS), se analiza el caso en el que se eliminan estos tres canales (Figura 4.7.10). La mejor resolución observada (en términos de frecuencias identificadas) permite justificar la omisión de estos canales.

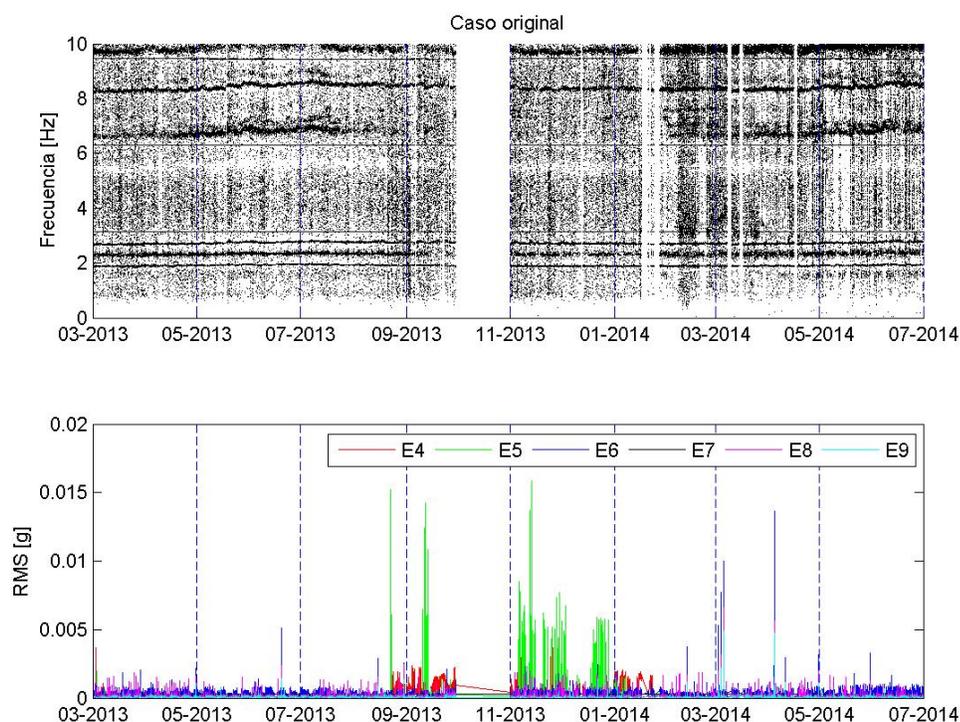


Figura 4.7.8 – Caso original (03-2013 a 07-2014)

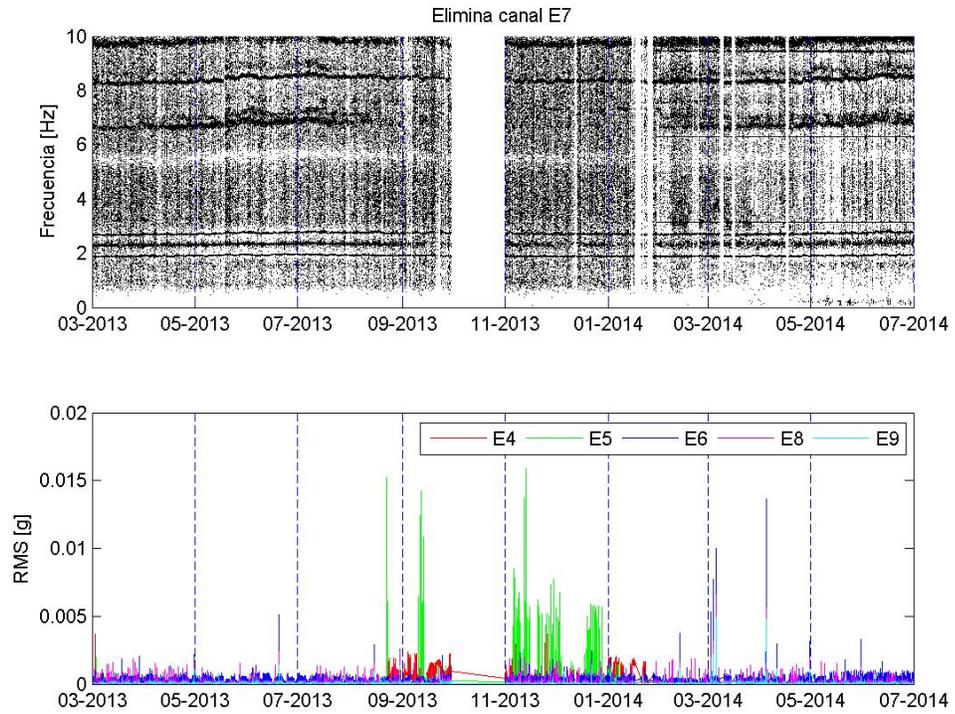


Figura 4.7.9 – Canal E7 eliminado (03-2013 a 07-2014)

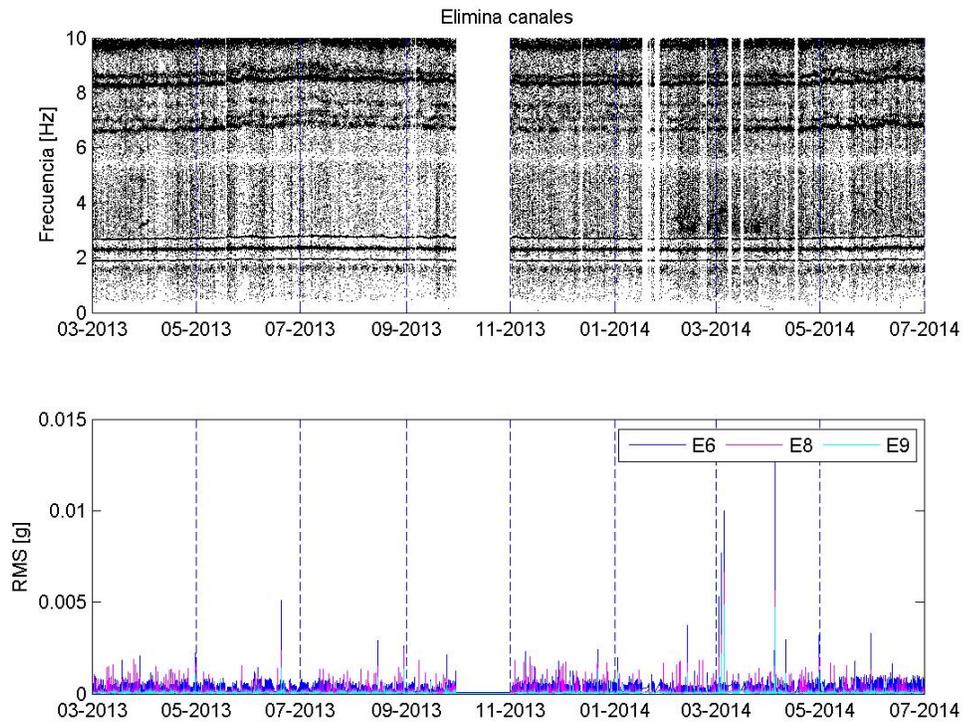


Figura 4.7.10 – Canales eliminados (03-2013 a 07-2014)

Las tres frecuencias estables se asumen erróneas tomando en cuenta por un lado la discontinuidad de estas (aparición a finales de 2012), y por otro el bajo nivel de amortiguamiento que presentan estos en comparación con el resto de modos identificados. En la Figura 4.7.11 se exponen los *clusters* que forman estas frecuencias en el plano frecuencia-amortiguamiento, y en la Figura 4.7.12 se muestra la distribución de las razones de amortiguamiento en función de histogramas, y en el cual se destaca el bajo nivel de amortiguamiento asociado.

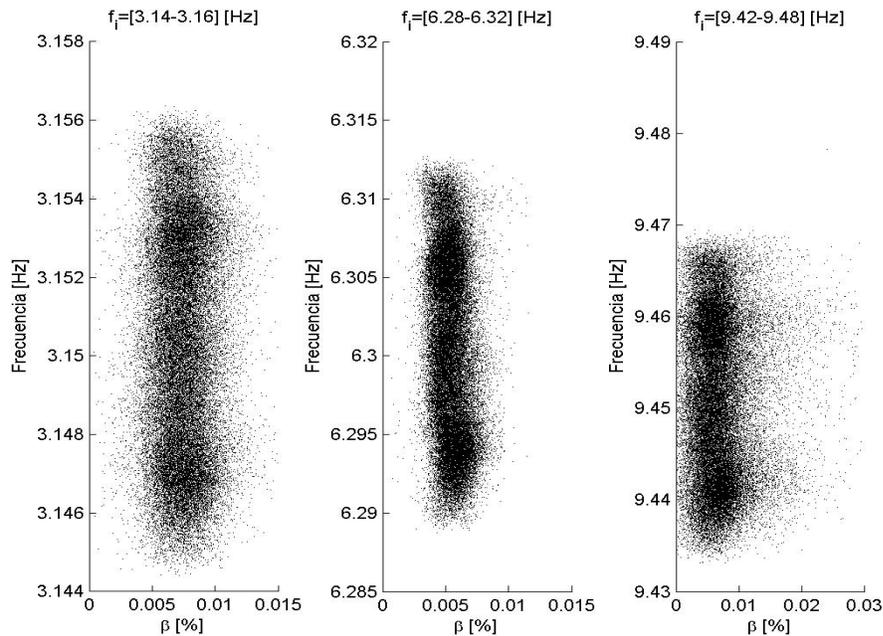


Figura 4.7.11 – Frecuencia v/s amortiguamiento (frecuencias estables de bajo amortiguamiento)

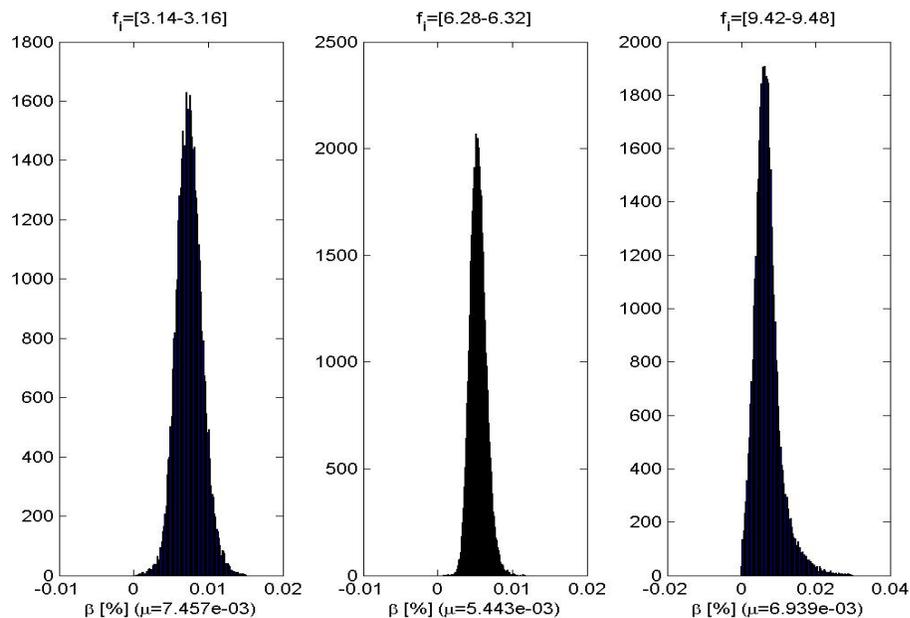


Figura 4.7.12 – Histograma razones de amortiguamiento (frecuencias estables de bajo amortiguamiento)

5 Conclusiones

Se ha expuesto en detalle el método de interpretación automático de diagramas de estabilización, y aplicado exitosamente a un modelo de estructura de propiedades conocidas y a una estructura real.

Se ha validado y verificado el funcionamiento de este método a partir de su aplicación sobre un modelo de estructura, obteniendo resultados muy cercanos a los reales, y conclusiones respecto al funcionamiento de este. Entre estas se destaca:

- 1) La correcta aplicación de la primera etapa del método recae principalmente en la correcta elección de los criterios de validación por sobre la cantidad de criterios. Destacándose la ponderación de los criterios débiles de forma modal, y la baja capacidad para discriminar entre modos físicos y espurios por los criterios de distancia.
- 2) La segunda etapa de agrupamiento se entiende como la más importante, dado que es a partir de la división en modos similares donde se obtienen finalmente los modos de la estructura.
- 3) La cuarta etapa de agrupamiento presenta diversas formas de determinar el modo más representativo. A partir de la aplicación sobre este modelo de estructura es donde se pudo observar que el nuevo método propuesto corresponde a una mejor aproximación.
- 4) Se logró observar que ambos métodos de identificación entregan resultados similares, donde SSICOV presenta un costo computacional menor, y por otro lado SSIDATA presenta la posibilidad de utilizar criterios de validación adicionales que, como se expone en el anexo 7.7, no presentan una ventaja considerable para estructuras reales.

Por otra parte, a partir de la aplicación de este método sobre la estructura real se logró evaluar en detalle el comportamiento de este método como la variación de las propiedades dinámicas de esta estructura a lo largo del tiempo. Adicionalmente se logra compara la validez de este método con respecto al método de interpretación de triple acierto. Las principales conclusiones con respecto a este análisis son:

- 1) Se logra observar en mayor detalle que los criterios débiles de forma modal presentan la mejor herramienta para discriminar entre modos físicos y espurios, así como la ineficiencia de los criterios de distancia.
- 2) La capacidad para discriminar modos físicos de la estructura recae principalmente sobre la calidad de los registros y la cantidad de canales (observaciones) presentes sobre la estructura.
- 3) Se logra determinar la evolución de hasta nueve modos de la estructura, destacándose la imprecisión que entrega este método el cual justifica la necesidad de implementar un seguimiento modal complementario a este método de automatización. Además se logra observar la variación de las propiedades dinámicas debido a un posible daño sobre la estructura, y se posibilita el estudio de la dependencia de las propiedades dinámicas sobre variables externas.

- 4) El método de automatización logra obtener buenos resultados en tanto los registros sean representativos de la respuesta de la estructura, y los supuestos de los métodos de identificación utilizados sean consistentes con los registros (principalmente la naturaleza de las solicitudes sobre la estructura).
- 5) Debido a lo anterior, y el inevitable error que puede producir este método, la evaluación de los parámetros de una estructura en el tiempo requiere de una mayor interpretación de los resultados obtenidos en el tiempo. En otras palabras, el seguimiento modal es un segundo proceso necesario para complementar este método de automatización.
- 6) Al comparar con el método del triple acierto se logra observar la poca diferencia que existe entre estos dos métodos, notando la desventaja del método de triple acierto al incluir la definición previa de parámetros (número de modos a determinar y límites en los criterios de distancia utilizados).
- 7) A pesar de lo anterior, el método de interpretación automática entrega herramientas que pueden ayudar a mejorar el método de triple acierto (por ejemplo implementar el uso de criterios de forma modal, o utilizar el método de agrupamiento *k-means* sobre el histograma en frecuencias para eliminar la necesidad de definir el número de modos a identificar), el cual por su simplicidad tiende a ser una mejor método.
- 8) La capacidad de determinar los modos físicos de la estructura recae principalmente sobre la calidad de los registros y la cantidad de canales (observaciones) presentes sobre la estructura.
- 9) El tiempo necesario para procesar cada registro (desde el pre-procesamiento hasta determinar el conjunto de parámetros representativos) es entre 2 y 3 segundos por registro, y se destaca que el principal costo de tiempo se observó sobre el método de identificación. Este tiempo es muy bajo tomando en cuenta que en la práctica se dispondrían de 15 minutos para procesar cada registro (si se buscara realizar un monitoreo a tiempo real de esta estructura).

En términos generales el método de interpretación automático logra determinar eficientemente los principales modos observables del diagrama de estabilización. Dado que el proceso de determinar los parámetros dinámicos de una estructura depende de varios procesos (medición, pre-procesamiento, identificación, y finalmente determinar un conjunto válido) el resultado del método de interpretación automático puede ser tan bueno como los resultados de los procesos previos. En otras palabras, el método de interpretación supone que el diagrama de estabilización es reflejo de una buena identificación de la estructura en análisis.

En conclusión, el método de interpretación de diagramas de estabilización presenta una herramienta que puede ser perfeccionada al simplificar su funcionamiento, incorporando las principales ventajas que entrega (en términos de los distintos métodos de agrupamiento que lo componen y los distintos criterios que introduce) sobre el método de triple acierto, para de esta forma generar un método de automatización más intuitivo y eficiente.

6 Bibliografía

- [1] E. Reynders, J. Houbrechts y G. De Roeck, «Fully automated (operational) modal analysis,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 29, pp. 228-250, 2012.
- [2] B. Peeters y G. De Roeck, «Reference-base stochastic subspace identification for output-only modal analysis,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 13, pp. 855-878, 1999.
- [3] A. S. Veletsos y C. E. Ventura, «Modal analysis of non-classically damped linear systems,» *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 14, pp. 217-243, 1986.
- [4] E. Reynders y G. De Roeck, «Reference-based combined deterministic-stochastic subspace identification for experimental and operational modal analysis,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, pp. 617-637, 2008.
- [5] M. Döhler y L. Mevel, «Fast multi-order computation of system matrices in subspace-based system identification,» *Control Engineering Practice*, vol. 20, pp. 882-894, 2012.
- [6] P. Van Overschee y B. De Moor, *Subspace identification for linear systems: Theory-Implementations-Applications*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [7] J.-N. Juang y R. S. Pappa, «An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction,» *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 8, pp. 620-627, 1985.
- [8] P. Van Overschee y B. De Moor, «N4SID: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems,» *Automatica, Special Issue on Statistical Processing and Control*, vol. 30, pp. 75-93, 1994.
- [9] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, second ed., Prentice-Hall, inc., 1999.
- [10] E. Reynders, R. Pintelon y G. De Roeck, «Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, pp. 948-969, 2008.
- [11] R. Allemang y D. Brown, «A correlation coefficient for modal vector analysis,» *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference*, pp. 110-116, 1982.
- [12] R. Pappa, K. Elliott y A. Schenk, «A consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm,» Report NASA TM-107067, National Aeronautics and Space Administration, 1992.
- [13] F. Cara, J. Juan, E. Alarcón, E. Reynders y G. De Roeck, «Modal contribution and state space order selection in operational modal analysis,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 38, pp. 276-298, 2013.

- [14] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander y X. Xu, «A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise,» *Proceedings of 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 226-331, 1996.
- [15] M. Daszykowski, B. Walczak y D. Massart, «Looking for natural patterns in analytical data. Part 2. Tracing local density with OPTICS,» *Journal of Chemical Information and Modelling*, vol. 42, pp. 500-507, 2002.
- [16] J. Basoalto, *Análisis del efecto de las condiciones ambientales en las propiedades modales de un edificio de hormigón armado*, Memoria para optar al título de Ingeniero Civil: Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2013.
- [17] P. León, *Variación de las propiedades dinámicas de la Torre Central debido a factores sísmicos*, Memoria para optar al título de Ingeniero Civil: Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2013.

7 Anexo

7.1 Algoritmos de identificación

La entrada para ambos algoritmos contempla los vectores de salida \mathbf{y}_k y los órdenes del modelo n_k considerados, donde $n_k = \{n_1, \dots, n_t\}$.

Para los algoritmos se utiliza la siguiente notación: dada una matriz \mathbf{X} la matriz $\mathbf{X}_{[r_1:r_2, c_1:c_2]}$ denota la submatriz de \mathbf{X} que contiene las filas r_1 a r_2 y las columnas c_1 a c_2 . Además, si sólo contiene dos puntos implica toda la fila o toda la columna de la matriz \mathbf{X} , según sea el caso (por ejemplo $\mathbf{X}_{[:,i]} = \mathbf{X}$).

Algoritmo 1: SSI-COV (FMO)

Entrada:

$$y_1, \dots, y_j \in \mathbb{R}^{l \times 1}$$

{Vectores de salida}

$$n_1, \dots, n_t$$

{Órdenes del modelo}

- 1: Calcular covarianzas: $\mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+i}\mathbf{y}_k^T]$
- 2: Formar matriz de Toeplitz $\mathbf{T}_{1|i}$
- 3: Descomposición SVD: $\mathbf{T}_{1|i} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$
- 4: $\mathbf{O}_t \leftarrow \mathbf{U}_{[:,1:n_t]}\mathbf{\Delta}_{[1:n_t,1:n_t]}^{1/2}$
- 5: $\mathbf{O}_t^\uparrow \leftarrow \mathbf{O}_t_{[1:l(i-1),1:n_t]}$, $\mathbf{O}_t^\downarrow \leftarrow \mathbf{O}_t_{[(l+1):li,1:n_t]}$
- 6: $\mathbf{C}_t \leftarrow \mathbf{O}_t_{[1:l,1:n_t]}$
- 7: Descomposición QR: $\mathbf{O}_t^\uparrow = \mathbf{Q}_t\mathbf{R}_t$
- 8: $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{R}_t^{-1}$, $\mathbf{S}_t \leftarrow \mathbf{Q}_t^T\mathbf{O}_t^\downarrow$
- 9: **Para** $k=1\dots t$ **hacer**
- 10: $\mathbf{A}_k \leftarrow \mathbf{T}_{[1:n_k,1:n_k]}\mathbf{S}_t_{[1:n_j,1:n_j]}$
- 11: $\mathbf{C}_k \leftarrow \mathbf{C}_t_{[1:n_k,1:n_k]}$
- 12: **Fin**

Salida: Matrices del sistema $\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k$ para los órdenes del modelo n_1, \dots, n_t

Algoritmo 2: SSI-DATA (FMO)

Entrada:

$$y_1, \dots, y_j \in \mathbb{R}^{l \times 1}$$

{Vectores de salida}

$$n_1, \dots, n_t$$

{Órdenes del modelo}

- 1: Formar matriz de Hankel \mathbf{H}
- 2: Descomposición RQ: $\mathbf{H} = \mathbf{R}\mathbf{Q}^T$
- 3: $\mathcal{P}_i \leftarrow \mathbf{R}_{[li+1:2li,1:l]} \mathbf{Q}_{[1:li,:]}^T$
- 4: $\mathcal{P}_{i-1} \leftarrow \mathbf{R}_{[l(i+1)+1:2li,1:l(i+1)]} \mathbf{Q}_{[1:l(i+1),:]}^T$
- 5: Descomposición SVD: $\mathcal{P}_i = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T$
- 6: $\mathbf{O}_t \leftarrow \mathbf{U}_{[:,1:n_t]} \mathbf{\Delta}_{[1:n_t,1:n_t]}^{1/2}$
- 7: $\mathbf{O}_t^\uparrow \leftarrow \mathbf{O}_t_{[1:l(i-1),1:n_t]}$, $\mathbf{O}_t^\downarrow \leftarrow \mathbf{O}_t_{[(l+1):li,1:n_t]}$
- 8: $\mathbf{C}_t \leftarrow \mathbf{O}_t_{[1:l,1:n_t]}$
- 9: Descomposición QR: $\mathbf{O}_t^\uparrow = \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t$
- 10: $\mathbf{T}_o \leftarrow \mathbf{R}_t^{-1}$, $\mathbf{S}_t \leftarrow \mathbf{Q}_t^T \mathbf{O}_t^\downarrow$, $\mathbf{S}_t^{p2} \leftarrow \mathbf{Q}_t^T \mathcal{P}_{i-1}$
- 11: Descomposición QR: $\mathbf{O}_t = \mathbf{Q}_t^* \mathbf{R}_t^*$
- 12: $\mathbf{T}_{p2} \leftarrow \mathbf{R}_t^{*-1}$, $\mathbf{S}_t^{p1} \leftarrow \mathbf{Q}_t^{*T} \mathcal{P}_i$
- 13: **Para** $k=1 \dots t$ **hacer**
- 14: $\mathbf{A}_k \leftarrow \mathbf{T}_o_{[1:n_k,1:n_k]} \mathbf{S}_t_{[1:n_k,1:n_k]}$
- 15: $\mathbf{C}_k \leftarrow \mathbf{C}_t_{[1:n_k,1:n_k]}$
- 16: $\hat{\mathbf{X}}_i \leftarrow \mathbf{T}_o_{[1:n_k,1:n_k]} \mathbf{S}_t^{p1}_{[1:n_k,:]}$
- 17: $\hat{\mathbf{X}}_{i+1} \leftarrow \mathbf{T}_{p2}_{[1:n_k,1:n_k]} \mathbf{S}_t^{p2}_{[1:n_k,:]}$
- 18: $\boldsymbol{\rho}_w \leftarrow (\hat{\mathbf{X}}_{i+1} - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{X}}_i)$, $\boldsymbol{\rho}_v \leftarrow (\mathbf{Y}_{i|i} - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{X}}_i)$
- 19: $\mathbf{Q}_k \leftarrow \text{cov}(\boldsymbol{\rho}_w)$, $\mathbf{R}_k \leftarrow \text{cov}(\boldsymbol{\rho}_v)$, $\mathbf{S}_k \leftarrow \text{cov}(\boldsymbol{\rho}_w, \boldsymbol{\rho}_v)$
- 20: **Fin**

Salida: Matrices del sistema $\{\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k\}$ y matrices de covarianzas $\{\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k, \mathbf{S}_k\}$ para los órdenes del modelo n_1, \dots, n_t

7.2 Filtro de Kalman

Debido a la naturaleza estocástica del modelo utilizado (ver ecuaciones 2.1.12 y 2.1.13), la respuesta del sistema (vector de estado \mathbf{x}_k) se puede determinar únicamente en términos probabilísticos. Para lograr lo anterior se utiliza el filtro de kalman, el cual genera una estimación del vector de estado de forma tal que el error asociado a la respuesta se minimice.

Formalmente, las ecuaciones del modelo EE en la representación en forma de innovación son [13]:

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}_k \quad (7.2.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_{k|k-1} \quad (7.2.2)$$

Donde $\boldsymbol{\epsilon}_k$ se denominan *innovaciones*. Además, dados los vectores de salida hasta el tiempo “s” $\mathbf{Y}_s = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_s\}$, se define:

$$\mathbf{x}_{t|s} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s] \quad (7.2.3)$$

$$\mathbf{P}_{t|s} = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|s})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|s})^t] = \text{Var}[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s] \quad (7.2.4)$$

Notar que para SSIDATA se utiliza la notación $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k}$. La ganancia de Kalman \mathbf{K} , en principio, varía en el tiempo:

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{A}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{S})\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \quad (7.2.5)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{K}_k\boldsymbol{\Sigma}_k\mathbf{K}_k^T \quad (7.2.6)$$

Pero en condiciones estacionarias (válido para sistemas lineales invariantes en el tiempo):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{P} > 0 \quad (7.2.7)$$

De esta forma, se puede definir \mathbf{P} y \mathbf{K} como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{S})(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{S})^T \quad (7.2.8)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{S})(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (7.2.9)$$

La ecuación para \mathbf{P} se conoce como Ecuación de Riccati Discreta Algebraica (DARE por sus siglas en ingles).

En resumen se pueden tener estimaciones para el vector de estado a partir de la ecuación (7.2.1), considerando la definición en (7.2.2), definiendo previamente la ganancia de Kalman (7.2.9) resolviendo la ecuación DARE (7.2.8), y considerando condiciones iniciales nulas ($\mathbf{x}_{1|0} = 0$).

Dadas las definiciones anteriores, se genera la transformación en función de los valores y vectores propios de la matriz de estado:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad \boldsymbol{\mu}_k = \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{x}_k \quad \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi} \quad (7.2.10)$$

Luego el modelo espacio estado (ecuaciones 2.1.12 y 2.1.13) se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\mu}_{k+1} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\mu}_k + \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{w}_k \quad (7.2.11)$$

$$\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}_k + \mathbf{v}_k \quad (7.2.12)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para las ecuaciones (7.2.1) y (7.2.2) se tiene:

$$\boldsymbol{\mu}_{k+1|k} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} + \boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}_k \quad (7.2.13)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_k = \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}_{k|k-1} \quad (7.2.14)$$

En resumen, definiendo el filtro de Kalman a partir de las ecuaciones (7.2.8) y (7.2.9), se tiene una estimación del vector de estado modal $\boldsymbol{\mu}_{k+1|k}$ a partir del proceso iterativo (ecuación 7.2.13 considerando 7.2.14).

7.3 Método de agrupamiento *k-means*

Se ejemplifica el funcionamiento del método de agrupamiento *k-means* ($k = 2$) considerando un conjunto de elementos $p_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ definidos en la Tabla 7.3.1.

Tabla 7.3.1 – Resumen coordenadas elementos

Elemento	x_1	x_2
1	0.16	0.45
2	0.59	0.48
3	0.31	0.22
4	0.52	0.91
5	0.16	0.15
6	0.60	0.82
7	0.26	0.53
8	0.65	0.99
9	0.68	0.07
10	0.74	0.44

El objetivo de este método de agrupamiento es dividir este conjunto de elementos en dos grupos. Para inicializar este procedimiento se definen los centroides iniciales asociados a cada grupo como el elemento $p_{c1} = [0,0]$ para el primer grupo, y $p_{c2} = [1,1]$ para el segundo grupo. La Figura 7.3.1 muestra la situación inicial de este método.

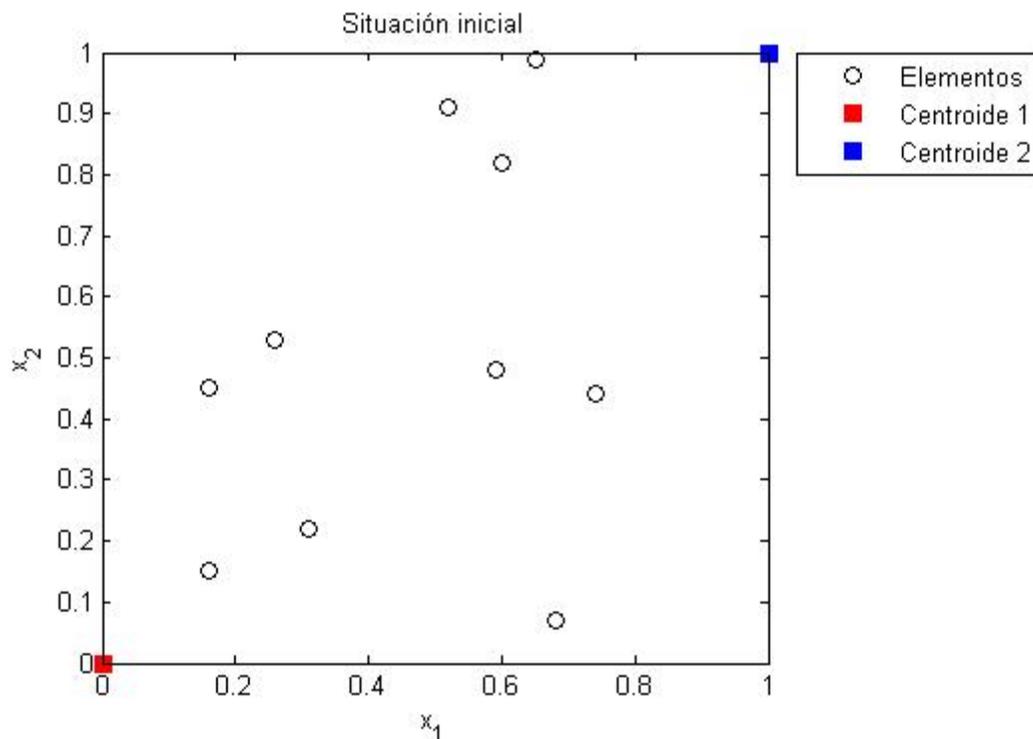


Figura 7.3.1 – Situación inicial agrupamiento *k-means*

Para cada elemento se calcula la distancia a cada centroide, y se asocia al grupo cuya distancia sea menor. Posteriormente se vuelven a determinar los centroides a partir del promedio de los elementos, y se repite el proceso hasta que los elementos no varíen. La Figura 7.3.2 muestra el resultado de este proceso iterativo, donde se expone la pertenencia de cada elemento a cada grupo, y el centroide representativo de cada uno.

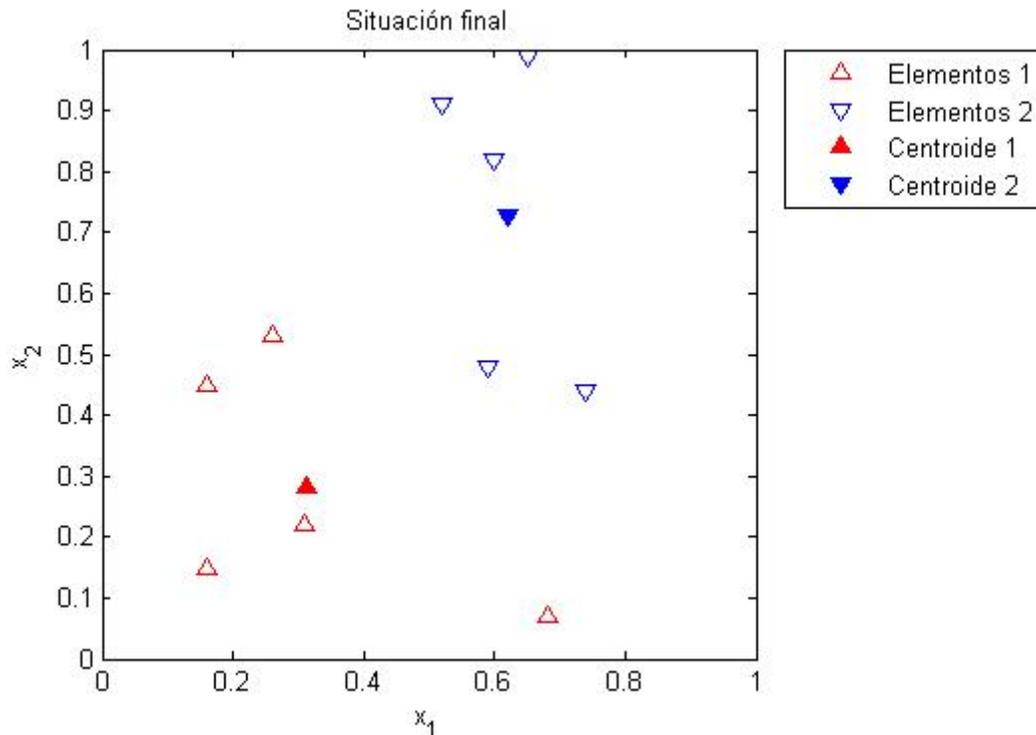


Figura 7.3.2 – Situación final agrupamiento *k-means*

A partir de este ejemplo se puede observar el funcionamiento de este método de agrupamiento, y su aplicación sobre la primera y segunda etapa del proceso de automatización. A continuación se exponen algunas observaciones:

- 1) Se requiere el uso de elementos definidos espacialmente (dentro de las dimensiones utilizadas) en comparación con otros métodos de agrupamiento que pueden ser utilizados sólo en base a la distancia entre elementos (agrupamiento jerárquico o agrupamiento DBSCAN).
- 2) La división es completa, o en otras palabras, no contempla la existencia de elementos que no sean representativos de los conjuntos a formar (ruido).
- 3) A pesar de lo anterior, el método resulta muy eficiente en términos de costo computacional.

7.4 Agrupamiento jerárquico

Para ilustrar el método de agrupamiento jerárquico, y definiciones asociadas como “distancia de corte” y “dendrograma”, se realiza un ejemplo sencillo tomando en cuenta cinco puntos en el plano bidimensional, y considerando la distancia euclidiana como el parámetro de distancia a utilizar.

Los elementos se definen numéricamente en Tabla 7.4.1 y gráficamente en la Figura 7.4.1.

Tabla 7.4.1 – Valores numéricos de elementos considerados.

Elemento	x_1	x_2
1	1	8
2	8	6
3	5	3
4	5	5
5	1	4

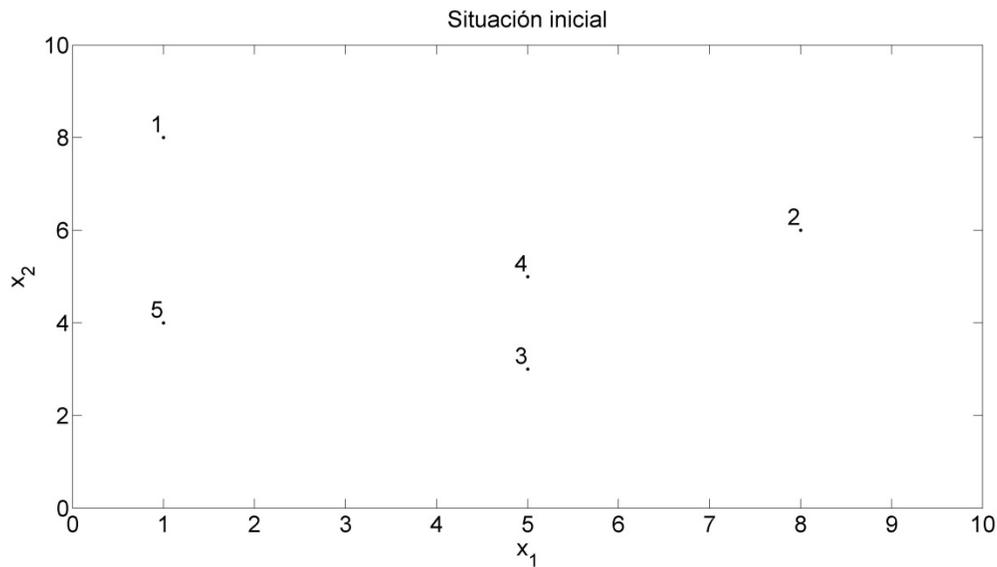


Figura 7.4.1 – Representación gráfica de elementos

Para dar comienzo a este método de agrupamiento se determina la distancia entre todos los pares de elementos posibles. Esta información se resume en la Tabla 7.4.2.

Tabla 7.4.2 – Distancia entre elementos

Par	Distancia
(1,2)	7.280
(1,3)	6.403
(1,4)	5.000
(1,5)	4.000
(2,3)	4.243
(2,4)	3.162
(2,5)	7.280
(3,4)	2.000
(3,5)	4.123
(4,5)	4.123

El proceso iterativo se describe como sigue:

- 1) Los elementos 3 y 4 presentan la menor distancia, por lo que se define un nuevo grupo “6” conteniendo ambos puntos. La Figura 7.4.2 muestra esta primera iteración en conjunto con el dendrograma, el cual registra a qué distancia se unen los distintos grupos. Posteriormente se vuelve a calcular la distancia entre todos los elementos, notando que para grupos de múltiples elementos se determina la distancia a partir del promedio de distancia entre ellos.

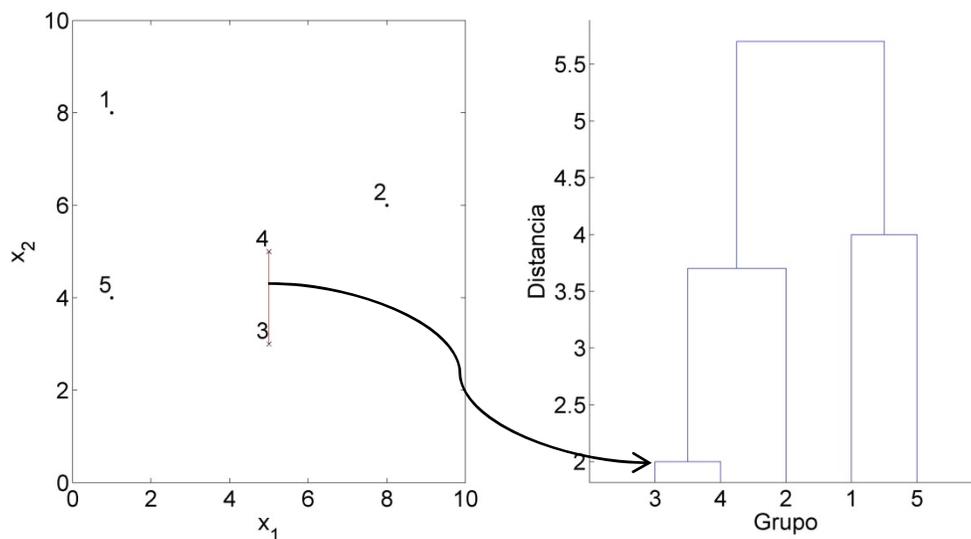


Figura 7.4.2 – Primera iteración (agrupamiento jerárquico)

- 2) La Figura 7.4.3 muestra la segunda iteración, donde se genera el nuevo grupo “7” a partir de los grupos “6” (que incluye a los elementos 3 y 4) y “2”. A partir de estos se indica en el dendrograma la construcción de una nueva “rama”, la cual se destaca por asociar a un elemento inicial “2” con el nuevo grupo “6” formado a partir de los elementos 3 y 4.

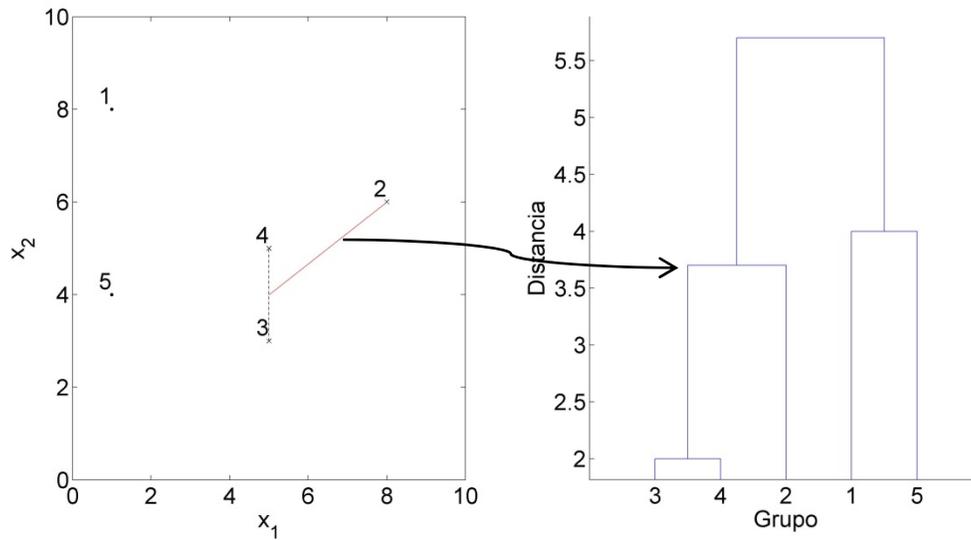


Figura 7.4.3 – Segunda iteración (agrupamiento jerárquico)

- 3) La Figura 7.4.4 muestra la tercera iteración, donde se genera el nuevo grupo “8” a partir de los grupos “1” y “5”. En este caso se obtiene una rama independiente de las formadas anteriormente, tal como se observa en el dendrograma.

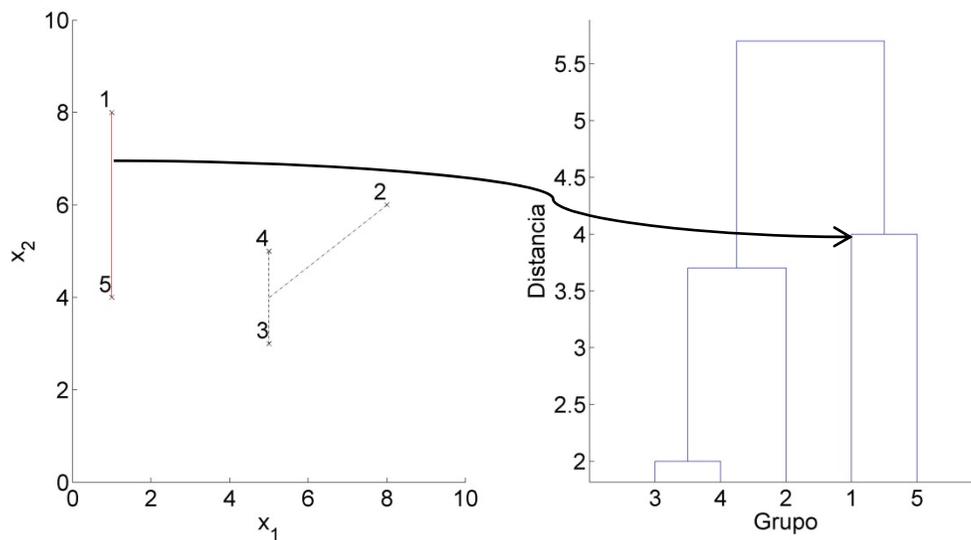


Figura 7.4.4 – Tercera iteración (agrupamiento jerárquico)

- 4) Finalmente la Figura 7.4.5 muestra la cuarta y última iteración, donde se genera el nuevo grupo “9” a partir de los grupos “8” y “7”. Esta es resultado de unir dos grupos formados en el proceso, que en conjunto abarcan todos los elementos iniciales, terminando con la iteración. La Tabla 7.4.3 muestra un resumen de los grupos formados en cada iteración.

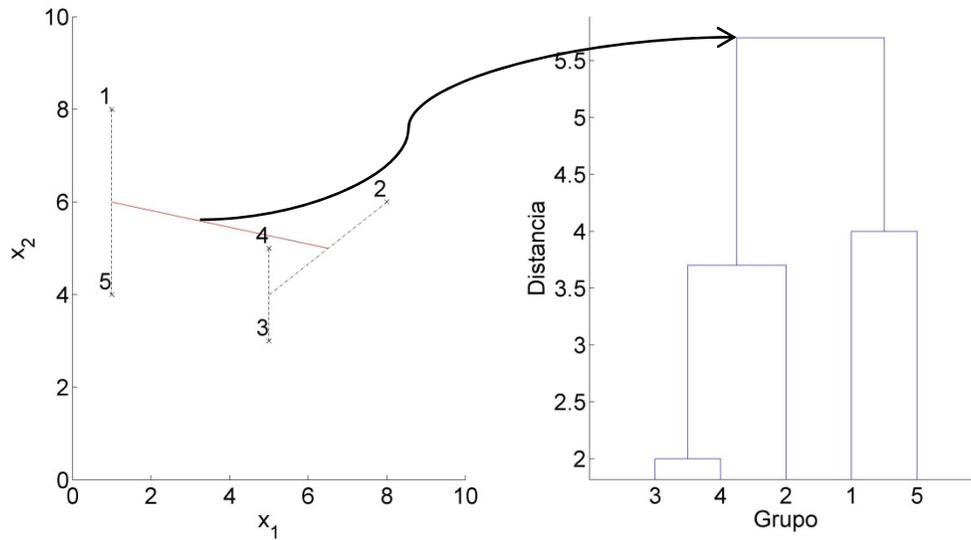


Figura 7.4.5 – Cuarta iteración (agrupamiento jerárquico)

Tabla 7.4.3 – Resumen agrupamiento jerárquico

Iteración	Grupo 1	Grupo 2	Distancia
1	3	4	2.000
2	2	6	3.703
3	1	5	4.000
4	7	8	5.702

De esta forma, al definir una distancia de corte se logran dividir los elementos de acuerdo al grupo al cual pertenecen para la iteración previa a esta distancia. Para ilustrar esto se considera una distancia de corte $d_c = 4.5$ y la Figura 7.4.6 expone la agrupación de los elementos de acuerdo a esta distancia.

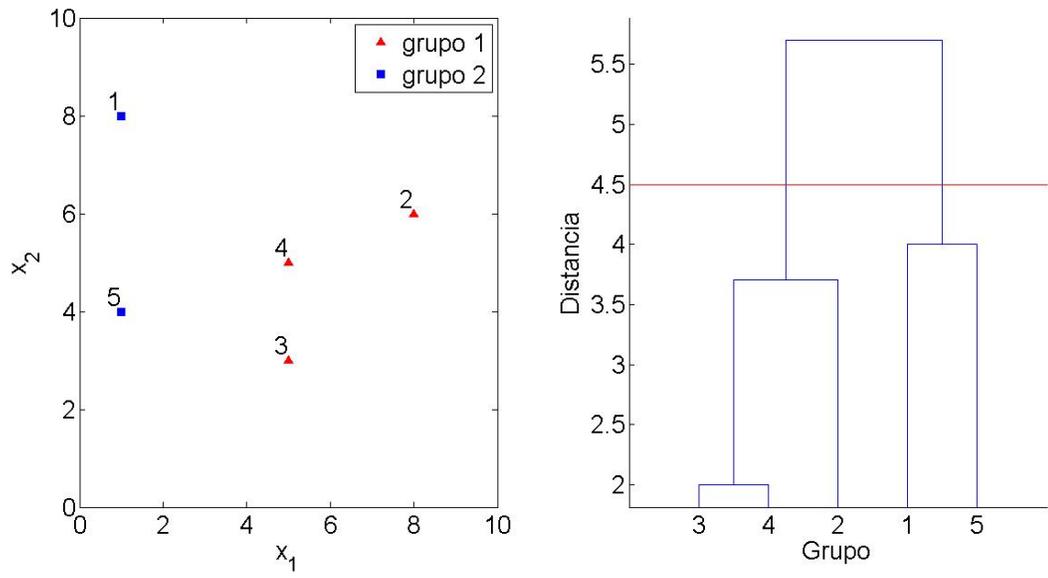


Figura 7.4.6 – Agrupamiento en función de distancia de corte

7.5 Selección de elemento representativo (DBSCAN)

Se muestra el detalle del funcionamiento del método de selección del elemento representativo en base a densidades (DBSCAN). Para esto se utiliza el resultado de la tercera etapa del modelo de estructura en estudio (caso SSICOV, ver capítulo 3).

La Figura 7.5.1 muestra los conjuntos de modos en base al diagrama de estabilización y la Figura 7.5.2 muestra el detalle de este conjunto en el plano frecuencia – razón de amortiguamiento, donde se distingue el conjunto de modos similares a utilizar.

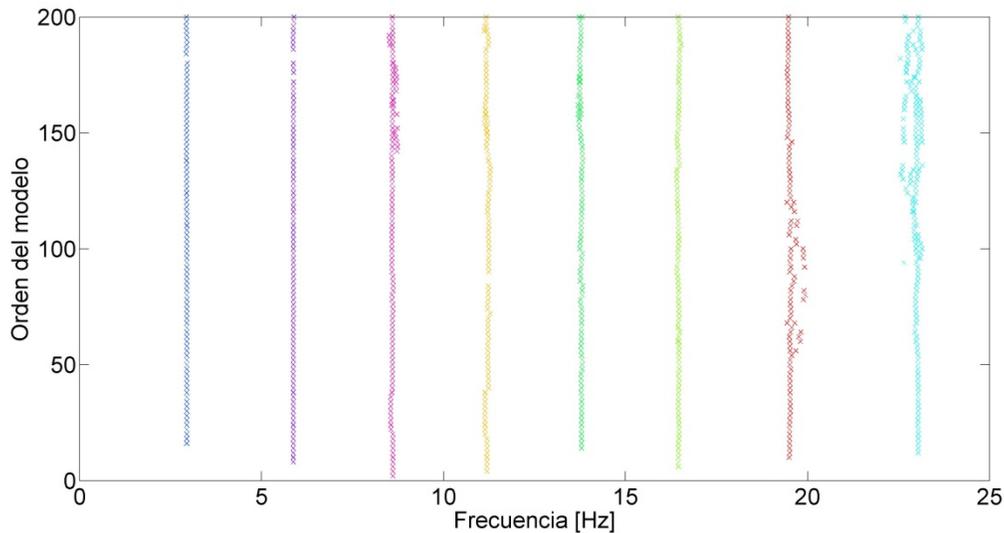


Figura 7.5.1 – Diagrama de estabilización tercera etapa (SSICOV)

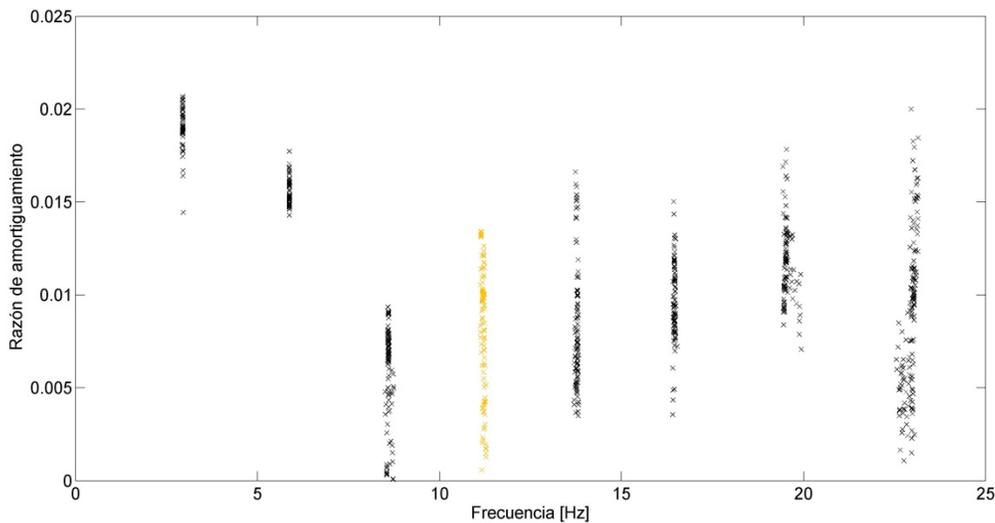


Figura 7.5.2 – Conjunto de modos similares utilizado

El proceso iterativo se describe como sigue:

- 1) Se aplica el método DBSCAN sobre el conjunto de modos. Este método encuentra un número de conjuntos de elementos similares en función de la cercanía (espacial) entre

ellos, el cual depende de dos variables: el número de elementos cercanos “ k ” necesarios para que se considere *cluster* (en este caso $k = 1$), y el radio de búsqueda de elementos cercanos ϵ el cual es considerado como función de k (ver sección 2.2.4). El conjunto formado que contiene el mayor número de elementos se utiliza para la siguiente iteración. La Figura 7.5.3 ilustra esta primera iteración.

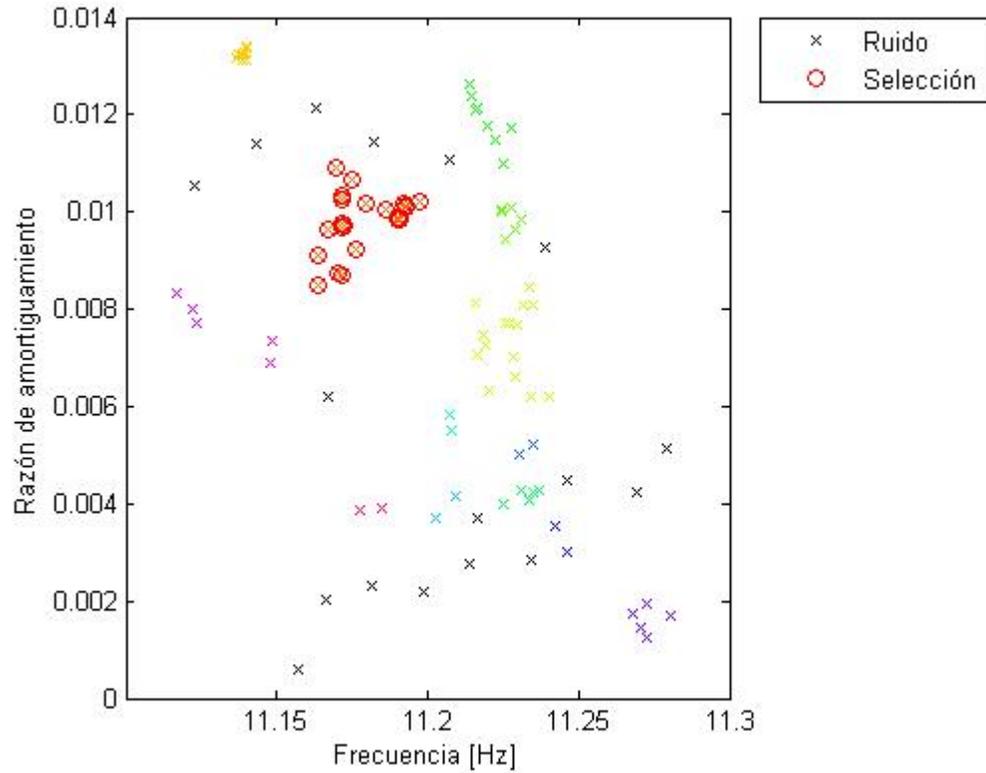


Figura 7.5.3 – Primera iteración (selección de modo representativo)

- 2) Sobre el conjunto determinado en el paso previo se vuelven a clasificar los elementos en *clusters* de modos cercanos, y se vuelve a determinar el conjunto de mayor cantidad de modos que va a ser utilizado en la siguiente iteración. La Figura 7.5.4 resume esta iteración.

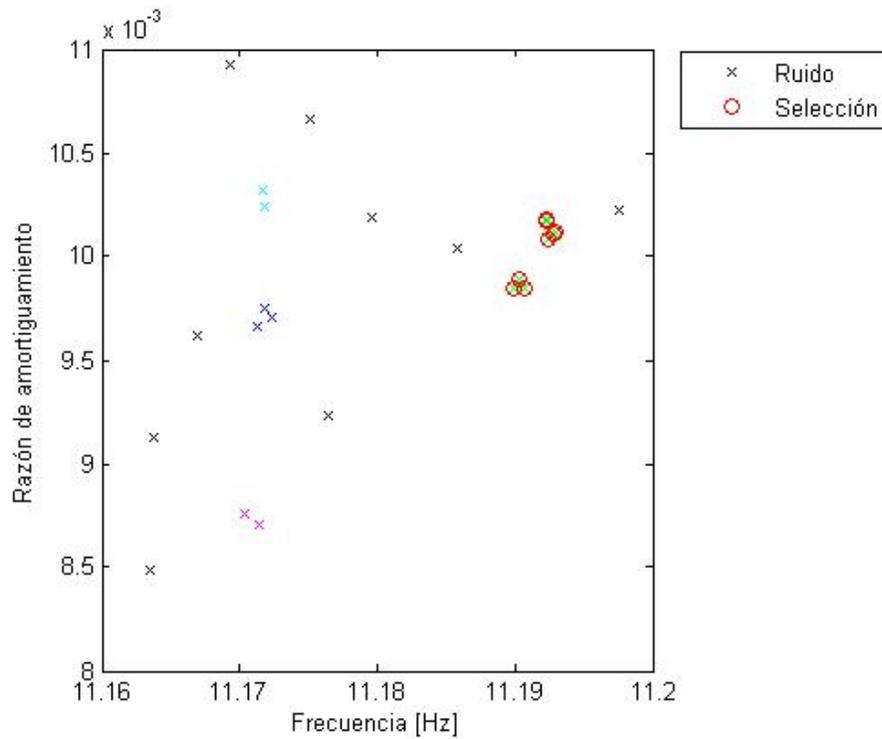


Figura 7.5.4 – Segunda iteración (selección de modo representativo)

3) El proceso se repite nuevamente, expuesto en la Figura 7.5.5.

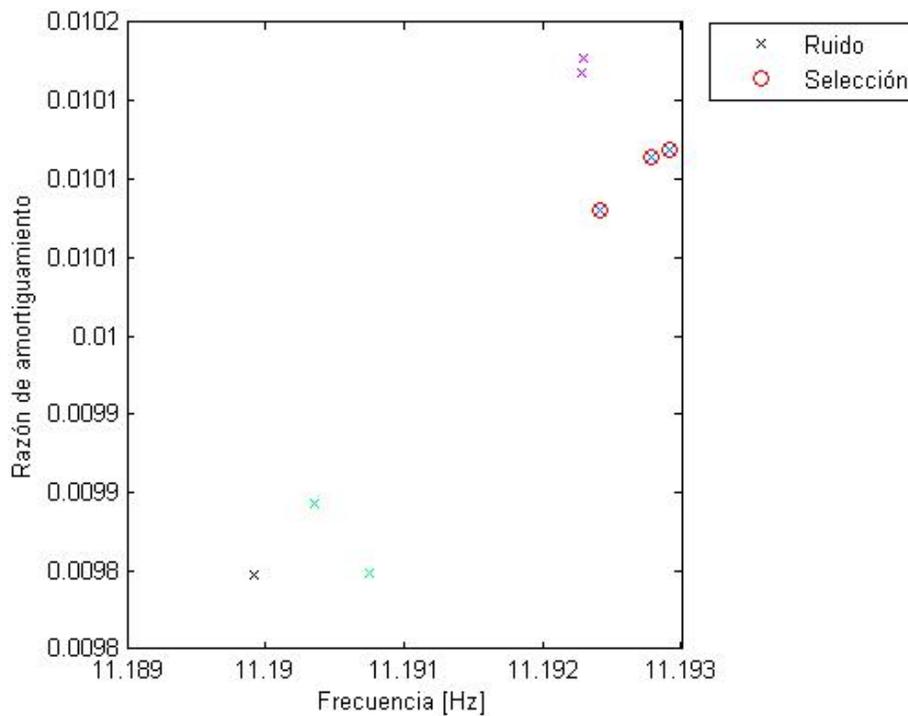


Figura 7.5.5 – Tercera iteración (selección de modo representativo)

- 4) El proceso se repite nuevamente, notando que la selección en esta iteración es de sólo dos modos. Esta se muestra en la Figura 7.5.6.

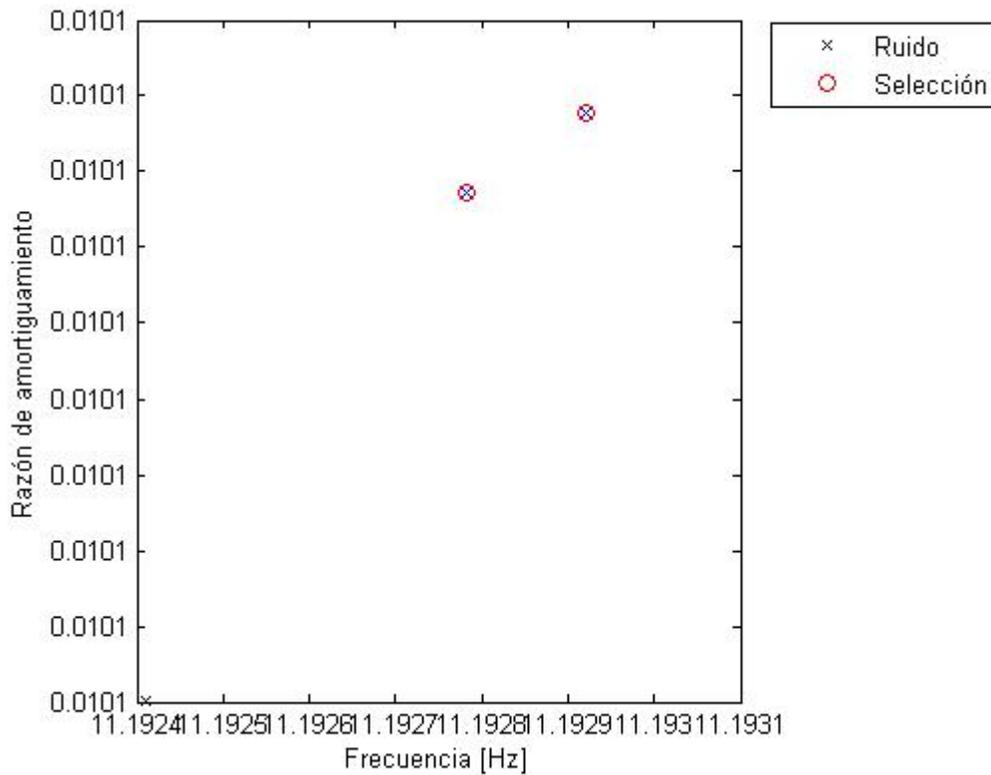


Figura 7.5.6 – Cuarta iteración (selección modo representativo)

- 5) La quinta iteración no logra determinar establecer conjuntos de modos similares, por lo que trata a todos estos como ruido. Este punto establece el fin del uso del método DBSCAN y el modo representativo se determina como el elemento más cercano al promedio de los modos resultantes. La Figura 7.5.7 muestra la selección de este modo.

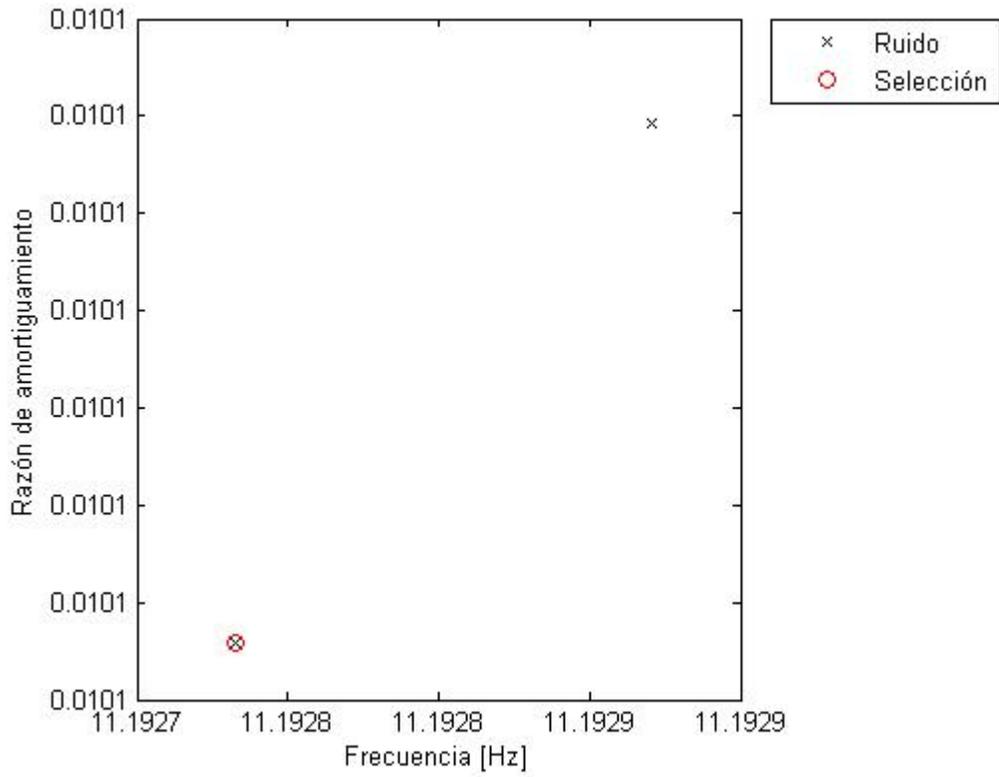


Figura 7.5.7 – Quinta iteración (selección modo representativo)

Se ha ilustrado el procedimiento para obtener el elemento representativo para uno de los grupos similares del modelo de estructura en estudio. El resultado de este procedimiento se encuentra en la sección 3.3.

7.6 Criterios débiles de forma modal

A continuación se muestra en detalle el comportamiento de los criterios débiles de validación MPC y MPD. Para esto se evalúan los siguientes casos:

- 1) Modelo de estructura amortiguamiento clásico
- 2) Modelo de estructura amortiguamiento no clásico
- 3) Vectores formas modales aleatorias
- 4) Casos particulares

Dado que ambos criterios miden finalmente el comportamiento de la forma modal en el plano complejo, es válido analizar y comparar estos parámetros simultáneamente.

7.6.1 Modelo de estructura amortiguamiento clásico

Se utiliza el mismo modelo descrito en el capítulo 3. Los modos se determinan mediante el análisis modal clásico y generalizado (ver por ejemplo [3]). En la Figura 7.6.1 y Figura 7.6.2 se muestran las formas modales asociadas a cada modo (normalizadas con respecto al máximo y eliminando la fase media para el análisis generalizado), y además se exponen las frecuencias y razones de amortiguamiento asociadas a cada una.

Debido al uso de una matriz de amortiguamiento clásica (proporcional a la matriz de masa y rigidez) no se presentan diferencias entre el análisis modal clásico y generalizado. En la Figura 7.6.3 y Figura 7.6.4 se presentan las formas modales en el plano complejo (solo caso análisis modal generalizado).

En la Tabla 7.6.1 se muestran los valores de MPC y MPD obtenidos, donde toman los valores esperables para el caso idealizado.

Tabla 7.6.1 – Resumen MPC y MPD (amortiguamiento clásico)

MODO	MPC	MPD
1	1.000	0.000
2	1.000	0.000
3	1.000	0.000
4	1.000	0.000
5	1.000	0.000
6	1.000	0.000
7	1.000	0.000
8	1.000	0.000

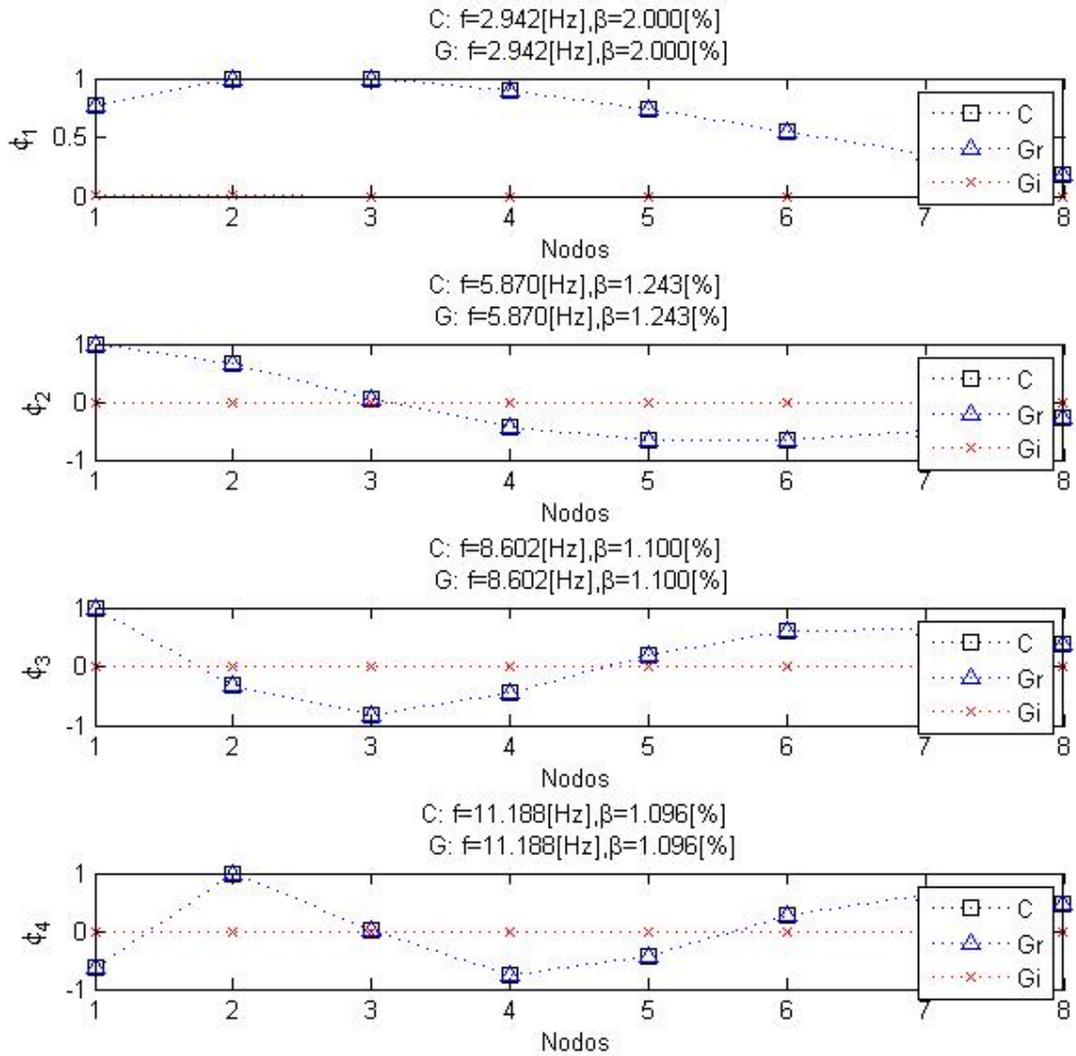


Figura 7.6.1 – Formas modales modos 1-4 (amortiguamiento clásico)

C: análisis clásico, Gr: parte real (generalizado), Gi: parte compleja (generalizado)

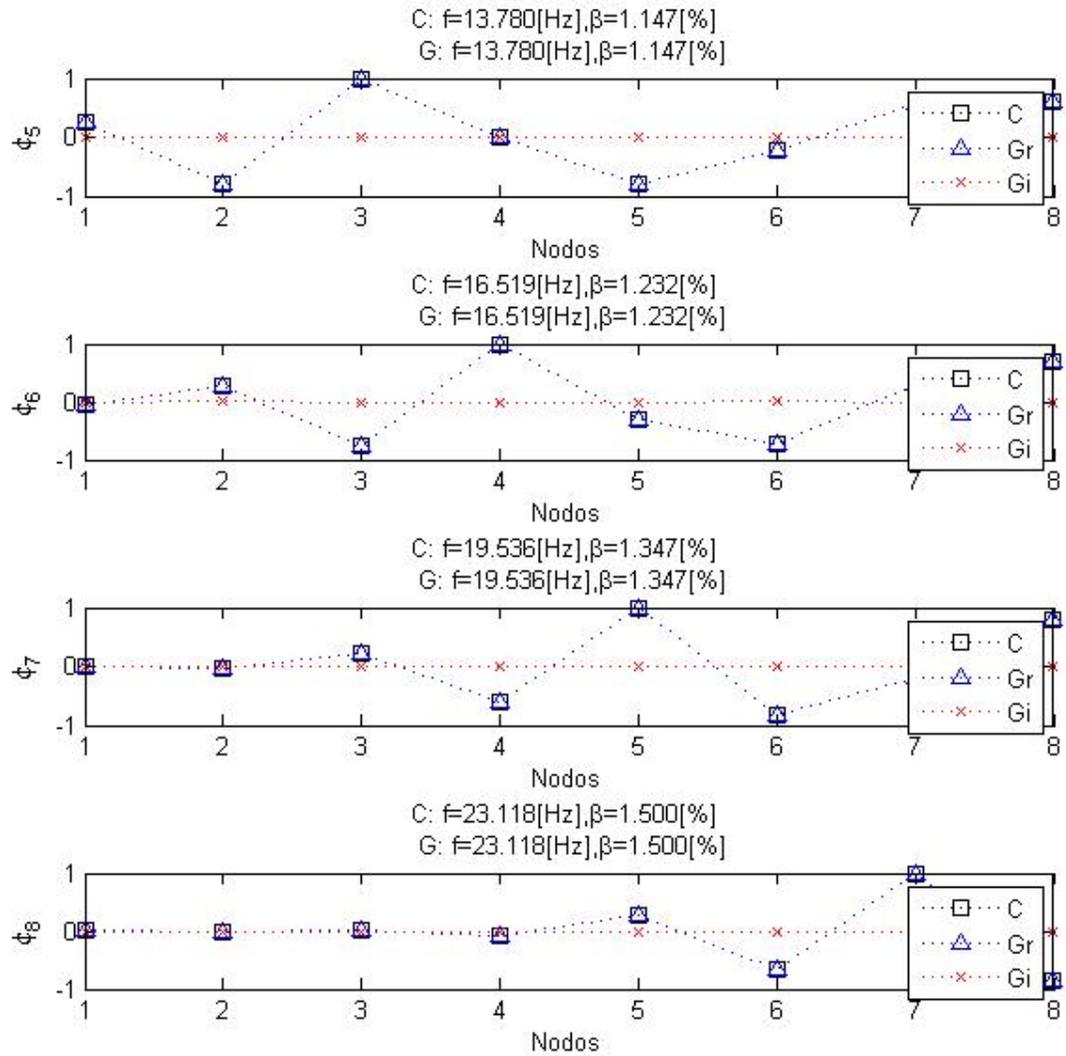


Figura 7.6.2 – Formas modales modos 5-8 (amortiguamiento clásico)

C: análisis clásico, Gr: parte real (generalizado), Gi: parte compleja (generalizado)

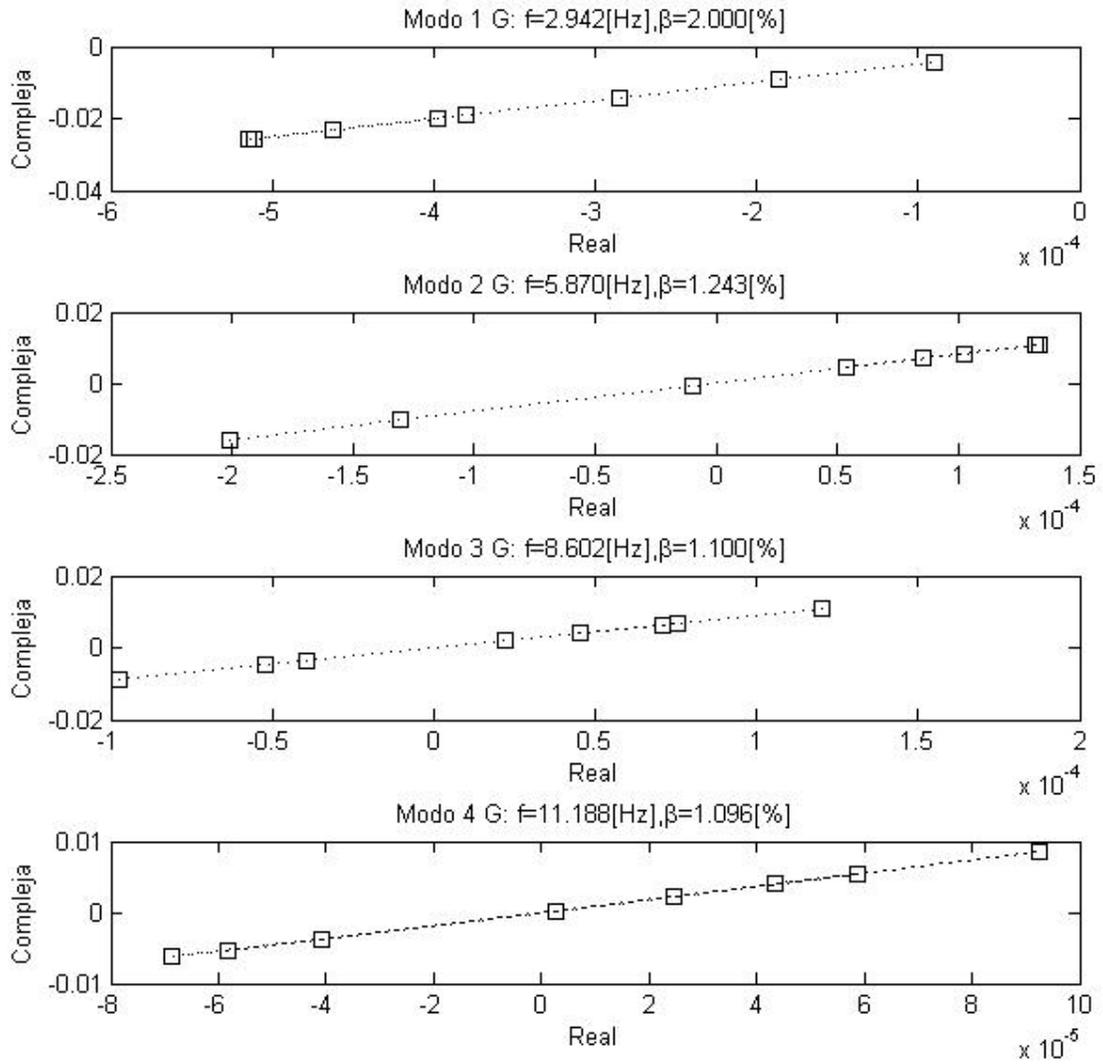


Figura 7.6.3 – Formas modales plano complejo, modos 1-4 (amortiguamiento clásico)

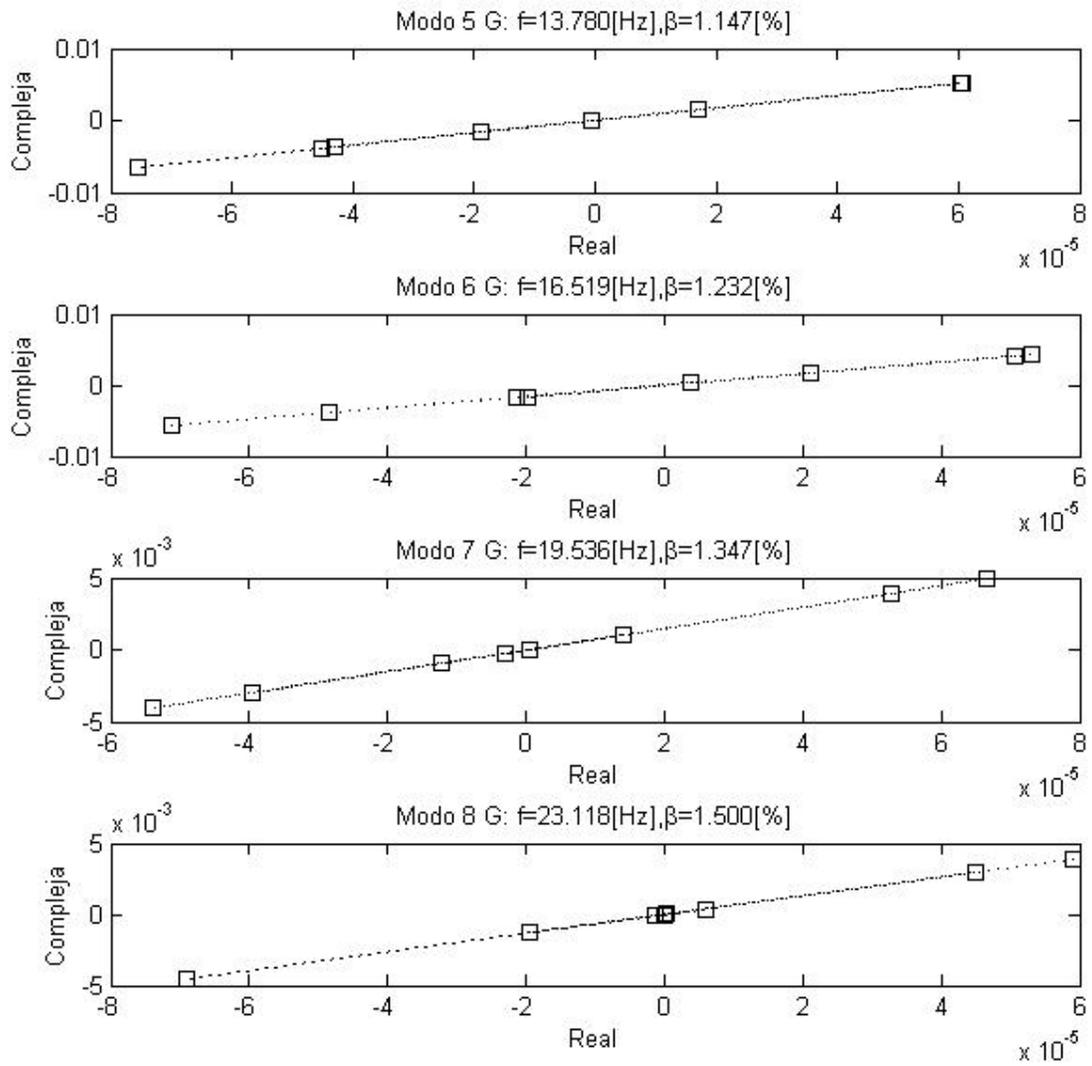


Figura 7.6.4 – Formas modales plano complejo, modos 5-8 (amortiguamiento clásico)

7.6.2 Modelo de estructura amortiguamiento no clásico

Se analiza el comportamiento de los criterios frente a un modelo de estructura de amortiguamiento no clásico. El modelo de estructura corresponde al mismo modelo salvo que se define la matriz de amortiguamiento a partir de las constantes de amortiguamiento c_i entre cada grado de libertad (ver Figura 3.1.1), utilizando valores aleatorios descendientes expuestos en la Tabla 7.6.2.

Tabla 7.6.2 – Constantes de amortiguamiento

Constante	Valor [Ns/m]
c_1	3.884
c_2	3.563
c_3	3.516
c_4	2.937
c_5	2.935
c_6	2.320
c_7	1.771
c_8	0.161
c_9	0.065

La Figura 7.6.5 y Figura 7.6.6 muestran las formas modales (normalizadas con respecto al máximo y eliminando la fase media para el análisis generalizado), frecuencias y razones de amortiguamiento de cada modo. En concordancia con la teoría, se logra observar una diferencia entre el análisis modal clásico y generalizado para la razón de amortiguamiento, y para la parte compleja de la forma modal.

En la Figura 7.6.7 y Figura 7.6.8 se exponen las formas modales en el plano complejo, donde se observa la no-linealidad de la forma modal. La Tabla 7.6.3 muestra los valores obtenidos para ambos criterios, donde se logra observar que los valores se alejan del caso ideal conforme se acentúa la no-linealidad de la forma modal.

Tabla 7.6.3 – Resumen MPC y MPD (amortiguamiento no clásico)

MODO	MPC	MPD
1	0.999	0.018
2	0.988	0.069
3	0.959	0.108
4	0.930	0.173
5	0.926	0.194
6	0.944	0.150
7	0.957	0.132
8	0.979	0.101

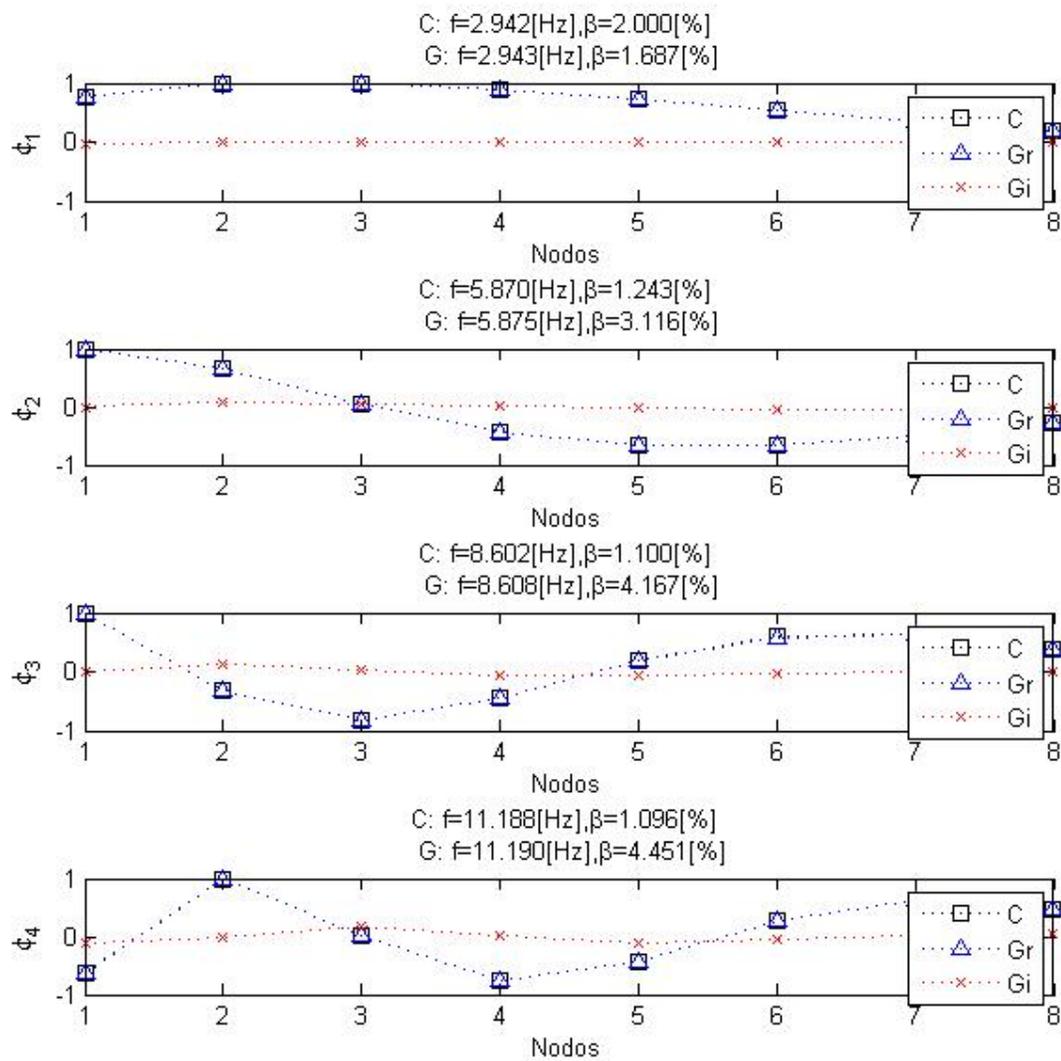


Figura 7.6.5 – Formas modales modos 1-4 (amortiguamiento no clásico)

C: análisis clásico, Gr: parte real (generalizado), Gi: parte compleja (generalizado)

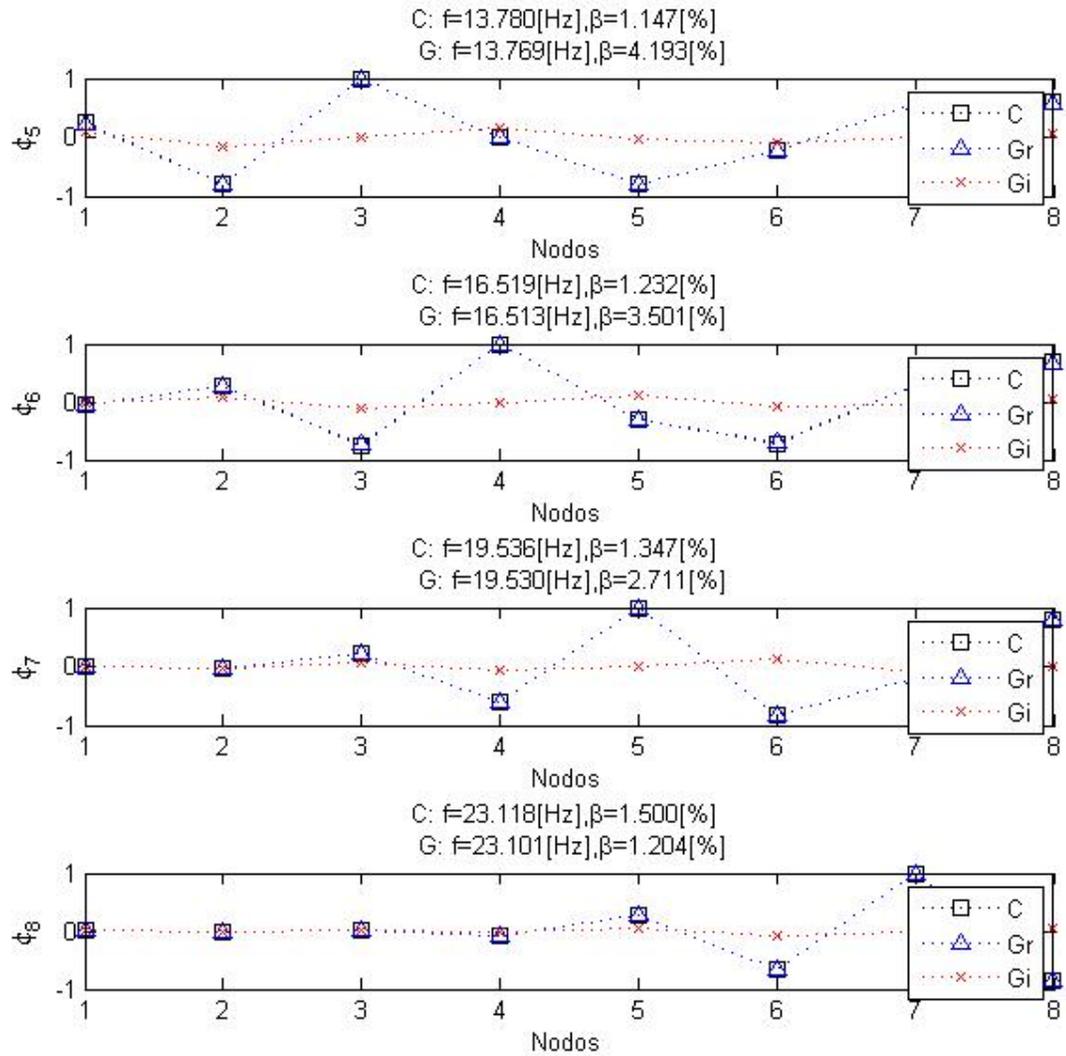


Figura 7.6.6 – Formas modales modos 5-8 (amortiguamiento no clásico)

C: análisis clásico, Gr: parte real (generalizado), Gi: parte compleja (generalizado)

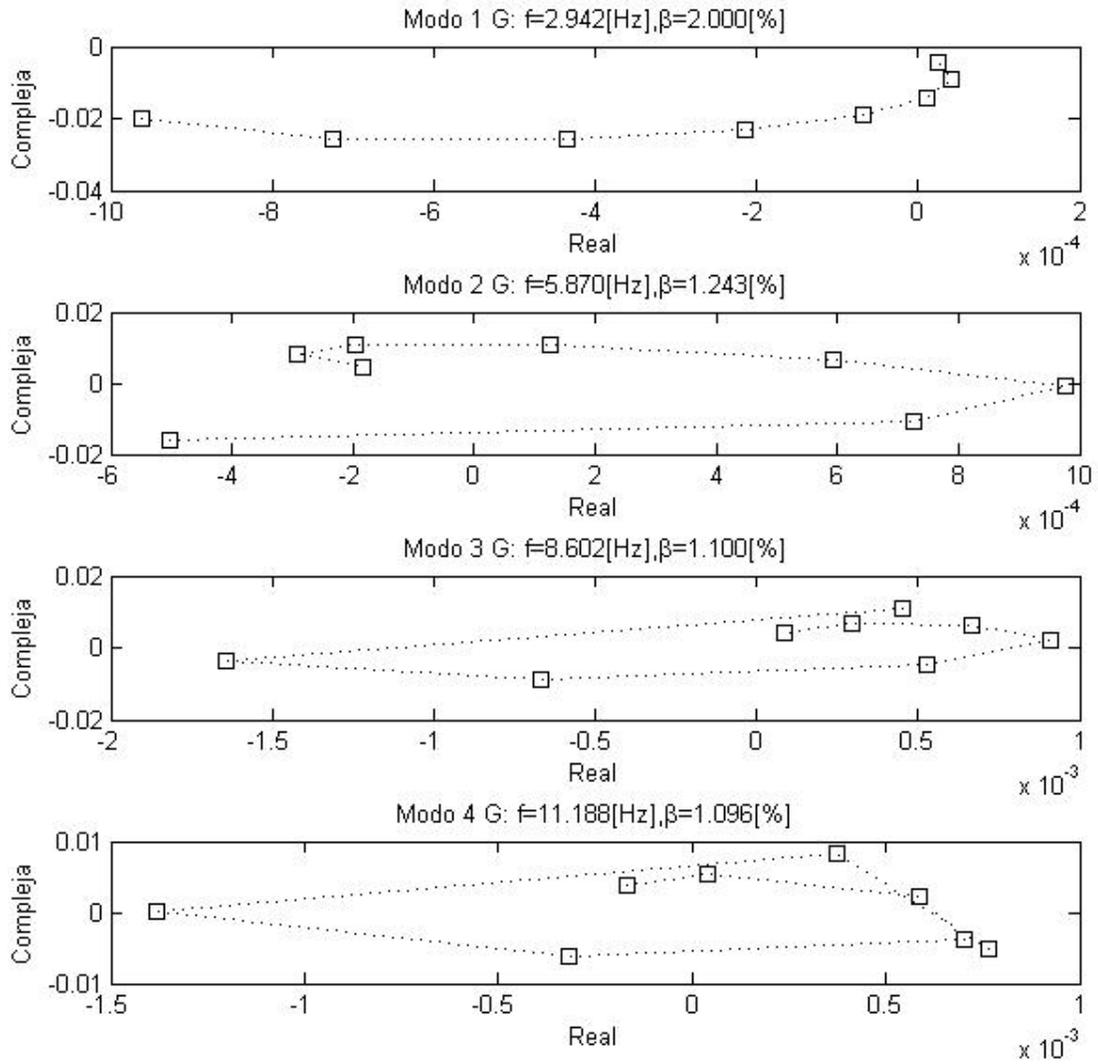


Figura 7.6.7 – Formas modales plano complejo, modos 1-4 (amortiguamiento no clásico)

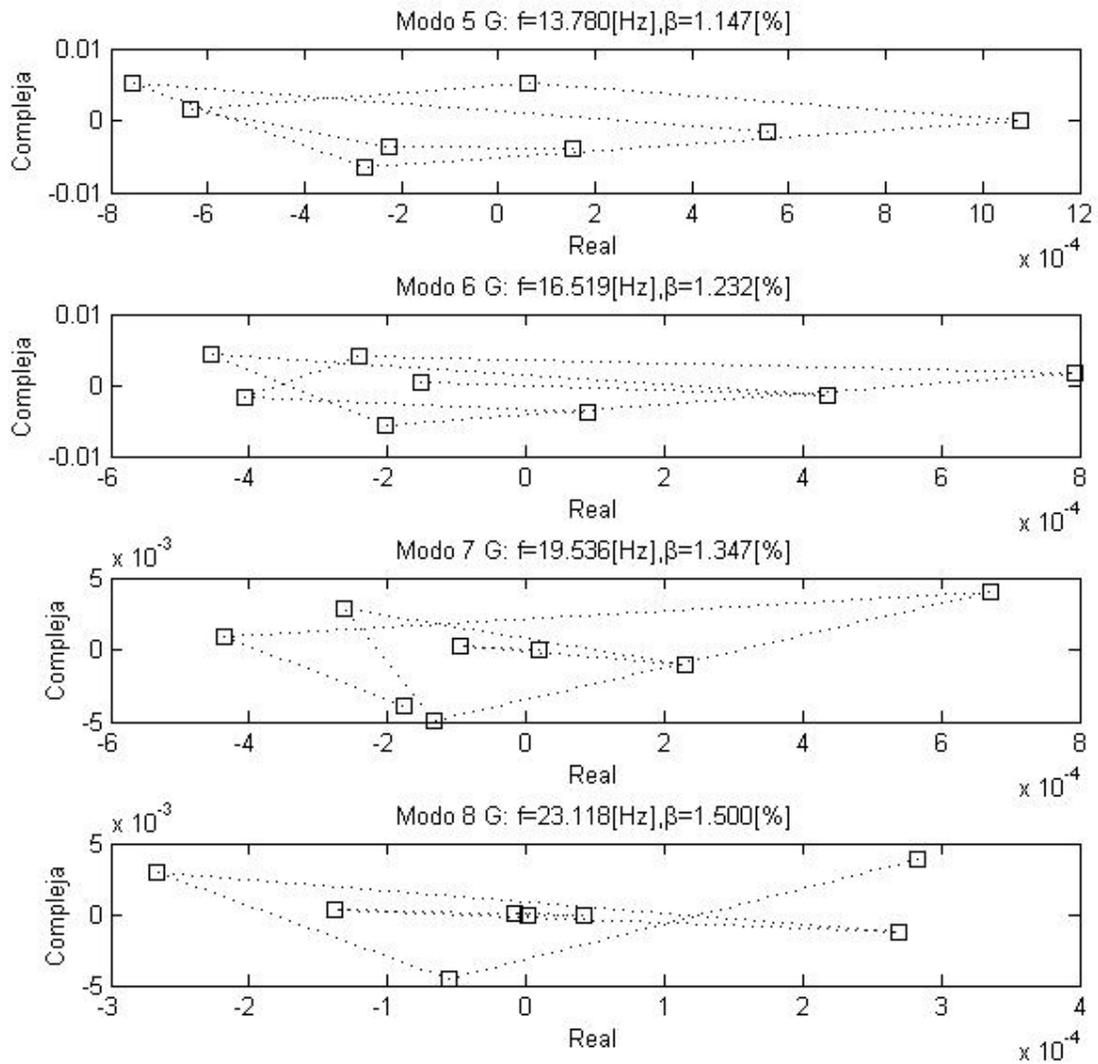


Figura 7.6.8 – Formas modales plano complejo, modos 5-8 (amortiguamiento no clásico)

7.6.3 Formas modales aleatorias

A partir del hecho que ambas propiedades MPC y MPD miden esencialmente lo mismo, debiese existir una correlación entre ellos. En otras palabras para una forma modal dada, si su valor de MPD es alto, entonces se debiese tener un valor de MPC bajo.

En virtud de lo anterior, y con el fin de evaluar el buen comportamiento para distintos casos, se grafica (1-MPC) v/s MPD para 10000 vectores aleatorios complejos (entre 0 y 1) de 8 grados de libertad. La Figura 7.6.9 muestra estos resultados.

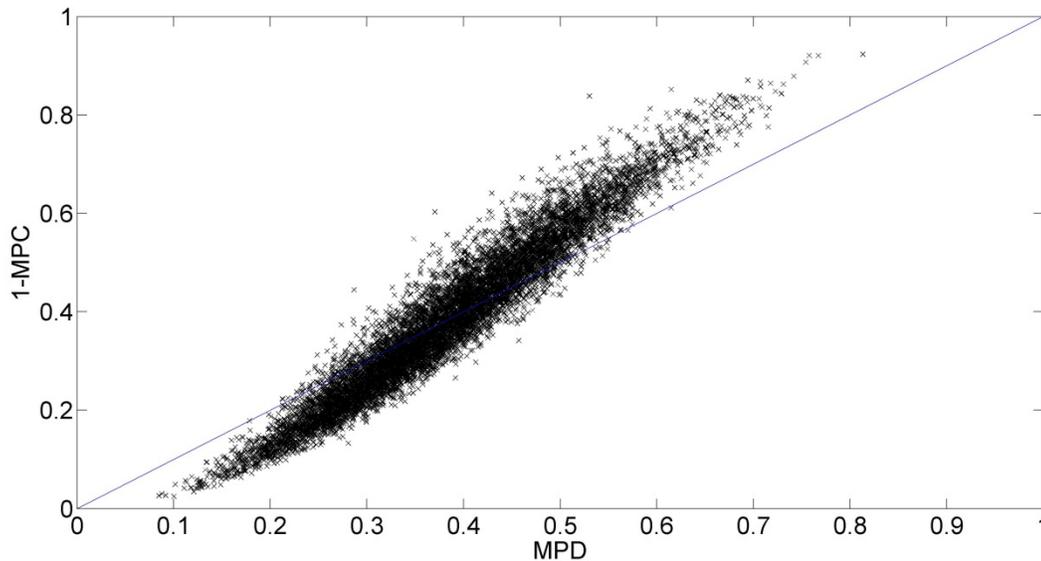


Figura 7.6.9 – Correlación MPC-MPD

En virtud de la Figura 7.6.9 se puede observar que 1-MPC entrega un valor menor en comparación a MPD para formas modales que tienden a ser colineales, y viceversa al aumentar el nivel de comportamiento no monofásico. La recta expuesta en esta figura ayuda a observar esta característica.

7.6.4 Casos particulares

Se estudian los siguientes casos particulares para evaluar el funcionamiento de cada criterio:

- 1) Vector complejo (parte real nula).
- 2) Vector real (parte compleja nula).
- 3) Vector parte real y parte complejo:

$$\phi = [1,1,1,1,0,0,0,0]^t + i[0,0,0,0,1,1,1,1]^t$$

Para los primeros dos casos se tiene un vector monofásico, y por lo tanto real. En otras palabras para los primeros dos casos se espera MPC=1 y MPD=0. Por otro lado, para el tercer caso se estima el mayor valor posible que puede tener MPD, es decir: MPD=1 y MPC=0. La Tabla 7.6.4 muestra los valores obtenidos, donde en efecto se tienen los valores esperados.

Tabla 7.6.4 – MPC y MPD (casos particulares)

CASO	MPC	MPD
1	1	0
2	1	0
3	0	1

7.7 Criterios débiles de energía

A continuación se estudia el comportamiento de los criterios de energía utilizados: MTN y CMM sobre la estructura modelo descrita en el capítulo 3 (caso SSIDATA).

En primer lugar se compara el valor real asociado a cada parámetro con la normalización con respecto al máximo asociado a cada orden del modelo. Posteriormente, y dado que tanto en [1] (para MTN) como en [13] para CMM se establece que la variación de estos parámetros es menor para modos físicos, se estudia la distancia normalizada entre órdenes del modelo (equivalente a ecuación 2.2.1). Finalmente se expone su aplicación sobre un registro de la estructura en análisis (ver capítulo 4) para evaluar su comportamiento en estructuras reales.

La Figura 7.7.1 y Figura 7.7.2 muestran la MTN y CMM para el caso sin normalizar y normalizado con respecto al máximo asociado a cada orden del modelo. A partir de estos se puede observar que la distinción entre modos físicos se acentúa para el caso normalizado. Además se logra observar que la distribución de energía es similar para ambos parámetros.

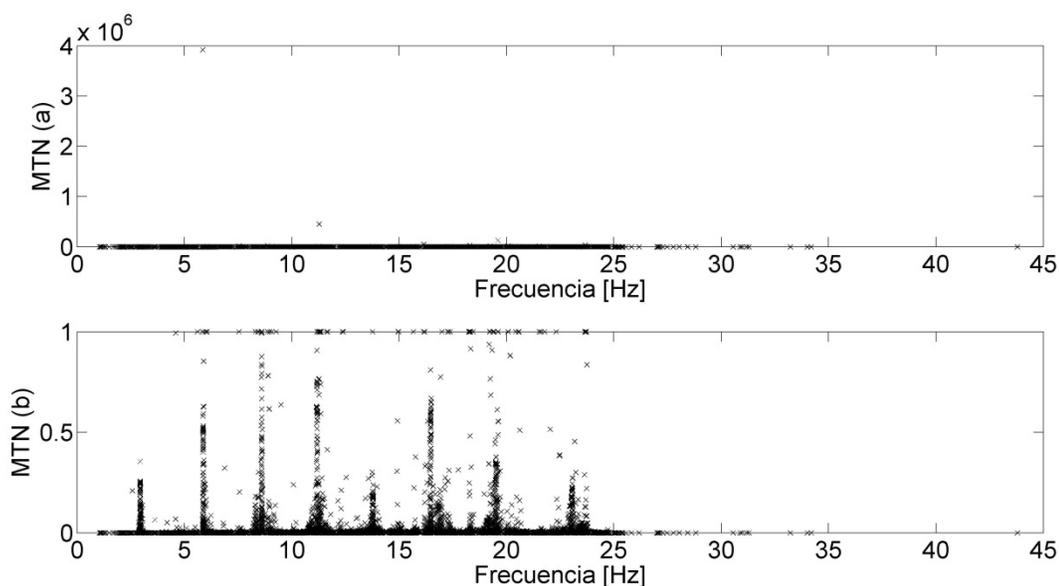


Figura 7.7.1 – Norma de transferencia modal

a) sin normalizar, b) normalizado con respecto al máximo asociado a cada orden del modelo

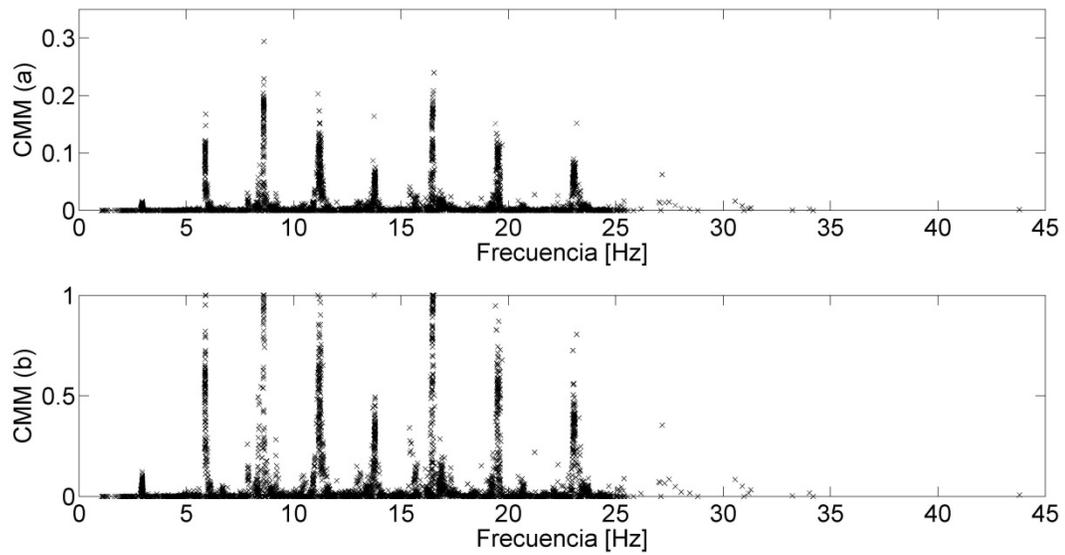


Figura 7.7.2 – Contribución modal a la respuesta medida

a) sin normalizar, b) normalizado con respecto al máximo asociado a cada orden del modelo

En la Figura 7.7.3 y Figura 7.7.4 se muestra la distancia calculada a partir de la MTN y CMM respectivamente. A partir de estas se observa que en ambos casos no se logra distinguir claramente entre modos físicos y espurios, justificando la omisión de estos parámetros. Nótese la presencia de valores límites (iguales a la unidad) para ambos parámetros, esto como consecuencia directa de valores nulos.

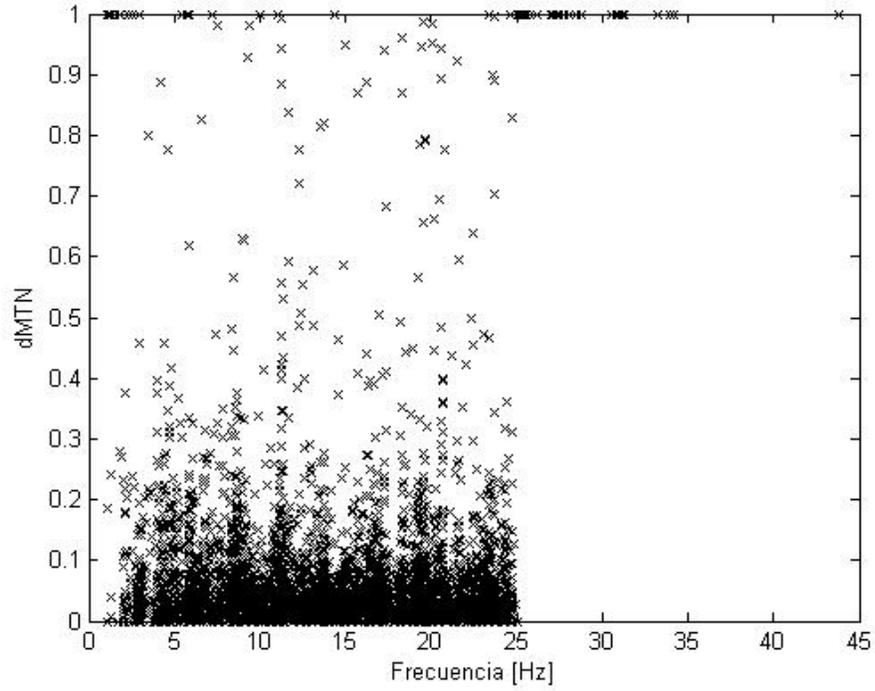


Figura 7.7.3 – Distancia en función de MTN

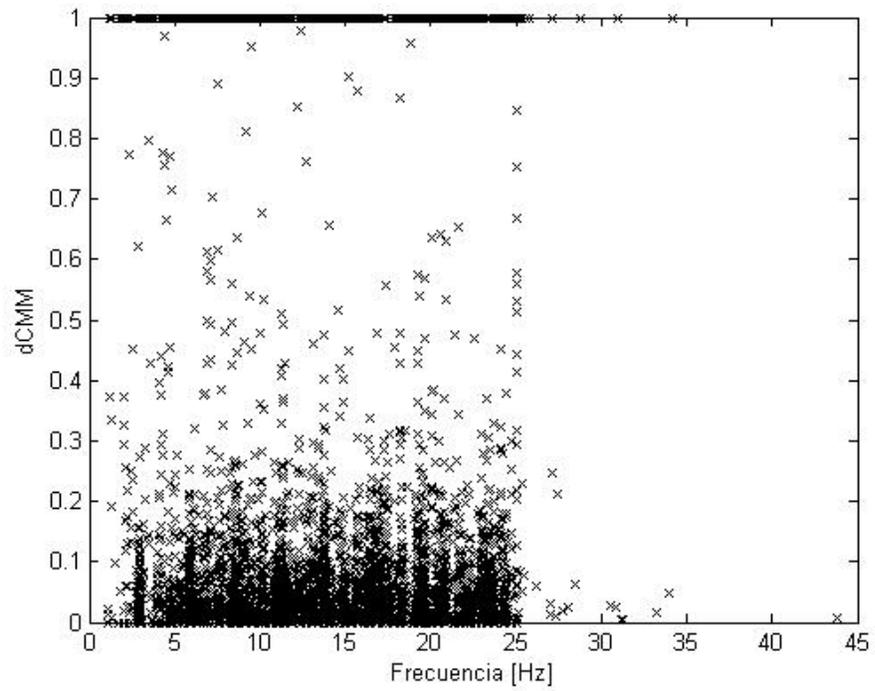


Figura 7.7.4 – Distancia en función de CMM

En la Figura 7.7.5 y Figura 7.7.6 se expone la aplicación de estos criterios, generando la división mediante el método de agrupamiento *k-means* considerando todos los criterios débiles. A partir de esta se destaca la asignación de valores altos a frecuencias bajas, las cuales, a partir de los resultados expuestos en el capítulo 4, se conocen como modos no representativos de la estructura. Esto da cuenta de concentraciones de energía en bajas frecuencias para los registros. Finalmente se observa una distribución poco homogénea de estos criterios asociados a modos representativos de la estructura.

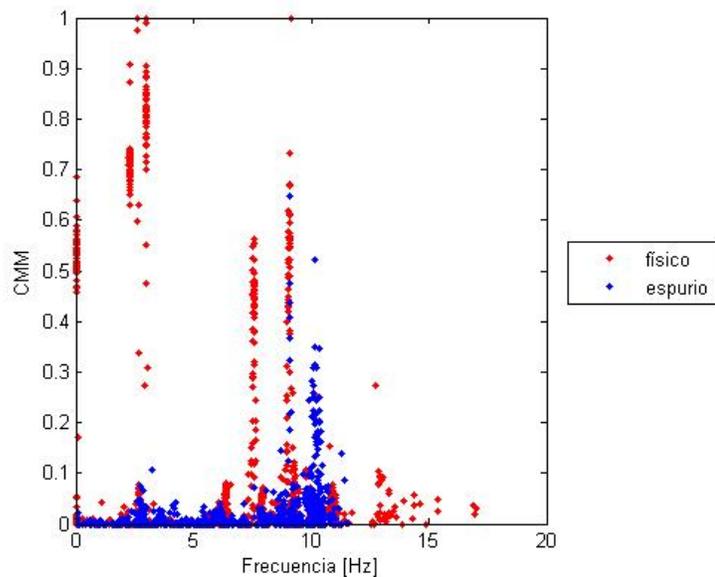


Figura 7.7.5 – CMM (22-09-2009 07:00)

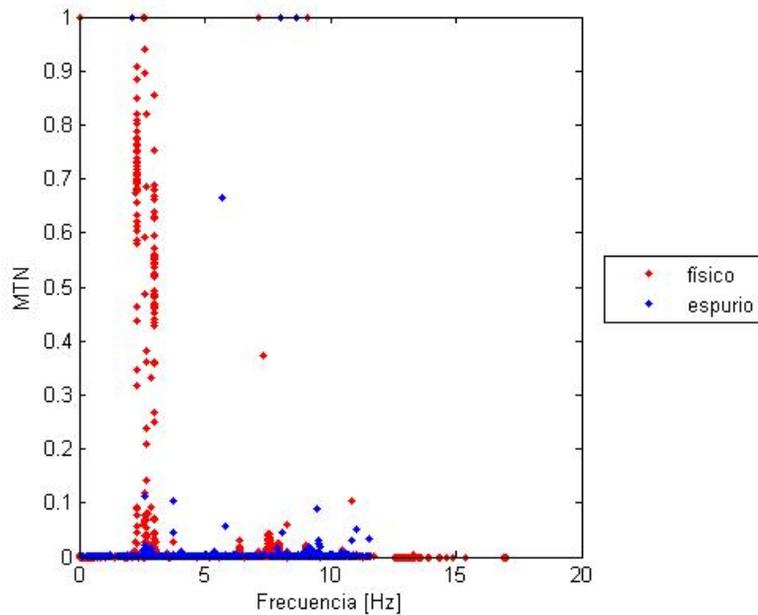


Figura 7.7.6 – MTN (22-09-2009 07:00)

Se destaca el costo computacional asociado a la obtención de estos criterios. Por un lado, para el criterio MTN, supone resolver una ecuación discreta de Lyapunov para Σ (ecuación 2.1.23) para cada orden del modelo, lo cual justifica en parte el tiempo que toma determinar este parámetro. Sin embargo el proceso iterativo de determinar $S_{yy,i}^+$ y su descomposición en valores singulares tienden a aumentar aún más el costo computacional asociado.

Por otro lado, para el criterio CMM, el costo es aún mayor, dado que se requiere estimar para cada orden del modelo el vector de estado modal $\mu_{k|k-1}$ para cada paso de tiempo considerado, lo cual incluye resolver la ecuación DARE (7.2.3). Para disminuir (en parte) este costo, se limita el rango de tiempo considerado a 1000 iteraciones.

Finalmente, tomando en cuenta este costo computacional, y la poca precisión observada de estos parámetros, disminuye la ventaja que presenta el método de identificación SSIDATA por sobre el método SSICOV.