



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

INMERSIONES DE GRAFOS COMPLETOS EN GRAFOS DENSOS Y  
COLOREAMIENTO DE VÉRTICES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL MATEMÁTICA

SYLVIA ALEJANDRA VERGARA SOTO

PROFESORA GUÍA:  
MAYA JAKOBINE STEIN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
IVÁN RAPAPORT ZIMERMANN  
JOSÉ SOTO SAN MARTÍN

SANTIAGO DE CHILE  
2014



# Resumen

En la presente memoria se considera la relación entre coloreamiento de vértices y la noción de inmersión. Específicamente, se estudia una conjetura propuesta por Abu-Khazam y Langston, la cual dice que el grafo completo de tamaño  $t$  está inmerso en todo grafo  $t$ -cromático.

En primer lugar, se ven algunos resultados generales de inmersiones y se prueba que la conjetura se cumple para los grafos cuyo complemento no contiene ciclos inducidos de largo cuatro y también para los grafos tales que todo conjunto de cinco vértices induce un subgrafo con al menos seis aristas. Luego, se da una breve mirada a una nueva relación definida, en un intento de generalizar la relación de inmersión.

Finalmente, se estudia en detalle una clase especial de grafos, aquella de los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres. Se presentan condiciones suficientes para que se cumpla la conjetura de Abu-Khazam y Langston. Luego, se introduce una nueva conjetura, implicada por la conjetura de Abu-Khazam y Langston y se demuestra una versión un tanto más débil que ésta. Se prueba además, que ambas conjeturas son equivalentes. Por último, se exhiben una serie de propiedades que debería cumplir un contraejemplo mínimo, en caso de existir alguno.



*A mis padres, Sylvia e Ignacio.*



# Agradecimientos

Agradezco primero a mi mamá y a mi papá, a quienes debo absolutamente todo. Es gracias a ellos que he tenido grandes oportunidades en la vida, y por eso estaré siempre agradecida. Gracias por el apoyo incondicional, incluso en los momentos más difíciles. También a mi hermana y a mi hermano, por ayudarme siempre que lo necesité y enseñarme a mirar el mundo de manera más simple. Ellos completan la mejor familia.

A mi profesora guía, por su dedicación y compromiso con mi trabajo, y por su infinita paciencia. Aprendí mucho, pero sobre todo, siempre me sentí muy apoyada. También agradezco a los profesores de mi comisión, por amablemente aceptar ser parte de mi memoria y corregirla.

A mis amigas y amigos, por hacer mi vida más brillante y divertida. Mi etapa universitaria no habría sido lo mismo sin ustedes.

A mi familia, por mantenerse presente siempre.

A mis compañeros, por haber vivido esta aventura juntos. A muchos de ellos los considero grandes amigos y estoy segura de que esto no es un adiós.

Y por último, a los profesores que me inspiraron a lo largo de la carrera y a los funcionarios del DIM, quienes facilitaron increíblemente mi vida universitaria.





# Tabla de contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones y algunas observaciones . . . . .	5
1.2. Resultados previos y estado del arte . . . . .	9
1.2.1. Conjetura de Abu-Khizam y Langston . . . . .	9
1.2.2. Problema relacionado . . . . .	11
1.2.3. Otros . . . . .	14
<b>2. Resultados generales</b>	<b>17</b>
2.1. Inmersiones . . . . .	17
2.2. Otra relación . . . . .	20
<b>3. Caso especial: <math>\alpha(G) \leq 2</math></b>	<b>23</b>
3.1. Sub-clases que cumplen la conjetura . . . . .	25
3.2. Equivalencia de las conjeturas . . . . .	32
3.3. Contraejemplo mínimo . . . . .	33
3.3.1. Completo de tamaño máximo . . . . .	36
3.4. Dificultad en la elección de la coloración. . . . .	38
<b>Conclusión</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Índice de figuras

1.1.	Inmersión de $K_4$ en $K_1 + C_4$ . . . . .	6
1.2.	Inmersión no-estricta de $C_5$ en $K_{2,4}$ . . . . .	7
1.3.	Ejemplo de color sin vértices dominantes. . . . .	8
1.4.	Ejemplo de Paul Seymour. . . . .	12
1.5.	El grafo $P_8$ . . . . .	12
1.6.	Ejemplo del grafo $G_8$ . . . . .	13
1.7.	Intercambio de caminos arista-disjuntos. . . . .	15
2.1.	Grafo de Petersen con vértices en las intersecciones de aristas. . . . .	21
3.1.	Representación en $G$ de camino maximal en $G^c$ . . . . .	27
3.2.	Bloques maximales de colores con dos dominantes. . . . .	28
3.3.	Camino para dos vértices corner no-adyacentes en un bloque de $S$ . . . . .	29
3.4.	Camino para dos vértices corner no-adyacentes en bloques distintos. . . . .	29
3.5.	Re-coloreo que genera una clase de color sin vértices dominantes. . . . .	30
3.6.	Re-coloreo que genera una coloración más pequeña del grafo. . . . .	30
3.7.	Asignación de camino entre $y_{i_l}$ e $y_{i_{l+1}}$ . . . . .	31
3.8.	Grafo con contraejemplo de coloración. . . . .	38
3.9.	Grafo $G^c$ correspondiente. . . . .	39



# Introducción

La presente memoria está motivada por dos famosas conjeturas que relacionan el número cromático de un grafo y la presencia de un completo como menor y como menor topológico, las conjeturas de Hadwiger y Hajós, respectivamente.

Un grafo  $G$  contiene a un grafo  $H$  como menor si  $H$  se puede obtener a partir de  $G$ , mediante contracciones de aristas y borrando vértices y/o aristas. Contraer una arista consiste en identificar sus dos vértices, eliminando loops y posibles aristas múltiples resultantes. Por otro lado, un grafo  $H$  es menor topológico de un grafo  $G$  si  $G$  contiene como subgrafo a una subdivisión de  $H$ . Subdividir una arista significa reemplazarla por un camino de largo dos y una subdivisión de  $H$  es un grafo que se obtiene a partir de  $H$ , siguiendo alguna secuencia de subdivisiones de aristas. Es directo notar que si  $H$  es menor topológico de  $G$ , entonces  $G$  contiene a  $H$  como menor, pues la subdivisión de  $H$  se puede contraer para obtener  $H$ .

El coloreamiento de vértices es un tema muy importante en la teoría de grafos. El objetivo usual, y el que es considerado aquí, consiste en colorear todos los vértices de un grafo de manera que vértices adyacentes obtengan colores distintos. Una asignación de colores a los vértices de un grafo  $G$  que cumple dicha restricción es llamada coloración de (los vértices de)  $G$ . El número cromático de  $G$ , denotado  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios que debe tener una coloración de  $G$ . Y una coloración se dice mínima si el número de colores es igual a  $\chi(G)$ . Además, si  $\chi(G) = t$ , entonces se dice que  $G$  es  $t$ -cromático. La relación entre coloración y contener de alguna forma un grafo completo ha sido estudiada intensivamente. Después de todo, si  $K_t$  es subgrafo de  $G$ , entonces los vértices de  $G$  no pueden colorearse con menos de  $t$  colores. Para ver que la presencia de  $K_t$  no es necesaria, basta con considerar el ciclo de tamaño 5, el cual no tiene a  $K_3$  como subgrafo, sin embargo necesita 3 colores.

En algún momento de los años 40 Hajós [23] conjeturó que si un grafo requiere  $t$  colores para colorear sus vértices, entonces aquel grafo contiene a  $K_t$  como menor topológico. Para  $t = 1$  y  $t = 2$  la conjetura es trivialmente cierta. El caso  $t = 3$  tampoco es difícil, notando que si son necesarios tres colores, entonces el grafo debe contener un ciclo de tamaño impar, el cual es una subdivisión de  $K_3$ . En 1952 Dirac [13] probó que la conjetura es cierta para  $t = 4$ . Sin embargo, aquel caso fue la última esperanza para la conjetura de Hajós, pues en 1979 Catlin [6] la refutó, mostrando una familia de contraejemplos para cada  $t \geq 7$ . Más aún, Erdős y Fajtlowicz [14] probaron en 1981 el bastante sorprendente resultado siguiente: casi todos los grafos son contraejemplos. La conjetura de Hajós permanece aún abierta para  $t \in \{5, 6\}$ .

En 1943 Hadwiger [22] sugirió una conjetura un tanto más débil. Él propuso que si el

número cromático de un grafo es al menos  $t$ , entonces el grafo debe contener a  $K_t$  como menor. El hecho de que la conjetura de Hajós sea cierta para  $t \leq 4$  implica directamente que la conjetura de Hadwiger también es cierta para  $t \leq 4$ . Más de veinte años tuvieron que pasar para obtener la veracidad de la conjetura para otros valores de  $t$ . En 1964 Wagner [33] logró demostrar la conjetura para  $t = 5$ , probando que dicho caso es equivalente al Teorema de los Cuatro Colores. Y no fue hasta 1993 que se resolvió el caso  $t = 6$ , y positivamente, gracias a Robertson, Seymour y Thomas [29]. Ellos mostraron que todo contraejemplo minimal de la conjetura de Hadwiger con  $t = 6$  debería consistir en un grafo planar más un vértice adicional. Luego, debiera poder colorearse con 5 colores. Es decir, el caso  $t = 6$  también es implicado por el Teorema de los Cuatro Colores. Un avance importante fue logrado por Bollobás, Catlin y Erdős [4], quienes probaron que la conjetura se cumple para casi todos los grafos. La conjetura de Hadwiger permanece incierta, hasta el día de hoy, para  $t \geq 7$  y es considerada uno de los problemas abiertos más importantes dentro de la teoría de grafos.

En este trabajo estudiamos una noción distinta, la noción de lift de dos aristas adyacentes. Un lift de dos aristas  $uv$  y  $vw$  consiste en borrar  $uv$  y  $vw$ , y agregar  $uw$ . Además, diremos que un grafo  $H$  está inmerso en un grafo  $G$  si  $H$  se puede obtener a partir de  $G$  mediante lifts de aristas adyacentes y eliminación de vértices y aristas. Esta definición es equivalente a la existencia de una función inyectiva  $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ , tal que para cada arista  $uv \in E(H)$  existe un camino  $P_{uv}$  en  $G$  y tal que los caminos son arista-disjuntos de a pares. Claramente, el hecho de contener un grafo como menor topológico implica contenerlo como inmersión. Sin embargo, las relaciones de inmersión y menor no son comparables. Esto último se puede ver en las demostraciones de los Lemas 2.7 y 2.8. La relación de inmersión ha sido comparativamente mucho menos estudiada que las de menor y menor topológico. Aún así, en los últimos años ha despertado un gran interés. Primero, desde un punto de vista netamente algorítmico [5, 15, 16, 17, 25], pero también desde el enfoque estructural [19, 34]. De hecho, Robertson y Seymour extendieron su demostración de la famosa conjetura de Wagner [27] para probar que la relación de inmersión es un buen-cuasi-orden [28]. Cabe destacar además, que si bien no estudió el concepto de inmersión propiamente tal, Mader en los años 70 trabajó con la noción de lift de aristas (ver [3, p.29]).

Siguiendo la línea de Hajós y Hadwiger, Abu-Khzam y Langston [1] conjeturaron lo siguiente.

**Conjetura 1** *Si  $\chi(G) \geq t$ , entonces  $K_t$  está inmerso en  $G$ .*

Es dicha conjetura la que finalmente motivó esta memoria y es la que estudiamos aquí. El trabajo realizado se organiza como sigue. En el primer capítulo se presentan las definiciones necesarias que permitirán la comprensión del trabajo, así como también algunos resultados previos. El segundo capítulo contiene ejemplos de inmersiones y dos resultados sobre clases de grafos en las cuales se cumple la conjetura, los que se exponen a continuación. Diremos que una inmersión es estricta si los caminos  $\{P_{uv} : uv \in E(H)\}$  no utilizan vértices en  $\phi(V(H))$  como vértices internos. Y llamaremos a un grafo  $(k, s)$ -denso si todo conjunto de  $k$  vértices induce un subgrafo con al menos  $s$  aristas.

**Teorema 2.4** *Todo grafo  $G$   $(5,6)$ -denso contiene una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$ .*

**Teorema 2.5** *Todo grafo  $G$  cuyo complemento no contiene un ciclo inducido de largo cuatro, contiene una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$ .*

Ambos teoremas se pueden encontrar en la Sección 2.1. Luego, la Sección 2.2 contiene una breve mirada a una nueva relación definida, en un intento de generalizar las relaciones de inmersión y de menor.

Finalmente, el último capítulo está dedicado a un estudio detallado de una clase especial de grafos, aquella de los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres. Esta clase de grafos podría hacer más abordable el estudio de la conjetura de Abu-Khizam y Langston, puesto que se trata de grafos muy densos. Y dado que cuando buscamos inmersiones, estamos buscando caminos arista-disjuntos, los grafos con muchas aristas pueden ser un buen lugar para desarrollar nuevas técnicas de demostración. Se estudia la conjetura de Abu-Khizam y Langston restringida a los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres. Denotamos  $\alpha(G)$  al tamaño del conjunto independiente más grande de  $G$ .

**Conjetura 2** *Todo grafo  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ , contiene una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ .*

Se ve además, que al restringirse a estos grafos, la conjetura de Abu-Khizam y Langston implica una tercera conjetura. Usualmente, cuando no haya confusión, escribiremos  $n$  para referirnos al número de vértices de un grafo.

**Conjetura 3** *Todo grafo  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ , contiene una inmersión de  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .*

Chudnovsky [7] demostró que si  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces  $G$  contiene como menor a  $K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ , lo cual originó que nos preguntáramos si se cumplía el resultado análogo para inmersiones. En el teorema enunciado a continuación mostramos que esto efectivamente es cierto. Cabe destacar que nuestro argumento es totalmente distinto a aquél utilizado en [7].

**Teorema 3.1** *Si  $G$  es un grafo con  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces  $G$  contiene una inmersión estricta de  $K_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ .*

Luego, en la Sección 3.1, se ven resultados que muestran cómo relajar la hipótesis de que no hayan ciclos inducidos de largo cuatro en el complemento, para encontrar una inmersión de  $K_{\chi(G)}$  en  $G$ . Se muestra que restringiéndose a los grafos sin conjuntos independientes de tamaño tres, es suficiente pedir que si hay ciclos inducidos de largo cuatro en el complemento del grafo, entonces que sean arista-disjuntos. O bien que puedan compartir alguna arista, mientras mantengan cierta estructura. También se demuestra que al prohibir caminos inducidos de largo tres, igualmente podemos encontrar una inmersión de  $K_{\chi(G)}$  en el grafo.

En la Sección 3.2 se demuestra el siguiente resultado.

**Teorema 3.9** *Las Conjeturas 2 y 3 son equivalentes.*

Adicionalmente, en la Sección 3.3 se exponen una serie de propiedades que debiera cumplir un contraejemplo mínimo, en el caso de existir alguno. Y por último, se verá durante la memoria, que en casi todas las demostraciones, las inmersiones encontradas están estrechamente

ligadas a la coloración del grafo. En la Sección 3.4 se exhibe un ejemplo cuya coloración no permite encontrar una inmersión de  $K_{\chi(G)}$  de la manera usual.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Definiciones y algunas observaciones

Comenzamos esta sección con un poco de notación. Aquí, todos los grafos son finitos, no-dirigidos, sin loops y sin aristas múltiples, al menos que explícitamente se exprese lo contrario. Denotamos, para un grafo  $G$ ,  $V(G)$  a su conjunto de vértices y  $E(G)$  a sus aristas. Para un vértice  $v$ ,  $N(v)$  corresponde al conjunto de vecinos de  $v$  y  $d(v)$  a su grado. Si  $d(v) = r$  para todo vértice  $v$  de  $G$ , entonces decimos que  $G$  es  $r$ -regular. Denotamos por  $\delta(G)$  al grado mínimo encontrado entre los vértices de  $G$  y  $\Delta(G)$  al grado máximo. Llamamos largo de un camino  $P$  al número de aristas de  $P$ . Y para dos vértices  $u$  y  $v$ , denotamos por  $d(u, v)$  a la distancia entre  $u$  y  $v$ , es decir, al largo del camino más corto que los une.

Nos referimos como  $\omega(G)$  al tamaño máximo entre los conjuntos de vértices que inducen grafos completos en  $G$ . Para un subconjunto de vértices  $U$ , denotamos por  $G[U]$  al subgrafo inducido por  $U$  y por  $G - U$  al grafo  $G[V(G) \setminus U]$ . Para un subconjunto de aristas  $F$ , denotaremos  $G - F$  al grafo  $(V(G), E(G) \setminus F)$ . Usualmente utilizaremos la notación  $G - s$  para referirnos a  $G - \{s\}$ , donde  $s$  puede ser un vértice o bien una arista. Para un grafo  $H$ , denotamos  $H \subseteq G$  si  $H$  es subgrafo de  $G$  y  $H \sqsubseteq G$  si es subgrafo inducido. Y llamamos  $\overline{G}$  al grafo complemento de  $G$ , es decir,  $\overline{G} = \left( V(G), \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) \right)$ .

Llamaremos arista-coloración de  $G$  a una asignación de colores a las aristas de  $G$  de manera que aristas adyacentes reciban colores distintos. Y el índice cromático de  $G$ , denotado  $\chi'(G)$ , es el mínimo número de colores necesarios que debe tener una arista-coloración de  $G$ .

A continuación se presentan las nociones más importantes que serán utilizadas a lo largo del trabajo.

**Definición 1.1** *Un lift de dos aristas adyacentes  $uv$  y  $vw$ , con  $uw \notin E(G)$ , consiste en borrar  $uv$  y  $vw$ , y agregar la arista  $uw$ .*

**Definición 1.2** *Un grafo  $H$  está inmerso en un grafo  $G$  si  $H$  se puede obtener a partir de  $G$  realizando lifts de aristas y borrando vértices y/o aristas. Lo denotamos  $H \preceq_i G$ . También*

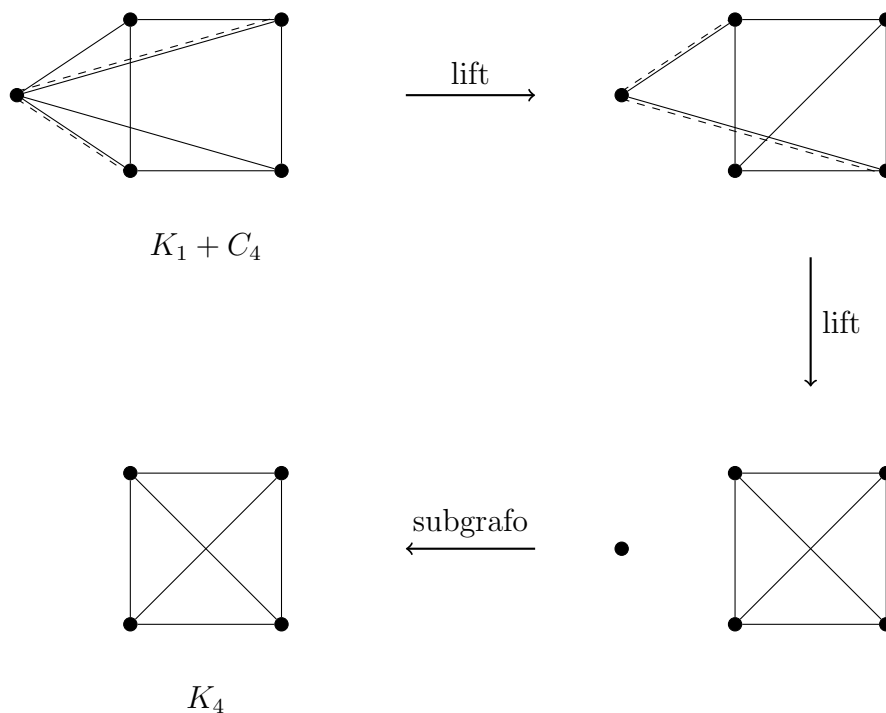


Figura 1.1: Inmersión de  $K_4$  en  $K_1 + C_4$ .

diremos que  $G$  contiene una inmersión de  $H$ .

La Figura 1.1 ilustra la noción de inmersión, mostrando que  $K_4$  está inmerso en  $K_1 + C_4$ , donde  $H + G$  se construye con una copia de  $H$ , una copia de  $G$  y haciendo adyacente a todo vértice de  $H$  con todo vértice de  $G$ .

Si bien la definición tradicional de inmersión es mediante lifts de aristas, una definición equivalente que resultará muy conveniente utilizar es la siguiente.

**Definición 1.3** Un grafo  $H$  está inmerso en un grafo  $G$  si existe una función  $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$  inyectiva, tal que:

1. Para cada  $uv \in E(H)$  existe un camino en  $G$ , que denotamos  $P_{uv}$ , el cual une  $\phi(u)$  y  $\phi(v)$ .
2. Los caminos  $\{P_{uv} : uv \in E(H)\}$  son arista-disjuntos de a pares.

Diremos que la inmersión es estricta si el conjunto de vértices internos de los caminos  $\{P_{uv} : uv \in E(H)\}$  es disjunto de  $\phi(V(H))$ .

Y llamaremos vértices corner a aquellos vértices en  $\phi(V(H))$ .

Notemos que el ejemplo de la Figura 1.1 corresponde a una inmersión estricta. Un ejemplo de inmersión no-estricta se ilustra en la Figura 1.2, donde se muestra que  $C_5$  está inmerso en  $K_{2,4}$ . La inmersión no es estricta, puesto que algunos de los vértices corner son utilizados como vértices internos de algún camino entre otros dos vértices corner.

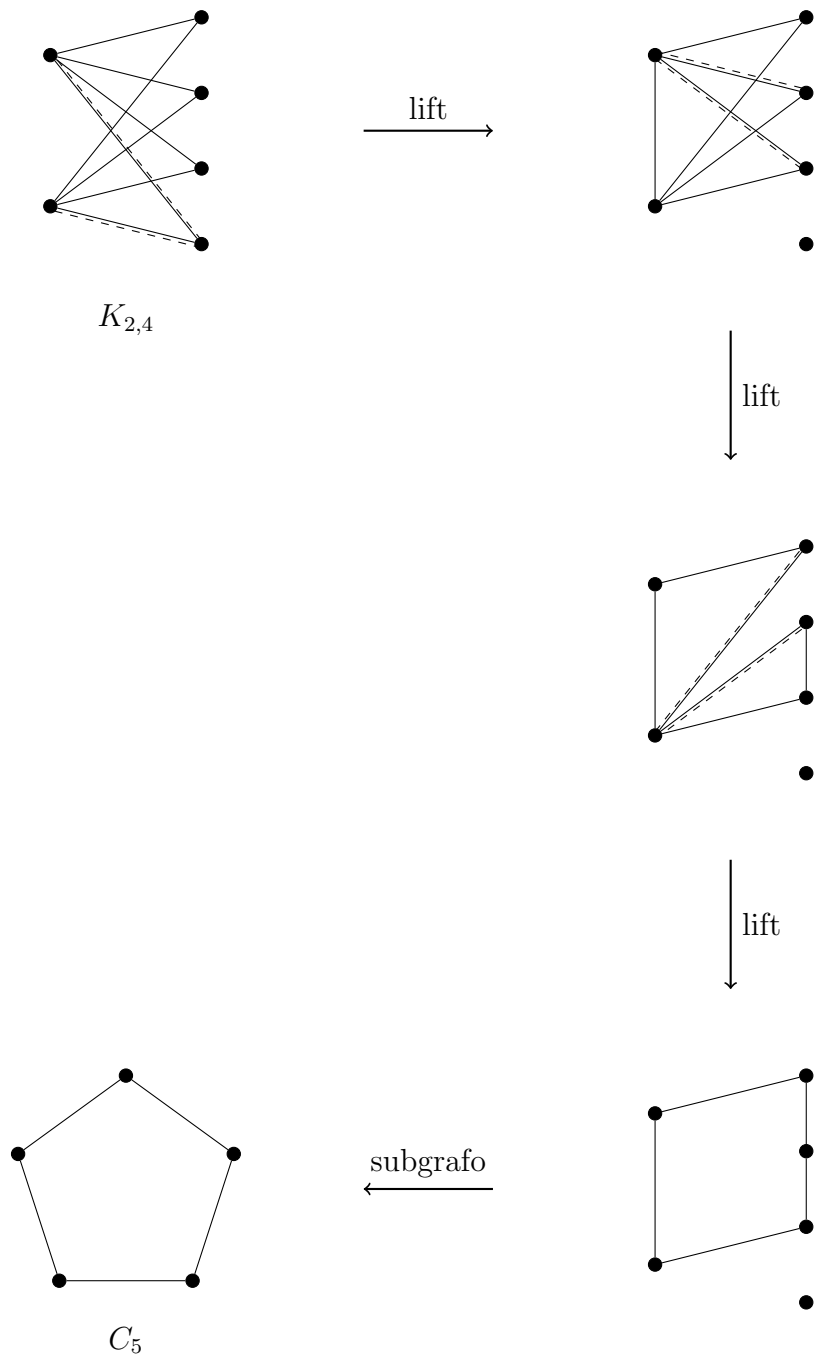


Figura 1.2: Inmersión no-estricta de  $C_5$  en  $K_{2,4}$ .

De la definición se deduce que si  $H$  está inmerso en  $G$ , entonces el grado de cualquier vértice  $v$  de  $H$  es menor o igual al grado de  $\phi(v)$  en  $G$ , por lo que para que un grafo contenga a  $K_t$  como inmersión, una condición necesaria es que tenga al menos  $t$  vértices de grado mayor o igual a  $t - 1$ . Además, es directo notar que la relación de menor topológico implica, en realidad, la relación de inmersión estricta.

**Definición 1.4** Diremos que un grafo  $H$  está propiamente inmerso en un grafo  $G$ , si  $H \preceq_i G$  y  $H \neq G$ .

**Definición 1.5** Dada una coloración  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , denotaremos  $c_i = \{u \in V(G) : c(u) = i\}$  y por  $c_{ij}$  al subgrafo inducido por el conjunto de vértices  $\{u \in V(G) : c(u) \in \{i, j\}\}$ .

Llamaremos cadena a un camino en  $c_{ij}$ , y para cada  $u \in V(c_{ij})$ , denotaremos por  $c_{ij}(u)$  a la componente conexa de  $c_{ij}$  que contiene a  $u$ .

**Observación** Si  $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ , entonces  $c_{ij}$  y  $c_{kl}$  son grafos arista-disjuntos.

La observación anterior resulta de particular importancia para encontrar inmersiones en grafos, considerando la segunda definición de inmersión. Es por esta razón que el uso de cadenas será de gran utilidad.

**Definición 1.6** Diremos que un grafo  $G$  es  $t$ -crítico si  $\chi(G) = t$  y  $\chi(H) < t$  para todo  $H$  subgrafo propio de  $G$ .

**Definición 1.7** Diremos que  $G$  es  $t$ -inmersión-crítico si  $\chi(G) = t$  y  $\chi(H) < t$  para todo  $H$  propiamente inmerso en  $G$ .

**Definición 1.8** Sea  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una coloración de los vértices de  $G$  y sea  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Diremos que  $u \in V(G)$  es un vértice dominante para el color  $i$ , si  $c(u) = i$  y si para todo color  $j \neq i$ , existe un vértice  $v$  tal que  $c(v) = j$  y  $uv \in E(G)$ .

**Observación** Si  $c$  es una coloración mínima de  $G$ , entonces todo  $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$  tiene un vértice dominante. En efecto, si  $i$  es tal que para cada  $u \in c_i$ , existe  $j_u \neq i$ , tal que para todo  $v \in c_{j_u}$ ,  $uv \notin E(G)$ , entonces podemos asignar el color  $j_u$  a cada  $u$ , eliminando así el color  $i$  y obtener una coloración más pequeña. Esto se ilustra en la Figura 1.3.

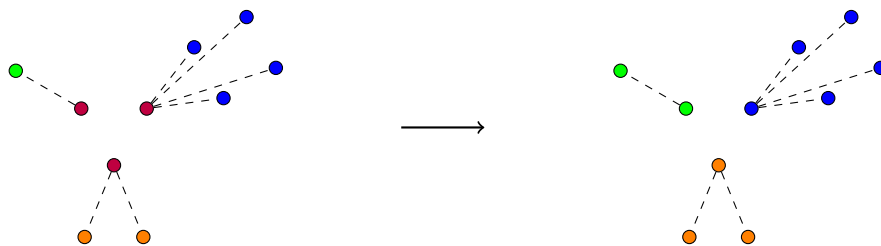


Figura 1.3: Ejemplo de color sin vértices dominantes. Los vértices unidos mediante líneas discontinuas representan vértices que no son adyacentes. Se ilustra cómo eliminar un color y obtener una coloración más pequeña.

## 1.2. Resultados previos y estado del arte

### 1.2.1. Conjetura de Abu-Khizam y Langston

Siguiendo la línea de las conjeturas de Hadwiger y Hajós, Abu-Khizam y Langston conjeturaron en [1]:

**Conjetura 1** *Si  $\chi(G) \geq t$ , entonces  $K_t$  está inmerso en  $G$ .*

Puesto que la conjetura de Hajós vale para  $t \leq 4$ , la conjetura de Abu-Khizam y Langston es cierta para  $t \leq 4$ , ya que la relación de menor topológico es sólo un caso particular de inmersión.

Dentro de la evidencia que Abu-Khizam y Langston mostraron para apoyar la conjetura, están los siguientes resultados ( $t \geq 5$ ).

**Teorema 1.9** ([1]) *Para cada  $t$  fijo, el número de grafos  $t$ -inmersión-críticos es finito.*

Dado que  $\chi(K_t) = t$ , todo grafo  $t$ -inmersión-crítico distinto de  $K_t$  será un contraejemplo para la Conjetura 1. Además, cualquier contraejemplo debe o bien ser  $t$ -inmersión-crítico, o bien tener propiamente inmerso otro contraejemplo  $t$ -inmersión-crítico. En cierto sentido, los grafos  $t$ -inmersión-críticos distintos de  $K_t$  son contraejemplos minimales para cada  $t$ . Así, la conjetura de Abu-Khizam y Langston es equivalente a que  $K_t$  sea el único grafo  $t$ -inmersión-crítico para cada  $t$ , por lo que el resultado anterior efectivamente apoya la conjetura.

El grafo  $K_t$  es  $(t - 1)$ -conexo y  $(t - 1)$ -arista-conexo. Luego, si algún grafo  $t$ -inmersión-crítico no tuviera tal conexidad, entonces la Conjetura 1 no sería cierta.

**Teorema 1.10** ([1]) *Todo grafo  $t$ -inmersión-crítico es 4-conexo.*

**Teorema 1.11** ([1]) *Todo grafo  $t$ -inmersión-crítico distinto de  $K_t$  es  $t$ -arista-conexo.*

**Corolario 1.12** ([1]) *Si  $G$  es  $t$ -inmersión-crítico y distinto de  $K_t$ , entonces  $\delta(G) \geq t$ .*

Los resultados anteriores restringen el conjunto de contraejemplos minimales, razón por la cual representan evidencia que respalda la conjetura.

Cada grafo  $G$  con  $\chi(G) = t$  debe contener un subgrafo (posiblemente el mismo  $G$ )  $t$ -crítico. Además, es fácil ver que todo grafo  $t$ -crítico debe tener grado mínimo al menos  $t - 1$ . En efecto, en caso contrario, basta con remover el vértice de grado menor o igual a  $t - 2$ , colorear los vértices restantes con  $t - 1$  colores y luego asignar al vértice removido alguno de los  $t - 1$  colores no utilizado entre sus vecinos. Así, el grafo puede ser coloreado en su totalidad con  $t - 1$  colores, contradiciendo el hecho de que sea  $t$ -cromático.

DeVos, Kawarabayashi, Mohar y Okamura [11], utilizando esto último, resolvieron la conjetura de Abu-Khizam y Langston para valores de  $t$  pequeños. Su resultado es el siguiente

teorema, el cual prueba la conjetura para  $t \leq 7$ . Es importante notar que este teorema no se puede generalizar para valores de  $t$  más grandes. Esto último se discutirá más adelante, en la Subsección 1.2.2.

**Teorema 1.13** ([11]) *Sea  $f(k)$  el número entero más pequeño tal que todo grafo de grado mínimo al menos  $f(k)$  contiene una inmersión de  $K_k$ . Entonces  $f(k) = k - 1$  para  $k \in \{5, 6, 7\}$ .*

De hecho, dado que la demostración se basa en un proceso inductivo, probaron una afirmación un tanto más fuerte. El siguiente teorema considera multigrafos, los cuales pueden tener más de una arista entre dos vértices. Cuando esto ocurre, se denomina clase paralela propia al conjunto de aristas entre el mismo par de vértices. La relación de inmersión se extiende naturalmente a multigrafos, utilizando la Definición 1.3.

**Teorema 1.14** ([11]) *Sea  $d \in \{4, 5, 6\}$ , sea  $G = (V, E)$  un multigrafo sin loops y sea  $u \in V$ . Asumamos además que  $G$  satisface las siguientes propiedades:*

- $|V| \geq d$ .
- $d(v) \geq d$  para todo  $v \in V \setminus \{u\}$ .
- Hay a lo más  $d - 2$  clases paralelas propias, y cada arista en tal clase paralela es incidente a  $u$ .

*Entonces hay una inmersión de  $K_{d+1}$  en  $G$ .*

Así, el Teorema 1.13 se concluye, notando que cualquier grafo con grado mínimo al menos  $d$  cumple las hipótesis, considerando cualquiera de sus vértices como  $u$ .

**Corolario 1.15** ([11]) *La conjetura de Abu-Khizam y Langston es cierta para  $t \leq 7$ .*

Collins y Heenehan demostraron en [9] que existe una clase infinita de grafos que satisface la conjetura de Abu-Khizam y Langston. Ellas utilizaron la construcción de Hajós [23]: El siguiente conjunto de operaciones produce grafos que no son  $t$ -coloreables a partir de grafos que no son  $t$ -coloreables.

- (♠) Agregar aristas y/o vértices al grafo.
- (◇) Identificar dos vértices no-adyacentes y borrar las posibles aristas múltiples resultantes.
- (♣) Para dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  y  $x_i y_i \in E(G_i)$ , borrar  $x_1 y_1$  y  $x_2 y_2$ , agregar la arista  $y_1 y_2$  e identificar los vértices  $x_1$  y  $x_2$ .

De hecho, cada grafo que no se puede colorear con  $t$  colores, se puede construir a partir de  $K_{t+1}$  y mediante alguna secuencia de estas operaciones.

**Lema 1.16** ([9]) *Las inmersiones de  $K_t$  se preservan al aplicar las operaciones (♠) y (♣). En el caso de (♣), esto quiere decir que si tanto  $G_1$  como  $G_2$  contienen una inmersión de  $K_t$ ,*

entonces el nuevo grafo que resulta de aplicar  $(\clubsuit)$  a  $G_1$  y  $G_2$  también contiene una inmersión de  $K_t$ .

Tenemos entonces que la clase de grafos obtenidos a partir de  $K_{t+1}$  y aplicándoles las operaciones  $(\spadesuit)$  y  $(\clubsuit)$  cumplen la conjetura de Abu-Khizam y Langston, la cual, para cada  $t$ , es una clase infinita de grafos.

## 1.2.2. Problema relacionado

Como todo grafo  $t$ -cromático contiene un subgrafo de grado mínimo al menos  $t - 1$ , el siguiente problema se relaciona directamente con la conjetura de Abu-Khizam y Langston.

**Problema** Sea  $t$  un número entero positivo. ¿Cuál es el número entero  $f(t)$  más pequeño, tal que todo grafo de grado mínimo al menos  $f(t)$  contiene una inmersión de  $K_t$ ?

Dado que en cualquier inmersión de  $K_t$ , los vértices corner deben tener grado al menos  $t - 1$ , es fácil ver que  $f(t) \geq t - 1$ . En efecto, basta con considerar el grafo  $K_{t-1}$ , el cual tiene grado mínimo  $t - 2 < t - 1$ , pero no contiene a  $K_t$  como inmersión, puesto que no tiene vértices de grado  $t - 1$ . Además, gracias al Teorema 1.13, sabemos que  $f(t) = t - 1$  para  $t \leq 7$ . Y si  $f(t)$  fuera igual a  $t - 1$  para todo  $t$ , entonces la Conjetura 1 sería cierta.

Un ejemplo de Paul Seymour (ver [11]) muestra que  $f(t) \geq t$  para  $t = 10$ . El ejemplo consiste en comenzar con el grafo  $K_{12}$  y remover las aristas de cuatro triángulos disjuntos. Este grafo tiene grado mínimo 9, pero no es difícil notar que no contiene a  $K_{10}$  como inmersión. En efecto, si tuviera una inmersión de  $K_{10}$ , dado que el grafo es 9-regular, cualquier vértice que sea corner debería utilizar todas sus aristas incidentes para sus caminos hacia los otros vértices corner. Es decir que los vértices corner que son adyacentes utilizarían la arista que los une como su camino en la inmersión. Esto último se justifica de manera más formal, gracias al Lema 1.24, que se verá más adelante en la Subsección 1.2.3. Además, dado que son 10 vértices corner, quedarían solamente dos vértices para utilizar como vértices internos de los caminos en la inmersión. Y necesariamente, uno de los triángulos a los cuales se le removieron las aristas, debería contener tres vértices corner. Luego, existiría un par de aquellos vértices que no podría ser conectado mediante algún camino, manteniendo la condición de que sean arista-disjuntos. Esto se entiende mejor en la Figura 1.4. Cabe destacar que el número cromático del grafo es cuatro y que contiene a  $K_4$  como subgrafo, por lo que no corresponde a un contraejemplo para la conjetura de Abu-Khizam y Langston.

El siguiente teorema generaliza el ejemplo de Seymour.

**Teorema 1.17** ([10]) *Supongamos que  $H_1, \dots, H_s$  son grafos  $D$ -regulares, cada uno con índice cromático  $D + 1$ , donde  $s > \frac{1}{2}D(D + 1)$ . Sea  $G$  el complemento del grafo que se forma al tomar la unión disjunta de  $H_1, \dots, H_s$ . Si denotamos  $n$  al número de vértices de  $G$ , entonces el grado mínimo de  $G$  es  $n - 1 - D$ , sin embargo  $G$  no contiene una inmersión del grafo completo de  $n - D$  vértices.*



Figura 1.4: Ejemplo de Paul Seymour. Los vértices negros corresponden a vértices corner. Se muestran los dos casos posibles, salvo simetrías. Es claro que en cualquier triángulo con 3 vértices corner, siempre existirá un par que no podrá ser conectado.

El teorema anterior entrega ejemplos de grafos que tienen grado mínimo  $t - 1$ , pero que no contienen una inmersión de  $K_t$ , para  $t = 10$  y  $t \geq 12$ . En efecto, basta considerar  $D = 2$ ,  $s = 4$  si  $t$  es par y  $s = 5$  si  $t$  es impar, y cada  $H_i$  algún ciclo de largo impar. Para  $t = 10$ , tomando cada  $H_i$  como un ciclo de largo tres, se recupera el ejemplo de Seymour. Así, tenemos que  $f(t) \geq t$ , para  $t = 10$  y  $t \geq 12$ .

Para  $t = 11$ , sin embargo, no es posible construir un ejemplo de grafo con grado mínimo  $t - 1$  y sin inmersión de  $K_t$ , del tipo descrito en el Teorema 1.17. Otra desventaja de este teorema es que entrega un número finito de ejemplos para cada  $t$  fijo. Ambos resultados fueron demostrados en [9]. Adicionalmente, las autoras de [9] fueron capaces de probar que  $f(t) \geq t$  para  $t \geq 8$ . Sus ejemplos consisten en familias infinitas de grafos con grado mínimo  $t - 1$  y sin inmersión de  $K_t$ , para cada  $t$ . La descripción general de sus ejemplos es como sigue.

**Definición 1.18** Para cada  $d \geq 8$  construimos  $P_d$  de la manera siguiente. Comenzamos con  $K_{d+1}$ . Removemos las aristas de tres caminos disjuntos de largo 2. Removemos un matching máximo entre los vértices que no están en estos caminos.

En la Figura 1.5 se ilustra el grafo  $P_d$ , para  $d = 8$ .

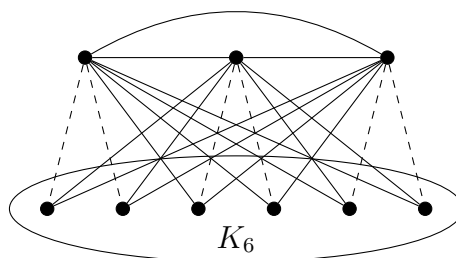


Figura 1.5: El grafo  $P_8$ . Las líneas discontinuas representan aristas removidas.

**Definición 1.19** Para cada  $d \geq 8$ , construimos el grafo  $G_d$  de la manera siguiente. Comenzamos con  $K_{d-3}$ , y luego añadimos suficientes copias de  $P_d$  de manera que, agregando una arista desde cada vértice de grado  $d - 2$  de  $P_d$  hacia algún vértice de  $K_{d-3}$ , los vértices de



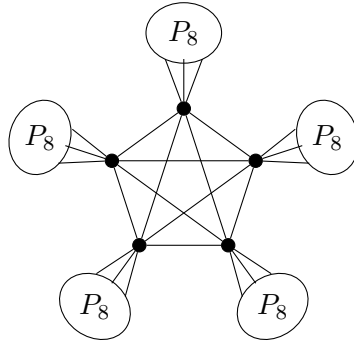


Figura 1.6: Ejemplo del grafo  $G_8$ .

$K_{d-3}$  tengan grado al menos  $d - 1$ .

En la Figura 1.6 se presenta un posible ejemplo del grafo  $G_d$  para  $d = 8$ . Notemos que en este caso, los vértices de grado  $d - 2 = 6$  de cada  $P_8$  se han hecho adyacentes a un mismo vértice de  $K_5$ , lo que resulta en un grafo 1-conexo. Si los vértices de grado 6 de los grafos  $P_8$  se hicieran adyacentes a distintos vértices de  $K_5$ , entonces se podría obtener un grafo 2 o 3-conexo.

**Teorema 1.20** ([9]) *El grafo  $G_d$  tiene grado mínimo  $d - 1$ , pero no contiene inmersión alguna de  $K_d$ , para cada  $d \geq 8$ .*

Cabe notar que para  $d \in \{8, 9\}$ ,  $\chi(G_d) = d - 2$  y  $G_d$  contiene como subgrafo a  $K_{d-2}$ . Para  $d \geq 10$ ,  $\chi(G_d) = d - 3$  y  $G_d$  contiene como subgrafo a  $K_{d-3}$  y como inmersión a  $K_{d-1}$ . Por lo tanto,  $G_d$  no es un contraejemplo para la conjetura de Abu-Khazam y Langston. Además, dada la definición de  $G_d$ , se puede construir un grafo 1, 2 o 3-conexo. Sin embargo, todos los ejemplos resultan ser grafos 3-arista-conexos. El hecho de que se puedan agregar más copias de  $P_d$  al grafo, manteniendo las condiciones de la Definición 1.19, implica que el ejemplo es en realidad una familia infinita de grafos.

La idea de la demostración de que  $G_d$  no contiene a  $K_d$  como inmersión, se basa en el siguiente resultado. Éste implica que todos los vértices corner deberían estar o bien en algún  $P_d$ , o bien en el subgrafo  $K_{d-3}$ , con lo que se llega a una contradicción.

**Lema 1.21** ([9]) *Sea  $G$  un grafo y  $M$  un subgrafo tal que existe un corte de aristas  $C$  en  $G$ ,  $|C| \leq d - 2$ , y  $M$  es una componente conexas de  $G - C$ . Si  $G$  tiene una inmersión de  $K_d$ , entonces todos los vértices corner están en  $V(M)$  o bien todos los vértices corner están en  $V(G - M)$ .*

Se obtuvieron también otro tipo de ejemplos, reemplazando el subgrafo  $K_{d-3}$  por otro tipo de estructura, a saber, varias copias de  $K_{d-2}$  dispuestas en círculo, con un número limitado de aristas entre copias adyacentes. Estos ejemplos resultaron tener número cromático  $d - 2$ , para cada  $d \geq 8$ , y de igual manera constituyen una familia infinita de grafos.

El hecho de que en  $P_d$  hayan tres vértices de grado  $d - 2$  (aquellos que son vértices internos de los caminos a los cuales se les removieron las aristas), implica que el grafo resultante es

3-arista-conexo, puesto que hay exactamente tres aristas desde cada  $P_d$  hacia el resto del grafo. Las autoras de [9] fueron capaces de encontrar ejemplos hasta  $(d - 2)$ -arista-conexos, modificando los grafos  $P_d$ , de manera que tuvieran  $k$  vértices de grado  $d - 2$ , con  $7 \leq k \leq d - 2$ . El número cromático de aquellos ejemplos es también  $d - 2$  y corresponden igualmente a una familia infinita de grafos.

Es importante notar que los ejemplos construidos en [9] tienen número cromático  $d - 3$  o  $d - 2$ , lo que evidencia la necesidad de una cota inferior en el número cromático para asegurar una inmersión de  $K_d$ . En efecto, sus ejemplos muestran que un número cromático igual a  $d - 2$  no es lo suficientemente grande para garantizar una inmersión de  $K_d$ .

Para resumir entonces, tenemos que,

$$f(t) = t - 1, \text{ para } t \leq 7$$

$$f(t) \geq t, \text{ para } t \geq 8.$$

Con respecto a alguna cota superior para  $f$ , lo mejor que se conoce hasta ahora es gracias a DeVos et al., cuyo resultado prueba que  $f(t) \leq 200t$  para todo  $t$ .

**Teorema 1.22** ([10]) *Todo grafo con grado mínimo al menos  $200t$  contiene una inmersión estricta de  $K_t$ .*

La demostración utiliza el siguiente resultado.

**Lema 1.23** ([10]) *Sea  $G$  un grafo de grado mínimo  $4k$ . Entonces  $G$  contiene un subgrafo Euleriano de grado mínimo al menos  $2k$ .*

Así, gracias al Lema 1.23, se puede considerar un grafo Euleriano de grado mínimo al menos  $100t$ . La idea general de la demostración consiste en tomar un vértice  $u$  y realizar lifts de todas sus aristas incidentes, para luego borrarlo. Como el grado de  $u$  debe ser par, esta operación es realizable. Si el complemento de la vecindad de  $u$  tiene un matching perfecto, entonces los lifts se pueden realizar de manera que el resultado sea aún un grafo y con grado mínimo al menos  $100t$ . Sin embargo, si ésto no es así, cualquier secuencia de lifts de todas las aristas de  $u$  genera aristas múltiples. Se prueba que casi todas las aristas múltiples se pueden mantener en un conjunto  $A$  pequeño de vértices, totalmente conectado a otro conjunto  $B$ , relativamente grande. Haciendo ésto, o bien se encuentra una inmersión de  $K_t$ , o bien algún parámetro “mejora” (en un sentido más bien técnico), donde los parámetros son los tamaños de  $A$  y  $B$ , y la densidad de aristas de  $B$ .

### 1.2.3. Otros

**Lema 1.24** ([10]) *Supongamos que  $G$  contiene una inmersión de  $K_t$  con conjunto de vértices corner  $J$ . Entonces  $G$  contiene una inmersión de  $K_t$  con conjunto de vértices corner  $J$ , en la cual las aristas entre vértices adyacentes en  $J$  se usan como los caminos entre aquellos vértices.*

La idea de la demostración es simple. Basta con notar que cada vez que  $P_{uv}$  sea distinto de  $uv$  para dos vértices corner adyacentes  $u, v$ , y la arista  $uv$  sea utilizada en otro  $P_{wx}$ , se puede intercambiar  $P_{uv}$  con  $uv$ , y mantener los caminos arista-disjuntos. Esto último se ilustra en la Figura 1.7.

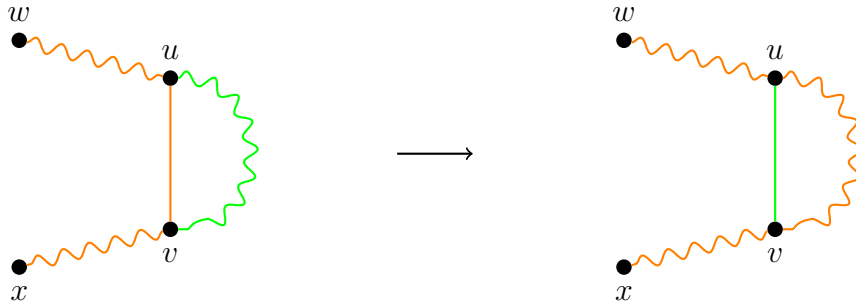


Figura 1.7: Intercambio de caminos arista-disjuntos. Se muestra el caso en que  $P_{uv} \neq uv$ ,  $P_{wx}$  utiliza la arista  $uv$  y la forma en que se realiza el intercambio.

Así, siempre que estemos buscando inmersiones de grafos completos, si dos vértices corner son adyacentes, entonces asumiremos que la arista que los une es el camino en la inmersión, al menos que explícitamente se diga lo contrario.



# Capítulo 2

## Resultados generales

### 2.1. Inmersiones

En esta sección presentamos algunos ejemplos de inmersiones de grafos completos, así como también dos clases de grafos en las cuales se cumple la conjetura de Abu-Khizam y Langston.

Veamos primero, que en un grafo multipartito completo podemos encontrar la inmersión de un grafo completo de tamaño relativamente grande.

**Teorema 2.1** *Sea  $G$  un grafo multipartito completo de  $k$  clases con  $s$  vértices cada una. Entonces  $G$  contiene una inmersión estricta de  $H$ , donde,*

$$H = \begin{cases} K_{(k-1)s+1} & \text{si } s \text{ es par} \\ K_{(k-1)s} & \text{si } s \neq 1 \text{ y } s \text{ es impar} \\ K_k & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. El caso  $s = 1$  es trivial, por lo que asumimos  $s > 1$ . Elegimos los vértices de  $k - 1$  clases como vértices corner (en el caso que  $s$  sea par, se agregará un vértice corner adicional más adelante), y los vértices de la clase restante, llamémosla  $U$ , se ocuparán para los caminos arista-disjuntos. Los caminos entre dos vértices de distinta clase ya existen (son las aristas entre ellos), por lo que sólo debemos preocuparnos de aquellos vértices que están en la misma clase. Sabemos que  $\chi'(K_s) = s - 1$  si  $s$  es par, y  $\chi'(K_s) = s$  si  $s$  es impar mayor o igual a tres ([31, p.133]).

Para cada clase de  $s$  vértices corner, consideramos una  $\chi'(K_s)$ -arista-coloración de las aristas que faltan (todas). Como  $|U| \geq \chi'(K_s)$ , podemos asignar cada uno de los colores de las aristas de  $K_s$  a algún vértice de  $U$ . Digamos que el vértice  $u_i \in U$  recibe el color  $i$ . Luego, para dos vértices corner  $v$  y  $w$  en la misma clase, asignamos  $P_{vw} = vu_iw$ , donde el color de  $vw$  es  $i$ .

Notemos que dichos caminos resultan arista-disjuntos. En efecto, si dos caminos  $P_{vw}$  y  $P_{xy}$  compartieran alguna arista, entonces  $vw$  tendría que ser adyacente a  $xy$ . Pero además,

se tendría que  $P_{vw} = vu_iw, P_{xy} = xu_iy$  para algún  $i \leq \chi'(G)$ . Es decir, tanto  $vw$  como  $xy$  tendrían asignado el color  $i$ , lo cual es una contradicción.

Notemos que si  $s$  es par, entonces en  $U$  hay un vértice que no es utilizado en los caminos arista-disjuntos, por lo que podemos agregarlo como vértice corner de la inmersión, ya que es adyacente a todos los otros vértices corner. Así, encontramos la inmersión buscada, la cual es estricta puesto que ningún vértice corner es utilizado como vértice interno de algún camino.  $\square$

**Teorema 2.2** *Sea  $G$  un grafo  $\chi(G)$ -inmersión-crítico. Entonces  $K_{2\chi(G)-\delta(G)-1}$  está estrictamente inmerso en  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN. Gracias al Corolario 1.12, podemos asumir que  $\delta(G) \geq \chi(G)$ . Luego,  $\delta(G) = \chi(G) + h$ , con  $h \geq 0$ . Sea  $u$  tal que  $d(u) = \delta(G)$ . Entonces existe una coloración  $c$  mínima de  $G$ , tal que  $c(u) = 1$  y  $c(v) \neq c(u)$ , para todo  $v \neq u$ . En efecto, como  $\chi(G - u) < \chi(G)$  (pues  $G - u$  está propiamente inmerso en  $G$ ), podemos colorear los vértices de  $G - u$  con  $\chi(G) - 1$  colores. Luego, al asignar un color extra al vértice  $u$ , obtenemos una coloración mínima de  $G$  en la cual el color de  $u$  es distinto al color de todos los otros vértices. Notemos que para dicha coloración, entre los vecinos de  $u$  deben estar presentes todos los otros colores distintos de  $c(u)$  (si falta alguno, asignamos ese color a  $u$  y obtenemos una coloración más pequeña de  $G$ ).

Consideremos

$$\widehat{N}(u) = \{v \in N(u) : c(v) \neq c(w), \forall w \in N(u), w \neq v\}.$$

Tenemos que  $|\widehat{N}(u)| \geq \chi(G) - h - 2$ . Esto último pues  $d(u) = \chi(G) - 1 + h + 1$ , hay  $\chi(G) - 1$  colores disponibles y en el peor de los casos  $h + 1$  de ellos están repetidos.

Sean entonces,  $v, w \in \widehat{N}(u)$  con  $c(v) = i, c(w) = j$ . Si  $w \notin c_{ij}(v)$ , podemos intercambiar los colores en  $c_{ij}(w)$ , con lo que en la nueva coloración, ningún vértice en  $N(u)$  tiene el color  $j$ . Podemos asignar entonces, el color  $j$  a  $u$  y obtener así una coloración más pequeña de  $G$ , lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto,  $v$  y  $w$  están en la misma componente conexa de  $c_{ij}$  y entonces existe una cadena que los une.

Consideramos como vértices corner de la inmersión a  $\{u\} \cup \widehat{N}(u)$ . El camino de  $u$  hacia algún vértice en  $\widehat{N}(u)$  es la arista que los conecta y el camino entre dos vértices en  $\widehat{N}(u)$  es la cadena que los une. Todos estos caminos corresponden a cadenas entre vértices de distintos colores, las cuales sabemos, son arista-disjuntas. El hecho de que los caminos sean cadenas implica también que ningún vértice corner se utiliza como vértice interno de otro camino, luego, la inmersión es estricta. Tenemos entonces, un grafo completo inmerso de tamaño al menos:

$$\chi(G) - h - 2 + 1 = \chi(G) - (\delta(G) - \chi(G)) - 1 = 2\chi(G) - \delta(G) - 1.$$

$\square$

Veamos ahora dos clases de grafos en las cuales se cumple la conjetura de Abu-Khizam y Langston.

**Definición 2.3** Diremos que un grafo  $G$  es  $(k,s)$ -denso si para todo  $X \subseteq V(G)$ , con  $|X| = k$ , tenemos que  $|E(G[X])| \geq s$ .

**Teorema 2.4** Todo grafo  $G$   $(5,6)$ -denso contiene una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que  $G$  tiene menos de cinco vértices. Si  $\chi(G) = 1$ , entonces obviamente  $K_1 \subseteq G$ , lo que corresponde a una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$  en  $G$ . Si  $\chi(G) = 2$ , entonces debe haber una arista en  $G$ , luego,  $K_2 \subseteq G$ . Si  $\chi(G) = 3$ ,  $G$  debe contener un ciclo de largo impar, el cual necesariamente es de largo tres, luego,  $K_3 \subseteq G$ . Y si  $\chi(G) = 4$ , es fácil chequear que la única opción es que  $G = K_4$ . Es decir, en cualquier caso tenemos una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$  en  $G$ , por lo que podemos asumir  $|V(G)| \geq 5$ .

Sea  $c$  una coloración mínima de  $V(G)$  y sea  $k = \chi(G)$ . Notemos que  $|c_i| \leq 3$ , para  $1 \leq i \leq k$ , ya que no pueden haber conjuntos independientes de tamaño cuatro. Ésto, pues si hubiese alguno, agregándole cualquier otro vértice, tendríamos un conjunto de cinco vértices, cuyo grafo inducido tendría menos de seis aristas. Elegimos un vértice dominante de cada color para ser los vértices corner de la inmersión.

Sean  $i, j$  dos colores tales que  $c_i = \{u, x\}$ ,  $c_j = \{v, y\}$ . En el caso de que  $c_{ij}$  no sea conexo, entonces escogemos un par de vértices dominantes que sean adyacentes, como vértices corner. Notemos que esta elección es posible, ya que si  $u$  y  $v$  son dominantes y  $uv \notin E(G)$ , entonces tenemos que  $uy \in E(G)$ ,  $vx \in E(G)$ , pues  $u$  y  $v$  son dominantes. Como  $c_{ij}$  no es conexo, entonces  $xy \notin E(G)$ . Luego, cualquier otro vértice debe ser adyacente a  $u, v, x$  e  $y$ , por la densidad de  $G$ . Esto nos asegura que podemos elegir, por ejemplo,  $x$  y  $v$  como vértices corner, los cuales son adyacentes entre ellos y son adyacentes también a cualquier otro vértice (en particular a cualquier otro vértice corner).

Llamemos entonces  $u_i$  al vértice dominante del color  $i$  elegido como corner. Sean ahora,  $i, j$  dos colores cualesquiera y veamos que entre sus vértices corner respectivos existe una cadena que los une.

- Si  $|c_i| = 1$ , entonces  $u_i u_j \in E(G)$ , pues  $u_j$  es dominante. La arista  $u_i u_j$  es la cadena que buscamos.
- Si  $|c_i| = 2, |c_j| = 3$ , entonces  $u_i u_j \in E(G)$ , gracias a la densidad del grafo.
- Si  $|c_i| = 3, |c_j| = 3$ , entonces considerando el conjunto de los vértices de  $c_i$  más  $u_j$  y otro vértice de  $c_j$ , tenemos que el grafo inducido debe ser necesariamente un bipartito completo, por la densidad de  $G$ . Luego,  $u_i u_j \in E(G)$ .
- Si  $|c_i| = 2, |c_j| = 2$ , entonces hay dos opciones. Si  $c_{ij}$  es conexo, siempre podemos encontrar una cadena que une  $u_i$  con  $u_j$ . Y si  $c_{ij}$  no es conexo, entonces por la elección de los vértices corner, tenemos que  $u_i u_j \in E(G)$ .

Por simetría, los anteriores son todos los casos posibles, y así, entre cada par de vértices corner existe una cadena que los une. Por lo tanto, tenemos una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ . La inmersión resulta estricta, ya que al ser los caminos cadenas entre vértices corner de distintos colores, ninguno ocupa a otro vértice corner como vértice interno.  $\square$

Otra clase que cumple la conjetura de Abu-Khzam y Langston es aquella de los grafos cuyo complemento no contiene ciclos inducidos de largo cuatro.

**Teorema 2.5** *Todo grafo  $G$  cuyo complemento no contiene un ciclo inducido de largo cuatro, contiene una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $c$  una coloración mínima de  $G$  y elijamos un vértice dominante de cada color como conjunto de vértices corner. Consideremos dos vértices corner,  $u$  y  $v$ , con  $c(u) = i$ ,  $c(v) = j$  y veamos que existe una cadena que los une (así aseguramos que los caminos serán arista-disjuntos).

Si  $uv \in E(G)$ , entonces la arista  $uv$  es el camino que buscamos. Si  $uv \notin E(G)$ , existen vértices  $x \in c_j, y \in c_i$ , tales que  $ux, vy \in E(G)$ , pues  $u$  y  $v$  son dominantes. Además, como  $C_4 \not\subseteq \overline{G}$ , necesariamente  $xy \in E(G)$ . Así,  $uxyv$  es la cadena que buscamos. Luego, tenemos una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ , la cual es estricta pues al ser los caminos cadenas entre vértices de distintos colores, no utilizan a otro vértice corner como vértice interno.  $\square$

**Observación** En un principio, la condición de que no hayan ciclos inducidos de largo cuatro en el complemento del grafo podría parecer demasiado restrictiva. Sin embargo, a diferencia de los grafos (5, 6)-densos, las clases de colores pueden ser relativamente grandes. En efecto, los autores de [20] probaron que si  $G$  es un grafo tal que  $C_4 \not\subseteq G$ , con  $n$  vértices y grado medio  $a$ , entonces  $\omega(G) \geq a^2 n^{-1}/10$ . Esto implica que si  $C_4 \not\subseteq \overline{G}$ , entonces  $\alpha(G) \geq (n-1-a)^2 n^{-1}/10$ . Es decir, podrían existir coloraciones con clases de tamaño  $(n-1-a)^2 n^{-1}/10$ .

## 2.2. Otra relación

Definimos una nueva relación, en un intento de generalizar las relaciones de orden inmersión y menor.

**Definición 2.6** *Denotaremos  $H \lesssim G$  si existe  $\phi : V(H) \rightarrow 2^{V(G)}$ , tal que:*

1. *Para cada  $u \in V(H)$ ,  $\phi(u)$  induce un grafo conexo y  $\phi(u) \cap \phi(v) = \emptyset$ , si  $u \neq v$ .*
2. *Para cada  $uv \in E(H)$ , existe  $P_{uv}$  camino entre  $\phi(u)$  y  $\phi(v)$ . Además, los caminos  $\{P_{uv} : uv \in E(H)\}$  son arista-disjuntos de a pares.*

De ahora en adelante, denotaremos  $H \preccurlyeq G$  si  $G$  contiene a  $H$  como menor.

**Observación** Si  $H \preccurlyeq G$ , entonces  $H \lesssim G$  y si  $H \preccurlyeq_i G$ , entonces  $H \lesssim G$ .

**Lema 2.7**  *$H \lesssim G$  no implica  $H \preccurlyeq_i G$ .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $\tilde{H}$  como el conocido grafo de Petersen. Sabemos que  $K_5 \preccurlyeq \tilde{H}$ , por lo que  $K_5 \lesssim \tilde{H}$ . Sin embargo,  $K_5$  no puede estar inmerso en  $\tilde{H}$ , pues  $\tilde{H}$  es 3-regular y los vértices corner de cualquier inmersión de  $K_5$  deben tener grado al menos 4.  $\square$



**Lema 2.8**  $H \simeq G$  no implica  $H \preceq G$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el grafo  $K_{1,4}$ . Realizando dos lifts desde el vértice en la clase de tamaño 1 y borrándolo, se obtiene una inmersión de  $2K_2$ , por lo que  $2K_2 \simeq K_{1,4}$ . Sin embargo, es fácil ver que  $2K_2 \not\preceq K_{1,4}$ .  $\square$

**Teorema 2.9**  $H \simeq G$  no implica  $H \preceq_i G$  ó  $H \preceq G$ .

DEMOSTRACIÓN. Dibujamos el grafo de Petersen en el plano y agregamos un vértice en cada cruce de aristas, tal como se muestra en la Figura 2.1. Llamemos a este grafo  $\widehat{H}$ . Entonces  $K_5 \not\preceq \widehat{H}$ , pues  $\widehat{H}$  es planar. Además,  $K_5 \not\preceq_i \widehat{H}$ , pues los únicos vértices que podrían ser vértices corner son aquellos pintados de negro y tendrían que utilizar todas sus aristas incidentes para los caminos. Sin embargo, cada par adyacente de estos vértices comparte un vecino con sólo una arista incidente extra, por lo que los caminos no resultarían arista-disjuntos.

No obstante, es fácil ver que  $K_5 \simeq \widehat{H}$ . Basta identificar los vértices de  $K_5$  con cada par adyacente de vértices blanco y gris.

$\square$

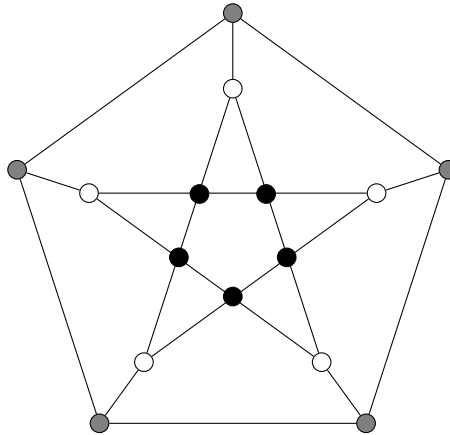


Figura 2.1: Grafo de Petersen con vértices en las intersecciones de aristas.

Por lo tanto, la nueva relación definida corresponde a una generalización no trivial de las relaciones menor e inmersión.



# Capítulo 3

## Caso especial: $\alpha(G) \leq 2$

Una clase de grafos muy interesante a considerar es aquella de los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres. Ha sido ampliamente estudiada en un intento de resolver la conjetura de Hadwiger [2, 7, 8, 26]. Es por esta razón que nos interesamos en la conjetura de Abu-Khizam y Langston restringida a dichos grafos. El objetivo principal es ver qué tan lejos podemos llegar en un intento de resolver la conjetura cuando  $\alpha(G) \leq 2$ .

**Conjetura 2 (C2)** *Todo grafo  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ , contiene una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ .*

Si  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces en cualquier coloración de los vértices de  $G$ , cada clase de color, al ser un conjunto independiente, no puede tener más de dos vértices, lo cual implica que  $\chi(G) \geq \frac{n}{2}$ . La conjetura de Abu-Khizam y Langston nos diría entonces que  $G$  debe contener una inmersión de  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ . Esto último da lugar a una nueva conjetura.

**Conjetura 3 (C3)** *Todo grafo  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ , contiene una inmersión de  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ .*

En un principio, la Conjetura 3 podría parecer más débil que la Conjetura 2. Sin embargo, como veremos más adelante, en el Teorema 3.9, ambas conjeturas son en realidad equivalentes.

**Observación** Si  $G$  es un grafo con  $\alpha(G) \leq 2$ ,  $u, v, w \in V(G)$  y  $v, w \notin N(u)$ , entonces  $vw \in E(G)$ . Esta simple observación nos dice que la no-vecindad de cualquier vértice de  $G$  debe inducir un grafo completo.

**Notación** De aquí en adelante utilizaremos la siguiente notación para  $v \in V(G)$  y  $U \subseteq V(G)$ .

1.  $\bar{N}(v) = V(G) \setminus (\{v\} \cup N(v))$ , es decir, los no-vecinos de  $v$ .
2.  $N_U(v) = N(v) \cap U$ .
3.  $\bar{N}_U(v) = \bar{N}(v) \cap U$ .

Notemos que si cambiáramos  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  por  $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$  en la Conjetura 3, la afirmación resulta ser

cierta. Más aún, o  $G$  contiene a  $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$  como subgrafo, o bien prácticamente cualquier conjunto de vértices sirve como vértices corner. Además, la inmersión es estricta.

**Teorema 3.1** *Si  $G$  es un grafo con  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces  $G$  contiene una inmersión estricta de  $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ . En efecto, si existe un vértice  $v$  con  $d(v) < \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ , entonces su no-vecindad es de tamaño al menos  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ , y como induce un grafo completo, tendríamos que  $G$  contiene como subgrafo a  $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ .

Separamos entonces  $V(G)$  en dos conjuntos disjuntos  $U$  y  $W$ , tales que  $|U| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  y  $|W| = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ . Los vértices del conjunto  $U$  serán los vértices corner y como siempre,  $P_{uv}$  es el camino entre  $u$  y  $v$  en la inmersión. Ordenamos los pares  $\{u, v\}$  con  $u, v \in U$  arbitrariamente y vamos asignando los caminos de la inmersión de la siguiente manera. Si  $uv \in E(G)$ , entonces  $P_{uv} = uv$ . Si  $uv \notin E(G)$ , entonces  $P_{uv} = uzv$ , con  $z \in N_W(u) \cap N_W(v)$  y tal que  $z$  no ha sido utilizado en algún  $P_{ux}$ , con  $x \in U$  o en algún  $P_{vx}$ , con  $x \in U$ . Notemos que dada esta última condición, los caminos resultarán arista-disjuntos. Además, ningún vértice corner es usado como vértice interno de algún camino, por lo que la inmersión es efectivamente estricta. Veamos que esta asignación es posible (solamente hay que verificar los casos en que  $uv \notin E(G)$ ). Notemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} |N_W(u) \cup N_W(v)| &= |N_W(u)| + |N_W(v)| - |N_W(u) \cap N_W(v)| \\ &= |N(u)| - |N_U(u)| + |N(v)| - |N_U(v)| - |N_W(u) \cap N_W(v)| \\ &\geq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - |N_U(u)| + \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - |N_U(v)| - |N_W(u) \cap N_W(v)|. \end{aligned}$$

Como  $uv \notin E(G)$  y  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces tenemos que para todo  $w \in W$ ,  $uw \in E(G)$  o  $vw \in E(G)$ . Esto implica que  $N_W(u) \cup N_W(v) = W$ . Luego, de la desigualdad anterior se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} |N_U(u)| + |N_U(v)| &\geq 2 \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - |W| - |N_W(u) \cap N_W(v)| \\ &= \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - |N_W(u) \cap N_W(v)|. \end{aligned}$$

Notemos que los vértices en  $U$  que necesitan un camino hacia  $u$  de largo mayor que 1 son sus no-vecinos, es decir  $\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1 - |N_U(u)|$ . De igual manera, los vértices en  $U$  que necesitan un camino hacia  $v$  de largo mayor que 1 son  $\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1 - |N_U(v)|$ . Así, el total de caminos de largo mayor que 1 que necesitan ocupar un vértice en  $N_W(u) \cap N_W(v)$  son:

$$\begin{aligned} 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 - (|N_U(u)| + |N_U(v)|) &\leq 2 \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2 - \left( \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor - |N_W(u) \cap N_W(v)| \right) \\ &\leq |N_W(u) \cap N_W(v)|. \end{aligned}$$

Es decir, hay suficientes vértices disponibles para construir los caminos necesarios desde  $u$  y desde  $v$ , manteniendo la condición que sean arista-disjuntos. Por lo tanto, existe  $z \in$

$N_W(u) \cap N_W(v)$  que no ha sido utilizado aún en otros caminos  $P_{ux}$  o  $P_{vx}$  y entonces podemos asignar  $P_{uv} = uzv$ . Así, hemos conseguido una inmersión de  $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$  en  $G$ .  $\square$

**Observación** Consideremos  $c$  una coloración mínima de  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ . Notemos que para cada par de colores  $i, j$ , con  $|c_i| = |c_j| = 2$ , o bien  $c_{ij}$  es conexo, en cuyo caso existe una cadena para cada  $u \in c_i$  y cada  $v \in c_j$ , o bien  $c_{ij} = \overline{C_4}$ .

### 3.1. Sub-clases que cumplen la conjetura

Ya vimos que si  $C_4$  no es subgrafo inducido de  $\overline{G}$ , entonces  $G$  contiene una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ . Veamos que al restringirnos a los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres, podemos relajar tal hipótesis. Necesitaremos hacer uso del siguiente lema.

**Lema 3.2** *Sea  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$ ,  $c$  una coloración mínima de sus vértices, y  $c_i, c_j$  dos clases de colores de tamaño 2, con  $u_i, u_j$  vértices dominantes para  $i, j$ , respectivamente. Entonces, si  $u_i \notin c_{ij}(u_j)$ , al menos uno de los dos colores,  $i$  o  $j$ , tiene otro vértice dominante. Más aún, siempre que  $c_{ij}$  no es conexo, existe un par de vértices dominantes para  $i$  y  $j$ , los cuales son adyacentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $v_i, v_j$  vértices tales que  $c_i = \{u_i, v_i\}$ ,  $c_j = \{u_j, v_j\}$ . Dado que  $u_i u_j \notin E(G)$ , necesariamente  $u_i v_j \in E(G)$  y  $u_j v_i \in E(G)$ . Luego, como  $c_{ij}$  no es conexo, podemos intercambiar los colores de los vértices  $u_j$  y  $v_i$ . Así, obtenemos una nueva coloración mínima de los vértices de  $G$ , en la cual los vértices  $v_i$  y  $v_j$  tienen asignado el mismo color. Por lo tanto, al menos uno de los dos,  $v_i$  o  $v_j$ , necesariamente debe ser dominante. Notemos que también debe ser dominante en la coloración original.

Ahora, sean  $c_i = \{u_i, v_i\}$ ,  $c_j = \{u_j, v_j\}$ , tales que  $c_{ij}$  no es conexo y  $u_i, u_j$  son vértices dominantes para  $i, j$ , respectivamente. Si  $u_i u_j \notin E(G)$ , entonces gracias a lo anterior,  $v_i$  o  $v_j$  también debe ser dominante. Si  $v_i$  (respectivamente  $v_j$ ) es dominante, como es adyacente al vértice dominante  $u_j$  (respectivamente  $u_i$ ), se tiene la segunda afirmación.  $\square$

**Teorema 3.3** *Sea  $G$  con  $\alpha(G) \leq 2$  y supongamos además que si es que hay  $C_4$ 's inducidos en  $\overline{G}$ , son arista-disjuntos de a pares. Entonces  $G$  contiene una inmersión estricta de  $K_{\chi(G)}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $c$  una coloración mínima de  $G$  y elijamos un vértice dominante de cada color como conjunto de vértices corner de la inmersión. En el caso de que algún  $c_{ij}$  no sea conexo para dos colores  $i, j$ , tales que  $|c_i| = |c_j| = 2$ , es decir que  $c_{ij} = \overline{C_4}$ , entonces elegimos como vértices corner a un par de vértices dominantes que sean adyacentes. Notemos que dicha elección es posible, gracias al Lema 3.2. Además, debido a que los  $C_4$ 's inducidos en  $\overline{G}$  son arista-disjuntos, tenemos que tanto  $i$  como  $j$  cumplen que  $c_{ik}$  y  $c_{jk}$  son grafos conexos, para todo  $k$  distinto de  $i$  y de  $j$ , tal que  $|c_k| = 2$ . Por lo tanto, la condición de elegir vértices dominantes adyacentes sucederá máximo una vez por cada color. Llamemos  $u_i$  al vértice dominante escogido como vértice corner para el color  $i$ .

Consideremos ahora dos colores cualesquiera  $i, j$  y veamos que siempre existe una cadena entre sus vértices dominantes corner respectivos.

- Si  $c_i = \{u_i\}, c_j = \{u_j\}$ , entonces  $u_i u_j \in E(G)$ , pues ambos vértices son dominantes.
- Si  $c_i = \{u_i, x\}, c_j = \{u_j\}$ , entonces  $u_i u_j \in E(G)$ , pues  $u_i$  es dominante.
- Si  $c_i = \{u_i, x\}, c_j = \{u_j, y\}$ , entonces hay dos opciones. Si  $c_{ij}$  es conexo, tenemos que  $u_i$  y  $u_j$  están conectados mediante una cadena. Si  $c_{ij}$  no es conexo, entonces gracias a la elección de los vértices corner en este caso, tenemos que  $u_i u_j \in E(G)$ . Es decir, en cualquiera de los dos casos, existe una cadena que une  $u_i$  con  $u_j$ .

Dado que  $\alpha(G) \leq 2$ , los anteriores son los únicos casos posibles (salvo simetría). Así, tenemos una cadena que une cada par de vértices corner, las cuales sabemos, son arista-disjuntas. Y ningún vértice corner es utilizado como vértice interno de algún camino, por lo que la inmersión es estricta.  $\square$

Veamos que en la presencia de varios  $C_4$ 's inducidos en  $\overline{G}$ , compartiendo alguna arista, aún podemos encontrar una inmersión de  $K_{\chi(G)}$  en  $G$ , siempre y cuando las adyacencias cumplan cierta estructura.

**Definición 3.4** Sea  $G$  un grafo con  $\alpha(G) \leq 2$  y sea  $c$  una coloración de los vértices de  $G$ . Definimos el grafo  $G^c$  de la siguiente forma.

1. El conjunto de vértices de  $G^c$  son las clases de tamaño dos de  $c$ .
2. Existe una arista entre  $c_i$  y  $c_j$  si  $c_{ij}$  no es conexo.

**Teorema 3.5** Sea  $G$  un grafo con  $\alpha(G) \leq 2$  y tal que  $|V(G)| \neq 2\chi(G) - 1$ . Si existe una coloración  $c$  mínima de los vértices de  $G$  tal que el grafo  $G^c$  consiste solamente en caminos disjuntos de a pares, entonces  $K_{\chi(G)} \preceq_i G$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  la coloración descrita en el teorema. Elegiremos, como siempre, un vértice dominante de cada color como conjunto de vértices corner. Veamos la forma de elección de éstos.

Consideremos  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Si alguna de las clases de colores  $i$  o  $j$  es de tamaño uno, entonces cualquier par de vértices dominantes que elijamos serán adyacentes. Si las dos clases son de tamaño dos y  $c_{ij}$  es conexo, entonces siempre encontraremos una cadena entre todo vértice dominante de  $i$  y todo vértice dominante de  $j$ . Debemos ver entonces, cómo se elige el vértice corner de los colores  $i$ , tales que  $c_{ij}$  no es conexo para algún  $j$ , es decir que  $c_{ij} = \overline{C_4}$ .

Consideremos un camino maximal  $P = c_{i_1} \dots c_{i_t}$  en  $G^c$ . Es decir que en  $G$ ,  $c_{i_l i_{l+1}}$  no es conexo, para  $1 \leq l \leq t - 1$ , tal como se ilustra en la Figura 3.1. De acuerdo a la hipótesis en  $G^c$ , cada color  $i$  presente en  $P$  es tal que  $c_{ij}$  es conexo para todo  $j$ , cuando  $c_i$  no es adyacente a  $c_j$  en el camino  $P$ . Además, recordemos que gracias al Lema 3.2, para cada par  $i, j$  que tienen vértices dominantes que no están en la misma componente conexa de  $c_{ij}$ , se cumple que al menos uno de los dos colores,  $i$  o  $j$ , tiene otro vértice dominante.

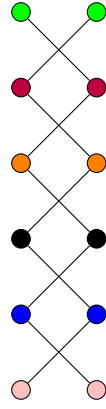


Figura 3.1: Representación en  $G$  de camino maximal en  $G^c$ . Cada  $c_i$  está representado con sus dos vértices dispuestos horizontalmente.

Sigamos el siguiente procedimiento. Definimos:

$$S = \{c_i \in V(P) : i \text{ tiene dos vértices dominantes}\}$$

$$T = \{c_i \in V(P) : i \text{ tiene sólo un vértice dominante}\}$$

y llamemos bloque de  $S$  (respectivamente de  $T$ ) a un sub-camino en  $P$ , con vértices en  $S$  (respectivamente en  $T$ ). Particionamos los vértices de  $P$  en bloques maximales de  $S$  y en los bloques restantes de  $T$ . Esto queda más claro en la Figura 3.2.

Llamemos  $x_i, y_i$  a los vértices de  $c_i$  para cada color  $i$ , de manera que en  $P$ ,  $x_i y_{i+1} \in E(G)$  y  $x_{i+1} y_i \in E(G)$ , para  $1 \leq l \leq t - 1$ . Luego, el procedimiento para escoger los vértices corner es el siguiente. Debemos distinguir entre dos casos. Si la coloración  $c$  no posee clases de colores con tan sólo un vértice, entonces no hay bloques de  $T$ , puesto que todos los vértices son dominantes en este caso, gracias a que  $\alpha(G) \leq 2$ . Luego, en  $P$  podemos elegir  $x_{i_1}, y_{i_2}, x_{i_3}, y_{i_4}, \dots$ , como vértices corner. Notemos que en este caso, para  $c_{i_l}$  y  $c_{i_{l+1}}$  adyacentes en  $P$ , sus vértices corner respectivos son adyacentes.

En el caso de que la coloración tenga clases de colores con un solo vértice, entonces procedemos de la siguiente manera. Elegimos uno de los extremos de  $P$  como el inicio y vamos asignando, en el orden del camino, un vértice corner para cada color como se detalla a continuación.

- En un bloque de  $T$ , elegir al único vértice dominante como vértice corner.
- En un bloque maximal de  $S$ , alternar entre  $x_i$ 's e  $y_i$ 's para ser vértices corner, salvo que el último vértice a elegir no sea adyacente al vértice dominante del siguiente color en el bloque de  $T$ . En aquel caso, escoger para el último color de  $S$ , al vértice no-adyacente al penúltimo vértice elegido como corner.

Veamos que dicha elección permite encontrar la inmersión que queremos. Como ya dijimos, sólo debemos verificar aquellos pares de colores  $i, j$  tales que  $c_{ij}$  no es conexo, es decir, los pares de colores adyacentes en  $P$ . Para dos colores  $i_l, i_{l+1}$  en un bloque de  $S$ , sus vértices corner respectivos son adyacentes, salvo en el caso que se eligen al final dos vértices no-adyacentes.

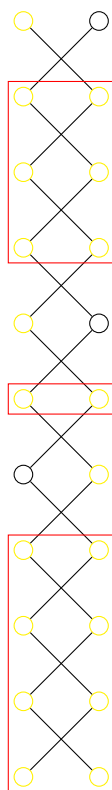


Figura 3.2: Bloques maximales de  $S$  delimitados en rojo. Los vértices amarillos son vértices dominantes. Se ha omitido la coloración del grafo para mayor claridad.

Veamos cómo construir el camino entre ellos dos en este caso. Digamos que hemos elegido  $x_{i_l}, x_{i_{l+1}}$  como vértices corner. Entonces, podemos considerar una clase de color de tamaño uno y llamar  $u$  a tal vértice. Luego, como tanto  $y_{i_l}$  como  $y_{i_{l+1}}$  son dominantes, se tiene que  $uy_{i_l}, uy_{i_{l+1}} \in E(G)$ . Así, podemos asignar  $x_{i_l}y_{i_{l+1}}uy_{i_l}x_{i_{l+1}}$ , como el camino entre los vértices corner  $x_{i_l}, x_{i_{l+1}}$ . Esta asignación mantiene los caminos arista-disjuntos y no interfiere con los caminos entre  $u$  y los vértices corner  $x_{i_l}$  y  $x_{i_{l+1}}$ , ya que éstos son  $ux_{i_l}$  y  $ux_{i_{l+1}}$ , respectivamente. Esto último se ilustra en la Figura 3.3.

Si  $c_{i_l}, c_{i_{l+1}} \in T$ , entonces, gracias al Lema 3.2, sus vértices corner respectivos son adyacentes, ya que de otro modo, uno de los dos colores debería tener otro vértice dominante.

Ahora, si  $c_{i_l} \in S, c_{i_{l+1}} \in T$ , entonces sus vértices corner correspondientes serán adyacentes, salvo quizás cuando el bloque maximal de  $S$  sea de tamaño uno, en cuyo caso la elección del vértice corner de  $c_{i_l}$  está determinada por el único vértice dominante de  $c_{i_{l-1}}$ , digamos  $x_{i_{l-1}}$ . Luego, siguiendo el procedimiento, elegiríamos a  $y_{i_l}$  como vértice corner para el color  $i_l$ . Y el problema aparece si es que  $y_{i_{l+1}}$  es el vértice dominante de  $i_{l+1}$ . Como  $x_{i_{l-1}}x_{i_l} \notin E(G)$  y  $x_{i_l}x_{i_{l+1}} \notin E(G)$ , entonces gracias a que  $\alpha(G) \leq 2$ ,  $x_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}} \in E(G)$ . De igual manera,  $y_{i_{l-1}}y_{i_{l+1}} \in E(G)$ . Aquí es necesario distinguir entre dos casos. Si  $x_{i_{l-1}}y_{i_{l+1}} \in E(G)$  y  $x_{i_{l+1}}y_{i_{l-1}} \in E(G)$ , entonces podemos asignar los caminos tal y como se detalla en la Figura 3.4. Notemos que dichos caminos son efectivamente arista-disjuntos y que además no interfieren con los caminos de los vértices corner fuera de este subgrafo.



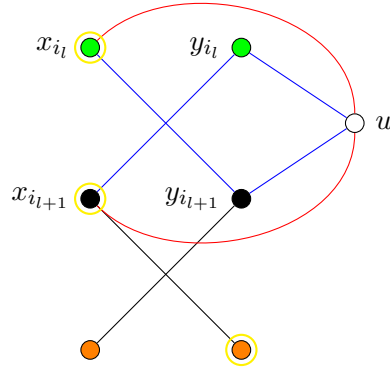


Figura 3.3: Camino para dos vértices corner no-adyacentes en un bloque de  $S$ . Las dos primeras clases están en un bloque maximal de  $S$  y la última en un bloque de  $T$ . Los vértices corner están marcados con amarillo. El camino entre los vértices corner  $x_{i_l}$  y  $x_{i_{l+1}}$  es el camino azul.

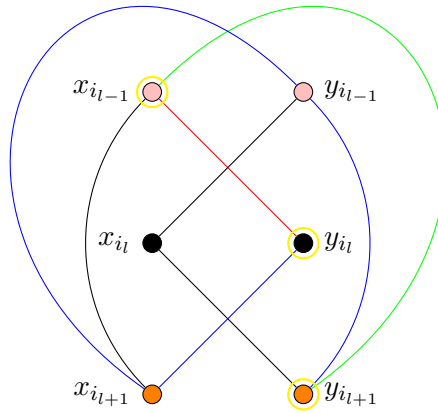


Figura 3.4: Camino para dos vértices corner no-adyacentes en bloques distintos. Los caminos entre los tres vértices corner se representan en azul, rojo y verde.

Ahora, como  $c_{i_{l-1}i_{l+1}}$  es conexo, sólo una de las aristas  $x_{i_{l-1}}y_{i_{l+1}}$  o  $y_{i_{l-1}}x_{i_{l+1}}$  puede faltar. Si faltara la arista que une los vértices no-dominantes  $y_{i_{l-1}}$  y  $x_{i_{l+1}}$ , entonces podemos re-colorear el grafo de la manera que se muestra en la Figura 3.5, en cuyo caso uno de los colores no tiene vértices dominantes, lo que es una contradicción.

Podemos asumir entonces que la arista que falta es aquella que conecta los vértices dominantes  $x_{i_{l-1}}$  e  $y_{i_{l+1}}$ . Como  $y_{i_{l-1}}$  y  $x_{i_{l+1}}$  son los vértices no-dominantes, entonces cada uno es no-adyacente a algún vértice en una clase de color de tamaño uno. Si  $x_{i_{l+1}}$  fuera no-adyacente a al menos dos de estos vértices, entonces existirían vértices  $v, z$  en clases de colores de tamaño uno, tales que  $y_{i_{l-1}}v \notin E(G)$ ,  $x_{i_{l+1}}z \notin E(G)$ . Esto quiere decir que podemos re-colorear el grafo, tal como se muestra en la Figura 3.6, y obtener así una coloración más pequeña, lo

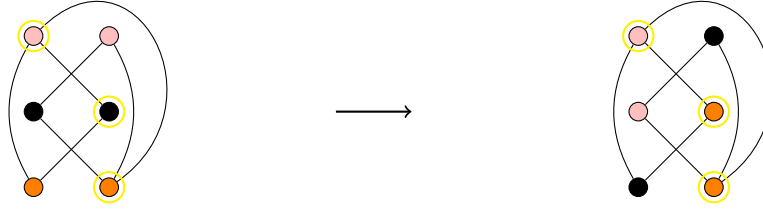


Figura 3.5: Re-coloreo que genera una clase de color sin vértices dominantes. La clase de color negro queda sin dominantes.

cual es una contradicción.

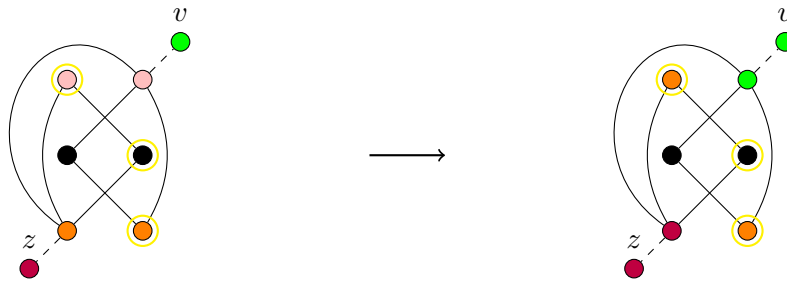


Figura 3.6: Re-coloreo que genera una coloración más pequeña del grafo.

Luego, podemos asumir que  $x_{i+1}$  es no-adyacente a sólo un vértice de las clases de colores de tamaño uno, digamos  $z$ . Como  $|V(G)| \neq 2\chi(G) - 1$ , entonces deben existir al menos dos clases de tamaño uno. Es decir,  $x_{i+1}$  es adyacente a algún vértice  $w$  de una clase de color de tamaño uno. Y como  $x_i$  es dominante, entonces  $x_i w \in E(G)$ . Así, podemos asignar  $y_i x_{i+1} w x_i y_{i+1}$  como el camino entre los vértices corner  $y_i$  e  $y_{i+1}$ , tal como se ilustra en la Figura 3.7. Dicho camino no interfiere con los caminos desde los vértices corner  $y_{i+1}$  e  $y_i$  hacia  $w$ , ya que éstos son  $y_{i+1} w$  e  $y_i w$ , respectivamente.

Es importante recordar que gracias a que los caminos en  $G^c$  son disjuntos de a pares, cada clase de color pertenece a lo más a un camino en  $G^c$ . Luego, las restricciones para elegir vértices corner aparecerán máximo una vez por cada color. Además, cualesquiera sean los vértices elegidos como corner en  $P$ , éstos están conectados mediante una cadena con los vértices corner fuera de  $P$ .

Realizando el procedimiento anterior para cada camino maximal en  $G^c$ , obtenemos la inmersión buscada.

Notemos que cuando existe una clase de color de tamaño uno, la inmersión puede no ser estricta, ya que el vértice  $u$  o el vértice  $w$  pueden ser utilizados tanto como vértices corner como vértices internos de algunos caminos en la inmersión.  $\square$

El Teorema 3.5 corresponde a una generalización del Teorema 3.3, pues éste trata el caso especial en que los caminos de  $G^c$  son únicamente de largo uno, es decir cuando el grafo  $G^c$

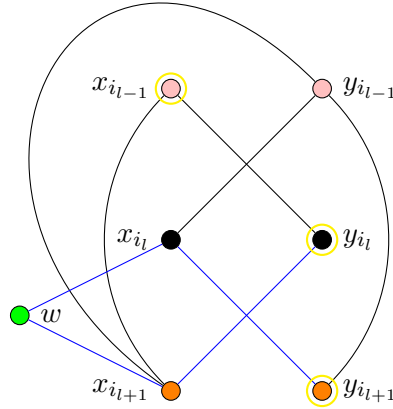


Figura 3.7: Asignación de camino entre  $y_i$  e  $y_{i+1}$ . Los vértices corner se marcan en amarillo. El camino desde  $y_i$  hacia  $y_{i+1}$  en la inmersión se marca en azul.

es un matching de aristas.

**Definición 3.6** Si  $G$  es un grafo tal que  $P_3 \not\subseteq G$ , donde  $P_3$  es el camino de largo tres, entonces  $G$  se dice cografo.

La clase de los cografos ha sido estudiada significativamente por diferentes autores desde los años 70 [21, 24, 30, 32]. Demostraremos que la clase de los cografos con la restricción adicional que no hayan conjuntos independientes de tamaño tres, cumple la conjetura de Abu-Khizam y Langston. Necesitaremos la siguiente definición.

**Definición 3.7** Sea  $G$  un grafo. Una inflación de  $G$  consiste en reemplazar cada vértice  $v$  de  $G$  por un grafo completo  $K^v$ , y por cada par de vértices  $u, v$  adyacentes en  $G$ , hacer adyacentes a todos los vértices de  $K^u$  con todos los vértices de  $K^v$ .

**Teorema 3.8** Si  $G$  es un cografo y  $\alpha(G) \leq 2$ , entonces  $K_{\chi(G)}$  está estrictamente inmerso en  $G$ .

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción en el número de vértices. Sea  $n = |V(G)|$  y supongamos que el teorema se cumple para todo  $n' < n$ . Podemos asumir que  $\overline{K_2} \subseteq G$ , ya que de otro modo  $G$  es un grafo completo y en aquel caso la demostración es directa. Consideremos entonces, una inflación de  $\overline{K_2}$  de tamaño máximo en  $G$  y llamémosla  $H$ . Es decir,  $H$  consiste en dos grafos completos,  $H_1$  y  $H_2$ , sin ninguna arista entre ellos. Afirmamos que todo vértice en  $G - V(H)$  es adyacente a todo vértice de  $H$ .

En efecto, supongamos que algún vértice  $u$  de  $G - V(H)$  no es adyacente a algún  $w \in V(H)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $w \in V(H_1)$ . Como  $\alpha(G) \leq 2$ ,  $u$  debe ser adyacente a todo vértice de  $H_2$ . También debe ser adyacente a algún vértice  $v$  de  $H_1$ , ya que

de otro modo,  $H$  no sería una inflación de tamaño máximo. Pero entonces  $wvux$  es un camino inducido de largo tres en  $G$ , con  $x$  cualquier vértice de  $H_2$ , lo que es una contradicción.

Luego, por inducción, usando que  $V(H)$  es distinto de vacío, podemos encontrar una inmersión estricta de  $K_{\chi(G-V(H))}$  en  $G-V(H)$ . Y como cada vértice corner de dicha inmersión será adyacente a cada vértice de la componente más grande de  $H$ , tendremos que,

$$K_{\chi(G)} = K_{\chi(G-V(H))+\chi(H)} \preceq_i G.$$

La desigualdad  $\chi(G) \leq \chi(G-V(H)) + \chi(H)$  viene de que como los vértices de  $H$  y de  $G-V(H)$  corresponden a una partición de los vértices de  $G$ , entonces  $G$  puede ser coloreado con  $\chi(G-V(H)) + \chi(H)$  colores. Y la desigualdad  $\chi(G) \geq \chi(G-V(H)) + \chi(H)$  se justifica notando que ningún vértice de  $G-V(H)$  puede ser coloreado con el mismo color que un vértice de  $H$ , puesto que son adyacentes.  $\square$

## 3.2. Equivalencia de las conjeturas

En esta sección demostramos el siguiente teorema.

**Teorema 3.9** *Las Conjeturas 2 y 3 son equivalentes.*

Necesitaremos hacer uso de algunos resultados previos. Supongamos que la Conjetura 2 es falsa y sea  $G$  un contraejemplo que minimiza el número de vértices. Probaremos algunas propiedades que debería cumplir  $G$ . Claramente  $\alpha(G) = 2$  y tenemos la desigualdad  $|V(G)| \leq 2\chi(G)$ .

**Lema 3.10** *Para todo  $v \in V(G)$ ,  $\chi(G-v) < \chi(G)$ .*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si existiera algún  $v \in V(G)$ , tal que  $\chi(G-v) = \chi(G)$ , entonces como  $G-v$  tiene menos vértices que  $G$  y  $\alpha(G-v) \leq 2$ , tendríamos que,

$$K_{\chi(G)} = K_{\chi(G-v)} \preceq_i G-v \preceq_i G,$$

lo que contradice el hecho de que  $G$  sea un contraejemplo para C2.  $\square$

Además,

**Lema 3.11**  $\overline{G}$  *es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Si no es así,  $G$  consiste en dos subgrafos disjuntos  $G_1$  y  $G_2$ , tales que para todo  $u \in V(G_1)$  y para todo  $v \in V(G_2)$ ,  $uv \in E(G)$ . Luego, como tanto  $G_1$  como  $G_2$  tienen menos vértices que  $G$ , se tiene que  $K_{\chi(G_1)} \preceq_i G_1$  y  $K_{\chi(G_2)} \preceq_i G_2$ , y entonces,

$$K_{\chi(G)} = K_{\chi(G_1)+\chi(G_2)} \preceq_i G,$$

lo que nos lleva a una contradicción.  $\square$

Para la siguiente propiedad haremos uso de un conocido teorema de Gallai.

**Teorema 3.12** ([18]) *Si  $G$  es un grafo tal que  $\overline{G}$  es conexo,  $\chi(G) = k$  y  $\chi(G - v) < k$ , para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $G$  tiene al menos  $2k - 1$  vértices.*

**Lema 3.13**  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $|V(G)| \leq 2\chi(G)$ . Si  $|V(G)|$  fuera igual a  $2\chi(G)$ , entonces para cada  $v \in V(G)$  tendríamos que,

$$2\chi(G) - 1 = |V(G)| - 1 = |V(G - v)| \leq 2\chi(G - v) \leq 2\chi(G).$$

Es decir,

$$\chi(G) - \frac{1}{2} \leq \chi(G - v) \leq \chi(G).$$

Luego,  $\chi(G - v) = \chi(G)$ , lo que contradice el Lema 3.10. Por lo tanto,  $|V(G)| \leq 2\chi(G) - 1$ .

Para la otra desigualdad, basta con utilizar los Lemas 3.10 y 3.11, junto con el Teorema 3.12, para obtener que  $|V(G)| \geq 2\chi(G) - 1$ , por lo que  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$ .  $\square$

Ahora podemos probar el teorema.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 3.9. Tenemos que  $\left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil = \frac{|V(G)|+1}{2} = \chi(G)$ . Luego,  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \not\leq_i G$  y por lo tanto,  $G$  es también un contraejemplo para la Conjetura 3. Es decir, si es que no se cumple la Conjetura 2, entonces tampoco se cumple la Conjetura 3.  $\square$

**Observación** Notemos además que  $G$  resulta ser un contraejemplo mínimo para la Conjetura 3.

### 3.3. Contraejemplo mínimo

Sigamos llamando  $G$  a un contraejemplo para la Conjetura 2, que minimiza el número de vértices. En esta sección probaremos una serie de propiedades que debería cumplir  $G$ , además de las ya mencionadas por los Lemas 3.10, 3.11 y 3.13.

**Lema 3.14**  $G$  es un contraejemplo para la Conjetura 2 que minimiza el número cromático.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tilde{G}$  un contraejemplo para la Conjetura 2 con número cromático mínimo. Entonces,

$$2\chi(G) - 1 = |V(G)| \leq |V(\tilde{G})| \leq 2\chi(\tilde{G}) \leq 2\chi(G).$$

Por lo tanto,  $\chi(G) = \chi(\tilde{G})$ .  $\square$

**Lema 3.15** Para todo  $v \in V(G)$ ,  $\overline{G} - v$  tiene un matching perfecto.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sabemos por el Lema 3.10, que  $\chi(G-v) \leq \chi(G) - 1$ , y la desigualdad  $\chi(G-v) \geq \chi(G) - 1$  siempre se cumple. Luego,

$$2\chi(G-v) = 2\chi(G) - 2 = |V(G)| - 1 = |V(G-v)|.$$

Es decir,  $G-v$  tiene una  $(\chi(G)-1)$ -coloración, en la cual cada clase de color tiene exactamente dos vértices. Esto corresponde a un matching perfecto en  $\overline{G-v}$ .  $\square$

Supongamos ahora que  $G$ , entre los contraejemplos de C2 que minimizan el número de vértices, es aquél que minimiza el número de aristas.

Si existiera una arista  $e \in E(G)$ , tal que  $\alpha(G-e) \leq \alpha(G) = 2$ , entonces,

$$K_{\chi(G-e)} \preceq_i G-e \preceq_i G.$$

Luego,  $\chi(G-e) \leq \chi(G) - 1$ . Así,  $G-e$  tiene  $|V(G)| = 2\chi(G) - 1$  vértices y puede ser coloreado con  $\chi(G) - 1$  colores. Necesariamente una clase de color tiene al menos 3 vértices, lo que es una contradicción. Esto prueba lo siguiente.

**Lema 3.16** *Para toda arista  $e \in E(G)$ , se tiene que  $\alpha(G-e) > \alpha(G)$ , es decir,  $G$  es  $\alpha$ -crítico.*

Otra propiedad interesante es la que se enuncia a continuación.

**Lema 3.17** *Para todo par  $x, y \in V(G)$ , tal que  $xy \notin E(G)$ , se tiene que  $|N(x) \cap N(y)| \leq \frac{n-1}{2}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si no fuera así, sean  $x$  e  $y$ ,  $xy \notin E(G)$ , tales que  $|N(x) \cap N(y)| \geq \frac{n-1}{2} + 1$ . Gracias a que  $G$  es un contraejemplo mínimo para C3, sabemos que,

$$K_{\frac{n-1}{2}} = K_{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} \preceq_i G - \{x, y\}.$$

Sea  $U$  el conjunto de los vértices corner de dicha inmersión y  $W = V(G - \{x, y\}) \setminus U$ . Como  $\alpha(G) \leq 2$  y  $xy \notin E(G)$ , tenemos que para todo  $u \in U$ ,  $ux \in E(G)$  o  $uy \in E(G)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir entonces que  $x$  es vecino de al menos la mitad de los vértices en  $U$  (y que  $x$  tiene más vecinos que  $y$  en  $U$ ). Notemos que cada no-vecino de  $x$  debe ser vecino de  $y$ .

Veamos que  $x$  está conectado a cada vértice  $u$  de  $U$ , mediante caminos  $P_{xu}$  arista-disjuntos. Si  $xu \in E(G)$ , entonces  $P_{xu} = xu$ . Si  $xu \notin E(G)$ , entonces  $P_{xu} = xzyu$ , donde  $z \in N_W(x) \cap N_W(y)$ . Notemos que para que esta asignación resulte en caminos arista-disjuntos, necesitamos que  $|N_W(x) \cap N_W(y)| \geq |\overline{N}_U(x)|$ .

Sabemos que  $|\overline{N}_U(x)| \leq \frac{n-1}{4}$ , por lo que,

$$|\overline{N}_U(x)| = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - i \text{ con } i \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor \right\}.$$

Además,

$$|N_W(x) \cap N_W(y)| = |N(x) \cap N(y)| - |N_U(x) \cap N_U(y)| \geq |N(x) \cap N(y)| - (2i + 1).$$

La última desigualdad se obtiene al asumir que  $|N_U(x)| \geq |N_U(y)|$ , por lo que el número de vecinos que  $x$  e  $y$  comparten en  $U$  está acotado. En efecto,  $N_U(y) = \overline{N}_U(x) \cup (N_U(x) \cap N_U(y))$  y como asumimos que  $|N_U(y)| \leq |N_U(x)|$ , tenemos que,

$$|\overline{N}_U(x)| + |N_U(x) \cap N_U(y)| \leq |N_U(x)|.$$

Luego,

$$\begin{aligned} |N_U(x) \cap N_U(y)| &\leq |N_U(x)| - |\overline{N}_U(x)| \\ &= \left( \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + i \right) - \left( \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - i \right) \\ &\leq 2i + 1. \end{aligned}$$

Entonces, como  $|N(x) \cap N(y)| \geq \frac{n-1}{2} + 1$ , tenemos que,

$$|\overline{N}_U(x)| = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - i \leq |N(x) \cap N(y)| - (2i + 1) \leq |N_W(x) \cap N_W(y)|.$$

Es importante notar que los caminos  $P_{xu}$ , desde  $x$  hacia  $u \in U$ , no interfieren con los caminos ya existentes entre dos vértices corner de  $U$ . Ésto, pues los nuevos caminos utilizan solamente aristas incidentes a  $x$  e  $y$ . Así, obtenemos una inmersión de  $K_{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil + 1} = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  en  $G$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

De aquí se deduce lo siguiente.

**Lema 3.18**  $\omega(G) \geq \frac{n+1}{4}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $x, y$  dos vértices cualesquiera tales que  $xy \notin E(G)$  y separemos el resto de los vértices en  $A = N(x) \setminus N(y)$ ,  $B = N(x) \cap N(y)$  y  $C = N(y) \setminus N(x)$ . Notemos que tanto  $A$  como  $C$  inducen grafos completos. Además, por el Lema 3.17, se tiene que  $|B| \leq \frac{n-1}{2}$ , por lo que al menos uno de los otros dos conjuntos, digamos  $A$ , cumple que  $|A \cup \{x\}| \geq \frac{n+1}{4}$ . Y como  $\omega(G) \geq |A \cup \{x\}|$ , se concluye.  $\square$

**Lema 3.19**  $G$  es conexo.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si no fuera así,  $G$  sería un grafo con al menos dos componentes conexas. De hecho, gracias a que  $\alpha(G) \leq 2$ , son exactamente dos componentes conexas y cada componente sería un grafo completo. Luego,  $K_{\chi(G)} \subseteq G$ , lo cual contradice que  $G$  sea un contraejemplo para C2.  $\square$

Esta última propiedad más el hecho de que  $G$  es  $\alpha$ -crítico (por el Lema 3.16), junto con el siguiente teorema, implican el Lema 3.21.

**Teorema 3.20** ([26]) *Sea  $G$  un grafo conexo con  $\alpha(G) \leq 2$  y supongamos que  $G$  es  $\alpha$ -crítico. Entonces, si  $x$  e  $y$  son dos vértices en  $G$ , se tiene que  $d(x, y) \leq 2$ .*

**Lema 3.21** Para todo  $x, y \in V(G)$ , se cumple que  $d(x, y) \leq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Directo del Teorema 3.20. □

**Lema 3.22**  $\delta(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que es directo probar que  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , ya que la no-vecindad de cualquier vértice induce un grafo completo, por lo que se tendría que  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \subseteq G$ , una contradicción.

Supongamos entonces que  $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y sea  $v$  tal que  $d(v) = \delta(G)$ . Separemos  $V(G) - v$  en los vecinos y los no-vecinos de  $v$  ( $N(v)$  y  $\bar{N}(v)$ , respectivamente). Sabemos, gracias al Lema 3.15, que  $\bar{G} - v$  tiene un matching perfecto, y dado que  $\bar{N}(v)$  es un completo en  $G$ , cada vértice de  $\bar{N}(v)$  está emparejado con un vértice de  $N(v)$ . Además, como  $|N(v)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , entonces  $|\bar{N}(v)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Este matching perfecto representa una coloración del grafo, en la cual cada clase tiene exactamente dos vértices. Afirmamos que  $K_{\chi(G)} \preceq_i G$ , donde los vértices corner son  $\{v\} \cup N(v)$ .

En efecto,  $vu \in E(G)$ , para todo  $u \in N(v)$ , luego, podemos tomar  $P_{vu} = vu$ . Consideremos ahora  $u, w \in N(v)$ . Si  $uw \in E(G)$ , entonces  $P_{uw} = uw$ . Si  $uw \notin E(G)$ , entonces, como  $\alpha(G) \leq 2$ , se tiene que  $ux_w, wx_u \in E(G)$ , donde  $x_w, x_u$  son los vértices que están emparejados con  $w$  y con  $u$ , respectivamente. Además,  $x_u x_w \in E(G)$ , ya que  $x_u, x_w \in \bar{N}(v)$ , completo de  $G$ . Luego, podemos asignar  $P_{uw} = ux_w x_u w$ . Los caminos resultan ser arista-disjuntos, puesto que al ver el matching en  $\bar{G} - v$  como una coloración en  $G - v$ , los caminos elegidos son justamente cadenas entre vértices corner de distintos colores. □

El Lema 3.22 junto con el conocido teorema de Dirac, permiten concluir lo siguiente.

**Lema 3.23**  $G$  es Hamiltoniano.

Y a la vez, de los Lemas 3.23 y 3.13, se deduce,

**Lema 3.24** Para todo  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  tiene un matching perfecto.

La siguiente propiedad se concluye del Teorema 1.13.

**Lema 3.25**  $\chi(G) \geq 8$ .

### 3.3.1. Completo de tamaño máximo

Consideremos ahora un completo  $K$  de tamaño  $\omega(G)$  en  $G$  y definamos  $A = V(K)$ . Gracias al Lema 3.21, podemos separar el resto de los vértices en  $B$  (los vecinos de  $K$ ) y en  $C$  (los vecinos de los vecinos de  $K$ ). Notemos que como  $\alpha(G) \leq 2$ ,  $C$  induce un grafo completo. Además, cada  $u \in B$  debe tener un no-vecino  $x_u$  en  $A$ , ya que de otro modo, hay un completo



de tamaño mayor que  $\omega(G)$ . Luego,  $uw \in E(G)$ , para todo  $u \in B$  y para todo  $w \in C$ , ya que  $x_u w \notin E(G)$ , para cada  $w \in C$ .

Consideremos el grafo bipartito con partición de vértices  $A \dot{\cup} B$ , tomemos  $M$  un matching máximo de no-aristas y llamemos  $A'$ ,  $B'$  a los conjuntos emparejados por  $M$  de  $A$  y  $B$ , respectivamente, y  $A'' = A \setminus A'$ ,  $B'' = B \setminus B'$ . Notemos que  $xy \in E(G)$ , para todo  $x \in A''$  y para todo  $y \in B''$ . Se tiene entonces, lo siguiente.

- $|B'| + |C| = |A'| + |C| < \lceil \frac{n}{2} \rceil$

DEMOSTRACIÓN. Podemos encontrar una inmersión de un grafo completo, tal que sus vértices corner son  $B' \cup C$ . En efecto, si  $u, v \in C$ , entonces  $P_{uv} = uv$ , ya que  $C$  es completo. Si  $u \in B', v \in C$ , entonces  $P_{uv} = uv$  (ya vimos que  $uv \in E(G)$ ). Por último, veamos el caso en que tanto  $u$  como  $v$  están en  $B'$ . Si  $uv \in E(G)$ , entonces  $P_{uv} = uv$ . Si no,  $ux_v, vx_u \in E(G)$ , donde  $ux_u, vx_v \in M$  y  $x_u, x_v \in A$ . Además,  $x_u x_v \in E(G)$ , pues  $A$  induce un grafo completo. Luego,  $P_{uv} = ux_v x_u v$ . Gracias a que  $M$  es un matching, los caminos asignados resultan ser arista-disjuntos.

Así, si  $|B'| + |C| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , entonces  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \preccurlyeq_i G$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

- $|A| + |B| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v \in A$ . Notemos que  $N(v) \subseteq A \cup B$ . Luego,  $|A| + |B| \geq |\{v\} \cup N(v)| = 1 + |N(v)| \geq 1 + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ , donde la última desigualdad se tiene por el Lema 3.22.  $\square$

- Si  $C \neq \emptyset$ , entonces  $|C| + |B| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .

DEMOSTRACIÓN. Para  $v \in C$ ,  $|B| + |C| \geq |N(v)| + 1 \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ .  $\square$

- $|A''| + \min\{|B''|, |C|\} < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no es cierto y consideremos  $B^* \subseteq B'', C^* \subseteq C$ , tales que  $|B^*| = |C^*| = \min\{|B''|, |C|\}$ . Notemos que  $G[B^* \cup C^*]$  contiene como subgrafo al grafo bipartito completo, con partición de vértices  $B^* \dot{\cup} C^*$ , el cual sabemos por el Teorema 2.1, tiene inmerso a  $K_{|B^*|}$ , usando como vértices corner a  $B^*$ . Como  $A''$  induce un grafo completo y como cada vértice de  $B^*$  es adyacente a cada vértice de  $A''$ , encontramos una inmersión en  $G$  de  $K_{|A''|+|B^*|} \supseteq K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ , lo que contradice que  $G$  sea un contraejemplo para C3.  $\square$

- $|C| + \min\{|A''|, |B''|\} < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que no es cierto y sean  $A^* \subseteq A'', B^* \subseteq B''$ , tales que  $|A^*| = |B^*| = \min\{|A''|, |B''|\}$ . Usando el Teorema 2.1 encontramos una inmersión de  $K_{|B^*|}$  en  $G[A^* \cup B^*]$ , con  $B^*$  como vértices corner. Como  $B^*$  está totalmente conectado a  $C$  y  $C$  induce un grafo completo, obtenemos una inmersión de  $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$  en  $G$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

- $\min\{|A''|, |B''|\} + \min\{|B''|, |C|\} < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta con encontrar la inmersión de un grafo completo de tamaño  $\min\{|A''|, |B''|\} + \min\{|B''|, |C|\}$ . Sean  $A^* \subseteq A''$ ,  $C^* \subseteq C$ , de manera que  $|A^*| = \min\{|A''|, |B''|\}$  y  $|C^*| = \min\{|B''|, |C|\}$ . Veamos que existe la inmersión que buscamos, con conjunto de vértices corner  $A^* \cup C^*$ . Dado que tanto  $A^*$  como  $C^*$  inducen grafos completos, basta ver que existen caminos arista-disjuntos para los pares  $\{u, v\}$ , con  $u \in A^*, v \in C^*$ .

Consideremos el grafo  $\overline{G}[A^* \cup C^*]$ , es decir, el complemento del grafo inducido por  $A^* \cup C^*$ , el cual es un grafo bipartito completo. Sabemos, gracias al Teorema de König ([12, p.119]), que las aristas de dicho grafo pueden ser coloreadas con  $k = \Delta(\overline{G}[A^* \cup C^*]) = \max\{|A^*|, |C^*|\}$  colores. Sea  $c : E(\overline{G}[A^* \cup C^*]) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  tal arista-coloración. Notemos que  $k \leq |B''|$ , luego, podemos asignar cada uno de los  $k$  colores a algún vértice de  $B''$ . Digamos que el vértice  $v_i \in B''$  recibe el color  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Así, si  $u \in A^*, w \in C^*$  y  $c(uw) = i$ , entonces  $P_{uw} = uv_iw$ . Veamos que dichos caminos son efectivamente arista-disjuntos. Supongamos que  $P_{uw}$  y  $P_{xy}$ , caminos entre  $u$  y  $w$  y entre  $x$  e  $y$  respectivamente, comparten una arista. Luego,  $uw$  y  $xy$  deben ser aristas adyacentes, y  $P_{uw} = uv_iw, P_{xy} = xv_iy$ , para algún  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pero entonces  $c(uw) = c(xy) = i$ , lo cual es una contradicción, pues  $c$  es una arista-coloración.  $\square$

### 3.4. Dificultad en la elección de la coloración.

Sea ahora  $G$  un grafo cualquiera tal que  $\alpha(G) \leq 2$ . Observando las demostraciones realizadas aquí, resulta natural intentar encontrar una inmersión de  $K_{\chi(G)}$  utilizando un vértice dominante de cada color como conjunto de vértices corner y cadenas como caminos arista-disjuntos. Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que la coloración elegida para ésto no puede ser arbitraria.

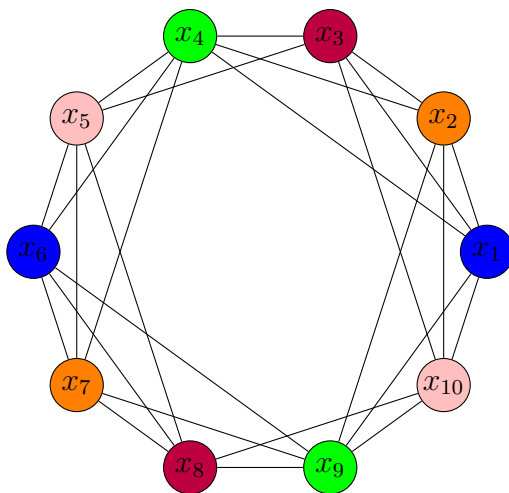


Figura 3.8: Grafo con contraejemplo de coloración.

El grafo de la Figura 3.8 cumple que  $\alpha(G) \leq 2$  y más aún, es  $\alpha$ -crítico. Pero notemos que el color  $\blacksquare$  cumple que para los colores  $\blacksquare$ ,  $\blacksquare$  y  $\blacksquare$ , los respectivos  $c_{ij}$ 's no son conexos.

Luego, si por ejemplo, elegimos  $x_3$  como corner, entonces  $x_1, x_2$  y  $x_4$  deben ser vértices corner también. Además, el color  $\color{red}\blacksquare$  cumple que para los colores  $\color{blue}\blacksquare$  y  $\color{green}\blacksquare$ , los respectivos  $c_{ij}$ 's no son conexos, por lo que si elegimos  $x_5$  como corner, no existirá una cadena que una  $x_5$  con  $x_1$ . Y si elegimos  $x_{10}$  como corner, no existirá una cadena que una  $x_{10}$  con  $x_4$ . De la misma manera, si elegimos  $x_8$  como corner, tampoco obtendremos una inmersión con un vértice de cada color y cadenas como caminos entre ellos. A modo de observación, se detalla el correspondiente grafo  $G^c$  en la Figura 3.9.

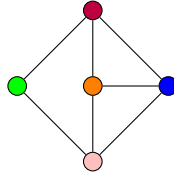


Figura 3.9: Grafo  $G^c$  correspondiente.

Cabe destacar, sin embargo, que si intercambiamos los colores de  $x_9$  y  $x_{10}$ , obtenemos una inmersión de  $K_{\chi(G)}$ , utilizando como vértices corner  $x_6, x_7, x_8, x_9$  y  $x_{10}$ .



# Conclusión

Se demostró que la conjetura de Abu-Khizam y Langston es cierta para la clase de grafos cuyo complemento no contiene un ciclo inducido de largo cuatro, así como también para aquellos grafos tales que todo conjunto de cinco vértices induce un subgrafo con al menos seis aristas. Además, se realizó un avance importante para una tercera clase, aquella de los grafos sin conjunto independiente de tamaño tres. Se demostró que para probar la conjetura restringida a dicha clase, se puede demostrar una versión aparentemente más débil, que en un principio podría ser más sencillo demostrar. Adicionalmente, se estudió la estructura de un contraejemplo mínimo en términos de número de vértices, y se exhibieron una serie de propiedades que debiera cumplir dicho contraejemplo, lo cual corresponde a evidencia que respalda la conjetura.

La clase de grafos sin conjunto independiente de tamaño tres podría inicialmente parecer demasiado restrictiva, sin embargo, notando que aquella restricción es equivalente a pedir que en el complemento del grafo no hayan triángulos y recordando la gran variedad de grafos que existen sin triángulos, resulta razonable considerar dicha clase.

Para un trabajo futuro, resta resolver la conjetura de Abu-Khizam y Langston, en el caso general. Para el caso especial en que se prohíben los conjuntos independientes de tamaño tres, un posible camino sería seguir estudiando el contraejemplo mínimo, con el fin de llegar a una contradicción.

Como es bien sabido, la conjetura de Hadwiger lleva más de 70 años sin poder resolverse, esto, a pesar de intensa investigación, extensa evidencia que la respalda y una gran cantidad de resultados en muchas de sus variantes y restricciones. Si la experiencia nos puede decir algo, una resolución del caso general de la conjetura de Abu-Khizam y Langston se ve lejana y difícil.



# Bibliografía

- [1] F. Abu-Khzam and M. Langston. Graph coloring and the immersion order. In Tandy Warnow and Binhai Zhu, editors, *Computing and Combinatorics*, volume 2697 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 394–403. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [2] J. Blasiak. A special case of Hadwiger’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 97(6):1056 – 1073, 2007.
- [3] B. Bollobás. *Extremal Graph Theory*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2004.
- [4] B. Bollobás, P. Catlin, and P. Erdős. Hadwiger’s conjecture is true for almost every graph. *European Journal of Combinatorics*, 1(3):195 – 199, 1980.
- [5] H. Booth, R. Govindan, M. Langston, and S. Ramachandramurthi. Fast algorithms for  $K_4$  immersion testing. *Journal of Algorithms*, 30(2):344 – 378, 1999.
- [6] P. Catlin. Hajós’ graph-coloring conjecture: Variations and counterexamples. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 26(2):268 – 274, 1979.
- [7] M. Chudnovsky. Hadwiger’s conjecture and seagull packing. *Notices Amer. Math. Soc*, 57(6):733–736, 2010.
- [8] M. Chudnovsky and P. Seymour. Packing seagulls. *Combinatorica*, 32(3):251–282, 2012.
- [9] K. Collins and M. Heenehan. Constructing graphs with no immersion of large complete graphs. *Journal of Graph Theory*, 2013.
- [10] M. DeVos, Z. Dvořák, J. Fox, J. McDonald, B. Mohar, and D. Scheide. A minimum degree condition forcing complete graph immersion. *Combinatorica*, pages 1–20, 2014.
- [11] M. DeVos, K. Kawarabayashi, B. Mohar, and H. Okamura. Immersing small complete graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, 3(2), 2010.
- [12] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173. Springer-Verlag Heidelberg, 2005.
- [13] G. Dirac. A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-27(1):85–92, 1952.

- [14] P. Erdős and S. Fajtlowicz. On the conjecture of Hajós. *Combinatorica*, 1(2):141–143, 1981.
- [15] M. Fellows and M. Langston. Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability. *Journal of the ACM*, 35(3):727–739, 1988.
- [16] M. Fellows and M. Langston. On well-partial-order theory and its application to combinatorial problems of VLSI design. *SIAM J. Discret. Math.*, 5(1):117–126, February 1992.
- [17] M. Fellows and M. Langston. On search, decision, and the efficiency of polynomial-time algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 49(3):769 – 779, 1994.
- [18] T. Gallai. Kritische Graphen II. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad.*, 8:373–395, 1963.
- [19] A. Giannopoulou, M. Kaminski, and D. Thilikos. Forbidding Kuratowski graphs as immersions. *arXiv preprint arXiv:1207.5329*, 2012.
- [20] A. Gyárfás, A. Hubenko, and J. Solymosi. Large cliques in  $C_4$ -free graphs. *Combinatorica*, 22(2):269–274, 2002.
- [21] M. Habib and C. Paul. A simple linear time algorithm for cograph recognition. *Discrete Applied Mathematics*, 145(2):183 – 197, 2005.
- [22] H. Hadwiger. Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich*, 88:133–142, 1943.
- [23] G. Hajós. Über eine Konstruktion nicht  $n$ -färbbarer graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg Math. Naturwiss*, 10:116–117, 1961.
- [24] H. Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 24(2):125 – 133, 1978.
- [25] M. Langston and B. Plaut. On algorithmic applications of the immersion order: An overview of ongoing work presented at the third slovenian international conference on graph theory. *Discrete Mathematics*, 182(1-3):191–196, 1998.
- [26] M. Plummer, M. Stiebitz, and B. Toft. On a special case of Hadwiger’s conjecture. *Discuss. Math. Graph Theory*, 23(2):333–363, 2003.
- [27] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors. XX. Wagner’s conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 92(2):325 – 357, 2004. Special Issue Dedicated to Professor W.T. Tutte.
- [28] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors XXIII. Nash-Williams’ immersion conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100(2):181 – 205, 2010.
- [29] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Hadwiger’s conjecture for  $K_6$ -free graphs. *Combinatorica*, 13(3):279–361, 1993.



- [30] D. Seinsche. On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(2):191 – 193, 1974.
- [31] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*. Springer, 2008.
- [32] D. Sumner. Dacey graphs. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 18:492–502, 1974.
- [33] K. Wagner. Beweis einer Abschwächung der Hadwiger-vermutung. *Mathematische Annalen*, 153(2):139–141, 1964.
- [34] P. Wollan. The structure of graphs not admitting a fixed immersion. *arXiv preprint arXiv:1302.3867*, 2013.