



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TÉCNICAS AVANZADAS DE ESTIMACIÓN
BAYESIANA APLICADO AL PRONÓSTICO DEL TIEMPO DE DESCARGA DE
CELDA DE ION-LITIO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELÉCTRICO

CARLOS ANDRÉS TAMPIER COTORÁS

PROFESOR GUÍA:
MARCOS ORCHARD CONCHA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JORGE SILVA SÁNCHEZ
HÉCTOR AGUSTO ALEGRÍA

SANTIAGO DE CHILE
2014

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE: Ingeniero Civil Eléctrico
POR: Carlos Tampier Cotorás
FECHA: 11/12/2014
PROFESOR GUÍA: Marcos Orchard Concha

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TÉCNICAS AVANZADAS DE ESTIMACIÓN BAYESIANA APLICADO AL PRONÓSTICO DEL TIEMPO DE DESCARGA DE CELDAS DE ION-LITIO

El problema de aseguramiento de la autonomía de equipos energizados con baterías es de creciente importancia en la sociedad actual, en la que cada vez más dispositivos y vehículos de diversas clases obtienen de ellas la energía necesaria para su funcionamiento. Por ello resulta imperante conocer el estado de carga y predecir cuándo la batería se descargará, con la mayor precisión y exactitud posible.

El objetivo de este trabajo, enmarcado en el proyecto de investigación FONDECYT Regular 1140774, es estudiar, implementar y comparar técnicas de estimación de estado basadas en filtro de partículas y filtro de Kalman *unscented*, aplicadas al problema de pronóstico del tiempo de descarga de una celda de ion-litio. Para ello se utiliza como base un esquema de filtro de partículas, consistente en módulos tanto estimación, como de pronóstico, y el cual fue programado con anterioridad en el contexto del mismo proyecto. En dicho esquema, se modifica el módulo encargado de la etapa de estimación del estado-de-carga de la batería, incluyendo un diseño de lógica de ajuste de hiper-parámetros del ruido del modelo, llamada en forma genérica lazo de corrección externo. Paralelamente, se implementa un filtro de Kalman *unscented* como alternativa para la reemplazar al filtro de partículas en la misma etapa mencionada. Por último, también a éste se le agrega la mecánica de corrección con lazos externos.

Para los métodos sin lazos externos de corrección, el basado en filtro de partículas logra corregir la condición inicial erróneamente supuesta sobre el estado de carga de la celda, aproximándose al estado real con una discrepancia que en general no supera el 4%. Una excepción a lo anterior se produce cuando la diferencia inicial entre el estado supuesto y el real es demasiado grande, en cuyo caso se produce un sesgo en la estimación. Por otro lado, el filtro *unscented* corrige rápidamente el supuesto inicial erróneo, pero su cómputo del estado se aleja del real cuando se obtienen mediciones poco congruentes con las predicciones generadas por el modelo, alcanzando un error de hasta 8%. La adición de los lazos externos de corrección mejora levemente el desempeño en cuanto al error de estimación del filtro de partículas, pero tiene un notorio impacto positivo en la consistencia de los resultados entre distintas realizaciones del algoritmo. Para el filtro de Kalman *unscented*, la mejora es significativa y su desempeño se torna superior a todos los demás casos, siempre que el lazo de corrección sea capaz de reducir lo suficiente el ruido de proceso. En cuanto al tiempo de ejecución se obtienen resultados comparables para los distintos esquemas.

Se concluye que el filtro de partículas permite trabajar el problema con una mayor tolerancia a la incertidumbre, mientras que si se cuenta con un modelo de batería adecuado, el filtro de Kalman *unscented* con lazo de corrección externo puede lograr un mejor rendimiento.

Tabla de contenido

Resumen	i
Tabla de contenido.....	ii
Índice de tablas	iv
Índice de figuras	v
Lista de acrónimos.....	vii
Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1. Motivación.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.2.1. Objetivos generales.....	2
1.2.2. Objetivos específicos.....	2
1.3. Estructura de la Memoria.....	3
Capítulo 2: Revisión bibliográfica	4
2.1. Observadores de estado	4
2.2. Métodos clásicos y modernos de filtrado Bayesiano.....	5
2.2.1. El paradigma Bayesiano	5
2.2.2. El filtro de Kalman y filtro de Kalman extendido.....	6
2.2.3. El filtro de Kalman unscented	9
2.3. Filtrado Bayesiano basado en partículas.....	13
2.3.1. La aproximación de Monte Carlo.....	13
2.3.2. Muestreo de importancia	13
2.3.3. El filtro de partículas	15
2.4. Pronóstico de fallas mediante filtro de partículas.....	18
2.5. Modelación de eventos aleatorios mediante cadenas de Markov	19
2.6. Lazos externos de corrección.....	20
2.7. Medida de desempeño en pronóstico.....	20
2.7.1. Índice de precisión.....	20
2.7.2. Índice de precisión-exactitud.....	21
2.6.3. Índice de estabilidad en línea.....	21
2.8. Estimación y predicción del estado de carga en dispositivos de almacenamiento de energía	22
2.8.1. Estado de carga y dispositivos de almacenamiento de energía	22
2.8.2. Caracterización del estado de carga.....	22
2.8.3. Estimación y predicción del estado de carga.....	24

Capítulo 3: Desarrollo e implementación de los métodos de estimación del estado-de-carga ..	25
3.1. Base de datos	25
3.2. Filtro de partículas base	26
3.3. Modelo nuevo de batería.....	28
3.4. Filtro de Kalman unscented	29
3.5. Corrección con lazos externos	30
3.6. Desempeño en pronóstico	32
Capítulo 4: Análisis de resultados	33
4.1. Estimación y pronóstico con filtro de partículas base	33
4.1.1. Capacidad de estimación	33
4.1.2. Capacidad de pronóstico.....	36
4.2. Estimación con filtro de Kalman unscented	37
4.3. Estimación y pronóstico con filtro de partículas y OFCL	39
4.3.1. Capacidad de estimación	39
4.3.2. Capacidad de pronóstico.....	42
4.4. Estimación y pronóstico con UKF y OFCL.....	43
4.4.1. Capacidad de estimación	43
4.4.2. Capacidad de pronóstico.....	45
4.5. Comparación de desempeño	46
4.5.1. Experimento de estimación 1: 85% de carga inicial supuesta.....	47
4.5.2. Experimento de estimación 2: 65% de carga inicial supuesta.....	48
4.5.3. Experimento de estimación 3: 50% de carga inicial supuesta.....	49
4.5.4. Experimento de pronóstico.....	50
4.5.5. Uso de memoria y complejidad temporal.....	52
Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones	54
Bibliografía.....	56

Índice de tablas

Tabla 1: Algoritmo Filtro de Kalman	7
Tabla 2: Algoritmo Filtro de Kalman Extendido.....	8
Tabla 3: Algoritmo Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	10
Tabla 4: Algoritmo <i>Square-Root Unscented Kalman Filter</i>	12
Tabla 5: Algoritmo Filtro de Partículas.....	17
Tabla 6: Valores de parámetros para cada conjunto de datos.....	26
Tabla 7: Valores de parámetros para UKF.....	29
Tabla 8: Valores de parámetros para OFCL en UKF y FP.....	31
Tabla 9: Resultados experimento 1 para FP base (promedio de 50 realizaciones)	47
Tabla 10: Resultados experimento 1 para FP+OFCL (promedio de 50 realizaciones)	47
Tabla 11: Resultados experimento 1 para UKF+OFCL.....	47
Tabla 12: Resultados experimento 2 para FP base (promedio de 50 realizaciones)	48
Tabla 13: Resultados experimento 2 para FP+OFCL (promedio de 50 realizaciones)	48
Tabla 14: Resultados experimento 2 para UKF+OFCL.....	48
Tabla 15: Resultados experimento 3 para FP base (promedio de 50 realizaciones)	49
Tabla 16: Resultados experimento 3 para FP+OFCL (promedio de 50 realizaciones)	49
Tabla 17: Resultados experimento 3 para UKF+OFCL.....	49
Tabla 18: Memoria reservada al final de cada ciclo de estimación.....	52
Tabla 19: Tiempo de ejecución en estimación para horizonte de $T=4100$	53
Tabla 20: Tiempo de ejecución en estimación para horizonte de $T=4100$ y sin vectorización.....	53

Índice de figuras

Figura 1: Perfiles de voltaje y corriente para descargas de celda de ion-litio. (a) Descarga tipo FUDS. (b) Descarga según simulación robot terrestre de 4 ruedas.....	25
Figura 2: Estimación con FP base. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	34
Figura 3: Estimación con FP base. Carga inicial de 100% real y 65% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	35
Figura 4: Estimación con FP base. Carga inicial de 100% real y 50% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	35
Figura 5: Estimación con FP base. Carga inicial de 80% real y 95% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	36
Figura 6: Estimación y pronóstico con FP base. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación y predicción con 95% de confianza del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, predicción y medida de voltaje. c) Estimación y predicción con 95% de confianza del estado-de-carga. d) Pronóstico de la distribución de probabilidad del tiempo de falla.....	37
Figura 7: Estimación con UKF. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	38
Figura 8: Estimación con UKF. Carga inicial de 100% real y 50% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación y medida de voltaje. c) Estimación del estado-de-carga.	38
Figura 9: Estimación con FP+OFCL. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.	40
Figura 10: Estimación con FP+OFCL. Carga inicial de 100% real y 65% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.	40
Figura 11: Estimación con FP+OFCL. Carga inicial de 100% real y 50% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.	41
Figura 12: Estimación con FP+OFCL. Carga inicial de 80% real y 95% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.	41
Figura 13: Estimación y pronóstico con FP+OFCL. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación y predicción con 95% de confianza del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, predicción, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación y predicción con	

95% de confianza del estado-de-carga. d) Pronóstico de la distribución de probabilidad del tiempo de falla.	42
Figura 14: Estimación con UKF+OFCL. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.....	43
Figura 15: Estimación con UKF+OFCL. Carga inicial de 100% real y 65% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.....	44
Figura 16: Estimación con UKF+OFCL. Carga inicial de 100% real y 50% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.....	44
Figura 17: Estimación con UKF+OFCL. Carga inicial de 80% real y 95% supuesta. a) Estimación del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación del estado-de-carga.	45
Figura 18: Estimación y pronóstico con UKF+OFCL. Carga inicial de 100% real y 85% supuesta. a) Estimación y predicción con 95% de confianza del módulo de la impedancia interna. b) Estimación, predicción, medida de voltaje y acción de OFCL. c) Estimación y predicción con 95% de confianza del estado-de-carga. d) Pronóstico de la distribución de probabilidad del tiempo de falla.	45
Figura 19: Desempeño en pronóstico para FP. a) Predicción del EoD en el tiempo. b) Índice de precisión. c) Índice de exactitud-precisión. d) Índice de estabilidad en línea.	50
Figura 20: Desempeño en pronóstico para FP+OFCL. a) Predicción del EoD en el tiempo. b) Índice de precisión. c) Índice de exactitud-precisión. d) Índice de estabilidad en línea.	51
Figura 21: Desempeño en pronóstico para UKF+OFCL. a) Predicción del EoD en el tiempo. b) Índice de precisión. c) Índice de exactitud-precisión. d) Índice de estabilidad en línea.	51

Lista de acrónimos

BP	Procesador Bayesiano (<i>Bayesian Processor</i>)
DDR	Tasa Doble de Datos (<i>Double Data Rate</i>)
EIS	Espectroscopia Electroquímica de Impedancia (<i>Electrochemical Impedance Spectroscopy</i>)
EKF	Filtro de Kalman Extendido (<i>Extended Kalman Filter</i>)
EoD	Fin de Descarga (<i>End of Discharge</i>)
ESD	Dispositivo de Almacenamiento de Energía (<i>Energy Storage Device</i>)
FP	Filtro de Partículas
FUDS	Programa Federal de Conducción Urbana (<i>Federal Urban Driving Schedule</i>)
KF	Filtro de Kalman (<i>Kalman Filter</i>)
LBP	Procesador Bayesiano Lineal (<i>Linear Bayesian Processor</i>)
OCV	Voltaje en Lazo Abierto (<i>Open Circuit Voltage</i>)
OFCL	Lazo de Corrección Externo (<i>Outer Feedback Correction Loop</i>)
RAM	Memoria de Acceso-Aleatorio (Random-Access Memory)
SOH	Estado De Salud (<i>State Of Health</i>)
SOC	Estado De Carga (<i>State Of Charge</i>)
SR-UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> versión Raíz Cuadrada (<i>Square-Root unscented Kalman Filter</i>)
ToF	Tiempo de Falla (<i>Time of Failure</i>)
UAV	Vehículo Aéreo no Tripulado (<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>)
UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> (<i>unscented Kalman Filter</i>)

Capítulo 1: Introducción

1.1. Motivación

El objetivo de esta memoria es el estudio, comparación y diseño de técnicas de estimación de estado, específicamente esquemas basados en filtro de partículas y filtro de Kalman *unscented*, para obtener el estado de carga de una celda de batería de ion-litio y que posibilitan la generación de pronósticos para la futura descarga de la misma. El trabajo se desarrolla en el contexto del proyecto de investigación FONDECYT Regular 1140774, el cual busca producir técnicas innovadoras para la estimación y pronóstico del estado de carga y estado de salud en dispositivos de almacenamiento de energía.

Los dispositivos de almacenamiento de energía, comúnmente conocidos como baterías, son un componente fundamental de una gran cantidad de equipos y sistemas en la actualidad, ya que habilitan la capacidad de autonomía y movilidad. Algunos ejemplos son los computadores personales, celulares, equipos médicos y militares, robots de uso doméstico o industrial, satélites, vehículos aéreos no tripulados (UAV, por sus siglas en inglés) y automóviles. En particular estos últimos dos han tenido notables desarrollos durante la última década. Por la misma razón se hace necesario el conocimiento acerca del estado de la batería, como por ejemplo, cuánta carga tiene o en cuánto tiempo se terminará de descargar. Responder a estas preguntas es fundamental para tomar decisiones, como si acaso es necesario realizar un mantenimiento preventivo y cuándo es óptimo hacerlo, o si es seguro para un vehículo realizar determinado viaje con mínimo riesgo de quedarse sin energía. A pesar de que las baterías actuales y de manufactura minuciosa poseen una hoja de datos con sus diversos parámetros, incluyendo curvas de relación entre el voltaje medido en sus terminales y su estado de carga, estas caracterizaciones se presentan para temperaturas constantes y en circuitos de lazo abierto, por lo que en la práctica resultan de poca utilidad y su uso deriva en considerables errores en la predicción de autonomía para un dispositivo en demanda continua. Lo anterior ha generado el desarrollo de una línea de investigación en esta materia, mejorando notoriamente los resultados sobre las decisiones de autonomía y mantenimiento que se realizan.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos generales

El objetivo del trabajo consiste en estudiar, implementar y comparar técnicas de estimación de estado basadas en los algoritmos de filtro de partículas y filtro de Kalman *unscented*, que son los de mayor uso en la actualidad por la calidad de sus resultados y capacidad de caracterizar la incertidumbre de un proceso en presencia de mediciones ruidosas. Lo anterior aplicado al problema de la determinación del estado de carga y generación de pronósticos del tiempo de descarga de una celda de batería de ion-litio. El diseño e implementación de dichos métodos pretende considerar el uso de técnicas avanzadas como lazos de corrección externos y las comparaciones a realizar incluyen tanto aspectos de eficacia en reconocer el estado real de la batería, como de eficiencia en la ejecución computacional.

Para el trabajo propuesto se cuenta con distintos conjuntos de datos, obtenidos de la descarga de una batería, así como con un modelo de esta última y el código de un algoritmo de estimación y pronóstico basado en filtro de partículas, todos resultados de una investigación realizada con anterioridad [1] en el marco del proyecto FONDECYT.

1.2.2. Objetivos específicos

Los hitos que marcarán los puntos intermedios relevantes y finalización del trabajo son los listados a continuación:

1. Modificar un esquema existente de estimación basado en filtro de partículas: se implementa de una variación sobre un algoritmo de procesamiento Bayesiano (para estimar el valor de un vector de estado) previamente programado, resultado de trabajos anteriores realizados en el proyecto de investigación. Específicamente la modificación que se aplica es una técnica llamada lazo de corrección externo (OFCL, por sus siglas en inglés), la cual busca la modificación de hiper-parámetros del modelo en base al desempeño mostrado.
2. Implementar un filtro de Kalman *unscented*: se desarrolla por completo este tipo de estimador para el problema en cuestión. Esto incluye integración con la etapa de predicción y pronóstico del filtro de partículas anterior, la cual se mantiene idéntica. También se añade posteriormente un lazo de corrección externo.
3. Definir métricas adecuadas para comparar los esquemas anteriores en cuanto a su desempeño tanto en la etapa de estimación como en la de predicción del estado.
4. Realizar un análisis comparativo entre los distintos métodos revisados destacando las ventajas de cada uno.

1.3. Estructura de la Memoria

La estructura del informe es como sigue. El Capítulo 2 introduce los conceptos teóricos necesarios para comprender los diversos aspectos del trabajo que se realiza, desde las bases de la teoría de estimación de estado hasta los avanzados esquemas de pronóstico y su aplicación al problema de dispositivos de almacenamiento de energía. El Capítulo 3 presenta la implementación realizada, explicando en detalle los esquemas y explicitando los valores de los distintos parámetros. En el Capítulo 4 se muestran los resultados, con énfasis en el análisis de los mismos y comparación entre los distintos algoritmos. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas con el desarrollo de esta memoria.

Capítulo 2: Revisión bibliográfica

2.1. Observadores de estado

Un sistema es una abstracción respecto de un proceso. El modelo que representa dicho sistema puede tomar la forma de ecuaciones diferenciales en que las variables fundamentales se denominan variables de estado. Otro conjunto de ecuaciones algebraicas relaciona los estados con las salidas del sistema, a las cuales se tiene acceso en forma directa. Es decir, un sistema en variables de estado queda descrito por un modelo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w) \\ y &= g(x, u, v),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde x es el vector de variables de estado, y el vector de salidas del sistema, u el vector de entradas, w, v ruidos o perturbaciones en el modelo, y $f(\cdot), g(\cdot)$ son funciones que describen la dinámica de los estados y relación entre éstos y las salidas, respectivamente. Los estados de una planta podrían encontrarse disponibles para su medición o no. En el último caso es posible, bajo ciertas condiciones, determinarlos a partir de las mediciones de la salida de la planta. Esto da pie al desarrollo de la teoría de observadores. En sus inicios, los estudios se centraron en el problema de sistemas determinísticos (sin ruido), lineales y de parámetros conocidos [2]. Posteriormente la investigación se extendió a sistemas no lineales [3], [4] o de parámetros desconocidos [5], [6]. Paralelamente se desarrolló la teoría para sistemas estocásticos, es decir, aquellos que incluyen ruido o variables aleatorias en el modelo. Éstos ofrecen una descripción más cercana a la realidad, puesto que los sensores y modelos nunca están libres de incertidumbre. Una clase de observadores de este tipo se denomina Procesadores Bayesianos (BP). Cuando el sistema es lineal y los ruidos son blancos, Gaussianos y aditivos, se habla de Procesador Bayesiano Lineal (LBP) o Filtro de Kalman (KF) [7]. Sin embargo, debido a que muchos procesos no son lineales o de ruido Gaussiano, se desarrollaron luego diversos esquemas o algoritmos dentro de los BP. El primero, el Filtro de Kalman Extendido (EKF) [8], amplía el KF para los sistemas no lineales manteniendo los supuestos sobre las variables aleatorias y utilizando técnicas de linealización. Más tarde, el Filtro de Kalman *Unscented* (UKF) [9] presenta una alternativa más adecuada que el EKF para el manejo de sistemas no lineales, manteniendo las mismas hipótesis, pero utilizando un conjunto mínimo de valores representativos para los estados de modo de caracterizar las distribuciones de probabilidad Gaussianas. Finalmente, el desarrollo del Filtro de Partículas (FP) [10] permite el trabajo con sistemas no lineales y no Gaussianos bajo un esquema de simulación. Utilizando una cantidad definida de ejemplos o partículas se busca que generen un muestreo del vector aleatorio del estado.

2.2. Métodos clásicos y modernos de filtrado Bayesiano

2.2.1. El paradigma Bayesiano

Bajo el esquema Bayesiano y respecto del problema de la estimación de estado, la caracterización de este último se realiza mediante distribuciones de probabilidad condicional a los estados y observaciones (medidas) en tiempos anteriores. En lo siguiente se considerará un sistema de tiempo discreto, descrito en forma general por:

$$\begin{aligned}x(t) &= A(x(t-1), u(t-1), w(t-1)) \\y(t) &= C(x(t), u(t), v(t)),\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde las distribuciones de probabilidad del ruido de proceso y observación, respectivamente $\Pr(w(t-1))$ y $\Pr(v(t))$, así como la entrada, son conocidas. De esta forma la probabilidad de transición $\Pr(x(t)|x(t-1))$ y la verosimilitud $\Pr(y(t)|x(t))$ dependen fundamentalmente de las funciones $A(\cdot)$ y $C(\cdot)$. Con lo anterior se puede enunciar el problema tal como lo sugiere el siguiente párrafo.

Dado un conjunto de mediciones ruidosas $\{y(t)\}$ y entradas conocidas $\{u(t)\}$, $t = 0, \dots, N$, junto a las correspondientes distribuciones a priori para el estado inicial y los ruidos de proceso y observación $\Pr(x(0))$, $\Pr(w(t-1))$, $\Pr(v(t))$; así como las distribuciones de probabilidad condicional para la transición de estado y verosimilitud (observación) $\Pr(x(t)|x(t-1))$, $\Pr(y(t)|x(t))$; caracterizadas por los modelos de estado y medición $A(x(t)|x(t-1))$ y $C(y(t)|x(t))$, encontrar el mejor estimado *posteriori* del filtro, $\hat{\Pr}(x(t)|Y_t)$, y sus estadísticas asociadas.

Cabe señalar que Y_t corresponde a toda la información hasta el instante t , es decir, todas las pasadas entradas, salidas y estados del sistema¹. Para obtener una solución secuencial en la predicción del estado se utiliza la ecuación de Chapman-Kolmogorov [11], reemplazando la probabilidad de transición con el modelo condicional, es decir:

$$\Pr(x(t)|Y_{t-1}) = \int \overbrace{A(x(t)|x(t-1))}^{\text{Modelo del proceso}} \times \overbrace{\Pr(x(t-1)|Y_{t-1})}^{\text{Distribución a priori}} dx(t-1).\tag{2.3}$$

Luego se incorpora el modelo de verosimilitud en la ecuación de la distribución a *posteriori*, entendiendo que el modelo del proceso ya se ha incluido en la predicción. De esta forma se obtiene en forma directa la representación secuencial buscada para el procesador Bayesiano:

$$\Pr(x(t)|Y_t) = \overbrace{C(y(t)|x(t))}^{\text{Modelo de observación}} \times \overbrace{\Pr(x(t)|Y_{t-1})}^{\text{Predicción}} / \Pr(y(t)|Y_{t-1}).\tag{2.4}$$

¹ Para todas las técnicas presentadas, la información relevante es sólo aquella hasta t-1. Esta simplificación recibe el nombre de hipótesis de Markov de primer orden.

2.2.2. El filtro de Kalman y filtro de Kalman extendido

Bajo los supuestos de linealidad del modelo del proceso, junto a la aditividad y Gaussianidad de los ruidos de proceso y observación, el filtro Bayesiano introducido en el apartado anterior recibe el nombre de filtro de Kalman. Con esto el sistema en (2.2) adquiere la forma particular:

$$\begin{aligned}x(t) &= A(t-1)x(t-1) + B(t-1)u(t-1) + w(t-1) \\y(t) &= C(t)x(t) + v(t),\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde A , B y C son matrices de las dimensiones apropiadas y w , v son los ruidos blancos Gaussianos de proceso y observación, respectivamente. Para la etapa de predicción del filtro mostrada en la Ecuación (2.3), se tiene entonces una distribución a priori del estado dada por una normal de media $\hat{x}(t-1|t-1)$ (estimada hasta el instante $t-1$) y matriz de covarianza $\tilde{P}(t-1|t-1)$, es decir:

$$\Pr(x(t-1)|Y_{t-1}) \sim N\left(\hat{x}(t-1|t-1), \tilde{P}(t-1|t-1)\right).\tag{2.6}$$

Dado el modelo lineal de proceso en (2.5) se puede demostrar [12] que la predicción corresponde también a una distribución de probabilidad normal con media y varianza dadas por (2.7), donde se ha tomado, por simplicidad, el caso autónomo ($u(t) = 0$).

$$\begin{aligned}\Pr(x(t)|Y_{t-1}) &\sim N\left(\hat{x}(t|t-1), \tilde{P}(t|t-1)\right) \\ \hat{x}(t|t-1) &= A(t-1)\hat{x}(t-1|t-1) \\ \tilde{P}(t|t-1) &= A(t-1)\tilde{P}(t-1|t-1)A^T(t-1) + R_{ww}(t-1).\end{aligned}\tag{2.7}$$

De un modo similar, la estimación a posteriori (término a la derecha de la Ecuación (2.4)) también resulta en una distribución Gaussiana. Sin embargo, la derivación de su media y covarianza requieren de un análisis matemático más extenso, el cual se omite en este trabajo (consultar [13] para mayor información). La Tabla 1 presenta los pasos relevantes del algoritmo completo del filtro de Kalman para la estimación del estado de un sistema lineal y Gaussiano [14]. Se puede observar que el primer paso corresponde a la predicción, la cual consiste simplemente en el uso del modelo del sistema para evolucionar la distribución de probabilidad (ya presentado en (2.7)). Los siguientes pasos corresponden a la etapa de corrección de la estimación mediante la adquisición de una nueva observación $y(t)$. En la fase de innovación se calcula el error entre la medida obtenida y la esperada, luego se determina la ganancia de Kalman, la cual es usada posteriormente en la actualización para mejorar la suposición a priori de la media y covarianza de la distribución normal del estado.

TABLA 1: ALGORITMO FILTRO DE KALMAN

Predicción	
$\hat{x}(t t-1) = A(t-1)\hat{x}(t-1 t-1) + B(t-1)u(t-1)$	(predicción del estado)
$\tilde{P}(t t-1) = A(t-1)\tilde{P}(t-1 t-1)A^T(t-1) + R_{ww}(t-1)$	(predicción de la covarianza)
Innovación	
$e(t) = y(t) - \hat{y}(t t-1) = y(t) - C(t)\hat{x}(t t-1)$	(innovación)
$R_{ee}(t) = C(t)\tilde{P}(t t-1)C^T(t) + R_{vv}(t)$	(innovación de la covarianza)
Ganancia	
$K(t) = \tilde{P}(t t-1)C^T(t)R_{ee}^{-1}(t)$	(ganancia de Kalman)
Actualización	
$\hat{x}(t t) = \hat{x}(t t-1) + K(t)e(t)$	(actualización del estado)
$\tilde{P}(t t) = [I - K(t)C(t)]\tilde{P}(t t-1)$	(actualización de la covarianza)
Condiciones iniciales	
$\hat{x}(0 0), \quad \tilde{P}(0 0)$	

Para un sistema que cumple los supuestos del filtro de Kalman, el resultado obtenido resulta ser óptimo en el sentido del error cuadrático medio de estimación de la esperanza condicional del estado [7]. En la práctica, este algoritmo se puede aplicar aún si las hipótesis no se cumplen de forma exacta. Lo anterior resulta, sin embargo, en una solución sub-óptima y con efectividad rápidamente decreciente a medida que las condiciones se alejan más de las ideales, de modo que otros métodos resultan más adecuados. Ejemplos de ellos son el filtro de Kalman extendido, explicado a continuación, y aquellos presentados en las siguientes secciones.

Las condiciones requeridas para la optimalidad y, en general, el correcto desempeño del filtro de Kalman son más bien estrictas. Ya la condición de linealidad del sistema resulta poco práctica debido a que la mayoría de los sistemas encontrados en la realidad son de naturaleza no lineal. Para sobrellevar este inconveniente, el filtro de Kalman extendido fue desarrollado. El EKF introduce una variación natural al KF, considerando la linealización del modelo del sistema para mantener los supuestos de Gaussianidad. Es decir, si se tiene un modelo como en (2.8):

$$\begin{aligned} x(t) &= g(x(t-1), u(t-1)) + w(t-1) \\ y(t) &= h(x(t)) + v(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde g y h son funciones no lineales para la evolución del estado y la observación, entonces el EKF replica el funcionamiento del KF, pero considerando la evolución de las esperanzas condicionales estimadas según el modelo no lineal, y las covarianzas asociadas según una aproximación de Taylor de primer orden del sistema, en torno al último estado estimado. Esta última condición (el punto en torno al cual se linealiza) es de particular importancia, puesto que permite mantener la aproximación en un rango válido a medida que el estado cambia en el tiempo. La anterior metodología implica la necesidad del cálculo de jacobianos de las funciones no lineales en cada instante de tiempo, es decir:

$$A(\hat{x}(t|t-1)) = \left. \frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t|t-1)} \quad (2.9)$$

$$C(\hat{x}(t|t-1)) = \left. \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=\hat{x}(t|t-1)} \quad (2.10)$$

Con lo presentado es posible la derivación del filtro de Kalman extendido [15], el cual se resume en la Tabla 2. De esta forma se preserva la distribución de probabilidad Gaussiana mediante la transición de la covarianza a través de una función lineal aproximada. Debido a su naturaleza, el EKF no garantiza optimalidad o convergencia en el caso general, sino que corresponde a una mejor alternativa frente al filtro de Kalman clásico cuando se trata con sistemas no lineales. A pesar de esto, ha encontrado aplicaciones en muchas áreas como seguimiento, navegación, procesos químicos, sismología, entre otros [16].

TABLA 2: ALGORITMO FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

Predicción	
$\hat{x}(t t-1) = g(\hat{x}(t-1 t-1), u(t-1))$	(predicción del estado)
$\tilde{P}(t t-1) = A(\hat{x}(t t-1))\tilde{P}(t-1 t-1)A^T(\hat{x}(t t-1)) + R_{ww}(t-1)$	(predicción de la covarianza)
Innovación	
$e(t) = y(t) - \hat{y}(t t-1) = y(t) - c(\hat{x}(t t-1))$	(innovación)
$R_{ee}(t) = C(\hat{x}(t t-1))\tilde{P}(t t-1)C^T(\hat{x}(t t-1)) + R_{vv}(t)$	(innovación de la covarianza)
Ganancia	
$K(t) = \tilde{P}(t t-1)C^T(\hat{x}(t t-1))R_{ee}^{-1}(t)$	(ganancia de Kalman)
Actualización	
$\hat{x}(t t) = \hat{x}(t t-1) + K(t)e(t)$	(actualización del estado)
$\tilde{P}(t t) = [I - K(t)C(\hat{x}(t t-1))]\tilde{P}(t t-1)$	(actualización de la covarianza)
Condiciones iniciales	
$\hat{x}(0 0), \quad \tilde{P}(0 0)$	
Jacobianos	
$A(\hat{x}(t t-1)) = \left. \frac{\partial g(x(t), u(t))}{\partial x(t)} \right _{x(t)=\hat{x}(t t-1)}, \quad C(\hat{x}(t t-1)) = \left. \frac{\partial h(x(t))}{\partial x(t)} \right _{x(t)=\hat{x}(t t-1)}$	

2.2.3. El filtro de Kalman unscented²

Una de las mayores falencias del EKF corresponde al tratamiento lineal de un conjunto de ecuaciones que no lo son. Esto deriva en una serie de problemas de aproximación, los cuales se reflejan principalmente en una estimación poco exacta de la covarianza del proceso estocástico real [9], [17]. Una mejora en este sentido se logra mediante el UKF, el cual se fundamenta en la idea de que es más fácil aproximar una distribución de probabilidad que una transformación no lineal arbitraria [13]. Más propiamente el UKF se basa en la selección de un conjunto determinístico de puntos en el espacio de estado, llamados *sigma points*, los cuales permiten capturar algunas de las propiedades inherentes de las distribuciones a estimar. Esencialmente, $2N + 1$ *sigma points* (N es la dimensión del espacio de estado) son escogidos en base a una descomposición por raíz cuadrada de la covarianza a priori. Estos puntos son propagados a través de la transformación no lineal del estado sin aproximaciones y luego la media y covarianza ponderada empírica de ellos es utilizada para caracterizar la predicción. Con este método, llamado “Transformación *Unscented*”, los primeros dos momentos (media y covarianza) de la distribución de probabilidad estimada son obtenidos con exactitud hasta, por lo menos, segundo orden para cualquier no linealidad [13], en contraste con el EKF que sólo tiene una exactitud de primer orden. Una secuencia similar permite generar la estimación para el valor esperado de la siguiente observación, así como su autocovarianza y covarianza cruzada con el estado predicho, elementos requeridos para el cálculo de la ganancia de Kalman y la corrección del estado estimado por verosimilitud.

La Tabla 3 resume el algoritmo del UKF, donde se han utilizado las siguientes definiciones para los pesos o ponderaciones: $W_0^{(m)} = \lambda/(N + \lambda)$, $W_0^{(c)} = \lambda/(N + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta)$, $W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1/(2(N + \lambda))$, $i = 1, \dots, 2N$. Además $\lambda = \alpha^2(N + \kappa) - N$ y $\gamma = \sqrt{(N + \lambda)}$ son parámetros de escala. La constante α determina la dispersión de los *sigma points* alrededor de \hat{x} y se escoge usualmente como $0.01 \leq \alpha \leq 1$. κ es otro parámetro de escala cuyo valor es normalmente 0 o $3 - N$. β corresponde a un grado de libertad adicional para incorporar cualquier conocimiento a priori extra (para distribuciones gaussianas $\beta = 2$ es óptimo). Por último notar que se ha definido la operación algebraica lineal de adición de un vector (u) a cada columna de una matriz (A) como $A \pm u$. Cabe destacar que el algoritmo no requiere del cómputo de derivadas de forma explícita, a diferencia del EKF.

² La traducción al español de “*unscented*” es “sin aroma” y su nombre se debe principalmente a razones históricas.

TABLA 3: ALGORITMO FILTRO DE KALMAN *UNSCENTED*

Cálculo de <i>sigma points</i> para el estado	
$\mathcal{X}_0(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1),$	
$\mathcal{X}_i(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1) + \left(\gamma \sqrt{\tilde{P}(t-1 t-1)} \right)_i,$	$i = 1 \dots N$
$\mathcal{X}_{i+N}(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1) - \left(\gamma \sqrt{\tilde{P}(t-1 t-1)} \right)_i,$	$i = 1 \dots N$
Predicción del estado	
$\mathcal{X}_i(t t-1) = g(\mathcal{X}_i(t-1 t-1), u(t-1))$	(transición no lineal)
$\hat{x}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(m)} \mathcal{X}_i(t t-1)$	(regresión del estado)
Predicción del error de estado	
$\tilde{\mathcal{X}}_i(t t-1) = \mathcal{X}_i(t t-1) - \hat{x}(t t-1)$	(error del estado)
$\tilde{P}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(c)} \tilde{\mathcal{X}}_i(t t-1) \tilde{\mathcal{X}}_i^T(t t-1) + R_{ww}(t-1)$	(predicción de la covarianza)
Cálculo de <i>sigma points</i> para la observación	
$\mathcal{X}_0(t t-1) = \hat{x}(t t-1),$	
$\mathcal{X}_i(t t-1) = \hat{x}(t t-1) + \left(\gamma \sqrt{\tilde{P}(t t-1)} \right)_i,$	$i = 1 \dots N$
$\mathcal{X}_{i+N}(t t-1) = \hat{x}(t t-1) - \left(\gamma \sqrt{\tilde{P}(t t-1)} \right)_i,$	$i = 1 \dots N$
Predicción de la observación	
$\mathcal{Y}(t t-1) = h(\mathcal{X}(t t-1))$	(observación no lineal)
$\hat{y}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_i(t t-1)$	(regresión de la observación)
Residuos de la predicción	
$\xi_i(t t-1) = \mathcal{Y}_i(t t-1) - \hat{y}(t t-1)$	(residuo de la predicción)
$R_{\xi\xi}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(c)} \xi_i(t t-1) \xi_i^T(t t-1) + R_{vv}(t)$	(autocovarianza residual)
Ganancia	
$R_{\tilde{x}\xi}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(c)} \tilde{\mathcal{X}}_i(t t-1) \xi_i^T(t t-1)$	(covarianza cruzada residual)
$K(t) = R_{\tilde{x}\xi}(t t-1) R_{\xi\xi}^{-1}(t t-1)$	(ganancia de Kalman)
Actualización	
$e(t) = y(t) - \hat{y}(t t-1)$	(innovación)
$\hat{x}(t t) = \hat{x}(t t-1) + K(t)e(t)$	(actualización del estado)
$\tilde{P}(t t) = \tilde{P}(t t-1) - K(t)R_{\xi\xi}(t t-1)K^T(t)$	(actualización de la covarianza)
Condiciones iniciales	
$\hat{x}(0 0), \quad \tilde{P}(0 0)$	

Una variante del UKF convencional, presentado en [18] y llamado *Square-Root Unscented Kalman Filter* (SR-UKF) fue desarrollado como una alternativa con mejores propiedades numéricas, en un esfuerzo por optimizar la parte computacionalmente más costosa (que demanda mayor procesamiento) del algoritmo, la cual es el cálculo de los *sigma points* en cada iteración. Este paso requiere obtener la raíz cuadrada de la matriz de covarianza del estado, es decir, S tal que $SS^T = \tilde{P}$. Una implementación eficiente de lo anterior, haciendo uso de factorización de Cholesky, tiene en general una complejidad $O(N^3/6)$ [19]. A pesar de que el UKF utiliza fundamentalmente la raíz cuadrada de \tilde{P} para sus cálculos, es la matriz de covarianza completa la que es actualizada en cada instante. En el SR-UKF, S se propaga en forma directa, evitando la necesidad de calcular raíces cuadradas de matrices en forma repetitiva. El algoritmo completo tiene una complejidad $O(N^3)$ al igual que el UKF estándar, pero con mejores propiedades numéricas cuando los ruidos de proceso son pequeños [20].

La forma raíz cuadrada del UKF hace uso de tres técnicas de álgebra lineal [19], descomposición QR, actualización del factor de Cholesky y mínimos cuadrados eficiente, las que se revisan brevemente a continuación:

- Descomposición QR: Corresponde a la factorización de una matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ en dos submatrices $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ y $R \in \mathbb{R}^{N \times M}$, tal que $A^T = QR$, siendo Q una matriz ortogonal ($QQ^T = I$) y R triangular superior, con $M \geq N$.
- Actualización del factor de Cholesky: Dada una matriz P simétrica y positiva definida, el factor de Cholesky corresponde a la única matriz triangular inferior L tal que $P = LL^T$. Si P evoluciona de una forma particular llamada “*rank-1 update/downdate*”, es decir, $P \pm \sqrt{v}uu^T$, entonces el factor de Cholesky se puede actualizar de forma directa sin recalcarlo de nuevo totalmente. Dicho algoritmo, desarrollado en [21], se encuentra disponible en Matlab como `cholupdate`.
- Mínimos cuadrados eficiente: La solución de la ecuación $(AA^T)x = A^Tb$ también corresponde a la solución del problema de mínimos cuadrados $Ax = b$. Éste puede ser resuelto en forma eficiente utilizando descomposición QR con pivoteo.

El algoritmo completo del SR-UKF se presenta en la Tabla 4, donde se utiliza la notación $\text{qr}\{\cdot\}$ para referirse a la descomposición QR de una matriz donde sólo la parte triangular superior es retornada. Además $\text{cholupdate}\{S, u, \pm v\}$ denota la actualización del factor de Cholesky mencionado previamente. Más aún, si u es una matriz, el resultado de la función anterior es M actualizaciones consecutivas utilizando las M columnas de u . Cabe destacar que los cálculos de covarianzas en el algoritmo original son reemplazados por el cálculo de sus respectivos factores de Cholesky (gracias a que las matrices de covarianza son siempre simétricas y positivas definidas). Esta operación se divide en dos pasos ($\text{qr}\{\cdot\}$ y $\text{cholupdate}\{\cdot\}$) debido a que el peso $W_0^{(c)}$ podría ser negativo [18]. Notar que la descomposición de Cholesky de la covarianza sólo se realiza una vez al inicio del filtrado.

TABLA 4: ALGORITMO SQUARE-ROOT UNSCENTED KALMAN FILTER

Cálculo de σ points para el estado	
$\mathcal{X}_0(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1),$	
$\mathcal{X}_i(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1) + (\gamma S(t-1 t-1))_i,$	$i = 1 \dots N$
$\mathcal{X}_{i+N}(t-1 t-1) = \hat{x}(t-1 t-1) - (\gamma S(t-1 t-1))_i,$	$i = 1 \dots N$
Predicción del estado	
$\mathcal{X}_i(t t-1) = g(\mathcal{X}_i(t-1 t-1), u(t-1))$	(transición no lineal)
$\hat{x}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(m)} \mathcal{X}_i(t t-1)$	(regresión del estado)
Predicción del error de estado	
$\tilde{\mathcal{X}}_i(t t-1) = \mathcal{X}_i(t t-1) - \hat{x}(t t-1)$	(error del estado)
$S(t t-1) = \text{qr} \left\{ \left[\sqrt{W_{1:2N}^{(c)}} \tilde{\mathcal{X}}_{1:2N}(t t-1), \sqrt{R_{ww}(t-1)} \right] \right\}$	(predicción del factor de Cholesky para la covarianza)
$S(t t-1) = \text{cholupdate} \{ S(t t-1), \tilde{\mathcal{X}}_0(t t-1), W_0^{(c)} \}$	(actualización del factor de Cholesky)
Cálculo de σ points para la observación	
$\mathcal{X}_0(t t-1) = \hat{x}(t t-1),$	
$\mathcal{X}_i(t t-1) = \hat{x}(t t-1) + (\gamma S(t t-1))_i,$	$i = 1 \dots N$
$\mathcal{X}_{i+N}(t t-1) = \hat{x}(t t-1) - (\gamma S(t t-1))_i,$	$i = 1 \dots N$
Predicción de la observación	
$\mathcal{Y}_i(t t-1) = h(\mathcal{X}_i(t t-1))$	(observación no lineal)
$\hat{y}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_i(t t-1)$	(regresión de la observación)
Residuos de la predicción	
$\xi_i(t t-1) = \mathcal{Y}_i(t t-1) - \hat{y}(t t-1)$	(residuo de la predicción)
$S_{\xi\xi}(t t-1) = \text{qr} \left\{ \left[\sqrt{W_{1:2N}^{(c)}} \xi_{1:2N}(t t-1), \sqrt{R_{vv}(t)} \right] \right\}$	(factor de Cholesky para la autocovarianza residual)
$S_{\xi\xi}(t t-1) = \text{cholupdate} \{ S_{\xi\xi}(t t-1), \xi_0(t t-1), W_0^{(c)} \}$	(actualización del factor de Cholesky)
Ganancia	
$R_{\tilde{x}\xi}(t t-1) = \sum_{i=0}^{2N} W_i^{(c)} \tilde{\mathcal{X}}_i(t t-1) \xi_i^T(t t-1)$	(covarianza cruzada residual)
$K(t) = (R_{\tilde{x}\xi}(t t-1) / S_{\xi\xi}^T(t t-1)) / S_{\xi\xi}(t t-1)$	(ganancia de Kalman)
Actualización	
$e(t) = y(t) - \hat{y}(t t-1)$	(innovación)
$\hat{x}(t) = \hat{x}(t t-1) + K(t)e(t)$	(actualización del estado)
$S(t) = \text{cholupdate} \{ S(t t-1), K(t)S_{\xi\xi}(t t-1), -1 \}$	(actualización del factor de Cholesky de la covarianza)
Condiciones iniciales	
$\hat{x}(0 0), \quad S(0 0) = \text{chol} \{ \tilde{P}(0 0) \}$	

2.3. Filtrado Bayesiano basado en partículas

2.3.1. La aproximación de Monte Carlo

Los esquemas Bayesianos de las secciones previas pretenden, todos, la estimación de distribuciones de probabilidad Gaussianas. Esto simplifica la tarea pues es sólo necesaria la caracterización de la media y la varianza para definir completamente la función de probabilidad. En caso que no se cumpla esta hipótesis el mejor estimador secuencial viene dado por la forma genérica mostrada en el Apartado 2.2.1. Las integrales, sin embargo, no presentan siempre una forma analítica cerrada e incluso su aproximación numérica puede tener grandes dificultades. La aproximación de Monte Carlo consiste en reemplazar estas distribuciones $\Pr(X)$ por muestreos de las mismas, de modo que un número suficientemente grande de muestras permita representar correctamente la función de origen (por ejemplo mediante un histograma). La clave de esta aproximación es poder generar muestras independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Esto último es difícil de realizar en la práctica, donde se incurre usualmente en dependencia entre las muestras o el uso de una propuesta de distribución $q(X)$, la cual es similar, pero no idéntica a la función de probabilidad objetivo $\Pr(X)$ [13]. No obstante, lo anterior no implica que las muestras no logren caracterizar adecuadamente la probabilidad de la distribución objetivo.

2.3.2. Muestreo de importancia

El muestreo de importancia o *importance sampling* es una técnica que generaliza la aproximación de Monte Carlo y permite el cómputo de esperanzas de una distribución de probabilidad, tomando muestras aleatorias de otra [13]. Esto es, dada una variable aleatoria X y funciones $f(\cdot)$ y $q(\cdot)$, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$I = \int_X f(x) dx = \int_X \left(\frac{f(x)}{q(x)} \right) q(x) dx, \quad \int q(x) dx = 1, \quad (2.11)$$

donde $q(x)$ es llamada la distribución de importancia y debe cumplir con contener el soporte de $f(x)$. Luego, utilizando la aproximación de Monte Carlo, se tiene que $q(x)$ puede representarse por con un conjunto de N_p muestras:

$$X(i) \sim q(x), \quad \hat{q}(x) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta(x - X(i)), \quad (2.12)$$

con $X(i)$ la i -ésima muestra y $\delta(x - a)$ el delta de Dirac centrado en a . De modo que reemplazando en la integral de (2.11) se obtiene el resultado buscado:

$$I \approx \int_X \left(\frac{f(x)}{q(x)} \right) \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta(x - X(i)) dx = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{f(X(i))}{q(X(i))}. \quad (2.13)$$

La utilidad de este método queda más clara en el contexto de estimación Bayesiana. Suponiendo que se posee un conjunto de variables dinámicas $X_t = \{x(0), \dots, x(t)\}$ y de mediciones $Y_t = \{y(0), \dots, y(t)\}$, se desea estimar la media de una función de estas variables $f(X_t)$, a través de una distribución de importancia $q(X_t|Y_t)$. Al igual que en (2.11):

$$\hat{f}(t) = E\{f(X_t)\} = \int f(X_t) \Pr(X_t|Y_t) dX_t = \int f(X_t) \left[\frac{\Pr(X_t|Y_t)}{q(X_t|Y_t)} \right] q(X_t|Y_t) dX_t. \quad (2.14)$$

Luego aplicando la regla de Bayes para $\Pr(X_t|Y_t)$ y definiendo el peso $W(t) = \Pr(Y_t|X_t) \Pr(X_t)/q(X_t|Y_t)$, se obtiene:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\Pr(Y_t)} \int W(t) f(X_t) q(X_t|Y_t) dX_t = \frac{E_q\{W(t) f(X_t)\}}{\Pr(Y_t)}. \quad (2.15)$$

Por otra parte la constante de normalización $\Pr(Y_t)$, la cual resulta poco útil debido a que no se conoce la probabilidad de las mediciones sin información acerca del estado, puede reescribirse gracias a la definición del peso $W(t)$:

$$\Pr(Y_t) = \int \Pr(Y_t|X_t) \Pr(X_t) dX_t = \int W(t) q(X_t|Y_t) dX_t = E_q\{W(t)\}. \quad (2.16)$$

De modo que (2.15) puede reescribirse en términos de expresiones conocidas, como en (2.17), donde además se ha utilizado la aproximación de Monte Carlo $q(X_t|Y_t) \approx 1/N_p \sum_{i=1}^{N_p} \delta(X_t - X_t(i))$, con $X_t(i) \sim q(X_t|Y_t)$ y la definición de pesos normalizados $\mathcal{W}_i(t) = W_i(t)/\sum_{i=1}^{N_p} W_i(t)$ para $W_i(t) = \Pr(Y_t|X_t(i)) \Pr(X_t(i))/q(X_t(i)|Y_t)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{E_q\{W(t) f(X_t)\}}{E_q\{W(t)\}} \approx \sum_{i=1}^{N_p} \mathcal{W}_i(t) f(X_t(i)). \quad (2.17)$$

Este resultado permite concluir que las muestras generadas por la distribución propuesta $q(X_t|Y_t)$, permiten aproximar la distribución oculta $\Pr(X_t|Y_t)$, mediante el reajuste de los pesos de cada muestra:

$$\hat{\Pr}(X_t|Y_t) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathcal{W}_i(t) \delta(X_t - X_t(i)). \quad (2.18)$$

2.3.3. El filtro de partículas

El filtro de partículas corresponde a un esquema para estimación secuencial del estado que hace uso de la aproximación de Monte Carlo y el muestreo de importancia condensados en un algoritmo de uso práctico. En particular el muestro de importancia se re expresa en forma secuencial, es decir, la definición de la sección anterior se escribe:

$$W(t) = \frac{\Pr(Y_t|X_t) \Pr(X_t)}{q(X_t|Y_t)} = \frac{\Pr(Y_t|X_t) \Pr(X_t)}{q(X_{t-1}|Y_{t-1})q(x(t)|X_{t-1}, Y_t)} \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow W(t) = W(t-1) \frac{\overbrace{\Pr(y(t)|x(t))}^{\text{Verosimilitud}} \overbrace{\Pr(x(t)|x(t-1))}^{\text{Transición}}}{q(x(t)|X_{t-1}, Y_t)}.$$

Con lo cual se explicita la dependencia del peso en el tiempo actual con el del instante anterior. Recordando además la caracterización del espacio de estado en (2.2), así como la notación correspondiente de sus probabilidades de transición y verosimilitud $A(x(t)|x(t-1))$ y $C(y(t)|x(t))$, respectivamente, y por último haciendo uso de la aproximación de Monte Carlo para representar la distribución de importancia a través de un muestreo de la misma, se obtiene la definición de peso para cada muestra o partícula i en el instante t : $\mathcal{W}_i(t)$.

$$x_i(t) \sim q(x(t)|X_{t-1}, Y_t)$$

$$W_i(t) = W_i(t-1) \times \frac{C(y(t)|x_i(t)) \times A(x(t)|x_i(t-1))}{q(x_i(t)|X_{t-1}(i), Y_t)}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{W}_i(t) = \frac{W_i(t)}{\sum_{i=1}^{N_p} W_i(t)}.$$

Más aún, si la distribución de importancia cumple con la hipótesis de Markov de primer orden, es decir que las probabilidades en el instante actual sólo dependen del estado en el tiempo anterior y la observación en el mismo instante, entonces las partículas y sus respectivos pesos se pueden expresar como:

$$x_i(t) \sim q(x(t)|x(t-1), y(t))$$

$$W_i(t) = W_i(t-1) \times \frac{C(y(t)|x_i(t)) \times A(x(t)|x_i(t-1))}{q(x(t)|x_i(t-1), y(t))}, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{W}_i(t) = \frac{W_i(t)}{\sum_{i=1}^{N_p} W_i(t)}.$$

Con lo cual la estimación a posteriori queda dada por la Ecuación (2.22), de forma similar a lo mostrado en (2.18), pero esta vez con una representación secuencial.

$$\hat{\Pr}(x(t)|Y_t) \approx \sum_{i=1}^{N_p} \mathcal{W}_i(t) \times \delta(x(t) - x_i(t)). \quad (2.22)$$

Las definiciones anteriores muestran los conceptos claves del filtro de partículas para la estimación de la distribución del estado de un sistema en forma genérica. Para aplicar lo anterior a un algoritmo de utilidad práctica es necesario definir apropiadamente la distribución de importancia. Esta selección es crítica para el correcto desempeño del método, puesto que se puede demostrar que la varianza de los pesos de las partículas aumenta en el tiempo, degenerando eventualmente a una sola partícula con todo el peso [22]. En este sentido, y como se demuestra también en [22], la función de importancia que minimiza la varianza de los pesos es:

$$q_{MV}(x(t)|x(t-1), y(t)) = \Pr(x(t)|x(t-1), y(t)). \quad (2.23)$$

Esta última, sin embargo, presenta dificultades prácticas en su uso para el cálculo de pesos, como la necesidad de muestrear de $\Pr(x(t)|x(t-1), y(t))$ y evaluar una integral que no tiene forma cerrada en el caso general: $\int C(y(t)|x(t)) \times A(x(t)|x(t-1)) dx(t)$ (Más detalles en [13]). Por esta razón se utiliza como alternativa para función de importancia a la transición a priori:

$$q(x(t)|x(t-1), y(t)) = \Pr(x(t)|x(t-1)) = A(x(t)|x(t-1)). \quad (2.24)$$

Con esta elección la actualización de los $W_i(t)$ se simplifica considerablemente, como se muestra en (2.25). Sin embargo la degeneración de las partículas antes mencionada se produce en forma rápida, requiriéndose otros métodos para compensar esta falla.

$$W_i(t) = W_i(t-1) \times C(y(t)|x_i(t)). \quad (2.25)$$

Uno de dichos mecanismos corresponde al remuestreo, el cual consiste en seleccionar nuevas partículas $\hat{x}_k(t)$ a partir de las originales $x_i(t)$ con una probabilidad proporcional a su peso $W_i(t)$, estadísticamente:

$$\Pr(\hat{x}_k(t) = x_i(t)) = \mathcal{W}_i(t), \quad i = 1, \dots, N_p, \quad (2.26)$$

o bien en forma abreviada $\hat{x}_i(t) \Rightarrow x_i(t)$. Así las partículas con mayor peso tienen mayor probabilidad de ser seleccionadas, incluso varias muestras de la misma partícula, mientras que las de menor tienden a extinguirse. Luego del remuestreo todas las partículas adquieren el mismo peso, de manera que se regulariza la distribución de $W_i(t)$. Esta técnica no se realiza en cada iteración del filtro de partículas, sino cuando se detecta que los pesos se encuentran suficientemente degenerados. Un posible criterio de decisión es cuando se cumple la condición presentada en (2.27), en que $Tresh$ corresponde a un valor entre 0 y N_p , típicamente $0.85N_p$.

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N_p} W_i^2(t)} \leq Thresh. \quad (2.27)$$

Con todos los conceptos anteriores es posible presentar el filtro de partículas en su forma algorítmica [10], tal como se muestra en la Tabla 5. Inicialmente se seleccionan las partículas a partir de la distribución inicial conocida del estado, partiendo todas con el mismo peso. Luego en cada iteración, cada una de las partículas evoluciona según el modelo de transición del sistema, escogiendo una realización del ruido de proceso individualmente. En seguida se recalculan y normalizan los pesos utilizando el peso en el instante anterior y la verosimilitud con la observación actual. Después se realiza el remuestreo de las partículas de ser necesario, para finalmente obtener la distribución a posteriori del estado.

TABLA 5: ALGORITMO FILTRO DE PARTÍCULAS

Inicialización	
$x_i(0) \sim \Pr(x(0)), \quad W_i(0) = \frac{1}{N_p}, \quad i = 1, \dots, N_p$	(muestreo)
Muestreo de importancia	
$x_i(t) \sim A(x(t) x_i(t-1)) \leftarrow A(x(t-1), u(t-1), w_i(t-1));$ $w_i \sim \Pr(w_i(t))$	(transición del estado)
Actualización de los pesos	
$W_i(t) = W_i(t-1) \times C(y(t) x_i(t)) \leftarrow C(x(t), u(t), v(t));$ $v \sim \Pr(v(t))$	(peso/verosimilitud)
Normalización de los pesos	
$W_i(t) = \frac{W_i(t)}{\sum_{i=1}^{N_p} W_i(t)}$	
Decisión de remuestreo	
$Remuestrear \text{ si: } \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_p} W_i^2(t)} \leq Thresh$	
Remuestreo	
$\hat{x}_i(t) \Rightarrow x_i(t)$	
Distribución	
$\hat{\Pr}(x(t) Y_t) \approx \sum_{i=1}^{N_p} W_i(t) \delta(x(t) - \hat{x}_i(t))$	(distribución a posteriori)

2.4. Pronóstico de fallas mediante filtro de partículas

Pronosticar una falla significa determinar, con cierto grado de seguridad, el momento en que la condición de un equipo o componente se torna demasiado peligrosa para seguir operando. Este estado de peligro del dispositivo debe ser adecuadamente caracterizado en función de alguna variable medible, directa o indirectamente, de modo de poder tomar decisiones en base a información objetiva. La condición “demasiado peligrosa” corresponde a un umbral para el estado de peligro, que depende tanto de la aversión al riesgo de quien lo determina como del valor del mismo que genera un evento catastrófico. Si la magnitud de peligro forma parte del vector de estado de un sistema, pronosticar la falla requiere de la estimación y predicción del estado. Esto último se puede realizar de muchas maneras y una descripción extensiva de los distintos métodos se presenta en [23]. En particular el filtro de partículas corresponde a una herramienta capaz de resolver esta tarea. Además de la estimación del estado en el momento presente, explicada en el Apartado 2.3, el FP permite la predicción del estado en instantes futuros mediante la evolución de cada partícula según el modelo no lineal del proceso, mostrado en (2.2). Debido a que no se pueden obtener conocer las entradas futuras al sistema $u(t+1:t+p)$, la alternativa consiste en caracterizarlas estadísticamente en base a las mediciones pasadas, tal que sea posible generar realizaciones representativas de las mismas para el horizonte de predicción p . Cabe señalar que en la etapa de predicción no existen observaciones y , por lo tanto, no se pueden realizar correcciones a los pesos de las partículas. Como consecuencia, la varianza de las estimaciones aumenta indefinidamente en el tiempo, por lo que se deben utilizar enfoques apropiados como, por ejemplo, el uso de ruidos de proceso más conservadores, o variaciones al FP clásico, como su versión regularizada [24], [25]. En términos probabilísticos la predicción de la distribución del estado puede expresarse como en (2.28), donde la segunda igualdad hace uso de la aproximación de Monte Carlo.

$$\begin{aligned} \widehat{\Pr}(x(t+p)|Y_t) &= \int \widehat{\Pr}(x(t)|Y_t) \prod_{j=t+1}^{t+p} \Pr(x(j)|x(j-1)) dx(t:t+p-1) \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} \mathcal{W}_i(t) \int \dots \int \Pr(x(t+1)|x_i(t)) \prod_{j=t+2}^{t+p} \Pr(x(j)|x(j-1)) dx(t+1:t+p-1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definiendo la región de peligro por sus límites superior e inferior, H_{ub} y H_{lb} respectivamente, es posible caracterizar la probabilidad del tiempo de falla (*ToF* o *Time of Failure*) según (2.29) y, con ella, su valor esperado e intervalo de confianza, en base a las cuales es posible tomar la decisión si acaso el equipo ha entrado en falla.

$$\widehat{\Pr}(ToF) = \sum_{i=1}^{N_p} \Pr\{H_{lb} \leq x_i(ToF) \leq H_{ub}\} \mathcal{W}_i(ToF). \quad (2.29)$$

2.5. Modelación de eventos aleatorios mediante cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son de gran utilidad en el pronóstico de fallas, ya que permiten caracterizar de forma estadística las entradas a un sistema para generar realizaciones futuras de las mismas, lo cual corresponde a un aspecto crítico en la capacidad de predicción de un modelo que posee entradas externas. La forma en la que se realiza esta caracterización es utilizando la información pasada de las entradas al proceso para definir los valores de los estados y las probabilidades de transición entre ellos [26], [27]. Por ejemplo, utilizando una cadena de dos estados y para el caso de una entrada unidimensional, se pueden catalogar las entradas pasadas entre “altas” o “bajas”, según si su valor estuvo sobre o bajo un umbral, luego con el registro histórico se define un valor para “alta” y otro para “baja”, se decide a qué categoría pertenece cada medición tomada y se utiliza la frecuencia del cambio entre los estados para definir una matriz de transición.

Las cadenas de Markov son modelos matemáticos simples para representar fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo. Éstas consisten en un número finito de estados con probabilidades de transición entre ellos, las cuales no dependen de los estados en que se haya estado en el pasado, es decir, la cadena de Markov no tiene memoria.

$$\Pr\{X_{k+1} = s_{k+1} | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_k = s_k\} = \Pr\{X_{k+1} = s_{k+1} | X_k = s_k\}, \quad (2.30)$$

donde $k \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ y $s_k \in S$ estados de un conjunto finito. De esta forma, las probabilidades de transición $P_{i,j}$ entre los estados de una cadena de Markov pueden ser representadas por una matriz estocástica $P = (P_{i,j}; i, j \in S)$, donde la suma de cada fila ($P_{i,j}; j \in S$) resulta 1.

Otra propiedad de las cadenas de Markov es que la probabilidad de evolucionar del estado i en el instante k , al estado j en el instante $k + m$, es independiente de k (homogeneidad). Esta condición equivale a imponer que la matriz de probabilidad de estado P es constante e independiente de k . De modo que la evolución de la cadena queda definida solamente por la probabilidad inicial del sistema, $\Pr\{X_0 = s_0\}$, y por la matriz de probabilidades de transición P .

2.6. Lazos externos de corrección

Los lazos externos de corrección (OFCL, por sus siglas en inglés) juegan un importante rol en los algoritmos de pronóstico en línea, asegurando tanto precisión como exactitud de las estimaciones para el tiempo de falla. Estos lazos de corrección típicamente miden la calidad del modelo asociado [28], [29], a través del análisis del error de predicción a corto plazo, y mejoran el desempeño del algoritmo, modificando ya sea la estructura del modelo [30] o actualizando los hiper-parámetros que definen el ruido de proceso u observación en las ecuaciones [28], [30], [31]. Existen una variedad de diferentes enfoques para implementar lazos de corrección apropiados, como reglas heurísticas, sistemas difusos expertos, control neuronal, control óptimo, entre otros. Particularmente [30] propone un método para modificar la varianza del ruido de proceso $w(t)$, dependiendo si el error de predicción sobre un horizonte s a partir de un tiempo t , $e^s(t)$, es mayor o menor que un umbral determinado e^{th} . La expresión (2.31) presenta la regla de decisión, donde $[p, q]$ son tales que $0 < p < 1$ y $1 < q$, de modo que la varianza aumenta si la predicción es mala o se reduce si ésta es acertada.

$$\text{var}(w(t)) = \begin{cases} p \cdot \text{var}(w(t)), & |e^s(t)| \leq e^{th} \\ q \cdot \text{var}(w(t)), & |e^s(t)| > e^{th} \end{cases} \quad (2.31)$$

La literatura deja abierta la puerta a otros tipos de leyes de ajuste, que puedan resultar más beneficiosos dependiendo de la naturaleza del problema con el que se trate.

2.7. Medida de desempeño en pronóstico

La evaluación de la capacidad de un algoritmo para predecir un tiempo de falla (ToF) se puede hacer considerando diversas características como su precisión, exactitud o estabilidad del tiempo predicho. Al respecto cabe mencionar que la exactitud está definida como la proximidad entre un resultado y el valor de referencia aceptado, mientras que la precisión consiste en el grado de concordancia entre ensayos independientes obtenidos bajo condiciones estipuladas.

2.7.1. Índice de precisión

Este índice considera el ancho relativo del intervalo de 95% confianza de la estimación del ToF en el tiempo t (CI_t), cuando se compara con su valor esperado en el mismo instante ($E_t\{ToF\}$) [30].

$$I_1(t) = e^{-\left(\frac{\text{sup}(CI_t) - \text{inf}(CI_t)}{E_t\{ToF\} - t}\right)}, \quad (2.32)$$

$$0 < I_1(t) \leq 1, \forall t \in [1, E_t\{ToF\}], t \in \mathbb{N}.$$

A través de esta medida se cuantifica el concepto de “mientras más datos procesa el algoritmo, más preciso debería ser el resultado del pronóstico”. Resultados precisos de pronóstico están asociados con valores de $I_1(t) \sim 1$.

2.7.2. Índice de precisión-exactitud

Este índice representa la cantidad de sesgo en la estimación del ToF , relativo al ancho del correspondiente intervalo de 95% de confianza (CI_t), y penaliza el hecho de que el valor esperado estimado sea mayor que el tiempo de falla real ($Ground Truth$) [30].

$$I_2(t) = e^{-\left(\frac{GroundTruth\{ToF\}-E_t\{ToF\}}{\sup(CI_t)-\inf(CI_t)}\right)}, \quad (2.33)$$
$$0 < I_2(t), \forall t \in [1, E_t\{ToF\}], t \in \mathbb{N}.$$

Resultados de pronóstico exactos están asociados con valores de este índice tales que $0 \leq 1 - I_2(t) < \varepsilon$, donde ε es una constante positiva pequeña.

2.6.3. Índice de estabilidad en línea

Corresponde a una medida de la capacidad del algoritmo de entregar resultados de pronóstico consistentes en el tiempo. Éste considera la evolución en el tiempo del valor esperado condicional del tiempo de falla, $E_t\{ToF\}$, y cuantifica el concepto de “mientras más datos procese el algoritmo, más estable debería ser el resultado de pronóstico” [30].

$$I_3(t) = \sqrt{\text{Var}(E_t\{ToF\})}, \quad (2.34)$$
$$0 \leq I_3(t), \forall t \in \mathbb{N}.$$

Resultados estables están asociados con valores pequeños de este índice.

2.8. Estimación y predicción del estado de carga en dispositivos de almacenamiento de energía

2.8.1. Estado de carga y dispositivos de almacenamiento de energía

El estado de carga o SOC, por sus siglas del inglés, se define como la cantidad de energía contenida en un dispositivo de almacenamiento (*Energy Storage Device* o ESD). Estos dispositivos pueden consistir en pilas o baterías de diversos tipos, así como también capacitores eléctricos. Tener información acerca del SOC de la batería, es crítico para la implementación de estrategias de control óptimo para el proceso de carga / descarga del ESD [32]. Es por esta razón que hoy en día es de suma importancia contar con un método capaz de estimar y, según el perfil de uso futuro, predecir en línea el SOC de un ESD, que entregue resultados con apropiada exactitud y precisión.

2.8.2. Caracterización del estado de carga

Una de las principales dificultades que se tiene al estimar el SOC es que éste no se puede medir directamente, por lo tanto, hay que estimar su valor utilizando métodos indirectos, midiendo otros parámetros de los acumuladores de energía [32], [33], [34], [35]. Por otra parte, al estimar el SOC también se deben considerar los principales factores que lo afectan tales como la temperatura, las tasas de carga/descarga, la histéresis, la edad del ESD y la auto-descarga [32]. Actualmente existen diversos métodos para estimar el SOC. Una de las maneras más directas de hacerlo es trabajar con los modelos químicos de las baterías. Estos requieren mediciones extremadamente precisas además de un gran número de variables en el modelo [32], [36], lo que implica un alto costo computacional y limita el estudio a uno fuera de línea. Es por esto que se ha tendido a recurrir a otras técnicas que sólo requieren de los parámetros eléctricos y ambientales de la batería como son la corriente, el voltaje en bornes y la temperatura. De esta manera, los métodos más populares para la estimación del SOC corresponden al contador de Ampere-hora, a la medición de la resistencia interna y a la medición del voltaje en circuito abierto (OCV, por sus siglas en inglés) [32], [36], [37], [33], [35], [38], [39].

El contador de Ampere-hora pretende estimar la capacidad del acumulador a través de la integración de la corriente durante el ciclo de carga/descarga. Este método tiene la ventaja de poder implementarse en línea, sin embargo tiene la desventaja de necesitar mediciones muy precisas, ser susceptible a “error de arrastre” en sus mediciones, es sensible a corrientes parasitas, no considera la pérdida de corriente interna, necesita un SOC de referencia con el cual realizar la comparación de sus resultados (típicamente su capacidad máxima nominal), entre otras [32], [36], [34], [35], [39]. El método de la medición de la resistencia interna tiene la ventaja de aportar con información valiosa para la estimación de otro parámetro importante de la batería, el estado de salud (SOH, por sus siglas en inglés), sin embargo cuenta con la desventaja de obtener buenos resultados sólo por pequeños intervalos de tiempo, lo que lleva a su baja aceptación [32], [40]. Por otra parte, el método OCV cuenta con la ventaja de no necesitar información previa al momento de la medida y tener una relación directa con el SOC (a mayor SOC mayor OCV [39]). Lamentablemente, para realizar esta medición el ESD debe contar con un prolongado tiempo de descanso (no debe circular corriente) lo que obstaculiza su uso en sistemas donde los acumuladores no tienen el tiempo de descanso suficiente, y además imposibilita su uso en línea [32], [35], [36], [39].

Otro método bastante utilizado es la *Electrochemical Impedance Spectroscopy* (EIS). Las ventajas que presenta éste es que aporta con información para el estudio del SOH de manera no invasiva y con buenos resultados. Sin embargo, la gran desventaja es que necesita de costosos equipos para realizar las mediciones y que, por lo tanto, en la práctica resulta imposible su utilización en forma masiva [32], [36], [37], [41], [42].

Otro enfoque para la estimación del SOC son los métodos capaces de trabajar con modelos empíricos y/o solo con información de los parámetros de la batería. En la actualidad, los más utilizados en este enfoque son lógica difusa, redes neuronales, filtro extendido de Kalman, entre otros. En algunas investigaciones se ha utilizado la lógica difusa para modelar la relación entre el SOC del ESD y sus parámetros medidos a través de la Impedancia Espectroscópica [36], esta técnica también se ha utilizado en trabajos que cuentan con información escasa y contradictoria [35], [43]. Por otra parte, esta metodología también se ha usado para estimar directamente el SOC y el SOH de acumuladores de energía [44]. Otro método ampliamente conocido son las redes neuronales, éstas permiten caracterizar empíricamente el ESD mediante información de entrenamiento o prueba con la cual se pueden generar modelos no-lineales, lo que otorga una ventaja sobre otras técnicas. Luego, con el modelo generado es posible realizar tanto estimaciones como predicciones del SOC; sin embargo, sus desventajas están relacionadas con el sobre-ajuste del modelo a la información de entrenamiento y a otorgar resultados en óptimos locales [32], [33], [35], [36], [41]. Una solución interesante es modelar los ESD a través de sus circuitos eléctricos equivalentes, con los que se busca representar los principios fisicoquímicos de los acumuladores. Algunos de estos circuitos se encuentran explicados en detalle en [32], [35], [37], [38], [39], [40], [41], [42]. Recientemente, en [1] y [26], el modelo de estado de la batería se ha obtenido mediante un esquema empírico, utilizando nociones de equivalentes eléctricos y ajuste de la curva de voltaje en descarga, logrando notables resultados. El modelo en [1], presentado en (2.35), considera tan sólo un vector de dos estados (x_1, x_2) , en que el primero se puede interpretar como el módulo de la impedancia interna de la batería y el segundo corresponde al estado de carga en términos relativos a su capacidad máxima o nominal E_{crit} . La ecuación de observación $v(t)$ caracteriza el voltaje medido durante la descarga de la batería y está expresada en función de los parámetros v_0 , v_L , α , β y γ , los cuales deben ser estimados fuera de línea para lograr una buena concordancia con los resultados experimentales de cada ESD en particular. Los ruidos de proceso (ω_1 y ω_2) y observación (η) se asumen Gaussianos. Es importante mencionar que ω_2 se encuentra correlacionado con η , ya que la evolución en el tiempo del estado x_2 depende de las mediciones de voltaje.

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + \omega_1(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) - v(t) \cdot i(t) \cdot \Delta t \cdot E_{crit}^{-1} + \omega_2(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

$$v(t) = v_L + (v_0 - v_L)e^{\gamma(x_2(t)-1)} + \alpha v_L(x_2(t) - 1) + (1 - \alpha)v_L \left(e^{-\beta} - e^{-\beta\sqrt{x_2(t)}} \right) - i(t)x_1(t) + \eta(t).$$

2.8.3. Estimación y predicción del estado de carga

Debido a la no linealidad de los modelos para el SOC, como en (2.35), uno de los métodos más utilizados para estimación corresponde a la técnica Bayesiana sub-óptima del EKF, explicado en la Sección 2.2.2. La desventaja de este método surge al momento de realizar la estimación a n -pasos (predicción) ya que los errores de aproximación debidos a la linealización son demasiado importantes para no ser considerados [32], [36], [42], [45], [46]. En este sentido, los métodos secuenciales de Monte Carlo (filtro de partículas) han demostrado un buen desempeño al trabajar en procesos de estimación y predicción con modelos no lineales [47]. En particular, hay investigaciones en estimación y predicción del SOC y SOH de ESD [1], [38], [41], [42], [43], [48]. Una alternativa interesante al FP corresponde al filtro de Kalman *unscented*, el cual también se ha aplicado recientemente al problema mencionado [49]. Éste destaca por su buen desempeño frente a problemas con ecuaciones no lineales y su capacidad de implementación de forma computacionalmente muy eficiente [18]. Por esta razón surge como un desarrollo relevante el comparar estas últimas dos herramientas identificando las ventajas de cada una.

Otra técnica complementaria a los algoritmos mencionados, y aplicable a cada uno de ellos, son los lazos de corrección externos expuestos en 2.6, los cuales han sido aplicados con éxito en otros problemas de estimación y pronóstico [28], [29], [30], por lo que resulta interesante analizar su impacto.

Capítulo 3: Desarrollo e implementación de los métodos de estimación del estado-de-carga

3.1. Base de datos

Los datos de voltaje y corriente que se utilizan, correspondientes a la descarga de una celda de ion-litio, son idénticos a dos de los presentados en [1], los cuales se grafican en la Figura 1. En la Figura 1.a) se muestran los valores de corriente y voltaje que corresponden a la caracterización del uso de un vehículo eléctrico dentro de la ciudad, específicamente el *Federal Urban Driving Schedule* (FUDS), apropiadamente escalado para una sola celda de batería. El perfil en la Figura 1.b) presenta los datos obtenidos mediante una simulación de un robot de 4 ruedas moviéndose por un terreno irregular. Los conjuntos de datos fueron obtenidos a partir de dos baterías distintas y el detalle su generación se presenta en extensión en [1]. En particular en el trabajo realizado para esta Memoria, el perfil en la Figura 1.a) es el de mayor uso y es éste el que se utiliza para presentar los resultados en el Capítulo 4.

Por último, la Tabla 6 muestra los valores de los parámetros del modelo de evolución del estado descrito en la Sección 2.8.2, para cada conjunto de datos, así como las características de sus ruidos de proceso y observación, los cuales son asumidos Gaussianos y de media nula, y el valor experimental de su resistencia interna.

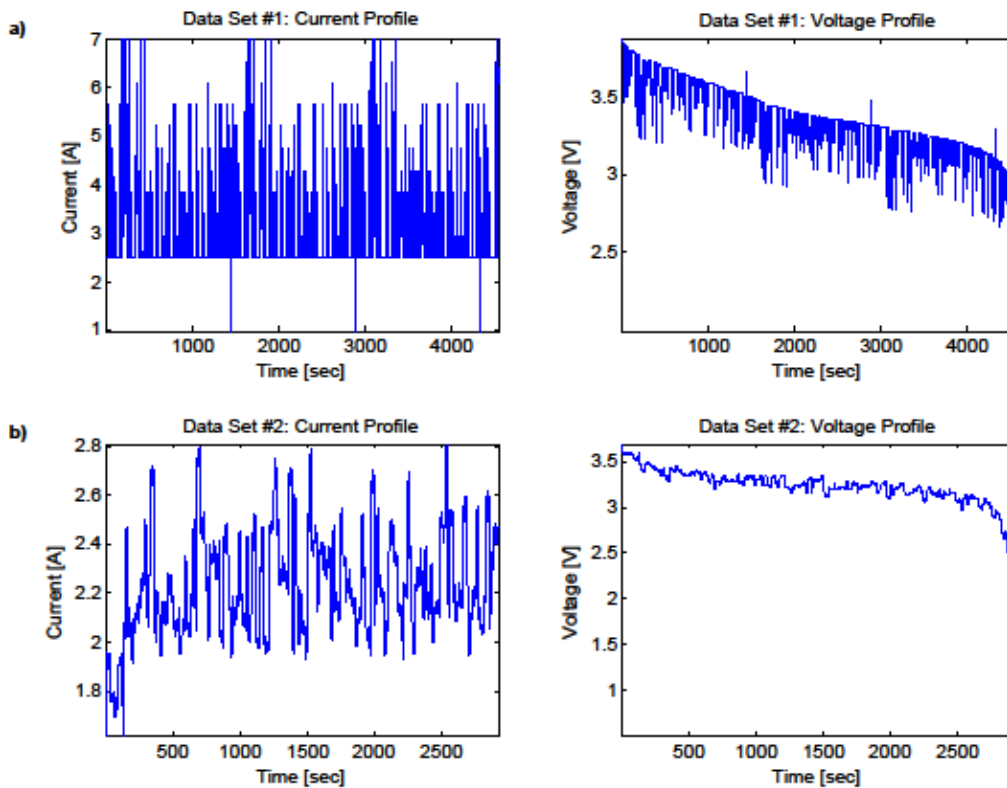


FIGURA 1: PERFILES DE VOLTAJE Y CORRIENTE PARA DESCARGAS DE CELDA DE ION-LITIO. (a) DESCARGA TIPO FUDS. (b) DESCARGA SEGÚN SIMULACIÓN ROBOT TERRESTRE DE 4 RUEDAS.

TABLA 6: VALORES DE PARÁMETROS PARA CADA CONJUNTO DE DATOS

Símbolo	Descripción	Valor Set #1	Valor Set #2
E_{crit}	Parámetro modelo de batería	46858	20934
Δt	Parámetro modelo de batería	1	1
v_L	Parámetro modelo de batería	3.9974	3.9773
v_0	Parámetro modelo de batería	4.144	4.12
α	Parámetro modelo de batería	0.1469	0.0776
β	Parámetro modelo de batería	17	16
γ	Parámetro modelo de batería	10.4954	19.6445
R_{ww}	Matriz de covarianza del ruido de proceso	$\begin{bmatrix} 0.0015^2 & 0 \\ 0 & 0.0055^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0011^2 & 0 \\ 0 & 0.0045^2 \end{bmatrix}$
R_{vv}	Covarianza del ruido de observación	0.067	0.057
r_0	Resistencia interna experimental	0.1	0.3

3.2. Filtro de partículas base

El filtro de partículas base, que se utiliza para iniciar el desarrollo del trabajo, fue proporcionado por el Profesor Guía, Dr. Marcos Orchard, y Daniel Pola, graduado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, mención Ingeniería Eléctrica. Éste corresponde a un FP con $N_p = 40$ partículas, OFCL básico y *resampling* según la Ecuación (2.27) del Capítulo 2 y fue generado como resultado de la investigación conducida en [1]. El modelo utilizado con este algoritmo es el que fue presentado en la Sección 2.8.2 y en particular las ecuaciones se muestran nuevamente en (3.1).

$$\begin{cases}
 x_1(t+1) = x_1(t) + \omega_1(t) \\
 x_2(t+1) = x_2(t) - v(t) \cdot i(t) \cdot \Delta t \cdot E_{crit}^{-1} + \omega_2(t)
 \end{cases}
 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 v(t) = & v_L + (v_0 - v_L)e^{\gamma(x_2(t)-1)} + \alpha v_L(x_2(t) - 1) \\
 & + (1 - \alpha)v_L(e^{-\beta} - e^{-\beta\sqrt{x_2(t)}}) - i(t)x_1(t) + \eta(t).
 \end{aligned}$$

El lazo de corrección externo u OFCL básico implementado en este método de estimación considera la disminución del ruido de proceso asociado al estado de carga en el tiempo, a partir de un instante y con una cota inferior determinados. Es decir, si $w_2(t)$ es el ruido de proceso asociado al estado de carga, entonces el OFCL es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Si: } t > 200, \\
 & \text{entonces: } std(\omega_2(t+1)) = \max(std(\omega_2(t))/1.01, 2 \cdot 10^{-4}),
 \end{aligned}$$

donde $std(\omega_2(t))$ es la desviación estándar del ruido de proceso ω_2 en el instante de tiempo t . Esto corresponde sólo a una forma básica de lazo de corrección debido a que no se toma en cuenta el desempeño del filtro de partículas, sino que se opta por disminuir el ruido bajo el supuesto de que existe menos incertidumbre añadida a la estimación del estado a medida que el filtro ha recibido una mayor cantidad de información.

Con estas mecánicas, el FP estima iterativamente el SOC de la celda de batería a medida que nuevas mediciones de voltaje y corriente son adquiridas. El esquema completo, sin embargo, considera no sólo filtrado de los estados del proceso, sino que también pronóstico de la descarga de la celda de ion-litio. Esto requiere de una predicción a largo plazo, para la cual el modelo del sistema es utilizado, en conjunto con una versión regularizada del filtro de partículas [47]. Aplicando sucesivamente las ecuaciones que describen la evolución del estado, bajo un esquema de partículas, es posible caracterizar probabilísticamente el momento en el que la batería se descarga, es decir, cuando su SOC cae bajo un umbral o zona de peligro determinada. No obstante, lo anterior requiere conocer cuál será la corriente demandada a la celda en el futuro. Para estos efectos, en el trabajo realizado en [1] se resolvió caracterizar estadísticamente el uso de la batería, o demanda de corriente pasada según una cadena de Markov de dos estados, los cuales corresponden a una corriente “alta” y una “baja”. Los valores de “alta” y “baja” se determinan según las mediciones históricas de demanda hacia la celda de ion-litio, al igual que las probabilidades de transición entre dichos estados. Una descripción más completa de esta metodología de caracterización estadística se puede encontrar en [26]. De este modo, y una vez determinada la cadena de Markov, es posible generar realizaciones de posibles corrientes futuras que serían requeridas a la batería. En [1], 25 realizaciones de corrientes son utilizadas para pronóstico, de modo que el tiempo de descarga obtenido en un determinado momento corresponde al promedio de esta cantidad de posibles escenarios. En cuanto a la descarga en sí misma, ésta se define en términos de una zona de peligro que comprende un porcentaje de carga entre 5.5% y 4.5% volviéndose más crítica la condición a medida que las partículas se acercan a umbral inferior. En el cálculo de la distribución del tiempo de falla del esquema de pronóstico, lo anterior se traduce en que el peso de cada partícula de la Ecuación (2.29) se modifica según:

$$\mathcal{W}'_i(ToF) = \mathcal{W}_i(ToF) \cdot \min\left(\frac{0.055 - |\hat{x}_{i,2}(ToF)|}{0.055 - 0.045}, 1\right), \quad (3.2)$$

donde $\hat{x}_{i,2}$ corresponde al valor estimado para el segundo estado (SOC) de la partícula i .

3.3. Modelo nuevo de batería

Las ecuaciones de descarga de una celda de ion-litio presentadas en (3.1) poseen una leve inconsistencia respecto de una modelación en espacio de estado tradicional, la cual es que la evolución del segundo estado depende de la salida del sistema. Dado que la salida está expresada como una función del estado y la entrada, lo correcto es que dicha función ocupe el lugar de la salida, $v(t)$, en la ecuación de x_2 , tal como se muestra en (3.3). Esto es de particular importancia en los algoritmos de estimación ya que la salida del sistema corresponde a un dato, mientras que el valor de los estados es un supuesto calculado por el método en base a la evidencia. La razón por la que en [1] se usa el modelo (3.1), es que para el filtro de partículas es computacionalmente menos costoso utilizar una variable única, que calcular una expresión para cada partícula individualmente, además del hecho que el sensor de voltaje es bastante bueno. En lo sucesivo, los algoritmos implementados hacen uso del nuevo modelo (3.3) para describir la evolución del estado del sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t+1) = x_1(t) + \omega_1(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) \\ \quad - \left(v_L + (v_o - v_L)e^{\gamma(x_2(t)-1)} + \alpha v_L(x_2(t) - 1) \right. \\ \quad \left. + (1 - \alpha)v_L \left(e^{-\beta} - e^{-\beta\sqrt{x_2(t)}} \right) - i(t)x_1(t) \right) \cdot i(t) \cdot \Delta t \cdot E_{crit}^{-1} \\ \quad + \omega_2(t) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$v(t) = v_L + (v_o - v_L)e^{\gamma(x_2(t)-1)} + \alpha v_L(x_2(t) - 1) \\ + (1 - \alpha)v_L \left(e^{-\beta} - e^{-\beta\sqrt{x_2(t)}} \right) - i(t)x_1(t) + \eta(t).$$

3.4. Filtro de Kalman unscented

El UKF que se implementa corresponde a la versión clásica mostrada en la Tabla 3 de la Sección 2.2.3, con la salvedad de que la raíz cuadrada de la matriz de covarianza es reemplazada por su factor de Cholesky, ya que éste cumple las propiedades que se requieren y su cálculo resulta computacionalmente más eficiente en la plataforma en que se trabaja. Adicionalmente, y en forma posterior, se agrega un lazo de corrección externo, el cual se explica en el siguiente apartado. Los valores específicos de los parámetros del UKF se muestran en la Tabla 7.

TABLA 7: VALORES DE PARÁMETROS PARA UKF

Símbolo	Descripción	Valor
N	Número de estados	2
α	Parámetro de escala	1
β	Grado de libertad	0
κ	Parámetro de escala	1

Respecto de la etapa de pronóstico del algoritmo cabe destacar que se mantiene la estructura original de [1] basada en filtro de partículas. Esto significa que si en determinado instante de tiempo desea realizarse el pronóstico, entonces es necesario transformar la estimación del estado de una representación mediante una Gaussiana (media y covarianza) a una mediante partículas. La forma en la que se implementa esto último es generando un muestreo de la Gaussiana multidimensional obtenida mediante el UKF para representar la distribución de densidad de probabilidad del estado, donde cada muestra corresponde a la posición de una partícula y el peso de éstas es el mismo para todas e igual a $1/N_p$, donde $N_p = 40$ es el número de partículas.

3.5. Corrección con lazos externos

Lazos de corrección externos u OFCL se implementan tanto en el filtro de Kalman *unscented* desarrollado, como en el filtro de partículas utilizado como base de comparación, al cual además se le modifica el modelo de evolución de estado. Acorde a lo presentado en la Sección 2.6, el lazo de corrección que se diseña en este trabajo actúa sobre la desviación estándar del ruido de proceso, el cual se asume Gaussiano y de media cero. No obstante, la mecánica de acción del lazo que se propone no se basa en el error de predicción a corto plazo, sino en el error de observación acumulado. Esto se debe a la naturaleza de los datos. La salida de la celda de batería corresponde al voltaje de la misma. Se puede observar, de la base de datos, que dicho voltaje no tiene variaciones considerables en intervalos de tiempo pequeños (menores a 30 segundos) durante la mayor parte de la descarga, más aun la caída de voltaje durante dicho intervalo es menor al ruido de observación. De modo que una predicción a corto plazo no permite una evaluación del desempeño del modelo. Aumentar el horizonte de predicción tampoco resulta una solución práctica, dado que esto significa acumular predicciones de voltaje para todo el horizonte, lo cual requiere una mayor cantidad de memoria. El uso del error de observación acumulado soluciona el problema de la memoria necesaria y además permite la evaluación del desempeño del modelo gracias a que puede detectar inconsistencias entre las mediciones y las estimaciones de la salida del sistema en horizontes temporales pasados. Aclarado lo anterior, la lógica propuesta es:

Si: $t > t_{min}$,
entonces:

$$e_{acum} = e_{acum} + |e_{obs}|$$

$$\text{Si: } e_{acum} \leq e_{Th}$$

$$std(\omega_1(t)) = \max(p_1 \cdot std(\omega_1(t)), \underline{std}_1)$$

$$std(\omega_2(t)) = \max(p_2 \cdot std(\omega_2(t)), \underline{std}_2),$$

sino:

$$e_{acum} = 0$$

$$std(\omega_1(t)) = q_1 \cdot std(\omega_1(t))$$

$$std(\omega_2(t)) = q_2 \cdot std(\omega_2(t)),$$

donde t_{min} corresponde al instante a partir del cual comienza el funcionamiento del OFCL; e_{obs} es el error de observación, es decir, la diferencia entre la medición adquirida para la salida del sistema y aquella esperada por el algoritmo de filtrado; e_{acum} es una variable que acumula los errores de observación pasados y cuyo valor inicial es cero; e_{Th} denota el umbral de decisión para modificar el ruido de proceso, si el error acumulado está bajo este umbral, la desviación estándar del ruido de proceso disminuye, por otra parte si el error acumulado resulta superior a e_{Th} , la desviación estándar aumenta. Luego, p_1 y p_2 son constantes cuyo valor se encuentra entre 0 y 1, mientras que q_1 y q_2 son constantes mayores que 1. Por último, \underline{std}_1 y \underline{std}_2 corresponden a las cotas inferiores, bajo las cuales no se pueden disminuir las desviaciones estándar.

Cabe notar que la decisión de aumentar el ruido de proceso, va acompañada de un reinicio del error acumulado, esto con la finalidad de permitir al algoritmo un intervalo de tiempo para corregir su estimación antes de continuar aumentando la incerteza. En caso que las observaciones sigan siendo poco verosímiles, el error acumulado volverá a sobrepasar el umbral y el OFCL volverá a aumentar los ruidos de proceso. Por otra parte, si pequeños errores de observación, acumulados durante un prolongado horizonte de tiempo, llegasen a superar el umbral de

activación, el aumento del ruido sólo se produciría una vez en dicho horizonte temporal y, por lo tanto, su efecto no sería determinante en el desempeño del método. La razón de utilizar una acumulación de todo el error pasado y no, por ejemplo, una ventana de tiempo, es que la ventana de tiempo conlleva necesariamente el almacenamiento de los errores de observación en cada instante de tiempo dentro de ella, mientras que el acumulado total es una sola variable.

La Tabla 8 resume los valores de los parámetros para los lazos de corrección, tanto para el filtro de Kalman *unscented*, como para el de partículas. Las diferencias en los valores numéricos para ambos métodos se deben a las características propias de cada uno y fundamentalmente a la sensibilidad del FP a reajustar su estimación, ya que las partículas se mueven rápidamente hacia las coordenadas del estado que mayor verosimilitud presenten con la observación, por lo que resulta contraproducente aumentar demasiado la varianza del ruido antes de la convergencia o disminuirla mucho durante el proceso de estimación, ya que limita la adaptabilidad del filtro. Por otra parte la razón de que q_1 tenga un valor mayor que q_2 es porque se decide penalizar con mayor incertidumbre a la estimación de la impedancia interna, ya que para ésta no se posee un modelo de transición elaborado.

TABLA 8: VALORES DE PARÁMETROS PARA OFCL EN UKF Y FP

Parámetro	Valor para UKF	Valor para FP
t_{min}	5	200
e_{Th}	0.15	0.15
p_1	0.99	0.99
p_2	0.98	0.99
q_1	1.1	1.1
q_2	1.01	1.01
\underline{std}_1	10^{-5}	10^{-4}
\underline{std}_2	10^{-5}	10^{-4}

3.6. Desempeño en pronóstico

Para evaluar la capacidad de pronóstico de los algoritmos, se utilizan los índices presentados en la Sección 2.7. Debido a que éstos son funciones del tiempo, es decir, su valor en cada instante depende de la información disponible desde el inicio de la estimación hasta el momento del pronóstico, el experimento necesario para calcularlos requiere generar un pronóstico por cada nueva iteración del algoritmo de estimación. En este caso, se opta por generar una predicción del tiempo de descarga por cada 10 iteraciones de estimación, ya que esto permite obtener una curva representativa para cada índice, a menor carga computacional. Además es necesario mencionar que en el caso del UKF sólo una ejecución de este experimento es necesaria, ya que el algoritmo en sí es determinístico. Sin embargo, para el filtro de partículas, se precisa de una cantidad suficiente de realizaciones, pues el tiempo de descarga predicho en cada paso de pronóstico corresponde a la muestra de una variable aleatoria. Por esta razón se determina utilizar el promedio de 30 pruebas para el cálculo de cada índice de pronóstico.

Dicho lo anterior, el software con el que se realizan los experimentos corresponde a la versión R2012b de Matlab[®] y el hardware a un ordenador de escritorio de procesador Intel[®] Core™ i5-3470 y 8GB DDR3 de memoria RAM.

Capítulo 4: Análisis de resultados

4.1. Estimación y pronóstico con filtro de partículas base

Con objetivo de establecer una comparación entre los distintos algoritmos de estimación, conviene en primera instancia analizar el comportamiento del caso base que se dispone, tanto en su capacidad de estimación como de pronóstico. Dicho método corresponde al FP presentado en la Sección 3.2, pero con el nuevo modelo señalado en la Sección 3.3 y haciendo uso del conjunto de datos #1 mostrado en la sección 3.1. Dado que una ejecución del filtro de partículas corresponde a la realización de un proceso estocástico, diferentes resultados se obtienen cada vez que se utiliza. Por lo anterior, los gráficos presentados más adelante se escogieron de una realización particular que refleja aproximadamente el comportamiento promedio del algoritmo.

4.1.1. Capacidad de estimación

La Figura 2 muestra el SOC, módulo de la impedancia interna y voltaje en bornes de la celda de ion-litio, estimados mediante el filtro de partículas a través de un ciclo de descarga. La carga inicial real de la batería es de 100%, mientras que para el FP, la condición inicial asignada a las partículas es una muestra uniforme entre 76.5% y 93.5% (media de 85%), de modo de poder evaluar si el algoritmo es capaz de corregir el error inicial de estimación. El valor inicial asignado a las partículas para la impedancia interna es un muestreo de distribución Gaussiana de media $\Omega = 0.1$, que fue la resistencia determinada experimentalmente en [1], tal como se presenta en la Tabla 6, y varianza $\Omega^2 = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Los conjuntos de puntos graficados alrededor de las líneas sólidas corresponden a los valores individuales de cada partícula, previa normalización de sus pesos mediante *resampling*, para poder observar la dispersión de las mismas. La Figura 3 y Figura 4 muestran experimentos similares, donde la condición inicial del estado de carga es seleccionada con media de 65% y 50%, respectivamente, y la misma dispersión (uniforme de ancho de 17%). Finalmente la Figura 5 pretende ilustrar la situación en que la carga inicial real de la batería es menor a 100%. Para ello se ha utilizado el mismo set de datos que para los ejemplos anteriores, pero se ha tomado un instante inicial posterior, $t_0 = 800$, para el cual el SOC medido³ de la batería es de aproximadamente 80%. Para el filtro de partículas, por otra parte, la media del valor inicial estimado para el estado de carga se escogió en 95%, manteniendo las demás especificaciones de los experimentos anteriores.

De los gráficos es posible observar que el filtro de partículas logra corregir la estimación de SOC inicial errónea, acercándose al verdadero estado de carga de la celda. Se puede notar también que a medida que la condición inicial del algoritmo se aleja de la verdadera, el desempeño del mismo se vuelve progresivamente peor, apareciendo un sesgo en la estimación. Esta evidencia es esperable para un modelo de estado no observable, el cual requiere en general de poca discrepancia entre la condición inicial del método de filtrado y el estado real del dispositivo. El mismo efecto mencionado se presenta en la Figura 5, en la que a pesar de que el estado de carga real y supuesto se encuentran a la misma distancia relativa que en el experimento de la Figura 2, el problema de observabilidad se hace notorio al existir una mayor dispersión en la dimensión del SOC cuando se obtienen mediciones de voltaje menos ajustadas a las predichas por el modelo. Esto genera correcciones más fuertes en la estimación del estado de carga para el caso de la Figura 5 que para el de la Figura 2, lo cual lleva al método a caer en una zona del espacio de

³ Si bien el SOC no puede medirse directamente, éste sí puede ser obtenido si se conoce la energía inicial acumulada en la batería y descontando el consumo mediante las mediciones de voltaje y corriente.

estado que permite reproducir las observaciones con suficiente exactitud, a pesar del sesgo en el segundo estado respecto de su valor real. Cabe recordar que la razón por la que el primer experimento posee menos dispersión de las partículas, es porque este FP implementa una versión básica de OFCL que disminuye en el tiempo la varianza del ruido de proceso para la segunda ecuación del modelo de transición.

En general respecto de los resultados, también se puede apreciar del gráfico del valor de cada partícula que en determinados instantes la distribución de probabilidad del estado estimado se torna multimodal, es decir, existe más de una zona o modo con alta densidad de probabilidad, denotado por la acumulación de partículas. Por otra parte el rápido decaimiento y posterior aumento en el valor estimado para el módulo de la impedancia interna durante los primeros ciclos del FP, está ligado con el ajuste experimental de los parámetros del modelo de descarga, el cual es menos exacto al comienzo y final de la descarga, por la forma en que fue efectuado. Por el mismo motivo se observó en otros experimentos que al continuar con el filtrado cuando el estado de carga real de la batería cae bajo aproximadamente 5%, la estimación de la impedancia interna decrece rápidamente hasta tomar el valor 0, ya que el modelo predice que la batería no debería tener carga, cuando en realidad se seguían obteniendo observaciones de voltaje que indicaban lo contrario. Mientras que este comportamiento es indeseable al ser contrario a la fenomenología real de una celda de carga (en la que la impedancia interna aumenta al ser descargada), éste no resulta nocivo para la tarea que se realiza, ya que el proceso conjunto de estimación-pronóstico alertaría la descarga de la batería con anterioridad.

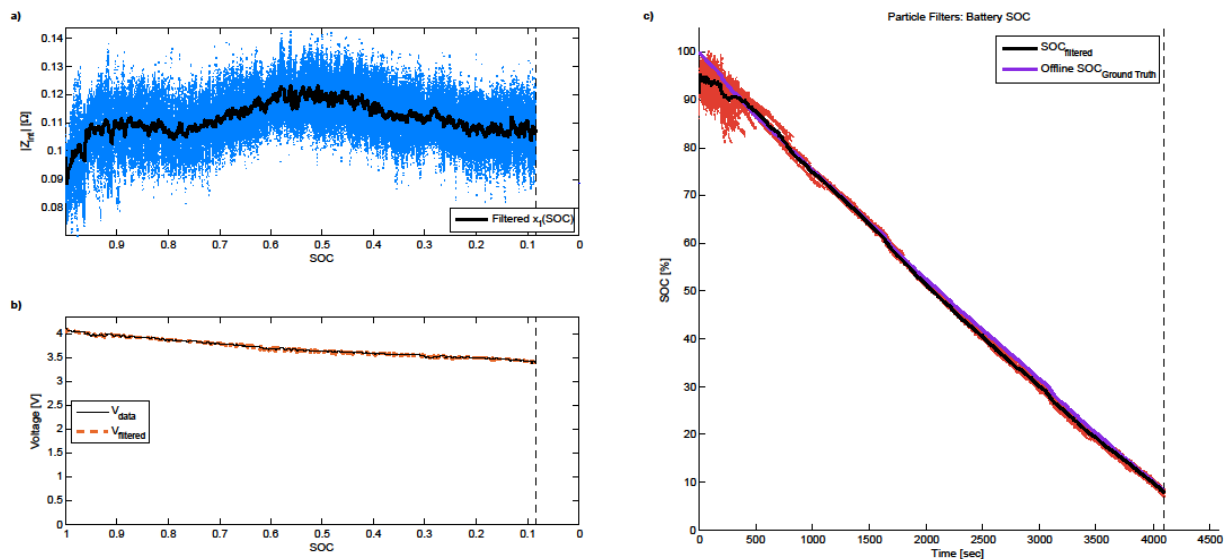


FIGURA 2: ESTIMACIÓN CON FP BASE. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

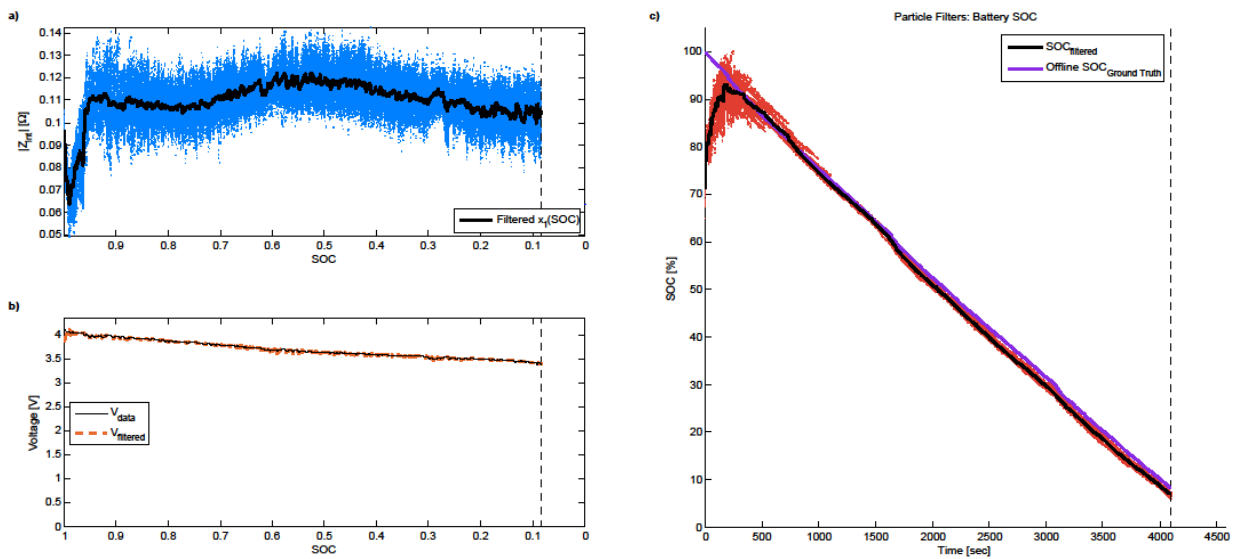


FIGURA 3: ESTIMACIÓN CON FP BASE. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 65% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

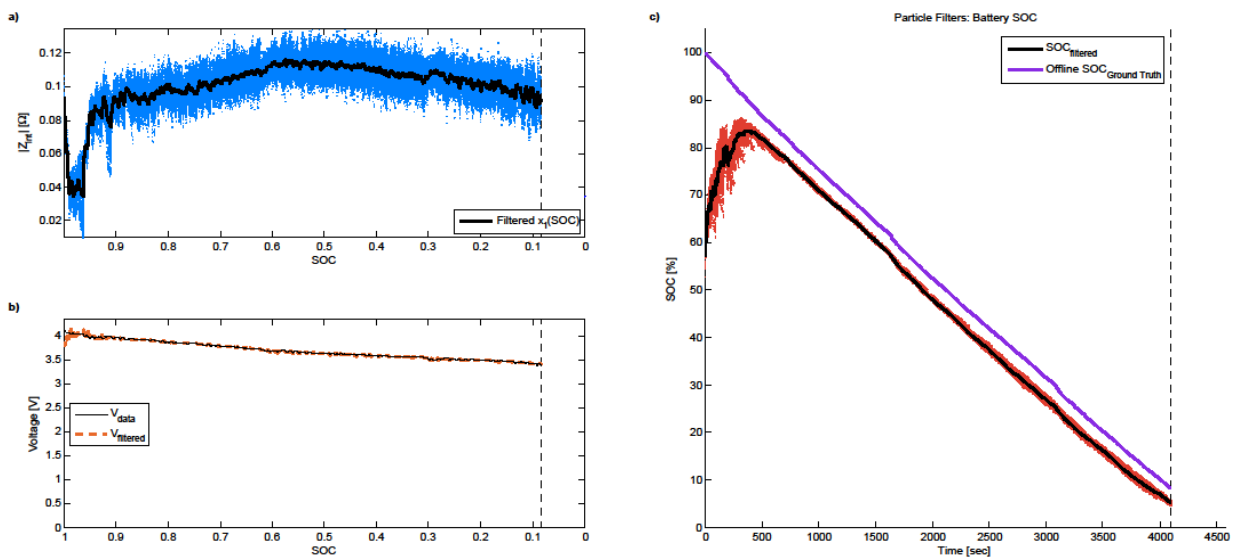


FIGURA 4: ESTIMACIÓN CON FP BASE. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 50% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

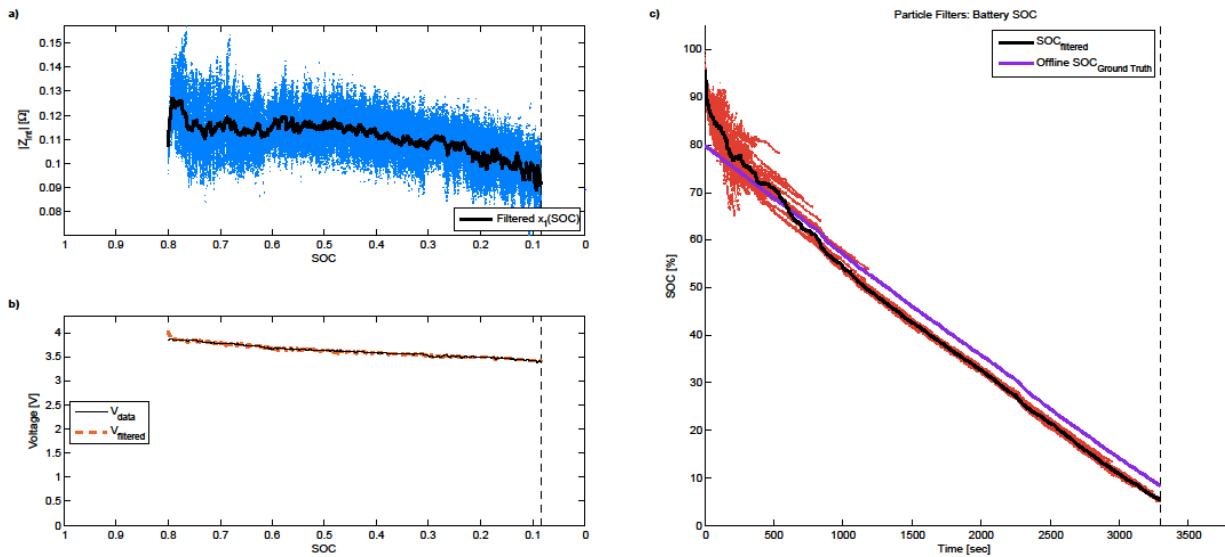


FIGURA 5: ESTIMACIÓN CON FP BASE. CARGA INICIAL DE 80% REAL Y 95% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

4.1.2. Capacidad de pronóstico

La Figura 6 muestra una ejecución de estimación con el filtro de partículas y generación de pronóstico durante la descarga. En la Figura 6.a) se puede observar el valor de la impedancia interna filtrado, así como el de cada partícula durante la primera etapa, luego la predicción asume una evolución de la misma según el modelo, es decir se mantiene aproximadamente constante, mientras que el intervalo de 95% de confianza (graficado con líneas más delgadas) crece en el tiempo por la incertidumbre añadida. En la Figura 6.b) se grafica el voltaje de la celda, tanto medido como estimado y predicho. Se puede notar que el voltaje predicho alcanza la descarga completa antes de que la batería realmente se encuentre en esta condición, lo cual se debe a un peor ajuste del modelo hacia el final de la descarga, como se mencionaba en la sección anterior. La Figura 6.c) muestra la estimación y predicción de SOC junto al estado de carga real de la celda de ion-litio. Además grafica la zona de peligro o descarga y el instante exacto en el que la batería termina de descargarse (*Ground Truth* EoD). Finalmente la Figura 6.d) presenta la distribución de densidad de probabilidad para el tiempo de falla o descarga, obtenida a través del esquema, enfatizando su media e intervalo de 95% de confianza.

De los gráficos resulta claro que los mecanismos empleados permiten un esquema de pronóstico satisfactorio, el cual si bien no predice el momento de la descarga en forma totalmente exacta, éste al menos no resulta sobreestimado, lo cual es un aspecto crítico en la toma de decisiones de más alto nivel acerca de la autonomía remanente. Por otra parte la incertidumbre queda caracterizada de manera adecuada, permitiendo enfoques de interpretación más (o menos) conservadores.

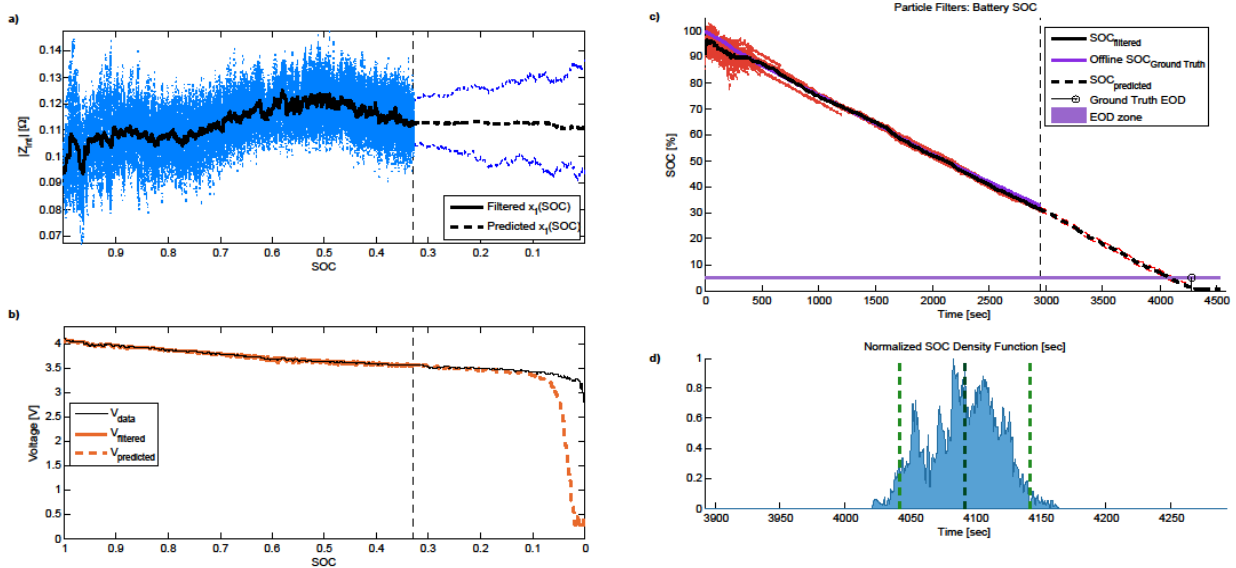


FIGURA 6: ESTIMACIÓN Y PRONÓSTICO CON FP BASE. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN CON 95% DE CONFIANZA DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, PREDICCIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN CON 95% DE CONFIANZA DEL ESTADO-DE-CARGA. d) PRONÓSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL TIEMPO DE FALLA.

4.2. Estimación con filtro de Kalman unscented

La Figura 7 muestra las estimaciones realizadas mediante el filtro de Kalman *unscented* a través de un ciclo de descarga. La carga inicial real de la batería es nuevamente de 100%, mientras que para el UKF, la condición inicial asignada al vector de estado es una Gaussiana de media y matriz de covarianza indicadas en la Ecuación (4.1). Estas son escogidas para asimilarse a aquellas determinadas para el FP base. En particular, una aproximación de la varianza asociada al estado de carga inicial se obtiene de la varianza de la distribución uniforme de partículas usada en dicho algoritmo. Las líneas punteadas, graficadas alrededor de las sólidas para la estimación de la impedancia interna y SOC, corresponden a los intervalos de 95% de confianza.

$$\hat{x}(0|0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.85 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}(0|0) = \begin{bmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} 10^{-2} \quad (4.1)$$

De los gráficos es posible notar que aunque inicialmente el UKF se acerca rápidamente al estado de carga real de la celda de ion-litio, la estimación eventualmente se aleja del valor real, resultando en un desempeño pobre. Cabe destacar que el instante en el que comienza a empeorar la estimación está asociado con mayores corrientes requeridas a la batería, esto genera que dinámicas no modeladas de la celda se presenten más evidentemente en las mediciones, resultando en mayor discrepancia con la predicción del algoritmo. Lo anterior sumado a una varianza que se mantiene elevada en el vector de estado, produce la falta de eficacia del método. La Figura 8 presenta el mismo experimento de estimación pero utilizando una condición inicial con media de 50% para el estado de carga. Ésta permite observar que nuevamente el filtro corrige rápido inicialmente, a pesar de la existencia de un mayor error, pero sin embargo vuelve a perder efectividad durante la descarga. Debido al pobre desempeño en estimación, realizar pronóstico con este método no resulta conveniente.

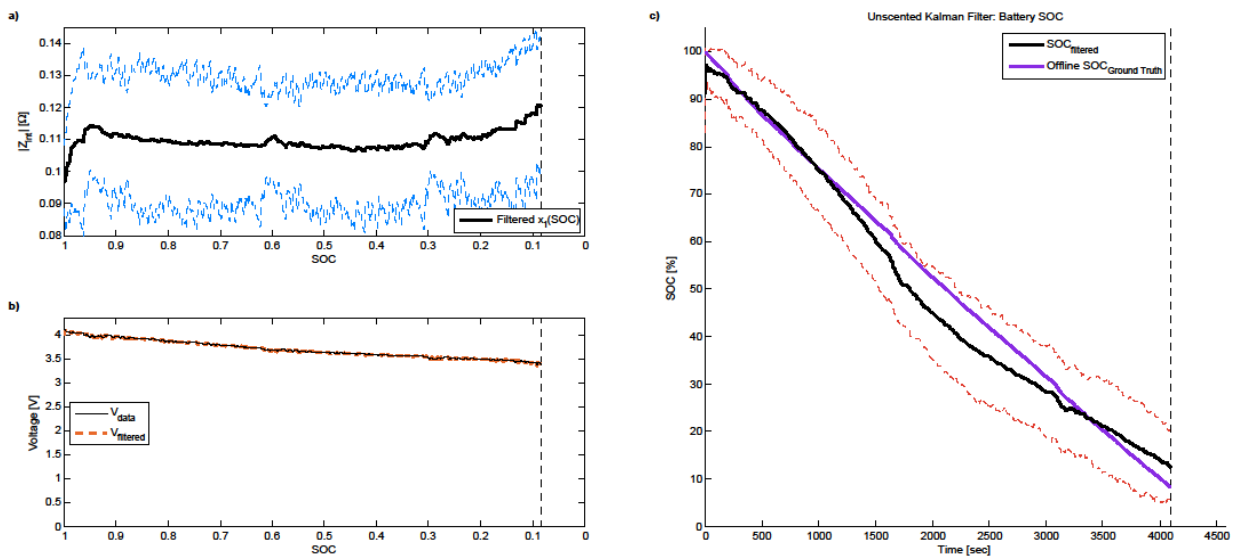


FIGURA 7: ESTIMACIÓN CON UKF. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

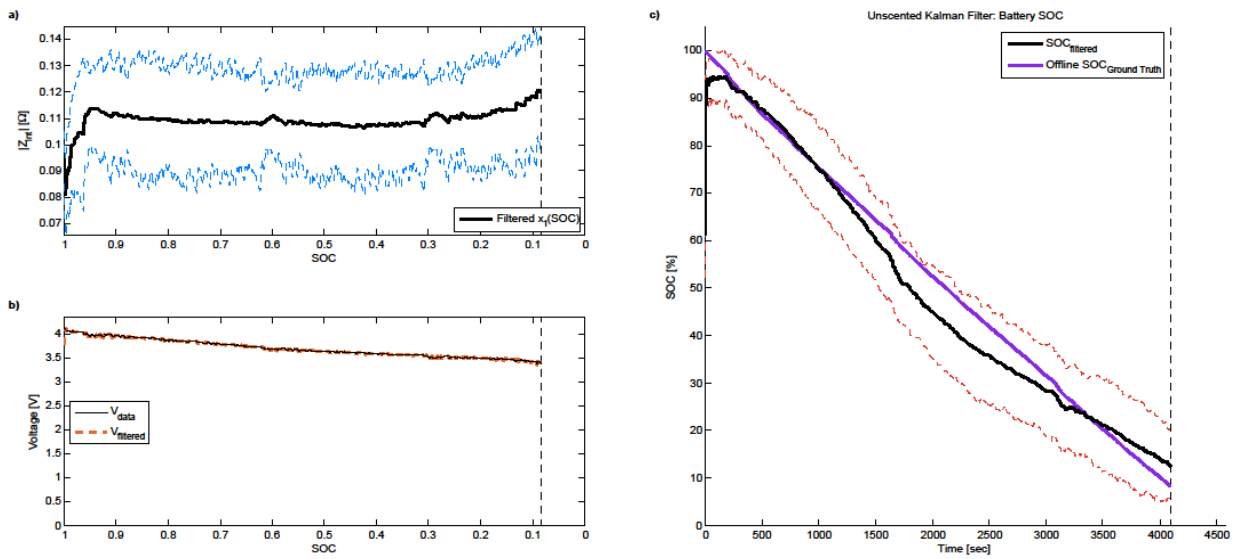


FIGURA 8: ESTIMACIÓN CON UKF. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 50% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN Y MEDIDA DE VOLTAJE. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

4.3. Estimación y pronóstico con filtro de partículas y OFCL

Una vez que se incorpora el lazo de corrección externo, presentado en la Sección 3.5, al filtro de partículas base, son realizados los mismos experimentos que aquellos presentados para éste en la Sección 4.1. Al tener nuevamente un algoritmo de comportamiento estocástico, cada realización del mismo produce resultados diferentes, por lo que los gráficos que se presentan intentan reflejar el comportamiento promedio del método, sin perjuicio de que existen ejecuciones con mejores y peores resultados.

4.3.1. Capacidad de estimación

De la Figura 9 a la Figura 12 se muestran los mismos cuatro casos de estimación que los presentados para el FP base, utilizando las mismas distribuciones iniciales para las partículas. Se observa que el algoritmo es capaz de estimar satisfactoriamente el SOC de la celda a pesar de la condición inicial errónea y que, al igual que el FP base, a medida que la condición inicial de SOC de las partículas se aleja del valor real, el desempeño de la estimación disminuye, apareciendo un sesgo en el mismo por las razones ya discutidas anteriormente. También para el caso en que se utiliza un instante inicial posterior, o bien, la batería inicialmente más descargada, se produce la pérdida de eficacia. Al respecto, cabe señalar que es posible reducir dicha pérdida, en ambos filtros de partículas presentados, utilizando un ruido de proceso con menor varianza para la ecuación asociada al estado de carga, de modo de tener partículas con menor desviación en esta componente y por ende corregir en mayor grado la estimación del módulo de la impedancia interna al obtener poca verosimilitud en la predicción de la salida. La desventaja de tomar esta medida, es que el algoritmo queda más susceptible generar estimaciones sesgadas cuando las condiciones iniciales reales difieren mucho de las supuestas.

Por otra parte, resalta por el uso de OFCL una visible disminución de la dispersión en las partículas durante la descarga de la batería, respecto del FP base. Esto en particular genera un filtrado para el módulo de la impedancia interna con un comportamiento más suave. También aquí pueden observarse intervalos en los que la distribución del estado se torna multimodal. Las comparaciones numéricas con el caso base se presentan en la Sección 4.5.

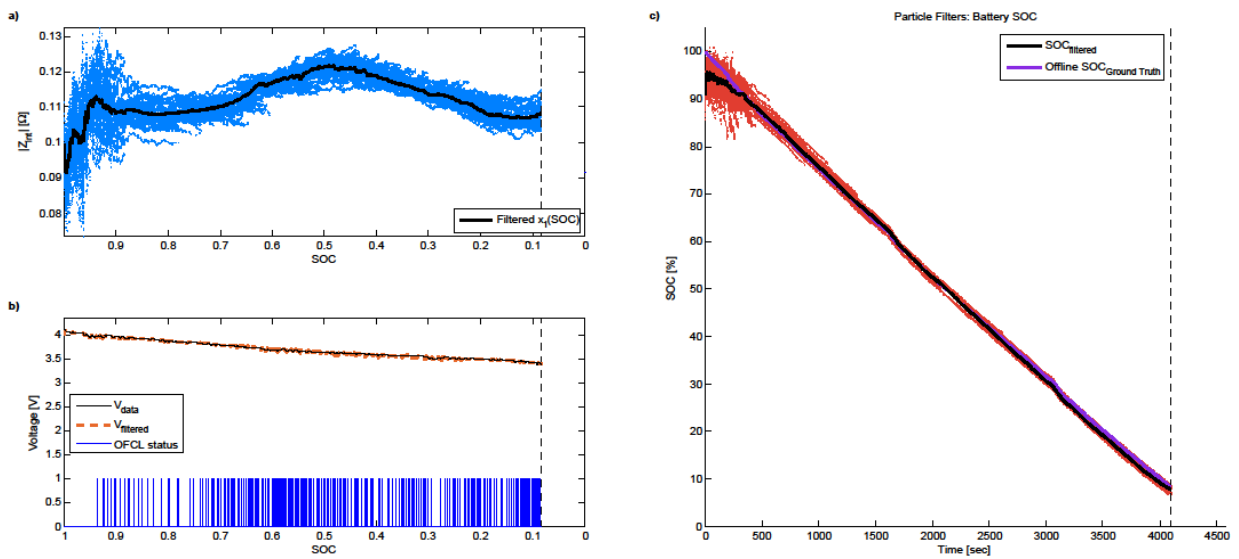


FIGURA 9: ESTIMACIÓN CON FP+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

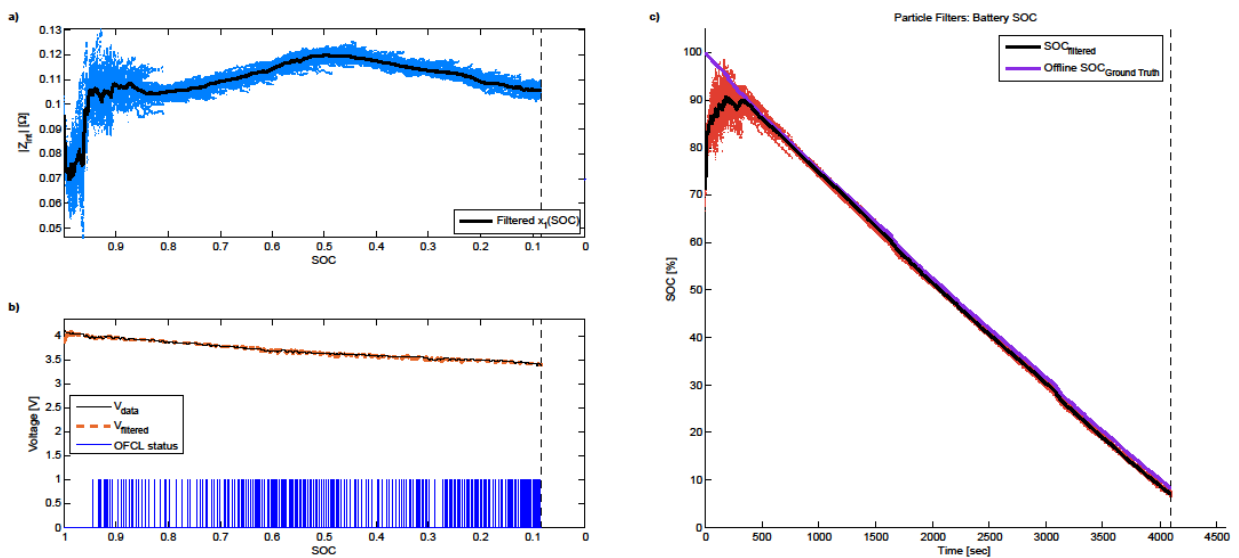


FIGURA 10: ESTIMACIÓN CON FP+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 65% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

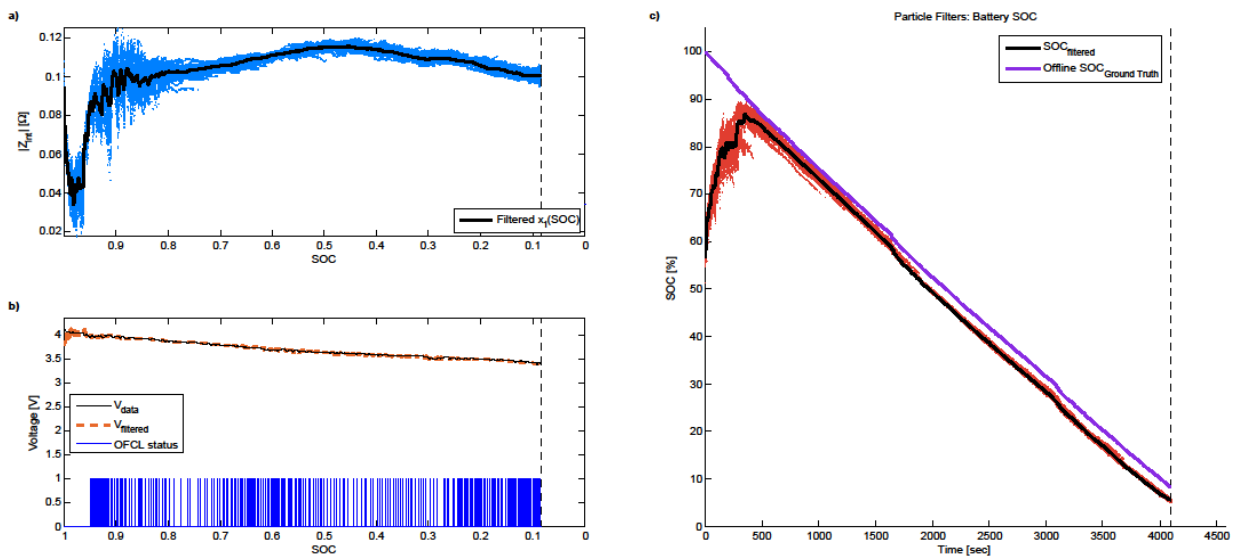


FIGURA 11: ESTIMACIÓN CON FP+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 50% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

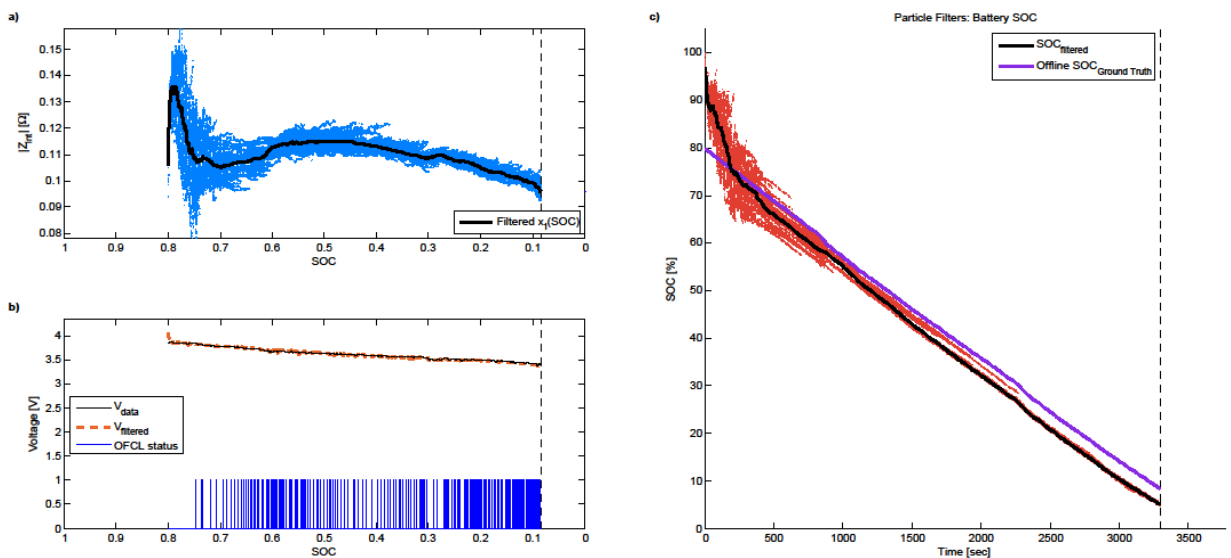


FIGURA 12: ESTIMACIÓN CON FP+OFCL. CARGA INICIAL DE 80% REAL Y 95% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

4.3.2. Capacidad de pronóstico

La Figura 13 muestra los gráficos de un pronóstico realizado con el filtro de partículas con lazo de corrección externo. Estos son fundamentalmente similares a los obtenidos con el FP base, salvo la disminución en la dispersión de las partículas durante la estimación, lo cual se traduce a su vez en intervalos de 95% de confianza más pequeños al realizar la predicción. En la Figura 13.b) se grafica además la acción del OFCL, con 1 simbolizando un aumento de la desviación estándar del ruido de proceso y 0 la disminución del mismo por concepto de buen desempeño de estimación. Se puede observar también a simple vista que para el caso presentado, la predicción del tiempo de descarga es más exacta que para el caso base, es decir, la distribución del tiempo de falla se encuentra más cercana al *Ground Truth*. A pesar de que el gráfico corresponde a sólo una realización, en la Sección 4.5 de más adelante se comprueba un mejor desempeño promedio del algoritmo con lazos de corrección.

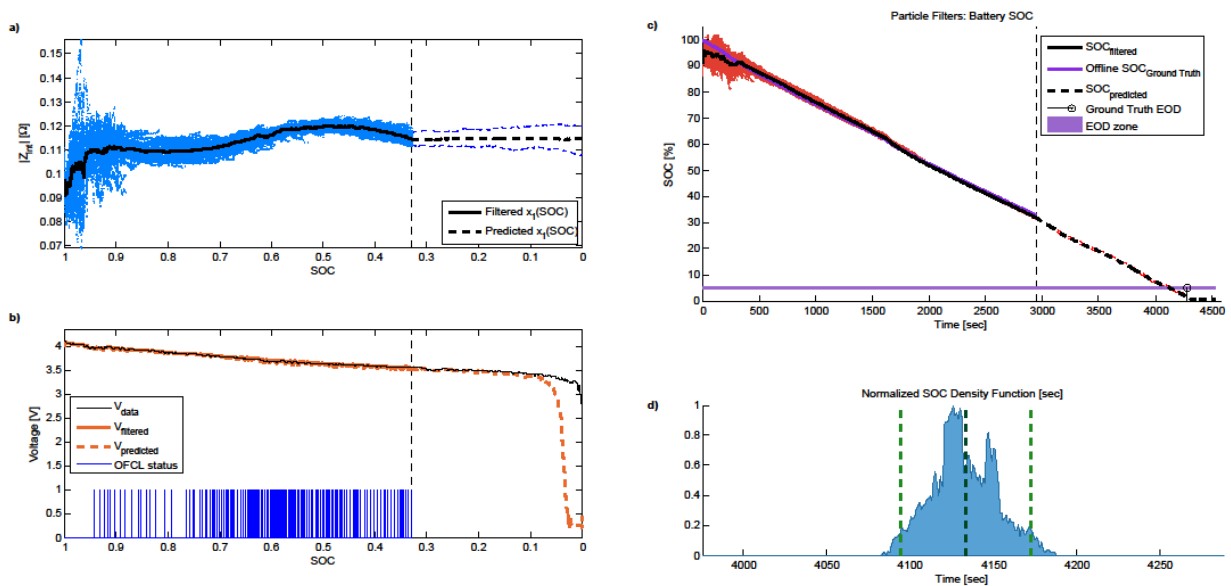


FIGURA 13: ESTIMACIÓN Y PRONÓSTICO CON FP+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN CON 95% DE CONFIANZA DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, PREDICCIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN CON 95% DE CONFIANZA DEL ESTADO-DE-CARGA. d) PRONÓSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL TIEMPO DE FALLA.

4.4. Estimación y pronóstico con UKF y OFCL

4.4.1. Capacidad de estimación

La Figura 14 muestra el mismo experimento realizado para el filtro de Kalman *unscented* en la Figura 7 de la Sección 4.2, es decir, las condiciones iniciales para el UKF con el lazo de corrección incluido, son aquellas indicadas en la Ecuación (4.1). Como se puede observar, el OFCL mejora notablemente el desempeño del método, logrando estimaciones muy exactas del estado de carga. Más aun, y como se puede ver por las Figuras 15 y 16, que presentan el mismo proceso de estimación cambiando sólo la condición inicial del valor esperado del SOC a 65% y 50% respectivamente, el UKF con OFCL mantiene su estimación insesgada, a pesar del mayor error inicial. Al igual que el primer filtro de Kalman *unscented*, éste presenta una rápida velocidad de convergencia, mayor que la del filtro de partículas.

La razón por la que esta composición entre UKF y OFCL tiene buenos resultados radica principalmente en que el modelo empírico obtenido para la celda de ion-litio, describe lo suficientemente bien su comportamiento real durante la mayor parte de la descarga, de modo que una vez que la estimación del estado se asemeja a la real, la disminución del ruido de proceso por parte del OFCL permite al UKF una mayor robustez frente a las mediciones, a la vez que mantiene cierta flexibilidad para adaptarse cuando las observaciones no concuerdan con las predicciones.

No obstante lo anterior, y al igual que los filtros de partículas, el desempeño de este método empeora al utilizar el set de datos con un instante de tiempo inicial posterior, como se aprecia en la Figura 17. La razón también reside en la mayor varianza en la estimación del estado al momento de obtener medidas de voltaje menos concordantes con las predicciones del modelo y, de igual modo, este efecto se puede disminuir con una matriz de covarianza inicial más pequeña combinada con un menor ruido de proceso asociado al SOC, pero bajo el mismo riesgo de incurrir en un sesgo de la estimación al suponer condiciones iniciales más discrepantes con las reales. De modo que esta modificación no resulta recomendable.

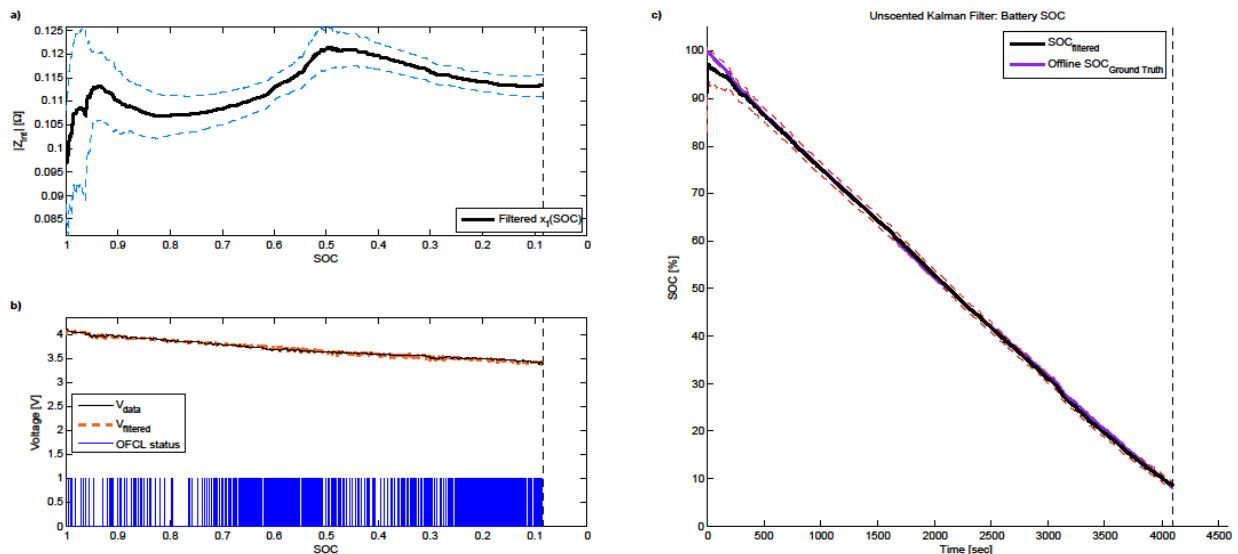


FIGURA 14: ESTIMACIÓN CON UKF+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

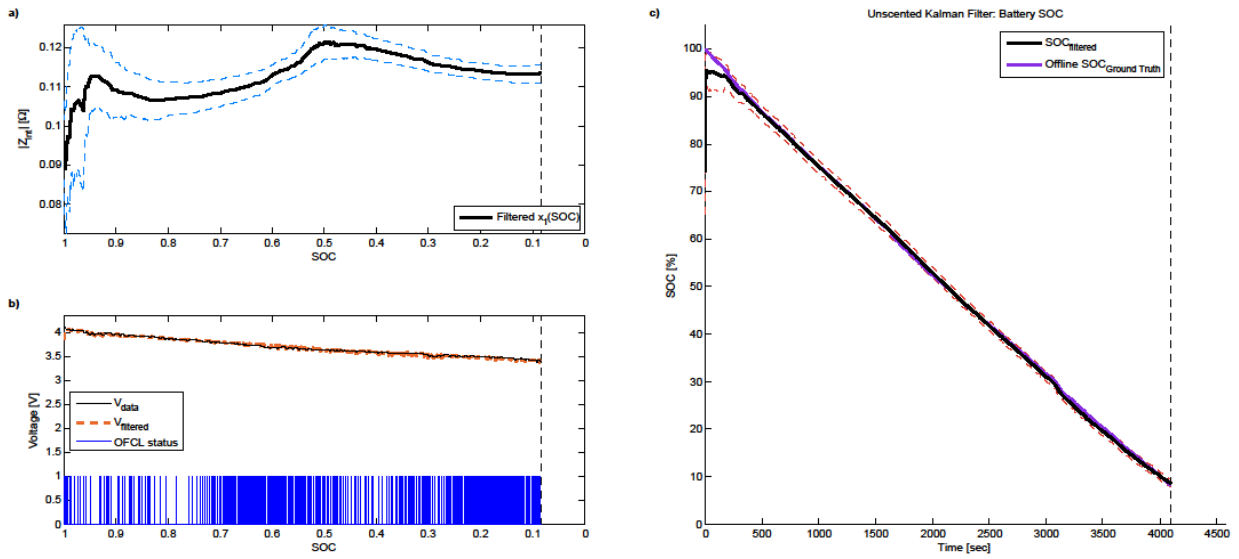


FIGURA 15: ESTIMACIÓN CON UKF+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 65% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

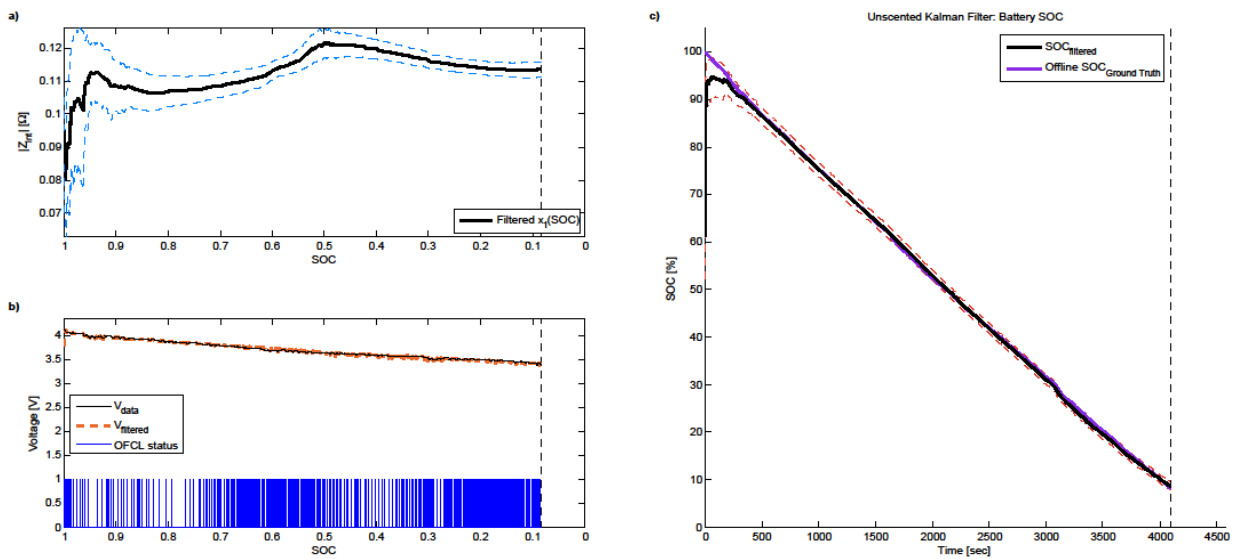


FIGURA 16: ESTIMACIÓN CON UKF+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 50% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

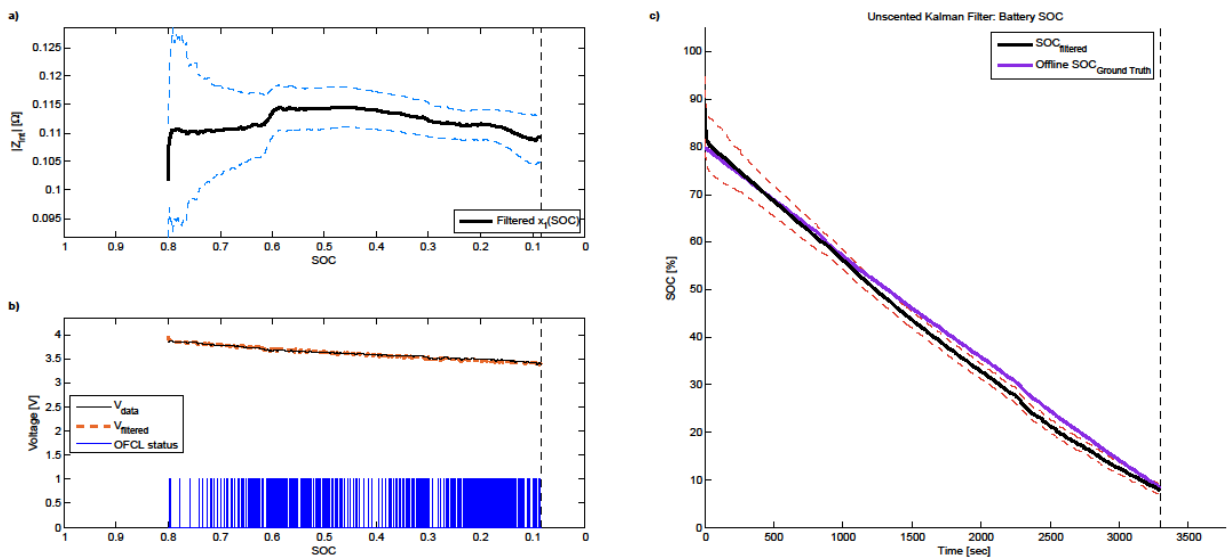


FIGURA 17: ESTIMACIÓN CON UKF+OFCL. CARGA INICIAL DE 80% REAL Y 95% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN, MEDIDA DE VOLTAJE Y ACCIÓN DE OFCL. c) ESTIMACIÓN DEL ESTADO-DE-CARGA.

4.4.2. Capacidad de pronóstico

La Figura 18 muestra una realización del esquema de pronóstico utilizando el filtro de Kalman *unscented* con lazo de corrección externo. Se observa un desempeño adecuado y según lo esperado, logrando resultados similares a los del filtro de partículas base y aquel con lazo externo de corrección, aunque con una exactitud un tanto superior en la determinación del tiempo de descarga, la cual está asociada a la buena estimación previa del estado-de-carga. Al igual que para los ejemplos de pronóstico anteriores, se grafican con línea punteada los intervalos de 95% de confianza y en la Figura 18.b) se indica la acción del lazo externo de corrección durante la estimación.

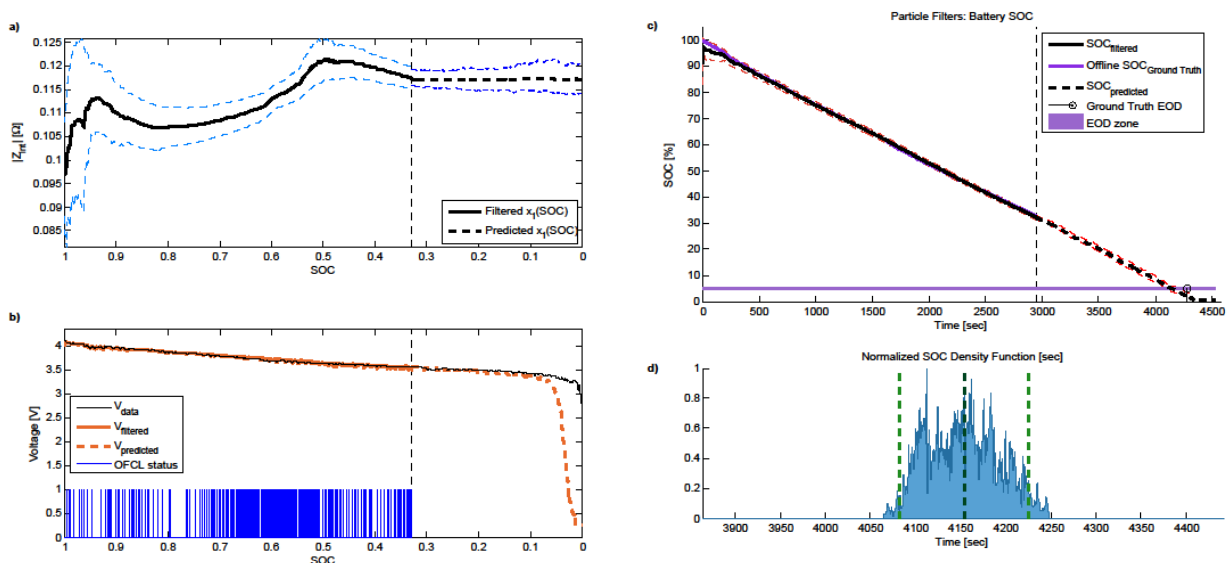


FIGURA 18: ESTIMACIÓN Y PRONÓSTICO CON UKF+OFCL. CARGA INICIAL DE 100% REAL Y 85% SUPUESTA. a) ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN CON 95% DE CONFIANZA DEL MÓDULO DE LA IMPEDANCIA INTERNA. b) ESTIMACIÓN,

4.5. Comparación de desempeño

A pesar de que la información gráfica es de utilidad para comprender el funcionamiento y efectividad de los distintos algoritmos, ésta no permite precisar en su desempeño específico desde el punto de vista numérico y, por lo tanto, no permite comparaciones objetivas. Más aun, en el caso de los filtros de partículas, una realización de los mismos no logra capturar su real comportamiento, debiendo utilizarse el promedio de diversas ejecuciones para establecer una caracterización adecuada.

A continuación se muestran los resultados numéricos para tres experimentos de estimación en cada uno de los cuales se mide cuantitativamente la efectividad de cada método, excluyendo al UKF simple por su pobre desempeño. Las mediciones se hicieron en cuatro instantes distintos de la descarga de la batería: uno cercano al comienzo ($t = 200$), dos en la zona más central ($t = 1200$ y $t = 2700$) y uno cerca del final de la descarga ($t = 4100$). El Experimento 1 de estimación corresponde al mostrado anteriormente en los gráficos para un valor medio de la condición inicial supuesta del SOC de 85%, mientras que la real es 100%. El valor inicial del módulo de la impedancia interna así como las distribuciones asumidas se mantienen respecto de los de dichos ejemplos. Similarmente los Experimentos 2 y 3 son los graficados anteriormente para SOC estimado inicial de 65% y 50%. Para los filtros de partículas con y sin OFCL se utiliza el promedio de 50 realizaciones de los mismos.

Adicionalmente se realiza un experimento de pronóstico para cada método, en el que se evalúan los distintos índices de desempeño presentados en el Capítulo 2. Debido a que estos indicadores son funciones del tiempo, su cálculo requiere la generación de predicciones de largo plazo en cada instante, durante toda la descarga. Sin embargo, en este caso se opta por efectuar dicho mecanismo cada 10 iteraciones⁴ de estimación, ya que así se puede capturar suficiente información a mucha menor carga computacional. También debido a que este experimento demanda mayor tiempo de cómputo, el número de realizaciones de los filtros de partículas se reduce a 30.

Por último, se compara la cantidad necesaria de memoria según las variables requeridas por los distintos algoritmos y el tiempo de ejecución en estimación de los mismos en Matlab, para lo cual se considera hasta el instante $t = 4100$ del set de datos.

⁴ Este factor de reducción se escoge en forma arbitraria para obtener un tiempo de ejecución que no sea excesivamente elevado.

4.5.1. Experimento de estimación 1: 85% de carga inicial supuesta

Las Tablas 9, 10 y 11 muestran los resultados de los distintos esquemas para el primer experimento. La medida de error en la estimación del SOC ($SOC_{real} - SOC_{estimado}$) con los filtros de partículas se acompaña con su nivel de tolerancia del 95%, obtenido en base a las 50 realizaciones de los algoritmos. Se puede ver que el uso de OFCL genera estimaciones más exactas (menor error con el valor real de SOC) y precisas (menor varianza) que el filtro de partículas utilizado como base de comparación. En particular el UKF con OFCL es el método que obtiene la mayor exactitud, a pesar de su incapacidad para representar distribuciones multimodales como las observadas en los gráficos para la estimación con filtros de partículas. Cabe también resaltar que la considerable disminución de la varianza en la estimación del módulo de la impedancia interna para el FP producto del OFCL genera una menor variabilidad entre los resultados de distintas ejecuciones, lo cual es una ventaja que se refleja sus intervalos de confianza más pequeños para la medida de error.

TABLA 9: RESULTADOS EXPERIMENTO 1 PARA FP BASE (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1110 \\ 0.9294 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1115 \\ 0.7105 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1163 \\ 0.3692 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1052 \\ 0.0735 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0424 & 0.1425 \\ 0.1425 & 0.7990 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.3920 & 0.1423 \\ 0.1423 & 0.7519 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.4081 & 0.0676 \\ 0.0676 & 0.2723 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.3320 & 0.0877 \\ 0.0877 & 0.1937 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0200 ± 0.0210	0.0004 ± 0.0203	0.0105 ± 0.0206	0.0101 ± 0.0219

TABLA 10: RESULTADOS EXPERIMENTO 1 PARA FP+OFCL (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1112 \\ 0.9299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1105 \\ 0.7154 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1171 \\ 0.3695 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1076 \\ 0.0775 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0404 & 0.1327 \\ 0.1327 & 0.7700 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.0643 & 0.1864 \\ 0.1864 & 0.8127 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0275 & 0.0213 \\ 0.0213 & 0.1242 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0301 \\ 0.0301 & 0.1131 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0195 ± 0.0190	-0.0045 ± 0.0090	0.0102 ± 0.0184	0.0062 ± 0.0154

TABLA 11: RESULTADOS EXPERIMENTO 1 PARA UKF+OFCL

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1125 \\ 0.9395 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1082 \\ 0.7096 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1191 \\ 0.3766 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1134 \\ 0.0860 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0166 & 0.0341 \\ 0.0341 & 0.1154 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.0310 & 0.1012 \\ 0.1012 & 0.4137 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0187 & 0.0493 \\ 0.0493 & 0.2602 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0141 & 0.0373 \\ 0.0373 & 0.1716 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0099	0.0013	0.0030	-0.0023

4.5.2. Experimento de estimación 2: 65% de carga inicial supuesta

Los resultados del segundo experimento, indicados en las tablas siguientes, son similares a los obtenidos en el primero, salvo por una pequeña disminución en la exactitud de todos los métodos, al partir de una condición inicial de SOC más alejada de la real. Sin embargo los errores de estimación obtenidos siguen siendo pequeños, menores para los algoritmos con lazos de corrección y en particular para el filtro de Kalman *unscented*.

TABLA 12: RESULTADOS EXPERIMENTO 2 PARA FP BASE (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1040 \\ 0.8947 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1109 \\ 0.7092 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1145 \\ 0.3616 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1042 \\ 0.0714 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0284 & 0.0903 \\ 0.0903 & 0.6529 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.3679 & 0.1649 \\ 0.1649 & 0.7486 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.3968 & 0.0531 \\ 0.0531 & 0.2062 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.3037 & 0.0863 \\ 0.0863 & 0.1956 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0547 ± 0.0460	0.0017 ± 0.0229	0.0181 ± 0.0217	0.0123 ± 0.0200

TABLA 13: RESULTADOS EXPERIMENTO 2 PARA FP+OFCL (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1038 \\ 0.8926 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1103 \\ 0.7146 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1170 \\ 0.3686 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1071 \\ 0.0756 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0305 & 0.1042 \\ 0.1042 & 0.7381 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.0672 & 0.1968 \\ 0.1968 & 0.8926 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0252 & 0.0228 \\ 0.0228 & 0.1378 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0268 \\ 0.0268 & 0.1001 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0568 ± 0.0555	-0.0037 ± 0.0108	0.0111 ± 0.0160	0.0081 ± 0.0142

TABLA 14: RESULTADOS EXPERIMENTO 2 PARA UKF+OFCL

	T = 200	T = 1200	T = 2700	T = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1122 \\ 0.9379 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1082 \\ 0.7100 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1191 \\ 0.3767 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1134 \\ 0.0863 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0188 & 0.0384 \\ 0.0384 & 0.1419 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.0330 & 0.1095 \\ 0.1095 & 0.4504 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0192 & 0.0522 \\ 0.0522 & 0.2755 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0144 & 0.0387 \\ 0.0387 & 0.1784 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0115	0.0008	0.0030	-0.0026

4.5.3. Experimento de estimación 3: 50% de carga inicial supuesta

Con el tercer experimento queda de manifiesto que los métodos basados en FP generan ambos un sesgo en la estimación cuando para condiciones iniciales demasiado erróneas. A pesar que éste no desaparece, el OFCL logra disminuir el sesgo e identifica en algunos de los instantes estudiados que la estimación no se está realizando correctamente, como se puede apreciar por el considerable aumento en la varianza de la impedancia interna, respecto a los casos anteriores. Por otra parte el UKF con OFCL consigue estimar de forma más exacta y precisa el estado de carga que cualquiera de los métodos anteriores, gracias a su menor sensibilidad a las observaciones, lo que le permite mantenerse más fiel al modelo.

TABLA 15: RESULTADOS EXPERIMENTO 3 PARA FP BASE (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T0 = 200	T0 = 1200	T0 = 2700	T0 = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.0883 \\ 0.8067 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1006 \\ 0.6597 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1077 \\ 0.3311 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0809 \\ 0.0478 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0149 & 0.0365 \\ 0.0365 & 0.4390 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.3798 & 0.1188 \\ 0.1188 & 0.5231 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.4347 & 0.0708 \\ 0.0708 & 0.2954 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.3006 & 0.0671 \\ 0.0671 & 0.0926 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.1427 ± 0.1006	0.0512 ± 0.0955	0.0486 ± 0.0577	0.0359 ± 0.0351

TABLA 16: RESULTADOS EXPERIMENTO 3 PARA FP+OFCL (PROMEDIO DE 50 REALIZACIONES)

	T0 = 200	T0 = 1200	T0 = 2700	T0 = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.0864 \\ 0.7972 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1036 \\ 0.6804 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1131 \\ 0.3476 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0937 \\ 0.0612 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0159 & 0.0392 \\ 0.0392 & 0.4637 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.1158 & 0.1057 \\ 0.1057 & 0.4907 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0275 & 0.0175 \\ 0.0175 & 0.1172 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.1346 & 0.0193 \\ 0.0193 & 0.0501 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.1522 ± 0.0859	0.0304 ± 0.0926	0.0320 ± 0.0534	0.0225 ± 0.0421

TABLA 17: RESULTADOS EXPERIMENTO 3 PARA UKF+OFCL

	T0 = 200	T0 = 1200	T0 = 2700	T0 = 4100
Media	$\begin{bmatrix} 0.1120 \\ 0.9364 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1083 \\ 0.7105 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1191 \\ 0.3766 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1135 \\ 0.0866 \end{bmatrix}$
Covarianza	$\begin{bmatrix} 0.0217 & 0.0438 \\ 0.0438 & 0.1757 \end{bmatrix} 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 0.0351 & 0.1179 \\ 0.1179 & 0.4884 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0198 & 0.0551 \\ 0.0551 & 0.2909 \end{bmatrix} 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} 0.0144 & 0.0398 \\ 0.0398 & 0.1848 \end{bmatrix} 10^{-4}$
Error SOC	0.0130	0.0004	0.0031	-0.0029

4.5.4. Experimento de pronóstico

El cálculo de los índices de precisión, precisión-exactitud y de estabilidad para el pronóstico del tiempo de descarga (ToF), también llamado final de descarga (EoD , por sus siglas en inglés), se presenta junto a la predicción del mismo en las Figuras 19, 20 y 21, correspondientes respectivamente al FP base, el FP con OFCL y el UKF con OFCL.

De acuerdo a los criterios mencionados en el Capítulo 2, el filtro de partículas con lazo de corrección externo presenta una visible mejora en su precisión e índice de precisión-exactitud, respecto del caso base, sin embargo el esquema con UKF+OFCL es el que presenta mejor desempeño de acuerdo a los dos índices mencionados, siendo además el único cuya precisión-exactitud tiende a 1 a medida que se alcanza la descarga de la batería, es decir que predice con el mínimo error el instante de descarga a medida que éste se vuelve más cercano. Respecto de la estabilidad de los métodos, todos presentan comportamientos similares, de tendencia decreciente, salvo en los instantes cercanos a $t = 1800$ y $t = 3100$, los cuales, como se observa en la Figura 1, corresponden a los mayores requerimientos de corriente hacia la batería. Esto produce perturbaciones en todos los esquemas, las que también son visibles en los índices de precisión-exactitud y su causa se debe tanto a pérdidas de desempeño en la estimación, como a una caracterización del perfil de demanda futura con corrientes más altas.

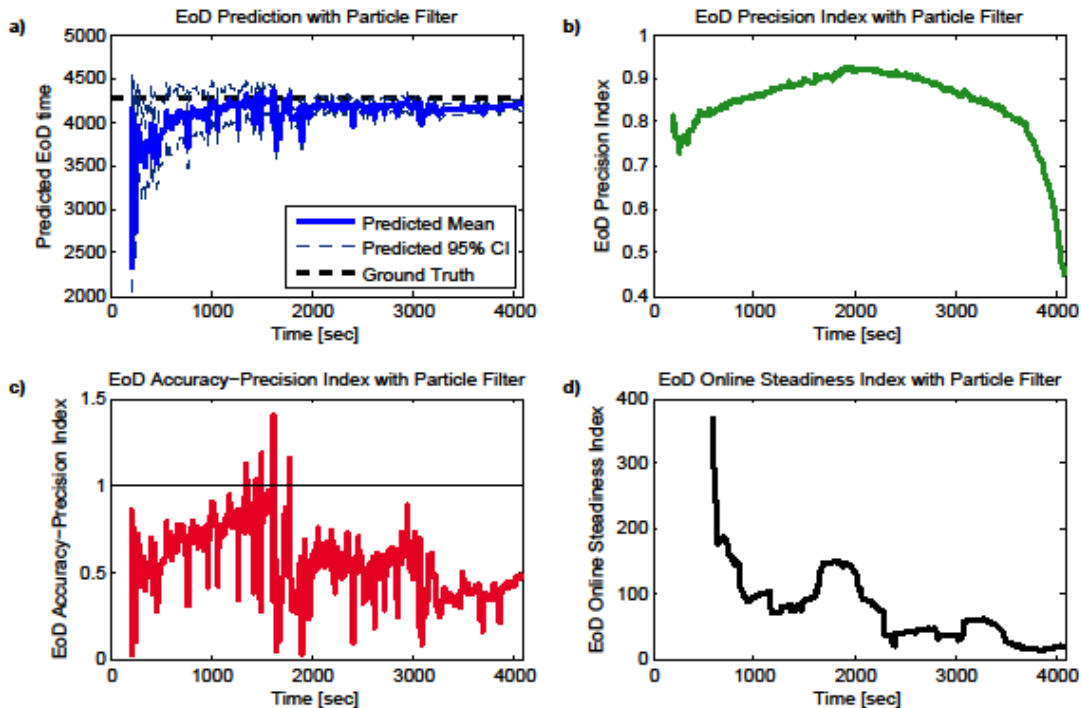


FIGURA 19: DESEMPEÑO EN PRONÓSTICO PARA FP. a) PREDICCIÓN DEL EoD EN EL TIEMPO. b) ÍNDICE DE PRECISIÓN. c) ÍNDICE DE EXACTITUD-PRECISIÓN. d) ÍNDICE DE ESTABILIDAD EN LÍNEA.

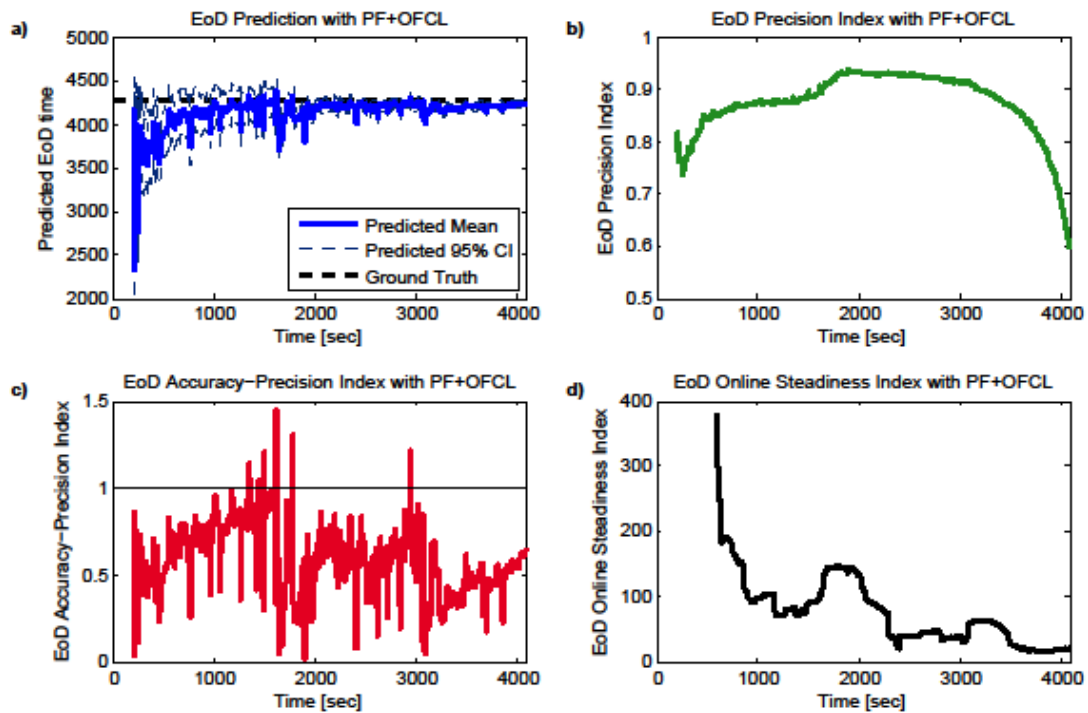


FIGURA 20: DESEMPEÑO EN PRONÓSTICO PARA FP+OFCL. a) PREDICCIÓN DEL EoD EN EL TIEMPO. b) ÍNDICE DE PRECISIÓN. c) ÍNDICE DE EXACTITUD-PRECISIÓN. d) ÍNDICE DE ESTABILIDAD EN LÍNEA.

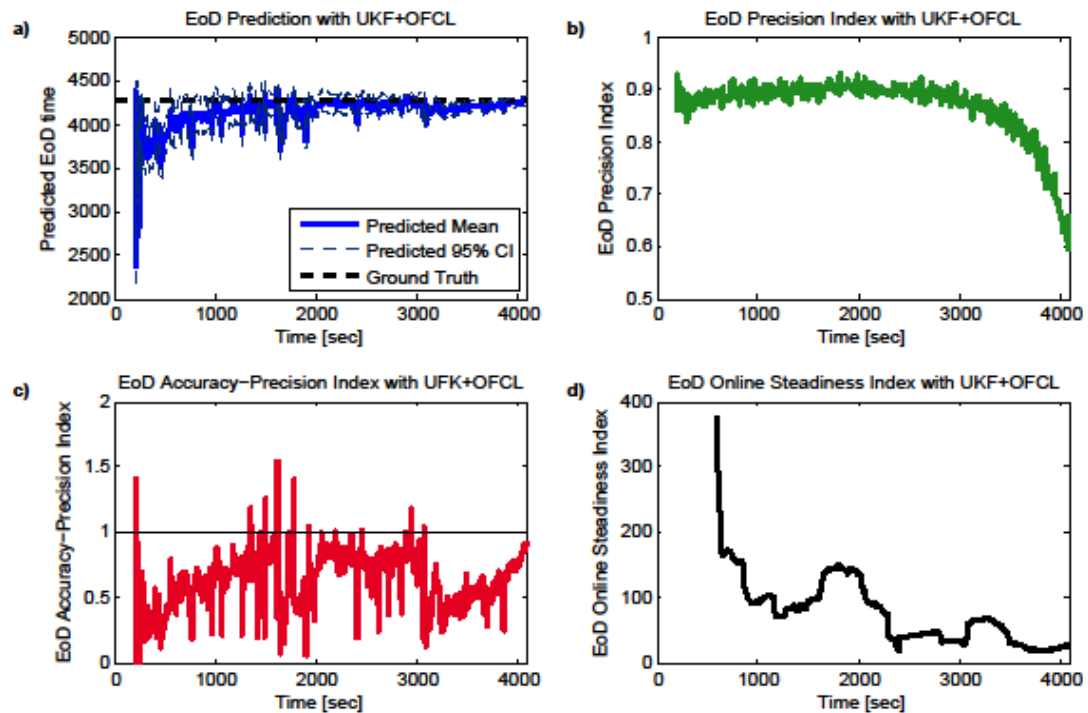


FIGURA 21: DESEMPEÑO EN PRONÓSTICO PARA UKF+OFCL. a) PREDICCIÓN DEL EoD EN EL TIEMPO. b) ÍNDICE DE PRECISIÓN. c) ÍNDICE DE EXACTITUD-PRECISIÓN. d) ÍNDICE DE ESTABILIDAD EN LÍNEA.

4.5.5. Uso de memoria y complejidad temporal

La Tabla 18 muestra el total de memoria necesaria para las variables utilizadas en cada método de estimación. Se observa una mayor cantidad en el filtro de partículas, en comparación con el UKF, debido a la necesidad de guardar los datos para las 40 partículas. El FP con OFCL es el que requiere la mayor cantidad de memoria, por necesitar espacio tanto para las partículas como para las variables del OFCL, sin embargo no es una cantidad significativamente superior a la demandada por el filtro de partículas base.

TABLA 18: MEMORIA RESERVADA AL FINAL DE CADA CICLO DE ESTIMACIÓN

	Filtro de partículas	FP con OFCL	UKF con OFCL
Total tamaño variables	1472 bytes	1552 bytes	608 bytes

Cabe destacar que lo anterior sólo señala la cantidad de memoria que utilizan las variables de los distintos algoritmos. La capacidad total necesaria para ejecutarlos debe considerar también el tamaño del programa y de un “*main*” que llame a las funciones y actúe en base a la información obtenida.

Respecto al tiempo de ejecución de cada uno, dado que éste depende del lenguaje de programación, procesador, memoria disponible, entre otros, una comparación en este sentido tiene un alcance limitado. Específicamente para los algoritmos de estimación implementados (excluyendo al UKF sin OFCL) los resultados del tiempo de ejecución, en Matlab[®] y para el Hardware utilizado, se muestran en la Tabla 19. Se puede notar que el UKF con OFCL tarda más que el filtro de partículas y el FP con OFCL requiere un tiempo de ejecución sólo levemente superior al original.

Debido a que Matlab[®] es extremadamente eficiente con los cálculos vectoriales y todo el código fue programado de esta manera, la Tabla 20 muestra los resultados de tiempo de ejecución para un experimento distinto, en que los mismos programas fueron escritos sin utilizar vectorización, es decir, haciendo uso de iteraciones para el cálculo de cada partícula, *sigma point* o entrada de matriz individualmente. Se puede observar que los resultados difieren completamente. El filtro de partículas aumenta su carga computacional aproximadamente 100 veces, mientras que el UKF con OFCL la reduce casi a la mitad. Esto indica claramente que la vectorización ayuda a mejorar considerablemente la ejecución del FP, mientras que perjudica al UKF, debido a la cantidad de partículas y dimensión del espacio de estado para el problema en particular que se trata.

Lo anterior no significa que el filtro de partículas diseñado sea poco efectivo programado en un lenguaje que no permita vectorizar los cálculos, ya que también es conocido que Matlab[®] es más bien lento con los cálculos iterativos. Sin embargo, es razonable pensar que de los métodos presentados, el UKF tiene mejores probabilidades de ser computacionalmente más liviano (con menor tiempo de ejecución) en un ambiente distinto de Matlab[®], mientras que dentro de éste se pudo apreciar que la eficiencia computacional entre las mejores implementaciones (FP vectorizado y UKF sin vectorizar) resulta comparable, aunque un poco más favorable para el filtro de partículas.

TABLA 19: TIEMPO DE EJECUCIÓN EN ESTIMACIÓN PARA HORIZONTE DE T=4100

	Filtro de partículas	FP con OFCL	UKF con OFCL
Tiempo total de estimación	0.28 segundos	0.29 segundos	0.68 segundos

TABLA 20: TIEMPO DE EJECUCIÓN EN ESTIMACIÓN PARA HORIZONTE DE T=4100 Y SIN VECTORIZACIÓN

	Filtro de partículas	UKF con OFCL
Tiempo total de estimación	29.3 segundos	0.37 segundos

Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones

De los distintos experimentos realizados con los métodos que se trabajaron en esta memoria, y en base a los resultados obtenidos, entre los que se consideran aquellos mostrados en el presente informe y otros observados durante la realización de la misma, se pudo llegar a diversas conclusiones. Sin embargo, es necesario destacar que éstas están sujetas a la base de datos de la que se dispuso, así como del ajuste paramétrico de los modelos.

En primer lugar, respecto de la eficiencia computacional, se llegó a resultados comparables en Matlab para los distintos métodos, utilizando la forma de programación más eficiente para cada uno de ellos. No obstante, la ventaja en este sentido la tiene el filtro de partículas, gracias a la eficiencia de los cálculos vectoriales de dicha plataforma. Por otra parte, es esperable que el uso de UKF con lenguajes compilados y no vectorizables sea mucho más eficiente. Respecto a los lazos de corrección externos, se comprobó que éstos no aumentan la carga del proceso de forma considerable.

Cabe acotar que, a pesar de que el filtro de Kalman *unscented* posee una versión *Square-Root*, la cual está reportada como computacionalmente más estable y en ocasiones más eficiente, como se mencionó en el Capítulo 2, dicha variante no resulta conveniente para el problema tratado. Las implementaciones realizadas mostraron un tiempo de ejecución más elevado, dada la pequeña dimensionalidad del modelo. Es decir, para una caracterización de dos estados, es más eficiente calcular en cada iteración del UKF la raíz cuadrada de una matriz, la cual puede hacerse tanto con factorización de Cholesky como a través de la fórmula analítica existente para el caso de 2×2 .

En segundo lugar, y en cuanto a la eficacia de los algoritmos programados (es decir, su desempeño en estimación y pronóstico), se puede afirmar que el OFCL logra mejorar los resultados de todos ellos. También que el UKF sin lazos de corrección resulta una alternativa de pobre rendimiento, pero al combinarse con una estrategia de OFCL se transforma en una herramienta muy atractiva y mejor que los esquemas basados en FP, siempre que el modelo resulte lo suficientemente confiable. Esto quiere decir que los ruidos de proceso asociados, e idealmente también los de observación, sean bastante pequeños o permitan su disminución a través del OFCL. Otra condición que favorece los resultados del filtro de Kalman *unscented* es que tanto el modelo de observación como de transición del estado tienen un comportamiento predominantemente lineal durante la parte intermedia de la descarga de la celda de ion-litio.

Por otra parte, los filtros de partículas, tanto con OFCL como sin este mecanismo, obtienen resultados razonablemente buenos, con niveles de error en la estimación de SOC que, en la mayor parte de las pruebas, no superan el 4% de desviación respecto del valor real, a excepción de que la condición inicial supuesta y la real difieran demasiado. El mayor valor de estos métodos es que pueden mantener su buen desempeño con niveles de incertidumbre más altos que aquellos necesarios para el correcto funcionamiento del UKF.

Relacionado con lo anterior, se verificó que la estructura de lazo externo de corrección propuesta permite mejorar los resultados de los distintos algoritmos de estimación. Es decir, el error de observación acumulado es un indicador de utilidad para tomar decisiones de modificación de los hiper-parámetros del modelo.

Dado lo anteriormente mencionado y con la experiencia adquirida a través del trabajo realizado, al enfrentar un problema de estimación del estado de carga en dispositivos de almacenamiento de energía, resulta recomendable iniciar el estudio con el desarrollo de filtros de partículas para comprobar si los modelos propuestos logran describir de forma suficiente la fenomenología de la batería. En caso de obtener buenos resultados con dichos modelos, la adopción de un esquema de estimación en base a UKF con OFCL puede ayudar a mejorar la consistencia y calidad de los resultados e incluso los tiempos de ejecución dependiendo de la plataforma de programación.

Finalmente, como trabajo futuro se plantea el estudio e implementación para realizar pronóstico con filtro de Kalman *unscented*, ya sea en esquemas mixtos con estimación mediante filtro de partículas o en conjuntos totalmente basados en UKF. Por otra parte el modelo de descarga de la batería puede mejorarse añadiendo fenomenología a la transición del estado asociado al módulo de la impedancia interna, haciendo de ésta una función de, por ejemplo, de la temperatura y la corriente. Por último, los lazos externos de corrección, como el diseñado en este trabajo, requieren de un estudio más profundo para determinar las condiciones de convergencia de los algoritmos en los que se incluyen.

Bibliografía

- [1] D. Pola, H. Navarrete, M. Orchard, R. Rabié, M. Cerda, B. Olivares, J. Silva, P. Espinoza y P. Aramis, «Particle-filtering-based Discharge Time Prognosis for Lithium-Ion Batteries with a Statistical Characterization of Use Profiles,» *IEEE Transactions on Reliability*, 2014.
- [2] D. Luenberger, «Observing the State of a Linear System,» *IEEE Trans. on Military Electronics*, vol. 8, n° 2, pp. 74-80, 1964.
- [3] J. P. Gauthier, H. Hammouri y S. Othman, «A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors,» *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, n° 6, pp. 875-880, 1992.
- [4] G. Ciccarella, M. Dalla Mora y A. Germani, «A Luenberger-like observer for nonlinear systems,» *International Journal of Control*, vol. 57, n° 3, pp. 537-556, 1993.
- [5] R. L. Carroll y D. Lindorff, «An adaptive observer for single-input single-output linear systems,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, n° 5, pp. 428-435, 1973.
- [6] G. Luders y K. S. Narendra, «An adaptive observer and identifier for a linear system,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 18, n° 5, pp. 496-499, 1973.
- [7] R. E. Kalman, «A new approach to linear filtering and prediction problems,» *Journal of basic Engineering*, vol. 82, n° 1, pp. 35-45, 1960.
- [8] G. L. Smith, S. F. Schmidt y L. A. & McGee, «Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumlunar vehicle,» National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., 1962.
- [9] S. J. Julier y J. K. Uhlmann, «A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems,» de *Proc. of Aerosense: The 11th Int. Symp. on Aerospace/Defence Sensing, Simulation and Controls*, 1997.
- [10] M. Sanjeev Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon y T. Clapp, «A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking,» *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n° 2, pp. 174-188, 2002.
- [11] C. W. Gardiner, «Markov Processes,» de *Handbook of stochastic methods*, Berlin, Springer, 1985, pp. 43-44.
- [12] S. Thrun, W. Burgard y D. Fox, «Gaussian Filters,» de *Probabilistic robotics*, MIT press, 2005, pp. 39-48.
- [13] J. V. Candy, *Bayesian signal processing: Classical, modern and particle filtering methods*, John Wiley & Sons, 2011.
- [14] G. Welch y G. Bishop, *An introduction to the Kalman filter*, 1995.
- [15] S. Thrun, W. Burgard y D. Fox, «Gaussian Filters,» de *Probabilistic robotics*, MIT press, 2005, pp. 60-65.
- [16] H. W. Sorenson, «Special Issue on Applications of Kalman Filtering,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, n° 2, pp. 253-427, 1983.
- [17] E. A. Wan y R. Van Der Merwe, «The unscented Kalman filter for nonlinear estimation,» de *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*, 2000.

- [18] R. Van Der Merwe y E. A. Wan, «The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation,» de *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings.(ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on*, 2001.
- [19] B. P. Flannery, W. H. Press, S. A. Teukolsky y W. Vetterling, Numerical recipes in C, New York: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992.
- [20] A. H. Sayed y T. Kailath, «A state-space approach to adaptive RLS filtering,» *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 11, n° 3, pp. 18-60, 1994.
- [21] J. J. Dongarra, J. R. Bunch, C. B. Moler y G. W. Stewart, LINPACK users' guide, Philadelphia: SIAM, 1979.
- [22] A. Doucet, S. Godsill y C. Andrieu, «On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering,» *Statistics and computing*, vol. 10, n° 3, pp. 197-208, 2000.
- [23] G. Vachtsevanos, F. Lewis, M. Roemer, A. Hess y B. Wu, Intelligent fault diagnosis and prognosis for engineering systems, New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- [24] C. Musso, N. Oudjane y F. Le Gland, «Improving Regularised Particle Filters,» de *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, vol. A. Doucet and N. de Freitas and N. Gordon, Springer-Verlag, 2001, pp. 247-271.
- [25] M. Orchard, B. Wu y G. Vachtsevanos, «A Particle Filter Framework for Failure Prognosis,» de *Proceedings of WTC2005, World Tribology Congress III*, Washington DC, 2005.
- [26] M. Cerda, «Estimación en línea del tiempo de descarga de baterías de ion-litio utilizando caracterización del perfil de utilización y métodos secuenciales de Monte Carlo,» M.S. Thesis, Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2012.
- [27] H. Navarrete, «Caracterización Estadística del Perfil de Uso de Baterías para el Pronóstico del Estado-de-Carga,» Universidad de Chile, Santiago, Chile, 2014.
- [28] M. Orchard, G. Kacprzyński, K. Goebel, B. Saha y G. Vachtsevanos, «Advances in Uncertainty Representation and Management for Particle Filtering Applied to Prognostics,» de *International Conference on Prognostics and Health Management PHM 2008*, Denver, CO, USA, 2008.
- [29] M. Orchard, «A Particle Filtering- based Framework for On-line Fault Diagnosis and Failure Prognosis,» Ph.D. Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, Georgia Institute of Technology, 2007.
- [30] M. Orchard, F. Tobar y G. Vachtsevanos, «Outer Feedback Correction Loops in Particle Filtering-based Prognostic Algorithms: Statistical Performance Comparison,» *Studies in Informatics and Control*, vol. 18, n° 4, pp. 295-304, 2009.
- [31] T. Cruse, «Probabilistic Systems Modeling and Validation,» de *HCF 2004*, Marzo 16-18, 2004.
- [32] B. Pattipati, C. Sankavaram y K. R. Pattipati, «System identification and estimation framework for pivotal automotive battery management system characteristics,» *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, vol. 41, n° 6, pp. 869-884, 2011.
- [33] S. Qingsheng, Z. Chenghui, C. Naxin y Z. Xiaoping, «Battery State-Of-Charge estimation in Electric Vehicle using Elman neural network method,» de *2010 29th Chinese Control Conference (CCC)*, 2010.

- [34] D. V. Cadar, D. M. Petreus y C. A. Orian, «A method of determining a lithium-ion battery's state of charge,» de *2009 15th International Symposium for Design and Technology of Electronics Packages (SIITME)*, 2009.
- [35] Z. Di, M. Yan y B. Qing-Wen, «Estimation of Lithium-ion battery state of charge,» de *2011 30th Chinese Control Conference (CCC)*, 2011.
- [36] M. Charkhgard y M. Farrokhi, «State-of-charge estimation for lithium-ion batteries using neural networks and EKF,» *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 57, n° 12, pp. 4178-4187, 2010.
- [37] L. Ran, W. Junfeng, W. Haiying y L. Gechen, «Prediction of state of charge of lithium-ion rechargeable battery with electrochemical impedance spectroscopy theory,» de *2010 the 5th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, 2010.
- [38] B. Saha, K. Goebel, S. Poll y J. Christophersen, «Prognostics methods for battery health monitoring using a Bayesian framework,» *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 58, n° 2, pp. 291-296, 2009.
- [39] X. Tang, X. Mao, J. Lin y B. Koch, «Li-ion battery parameter estimation for state of charge,» de *2011 American Control Conference (ACC)*, 2011.
- [40] A. H. Ranjbar, A. Banaei, K. A. y B. Fahimi, «Online Estimation of State of Charge in Li-Ion Batteries Using Impulse Response Concept,» *IEEE Trans. on Smart Grid*, vol. 3, n° 1, pp. 360-367, 2012.
- [41] B. Saha y K. Goebel, «Modeling Li-ion battery capacity depletion in a particle filtering framework,» de *Proceedings of the annual conference of the prognostics and health management society*, San Diego, 2009.
- [42] M. Dalal, J. Ma y D. He, «Lithium-ion battery life prognostic health management system using particle filtering framework,» *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, vol. 225, n° 1, pp. 81-90, 2011.
- [43] M. Orchard, L. Tang, B. Saha, K. Goebel y G. Vachtsevanos, «Risk-sensitive particle-filtering-based prognosis framework for estimation of remaining useful life in energy storage devices,» *Studies in Informatics and Control*, vol. 19, n° 3, pp. 209-218, 2010.
- [44] A. J. Salkind, C. Fennie, P. Singh, T. Atwater y D. E. Reisner, «Determination of state-of-charge and state-of-health of batteries by fuzzy logic methodology,» *Journal of Power Sources*, vol. 80, n° 1, pp. 293-300, 1999.
- [45] D. V. Do, C. Forgez, K. El Kadri Benkara y G. Friedrich, «Impedance observer for a Li-ion battery using Kalman filter,» *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, n° 8, pp. 3930-3937, 2009.
- [46] B. S. Bhangu, P. Bentley, D. A. Stone y C. Bingham, «State-of-charge and state-of-health prediction of lead-acid batteries for hybrid electric vehicles using non-linear observers,» de *2005 European Conference on Power Electronics and Applications*, 2005.
- [47] M. E. Orchard y G. J. Vachtsevanos, «A particle-filtering approach for on-line fault diagnosis and failure prognosis,» *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 31, n° 3-4, pp. 221-246, 2009.

- [48] W. He, N. Williard, M. Osterman y M. Pecht, «Remaining useful performance analysis of batteries,» de *2011 IEEE Conference on Prognostics and Health Management (PHM)*, 2011.
- [49] B. Bole, M. Daigle, G. Gorospe y K. Goebel, «Online Prediction of Battery Discharge and Estimation of Parasitic Loads for an Electric Aircraft,» *Second European Conference of the Prognostics and Health Management Society 2014*, pp. 23-32, 2014.
- [50] J. Liu y M. West, «Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering,» de *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, vol. A. Doucet and N. de Freitas and N. Gordon, Springer-Verlag, 2001, pp. 197-224.