



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

## APLICACIONES DEL PROCESAMIENTO DE IMÁGENES DIGITALES A ASTRONOMÍA

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

GIANFRANCO LIBERONA HENRÍQUEZ

PROFESOR GUÍA:  
JAIME ORTEGA PALMA

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
TAKESHI ASAHI KODAMA  
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por PFB-03 CMM UCHILE, Proyecto FONDECYT Regular 1111012 y Proyecto ESO-CMM.

SANTIAGO DE CHILE  
2015

# Resumen

En la presente memoria se abordan a fondo los problemas de la interferometría y la síntesis de Fourier, tanto en términos teóricos como en términos prácticos, en el contexto de las aplicaciones de estas herramientas en ciencias como la astronomía, a través de proyectos como ALMA (*Atacama Large Milimeter Array*), SKA (*Square Kilometre Array*) y VLA (*Very Large Array*), que basan su funcionamiento en la radioastronomía, rama de la ciencia que utiliza la interferometría como herramienta clave de sus estudios.

Todo esto se fundamenta principalmente en el Teorema de Van Cittert - Zernike [2], proposición que indica lo siguiente: *Si se denomina  $V$  a la función de visibilidades de un frente de ondas,  $I$  a su intensidad y  $A$  el área de recepción efectiva del instrumento utilizado para captar la señal, entonces*

$$V(u, v) = \iint A(x, y)I(x, y)e^{-2\pi i(ux+vy)} \, dx dy.$$

En otras palabras, el teorema citado indica que salvo una constante correspondiente al instrumento utilizado, la función de visibilidades de una onda y su intensidad son un par transformada/antitransformada de Fourier. El problema de la síntesis de Fourier consiste en palabras simples al de la reconstrucción de la función de intensidad de una señal, a partir de información parcial de su función de visibilidad. Esta memoria aborda diferentes técnicas de resolución de este problema, que pese a ser un problema mal puesto, es posible regularizarlo para obtener soluciones aproximadas.

El resultado principal de este trabajo consiste en la presentación e implementación numérica de una nueva propuesta de solución, utilizando un enfoque variacional, que busca reducir los cálculos y tiempos de computación de las técnicas utilizadas en la actualidad, tales como CLEAN (1974) y MEM (1985), además de estudiar el efecto que genera la regularización de esta solución en diferentes ámbitos que serán detallados cuando corresponda. Se presentan sus resultados y se realizan comparaciones entre distintas soluciones, dependientes de los parámetros modificados en cada ocasión.

Se termina la presente memoria analizando los resultados numéricos obtenidos con diversas reconstrucciones de imágenes y se comenta posible trabajo futuro y temas aún pendientes al término de este trabajo, que pueden constituir un aporte importante al desarrollo actual de estas técnicas en astronomía y disciplinas afines como la imagenología médica, que utiliza técnicas similares a las aquí estudiadas para la obtención (por ejemplo) de resonancias magnéticas en los pacientes atendidos.

*A Stefano y Francisca.*

# Agradecimientos

Ante todo le agradezco a Dios todo esto, y lo pongo primero pues siempre le ando pidiendo cosas y nunca se lo agradezco. Miles de millones de gracias a mi familia por nunca dudar de mí, y cuando digo familia quisiera detallar. Muchísimas gracias a mi papá por ser el primero en inculcarme el amor por las matemáticas y a mi madre por estar en todas conmigo y enseñarme el valor del esfuerzo y el estudio. Gracias además a ambos, por mostrarme de la forma más cercana, el mundo de la docencia que tanto amo. Gracias a la Tilosa por ser en muchas ocasiones mi cable a tierra, y muchísimas gracias a Stefano, simplemente por ser mi hermano chico y estar ahí siempre, tocando su guitarra en todo momento. Me adelanto un poco a los hechos y agrego a este párrafo de “familia” a Francisca, lejos la mejor compañera de vida que pude haber encontrado. Gracias por tu apoyo incondicional y por estar conmigo en las buenas, en las malas y en las peores, te amo y trataré de estar siempre a tu altura.

Por supuesto a medida que uno avanza en el camino va ganando “familiares putativos” y acá se vienen a la cabeza un montón de nombres. Gracias a toda mi gente de Rancagua por estar siempre disponibles para conversar (en persona o virtualmente), al team-cafeta y a tod@s mis grandes amig@s que conocí en la U que por suerte son muchos como para detallarlos y la página es corta, pero ustedes saben quienes son. Mención aparte por supuesto al Niko, David y Charles a quienes considero tres hermanos más que encontré de forma tardía, muchas gracias por todo!

Agradezco también de forma especial a los profesores que acá en la U me han confiado la enorme tarea de impartir docencia con ellos, siendo su profesor auxiliar o similar, pues me han permitido desarrollar habilidades dentro y fuera de las salas de clases que poseen un valor único para mí. Me detengo acá para mencionar especialmente a Rafael Correa y Felipe Célery, quienes han depositado muchísima de su confianza en mí cuando hemos trabajado juntos. Gracias también a l@s alumn@s que tuve en todos esos cursos (sí, bastantes jajaja) por las experiencias compartidas con cada un@.

Deseo agradecer también a los profesores que me ayudaron a sacar adelante esta memoria; a Jaime San Martín por aceptar formar parte de la comisión en cuanto se lo pedí y por sus consejos, a Takeshi Asahi por tenerme infinita paciencia cada vez que le fui a hacer preguntas computacionales sin importar lo tontas que fueran y muy especialmente a Jaime Ortega, a quien le guardo un profundo cariño y respeto por acompañarme en este proceso. Profe, gracias por sus consejos, y por su eterna paciencia y buena onda. Gracias por ser #LoMásGrande.

Finalmente agradezco al PFB-03 CMM UCHILE, Proyecto Fondecyt Regular 1111012 y Proyecto ESO-CMM por el financiamiento de este trabajo.



# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Fundamentos Básicos del Procesamiento de Imágenes y Aplicaciones a la Astronomía</b>	<b>5</b>
1.1. Ideas Base del Procesamiento de Imágenes . . . . .	5
1.2. El Problema de la Interferometría . . . . .	7
1.2.1. Definiciones Básicas y Origen Histórico . . . . .	7
1.2.2. Funcionamiento de un interferómetro básico . . . . .	7
1.2.3. Formulación matemática y nociones elementales . . . . .	8
1.2.4. La radiointerferometría en la práctica . . . . .	10
1.2.5. Última etapa: formación y reconstrucción de la imagen . . . . .	13
1.2.6. Modelo y Notación Matemática . . . . .	15
<b>2. Algoritmos Clásicos en Interferometría</b>	<b>17</b>
2.1. Primeras Respuestas: Algoritmos CLEAN y MEM . . . . .	17
2.1.1. Algoritmo CLEAN . . . . .	17
2.1.2. Algoritmo MEM . . . . .	20
2.1.3. Comparación entre CLEAN y MEM . . . . .	21
2.2. El Enfoque Variacional . . . . .	23
2.2.1. Técnicas Variacionales Clásicas . . . . .	23
<b>3. Propuesta del Método <i>Split</i></b>	<b>25</b>
3.1. El Algoritmo <i>Split</i> . . . . .	25
3.2. Técnicas de Optimización utilizadas e Implementación Numérica . . . . .	27
3.3. Término Regularizante y Restricciones Adicionales . . . . .	30
<b>4. Discusión Matemática</b>	<b>32</b>
4.1. Problema Inverso de la Síntesis de Fourier . . . . .	32
4.1.1. Conceptos Generales . . . . .	32
4.1.2. Resultados de Teoría de Operadores . . . . .	33
4.1.3. Problema de Extrapolación de Fourier . . . . .	35
4.1.4. Problema de Interpolación de Fourier . . . . .	36
4.1.5. Técnicas de Regularización . . . . .	37
4.2. Teorema de Paley-Wiener . . . . .	38
<b>5. Experiencias y Resultados Numéricos</b>	<b>40</b>
5.1. Visibilidades . . . . .	40

5.2.	Convergencia y Número de Iteraciones . . . . .	42
5.3.	Términos Regularizantes . . . . .	43
5.3.1.	Espacio de Imagen . . . . .	44
5.3.2.	Espacio de Fourier . . . . .	52
5.4.	Parámetros de Regularización . . . . .	55
5.4.1.	Regularización $F_{Reg}^1$ . . . . .	56
5.4.2.	Regularización $F_{Reg}^2$ . . . . .	57
5.4.3.	Regularización $F_{Reg}^3$ . . . . .	57
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de Tablas

5.1. Estabilidad de Convergencia . . . . .	43
5.2. CLEAN . . . . .	43
5.3. MEM . . . . .	43
5.4. Tikhonov . . . . .	43

# Índice de Ilustraciones

1.	Algunas antenas del arreglo móvil de ALMA. . . . .	1
2.	Muestreo en el espacio $UV$ de datos reales captados en ALMA. . . . .	2
3.	Fotografía y su FFT asociada (escala logarítmica). . . . .	3
1.1.	Imagen Digital en Escala de Grises. . . . .	6
1.2.	Complicaciones en Imágenes Digitales. . . . .	6
1.3.	Diagrama típico de un interferómetro de Michelson. . . . .	8
1.4.	Bosquejo de una situación típica en un interferómetro. . . . .	10
1.5.	Coordenadas utilizadas frecuentemente. . . . .	12
2.1.	Distintas etapas de Algoritmo CLEAN (5-10-20-40 iteraciones). . . . .	19
2.2.	Objetos Herbig-Haro HH 46/47.. . . .	21
2.3.	Distintas etapas de Algoritmo MEM (5-10-20-40 iteraciones). . . . .	21
5.1.	Imagen de Resonancia Magnética. . . . .	40
5.2.	Imágenes con visibilidades de 30 %, 50 % y 70 %. . . . .	41
5.3.	Objetos Herbig-Haro HH 46/47. . . . .	41
5.4.	Imágenes con visibilidades de 30 %, 50 % y 70 %. . . . .	41
5.5.	Galaxias de las Antenas, NGC4038-NGC4039. . . . .	42
5.6.	Imagen reconstruida, 10-20-40 iteraciones. . . . .	43
5.7.	Simulación Galaxia Boomerang . . . . .	44
5.8.	Cortes Galaxia Boomerang . . . . .	46
5.9.	Simulación Galaxias NGC4038-NGC4039 . . . . .	47
5.10.	Cortes Galaxias NGC4038-NGC4039 . . . . .	48
5.11.	Simulación <i>Spitzer Dark Cloud</i> (SDC) 335.579-0.292. . . . .	49
5.12.	Cortes <i>Spitzer Dark Cloud</i> (SDC) 335.579-0.292. . . . .	50
5.13.	Simulación Resonancia Magnética . . . . .	51
5.14.	Cortes Resonancia Magnética . . . . .	52
5.15.	Simulación Lena . . . . .	53
5.16.	Cortes Lena . . . . .	53
5.17.	Simulación Galaxia Boomerang . . . . .	54
5.18.	Simulación Resonancia Magnética . . . . .	55
5.19.	Valores de $\alpha = 0,01, 0,1$ y $0,2$ para $F_{Reg}^1$ . . . . .	56
5.20.	Corte Imagen, Fila 175. . . . .	56
5.21.	Valores de $\alpha = 0,01, 0,1$ y $0,2$ para $F_{Reg}^2$ . . . . .	57
5.22.	Corte Imagen, Fila 175. . . . .	57
5.23.	Valores de $\alpha = 0,01, 0,1$ y $0,2$ para $F_{Reg}^3$ . . . . .	58

5.24. Corte Imagen, Fila 175. . . . .	58
---------------------------------------	----

# Introducción

El problema que se abordará en el presente Trabajo de Memoria de Título, corresponde al de la reconstrucción de imágenes de naturaleza astronómica (y aplicaciones de esta labor a tareas afines) obtenidas mediante la técnica de la interferometría. En términos simples, esta técnica consiste en combinar la información obtenida a través de aparatos conocidos como interferómetros, que captan estos datos y permiten construir una imagen del o los objetos estudiados con resolución considerablemente mayor a la obtenida mediante el uso de telescopios convencionales, para obtener imágenes de calidad que les permitan ser usadas con fines científicos. Esta técnica, mayoritariamente utilizada en radioastronomía, rama de la astronomía que estudia la emisión de radiación electromagnética de los cuerpos celestes, cada vez gana más espacio en el contexto de la investigación científica.



Figura 1: Algunas antenas del arreglo móvil de ALMA.

En la actualidad, proyectos como ALMA (*Atacama Large Millimeter Array*) y SKA (*Square Kilometre Array*), buscan usar esta técnica para captar imágenes del universo como no se ha realizado antes. El primero de estos proyectos (ubicado tal como lo indica su nombre en la región de Atacama de nuestro país) consiste básicamente en un radiotelescopio compuesto por un arreglo de 66 antenas móviles, que a través de distintas configuraciones permiten obtener imágenes con características variadas, dependiendo de lo que se desee estudiar mediante la información captada por sus antenas. Por otro lado, SKA es un proyecto astronómico que se construirá en Australia y Sudáfrica, que tal como su nombre indica pretende tener un área de captación de información de aproximadamente un kilómetro cuadrado, para así generar

las imágenes que actualmente serían las de mayor resolución existentes en esta ciencia. Es por ello que aportar y generar más conocimiento del problema de reconstrucción de imágenes que aparece al utilizar esta clase de técnicas es de suma importancia, pues esto permite a la comunidad científica lograr avances de mayor calidad a medida que pasa el tiempo.

Matemáticamente hablando, un radiotelescopio como los recién descritos, en términos muy vagos, entrega como resultado de su operación un muestreo irregular de cierta información de una región del cielo observado, con características bastante particulares, generadas por los fenómenos físicos implícitos en la captación de imágenes de naturaleza astronómica (la rotación de la Tierra por ejemplo). La información captada por estos instrumentos puede ser pensada como la transformada de Fourier de la imagen que se desea reconstruir, por lo que esta labor ya tiene desde un comienzo dos grandes dificultades por abordar; en primera instancia la reconstrucción de la información faltante (vale decir, la que no es captada por las antenas del instrumento en el muestreo de la zona observada) y en segundo lugar, su posterior “anti-transformación” para obtener como resultado una imagen que sea factible de estudiar, y represente de forma fidedigna el objeto u objetos de interés.

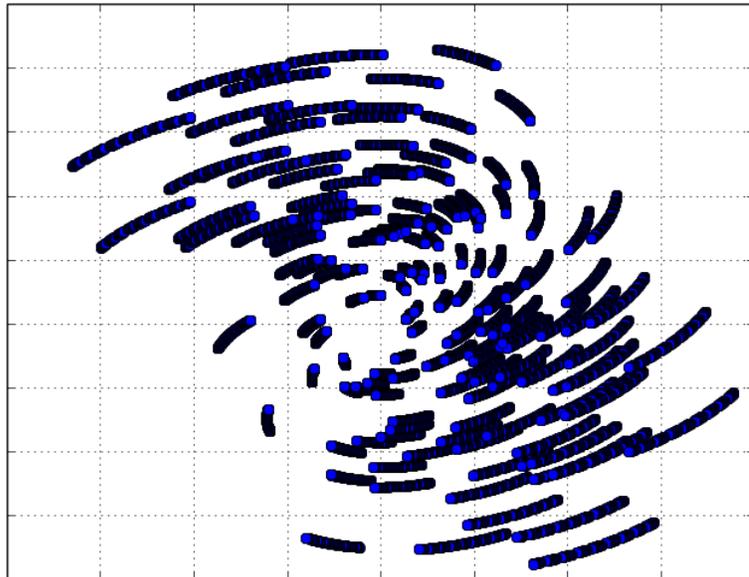


Figura 2: Muestreo en el espacio  $UV$  de datos reales captados en ALMA.

El problema en términos matemáticos puede estudiarse desde el enfoque de los denominados problemas inversos, que esencialmente buscan convertir mediciones observadas mediante alguna técnica particular, en información respecto de algún objeto físico o sistema. Luego, se determinan de él en términos teóricos algunas condiciones, sobre las cuales es factible pensar en obtener soluciones que pueden o no ser únicas, y que tengan algún comportamiento deseable respecto de la información utilizada para su obtención. Ejemplo de un problema inverso clásico es el de determinar la geometría de un objeto sumergido en un fluido, obteniendo distintas mediciones del fluido en las paredes del contenedor donde se ubican todos los elementos en cuestión.

En términos prácticos, en la actualidad, proyectos como ALMA y VLA (*Very Large Array*) utilizan paquetes computacionales especialmente contruidos para llevar a cabo la reconstrucción y obtención de imágenes a partir de la información captada. Aquel que se utiliza

de forma más propagada en estos dos proyectos es CASA (*Common Astronomy Software Applications*), que de forma más general busca entregar como meta primaria herramientas elementales para el post-procesamiento de información de estos radiotelescopios. De forma más específica, dos son los algoritmos más utilizados al día de hoy para llevar a cabo esta construcción; el algoritmo CLEAN[8] que en términos históricos es la primera forma de solución de este problema, propuesto por Högbom en 1974 y el algoritmo MEM[3] (*Maximum Entropy Method*) que busca dar respuestas menos controladas (de alguna forma más “programables”) al problema en cuestión.

A estas formas de resolver el problema también se le pueden agregar técnicas que forman parte de la literatura general del procesamiento de imágenes; que mediante técnicas de naturaleza variacional y de interpolación de datos permiten entregar más y mejores resultados, dependiendo por supuesto en gran medida del objeto que se desea estudiar. En otras palabras, todas estas técnicas están fuertemente sujetas a la información *a priori* que se maneje de la imagen por reconstruir, por lo que muchas son las variables que se deben controlar a la hora de estudiar estas herramientas.

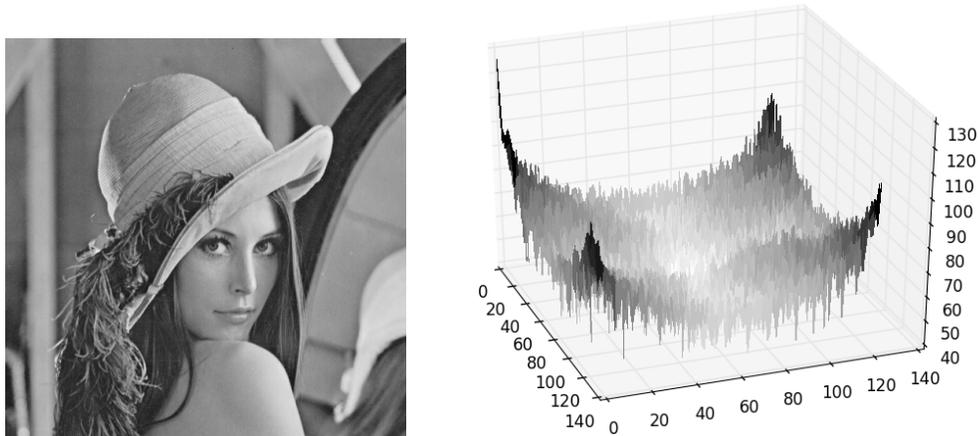


Figura 3: Fotografía y su FFT asociada (escala logarítmica).

El aporte del presente trabajo de Memoria de Título consiste en agregar un nuevo enfoque, que permite de alguna forma estudiar el impacto de utilizar diferentes técnicas de regularización en el espacio de la imagen por reconstruir y además aporta novedades respecto a técnicas que pueden ser utilizadas en el espacio de frecuencias de la imagen, vale decir, antes de anti-transformar la información reconstruida, todo esto inspirado en resultados del estilo del Teorema de Paley-Wiener.

El trabajo desarrollado permite además estudiar como trabajo futuro las diferencias que se obtienen a la hora de cambiar las funciones que se usan para la interpolación de la información, así como también de analizar en detalle las diferencias obtenidas a la hora de ocupar técnicas distintas para transformar y anti-transformar la información por reconstruir (específicamente, saber qué ocurre si se utilizan técnicas de transformada de Fourier troncada por ejemplo), que en el contexto de la radioastronomía aún tiene mucho por aportar.

A grandes rasgos, el presente trabajo se puede dividir en las siguientes secciones: en el primer capítulo se sientan las bases del procesamiento de imágenes y de la interferometría, técnica

que permite obtener estas imágenes de gran resolución que se han comentado anteriormente, a costo de obtenerse de forma fragmentaria, de manera tal que se hace necesario desarrollar técnicas de reconstrucción de imágenes digitales adecuadas para ellas.

En el segundo capítulo se estudian y analizan las técnicas de reconstrucción de imágenes ya utilizadas en la actualidad, haciendo un análisis y comparación general de su efectividad bajo diferentes hipótesis respecto a la imagen que se desea capturar. Se observa en esta sección uno de los grandes supuestos que se maneja a la hora de practicar reconstrucción de imágenes en este contexto, que tiene que ver con el nivel de información *a priori* que se maneja del objeto que se desea estudiar.

En el tercer capítulo se detalla por completo la propuesta del trabajo de memoria, analizando en términos matemáticos y computacionales las técnicas utilizadas en ella. Se explica la motivación presente detrás para plantear esta técnica y se discuten sus variables de mayor importancia, que posteriormente serán analizadas en cuanto a su comportamiento y resultados generales.

En el cuarto capítulo se presenta un resumen del marco teórico que fundamenta las herramientas que se han utilizado en el trabajo hasta este punto, tales como resultados elementales de la teoría de problemas inversos y el teorema de Paley-Wiener, eje central de uno de los experimentos numéricos realizados en el transcurso de este trabajo de memoria de título.

En los capítulos finales, quinto y sexto se entregan los resultados más importantes del trabajo realizado, particularmente en su naturaleza numérica (con imágenes de ejemplos y mediciones de índices que permitan tener una idea de su efectividad) y se muestran las conclusiones obtenidas y tareas que quedan pendientes para su posterior estudio y desarrollo en trabajos futuros. Aquí es donde se refleja el trabajo realizado en sí, y se obtienen conclusiones satisfactorias de los experimentos realizados (manejo de los parámetros que definen al modelo del algoritmo planteado, uso de diferentes términos regularizantes en la optimización en cada uno de los espacios trabajados, manejo de las iteraciones del programa, etc).

# Capítulo 1

## Fundamentos Básicos del Procesamiento de Imágenes y Aplicaciones a la Astronomía

### 1.1. Ideas Base del Procesamiento de Imágenes

El presente trabajo fundamenta sus resultados en las diferentes aplicaciones que posee la teoría de imágenes digitales en campos de la ciencia actual, como es el caso específico de la astronomía. Para comenzar, por ende, es fundamental aclarar qué se entenderá por una imagen digital en el este contexto.

Una imagen digital (también llamada imagen discreta en muchos casos) es una representación de un fragmento del mundo continuo, obtenida a partir de una imagen análoga (un paisaje que se desea capturar en una fotografía por ejemplo) a través de técnicas de muestreo y cuantificación. Este proceso por supuesto depende del aparato utilizado para la captación de la información, como por ejemplo los CCDs de las cámaras digitales. La idea más intuitiva y básica para comprender el funcionamiento de estos aparatos es la superposición de una grilla en la imagen análoga, y asignar a cada celdilla de la grilla un valor numérico (en el caso de las imágenes en escala de grises) que representa de alguna forma la información que se desea capturar. Cada celdilla de esta grilla se denomina *pixel*, y su valor numérico es el nivel de gris o brillo de la porción de imagen capturada.

Dependiendo del tipo de imagen, el número de bits utilizados para representar cada uno de estos píxeles puede variar. Para describir un pixel, también se hace necesario tener más de un canal o banda que entregue información adecuada. Por ejemplo, una imagen como las que típicamente se trabajarán en la presente memoria es en blanco y negro y por ende usará un sólo canal por pixel; pero si se trata de una imagen a color debe describirse cada uno de sus píxeles o puntos con tres canales: rojo, verde y azul.

Lo último, pero no menos importante a la hora de estudiar una imagen y sus propiedades es su tamaño (también conocida como resolución). Este dato corresponde al número de filas

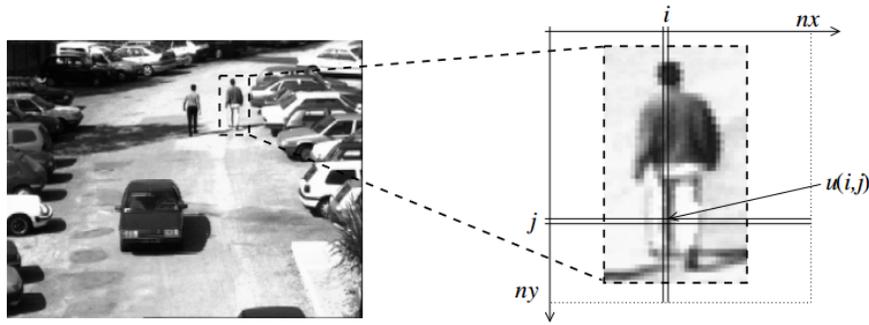


Figura 1.1: Imagen Digital en Escala de Grises.

y columnas que posee la grilla de píxeles en la imagen. Sólo para dar una idea, una imagen digital típica obtenida en una cámara digital convencional es de  $320 \times 240$  o de  $640 \times 480$  píxeles, llegando en el caso de las cámaras profesionales a resoluciones de  $3060 \times 2036$ . Las cámaras utilizadas para grabar películas de cine por ejemplo, normalmente capturan imágenes de  $720 \times 576$ ,  $1920 \times 1440$  o superior; para aplicaciones médicas basta con usar imágenes de  $128 \times 128$ , etc. En términos intuitivos por supuesto, a mayor resolución, la imagen digital es una mejor representación de la realidad.

Conectando el tema con esta parte, una imagen digital puede estar compuesta por una serie de estructuras y objetos, e incluso esto resulta más complejo de identificar que en el mundo real pues la digitalización de la imagen se traduce en una serie de restricciones asociadas a la cantidad de píxeles con los que se cuentan para la captura de la imagen y a las restricciones técnicas del aparato utilizado en sí. Para dar una idea de esto, una imagen como la siguiente muestra una serie de dificultades que aparecen al momento de estudiar sus propiedades.

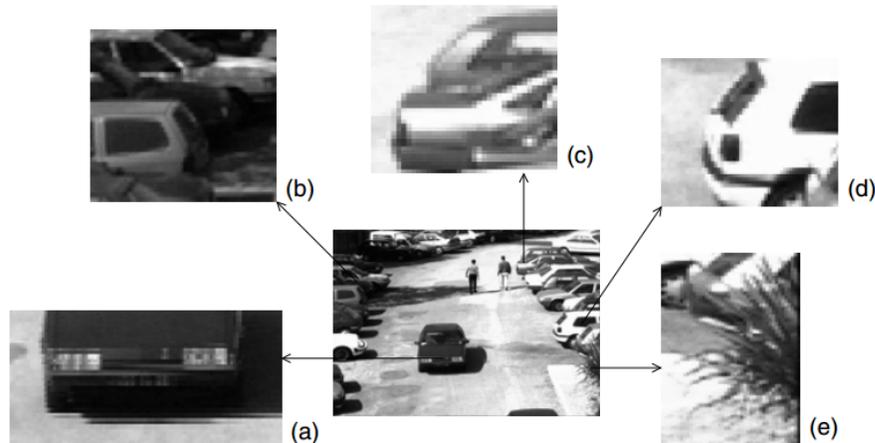


Figura 1.2: Complicaciones en Imágenes Digitales.

En detalle, se observan aquí las siguientes dificultades:

- (a) Baja resolución, que impide apreciar detalles de la imagen.
- (b) Bajo contraste, lo que se traduce en dificultades para identificar objetos en la zona.
- (c) Mala representación de sombras y elementos degradados.
- (d) Mala transición entre objetos, que impide identificarlos correctamente.

- (e) Elementos muy finos para la cantidad de pixeles utilizados, se traduce en una mala representación de éstos.

En el caso específico de la astronomía, las dificultades anteriores cobran una importancia fundamental, dado el hecho de que la captación de imágenes digitales es la única forma certera de obtener información nueva de los objetos celestes que se deseen estudiar. La forma más directa de combatir estas complicaciones consiste en utilizar instrumentos que obtengan imágenes de gran resolución, para así capturar la mayor cantidad de detalles posible. Esto desencadena por otro lado una serie de dificultades técnicas, pues imágenes como las que se desean obtener son muy caras (e incluso infactibles de obtener por restricciones de naturaleza física en el proceso de captación de datos).

## 1.2. El Problema de la Interferometría

### 1.2.1. Definiciones Básicas y Origen Histórico

La interferometría es el procedimiento por el cual se hacen interferir dos ondas o señales electromagnéticas y se registran medidas del patrón de interferencias que éstas generan. La técnica como tal nace a partir de los experimentos realizados por Thomas Young a principios del siglo XIX, y en este mismo siglo es Hippolyte Fizeau en 1868 quien sugiere por primera vez su uso para obtener información de los objetos celestes visibles por el ojo humano. De forma independiente, Albert Michelson en el año 1891 construye un interferómetro estelar que le permitió obtener información de objetos celestes que le resultaban interesantes, tales como los satélites de Júpiter y un año después la estrella  $\alpha$ -Orionis, popularmente conocida como Betelgeuse.

Desde este punto en adelante, esta área se mantuvo más bien inactiva en términos tecnológicos hasta que en la década de 1950, Hanbury Brown y Twiss desarrollaron la técnica que se utiliza hasta la actualidad, probando en longitudes de onda del espectro visible que era factible obtener imágenes de gran resolución utilizando dos receptores y posteriormente estudiando el desfase de las ondas captadas en cada uno de ellos. Esto permite, entre otras cosas, abaratar costos de producción de instrumentos para llevar a cabo estas mediciones (cada inteferómetro es menos complejo de fabricar y por ende más barato). A raíz de este gran avance, se llevan a cabo una serie de proyectos astronómicos que fundamentan su funcionamiento en la interferometría estelar, como son los ya mencionados en secciones anteriores de este trabajo (ALMA, SKA, VLA, etc).

### 1.2.2. Funcionamiento de un interferómetro básico

Una de las configuraciones más elementales que se pueden montar para construir un interferómetro (y en efecto, aquella que basa la construcción de los usados en astronomía) corresponde al conocido como *interferómetro de Michelson* (llamado así por su creador en el año 1891), que consiste básicamente en lo que se resume a continuación.

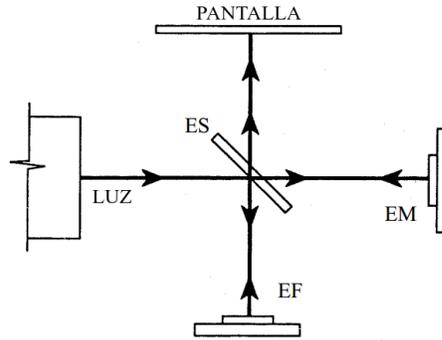


Figura 1.3: Diagrama típico de un interferómetro de Michelson.

Un haz de luz incidente es desdoblado mediante un espejo semitransparente (“ES” en la Figura 1.3, este espejo sólo refleja la mitad de la luz incidente sobre él, lo demás se transmite a través de él). Uno de los rayos generados por esta división se refleja en el espejo fijo (en la Figura 1.3 “EF”), y el otro en un espejo de naturaleza móvil (“EM” desde ahora, como se aprecia en la Figura 1.3). Ambos rayos vuelven a reunirse en la pantalla de la configuración.

La idea consiste en que, si se denomina  $d_m$  a la distancia entre ES y EM, los patrones de interferencia obtenidos en la pantalla permiten calcular la longitud de onda de la luz en cuestión. En términos más específicos, esta distancia y la longitud de onda de la onda estudiada siguen la relación

$$\lambda = \frac{2d_m}{m},$$

donde  $m$  es el número de ocasiones en las que se repite el patrón de interferencia en cuestión.

De cualquier manera, este aparato en su origen no fue concebido para su uso en la astronomía, sino que se buscaba caracterizar el supuesto medio por el cual se trasladaban las ondas de luz; el éter. En el afamado experimento realizado por el inventor de este aparato, Albert Abraham Michelson y su compañero Edward Morley, se terminó obteniendo una de las primeras evidencias de la no existencia del medio en cuestión<sup>1</sup>. Actualmente consiste en una poderosísima herramienta para la captura de imágenes astronómicas, pues permite obtener imágenes con altísima resolución y además da la cabida a investigación de las propiedades de las fuentes de luz presentes en el espacio en cuanto a composición química y otras características de interés científico.

### 1.2.3. Formulación matemática y nociones elementales

En general, una perturbación electromagnética en un punto  $\vec{r}$  y tiempo  $t$  puede ser descrita por un campo vectorial, dígase  $E(\vec{r}, t)$  satisfaciendo las leyes de Maxwell. Pese a que las variaciones de este campo pueden ser muy rápidas y aleatorias a través del tiempo, se asumirá para el modelo desde ahora que son *ergódicas*, en el sentido de que las mediciones promediadas a lo largo del tiempo de este campo están siempre bien definidas y son similares entre ellas.

<sup>1</sup>Para más información, visitar <http://www.michelsonexperiment.com/>.

En este contexto, se plantean las siguientes definiciones.

**Definición 1.1** (Señal) *Se denomina señal de una onda, a la respuesta de un instrumento a un campo de radiación. Esta señal, denotada desde ahora como  $v(\vec{r}, t)$  es proporcional a  $E(\vec{r}, t)$ .*

**Definición 1.2** (Intensidad) *Se define además, salvo por constantes de proporcionalidad, la intensidad de la radiación  $I(\vec{r})$  como*

$$I(\vec{r}) = \langle v(\vec{r}, t)v^*(\vec{r}, t) \rangle,$$

donde  $v^*$  denota al complejo conjugado de  $v$ , y los corchetes  $\langle \cdot \rangle$  denotan promedio temporal.

**Definición 1.3** (Función de Mutua Coherencia) *Se denomina función de mutua coherencia  $\Gamma$  a la expresión dada por*

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle v(\vec{r}_1, t)v^*(\vec{r}_2, t + \tau) \rangle,$$

que en términos estadísticos no es más que la función de correlación entre dos señales medidas en los puntos  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , con una diferencia de tiempo  $\tau$ .

Si se tiene  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ , entonces la expresión  $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}, \tau)$  se denomina función de autocorrelación. Por otro lado, en caso de utilizar  $\tau = 0$ , la expresión  $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$  es conocida como función de coherencia espacial.

**Definición 1.4** (Grado de Coherencia) *A partir de la **Definición 3.** es factible definir el grado de coherencia de una señal mediante*

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{[I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)]^{1/2}}.$$

Sumado a esto, se dirá que la radiación en cuestión es coherente si  $|\gamma| = 1$ , incoherente si  $|\gamma| = 0$  y parcialmente coherente si  $\gamma \in (0, 1)$ .

En términos físicos, la coherencia de un frente de radiación corresponde a la correlación que tengan dos mediciones de la onda electromagnética en cuestión, separadas por un intervalo de tiempo  $\tau$ . Esto es, la coherencia mide de alguna forma la capacidad de predecir qué forma y características tendrá la onda en  $\vec{r}_2$  a partir de su medición en  $\vec{r}_1$ .

Con todas las definiciones anteriores en mente, es posible obtener una primera herramienta de trabajo, mediante un resultado conocido como el teorema de Van Cittert-Zernike. Para llegar a eso, se considerarán válidas las siguientes hipótesis:

- Se asume en primer lugar que los cuerpos estudiados se encuentran a una distancia tal que pueden ser considerados para todo fin, como objetos “adheridos” a la esfera celeste. En otras palabras, no se podrán obtener resultados en cuanto a procesos internos de la estrella o cuerpo celeste en cuestión; sólo de brillo superficial por el momento.
- Se supondrá además que la emisión es *espacialmente incoherente* en su origen. Vale decir, la única coherencia con la que se puede contar es con la dada por la propagación de la onda una vez fuera de su fuente de origen.

Bajo estas hipótesis, se tiene el siguiente resultado, que como se verá más adelante en el presente trabajo, funda las bases de la radiointerferometría.

**Teorema 1.5** (Van Cittert-Zernike) *En el contexto ya detallado hasta aquí, se tiene la relación*

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \int I(\vec{s}) e^{-2\pi i \vec{s} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) / c} d\Omega,$$

donde  $\vec{s}$  es un vector unitario apuntando hacia la fuente,  $I(\vec{s})$  es la intensidad,  $c$  es la velocidad de la luz y  $d\Omega$  es un elemento de ángulo sólido.

DEMOSTRACIÓN: Ver [2], Capítulo 14.

## 1.2.4. La radiointerferometría en la práctica

### La respuesta de un interferómetro

Similar a la idea del interferómetro de Michelson, uno elemental para uso astronómico está compuesto por dos antenas idénticas entre ellas separadas por una cierta distancia, dígase  $\vec{b}$ . Ambas antenas se disponen apuntando a una fuente de radio lejana en una dirección indicada por el vector  $\vec{s}$ .

En general, el plano de ondas incidentes al interferómetro llega primero a una de las antenas para luego arribar a la segunda, con un *delay geométrico*, dado por

$$\tau_g = \frac{\vec{b} \cdot \vec{s}}{c},$$

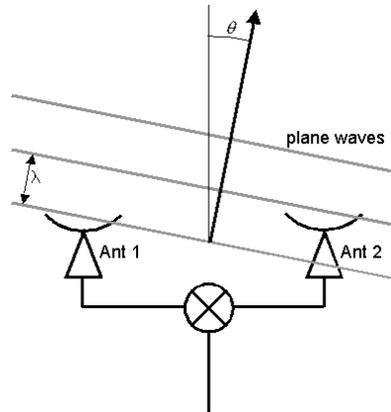


Figura 1.4: Bosquejo de una situación típica en un interferómetro.

Las señales de las antenas pasan a través de filtros que eligen las frecuencias de interés, con longitud de banda  $\Delta\nu$  para cada una de ellas. La respuesta eléctrica de las señales captadas en cada una de las antenas son multiplicadas todas juntas y promediadas en el tiempo, mediante un aparato denominado *correlacionador*. Vale decir, si se representan las señales voltaicas

$$V_1(t) = v_1 \cos(2\pi\nu(t - \tau_g)) , \quad V_2(t) = v_2 \cos(2\pi\nu t),$$

salvo por constantes de proporcionalidad, el *output* del correlacionador es del estilo

$$r(\tau_g) = v_1 v_2 \cos(2\pi\nu\tau_g).$$

Como resultado de este proceso, se obtiene el conocido patrón de interferencia.

**Definición 1.6** (Poder de la Señal) *Sea  $I(s)$  el brillo del cielo en la dirección  $\vec{s}$  en una frecuencia  $\nu$ . Si  $A(s)$  denota el área de recepción efectiva de la antena en dirección  $\vec{s}$ , el poder de la señal recibido por cada antena en un ancho de banda  $\Delta\nu$  en un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  está dado por*

$$dr = A(s)I(s)\Delta\nu \cos(2\pi\nu\tau_g) d\Omega,$$

e integrando sobre la esfera celeste, se obtiene

$$r = \Delta\nu \int A(s)I(s) \cos(2\pi\nu\vec{b} \cdot \vec{s}/c) d\Omega.$$

En la práctica, se acostumbra a representar las frecuencias medidas a partir de una referencia central, vale decir, se consideran expresiones del tipo  $\vec{s} = \vec{s}_0 + \sigma$ , de donde se obtiene a su vez la expresión más detallada

$$\begin{aligned} r &= \Delta\nu \cos\left(2\pi\nu\frac{\vec{b} \cdot \vec{s}_0}{c}\right) \int A(s)I(s) \cos\left(2\pi\nu\frac{\sigma \cdot \vec{b}}{c}\right) d\Omega \\ &\quad - \Delta\nu \sin\left(2\pi\nu\frac{\vec{b} \cdot \vec{s}_0}{c}\right) \int A(s)I(s) \sin\left(2\pi\nu\frac{\sigma \cdot \vec{b}}{c}\right) d\Omega. \end{aligned}$$

**Definición 1.7** (Visibilidad) *Se define la visibilidad compleja de una señal como*

$$V \doteq |V|e^{i\phi_V} = \int A'(\sigma)I(\sigma)e^{-2\pi i\nu\vec{b} \cdot \sigma/c} d\Omega, \quad (1.1)$$

donde  $A'(\sigma) = \frac{A(\sigma)}{A_0}$ .

Usando esta última definición, se puede reescribir una vez más la expresión para el *output* del correlacionador, para obtener la que se seguirá usando en adelante,

$$r = A_0\Delta\nu|V| \cos\left(\frac{2\pi\nu\vec{b} \cdot \vec{s}_0}{c} - \phi_V\right). \quad (1.2)$$

En palabras simples, un interferómetro es un aparato que permite medir la *visibilidad* de la fuente observada, que no es nada más que la función de coherencia espacial con una normalización diferente. Midiendo adecuadamente la amplitud y la fase del patrón interferométrico en la ecuación (1,2), la amplitud y la fase de la visibilidad de la fuente quedan determinadas después de algunos ajustes de calibración.

## Un sistema de coordenadas adecuado

Para usar cómodamente la ecuación (2) en la práctica, es necesario hacer uso de un sistema de coordenadas adecuado. Uno de ellos, usado muy frecuentemente (mas no en forma universal) es uno donde se denota a los vectores  $(u, v, w)$ ; donde  $w$  se elige apuntando hacia el vector de referencia  $\vec{s}_0$ ,  $u$  apunta hacia el “este” y  $v$  apunta hacia el “norte” en el espacio. Análogamente en el plano celeste se definen los ejes  $\theta_x, \theta_y$  como se indica en la siguiente figura, más el eje  $\theta_z$  de forma tal que el triedro sea tal como  $(u, v, w)$ .

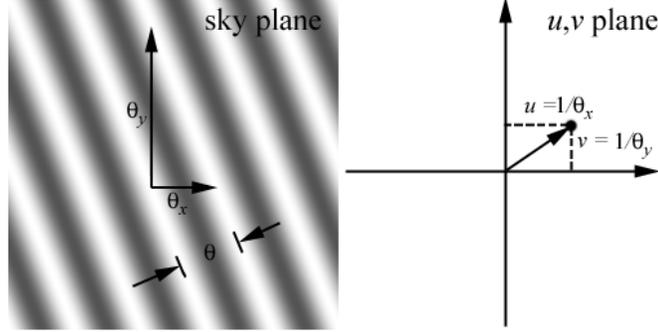


Figura 1.5: Coordenadas utilizadas frecuentemente.

Entre estos sistemas de coordenadas, y recordando la definición  $\vec{s} = \vec{s}_0 + \sigma$  se puede encontrar las siguiente relaciones fundamentales

$$\frac{\nu \vec{b} \cdot \vec{s}}{c} = u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z, \quad \frac{\nu \vec{b} \cdot \vec{s}_0}{c} = w, \quad d\Omega = \frac{d\theta_x d\theta_y}{\theta_z} = \frac{d\theta_x d\theta_y}{\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2}}.$$

De esta manera, la ecuación (1) puede ser reescrita como sigue

$$V(u, v, w) = \iint A'(\theta_x, \theta_y) I(\theta_x, \theta_y) e^{-2\pi i [u\theta_x + v\theta_y + w(\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2} - 1)]} \frac{d\theta_x d\theta_y}{\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2}} \quad (1.3)$$

Particularmente en el caso del uso astronómico de la interferometría, es factible reducir la expresión anterior, pues cuando  $|\theta_x|$  y  $|\theta_y|$  son razonablemente pequeños se obtiene

$$w(\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2} - 1) \approx 0,$$

de donde la ecuación (3) se reduce a una expresión completamente bidimensional dada por

$$V(u, v) = \iint A'(\theta_x, \theta_y) I(\theta_x, \theta_y) e^{-2\pi i (u\theta_x + v\theta_y)} d\theta_x d\theta_y. \quad (1.4)$$

Esta última ecuación tiene la gracia de que puede ser invertida para obtener la nueva relación

$$A'(\theta_x, \theta_y) I(\theta_x, \theta_y) = \iint V(u, v) e^{2\pi i (u\theta_x + v\theta_y)} du dv. \quad (1.5)$$

Resumiendo, un interferómetro puede ser considerado como un instrumento para medir la amplitud y la fase de la *función de visibilidad* del frente de ondas, que corresponde salvo una normalización (constante dependiente de los instrumentos utilizados) como ya se dijo, a la función de *coherencia espacial* del campo. Por otro lado, en virtud del *teorema de Van Cittert-Zernike*, la visibilidad está relacionada con el brillo celeste. Finalmente, cuando la medición se restringe a un plano, o bien cuando la región de la esfera celeste que se apunta es más bien pequeña, las funciones  $V(u, v)$  e  $I(\theta_x, \theta_y)$  se reducen a una dupla de transformada/antittransformada de Fourier, tal como indican las últimas ecuaciones, (1,4) y (1,5).

## 1.2.5. Última etapa: formación y reconstrucción de la imagen

### Formación de la imagen

Tal como se ha comentado anteriormente, a través de una antena se puede observar la visibilidad de la emisión de una fuente en un cierto rango de frecuencias, denotado por  $\Delta\nu$ . Es por esto que para realizar mediciones más completas de la emisión de una fuente, en astronomía se usan arreglos de antenas (como ALMA por ejemplo) centradas en diferentes valores de  $\vec{s}_0$ , de manera tal que se obtiene información de la fuente de emisión a diferentes valores de frecuencia.

Lamentablemente, como siempre se está restringido a finitas cantidades de antenas, siempre se debe lidiar con agujeros o *gaps* en la medición de las funciones de visibilidad. Más aún, las visibilidades captadas siempre poseen algún nivel de ruido por diversos motivos físicos. Es por ello que un gran problema corresponde a cómo tratar estas complicaciones para procesar adecuadamente la información captada en un interferómetro.

En adelante, se llamará  $V'(u, v)$  a la visibilidad ruidosa captada por un instrumento, o como se dirá en adelante, “sucia”. Se denota además el conjunto de valores de frecuencia para los cuales se cuenta con mediciones de visibilidad por una función o distribución de *sampling* o muestreo, dígame  $S(u, v)$ . Luego, la ecuación (5) será escrita en este contexto como sigue

$$I^D(\theta_x, \theta_y) = \iint S(u, v) V'(u, v) e^{2\pi i(u\theta_x + v\theta_y)} \, dudv, \quad (1.6)$$

donde  $I^D$  se refiere a la imagen sucia (denotada según su vocablo en inglés, *dirty*). Nótese que por comodidad, el término  $A'(\theta_x, \theta_y)$  fue incluido en  $I^D$ . Se le puede dar una forma más explícita a la función de muestreo

$$S(u, v) = \sum_{k=1}^m \delta(u - u_k, v - v_k),$$

donde  $\delta$  es la función tal que

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u, v) = (0, 0) \\ 0 & \text{si } (u, v) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Entonces, la versión muestreada de la función de visibilidad queda descrita como

$$V^S(u, v) = \sum_{k=1}^m \delta(u - u_k, v - v_k) V'(u, v).$$

Denotando por  $F$  a la anti-transformada de Fourier, la ecuación (1,6) puede ser escrita nuevamente como

$$I^D = F(V^S) = F(SV') = F(S) * F(V') = F(S) * I',$$

donde  $*$  denota una convolución. Esto indica entonces que la imagen sucia, corresponde a la convolución entre la antitransformada de Fourier del operador de muestreo y la distribución de brillo real de la fuente. En general,  $F(S)$  es conocida como la *point spread function*.

Análogo al desarrollo anterior, también se pueden realizar diferentes *balances* a la función de visibilidad muestreada; haciendo uso de funciones del estilo

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^m T_k D_k \delta(u - u_k, v - v_k),$$

donde  $T_k$  es típicamente una función de naturaleza gaussiana que permite suavizar la forma de la función y  $D_k$  es una densidad de balanceo que permite darle diferentes importancias a los puntos en cuestión a la hora de procesar la imagen. De esta manera, la función de visibilidad balanceada toma la forma

$$V^W(u, v) = \sum_{k=1}^m T_k D_k \delta(u - u_k, v - v_k) V'(u, v).$$

Luego de todo esto, resulta interesante ahora saber cómo se obtiene la imagen sucia  $I^D(u, v)$ . Para ello, se lleva a cabo una representación discreta de la función; lo que a su vez implica la evaluación de  $I^D$  en una malla uniforme de píxeles. La idea es que este proceso, llamado *gridding* (en español, mallado) de la información; permite luego hacer uso del algoritmo FFT (sigla en inglés de *Fast Fourier Transform*) para realizar el cálculo con mucho menos costo computacional.

El proceso de hacer un nuevo mallado de la información captada por el interferómetro involucra convolucionar esta información muestreada y balanceada con una función  $C$  adecuada, para luego ser re-muestreada en una malla uniforme. Para fijar ideas, se puede considerar la siguiente expresión para el operador de re-muestreo:

$$R(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(j - u/\Delta u, k - v/\Delta v),$$

donde  $\Delta u$  y  $\Delta v$  definen la separación entre los puntos de la grilla. Esta función  $R$  es conocida como la función *sha de Bracewell*. La convolución de la visibilidad muestreada y balanceada con  $C$  se denota  $C * V^W$ , y luego su re-muestreo toma la forma:

$$V^R = R(C * V^W) = R(C * (WV')).$$

Tal como ya se dijera, dado que el re-muestreo se realiza en forma regular, es factible calcular  $F(V^R)$  rápidamente usando el algoritmo FFT. A partir de esta labor, se puede recuperar una estimación de  $I^D$ , dada por

$$\tilde{I}^D = F(R) * [F(C)F(V^W)] = F(R) * [F(C)\{F(W) * F(V')\}].$$

## Reconstrucción de la imagen

En este punto, ya resulta factible formular el problema general de la reconstrucción de imágenes, usando la *ecuación de medición*

$$(\mathcal{P}) \quad I^D = B * I + \eta,$$

donde se reconoce la imagen *sucia*  $I^D$ , la *point spread function*  $B$ , la imagen real  $I$  y un ruido aditivo denotado por  $\eta$ .

El problema de reconstrucción consiste entonces, en recuperar la imagen real  $I$  usando diversas técnicas de tipo deconvolutivas. Este problema es difícil en términos generales, básicamente por dos inconvenientes:

- La presencia de ruido complica mucho el proceso, pues la propagación de este error a lo largo del proceso altera mucho la información captada.
- Dada la naturaleza de las mediciones realizadas, existen muchos *gaps* en la captación de información y por ende, la forma en la que se debe definir la de-convolución en las zonas donde no existen mediciones no es clara. En efecto, el *problema de la ecuación de medición* a priori está mal formulado pues posee infinitas soluciones, y por ende se deben usar técnicas y herramientas de orden superior para resolverlo.

Para notar esto último, basta con algo tan simple como considerar una imagen  $z$  de manera tal que posee cualquier información en las zonas donde no se llevan a cabo mediciones. Por ende,  $B * z = 0$  y luego, si  $I$  es una solución del problema  $(\mathcal{P})$ , también lo es  $I + \alpha z$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

De esta manera, para resolver adecuadamente este problema, se debe realizar alguna especie de *estimación* de la función de visibilidad en aquellas zonas donde no fue medida. Vale decir, de estas soluciones  $I + \alpha z$ , se busca encontrar “la mejor” bajo algunos parámetros adecuados.

### 1.2.6. Modelo y Notación Matemática

En lo que sigue la imagen será modelada como una grilla bidimensional  $\hat{I}_{p,q}$  de funciones  $\delta$  que representarán la intensidad de cada pixel. De esta manera, la visibilidad predicha por el modelo corresponde a

$$\hat{V}(u, v) = \sum_p^{N_l} \sum_q^{N_m} \hat{I}(p\Delta l, q\Delta m) e^{-2\pi i(pu\Delta l + qv\Delta m)}.$$

Este modelo claramente posee  $N_l N_m$  grados de libertad, el valor de la intensidad de cada pixel. Las mediciones se pueden considerar como

$$V(u, v) = \hat{V}(u, v) + \varepsilon(u, v),$$

donde  $\varepsilon$  es una función de error gaussiana. Más aún, considerando que no es factible contar con todo el cielo muestreado, estas visibilidades se pueden modelar de la forma

$$V(u, v) = W(u, v)(\hat{V}(u, v) + \varepsilon(u, v)),$$

donde  $W$  es una función no nula sólo en los puntos en los que se cuenta con información. Luego, usando relaciones de tipo convolución, se puede modelar todo como

$$I_{p,q}^D = \sum_{p',q'} B_{p-p',q-q'} \hat{I}_{p',q'} + E_{p,q} \quad (1.7)$$

$$I_{p,q}^D = \sum_r W(u_r, v_r) \operatorname{Re} (V(u_r, v_r) e^{2\pi i(pu_r \Delta l + qv_r \Delta m)}) \quad (1.8)$$

$$B_{p,q} = \sum_r W(u_r, v_r) \operatorname{Re} (e^{2\pi i(pu_r \Delta l + qv_r \Delta m)}) \quad (1.9)$$

En términos de vocabulario,  $B_{p,q}$  es conocida como la *point spread function* discreta (en adelante PSF o *dirty beam*) mientras  $I_{p,q}^D$  se denomina la imagen sucia (*dirty image*) discreta.

# Capítulo 2

## Algoritmos Clásicos en Interferometría

Como ya se ha comentado en el capítulo anterior del presente trabajo, el problema de la interferometría consiste en palabras simples en reconstruir una imagen, a partir de muestras obtenidas de su transformada de Fourier. Por ende, se hace necesario desarrollar técnicas computacionales que permitan llevar a cabo esta labor, considerando por supuesto las restricciones necesarias para obtener resultados con sentido propio, que se puedan estudiar a cabalidad posteriormente.

En esta sección se presentan las técnicas usadas en la actualidad para abordar el problema de la interferometría en orden histórico. Se comienza presentando lo que se considera la primera respuesta en este ámbito, el algoritmo CLEAN (Hogbom, 1974) para luego presentar las opciones que han surgido en años posteriores (el algoritmo MEM y otras técnicas de naturaleza variacional).

Se realiza también una comparación entre los métodos, y se fundamenta en líneas generales por qué estos algoritmos siguen siendo usados y bajo qué condiciones existen ventajas comparativas entre ellos.

### 2.1. Primeras Respuestas: Algoritmos CLEAN y MEM

#### 2.1.1. Algoritmo CLEAN

El algoritmo CLEAN, introducido por Hogbom el año 1974 asume como hipótesis de trabajo que la fracción de cielo capturada en la imagen, puede representarse por un número (ojalá pequeño) de fuentes puntuales en un espacio que de lo contrario estaría vacío. A partir de la estructura elemental de este primer algoritmo se han desarrollado variantes de éste, las cuales se detallan brevemente a continuación:

## Algoritmo de Hogbom (1974)

Este algoritmo procede como sigue:

- (1) Se ubica el máximo de intensidad en  $I_{p,q}^D$ .
- (2) se resta de  $I_{p,q}^D$ , en la posición detectada anteriormente, el rayo  $B$  multiplicado por una fracción  $\gamma \leq 1$  (llamada *loop gain*) del máximo encontrado.
- (3) Volver a (1) hasta que todos los peaks de intensidad estén por debajo de un límite determinado.
- (4) Convolucionar el modelo acumulado  $\hat{I}_{p,q}$  con un “rayo CLEAN” idealizado (típicamente de naturaleza gaussiana).
- (5) (Opcional) Sumar los residuos de  $I_{p,q}^D$  a la imagen obtenida en el punto anterior.

## Algoritmo de Clark (1980)

Este algoritmo se caracteriza por presentar dos “ciclos”, uno menor y otro mayor; desarrollados de la siguiente forma:

- (1) Un segmento de la representación discreta del rayo es elegida para incluir el mayor *sidelobe* exterior.
- (2) Se eligen puntos de  $I_{p,q}^D$  en caso de que, como fracción del peak de la imagen, posean mayor intensidad que el *sidelobe* elegido.
- (3) Se realiza un CLEAN tipo Högbom, de manera tal que se detenga al no poder elegir más puntos en (2).
- (4) Se transforma el modelo anterior vía FFT, se multiplica por la transformada inversa del rayo  $B$ , se anti-transforma de vuelta y se resta de la imagen  $I_{p,q}^D$  original.

Los puntos (1) – (3) de este algoritmo son conocidos como el ciclo menor de éste, mientras el punto (4) se denomina ciclo mayor.

## Algoritmo de Cotton-Schwab (1984)

Este algoritmo es una variante del de Clark, que consiste básicamente en que en el ciclo mayor, los componentes de CLEAN calculados en el punto (3) se restan de la imagen antes de transformarla y anti-transformarla. De esta manera se trabajan de mejor forma los errores asociados al ruido y al *gridding* de los datos originales.

## Detalles Prácticos y Problemas usando CLEAN

Pese a que el algoritmo original data de hace casi 35 años, el conocimiento teórico de CLEAN es bastante pobre. Schwarz analizó este algoritmo a finales de la década de los 70's en algún detalle; sus resultados más importantes corresponden al estudio de las hipótesis mínimas

para asegurar la convergencia del algoritmo (esencialmente referidas a la naturaleza del “rayo CLEAN” que se utiliza). Lamentablemente sus estudios son poco aplicables, dado que la asimetría de los muestreos a la hora de transformar y anti-transformar la imagen modifican de forma muy caótica estos supuestos.

Marsh y Richardson el año 1987 demostraron (ver [13]) que para el caso límite de una imagen compuesta sólo por fuentes puntuales, el algoritmo CLEAN minimiza aproximadamente la suma del valor de los pixeles de la imagen, con la restricción de que estos valores sean positivos. En otras palabras, entrega en términos aproximados la solución asociada a aquella de menor flujo, consistente con los datos obtenidos en las mediciones.

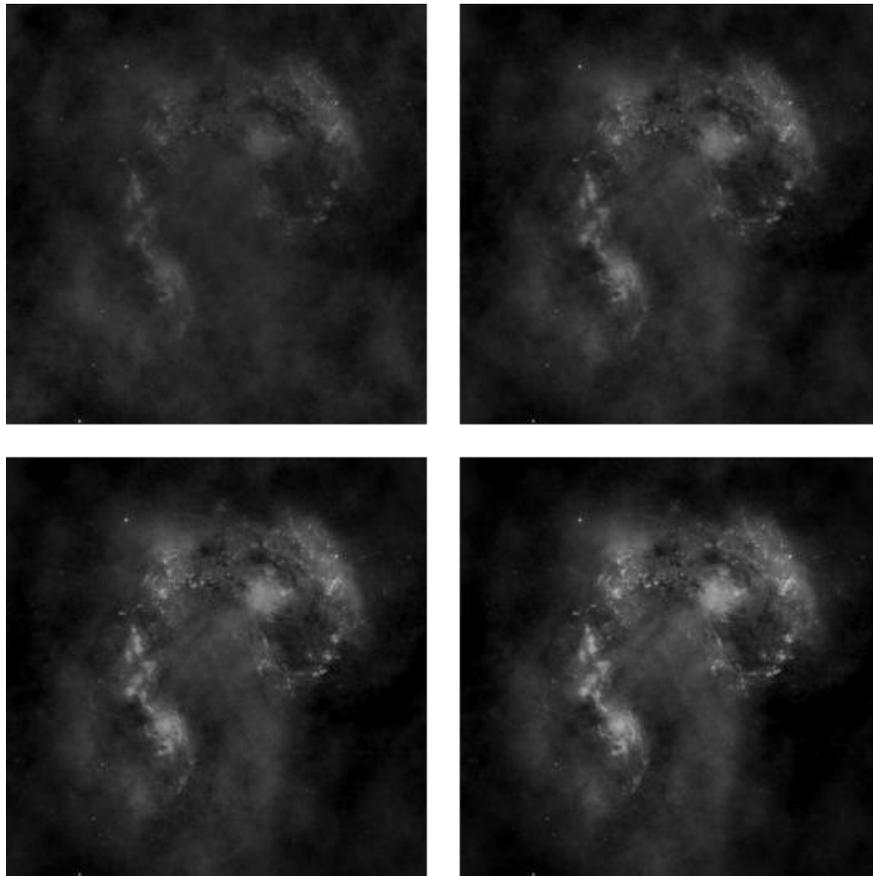


Figura 2.1: Distintas etapas de Algoritmo CLEAN (5-10-20-40 iteraciones).

En la figura anterior se observa la evolución de una reconstrucción de imágenes usando CLEAN, al cabo de 5, 10, 20 y 40 iteraciones respectivamente. Se puede notar por ejemplo, que el algoritmo comienza agregando en primera instancia los máximos puntuales que va encontrando, para luego agregar a la imagen las zonas más brillantes, para concluir agregando detalles más leves).

El que quizás corresponde al problema más grande del uso de CLEAN, tiene relación con la forma en la que la imagen obtenida finalmente depende fuertemente de muchos parámetros controlados por el usuario del algoritmo; el eventual uso de ventanas (subconjuntos de la imagen elegidos en el algoritmo de Clark), la elección del *loop gain* y el número de iteraciones

del algoritmo como tal.

### 2.1.2. Algoritmo MEM

El algoritmo CLEAN, al ser una herramienta de naturaleza procedural (este algoritmo va avanzando hasta *elegir* una imagen factible a partir del set de datos), otras implementaciones buscan simplemente encontrar una solución que satisfaga ciertas condiciones bajo un grupo de restricciones determinadas. Este es el caso por ejemplo, del algoritmo MEM (*Maximum Entropy Method*) que en términos simples, maximiza el funcional

$$-\sum_k I_k \ln \left( \frac{I_k}{M_k e} \right),$$

donde  $I_k$  es la intensidad del  $k$ -ésimo pixel y  $M_k$  los valores de intensidad de una imagen *default* incorporada al modelo, que permite agregar conocimiento *a priori* de la situación. Un ejemplo de imagen *default* puede ser por ejemplo una imagen de baja resolución del objeto a estudiar. Lo anterior se optimiza sujeto a que la norma  $\|V(u, v) - \hat{V}(u, v)\|_2$  se encuentre por debajo de un nivel previamente determinado. Se debe observar que esta “entropía” utilizada en la imagen no posee una relación directa con la entropía definida en las ciencias físicas. En términos prácticos, la minimización del funcional anterior entrega como resultados, imágenes con intensidades positivas y con un rango más bien comprimido en cuanto a sus valores. Además, una imagen obtenida vía MEM es suave en términos de diferenciabilidad.

#### Detalles Técnicos y Problemas usando MEM

Basta notar la expresión a minimizar en el algoritmo MEM para notar que de no haber restricciones en cuando a la similaridad con los datos, el resultado del proceso sería la misma imagen *default*. Esto se traduce en que el algoritmo posee un *bias* en su funcionamiento a entregar como resultado una imagen similar a la usada para los valores de  $M_k$ .

Esto mismo hace que de usar una mala imagen *default*, el flujo total de la imagen resultado se puede ver seriamente afectado. Para evitar esto se debe elegir una buena imagen para la comparación. En caso de no contar con una imagen de baja resolución del objeto a estudiar, se pueden utilizar imágenes planas (por lo mismo usualmente denominadas *flat*) cuyo flujo total sea como el buscado.

Otro fenómeno que aparece en general con este algoritmo (y en general con todos los métodos que no ajustan su data de forma exacta a las observaciones medidas) es que el promedio del ruido obtenido en la imagen final suele no ser nulo.

Una manifestación de problemas como los indicados en el punto anterior se puede apreciar en las siguientes imágenes, que consisten en una reconstrucción de la siguiente imagen.

Esta reconstrucción se ha realizado intencionadamente con una mala imagen inicial ( $M_k = 1$  para todo valor de  $k$ ).



Figura 2.2: Objetos Herbig-Haro HH 46/47..

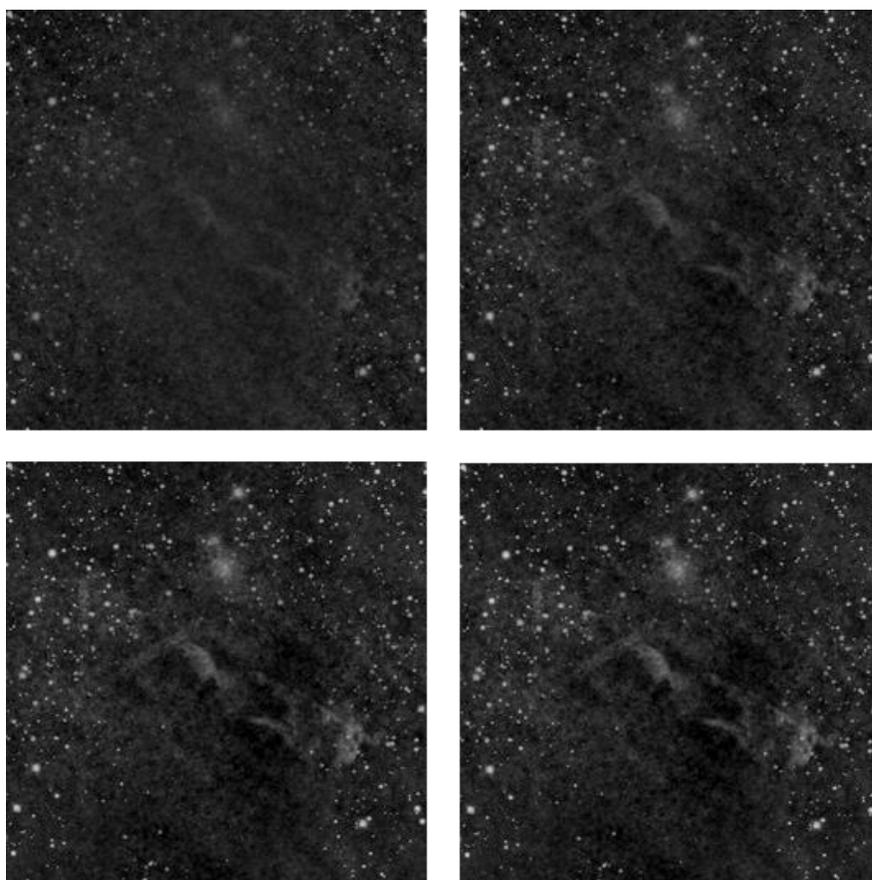


Figura 2.3: Distintas etapas de Algoritmo MEM (5-10-20-40 iteraciones).

### 2.1.3. Comparación entre CLEAN y MEM

El algoritmo CLEAN ha dominado las tareas de deconvolución en radio astronomía desde su invención prácticamente, pero no ha sido utilizado mayormente en otras disciplinas. Uno

de los motivos más importantes de esto es el supuesto que se maneja al utilizar esta herramienta, que consiste en asumir que la imagen se puede tratar como una colección de fuentes puntuales; lo que claramente no es permisible en aplicaciones distintas. Por otra parte, MEM sí posee aplicaciones más directas en otras áreas de la ciencia, debido precisamente a que su funcionamiento no depende en gran medida del tipo de datos que se esté trabajando. Es por ello que MEM se destaca por su ‘objetividad’.

De todas formas, se pueden estudiar diferencias más concretas a la hora de comparar estos algoritmos.

En la mayoría de los casos, CLEAN es más rápido que MEM para imágenes suficientemente pequeñas, dado que su forma de optimizar en ‘ventanas’ más pequeñas se hace más efectiva en este contexto. Para imágenes radioastronómicas típicas, la cota de tamaño para que CLEAN sea más rápido ronda el millón de píxeles. Para imágenes más grandes y complejas (del orden de los cien millones de píxeles), como por ejemplo imágenes de remanentes de supernova y otras donde aparezcan objetos de naturaleza más extendida que simples fuentes puntuales, CLEAN se vuelve notoriamente más lento y la optimización vía MEM se hace absolutamente necesaria.

En general, también se aprecia que las imágenes obtenidas por CLEAN son en general menos suaves que las obtenidas por MEM. Esta observación es bastante clara, puesto que la iteración del algoritmo CLEAN depende en gran medida de lo que ocurre pixel a pixel en la imagen, mientras que MEM al minimizar una función objetivo de naturaleza continua y diferenciable, lleva a la obtención de imágenes más suaves.

Tanto CLEAN como MEM fallan al trabajar en ciertos tipos de imágenes por supuesto. CLEAN, como ya se ha comentado anteriormente, falla a la hora de reconstruir zonas de emisión extendida, volviéndolas irregulares. MEM por su parte falla a la hora de reconstruir emisiones puntuales inmersas en una zona de emisión extendida, pues el término de la entropía tiende a reducir los peaks de la fuente puntual y llevarlos a la media de la zona extendida de emisión. Por otra parte, ambos algoritmos entregan buenos resultados a la hora de reconstruir fuentes puntuales aisladas con estructuras simples y por ende pueden entregar mejoras notorias en cuanto a resolución de las imágenes obtenidas originalmente; la literatura indica de cualquier forma que MEM posee una leve mejor performance en general.

Como el algoritmo MEM trata de trabajar de forma separada el ruido de la señal a través de la minimización de las diferencias entre la imagen y el modelo, es necesario conocer de forma razonable el nivel de ruido que posee la imagen. Además, como ya se comentó en la sección anterior, es necesario tener conocimiento del flujo total de la imagen para obtener resultados óptimos. Aparte de esto, este algoritmo no posee tantas variables que controlar, más allá del uso de imágenes *a priori* que permiten mejorar aún más los resultados obtenidos. Por otra parte, CLEAN no hace este tratamiento separado entre la señal y el ruido, por lo que no es necesario tener conocimiento de esta información al usarlo. Los parámetros a controlar en este caso serían el *loop gain*  $\gamma$  y el número de iteraciones del algoritmo, lo que claramente modifica de forma importante los resultados que se obtengan en la imagen final.

## 2.2. El Enfoque Variacional

En el presente trabajo, se buscará implementar otras herramientas de reconstrucción de imágenes, todas orientadas más hacia la optimización de funcionales particulares que hacia algoritmos de naturaleza procedural como lo es CLEAN. Entre ellas se encuentran elementos tales como la variación total y penalizaciones de otra índole.

### 2.2.1. Técnicas Variacionales Clásicas

La reconstrucción de una imagen a partir de información parcial que se ha obtenido de ella constituye un problema inverso. En general, no es posible resolver directa y exactamente el problema original que esto plantea. Es por ello que lo usual es utilizar algoritmos de naturaleza iterativa que permitan *aproximar* de buena forma las soluciones, lo que a su vez hace aparecer una serie de nuevas dificultades (aparición de artefactos como ejemplo clásico). En términos generales, lo que se hace es llevar a cabo una determinada cantidad de iteraciones de estos algoritmos, que permitan aproximar la solución buscada, a costo de aumentar o reducir el costo de cálculo de estas soluciones.

Típicamente, se consideran cinco componentes para construir una herramienta de esta naturaleza:

1. Un *modelo del objeto* que exprese a la función incógnita del problema, dígase  $f(\vec{r})$  que será reconstruida en términos de series finitas adecuadas, ajustadas con coeficientes por determinar a partir de la información parcial capturada de la imagen.
2. Un *modelo del sistema* que relacione al modelo anterior con las mediciones *ideales* de la data obtenida, que deben ser trabajadas con la menor cantidad de ruido posible (idealmente nulo). En general, se trata de un modelo del tipo

$$Ax + \varepsilon,$$

donde  $\varepsilon$  representa al ruido y  $A$  a los procesos propios de la imagen que alteran a la señal original  $x$  que se desea reconstruir.

3. Un *modelo estadístico* que indique cómo se comporta el ruido de las mediciones respecto de su valor medio ideal. En general estos modelos son de naturaleza *gaussiana* o de *Poisson*, siendo este último el modelo más cercano a la realidad generalmente.
4. Una *función objetivo* que será minimizada en el proceso propiamente tal, para estimar los valores de los coeficientes mencionados en el primer punto. En general esta función agrega alguna forma de *regularización* para asegurar la convergencia de estos métodos.
5. Un algoritmo, generalmente iterativo que permite minimizar la función objetivo, incluyendo también idealmente conocimiento *a priori* de la imagen y ciertas condiciones de detención del algoritmo para que entregue los resultados deseados.

Las ventajas de este tipo de técnicas incluyen entre ellas *insensibilidad* al ruido y la capacidad de reconstruir imágenes óptimas pese a la falta de información completa. Métodos como los mencionados hasta aquí se utilizan en la actualidad en aplicaciones a la tomografía, a las

resonancias magnéticas y en general a la imagenología médica, y en lo que a este trabajo se refiere, en la radioastronomía.

En términos bastante amplios, el problema que se busca abordar en la radioastronomía puede ser modelado mediante estas técnicas, por ejemplo, mediante la minimización del funcional

$$F_T(I) = \chi_{v_0}^2(I) + \alpha F_{Reg}(I),$$

donde  $I$  es la imagen que se busca reconstruir, el términos de *similaridad*  $\chi_{v_0}^2$  se encuentra dado por

$$\chi_{v_0}^2(I) = \sum_{\omega_k \in Obs} |v_0(\omega_k) - \mathcal{F}[I](\omega_k)|^2$$

y el término de regularización  $F_{Reg}(I)$  sólo depende de la imagen que se esté trabajando. En el caso de MEM por ejemplo, se pueden llevar a cabo implementaciones donde

$$F_{Reg}(I) = \sum_k I_k \ln \left( \frac{I_k}{M_k e} \right).$$

La ventaja de usar técnicas como esta, es que permiten modificar a voluntad los términos de similaridad y regularidad, obteniéndose de esta forma diferentes resultados de acuerdo a los cambios realizados.

Volviendo al término de similaridad enunciado originalmente, notar que  $\mathcal{F}$  denota como se ha puntualizado anteriormente a la transformada de Fourier de la imagen que se desea reconstruir. Dependiendo de la diferenciabilidad de las funciones utilizadas como similaridad y regularización, se pueden aplicar técnicas de tipo dirección de máximo descenso (gradiente y sus variantes) para minimizar este funcional y así obtener resultados interesantes.

La gran complicación de hacer esto con el funcional recién planteado (y en general con todos los usados en este formato) es que al momento de calcular las direcciones de máximo descenso se necesita derivar el funcional  $\chi_{v_0}^2$ , que al poseer en su interior una transformada de Fourier de la imagen, hace que los cálculos del gradiente sean computacionalmente muy costosos, debido a la regla de la cadena que aparece al derivar la transformada. Esta complicación es precisamente la que motiva la presentación de la alternativa del presente trabajo, detallada como tal en el siguiente capítulo.

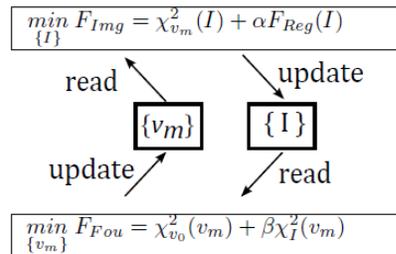
# Capítulo 3

## Propuesta del Método *Split*

El eje principal del presente trabajo es mostrar al lector una nueva alternativa para abordar el problema de la interferometría. Esta alternativa es lo que se denominará en adelante como algoritmo *Split*. A continuación se presentan en detalle sus principales características, así como también la matemática que justifica sus cálculos. Se observarán también las ventajas que posee por sobre las alternativas clásicas y las debilidades que podría presentar en algunas situaciones.

### 3.1. El Algoritmo *Split*

Como la solución  $I^*$  del problema presentado en el Capítulo 2 es costosa de obtener en términos computacionales, la alternativa de trabajo que se propone para trabajar de este punto en adelante, corresponde a dividir el problema original en dos sub-problemas de la siguiente forma



En esta propuesta,  $\chi_{v_0}^2(v_m)$  es la similaridad entre las visibilidades y la transformada de Fourier de la imagen, y  $\chi_{v_m}^2(I)$ ,  $\chi_I^2(v_m)$  son las similaridades entre la imagen y su transformada/antitransformada según corresponda.

Denotando  $\Omega$  al dominio de la imagen, se puede escribir

$$\chi_{v_m}^2(I) = \int_{\Omega} |I(x) - \mathcal{F}^{-1}[v_m](x)|^2 dx_1 dx_2$$

$$\chi_{v_0}^2(v_m) = \sum_{w_k \in Obs} |v_0(w_k) - v_m(w_k)|^2$$

$$\chi_I^2(v_m) = \int_{\Omega} |v_m(w) - \mathcal{F}[I](w)|^2 dudv.$$

El término restante, correspondiente al término  $F_{Reg}(I)$  que aparece en la optimización en el espacio de imagen de la reconstrucción es el denominado término regularizante del proceso. Su presencia permite en primer lugar asegurar que el problema posea (al menos localmente) soluciones, y además permite controlar según intereses adecuados, distintas propiedades que tendrá la imagen resultado de este proceso. Por ejemplo, un término como el siguiente (que será el mayormente analizado en los siguientes párrafos)

$$F_{Reg}(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(\vec{x})\|^2 dx_1 dx_2$$

permite entre otras cosas controlar la suavidad de la imagen obtenida, así como también la norma de su vector gradiente. El parámetro  $\alpha > 0$  que lo acompaña debe ser positivo y su valor dependerá de la importancia que se le desea dar a estas propiedades de la solución.

Enfrentar el problema de esta nueva forma abre una serie de opciones para estudiar. En primera instancia, la idea de realizar esta separación es que en el espacio de la imagen, la minimización de  $F_{Img}$  se lleva a cabo usando como variable natural a la intensidad de cada pixel en  $I$ , evitando de esta forma la regla de la cadena que debía aplicarse en la forma original de abordar el problema. Por otra parte, en el espacio de Fourier, la minimización de  $F_{Fou}$  se realiza en forma análoga, usando como variables naturales a los valores complejos de la transformada de Fourier de la imagen. Por ende, aquí tampoco se lleva a cabo una regla de la cadena muy costosa para derivar los funcionales, simplemente se obtienen sus gradientes y dependiendo de la función de regularización que se ocupe en cada espacio, se calculan las direcciones óptimas de descenso y se llevan a cabo las iteraciones.

Un costo que se paga al realizar esta labor es que, tal como se comentara anteriormente, cada problema requiere de una *aproximación* de los datos a la imagen que se desea reconstruir. Es por eso que ahora se debe llevar a cabo una interpolación adicional en el espacio de Fourier (vale decir, una interpolación a valores complejos) que resulta un tanto costosa en términos computacionales. Cabe también preguntarse qué efectos produce en los resultados finales de este algoritmo el uso de diferentes diccionarios y diferentes funciones de interpolación para llevar a cabo esta aproximación.

Otra arista que aparece al utilizar esta forma de optimización es que permite realizar los primeros aportes en lo que significa en términos de resultado de imagen, agregar términos de regularización en el espacio de Fourier, pues en la actualidad el término de regularización aparece sólo en el espacio de la imagen. Luego, esto constituye un primer gran aporte al área que se está estudiando, pues puede desembocar en resultados nuevos para la ciencia en cuestión.

Finalmente, un tercer ítem que puede resultar interesante de estudiar a futuro es la implementación de la conocida como *transformada de Fourier truncada* en este modelo, pues esto

permitiría reducir de forma significativa la aparición de artefactos en la imagen final. Como la gran mayoría de la intensidad de brillo de los objetos astronómicos estudiados por esta vía se pueden pensar como funciones de soporte compacto, el uso de esta técnica podría permitir entre otras cosas deshacerse de la periodicidad que le da la FFT a las imágenes donde es usada.

### 3.2. Técnicas de Optimización utilizadas e Implementación Numérica

Una vez aplicada la estrategia descrita en la sección anterior, los dos sub-problemas derivados de esta técnica se pueden resolver utilizando métodos de tipo gradiente. Es por ello que cobra un rol fundamental la factibilidad de discretizar apropiadamente el problema, y a la vez computar de forma eficaz y efectiva los gradientes de los funcionales en cuestión. Si se desea utilizar funcionales de regularización que a priori no sean diferenciables, se debe considerar ese hecho también para modificar la técnica de optimización utilizada. Una de las grandes garantías de este método es que permite estudiar el comportamiento general de distintas técnicas e implementaciones de éstas.

Se plantea en lo que sigue un modelo de la imagen, dado por una función B-Spline de orden  $n$  con un mallado

$$\Theta_d = \{x_j : j = 1, \dots, J\},$$

con  $J \in \mathbb{N}$ , y vectores de coeficientes  $y \in \mathbb{C}^J$ . Vale decir, en adelante se considera

$$I_y(x) = \sum_{j=1}^J y[j] b^m(sx - sx_j), \quad x = (x_1, x_2) \in \Theta,$$

donde  $\frac{1}{s}$  es el espaciado de la malla utilizada,

$$b^m(x) = \beta^m(x_1) \beta^m(x_2)$$

es el producto tensorial 2-dimensional de B-Splines, y  $\beta^m$  denota a la función B-Spline base de orden  $m$ . Análogamente, se modelan las visibilidades (esto es, la información captada en el espacio de frecuencia de la imagen) a través de una B-Spline de orden  $n$ , con un mallado

$$\Omega_d = \{\omega_j : j = 1, \dots, J\}$$

y vectores de coeficientes  $c \in \mathbb{C}^J$ , dígase

$$v_c(\omega) = \sum_{j=1}^J c[j] b^n(h\omega - h\omega_j), \quad \omega = (u, v) \in \Omega,$$

donde tal como antes,  $\frac{1}{h}$  representa el espaciado de la malla.

Considerando todo lo anterior, el modelo aproxima la transformada de Fourier de la imagen  $I_y$  de la siguiente forma; mediante muestreo, transformación e interpolación

$$\mathcal{F}[I_y] = v_c, \quad \text{donde } c = \mathcal{F}_d(I_y(x_1), \dots, I_y(x_J)),$$

donde se ha denotado  $\mathcal{F}_d$  a la transformada de Fourier discreta. De forma similar, dado  $v_c$  en el modelo de las visibilidades,

$$\mathcal{F}^{-1}[v_c] = I_y, \quad \text{donde } y = \mathcal{F}_d^{-1}(v_c(\omega_1), \dots, v_c(\omega_J)),$$

donde  $\mathcal{F}_d^{-1}$  es la anti-transformada discreta asociada a  $\mathcal{F}_d$ .

Basándose en las definiciones iniciales entonces, es posible reformular el problema presentado originalmente como un problema de minimización sobre el conjunto de coeficientes  $c \in \mathbb{R}^J$  e  $y \in \mathbb{R}^J$  respectivamente. Para esto, se comienza por considerar discretizaciones del modelo anteriormente expuesto, en particular de los funcionales que aparecen para optimizar.

$$\begin{aligned} \chi_v^2(y) &= \chi_v^2(I_y) = \int_{\Omega} |I_y(x) - \mathcal{F}^{-1}[v](x)|^2 dx_1 dx_2 \\ \chi_{v_0}^2(c) &= \chi_{v_0}^2(v_c) = \sum_{\omega_k \in Obs} |v_c(\omega_k) - v_0(\omega_k)|^2 \\ \chi_I^2(c) &= \chi_I^2(v_c) = \int_{\Omega} |v_c(\omega) - \mathcal{F}[I](\omega)|^2 dudv \\ F_{Reg}(y) &= F_{Reg}(I_y) = \int_D \|\nabla I_y(x)\|^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden ser escritas en la siguiente forma matricial

$$\begin{aligned} \chi_v^2(y) &= (y - \mathcal{F}_d^{-1}[v])^t P (y - \mathcal{F}_d^{-1}[v]), \\ \chi_{v_0}^2(c) &= (Bc - v_{obs})^t (Bc - v_{obs}), \\ \chi_I^2(c) &= (c - \mathcal{F}_d[I])^t Q (c - \mathcal{F}_d[I]), \\ F_{Reg}(I) &= y^t D^t P D y, \end{aligned}$$

donde  $P$  y  $Q$  son matrices de  $J \times J$  con coeficientes dados por

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_{\Omega} b^m(x - sx_i) b^m(x - sx_j) dx \\ Q_{ij} &= \int_{\Omega} b^n(\omega - h\omega_i) b^n(\omega - h\omega_j) d\omega, \end{aligned}$$

$D$  es la matriz de  $J \times J$  del gradiente,  $B$  es una matriz de  $K \times J$  (con  $K$  siendo el número de observaciones) dada por coeficientes del tipo

$$B_{kj} = b^n(h\omega_k - h\omega_j),$$

y finalmente  $v_{obs} \in \mathbb{R}^K$  el vector que contiene las visibilidades. Usando propiedades de diferenciación, integración y convolución de B-splines, se puede escribir además

$$P_{ij} = \int_{\Omega} b^m(x - sx_i) b^m(x - sx_j) dx = \frac{1}{s} (b^m * b^m)(x_i - x_j) = \frac{1}{s} b^{2m}(x_i - x_j).$$

Análogamente, se puede concluir que

$$Q_{ij} = \frac{1}{h} b^{2n} (\omega_i - \omega_j).$$

Usando esto ahora, es factible establecer estrategias de optimización para cada uno de los problemas (en espacio de imagen y en espacio de frecuencia). Para comenzar, en el espacio de imagen se puede notar que la optimización de  $\chi_v^2(y) + \alpha F_{Reg}(y)$  es equivalente a la del funcional  $F_{Img}(y)$  dado por

$$F_{Img} = \frac{1}{2} y^t A_{Img} y - y^t d_{Img},$$

donde  $A_{Img} = P + \alpha D^t P D$  y  $d_{Img} = P \mathcal{F}_d^{-1}[v]$ .

De esta manera, el gradiente de  $F_{Img}$  está dado por

$$\nabla F_{Img}(y) = P(y - \mathcal{F}_d^{-1}[v]) + \alpha D^t P D y.$$

Para poder implementar una estrategia numérica de tipo descendente por gradiente, es necesario encontrar el paso óptimo  $\delta$  minimizando la cantidad

$$\delta \rightarrow F_{Img}(y - \delta \nabla F_{Img}(y)).$$

Al ser todo diferenciable, basta con aplicar técnicas típicas de diferenciación para encontrar en este caso

$$\delta = \frac{\nabla F_{Img}(y)^t \nabla F_{Img}(y)}{\nabla F_{Img}(y)^t A_{Img} \nabla F_{Img}(y)}.$$

Con todo esto listo, ya es posible implementar la estrategia deseada para la búsqueda del mínimo de la función, usando el método de gradiente con paso óptimo. Una vez más, las propiedades de las B-Splines permitirán que los cálculos necesarios para esta labor sean implementados de forma eficiente en términos de tiempo de computación.

Estudiando ahora el problema de optimización en el espacio de Fourier, se plantea la expresión matricial del funcional a optimizar, dada por

$$F_{Fou}(c) = \frac{1}{2} c^t A_{Fou} c - c^t d_{Fou},$$

donde ahora se definen las matrices  $A_{Fou} = B^t B + \beta Q$ ,  $d_{Fou} = B^t v_{obs} + \beta Q \mathcal{F}_d(I)$ .

De esta forma, el gradiente de la función queda dado por

$$\nabla F_{Fou}(c) = B^t (B c - v_{obs}) + \beta Q (c - \mathcal{F}_d(I)),$$

y al volver a buscar el paso óptimo

$$\delta \rightarrow F_{Fou}(c - \delta \nabla F_{Fou}(c)),$$

la diferenciabilidad del funcional permite obtener rápidamente el valor

$$\delta = \frac{\nabla F_{Fou}(c)^t \nabla F_{Fou}(c)}{\nabla F_{Fou}(c)^t A_{Fou} \nabla F_{Fou}(c)}.$$

### 3.3. Término Regularizante y Restricciones Adicionales

Uno de los aportes principales del presente trabajo, tal como se comentara en la primera sección de este capítulo, corresponde al hecho de que el término regularizante  $F_{Reg}$  puede ser modificado para obtener distintos efectos en las imágenes resultantes. En el presente trabajo se estudian tres términos en particular, que corresponden a los siguientes

$$F_{Reg}^1(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(\vec{x})\|^2 dx_1 dx_2,$$

$$F_{Reg}^2(I) = \sum_{j \in J} I_j \ln \left( \frac{I_j}{M_j} \right),$$

$$F_{Reg}^3(I) = \sum_{j \in J} I_j,$$

donde  $J = N \times N$  es el número de píxeles que tiene la imagen,  $I_k$  es el valor de intensidad del  $k$ -ésimo píxel y  $M_k$  corresponde al valor de intensidad del  $k$ -ésimo píxel de una imagen previamente obtenida del objeto a trabajar (en el Capítulo 2 del presente trabajo se explicita su efecto en la optimización).

El primero de los términos es el ya trabajado en la sección anterior. El segundo de ellos (el correspondiente a la optimización resuelta en el algoritmo MEM) se puede trabajar exactamente de la misma forma, salvo que no es factible despejar en forma exacta el paso óptimo de optimización de gradiente (se hace una búsqueda iterativa aproximada en cada paso). Usar este término permite obtener resultados como el algoritmo MEM convencional, pero pasando por esta optimización en dos etapas.

Finalmente el tercer término regularizante es el más difícil de trabajar de los tres, pues para que entregue resultados similares a los obtenidos con el algoritmo CLEAN se hace necesario agregar una restricción adicional: la restricción de positividad, vale decir

$$I_k \geq 0, \quad \forall k \leq J.$$

Esta última restricción presente en la implementación planteada de CLEAN, obliga a usar técnicas diseñadas para su manejo. Una de estas técnicas es la de gradiente proyectado, que se utiliza para resolver problemas del tipo

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{mín} & f(x) \\ \text{s. a} & g_j(x) = a_j^t x - b_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Al considerar sólo las  $r$  restricciones activas (cuyos índices se denotan  $j \in I_A$ ), se escribe

$$g_A = N^t x - b = 0, \tag{3.1}$$

de manera tal que  $N$  guarda en sus columnas los gradientes de las restricciones activas. Así, se buscan soluciones tales que  $x$  esté en el subespacio tangente a las restricciones activas. De

esta forma, si se considera  $x_{i+1} = x_i + \alpha s$  y tanto  $x_i$  como  $x_{i+1}$  cumplen la ecuación (10), entonces

$$N^t s = 0.$$

La dirección  $s$  de máximo descenso se encuentra resolviendo el problema

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \text{mín} & s^t \nabla f \\ \text{s. a} & N^t s = 0 \\ & \|s\| = 1 \end{cases}$$

Usando el lagrangiano

$$\mathcal{L}(s, \lambda, \mu) = s^t \nabla f - \lambda s^t N - \mu(s^t s - 1)$$

e imponiendo las condiciones de optimalidad se puede despejar a partir de la ecuación  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0$  el valor del multiplicador

$$\lambda = (N^t N)^{-1} N^t \nabla f,$$

y por ende al reemplazar en la misma ecuación se despeja el valor de

$$s = \frac{1}{2\mu} P \nabla f, \quad \text{con } P = I - N(N^t N)^{-1} N^t.$$

Para implementaciones numéricas se utiliza  $s = -P \nabla f$  pues lo importante es la dirección elegida. Como la matriz  $P$  es costosa de calcular en términos numéricos, se puede probar que

$$P = Q_2^t Q_2,$$

donde  $Q_2$  es la matriz construida con las últimas  $n - r$  filas de la matriz  $Q$  de la descomposición  $QR$  de la matriz  $N$ .

Realizado todo este proceso,  $\alpha$  se elige como el mínimo de los  $\alpha_j > 0$ ,  $j \notin I_A$  dados por

$$\alpha_j = -\frac{g_j(x_i)}{a_j^t s}.$$

Al término de esta etapa, se recalcula todo y se itera al paso  $i + 1$ . El algoritmo se detiene cuando  $s$  es menor a alguna tolerancia predeterminada y se cumplen las condiciones de KKT (esto es, multiplicadores positivos).

En el caso de la implementación de CLEAN, las restricciones de desigualdad son todas del tipo

$$g_j(x) = a_j^t x, \quad \text{con } a_j^t = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0),$$

vector nulo salvo en la  $j$ -ésima entrada de valor unitario,  $j \in \{1, \dots, c \times d\}$  para una imagen de  $c \times d$  pixeles. Este hecho realza la importancia de construir la matriz  $N$  de forma efectiva, pues dependiendo de la imagen puede ser una matriz difícil de computar.

# Capítulo 4

## Discusión Matemática

En esta sección se presenta la teoría estudiada a lo largo del desarrollo del trabajo de tesis aquí realizado, y los conceptos matemáticos generales de Problemas Inversos, Optimización y Cálculo de Variaciones que justifican las diferentes técnicas y propiedades del algoritmo *Split* presentado en el capítulo anterior. La idea es comprender en términos matemáticos el problema abordado.

### 4.1. Problema Inverso de la Síntesis de Fourier

#### 4.1.1. Conceptos Generales

Sean  $F$  y  $G$  dos espacios vectoriales normados, y sea  $A : F \rightarrow G$  una aplicación lineal y continua (en adelante, *operador*). Se considera en los siguientes párrafos el siguiente problema: *Dado  $g \in G$ , encontrar  $f \in F$  de manera tal que  $g = Af$ .*

La expresión anterior define lo que se entenderá en lo que sigue por *problema inverso*. Este tipo de problemas se dice *well-posed* (término que puede traducirse como “bien definido” o más literalmente “bien puesto”) si verifica las *condiciones de Hadamard*, que se detallan a continuación.

(H1)  $\forall g \in G, \exists! f \in F$  tal que  $g = Af$ .

(H2) La solución  $f$  depende en forma continua de  $g$ .

En términos matemáticos, se dirá que el problema es *well-posed* si  $A$  es invertible y su inversa  $A^{-1} : G \rightarrow F$  es continua. Más específicamente, la condición (H1) equivale a la biyectividad de  $A$  mientras que la condición (H2) equivale a la continuidad de su inversa. Un problema que no verifique alguna de las condiciones de Hadamard se dirá *ill-posed* (“mal definido” o “mal puesto”).

Al momento de pensar en las aplicaciones científicas que esta teoría pueda tener, se encuen-

tra una situación interesante: un problema puede ser matemáticamente *well-posed*, pero su implementación práctica puede ser *ill-posed*: la solución del problema puede existir, ser única y depender continuamente de los datos, pero puede ser muy sensitiva a perturbaciones de ellos. Un error  $\delta g$  produce el error  $\delta f = A^{-1}\delta g$ , que puede ser muy grande dependiendo de la naturaleza y estabilidad de  $A^{-1}$ . Esto puede entenderse más concretamente analizando la desigualdad natural

$$\|\delta f\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta g\|,$$

que indica que si  $\|A^{-1}\|$  es muy grande (donde se entiende la norma como norma de operador), entonces los errores generados por  $\delta g$  pueden pertenecer a un rango muy grande de valores.

Para estabilizar un problema *ill-posed*, o como se dirá en lo que sigue, para *regularizarlo*, se hace necesario reformular el problema original, de manera tal que las condiciones de Hadamard se verifiquen. Los detalles técnicos analizados en el párrafo anterior, además destacan la importancia de poder controlar la sensibilidad del problema ante perturbaciones de los datos. Reformular el problema, sin embargo, generalmente se traduce en pérdidas: normalmente se pierde la opción de obtener una solución ideal. La dificultad de este proceso recae entonces en encontrar el *trade-off* adecuado entre cantidad y calidad de información obtenida.

En las ciencias aplicadas donde se observan problemas de naturaleza *ill-posed*, siempre se desarrollan estrategias que permitan obtener soluciones de alguna forma *lícitas*, muy generalmente a través de modelos relativamente empíricos. Cada una de estas técnicas se puede entender como un algoritmo, donde no siempre la solución posee características claras: normalmente se define como “aquel punto al cual el algoritmo converge” (un ejemplo claro de esto es la naturaleza del algoritmo CLEAN). De cualquier forma, en las siguientes líneas se desarrolla teoría relativa a algoritmos que plantean como soluciones puntos que necesariamente son minimizantes de algún funcional en particular. Estos puntos tienen la ventaja de ser un poco más transparentes, en el sentido de que permiten realizar estudios de estabilidad del algoritmo en cuestión y de la calibración de información *a priori* que el modelo permita utilizar en su regularización.

### 4.1.2. Resultados de Teoría de Operadores

A lo largo de esta sección, sean  $F$  y  $G$  dos espacios de Hilbert separables infinito-dimensionales. Recordar que en este contexto, se puede asegurar la existencia de *bases de Hilbert* para cada uno de los espacios en cuestión.

**Definición 4.1** (Traza de un Operador) *Sea  $A : F \rightarrow G$  un operador y  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una base de Hilbert de  $F$ . Se define la traza del operador  $A^*A$  (donde  $A^*$  denota al operador adjunto de  $A$ ) como la cantidad*

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|Af_j\|^2.$$

*Esta definición, por supuesto, es independiente de la base de Hilbert que se utilice para  $F$ .*

**Definición 4.2** (Operador de Hilbert-Schmidt) *Se dice que  $A : F \rightarrow G$  es un operador de Hilbert-Schmidt si  $\text{tr}(A^*A)$  es finita.*

Los operadores de Hilbert-Schmidt de  $F$  en  $G$  forman un subespacio vectorial de  $\mathcal{L}(F, G)$ , denotado  $HS(F, G)$ . En este espacio, se puede definir además

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle &: HS(F, G)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \sum_j \langle Af_j, Bf_j \rangle, \end{aligned}$$

que resulta ser un producto interno, que hace de  $HS(F, G)$  un espacio de Hilbert cuando se le dota de él. En lo que sigue se enuncian resultados elementales de este espacio, cuando  $F = L_V^2(\mathbb{R}^n)$  y  $G = L_W^2(\mathbb{R}^n)$ , donde  $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.3** *Sea  $\alpha \in L_{V \times W}^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Entonces, para todo  $f \in L_V^2(\mathbb{R}^n)$ , la integral*

$$F(y) \doteq \int_V \alpha(x, y) f(x) \, dx$$

*está bien definida para casi todo  $y \in W$ . Además  $F \in L_W^2(\mathbb{R}^n)$  y más aún, la transformación lineal*

$$\begin{aligned} A &: L_V^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_W^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto A(f) \doteq F \end{aligned}$$

*es acotada y satisface  $\|A\| \leq \|\alpha\|$ .*

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Teorema 3.7.

**Definición 4.4** (Operador Integral de Núcleo  $\alpha$ ) *El operador  $A$  definido en el teorema anterior se denomina operador integral de núcleo  $\alpha$ , y suele denotarse*

$$A \doteq \text{Int}(\alpha).$$

**Teorema 4.5** *Sea  $A \in L(L_V^2(\mathbb{R}^n), L_W^2(\mathbb{R}^n))$ . Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1.  *$A$  es un operador de Hilbert-Schmidt.*
2. *Existe  $\alpha \in L_{V \times W}^2(\mathbb{R}^{2n})$  tal que  $A = \text{Int}(\alpha)$ .*

*Más aún, se verifica en el contexto anterior que*

$$\|A\|_{HS} = \|\alpha\|.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Teorema 3.8.

**Teorema 4.6** *Sea  $A \in L(L_V^2(\mathbb{R}^n), L_W^2(\mathbb{R}^n))$  un operador de Hilbert-Schmidt. Entonces,  $A$  es un operador compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Teorema 3.9.

**Teorema 4.7** Sea  $\alpha \in L^2_{V \times W}(\mathbb{R}^{2n})$ , y sea  $A \in L(L^2_V(\mathbb{R}^n), L^2_W(\mathbb{R}^n))$  su operador integral de núcleo  $\alpha$  asociado. Entonces,  $A^* = \text{Int}\alpha^*$ , donde

$$\alpha^*(y, x) = \overline{\alpha(x, y)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Teorema 3.10.

### 4.1.3. Problema de Extrapolación de Fourier

Sean  $V$  y  $W$  dos subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^n$ , donde se asume adicionalmente que  $W$  posee un subconjunto abierto. Se define el operador

$$\begin{aligned} A : L^2_V(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2_W(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto Af = \mathbb{1}_W \hat{f}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esto define a su vez, a la función  $Af$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (Af)(y) &= \int_V e^{-2\pi i(x,y)} f(x) \, dx \cdot \mathbb{1}_W(y) \\ &= \int e^{-2\pi i(x,y)} \mathbb{1}_W(x) \mathbb{1}_W(y) f(x) \, dx \cdot \mathbb{1}_W(y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como  $V$  y  $W$  son acotados, el núcleo

$$\alpha(x, y) \doteq e^{-2\pi i(x,y)} \mathbb{1}_W(x) \mathbb{1}_W(y) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

de manera tal que  $A$  es un operador de Hilbert-Schmidt. Luego, es posible asegurar que el operador adjunto de  $A$  está dado por

$$A^*g(x) = \mathbb{1}_V(x) \cdot \int_W e^{2\pi i(x,y)} g(y) \, dy.$$

Como  $g \in L^2_W(\mathbb{R}^n)$  se anula c.t.p. fuera de  $W$ , se concluye que  $A^* = \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1}$ . Entonces,

$$A^*A = \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1} \mathbb{1}_W \mathcal{F},$$

y más aún, como  $L^2_V(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_V(\mathbb{R}^n)$ , se puede observar que  $A$  es inyectiva.

En consecuencia, el problema de *extrapolación de Fourier* es *ill-posed*, puesto que  $A^{-1} : R(A) \rightarrow L^2_V(\mathbb{R}^n)$  existe, pero no es continua. Lo que se hace en estos casos es *regularizar* el funcional objetivo, de manera tal que el problema se convierta en uno con mejores posibilidades de ser resuelto.

**Teorema 4.8** El valor propio mayor  $\lambda_1$  de  $A^*A$  verifica

$$\lambda_1 < 1,$$

por lo que  $\Lambda(A^*A) \subseteq (0, 1)$  y  $\|A^*A\| < 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Proposición 7.1.

#### 4.1.4. Problema de Interpolación de Fourier

Se considera ahora un problema similar al anterior, pero con diferencias fundamentales. Sea nuevamente  $V$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ , pero esta vez sea  $W$  tal que  $W^c = \mathbb{R}^n \setminus W$  sea acotado y contenga un subconjunto abierto. Finalmente, se define

$$\begin{aligned} B &: L_V^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_W^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto Bf \doteq \mathbb{1}_W \mathcal{F}[f]. \end{aligned}$$

A partir de esta definición, es factible observar que  $B^* = \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1}$  y luego

$$B^*B = \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1} \mathbb{1}_W \mathcal{F} = \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1} (I - \mathbb{1}_{W^c}) \mathcal{F} = I - \mathbb{1}_V \mathcal{F}^{-1} \mathbb{1}_{W^c} \mathcal{F},$$

donde  $I$  denota la identidad de  $L_V^2(\mathbb{R}^n)$ . Si se denota  $A = \mathbb{1}_{W^c} \mathcal{F}$ , entonces

$$B^*B = I - A^*A,$$

donde además  $\|A^*A\| < 1$  por el Teorema 4.8, puesto que  $W^c$  satisface las hipótesis del problema de *extrapolación de Fourier*. Luego, es factible usar con este operador el siguiente teorema, que es un resultado clásico del análisis funcional.

**Teorema 4.9** *Sea  $F$  un espacio de Banach y sea  $T \in \mathcal{L}(F, F)$  tal que  $\|T\| < 1$ . Entonces,  $R(I - T) = F$ , la inversa de  $I - T$  existe y además,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Más aún,

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Teorema 7.1.

Este teorema muestra que en efecto,  $B^*B$  posee una inversa continua, y

$$\|(B^*B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^*A\|} = \frac{1}{1 - \lambda_1}.$$

Una observación importante en este punto, es que el operador  $B : L_V^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow R(B) \subset L_W^2(\mathbb{R}^n)$  es inyectivo y sobreyectivo, de manera tal que en este contexto  $B^{-1} : R(B) \rightarrow L_V^2(\mathbb{R}^n)$  existe. De todas formas,  $B : L_V^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_W^2(\mathbb{R}^n)$  no es sobreyectiva, y por ende no es invertible. En específico, para cualquier  $f \in L_V^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\hat{f}$  es analítica en cualquier abierto  $\Omega \subset W$ , pero ciertamente es factible construir  $g \in L_W^2(\mathbb{R}^n)$  tal que su restricción a  $\Omega$  no sea analítica.

**Proposición 4.10** *Con la notación y las hipótesis consideradas hasta ahora,*

1.  $B^{-1} : R(B) \rightarrow L_V^2(\mathbb{R}^n)$  es continua.

2.  $R(B)$  es un cerrado en  $L_W^2(\mathbb{R}^n)$ .

3.  $\Lambda(B^*B)$  puede ser escrito como una sucesión  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  creciente

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots,$$

tal que  $\mu_1 > 0$  y  $\mu_k \rightarrow 1$ .

DEMOSTRACIÓN: Ver [11], Proposición 7.2.

Como conclusión de cierre, se deduce que el problema inverso de *interpolación de Fourier* falla en ser *well-posed* sólo en el hecho de que  $B$  no es sobreyectiva. Su reformulación en términos de mínimos-cuadrados de todas maneras sí lo es. En otras palabras, la ecuación

$$B^*Bf = B^*g$$

posee una solución única, para todo  $g \in L_W^2(\mathbb{R}^n)$ , que además depende continuamente de  $g$ .

#### 4.1.5. Técnicas de Regularización

Para regularizar el problema de *extrapolación de Fourier*, se puede utilizar una serie de herramientas, por ejemplo el *principio de regularización de Tikhonov*. En este caso, se plantea un abordaje diferente del problema.

Sea  $W_\beta \doteq \mathbb{R}^n \setminus \beta^{-1}B$ , donde  $B$  denota la bola unitaria centrada en el origen. Como  $W$  es acotado en este contexto, para  $\beta$  suficientemente pequeño se puede asegurar que  $W \cap W_\beta = \emptyset$ . En cualquier caso,  $(W \cap W_\beta)^c$  es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Se define entonces

$$\begin{aligned} B_\beta : L_V^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L_{W \cap W_\beta}(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto B_\beta f = \mathbb{1}_{W \cap W_\beta} \mathcal{F}(f), \end{aligned}$$

y para relajar un poco la notación,  $T_\beta = (B_\beta^* B_\beta)^{-1} B_\beta^*$ . Se puede observar que para todo  $g \in L_W^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $T_b(g)$  minimiza el funcional

$$\begin{aligned} F_\beta(f) &= \frac{1}{2} \|g - B_\beta f\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{W \cap W_\beta} |g(y) - (B_\beta f)(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_W |g(y) - (B_\beta f)(y)|^2 dy + \frac{1}{2} \int_{W_\beta} |(B_\beta f)(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \|g - Af\|^2 + \frac{1}{2} \|C_\beta f\|^2, \end{aligned}$$

donde se denota por comodidad nuevamente

$$\begin{aligned} C_\beta : L_V^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L_{W_\beta}^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \mathbb{1}_{W_\beta} \mathcal{F}(f). \end{aligned}$$

Por otra parte, al llevarse a cabo una regularización de tipo Tikhonov, esto lleva a la minimización del funcional

$$F_\alpha(f) = \frac{1}{2}\|g - Af\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|f\|^2 = \frac{1}{2}\|g - Af\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|\mathcal{F}(f)\|^2,$$

lo que evidencia su diferencia más importante. El término de regularización de Tikhonov actúa en todo el dominio de Fourier, lo que hace que este tipo de regularización introduzca restricciones que entran en conflicto con las restricciones de naturaleza experimental.

## 4.2. Teorema de Paley-Wiener

Una pregunta que aparece frecuentemente en el estudio de funciones y sus transformadas de Fourier es la siguiente: si  $f$  es una función que verifica algunas propiedades en particular (relativas por ejemplo a su diferenciabilidad, regularidad, etc), ¿qué propiedades se pueden enunciar para su transformada de Fourier  $\hat{f}$ ? Respuestas a esta pregunta aparecen de forma más bien natural en espacios como  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (espacio de Schwartz, donde la transformada de Fourier es un operador bien definido y más aún, es un isomorfismo de este espacio en sí mismo) y en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (donde el teorema de Plancherel indica que la transformada de Fourier es una isometría); pero existen algunos otros espacios donde esta pregunta tiene sentido y puede responderse usando otras herramientas.

Una de las caracterizaciones más útiles en este campo se encuentra en el espacio de las funciones infinitamente diferenciables a soporte compacto,  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , donde Laurent Schwartz mostró que si  $f$  es integrable y posee soporte compacto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces  $\hat{f}(s)$  es absoluta y uniformemente convergente, para todo  $s \in \mathbb{C}^n$ .

De todas formas, uno de los resultados fundamentales en este trabajo (que justifica de alguna forma la pregunta respecto a los efectos que genera regularizar la imagen en el espacio de Fourier) consiste en el conocido como Teorema de Paley-Wiener, atribuido al trabajo de R. E. A. C. Paley y N. Wiener, particularmente a sus resultados publicados en [16]. Dada la importancia que tienen estos últimos en el presente trabajo, se enuncian los dos más destacados.

En lo que sigue, para  $R > 0$  constante, se denota  $B_R = B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$  la bola euclidiana, centrada en el origen y de radio  $R$ .

**Teorema 4.11** *Si  $f$  es una función suave en  $\mathbb{R}^n$  con soporte en  $B_R$ , entonces su transformada  $\hat{f}(s)$  satisface las siguientes condiciones.*

1.  $\hat{f}(s)$  es holomorfa en  $\mathbb{C}^n$ . [P-W(a)]
2. Para todo  $N > 0$ ,

$$|\hat{f}(s)| \leq N \frac{e^{R|Im(s)|}}{(1 + \|s\|)^N} \quad \text{[P-W(b)]}$$

DEMOSTRACIÓN: Directa, ver [16], Introducción, Sección 6.

La parte interesante de los resultados de Paley-Wiener es la implicancia inversa de lo anterior, que establece qué ocurre con funciones cuyas transformadas verifican las condiciones [P-W(a)] y [P-W(b)]. Tal como se desearía, se obtiene un resultado recíproco que justifica las simulaciones numéricas realizadas en el próximo capítulo del presente trabajo de Memoria de Título.

**Teorema 4.12** *De forma recíproca al teorema anterior, si  $\hat{f}(s)$  satisface las condiciones [P-W(a)] y [P-W(b)], entonces  $\hat{f}(s)$  es la transformada de Fourier de una función en  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  con soporte en  $B_R$ .*

DEMOSTRACIÓN: Para simplificar la escritura se demostrará el caso  $n = 1$  (los argumentos son análogos para dimensiones superiores). Se debe demostrar entonces que la anti-transformada de  $\hat{f}$  está bien definida, que es suave y además que posee soporte en  $[-R, R]$ , asumiendo que  $\hat{f}$  verifica las condiciones anteriormente mencionadas.

Se observa en primera instancia que la función  $t \mapsto \hat{f}(\sigma + it)$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  para cada  $\sigma$ . Para ello basta con verificar que sus derivadas decrecen a medida que  $|t| \rightarrow \infty$ , pero esto se tiene directamente por la fórmula integral de Cauchy, expresando las derivadas de  $\hat{f}(s)$  como integrales de línea alrededor de círculos de radio pequeño en torno a  $s$ .

Por otra parte, la anti-transformada de Fourier de la función  $\hat{f}$  corresponde a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{2\pi isx} ds,$$

función que se mantiene en  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  en virtud del teorema de Schwartz. Con todo lo anterior, sólo resta verificar que la función  $f$  se anula fuera del intervalo  $[-R, R]$ . Dado que la función trabajada verifica la condición [P - W(b)], existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\hat{f}(\sigma + it) \leq \frac{Ce^{2\pi R|t|}}{1 + |t|^2}, \quad \forall \sigma, t \in \mathbb{R}.$$

Luego, haciendo un cambio de variables en la integral que define a  $f$  se puede verificar que

$$f(x) = \int_{-\infty+it}^{\infty+it} \hat{f}(s)e^{2\pi isx} ds \implies |f(x)| \leq Ce^{2\pi(R-x)t} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} \frac{ds}{1 + |s|^2},$$

punto en el que ya se puede ver que cuando  $x > R$ , al tomar límite  $t \rightarrow \infty$  la cota recién obtenida permite concluir que  $f(x) = 0$ . Lo mismo ocurre cuando  $x < -R$  y se considera el límite cuando  $t \rightarrow -\infty$ . De esto, se concluye lo deseado y se termina la demostración.

# Capítulo 5

## Experiencias y Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas llevadas a cabo usando el método del *Split Algorithm*, modificando sus variables más importantes tales como las visibilidades a utilizar, el número de iteraciones, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de regularización y los términos regularizantes  $F_{reg}$  en ambos espacios (Imagen y Fourier).

### 5.1. Visibilidades

Es claro que los resultados obtenidos por el programa dependerán fuertemente de la cantidad de información inicial con la que se cuente, vale decir, con el porcentaje de la imagen que cubren las visibilidades usadas para la reconstrucción. Para una primera prueba, se considera la siguiente imagen para testear este fenómeno.

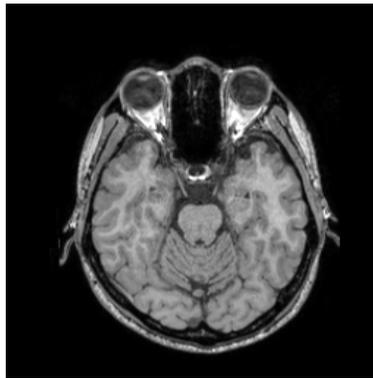


Figura 5.1: Imagen de Resonancia Magnética.

A continuación se presentan tres imágenes, que corresponden a los resultados obtenidos considerando como visibilidades a un sampleo aleatorio que contiene el 30 %, el 50 % y el 70 % de la imagen completa, respectivamente. En ellas se puede apreciar claramente el fenómeno comentado en el párrafo anterior.

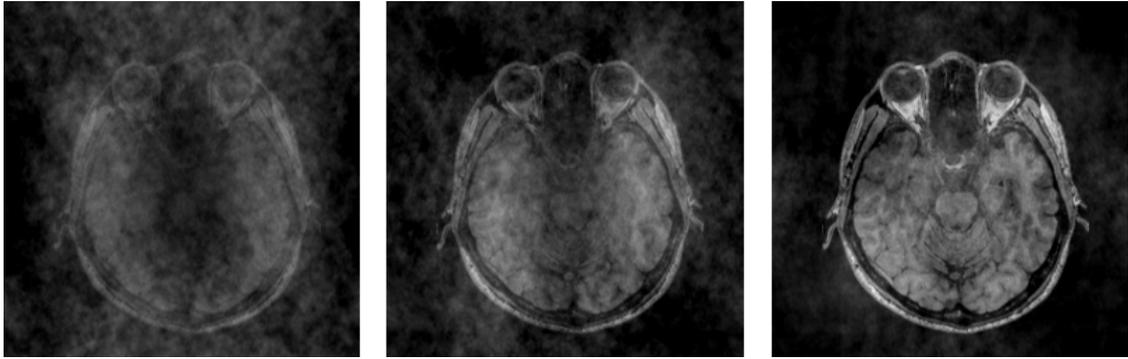


Figura 5.2: Imágenes con visibilidades de 30 %, 50 % y 70 %.

Esta situación se vuelve aún más dramática cuando se trata de imágenes de naturaleza astronómica. Un claro ejemplo de esto es lo que se observa con la siguiente imagen, al momento de realizar exactamente las mismas pruebas ya presentadas con la imagen anterior.



Figura 5.3: Objetos Herbig-Haro HH 46/47.

En este caso, mucha información se pierde dependiendo del porcentaje correspondiente a las visibilidades en cuestión.

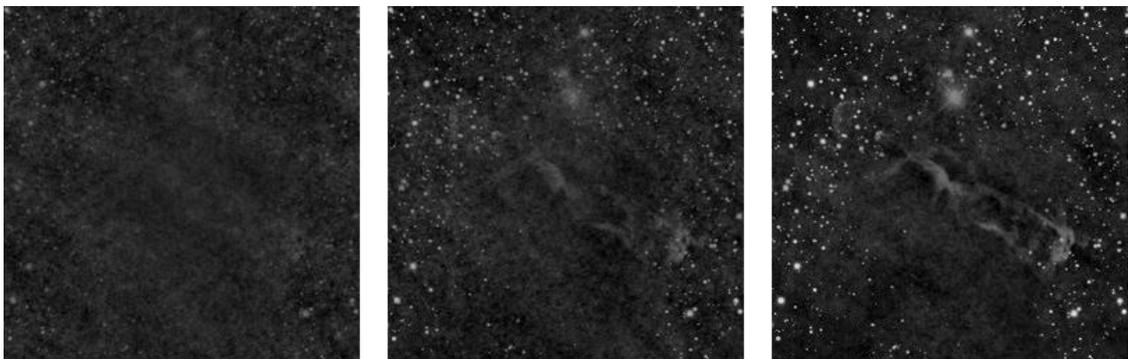


Figura 5.4: Imágenes con visibilidades de 30 %, 50 % y 70 %.

En conclusión, resulta muy importante tener clara esta restricción a la hora de trabajar con visibilidades reales. Vale la pena destacar aquí también un punto que volverá a ser tratado

más adelante, la reconstrucción de esta última imagen resulta bastante precaria en el centro de la figura (se pierde mucho brillo con respecto a la imagen original). Este problema por suerte puede ser controlado de mejor manera, gracias al uso de diferentes términos regularizantes en el programa, sumado además a los parámetros de regularización que lo acompañan.

## 5.2. Convergencia y Número de Iteraciones

Al ser un programa de naturaleza iterativa, resulta de particular interés saber cuántas veces es necesario usarlo sobre una imagen para obtener buenas reconstrucciones sin abusar del tiempo de computación (así como también manejar una cota mínima de iteraciones para obtener resultados razonables). Para llevar a cabo esta estimación, se usará el siguiente estimador del error porcentual entre la imagen reconstruida  $I_r$  y la imagen original  $I_o$

$$E_1 = \frac{\|I_r - I_o\|_2}{\|I_o\|_2}.$$

La idea entonces consiste en obtener alguna medida de la estabilidad de  $E_1$  con respecto a la cantidad de veces que es iterado el programa sobre una imagen de prueba que será utilizada. La imagen seleccionada para llevar a cabo estas pruebas es la presentada en la siguiente figura, pues posee en mayor o menor grado todos los elementos que puede tener una imagen astronómica: objetos de naturaleza puntual (estrellas en toda la imagen), zonas con diferentes niveles de brillo y estructuras extendidas (centro de la galaxia).

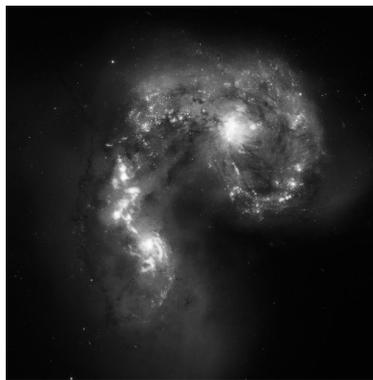


Figura 5.5: Galaxias de las Antenas, NGC4038-NGC4039.

Para que el fenómeno estudiado aquí se pueda entender de mejor forma, la siguiente figura posee distintas etapas de la reconstrucción de esta imagen (usando un 70 % de su información como visibilidad), a medida que el número de iteraciones va creciendo.

Con lo anterior ya aclarado, falta considerar un punto más. Como el programa permite modificar los términos regularizantes que se utilizan en él, a priori es necesario hacer este test modificando estas expresiones, para asegurar que la estimación sea adecuada para todos. Dicho esto, en la tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos para los tres términos regularizantes usados en el espacio de imagen.

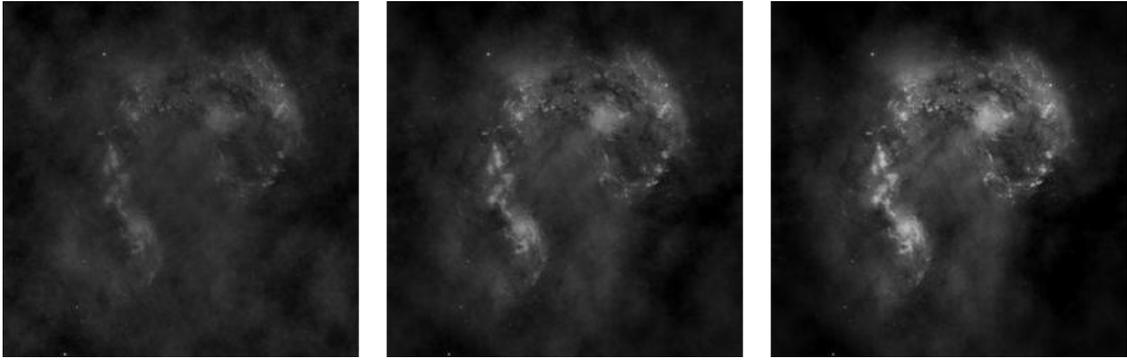


Figura 5.6: Imagen reconstruida, 10-20-40 iteraciones.

Tabla 5.1: Estabilidad de Convergencia

Tabla 5.2: CLEAN		Tabla 5.3: MEM		Tabla 5.4: Tikhonov	
# iteraciones	$E_1$	# iteraciones	$E_1$	# iteraciones	$E_1$
10	0.507	10	0.498	10	0.485
20	0.412	20	0.422	20	0.391
30	0.387	30	0.392	30	0.382
40	0.372	40	0.392	40	0.381
50	0.369	50	0.391	50	0.380

### 5.3. Términos Regularizantes

Como ya se ha comentado en ocasiones anteriores, el algoritmo aquí presentado posee como una de sus grandes características el hecho de poder modificar a conveniencia los términos regularizantes  $F_{reg}$  en ambos espacios (en la imagen y en su transformada). En esta sección entonces, se presentarán resultados que de alguna forma engloban todo el trabajo realizado.

Para mostrar los diferentes resultados obtenidos en estos casos y poder hacer comparaciones pertinentes entre ellos, se hace necesario utilizar un estimador adecuado. Este será el conocido como *peak signal-to-noise ratio*, abreviado PSNR. Este estimador se define como una comparación entre el valor máximo posible de una señal y el valor promedio del ruido que afecta la fidelidad de su representación. En el caso de trabajar con imágenes, que es el que atañe al presente trabajo, se entiende como señal original a la imagen que se desea restaurar y el ruido se entiende como la diferencia entre la reconstrucción y esta imagen original. En términos matemáticos, se define como

$$PSNR = 20 \cdot \log_{10} \left( \frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \right),$$

donde  $MAX_I$  es el valor máximo que pueden tomar los píxeles de la imagen (en este caso, 255) y MSE es el error cuadrático medio de la imagen (en inglés, *mean squared error*) que en el caso de una imagen  $I$  de  $m \times n$  y su aproximación  $K$ , se encuentra dado por

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [I(i, j) - K(i, j)]^2.$$

Esta cantidad se mide en decibelios, y su rango de mejor aceptación en el contexto de procesamiento de imágenes se mueve entre los 20 y 60 dB (donde los mejores valores son los mayores).

### 5.3.1. Espacio de Imagen

A continuación entonces, se presenta una serie de imágenes que fueron reconstruidas utilizando los tres términos en cuestión, a saber

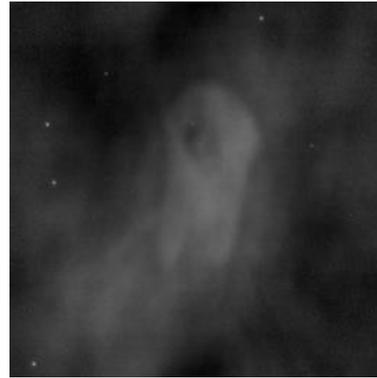
$$F_{Reg}^1(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(\vec{x})\|^2 dx_1 dx_2,$$

$$F_{Reg}^2(I) = \sum_{j \in J} I_j \ln \left( \frac{I_j}{M_j} \right), \quad F_{Reg}^3(I) = \sum_{j \in J} I_j,$$

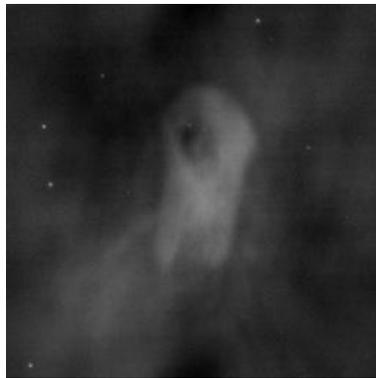
donde  $J = N \times N$  es el número de píxeles que tiene la imagen,  $I_k$  es el valor de intensidad del  $k$ -ésimo píxel y  $M_k$  corresponde al valor de intensidad del  $k$ -ésimo píxel de una imagen previamente obtenida del objeto a trabajar (en el Capítulo 2 del presente trabajo se explicita su efecto en la optimización).



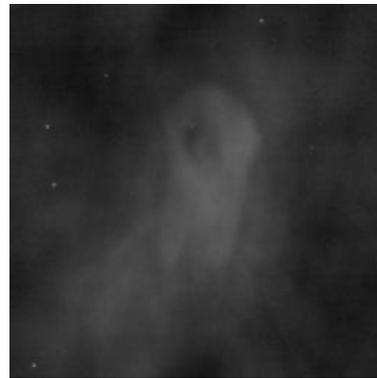
(a) Original



(b) Reg.  $F_{Reg}^1$



(c) Reg.  $F_{Reg}^2$



(d) Reg.  $F_{Reg}^3$

Figura 5.7: Simulación Galaxia Boomerang

En el set de imágenes recién presentado en la figura 5.7, la primera figura muestra la imagen que será utilizada para su reconstrucción. Utilizando un 40 % de su información como visibilidad, se obtienen los resultados presentados en las otras tres figuras. La figura a la derecha de la primera muestra la reconstrucción obtenida con  $F_{Reg}^1$ , la figura a continuación se obtuvo con  $F_{Reg}^2$  y la última con  $F_{Reg}^3$ . A simple vista, se puede observar que en este caso la mejor reconstrucción se llevó a cabo con la regularización del algoritmo MEM, y aparentemente la de peor rendimiento corresponde a la obtenida a través de la regularización tipo CLEAN. Estas observaciones pueden ser confirmadas a partir del cálculo del PSNR en cada caso, a saber

$$PSNR_1 = 15,059 \ , \quad PSNR_2 = 18,279 \ , \quad PSNR_3 = 11,638 \ .$$

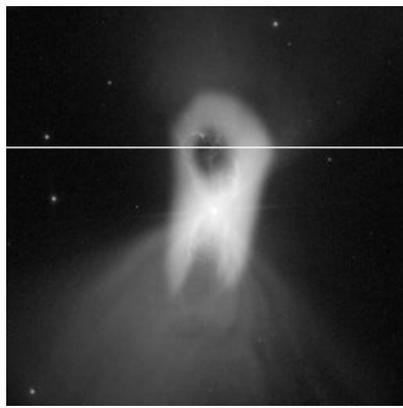
Estos resultados confirman las expectativas teóricas conocidas para este tipo de reconstrucciones, puesto que el objeto en cuestión se trata de una nebulosa que posee características de un cuerpo más bien extendido y no de naturaleza puntual. Como es sabido, el algoritmo CLEAN no posee un buen rendimiento frente a este tipo de objetos, a diferencia del algoritmo MEM que se desenvuelve de mejor forma.

Cabe destacar además que los tres algoritmos son capaces de identificar de forma correcta los objetos puntuales que rodean a la figura central, por lo que la diferencia principal es el comportamiento que tienen frente a este último objeto.

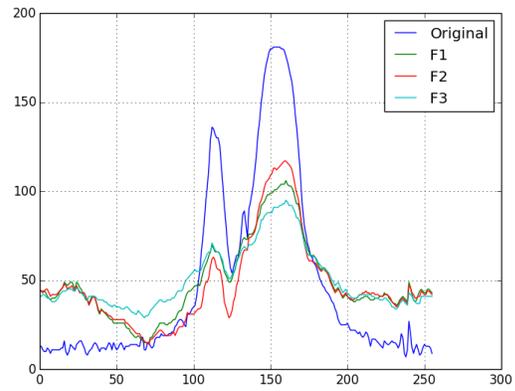
Otra observación importante es que las reconstrucciones obtenidas (que se encuentran presentadas sin ningún tipo de tratamiento posterior) en general pierden una fracción importante del brillo total. Comparando los máximos de cada imagen se observan pérdidas del 38 % en el mejor de los casos, correspondiente a la reconstrucción realizada con la regularización  $F_{Reg}^1$  y en el peor de los casos de un 51 %, correspondiente a la regularización  $F_{Reg}^3$ . Esto tiene que ver con los efectos secundarios que provoca el trabajar con la norma 2 en el término de similitud, pues el uso de ésta tiene como consecuencia una tendencia de las imágenes resultado a converger a valores promedio en la imagen. Esto se confirma cuando se comparan los mínimos de cada imagen, que en el caso de las tres reconstrucciones son mayores a los mínimos de la imagen original.

Esto también puede observarse mediante la figura 5.8, que se obtiene al graficar una fila de píxeles en particular de las imágenes presentadas anteriormente. A continuación se muestran tres copias de la imagen original donde se han realizados tres cortes específicos, los cuales posteriormente serán extraídos de cada una de las imágenes resultantes y graficados al mismo tiempo para apreciar sus diferencias.

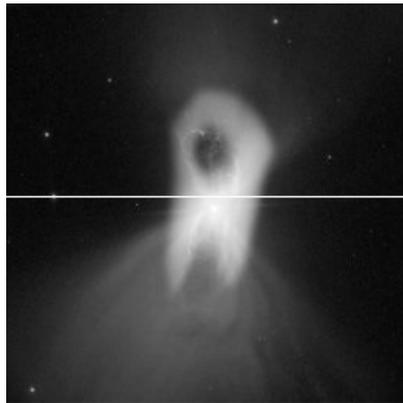
Finalmente pero no menos importante resulta destacar la presencia de 'artefactos' en la reconstrucción realizada, que aparecen por los efectos de periodicidad que genera el usar la transformada de Fourier discreta en este algoritmo. Es por ello que la aparición de estos elementos es imposible de evitar, pero como se podrá ver en imágenes trabajadas más adelante, es factible reducir su efecto dependiendo de la regularización que se utilice.



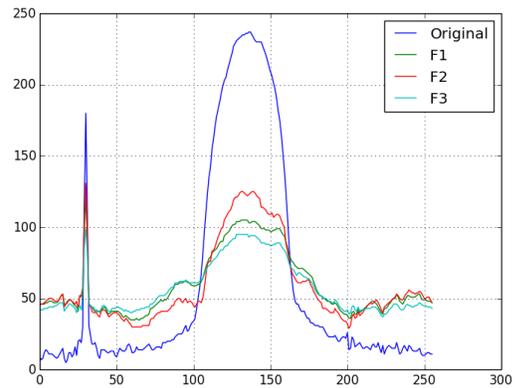
(a) Corte Fila 90



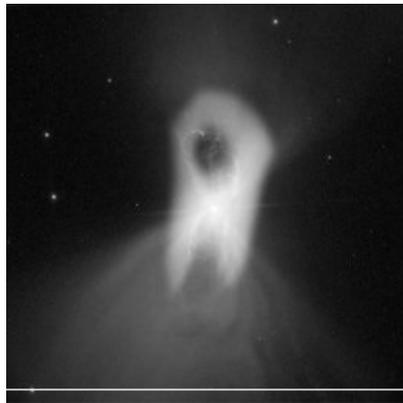
(b) Resultados Fila 90



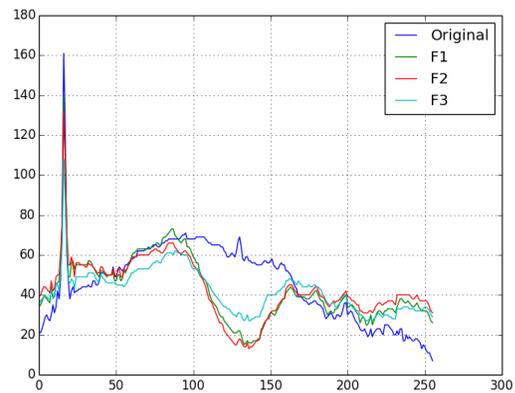
(c) Corte Fila 123



(d) Resultados Fila 123



(e) Corte Fila 246



(f) Resultados Fila 246

Figura 5.8: Cortes Galaxia Boomerang

Se presenta a continuación un segundo set de imágenes en la figura 5.9, que posee elementos de naturaleza más bien puntual, para corroborar más resultados teóricos ya presentados en este trabajo.

En este caso no es muy simple determinar resultados a ojo desnudo, como fue en el caso del set anterior de imágenes. Lo que sí parece claro es que esta vez, la reconstrucción de peor rendimiento es la asociada al algoritmo MEM, resultado que es del todo esperable dada la

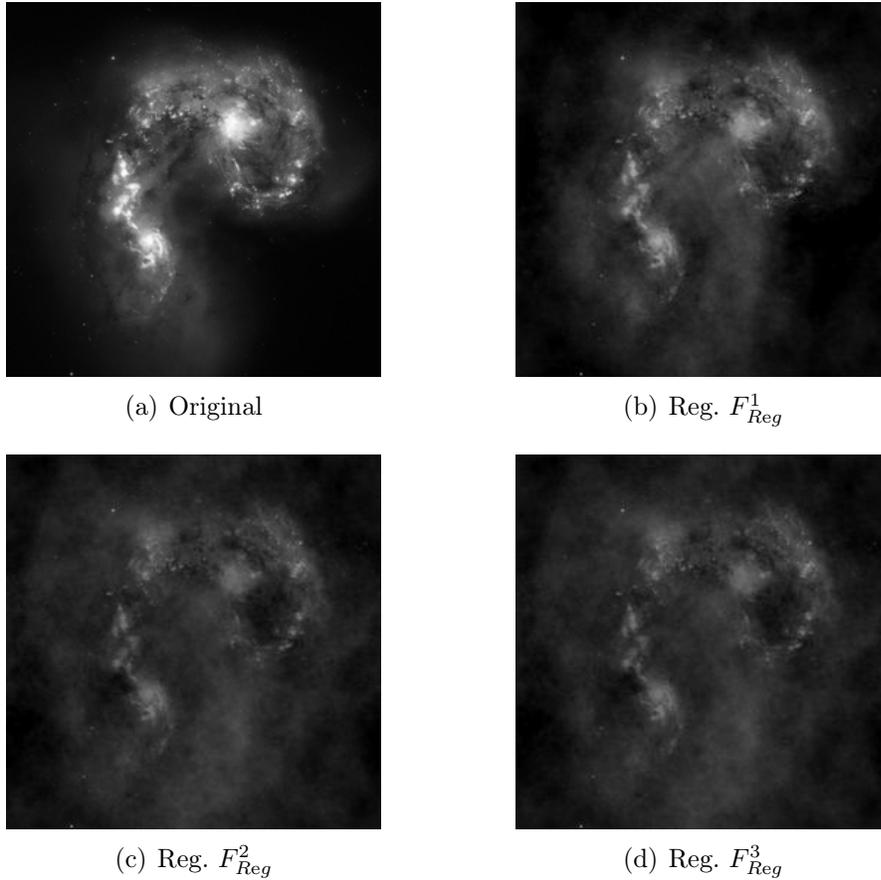


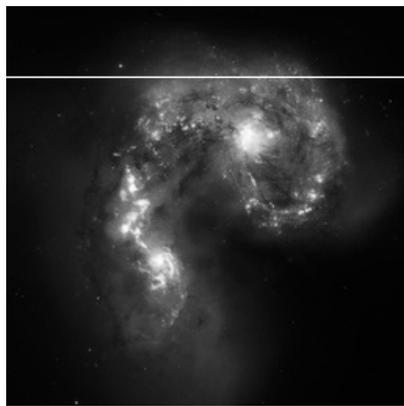
Figura 5.9: Simulación Galaxias NGC4038-NGC4039

naturaleza mayoritariamente puntual de esta imagen. Luego, resulta interesante saber si aquí es el algoritmo CLEAN el que posee mejor rendimiento de los tres. Para verificar esto, se calcula una vez más el PSNR de cada una de las reconstrucciones.

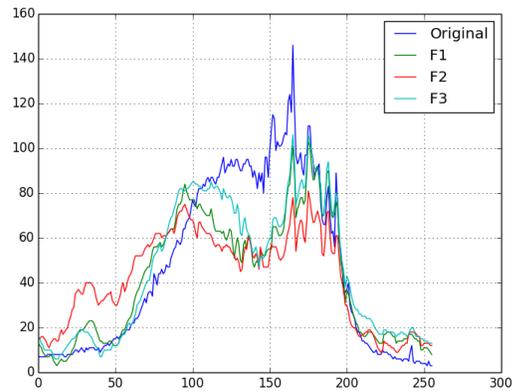
$$PSNR_1 = 21,286 \text{ , } PSNR_2 = 16,025 \text{ , } PSNR_3 = 22,032 \text{ .}$$

Efectivamente, el mejor índice lo logra la tercera reconstrucción, pero esta vez la primera de ellas se encuentra bastante cerca del mejor de los resultados. Esto es un primer indicio de algo que se irá corroborando a medida que se presentan más imágenes procesadas; la reconstrucción asociada al término regularizante  $F_{Reg}^1$  es la que resulta más robusta en términos del tipo de imagen al que se enfrenta.

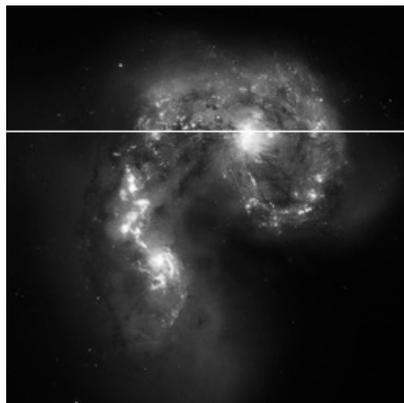
Esta vez también se observa una pérdida de brillo en las reconstrucciones, con la diferencia de que ahora la imagen de mejor resultado posee una pérdida mucho menor que en el caso de la primera imagen (realizando los cálculos pertinentes, esta es sólo de un 19%). Esto se puede explicar en el hecho de que el primer set de imágenes tiene concentrado su brillo en el objeto que resulta más conflictivo de reconstruir (la estructura central), mientras que en el segundo set el brillo se encuentra repartido entre las estrellas (fuentes puntuales) presentes en la imagen. Luego, como los tres métodos reconstruyen estos puntos relativamente bien, es de esperarse que en imágenes como la trabajada aquí la pérdida sea menor. La figura 5.10 sirve para ratificar estos puntos.



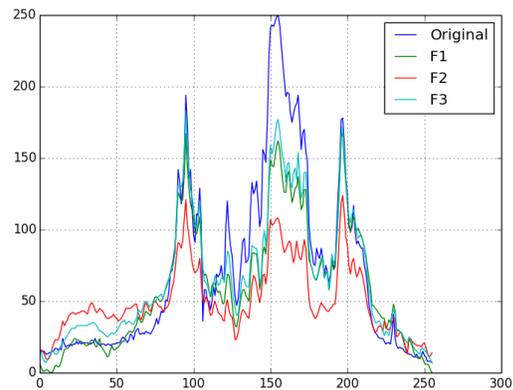
(a) Corte Fila 45



(b) Resultados Fila 45



(c) Corte Fila 80



(d) Resultados Fila 80

Figura 5.10: Cortes Galaxias NGC4038-NGC4039

Respecto de los artefactos generados en la reconstrucción es posible observar ahora lo siguiente, la reconstrucción asociada al algoritmo CLEAN en este caso es la que los reduce de mejor forma. Esto se explica simplemente recordando el término de regularización que se utiliza aquí, el cual apunta a minimizar la norma 1 de la suma de los píxeles de la imagen. Luego, como el término de similitud impide que esta minimización se haga en los lugares donde hay información importante, el algoritmo se encarga de eliminar información que "aparece" en la labor y no tiene relación con la imagen original, vale decir, precisamente los artefactos. Esta es una primera gran conclusión que se puede obtener de este trabajo, que será más detallada en el siguiente punto.

Para tratar de confirmar los dichos expresados hasta este punto, se considera ahora una imagen de tipo más bien mixto entre los dos anteriores, en el set presentado en la figura 5.11.

Este set de resultados resulta ser el menos satisfactorio hasta el momento, puesto que en términos de simple visión es posible determinar que ninguno de los tres logra reconstruir a cabalidad el objeto central de la imagen procesada. Sí se observan excelentes resultados en los objetos puntuales alrededor de este, pues los tres logran identificarlos de forma correcta en mayor o menor grado.

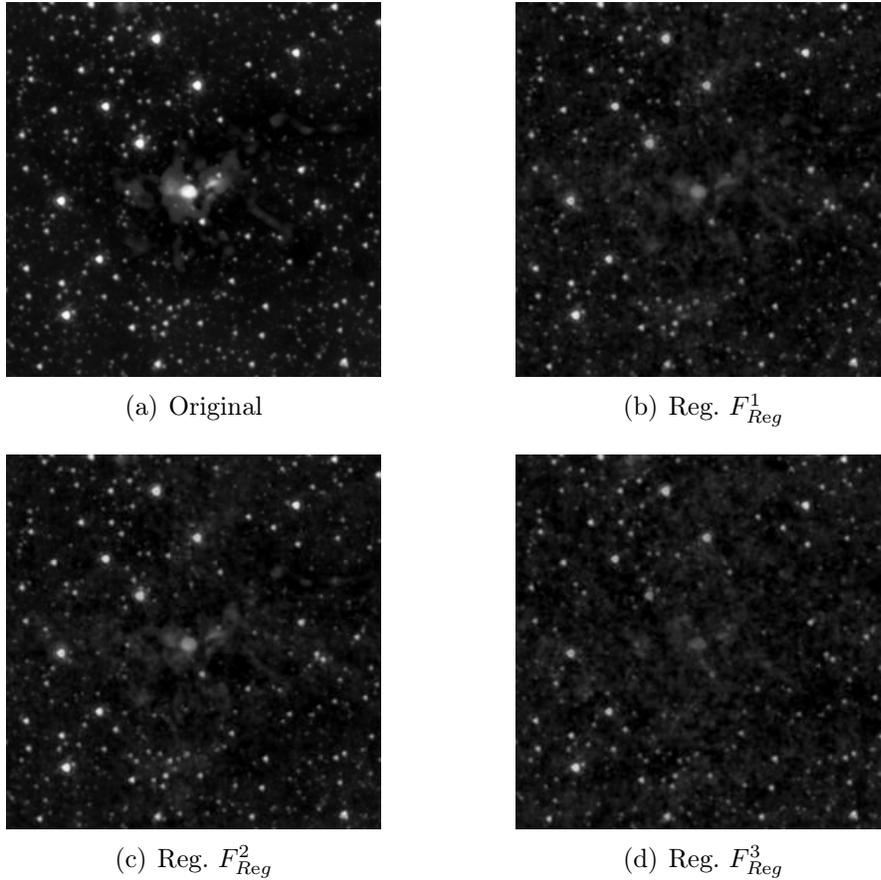


Figura 5.11: Simulación *Spitzer Dark Cloud* (SDC) 335.579-0.292.

En esta situación, el PSNR asociado a cada reconstrucción es el siguiente

$$PSNR_1 = 22,034 , \quad PSNR_2 = 22,607 , \quad PSNR_3 = 18,738 .$$

Nuevamente se observa la cercanía de la regularización  $F_{Reg}^1$  al resultado óptimo, y que al momento de reconstruir elementos de naturaleza extendida el peor resultado se obtiene utilizando algoritmos de naturaleza CLEAN, como es el caso de  $F_{Reg}^3$ .

En el caso de esta imagen no hay mucha pérdida de brillo (en el peor de los casos se pierde aproximadamente un 23 %), y la presencia de artefactos no se hace mucho notar, salvo en la imagen de peor resultado, tal como se puede apreciar en la figura 5.12 (esto se puede mejorar cuando se trata particularmente del algoritmo CLEAN agregándole “peso” en la optimización al término regularizante, pero esto se tratará en la siguiente sección del presente capítulo).

Como ya se ha comentado en el presente trabajo en capítulos anteriores, la interferometría no sólo es importante para temas astronómicos como los trabajados hasta este punto, sino que también posee aplicaciones importantes en otras áreas. Este es el caso por ejemplo, de la imagenología médica, particularmente en el caso de las resonancias magnéticas, que son obtenidas mediante esta técnica. Luego, vale la pena estudiar cómo se comportan estos algoritmos ante imágenes de esta ciencia, como es el caso de la figura 5.13.

Lo primero que se puede observar, es que la reconstrucción obtenida es excelente en los tres

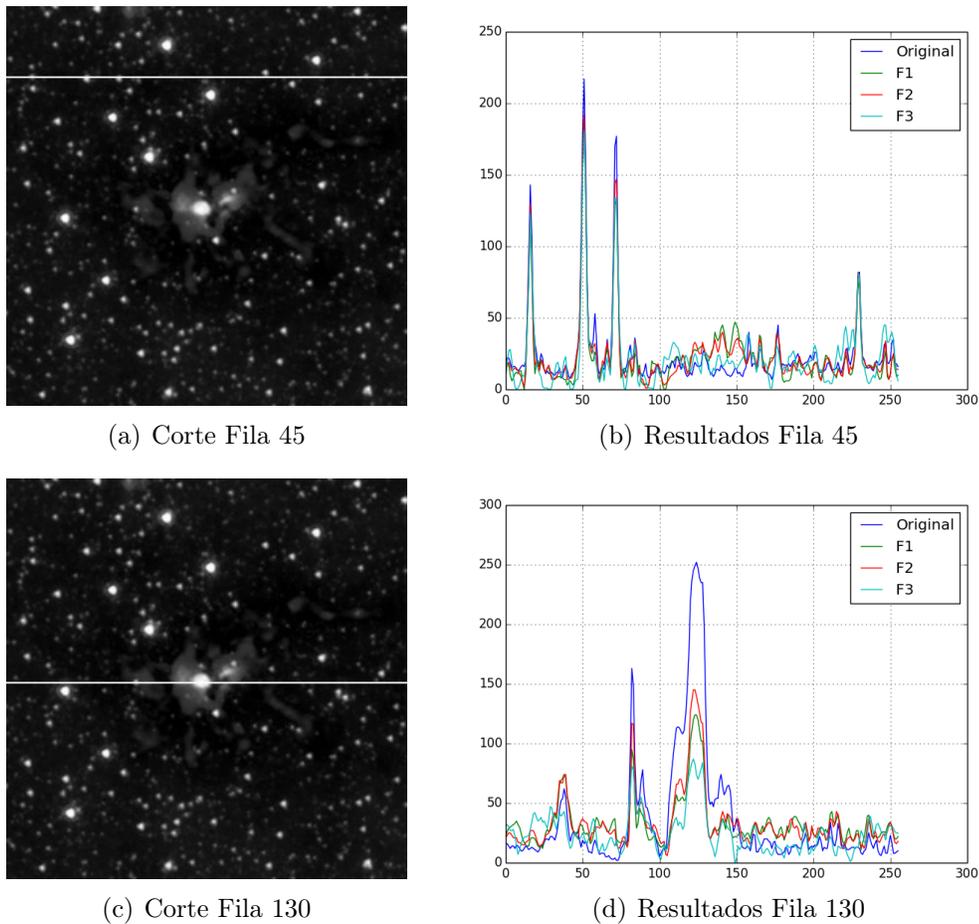


Figura 5.12: Cortes *Spitzer Dark Cloud* (SDC) 335.579-0.292.

casos, por lo que la aplicación de este trabajo a imágenes de esta naturaleza es perfectamente plausible. Se observa la aparición de artefactos como siempre, pero en mucha menor cantidad que en las imágenes astronómicas trabajadas. Por supuesto estos resultados tienen una explicación inicial; esta imagen es la que posee mejor resolución de todas las trabajadas hasta este punto, por lo que resulta natural que los resultados obtenidos sean mejores (en general en astronomía y medicina de cualquier forma, esta situación no se da).

Para esta reconstrucción los índices PSNR son satisfactorios en todos los casos, tal como se puede observar una vez calculados

$$PSNR_1 = 33,273 , \quad PSNR_2 = 31,915 , \quad PSNR_3 = 33,760 .$$

Las pérdidas de brillo a su vez son muy leves respecto de la imagen original, en ninguno de los tres casos sobrepasando el 20% total, tal como puede observarse en la figura 5.14.

Las estructuras centrales del cráneo mostrado en la imagen se pueden apreciar sin mayores inconvenientes a simple vista. En conclusión, estos resultados son hasta el momento los más satisfactorios, y muestran que en situaciones de poseer buena información inicial, las tres reconstrucciones entregan buenas imágenes finales.

Para concluir esta parte, como todo trabajo de procesamiento de imágenes que se precia

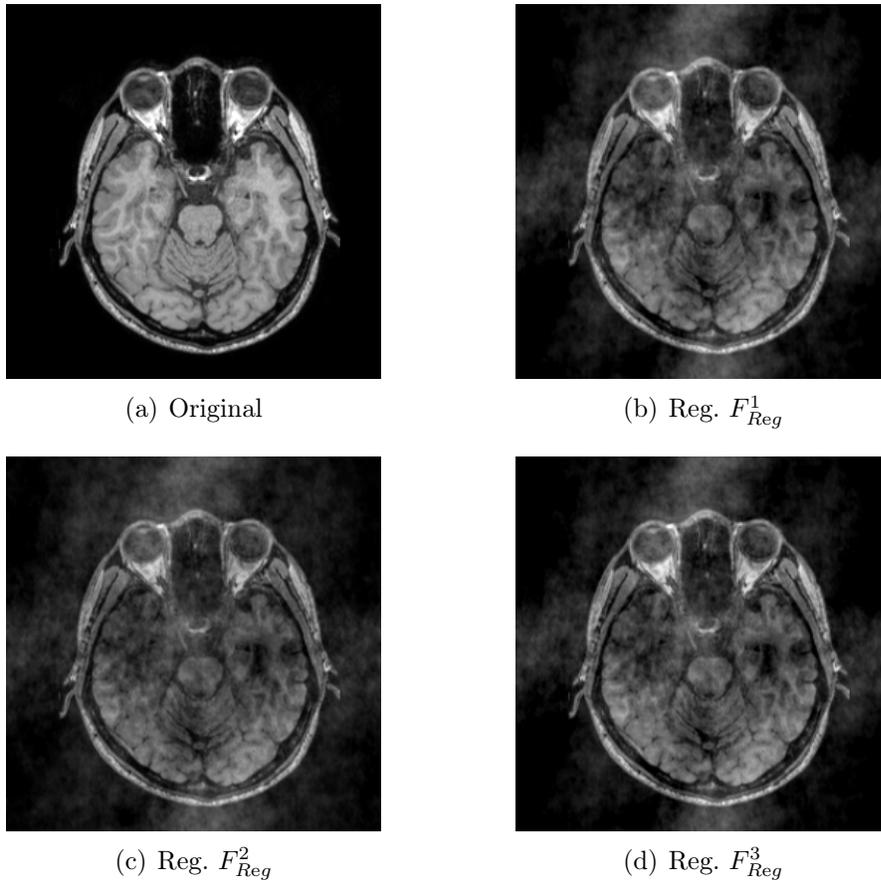


Figura 5.13: Simulación Resonancia Magnética

de ello, se muestra el set de imágenes elaborado con la imagen de Lena Söderberg<sup>1</sup>, cuyos resultados se presentan en la figura 5.15.

En este caso las tres reconstrucciones funcionan de forma bastante similar entre ellas, y no es claro a simple vista cuál de las tres entrega los mejores resultados. Para dilucidar este asunto, se recurre una vez más al índice PSNR de cada una de ellas.

$$PSNR_1 = 19,722 \text{ , } PSNR_2 = 19,724 \text{ , } PSNR_3 = 19,753 \text{ .}$$

Luego, por un mínimo margen se puede indicar que la restauración usando la regularización de tipo CLEAN es la que entrega los mejores resultados, pero en realidad se puede hablar de un empate virtual. Ninguna de las tres reconstrucciones es por completo aceptable, de hecho las tres presentan problemas de aparición de artefactos en la zona central de la imagen (rostro de Lena). Sin embargo, los objetos que la rodean aparecen más bien claros en todos los casos, y el brillo no se pierde de forma tan drástica como en otros ejemplos. En la figura 5.16 se aprecia claramente esta situación particular.

<sup>1</sup><http://www.ee.cityu.edu.hk/lmpo/lenna/Lenna97.html>

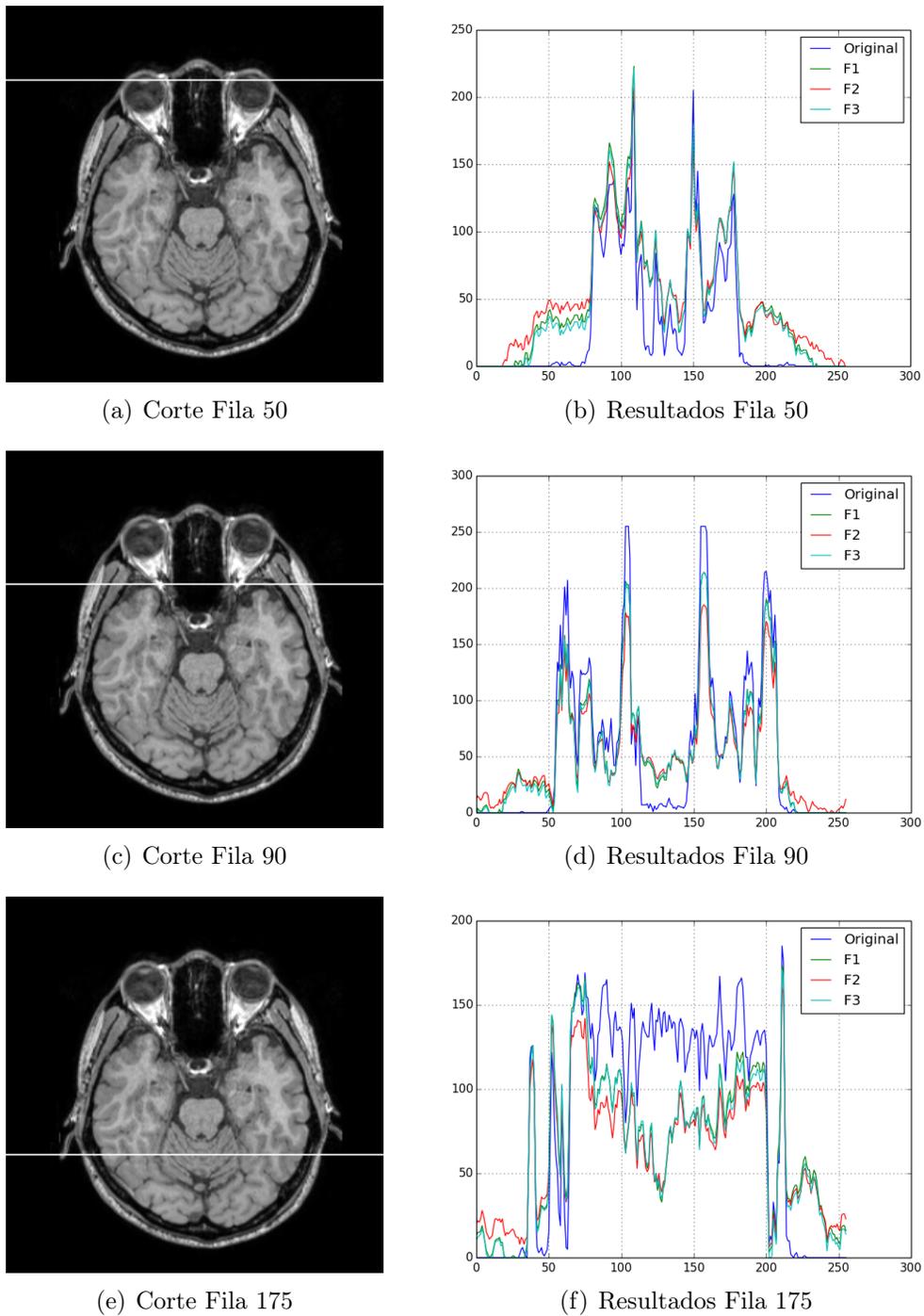


Figura 5.14: Cortes Resonancia Magnética

### 5.3.2. Espacio de Fourier

En esta parte del algoritmo sólo se utilizan dos términos ponderados por el parámetro  $\beta$ , que corresponden a los siguientes

$$F_{Fou}^1(c) = \chi_I^2(c) = \int_{\Omega} |v_c(\omega) - \mathcal{F}[I](\omega)|^2 \, dudv, \quad F_{Fou}^2(c) = \|\nabla v_c\|^2.$$

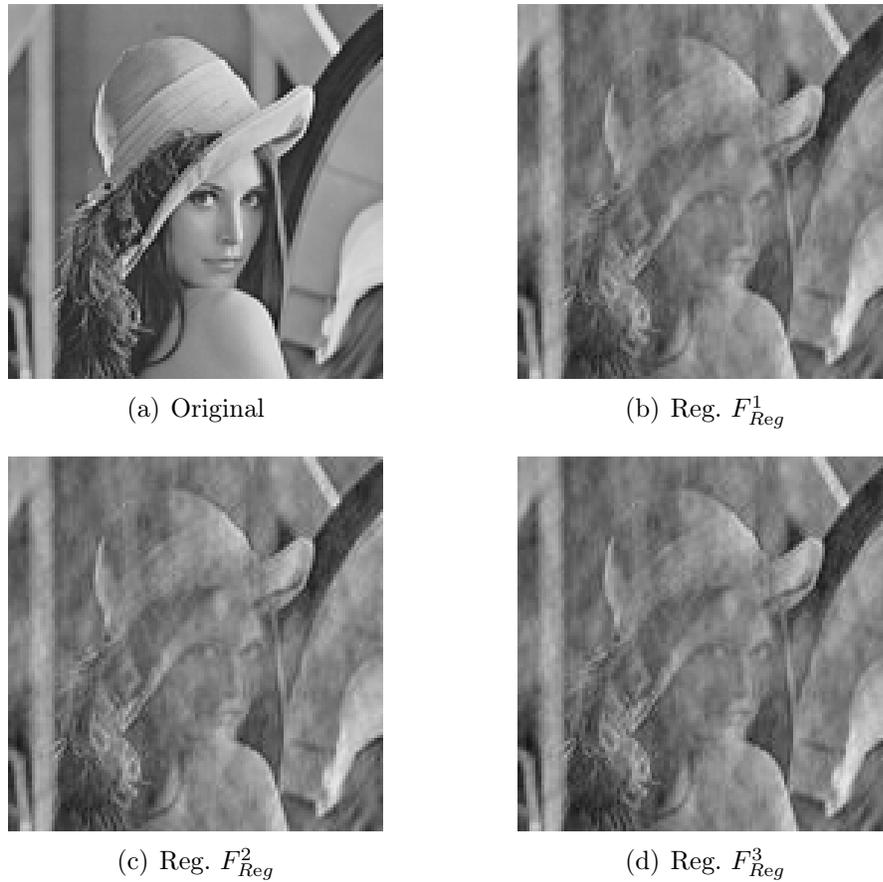


Figura 5.15: Simulación Lena

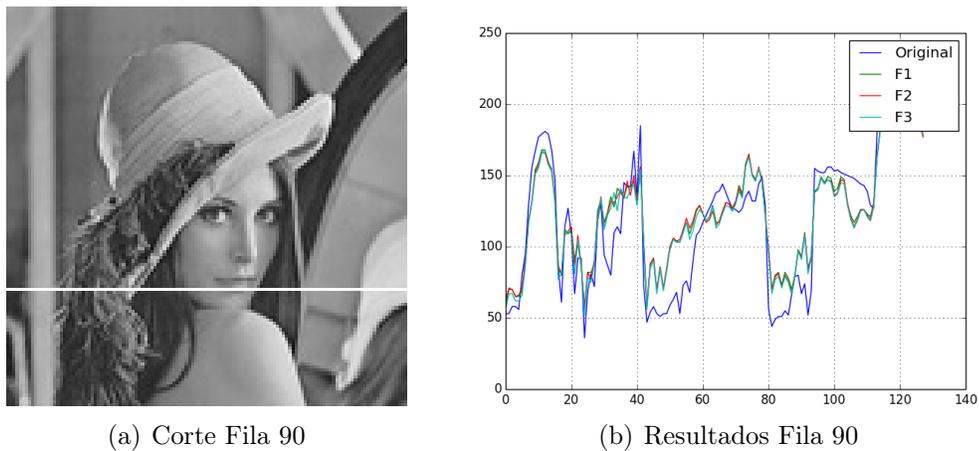


Figura 5.16: Cortes Lena

La gran diferencia aquí, con respecto al trabajo detallado anteriormente consiste en que sólo el segundo término es regularizante como tal en el proceso de optimización, mientras que el primero corresponde a uno de similitud en todo el dominio de la imagen.

Para mostrar los resultados obtenidos en esta etapa se compara el comportamiento de esta regularización en diferentes imágenes, contrastando las imágenes obtenidas con las procesadas

sin regularización. Además, se hace necesario saber cómo afecta esta regularización al efecto que provocan los términos regularizantes ya estudiados en el espacio de imagen.

Dicho esto, se comienza analizando el set de imágenes de la figura 5.17. Las figuras de la primera fila son las reconstrucciones ya presentadas en la subsección anterior utilizando los términos  $F_{Reg}^1$ ,  $F_{Reg}^2$  y  $F_{Reg}^3$  respectivamente, mientras que las imágenes en la segunda fila corresponden a las obtenidas cuando se agrega el término regularizante en el espacio de Fourier.

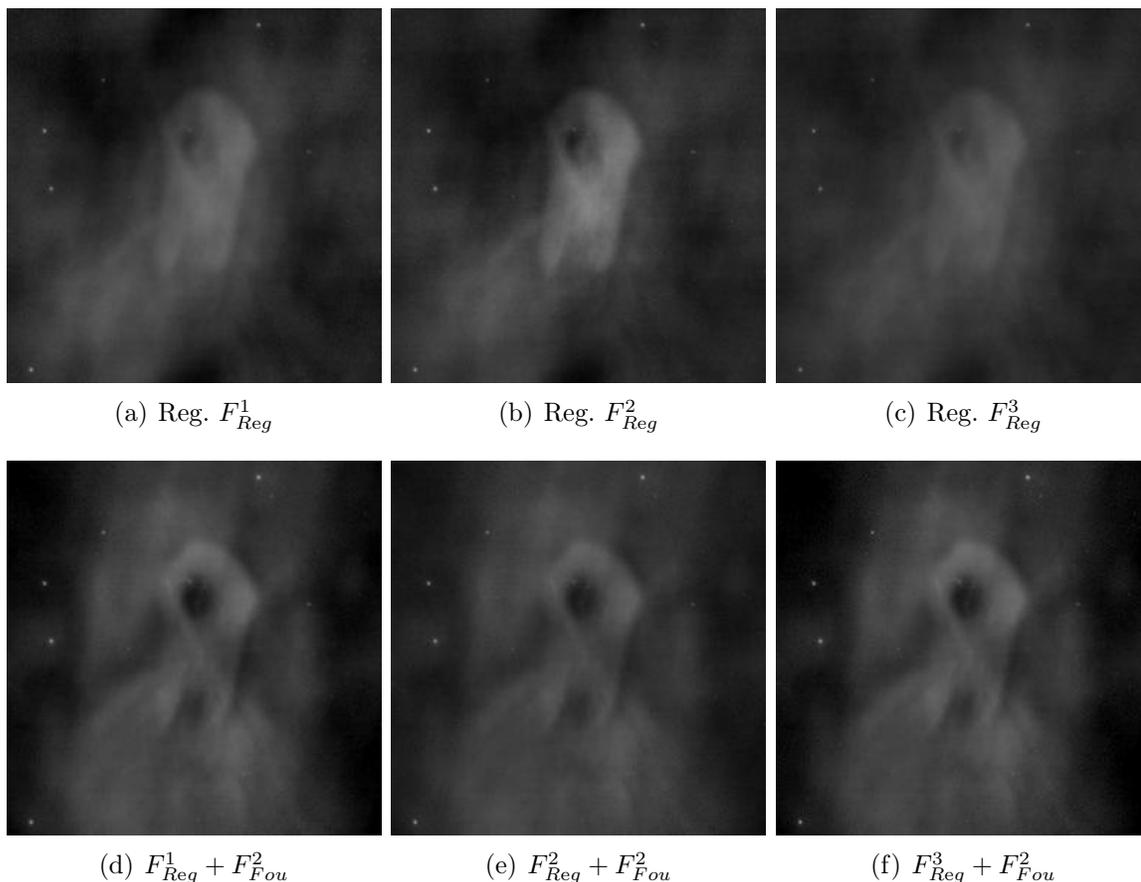


Figura 5.17: Simulación Galaxia Boomerang

Es posible observar que en términos intuitivos, lo que ha ocurrido al aplicar la regularización es que se reduce el nivel de artefactos en la zona central de la imagen. En cuanto al PSNR obtenido en cada caso al agregar la regularización en Fourier, se observa el siguiente fenómeno

$$PSNR_1 = 14,978 , \quad PSNR_2 = 18,234 , \quad PSNR_3 = 11,724 .$$

Se conjetura entonces que la regularización distribuye de forma diferente los artefactos que aparecen en la reconstrucción, pero que la calidad de ella (en términos del PSNR) permanece relativamente constante. Esto puede aprovecharse en imágenes como la aquí estudiada, donde el objeto central no aparezca del todo entre los artefactos.

Se presenta en la figura 5.18 un segundo set de imágenes para corroborar esta suposición, con la imagen de resonancia magnética ya trabajada en la subsección anterior.

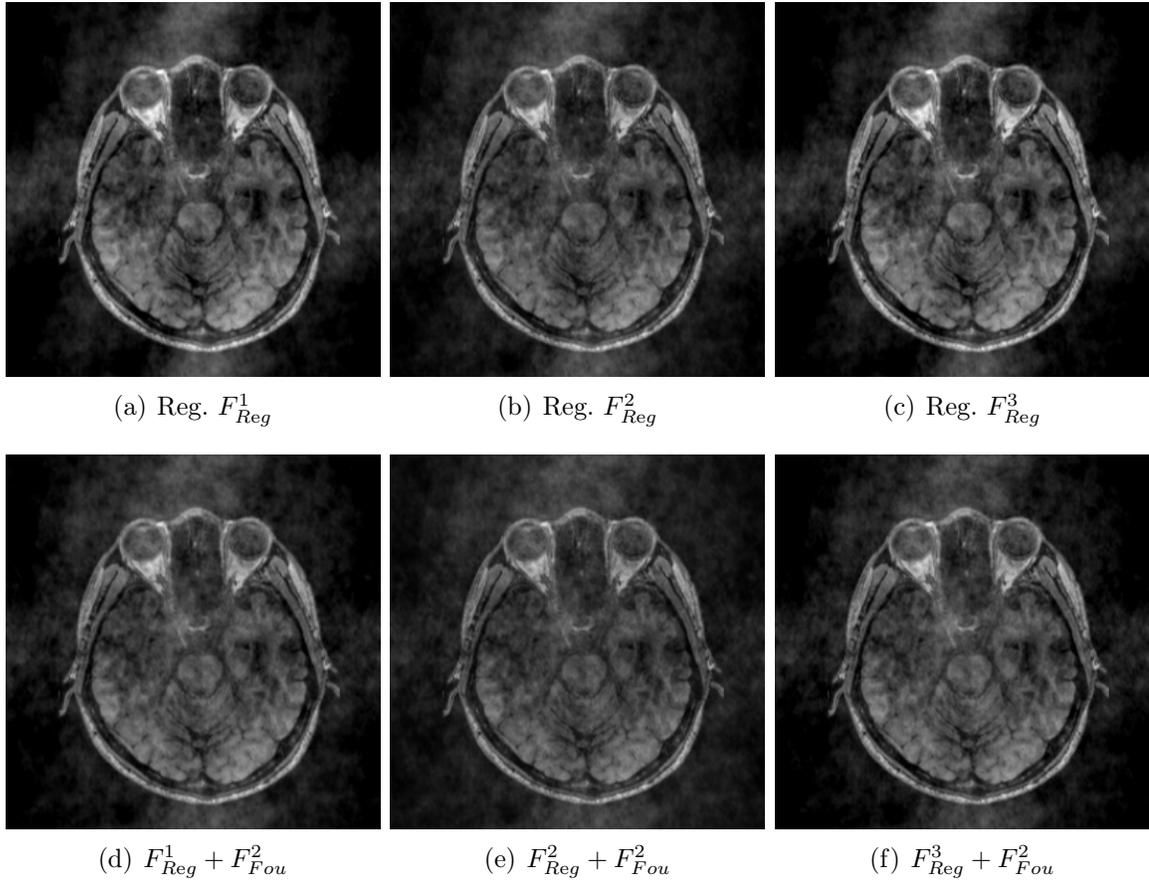


Figura 5.18: Simulación Resonancia Magnética

En esta ocasión se aprecia un fenómeno similar, puesto que los artefactos en la imagen se ven distribuidos de forma diferente a las primeras reconstrucciones; y al momento de calcular el índice PSNR de cada una de las nuevas imágenes se obtiene

$$PSNR_1 = 32,224 , \quad PSNR_2 = 30,639 , \quad PSNR_3 = 32,893 .$$

Luego, efectivamente se han replicado los resultados obtenidos para la imagen anterior.

## 5.4. Parámetros de Regularización

El valor del parámetro de regularización ( $\alpha$  en la optimización en imagen,  $\beta$  en la optimización en Fourier) juega un rol preponderante en los resultados obtenidos. Basta con modificar levemente su valor para que las imágenes resultantes sean considerablemente diferentes.

Para comparar los resultados de cada una de las regularizaciones, se usará como imagen standard la resonancia magnética utilizada en la sección anterior. Esto, pues los tres términos regularizantes mostraron resultados satisfactorios al momento de aplicarlos y la reconstrucción obtenida fue similar en todos los casos.

### 5.4.1. Regularización $F_{Reg}^1$

Al variar el valor del parámetro de regularización con este término se aprecia un fenómeno bastante particular, mostrado en el siguiente set de imágenes.

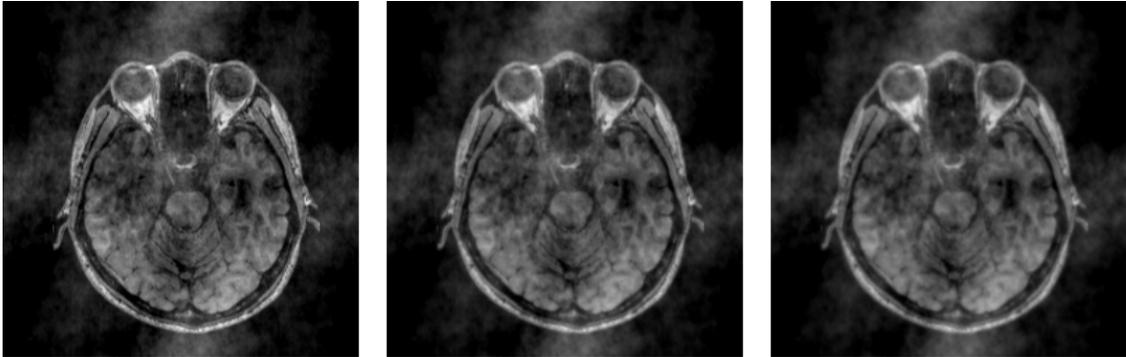


Figura 5.19: Valores de  $\alpha = 0,01, 0,1$  y  $0,2$  para  $F_{Reg}^1$ .

En este caso, ninguno de los valores del PSNR para cada simulación entrega mayor información, pues luego de realizar los cálculos necesarios para obtenerlos se observa la siguiente situación.

$$PSNR_1 = 31,847 , \quad PSNR_2 = 31,320 , \quad PSNR_3 = 31,169 .$$

Se aprecia un leve descenso del PSNR a medida que se va aumentando el parámetro de regularización, pero en ningún caso la suficiente como para decidir con exactitud cuál es la mejor aproximación de las tres obtenidas.

Algo que sí se puede apreciar en las imágenes obtenidas es que a medida que el parámetro se va aumentando, la imagen resultante se encuentra más difuminada. En palabras más simples, los contornos de la imagen y sus detalles se encuentran menos definidos a medida que el parámetro aumenta. Esto se puede corroborar haciendo un gráfico como los de la sección anterior, cortando en una zona específica de la imagen y graficando las tres soluciones obtenidas.

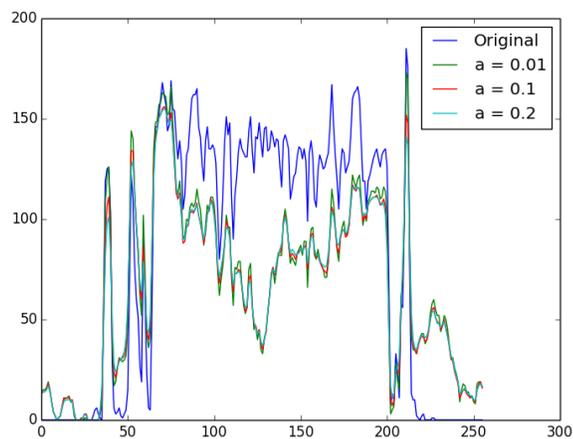


Figura 5.20: Corte Imagen, Fila 175.

### 5.4.2. Regularización $F_{Reg}^2$

Tal como se podía predecir en términos teóricos, se puede observar que las imágenes resultantes son más bien planas, los máximos y mínimos se van alejando de los valores originales y a medida que el ponderador en la regularización aumenta este fenómeno se marca cada vez más.

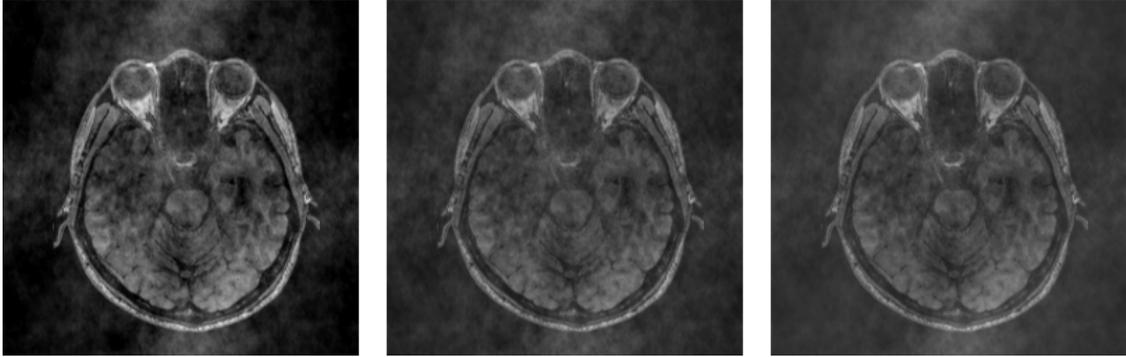


Figura 5.21: Valores de  $\alpha = 0,01, 0,1$  y  $0,2$  para  $F_{Reg}^2$ .

A diferencia de la regularización anterior, aquí sí se puede determinar a través del índice PSNR que la primera de las tres imágenes resultantes es mejor en términos conceptuales que las demás. Los índices de cada una de ellas en detalle son los siguientes

$$PSNR_1 = 29,810 , \quad PSNR_2 = 24,155 , \quad PSNR_3 = 21,729 .$$

Todo lo anterior se ve reflejado una vez más en la siguiente figura.

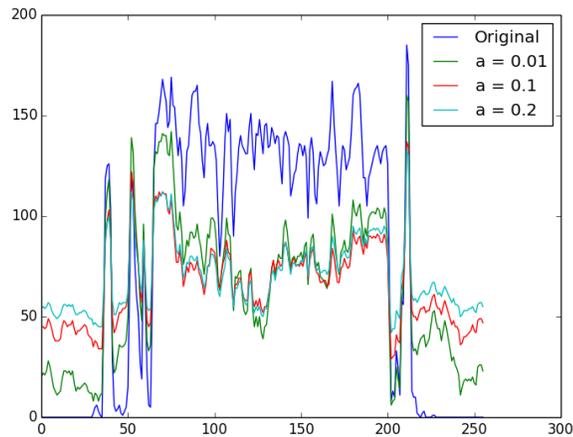


Figura 5.22: Corte Imagen, Fila 175.

### 5.4.3. Regularización $F_{Reg}^3$

Esta regularización es la que presenta cambios más notorios a la hora de modificar el parámetro con el cual se le pondera. Incluso, basta con observar a ojo desnudo el siguiente set de imágenes para verificar al menos intuitivamente esta afirmación.

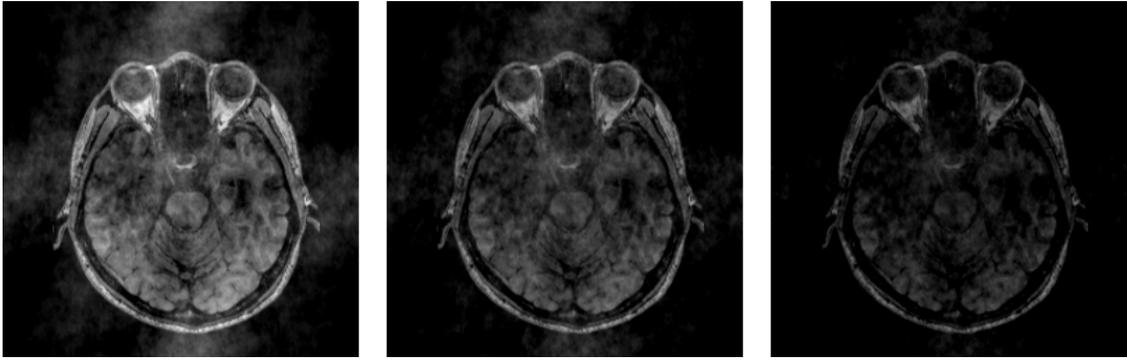


Figura 5.23: Valores de  $\alpha = 0,01, 0,1$  y  $0,2$  para  $F_{Reg}^3$ .

La intuición se confirma al momento de comparar los valores obtenidos del PSNR en cada caso

$$PSNR_1 = 32,579 , \quad PSNR_2 = 26,781 , \quad PSNR_3 = 19,170 .$$

Los resultados son consistentes con lo que hace el término regularizante en este caso; al buscar minimizar la suma total de los valores de intensidad de los pixeles en la imagen, el algoritmo comienza por reducir la aparición de artefactos en la imagen, pero una vez que estos artefactos ya han sido eliminados en su mayoría, comienza a quitarle valor de intensidad a pixeles que contienen información del objeto que se desea reconstruir de la imagen. Esto puede ser particularmente complicado en el caso de imágenes astronómicas, puesto que al restar los valores de intensidad de la imagen total se puede perder información valiosa.

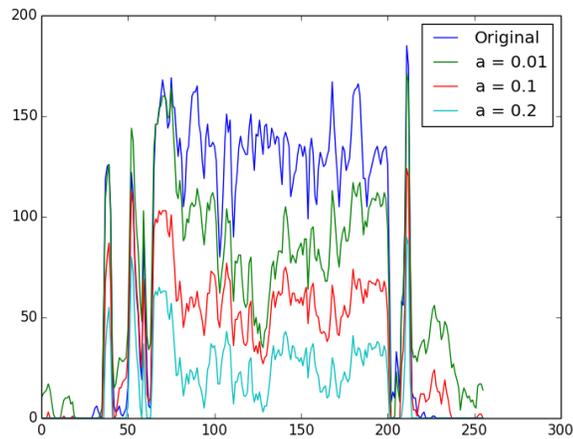


Figura 5.24: Corte Imagen, Fila 175.

Un claro ejemplo donde ocurre esto es en la imagen de las galaxias NGC4038-NGC4039; al aumentar el valor del parámetro de regularización se pierden estructuras presentes al interior de las galaxias (nubes interestelares, por ejemplo).

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

La principal conclusión del presente trabajo es que el algoritmo presentado aquí, el *split algorithm* tiene todas las condiciones mínimas para ser un aporte en el campo del procesamiento de imágenes.

En primera instancia, un aporte inicial consiste en facilitar los cálculos que lleva a cabo el procesador correspondiente a la hora de hacer la reconstrucción como tal. Pese a que en términos de tiempo computacional no es mucho el avance realizado con respecto a las herramientas más sofisticadas de la actualidad, el trabajar este problema como dos subproblemas con variables más naturales resulta en un algoritmo de uso más intuitivo para trabajar.

La posibilidad de modificar el término regularizante y controlar su efecto a partir del parámetro que lo acompaña permite que el programa se adapte a diferentes tipos de imágenes, por lo que dependiendo del uso que se le desee dar y los objetos (de naturaleza astronómica o no) que se deseen reconstruir a partir de su información parcial en el espacio de Fourier. Sumada a lo anterior, se puede considerar también la posibilidad que existe también de regularizar las soluciones en Fourier, lo que permite en virtud del teorema de Paley-Wiener obtener como resultado imágenes que poseen mejores propiedades de regularidad y suavidad.

Es precisamente este último punto el que se puede considerar como uno de los trabajos futuros a realizar. El conocimiento que se tiene al momento de utilizar distintos términos  $F_{Reg}$  en el espacio de Fourier es poco en la actualidad, por lo que tener la opción de estudiar las consecuencias de modificar este término en las diferentes imágenes producidas al aplicar este algoritmo resulta de mucho interés para aportar al estado del arte de esta ciencia. En el presente trabajo se estudia una opción que podría interpretarse como una alternativa inicial, utilizada en muchos problemas del cálculo de variaciones y que no altera en gran medida los resultados; pero la opción de poder utilizar más términos regularizantes y estudiar sus efectos es claramente algo que debe ser desarrollado usando las opciones que permite este programa.

Otro trabajo que queda pendiente y se puede desarrollar en el futuro consiste en aplicar una herramienta diferente al par transformada/antitransformada discretas de Fourier. Estas se utilizan en el presente trabajo por un tema de implementación en primera etapa, pero

una vez que el programa ya se encuentra probado y operativo usando esta herramienta, una siguiente etapa interesante podría ser el usar transformadas truncadas para estudiar los resultados obtenidos. La idea de hacer esto consiste en intentar reducir al mínimo la presencia de artefactos en las imágenes reconstruidas; pues pese a que esto se ha logrado al menos de forma parcial en el presente trabajo (mediante el uso del término regularizante asociado al algoritmo CLEAN en el espacio de imagen, ponderado por un parámetro  $\alpha$  adecuado) siempre resulta importante reducir al máximo toda aquella intervención sobre la imagen que no aparezca de forma natural en el proceso.

Como se comentara en el Capítulo 4, la presencia de estos artefactos se debe precisamente a que las transformadas discretas actúan sobre toda la imagen, pese a que sobre todo al momento de pensar en aplicaciones a la astronomía, los objetos de interés suelen no ocupar toda la imagen. Más aún, los más interesantes suelen ser de naturaleza puntual.

Finalmente, se puede considerar trabajar en el futuro con otros diccionarios y herramientas de interpolación más específicas o con propiedades más convenientes para el uso original que se pensaba para esta herramienta, el procesamiento de imágenes astronómicas. En vez de usar B-Splines se podría considerar el usar *wavelets* o herramientas similares (a valores complejos por supuesto, pensando en las visibilidades de cada imagen). En general todos los diccionarios usados en reconstrucción de imágenes tienen propiedades que permiten implementar cálculos diferenciales y similares de forma eficaz y eficiente en algoritmos numéricos, por lo que los cálculos detallados en el Capítulo 3 del presente trabajo son perfectamente replicables al cambiar las B-Splines por otra familia de funciones adecuada.

# Bibliografía

- [1] S. G. Lypson A. Labeyrie and P. Nisenson. *An Introduction to Optical Stellar Interferometry*. Cambridge, 1st edition, 2006.
- [2] J. M. Moran A. R. Thompson and G. W. Swenson Jr. *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*. Wiley-VCH, Weinheim, 2nd edition, 2001.
- [3] T. J. Cornwell and K. F. Evans. A simple maximum entropy deconvolution algorithm. *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, 143:77–83, 1985.
- [4] Tim J. Cornwell. Multiscale CLEAN deconvolution of radio synthesis images. *IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing*, 2:793–801, 2008.
- [5] B. G. Clark et al. Synthesis imaging in radio astronomy ii. In C. L. Carilli G. B. Taylor and R. A. Perley, editors, *A collection of lectures from the sixth NRAO/NMIMT Synthesis Imaging Summer School*, volume 180 of *ASP Conference Series*, 1999.
- [6] Andreas Glindemann. *Principles of Stellar Interferometry*. Springer-Verlag, 1st edition, 2011.
- [7] S. F. Gull and J. Skilling. Maximum entropy method in image processing. *IEE Proceedings F Communications, Radar and Signal Processing*, 131(6):646–659, 1984.
- [8] J. A. Högbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 15:417–426, 1974.
- [9] Feng Li, Tim J. Cornwell, and Frank De Hoog. The applications of compressive sensing to radio astronomy. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 6221 LNCS:352–359, 2010.
- [10] Klaus Maisinger, M P Hobson, and A N Lasenby. Maximum-entropy image reconstruction using wavelets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 347(February):21, 2003.
- [11] Pierre Maréchal. Introduction to inverse problems of fourier synthesis (lecture notes).
- [12] Pierre Maréchal and Daphné Wallach. Fourier synthesis via partially finite convex programming. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(11-12):2206–2212, 2009.

- [13] K A Marsh and J M Richardson. The objective function implicit in the CLEAN algorithm. *Astronomy and Astrophysics*, 182:174–178, 1987.
- [14] John D. Monnier. Optical Interferometry in Astronomy. 66:86, 2003.
- [15] Andreas Quirrenbach. Optical Interferometry. *Annual Reviews Astronomy and Astrophysics*, pages 353–401, 2001.
- [16] Norbert Wiener Raymond E. A. C. Paley. *Fourier Transforms in the Complex Domain*. American Mathematical Society, 1st edition, 1934.
- [17] R. J. Sault. A modification of the Cornwell and Evans maximum entropy algorithm. *The Astrophysical Journal*, 354:L61, 1990.
- [18] T Sederberg. B-Spline Curves. *Computer Aided Geometric Design*.
- [19] Michael Struwe. *Variational Methods*. Springer-Verlag, 4th edition, 2008.
- [20] E. Thiébaud. Image reconstruction with optical interferometers. *New Astronomy Reviews*, 53:312–328, 2009.
- [21] E. Thiebaut and J.-F. Giovannelli. Image reconstruction in optical interferometry. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 27:97–109, 2010.
- [22] M Unser, a Aldroubi, and M Eden. B-Spline Signal-Processing. Part I - Theory, 1993.