



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

ESTUDIO EXPERIMENTAL DE INESTABILIDADES DE TAYLOR-COUPETTE EN  
SUSPENSIONES NO COLOIDALES A CONCENTRACIONES MEDIAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,  
MENCION RECURSOS Y MEDIO AMBIENTE HÍDRICO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL,  
MENCION HIDRÁULICA-SANITARIA-AMBIENTAL

JORGE ANDRÉS CASANOVA SILVA

PROFESOR GUÍA:  
CHRISTIAN IHLE BASCUÑÁN

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS  
CARLOS CONCA ROSENDE  
CLAUDIO FALCÓN BEAS

SANTIAGO DE CHILE  
2015

RESUMEN DE LA MEMORIA  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL,  
MENCIÓN HIDRÁULICA-SANITARIA-AMBIENTAL,  
Y AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE  
LA INGENIERÍA, MENCIÓN RECURSOS Y MEDIO  
AMBIENTE HÍDRICO  
POR: JORGE CASANOVA SILVA  
FECHA: MAYO 2015  
PROFESOR GUÍA: CHRISTIAN IHLE BASCUÑÁN

## **ESTUDIO EXPERIMENTAL DE INESTABILIDADES DE TAYLOR-COUPETTE EN SUSPENSIONES NO COLOIDALES A CONCENTRACIONES MEDIAS**

Los ensayos realizados en un reómetro rotacional tienen como límite superior de medición la velocidad angular crítica para asegurar un flujo axisimétrico. Para velocidades mayores a ésta, el flujo deja de ser concéntrico y comienza la transición hacia un flujo helicoidal. Este fenómeno fue estudiado para fluidos newtonianos en 1923 por Geoffrey I. Taylor, quien pudo determinar analíticamente la velocidad crítica de estabilidad para el flujo rotacional. Los supuestos realizados en este estudio no permiten extender sus resultados a fluidos no newtonianos, en partículas fluidos con partículas. Las mezclas con partículas tienen ciertas características que los diferencian de los fluidos newtonianos homogéneos; como interacciones entre las fases sólidas y líquidas, migración de partículas, sus efectos sobre los perfiles de velocidad y viscosidad.

En el presente trabajo, se estudió el comienzo de inestabilidades de Taylor-Couette para una mezcla no coloidal, con concentración hasta 50 % y relaciones de radio interior y exterior  $r_i/r_e$  entre 0.71 y 0.88. Se desarrolló una instalación experimental de Taylor-Couette, con rotación del cilindro interior, capaz de controlar la velocidad de giro y medir el torque en el cilindro interior, identificando de esta manera la velocidad crítica de transición. Este estudio es complementado con un análisis de estabilidad lineal que considera las particularidades de este tipo de mezclas. Finalmente, se compararon los resultados de ambas etapas del estudio con el caso base de un fluido newtoniano homogéneo, determinando así el efecto de las partículas sobre la estabilidad de flujo.

*Para mi papá Jorge y mi mamá Sara, gracias por todo el apoyo, paciencia y enseñanzas.*

*A mis hermanas Catalina y Liza, por ser el gran ejemplo y preocuparse siempre.*

*Para Claudia, ayudarme en todo, se incondicional y ser mi amor.*

*A los profesores Christian Ihle y Aldo Tamburrino por la paciencia y confianza.*

*También a la buena gente que conocí: Fepo, Feña, Jano, Oss, Pauli, Fran, Balbo, Jaqueline, Tito, Viki, Pollo, Jaime, Tomas, Chalo, Bolis, José, Sergio, Hugo, Pelao, Lara, Andrade, Francisco y muchos mas. Agradecimiento especial a Guz, por su ayuda importantísima en momentos críticos.*

# Tabla de contenido

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Objetivo General . . . . .	2
Objetivos específicos . . . . .	2
Organización de la tesis . . . . .	3
<b>1. Revisión bibliográfica</b>	<b>4</b>
1.1. Flujos en una geometría de Taylor-Couette . . . . .	4
1.1.1. Fluido newtoniano . . . . .	5
1.1.2. Mezclas sólido-líquidas no coloidales . . . . .	6
1.2. Inestabilidades de Taylor-Couette . . . . .	8
1.2.1. Criterio de Rayleigh para flujos de Taylor-Couette . . . . .	8
1.2.2. Criterio de estabilidad lineal . . . . .	9
1.2.3. Método de energía . . . . .	10
1.2.4. Criterio de gradiente de energía . . . . .	11
<b>2. Diseño experimental y metodología</b>	<b>12</b>
2.1. Diseño experimental . . . . .	12
2.2. Calibración experimental . . . . .	14
2.3. Preparación de muestras . . . . .	15
2.4. Metodología del ensayo reológico . . . . .	17
2.5. Procesamiento de datos . . . . .	19
<b>3. Análisis de estabilidad lineal</b>	<b>20</b>
3.1. Formulación del problema . . . . .	20
3.2. Esquema Numérico . . . . .	22
<b>4. Análisis y presentación de resultados</b>	<b>28</b>
4.1. Resultados experimentales . . . . .	28
4.1.1. Viscosidad de la mezcla . . . . .	28
4.1.2. Número de Reynolds crítico . . . . .	28
4.2. Resultados del modelo de estabilidad lineal . . . . .	31
4.2.1. Número de Reynolds crítico . . . . .	31
4.2.2. Número de onda y velocidad de perturbación críticos . . . . .	31
<b>5. Discusión y Conclusiones</b>	<b>33</b>
5.1. Discusión . . . . .	33
5.1.1. Estudio experimental . . . . .	33

5.1.2. Modelo de estabilidad lineal . . . . .	34
5.1.3. Comparación de resultados . . . . .	35
5.2. Conclusiones . . . . .	35
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>Anexos</b>	<b>41</b>
<b>A. Resultados</b>	<b>42</b>
<b>B. Desarrollo algebraico de análisis de estabilidad lineal</b>	<b>53</b>
<b>C. Publicación</b>	<b>60</b>
<b>D. XX Congreso latinoamericano de hidráulica</b>	<b>71</b>

# Índice de tablas

1.1. Concentraciones de empaquetamiento de esferas de distintos autores . . . . .	7
2.1. Radios y razones de radio de las geometrías . . . . .	14
2.2. Coeficientes de calibración para cada geometría . . . . .	15
2.3. Parámetros de la resina aniónica . . . . .	17

# Índice de figuras

1.1. Comparación de modelos de viscosidad . . . . .	7
1.2. Números de Reynolds críticos según modelo de estabilidad lineal y criterio de Rayleigh . . . . .	10
2.1. Dimensiones de los cilindros interior y exterior . . . . .	13
2.2. Esquema de instalación experimental . . . . .	14
2.3. Instalación experimental . . . . .	15
2.4. Calibración de experimentos . . . . .	16
2.5. Ejemplo de ensayo reológico . . . . .	18
2.6. Número de Reynolds crítico en función de la relación de radios $r_i/r_e$ . . . . .	19
3.1. Variación marginal del número de Reynolds en función del largo de la grilla $L$ del modelo numérico . . . . .	24
3.2. Esquema de la metodología para obtener el valor del número de Reynolds crítico en un problema de valores propios. . . . .	26
3.3. Comparación de metodologías para encontrar el número de Reynolds crítico . . . . .	27
4.1. Resultados de las mediciones de viscosidad . . . . .	29
4.2. Resultados experimentales de todos los experimentos . . . . .	30
4.3. Resultados del modelo de estabilidad lineal . . . . .	32
A.1. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 1 de radio interno $r_i = 5,35cm$ y radio externo $r_e = 6,41cm$ . . . . .	43
A.2. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 2 de radio interno $r_i = 5,35cm$ y radio externo $r_e = 6,86cm$ . . . . .	44
A.3. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 3 de radio interno $r_i = 5,35cm$ y radio externo $r_e = 7,53cm$ . . . . .	45
A.4. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 4 de radio interno $r_i = 5,95cm$ y radio externo $r_e = 6,86cm$ . . . . .	46
A.5. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 5 de radio interno $r_i = 5,95cm$ y radio externo $r_e = 7,53cm$ . . . . .	47
A.6. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 6 de radio interno $r_i = 6,45cm$ y radio externo $r_e = 7,53cm$ . . . . .	48
A.7. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 7 de radio interno $r_i = 6,45cm$ y radio externo $r_e = 8,5cm$ . . . . .	49
A.8. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 8 de radio interno $r_i = 6,65cm$ y radio externo $r_e = 7,53cm$ . . . . .	50

A.9. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 9 de radio interno $r_i = 6,65cm$ y radio externo $r_e = 8,5cm$ . . . . .	51
A.10. Resultados de velocidad angular $\Omega$ versus torque del sistema $M$ para la geometría 10 de radio interno $r_i = 7,4cm$ y radio externo $r_e = 8,5cm$ . . . . .	52



# Introducción

La geometría de Taylor-Couette debe su nombre a dos investigadores, pioneros en sus áreas, que trabajaron en este tipo de geometrías; Maurice Couette, en 1890, presentó una geometría de un cilindro exterior en rotación y una fibra de torsión fija en el centro, lo que se convirtió en uno de los primeros viscosímetros rotacionales. Posteriormente, en 1923, Taylor realizó el primer estudio de inestabilidades en una geometría de cilindros concéntricos, donde el cilindro interior se encuentra en rotación (Taylor, 1923). Sin embargo, el movimiento de un fluido en este tipo de geometrías fue estudiado hace muchos años antes.

Por otro lado, Sir Isaac Newton, en su libro "*Mathematical Principles*", utilizó este tipo de geometría para describir el movimiento del fluido que, posteriormente, dio la pauta para definir lo que ahora conocemos como esfuerzo de corte (Donnelly, 1991).

El problema clásico de la aparición de la primera inestabilidad de Taylor-Couette se refiere al cambio de régimen del flujo desde uno concéntrico a uno helicoidal, en una geometría de cilindros concéntricos, donde al menos uno se encuentra en rotación. Este fenómeno ha sido abordado desde el punto de vista experimental, numérico y teórico, logrando describir exitosamente la condición crítica de estabilidad del flujo base en fluidos newtonianos (Taylor, 1923). Se han planteado distintos enfoques para analizar la estabilidad de flujo, dentro de las cuales destaca el análisis de estabilidad lineal (Chandrasekhar, 1962), método de energía (Serrin, 1959; Joseph, 1976; Di Prima and Swinney, 1985) y método del gradiente de energía (Dou, 2006a). El análisis de estabilidad lineal es una formulación matemática que busca la condición crítica tal que perturbaciones infinitesimales tienen un crecimiento exponencial. Este análisis ha sido aplicada en este geometrías de Couette, describiendo el comportamiento de fluidos tanto newtonianos como no newtonianos (Taylor, 1923; Landry et al., 2006; Caton, 2006; Ali et al., 2002). El método de energía en cambio, establece una condición suficiente para que el flujo base de un fluido incompresible sea estable para una perturbación arbitraria (Serrin, 1959). Finalmente el método semiempírico del gradiente de energía establece que la condición crítica de transición se define a partir de la energía necesaria para desplazar una parcela de fluido en una dirección distinta al movimiento del flujo base (Dou, 2006b). En este mismo sentido, los estudios experimentales han establecido que las variables críticas del sistema están asociadas tanto a las características geométricas de la instalación, como a las propiedades del fluido (Coles, 1965) .

Las celdas de Couette son utilizadas comúnmente en reómetros rotacionales, los que buscan obtener parámetros reológicos de fluidos o mezclas con propiedades distintas a las Newtonianas a través de la construcción de curvas esfuerzo-deformación que pueden ser relacionadas fácilmente con lecturas de velocidad angular y torque (Barnes et al., 1989).

Tanto en la naturaleza como en procesos industriales existen innumerables ejemplos de fluidos donde la mezcla de líquidos con materiales sólidos configuran fluidos equivalentes cuyas características reológicas difieren de las del líquido puro (Gadala-Maria and Acrivos, 1980). En el caso de nuestro país, estas mezclas tienen un particular interés para el manejo de fluidos mineros como relaves y concentrados de mineral (Minería-Chilena, 2009), y el estudio de fenómenos naturales recurrentes como aluviones.

Las mezclas no coloidales de partículas en concentraciones medias y altas, en una geometría de Taylor-Couette, se diferencian de los fluidos newtonianos por el potencial de presentar fenómenos difusivos de partículas, generando perfiles de concentración y perfiles de velocidad distintos a los equivalentes en un fluido homogéneo (Gadala-Maria and Acrivos, 1980).

La presente investigación aborda el estudio experimental de la primera transición inestabilidades de Taylor-Couette, en mezclas de partículas sólidas con concentraciones de partículas en volumen entre 10 % y 50 %. Además, se presenta un análisis de estabilidad lineal, el cual complementa el trabajo experimental, donde se busca establecer el rol que juegan las partículas, en la transición de flujo de la mezcla. El desafío de este trabajo es establecer un criterio de estabilidad del flujo concéntrico que permita determinar la velocidad máxima de giro, para una mezcla y geometría dados, en ensayos reológicos de cilindros concéntricos, para mezclas no coloidales.

Los principales resultados de este trabajo son reportados en un artículo científico y en XX congresos científicos. Este material complementario se presenta en el Anexo C y D.

## **Objetivo general**

El objetivo principal de este estudio es analizar el fenómeno del comienzo de la primera inestabilidades de Taylor-Couette en una suspensión compuesta por un fluido newtoniano y esferas neutralmente boyantes con concentración en volumen entre 10 % y 50 %.

## **Objetivos específicos**

Los objetivos específicos del estudio son:

- Estudiar los distintos modelos teóricos que abordan el problema de las inestabilidades de Taylor-Couette y observar su respuesta, alcance y aplicación cuando son acoplados a un modelo de migración de partículas.
- Identificar los mecanismos físicos que dominan en la primera transición de flujo en inestabilidades de Taylor-Couette, describiendo principalmente cuál es el rol de las partículas en dicho proceso.
- Diseñar, construir, poner en marcha y operar una instalación experimental empleando un reómetro rotacional, que permita observar y medir distintas variables relacionadas con la estabilidad de un flujo de Taylor-Couette.
- Establecer las diferencias que existen en la estabilidad de un flujo con y sin partículas.

# Organización de la tesis

El presente informe se estructura en 5 capítulos:

- **Introducción:** En este capítulo se presenta el contexto en el cual se desarrolló el trabajo de tesis, además de las motivaciones, objetivos enfoques del trabajo.
- **Revisión Bibliográfica:** Esta revisión abarca una descripción del movimiento de los fluidos en una geometría de Taylor-Couette, las definiciones de fenómenos y teorías importantes mezclas de fluidos newtonianos con partículas sólidas y revisión sobre teorías de estabilidad de flujo.
- **Diseño Experimental y Metodología** Se describen los criterios utilizados para el diseño y construcción del experimento, además de las consideraciones en la realización de cada experiencia.
- **Análisis de Estabilidad Lineal:** Se plantea un modelo de estabilidad lineal y el desarrollo de este, considerando las particularidades de las mezclas no coloidales.
- **Presentación de Resultados:** En este capítulo se presentan los resultados experimentales, del modelo de estabilidad lineal y la comparación entre ambos.
- **Discusión y Conclusiones:** Este capítulo se discuten los principales resultados y se presentan las conclusiones del trabajo experimental y numérico.

# Capítulo 1

## Revisión bibliográfica

En este capítulo se describe la base teórica en la que se sustenta este estudio, describiendo el estado del arte actual de los flujos de Taylor-Couette, fluidos de mezclas coloidales y análisis de estabilidad.

### 1.1. Flujos en una geometría de Taylor-Couette

Para describir el movimiento de un fluido en una geometría de cilindros concéntricos, se utilizan las ecuaciones de momentum y continuidad de un fluido incompresible:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

Donde  $\mathbf{u}$ ,  $p$  y  $\boldsymbol{\tau}$  son el vector de velocidad, la presión y el tensor de esfuerzo de corte, respectivamente.

Considerando un sistema de coordenadas cilíndricas, en un flujo laminar y concéntrico, con líneas de corriente de círculos concéntricos, se pueden escribir condiciones propias de la geometría como  $u_r = u_z = 0$  y  $\partial u_\theta / \partial \theta = \partial u_\theta / \partial z = 0$ . Con estas condiciones, las ecuaciones de momentum se resumen a:

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) \quad (1.3)$$

Esta expresión es comúnmente usada para describir el movimiento en este tipo de geometrías para condiciones bajo la velocidad crítica de transición hacia un flujo helicoidal. La definición del esfuerzo de corte  $\tau_{r\theta}$  dependerá del tipo de fluido o modelo reológico que se desee evaluar.

### 1.1.1. Fluido newtoniano

Para un fluido newtoniano, la solución de 1.3 para la velocidad angular,  $\Omega(r) = u_\theta/r$ , tiene la forma:

$$\Omega(r) = A + \frac{B}{r^2} \quad (1.4)$$

Definiendo  $r_i, r_e, \Omega_i, \Omega_e$  como los radios y las velocidades angulares del cilindro interior y exterior respectivamente, los coeficientes  $A$  y  $B$  que verifican dichas condiciones de borde son:

$$\zeta = \frac{\Omega_e}{\Omega_i}, \quad \varsigma = \frac{r_i}{r_e}, \quad A = \Omega_i \frac{1-\zeta/\varsigma^2}{1-1/\varsigma^2}, \quad B = \Omega_i r_i^2 \frac{1-\zeta}{1-\varsigma^2} \quad (1.5)$$

Para efectos del presente estudio, se considera solo el cilindro interior en rotación, y el cilindro exterior fijo, por lo que el perfil de velocidad para velocidades menores a la velocidad crítica se reduce a la siguiente expresión:

$$\Omega(r) = \Omega_i \left( \frac{-r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2) r^2} \right) \quad (1.6)$$

La viscosidad aparente del fluido ( $\eta$ ), en un reómetro rotacional de cilindros concéntricos, se define como la razón entre el esfuerzo de corte ( $\tau$ ) y la tasa de deformación ( $\dot{\gamma}$ ):

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.7)$$

La tasa de deformación,  $\dot{\gamma} = du/dr$  en este caso, se expresa en términos de la solución 1.6 como:

$$\dot{\gamma}(r) = 2\Omega_i \frac{r_i^2 r_e^2}{(r_e^2 - r_i^2) r^2} \quad (1.8)$$

La tasa de deformación depende de la forma de la función  $u(r)$ , que a su vez es función de la reología del fluido. Si el fluido es no newtoniano, la tasa de deformación es función de los parámetros reológicos del fluido, sin embargo, cuando la razón entre los radios de los cilindros es cercana a uno ( $r_e/r_i < 1.2$  según norma ISO 3219-1993), la tasa de deformación puede ser aproximada a la expresión 1.8.

Por otro lado, el esfuerzo de corte en un reómetro rotacional es calculado a partir del torque ( $M$ ) ejercido para rotar el cilindro interior y su distribución de esfuerzos en la superficie del cilindro interior de largo  $L$ .

$$\tau = \frac{M}{2\pi L r_i^2 c_l} \quad (1.9)$$

Donde  $c_l$  es un coeficiente experimental, que corrige el no considerar los esfuerzos en las caras inferior y superior.

### 1.1.2. Mezclas sólido-líquidas no coloidales

Una suspensión no coloidal de partículas sólidas en un medio líquido se caracteriza por despreciar los movimientos brownianos y fuerzas electrostáticas frente a las fuerzas originadas por la interacción hidrodinámica de las fases.

Distintos fenómenos caracterizan las mezclas no coloidales de los fluidos homogéneos, si bien en muchos aspectos pueden ser considerados como un fluido homogéneo, existen muchos esfuerzos por describir la respuesta de estas mezclas frente a flujos de corte. Para poder caracterizar la mezcla como un fluido viscoso equivalente, se define la viscosidad relativa de la mezcla ( $\eta_r$ ) como la razón entre la viscosidad aparente de la mezcla ( $\mu$ ) y la viscosidad del fluido que lo contiene ( $\mu_l$ ).

Para concentraciones hasta 5 %, Einstein (1956) propuso una expresión empírica lineal para la viscosidad relativa:

$$\eta_r = 1 + \frac{5}{2}\phi \quad (1.10)$$

Esta expresión es posteriormente corregida por Batchelor and Green (1972) para extender su validez hasta concentraciones de 10 %, proponiendo una expresión cuadrática basada en Einstein (1956):

$$\eta_r = 1 + \frac{5}{2}\phi + 6.95\phi^2 \quad (1.11)$$

Para concentraciones medias y altas, el modelo que es más utilizado es el formulado por Krieger and Dougherty (1959), quien propuso empírica con una relación potencial:

$$\eta = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b} \quad (1.12)$$

El exponente  $b$  y la concentración de empaquetamiento  $\phi_m$ , son parámetros experimentales que dependen principalmente de las características de las partículas. La concentración de empaquetamiento es un parámetro que puede ser medido, sin embargo los datos experimentales presentan mejores resultados cuando este valor es ajustado. La tabla 1.1 muestra distintos valores de concentración de empaquetamiento para esferas. Ovarlez et al. (2006) propone en su estudio experimental que el mejor ajuste para esferas no coloidales y para un amplio rango de concentraciones es  $b = 2$  y  $\phi_m = 60.5\%$ . Estos parámetros fueron calibrados con concentraciones de partículas por sobre 40 %, sin embargo, describen satisfactoriamente el comportamiento para concentraciones bajas como se observa en la Figura 1.1

Los modelos recién mencionados, permiten deducir una viscosidad aparente de la mezcla a partir de la concentración volumétrica de partículas. Sin embargo, en este tipo de flujos, la mezcla no puede ser caracterizada con una sola viscosidad, dado que en un estado estacionario existe una

Tipo	$\phi_m$	Autor
Esferas (submicrones)	71 %	de Kruif et al (1985)
Esferas (40pm)	61 %	Giesekus (1983)
Ajuste de modelo de viscosidad	68 %	(Phillips et al., 1992)
Ajuste de modelo de viscosidad	60.3 %	(Ovarlez et al., 2006)

Tabla 1.1: Concentraciones de empaquetamiento de esferas de distintos autores

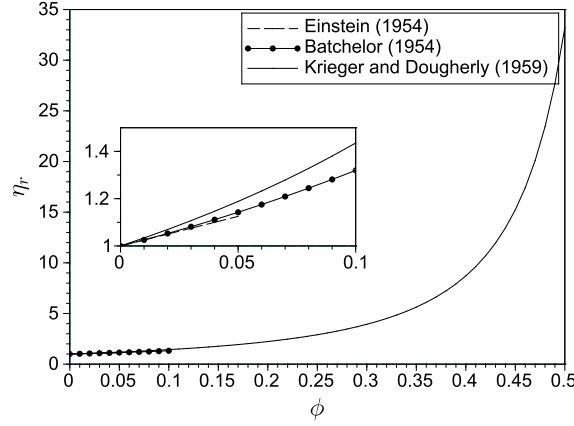


Figura 1.1: Comparación de modelos de viscosidad de Einstein (1956), Batchelor and Green (1972) y Krieger and Dougherty (1959).

concentración heterogénea de partículas. Este fenómeno fue inicialmente reportado por Gadala-Maria and Acrivos (1980), quien observó que en flujos laminares de tasa de deformación variable, la concentración de partículas tiende a ser mayor en zonas de baja tasa de deformación. Por otro lado, Leighton and Acrivos (1987) propusieron un modelo de difusión de partículas, donde la difusión depende de los gradientes de concentración de partículas y gradientes de tasa de deformación.

$$\bar{D} = \frac{1}{3}\phi^2 \left( 1 + \frac{1}{2}e^{8.8\phi} \right) \quad (1.13)$$

donde  $\bar{D}$  corresponde al coeficiente de difusión de partículas.

Posteriormente Phillips et al. (1992) modificaron este trabajo y ajustaron sus resultados con parámetros experimentales, estableciendo una de las ecuaciones constitutivas de conservación de partículas más usadas para describir el flujo de partículas en un flujo de Taylor-Couette:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \nabla \cdot (N_\mu + N_c) \quad (1.14)$$

Donde  $N_\mu$  son los flujos de partículas producto de los cambios espaciales de la viscosidad y  $N_c$  son los flujos producto de las colisiones entre partículas.

$$N_c = -\alpha^2 \phi k_c \nabla(\dot{\gamma} \phi) \quad (1.15)$$

$$N_\mu = -\alpha^2 \phi^2 \dot{\gamma} k_\mu \nabla(\ln \mu) \quad (1.16)$$

En una geometría de Taylor-Couette, para un estado estacionario y flujo no inercial, estas ecuaciones quedan reducidas a:

$$\frac{\phi}{\phi_i} = \left(\frac{r}{r_i}\right)^2 \left(\frac{1 - \phi_i/\phi_m}{1 - \phi/\phi_m}\right)^{b(1-k_\mu/k_c)} \quad (1.17)$$

Donde  $\phi_i$  es la concentración de partículas en la pared del cilindro interior. La razón entre las constantes de difusión  $k_\mu/k_c$  son parámetros ajustables, que fueron calibradas por Phillips et al. (1992) en 0.66 para concentraciones cercanas a 45 %. Tetlow et al. (1998) optimizó esta razón, con sus resultados experimentales, ampliando el rango de concentración media de partículas estudiado por Phillips et al. (1992) a  $\bar{\phi} = 10 - 50 \%$ .

$$(k_c/k_\mu)_{opt} = 1.042\bar{\phi} + 0.1142 \quad (1.18)$$

Estas expresiones, en conjunto con la ecuación 1.17, permiten describir el flujo de una mezcla de partículas no coloidales y un fluido newtoniano, en una geometría de Taylor-Couette en condiciones bajo la transición a un flujo helicoidal.

## 1.2. Inestabilidades de Taylor-Couette

El fenómeno del comienzo de la primera inestabilidad de Taylor-Couette, consiste en la transición de un flujo laminar concéntrico a uno helicoidal. Este cambio de régimen es dependiente de la geometría, la reología y la velocidad angular de los cilindros.

A continuación se presentan las metodologías teóricas, que buscan describir el fenómeno del comienzo de inestabilidades de Taylor-Couette.

### 1.2.1. Criterio de Rayleigh para flujos de Taylor-Couette

El criterio de Rayleigh para un flujo de Taylor-Couette (Rayleigh, 1917), es un criterio de estabilidad para un fluido invíscido. La principal hipótesis de este criterio, es que la transición a un nuevo régimen de flujo, comienza cuando se alcanza una energía suficiente para trasladar una parcela de fluido de mayor velocidad angular hacia una zona de menor velocidad angular. El desarrollo de esta hipótesis, se resume en el criterio invíscido de estabilidad para flujos de Taylor-Couette: *en ausencia de viscosidad, la condición necesaria y suficiente para una distribución de velocidad angular  $\Omega(r)$  sea estable es  $\frac{d}{dr}(\Omega r^2)^2 > 0$  en todo el intervalo, y será inestable si  $(\Omega r^2)^2$  es decreciente en cualquier parte del intervalo.*

Integrando, el criterio de Rayleigh establece que para un flujo estable, la condición sobre las velocidades en ambos cilindros es:

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2 \quad (1.19)$$

Lo que finalmente quiere decir que el cilindro exterior debe girar con una velocidad angular  $(r_i/r_e)^2$  veces mayor que el cilindro interior.



Para flujos viscosos, el criterio de Rayleigh se convierte en una condición necesaria para el comienzo de inestabilidades, pero no es una condición suficiente. Al comparar esta condición con resultados experimentales, este adquiere mayor validez solo en el caso que  $0 \ll \Omega_1, \Omega_2$  como se observa en la Figura 1.2. Para el caso en estudio, con  $\Omega_2 = 0$ , se establece que siempre existe la condición necesaria para el comienzo de inestabilidades.

## 1.2.2. Criterio de estabilidad lineal

El análisis de estabilidad lineal se basa en el cálculo del rango de validez de las ecuaciones de estado de fenómenos hidrodinámicos. En el caso de un flujo de Taylor-Couette, este análisis ha podido establecer el límite de estabilidad de un flujo concéntrico en fluidos newtonianos (Taylor (1923), Chandrasekhar (1962)), Plásticos de Bingham (Landry et al., 2006), fluidos de Ley de Potencia (Caton, 2006) y mezclas con partículas a concentraciones bajo el límite disuelto (Ali et al. (2002)). La metodología para el desarrollo de un análisis de estabilidad lineal consiste básicamente en:

- Resolver las ecuaciones del sistema para obtener el estado base.
- Perturbar todas las variables que participan en las ecuaciones de estado que dominan el movimiento del flujo. Las perturbaciones se componen de una evolución temporal exponencial, una variación periódica en la vertical. De esta manera, una variable se define como  $X = \bar{X} + X' e^{\sigma t + kiz}$ , donde  $\bar{X}$  corresponde a la variable en el estado base,  $X'$  corresponde a la amplitud de la variable perturbada (función del espacio solamete),  $\sigma$  corresponde a la tasa de crecimiento de las perturbaciones y  $k$  corresponde al número de onda.
- Despreciar los términos de segundo orden en el sistema de ecuaciones.
- Identificar, en del sistema de ecuaciones perturbadas a los términos que corresponden al estado base.
- Adimensionalizar las ecuaciones e identificar el o los números adimensionales relevantes el sistema. En el desarrollo de esta metodología para geometrías de Taylor-Couette, el número adimensional que se obtiene naturalmente corresponde a un número de Reynolds ( $Re$ ), definido de manera particular para las condiciones de cada fluido.
- Reordenar el sistema de ecuaciones de forma de obtener un problema de valores propios ( $AX' = \hat{\lambda}BX'$ ), donde  $X'$  corresponde a las variables perturbadas del sistema y  $\hat{\lambda}$  corresponde a la tasa de crecimiento temporal de las perturbaciones adimensionalizada.
- El criterio crítico de estabilidad se define como la solución de los números adimensionales y de números de onda, tal que el valor propio del problema sea igual a cero. Esto significa que la tasa de crecimiento de perturbaciones ( $\hat{\lambda}$ ), que acompaña a la variable temporal, establece una condición crítica entre el decaimiento y el crecimiento exponencial de las perturbaciones de las variables del sistema.

El problema de valores propios en pocos casos tiene una solución analítica, por lo que generalmente se acude a métodos numéricos para su resolución. La metodología de resolución consiste en resolver el problema de valores propios para un conjunto de valores de números adimensionales ( $Re$ ) y números de onda fijos ( $K$ ). La solución crítica de estabilidad se define como el número adimensional crítico ( $Re_c$ ) tal que el máximo de la parte real del valor propio para todo número de onda, sea igual a cero. Este criterio presenta una cota superior para el comienzo de inestabilidades,

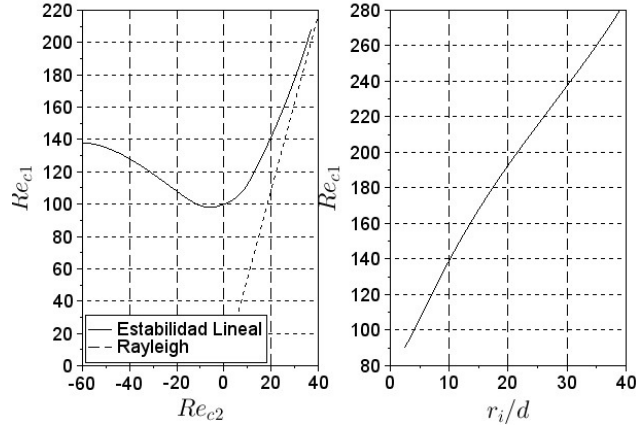


Figura 1.2: Números de Reynolds críticos según modelo de estabilidad lineal y criterio de Rayleigh. La figura de la izquierda corresponde a la solución ejemplo para la razón de radio interno y espaciamento  $r_i/d = 4$ , donde  $Re_{c1}$  y  $Re_{c2}$  corresponden a los números de Reynolds de los cilindros interior y exterior respectivamente. La figura de la derecha corresponde a la solución en el caso particular cuando el cilindro exterior está detenido  $Re_{c2} = 0$ , en función de la razón entre el radio interno y el espaciamento, mediante el análisis de estabilidad lineal Taylor (1923).

puesto que establece que cualquier perturbación, por más pequeña que sea, el flujo base ofrece las condiciones necesarias para su crecimiento exponencial.

Las soluciones para un fluido newtoniano, los casos de dos cilindros rotando, se observan en la Figura 1.2. En el caso del cilindro interior en rotación y el exterior detenido, el número de Reynolds crítico es una función creciente de la razón entre el radio interno y el espaciamento entre ambos cilindros, como se observa en la Figura 1.2.

### 1.2.3. Método de energía

El método de energía, a diferencia del análisis de estabilidad lineal, asegura la estabilidad de un flujo base para una perturbación arbitraria. En otras palabras analiza las condiciones para que la energía de las perturbaciones decrecen en todo el espacio. Este método se basa en la perturbación infinitesimal de las variables que gobiernan el sistema y el análisis de la variable de energía cinética  $K$  definida como:

$$K = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2 \quad (1.20)$$

donde  $\mathbf{u}$  corresponde a la diferencia entre la perturbación de velocidad y la velocidad del flujo base. El criterio de estabilidad universal (Serrin, 1959) establece que el flujo es estable cuando la energía de las perturbaciones disminuye en función del tiempo.

$$\frac{\partial K}{\partial t} < 0 \quad (1.21)$$

En un flujo en cilindros concéntricos de un fluido newtoniano, el estado base es estable para una

perturbación arbitraria en todo el espacio si se cumple la siguiente inecuación:

$$\frac{|\Omega_2 - \Omega_1|}{\nu} < (r_2^2 - r_1^2) \left( \frac{\pi}{r_1 r_2 \log(r_2/r_1)} \right)^2 \quad (1.22)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios interno y externo respectivamente,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son las velocidades angulares de los cilindros interior y exterior respectivamente y  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. El análisis es una condición mucho mas restrictiva que el análisis de estabilidad lineal por ser un criterio de estabilidad universal.

#### 1.2.4. Criterio de gradiente de energía

El método de gradiente de energía, establece que la estabilidad del flujo está determinada por la interacción de dos mecanismos: gradientes de energía transversales a la dirección del flujo, que tienden a generar inestabilidad, y las pérdidas de energía por disipación viscosa a través de una línea de corriente, que tienden a estabilizar el flujo Dou (2006a). Desde el punto de vista de una partícula de fluido, este ganará energía con la perturbación ( $\Delta E$ ) y perderá energía por disipación viscosa ( $\Delta H$ ), esta relación se puede escribir para medio período como Dou (2006b):

$$F = \frac{\Delta E}{\Delta H} = \frac{\left( \frac{\partial E}{\partial n} \frac{\bar{A}}{\pi/2} \right)}{\left( \frac{\partial H}{\partial s} \frac{\pi}{\omega_d} u \right)} = \frac{2}{\pi^2} K \frac{v'_m}{u} < Cte \quad (1.23)$$

Donde  $F$  es la relación entre ambos gradientes de energía,  $\bar{A}$  es la amplitud de la perturbación,  $\omega_d$  es la frecuencia,  $v'_m = \bar{A}\omega_d$  es la velocidad de la perturbación,  $u$  es la velocidad del flujo,  $K = \frac{\partial E}{\partial n} / \frac{\partial H}{\partial s}$  es la razón entre las variaciones parciales de energía,  $n$  es en la dirección perpendicular del flujo y  $s$  es en dirección de las líneas de corriente. La relación  $(v'_m)/u$  indica la magnitud de la perturbación inicial en el sistema. Así, para una perturbación y geometría dada, la condición crítica de estabilidad se puede escribir como:

$$K = \frac{\partial E}{\partial n} / \frac{\partial H}{\partial s} < K_c \quad (1.24)$$

El valor de  $K$  varía a través de las distintas líneas de corriente, por lo que se debe buscar su valor máximo y compararlo con la condición crítica. Por otro lado, de la ecuación 1.24, se desprende que  $K_c$  es inversamente proporcional al tamaño de la perturbación. El valor de  $K_c$  es un parámetro que debe ser determinado experimentalmente. Se observa que el parámetro, para fluidos newtonianos, representa muy bien el comportamiento observado de los experimentos de flujos de Poiseuille y Couette, con  $K$  oscilando entre los valores 370 y 390. Para flujos de Taylor-Couette, se encuentran valores que dependen principalmente de la razón entre el radio de curvatura y el espaciamiento ( $r_i/d$ ) (Dou et al., 2008).

# Capítulo 2

## Diseño experimental y metodología

A continuación se presenta el diseño de la instalación experimental y el detalle de la metodología utilizada en el estudio experimental del comienzo de inestabilidades de Taylor-Couette.

### 2.1. Diseño experimental

Para el presente estudio, se ha desarrollado una geometría de Taylor-Couette, similar a la desarrollada desde los primeros estudios de vórtices de Taylor y también utilizada como viscosímetro rotacional. Esta instalación experimental ha sido dimensionada para cumplir con los siguientes objetivos:

- Permitir la medición del esfuerzo de corte del fluido
- Permitir un desarrollo de perfil de concentración de partículas relevante
- Alcanzar velocidades mayores a la velocidad crítica de estabilidad, que permitan el desarrollo de vórtices de Taylor-Couette representativos de un flujo con componente helicoidal.
- Permitir el uso de diferentes accesorios de distintas dimensiones, intercambiables de manera sencilla

El cilindro exterior se encuentra fijo mientras que el cilindro interior es impulsado por un reómetro rotacional ‘Anton Paar’, modelo ‘ReolabQC’, el cual tiene un registro de velocidad angular y torque de 0.01 – 1200 1/min y 0.25 – 75 mNm, respectivamente (Figura 2.1). El material de construcción del cilindro interior es poliamida blanca, de densidad 1.14 g/ml. Estos cilindros fueron construidos a partir de un bloque macizo utilizando un torno para asegurar las dimensiones y minimizar la excentricidad. En la parte superior del cilindro se encuentra la cavidad de conexión al accesorio CC39, el que se conecta al motor del reómetro. En la parte inferior de los cilindros se encuentra una cavidad de 10 mm, la cual cumple la función de mantener un colchón de aire. Este colchón permite la disminución de errores en la medición, al acercar las condiciones experimentales a los supuestos realizados en los cálculos, reduciendo la interacción entre los flujos secundarios y la parte inferior del cilindro. Para evitar el deslizamiento de partículas o *wall slip* (Jana et al., 1995), se generaron rugosidades en las superficies los cilindros del orden del tamaño de las partículas.

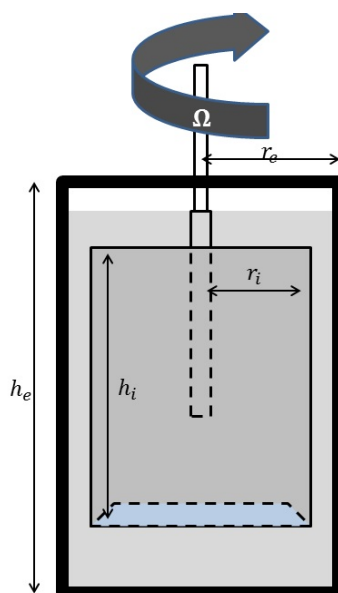


Figura 2.1: Dimensiones de los cilindros interior y exterior

En el caso de la superficie del cilindro interior, este fue revestido con partículas de resina aniónica generando una rugosidad de 0.25 mm. Para el cilindro exterior se utilizó acrílico transparente de 5 mm de espesor, redondeado al calor. Se generó una rugosidad de aproximadamente 0.25 mm con cortes y piquetes aleatorios con taladro.

La altura del cilindro exterior ( $h_e$ ) se determinó con la altura máxima disponible en el reómetro (250 mm). La altura del cilindro interior ( $h_i$ ) se fijó en 150 mm como la máxima altura disponible considerando al menos un radio interior entre el fondo del cilindro interior y exterior.

Los radios del cilindro interior ( $r_i$ ) y el radio interno del cilindro exterior ( $r_e$ ) están detallados en la Tabla 2.1, los que consideran los siguientes criterios de diseño:

- Los cilindros tienen un momento de inercia angular menor a  $0.001 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$ . Este valor se determinó para generar un torque menor a  $T_{\text{cilindro}} < 10^{-3} \text{ Nm}$  a una aceleración angular máxima de  $0.02 \text{ rad/s}^2$ .
- El espaciamiento entre los cilindros es mayor a 10 diámetros de partículas, para producir un perfil de concentración ( $d > 10\alpha$ ), con lo que se previno la generación de atascos entre los cilindros debido a la presencia de partículas.
- El espaciamiento entre los cilindros generó diferencias de concentración entre ambos cilindros mayores a 2 %, según el modelo propuesto por Phillips et al. (1992).
- Las señales de torque en el cilindro interior calculadas para el diseño de los cilindros y la elección de las mezclas entre partículas y fluido están dentro del rango de medición del reómetro, para viscosidades estimadas entre 5 y 60 cP.
- Las velocidades angulares críticas esperadas del cilindro interior, están dentro del rango de rotación del reómetro, considerando viscosidades estimadas entre 5 y 60 cP.

En la zona inferior del cilindro exterior se montó una base plana y nivelada, la cual fija los cilindros alineados con el eje del motor. Esta alineación se logró con ajuste fotográfico, lo que

Exp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_i$ (mm)	53.5	53.5	53.5	59.5	59.5	64.5	64.5	66.5	66.5	74
$r_e$ (mm)	64.1	68.6	75.3	68.6	75.3	75.3	85.	75.3	85.0	85.0
$r_i/r_e$	0.84	0.78	0.71	0.87	0.79	0.86	0.76	0.88	0.78	0.87
$d$ (mm)	10.6	15.1	21.8	9.1	15.8	10.8	20.5	8.8	18.5	11.0

Tabla 2.1: Radios y razones de radio de las geometrías

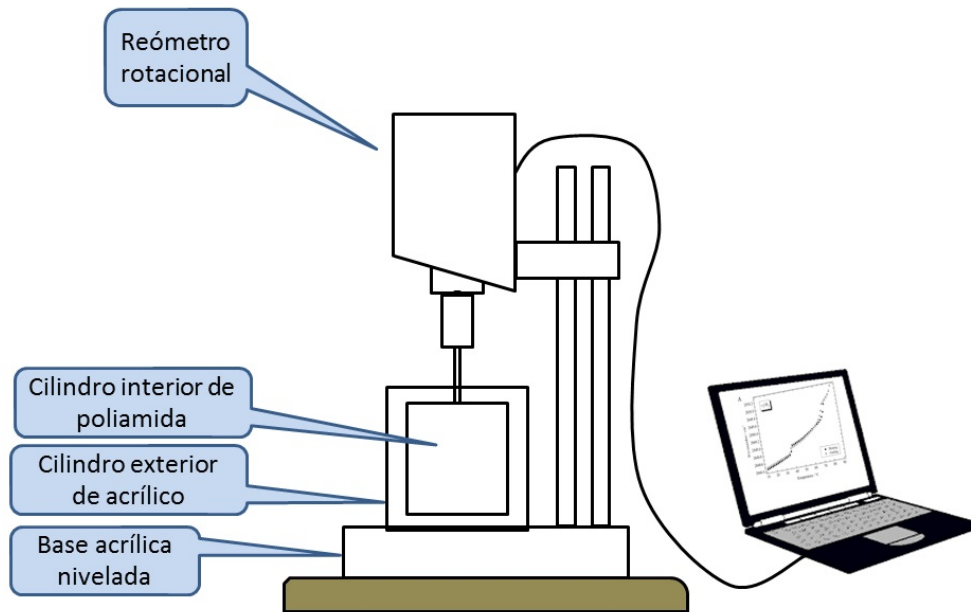


Figura 2.2: Esquema de instalación experimental

aseguró una excentricidad menor a 1 mm. Este valor de excentricidad es mucho menor al necesario para provocar corrientes secundarias o separación de las líneas concéntricas de corriente (Ballal and Rivlin, 1976). La disposición general del experimento se representa en las figura 2.2 y 2.3.

## 2.2. Calibración experimental

La calibración de cada una de las geometrías se realizó mediante la medición de viscosidad de soluciones de glicerina a distintas concentraciones. Estas tienen un comportamiento newtoniano, por lo que es posible suponer un perfil de velocidad donde la tasa de deformación ( $\dot{\gamma}$ ) y la velocidad angular ( $\Omega$ ) se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\dot{\gamma} = \frac{2\pi r_e^2 \Omega}{r_e^2 - r_i^2} \quad (2.1)$$



Figura 2.3: Instalación experimental

Exp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	0.81	0.81	0.85	0.82	0.85	0.85	0.80	0.85	0.85	0.98

Tabla 2.2: Coeficientes de calibración para cada geometría

El esfuerzo de corte ( $\tau$ ) se relaciona con el torque medido en el cilindro interior ( $M$ ) mediante la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{M}{2\pi h_i r_i^2 C} \quad (2.2)$$

Donde  $C$  es un coeficiente experimental a calibrar. Este coeficiente es calibrado ajustando las mediciones de viscosidad de las geometrías construidas con las mediciones de viscosidad obtenidas mediante un ensayo reológico en la geometría ‘CC39’ de los accesorios del reómetro, empleando la norma ISO 3219, válida para geometrías con distancias entre cilindros pequeñas.

### 2.3. Preparación de muestras

Como ya se ha descrito en la revisión bibliográfica, existen muchos estudios sobre mezclas no coloidales, y la mayoría de ellos utilizan partículas esféricas (Stickel and Powell, 2005, e.g.). Estas tienen la ventaja de poder caracterizar fácilmente su factor de forma y su concentración de empaquetamiento, que no depende de la disposición de la depositación. Por estas razones, y para ser consistente con los estudios de migración de partículas que serán utilizados, se han escogido partículas esféricas neutramente boyantes. Se ha seleccionado un tipo de resina aniónica, ya que cumple con las características de esfericidad y uniformidad a un costo razonable, además de tener una densidad que puede ser igualada por una mezcla de glicerina, agua y sal. Las características

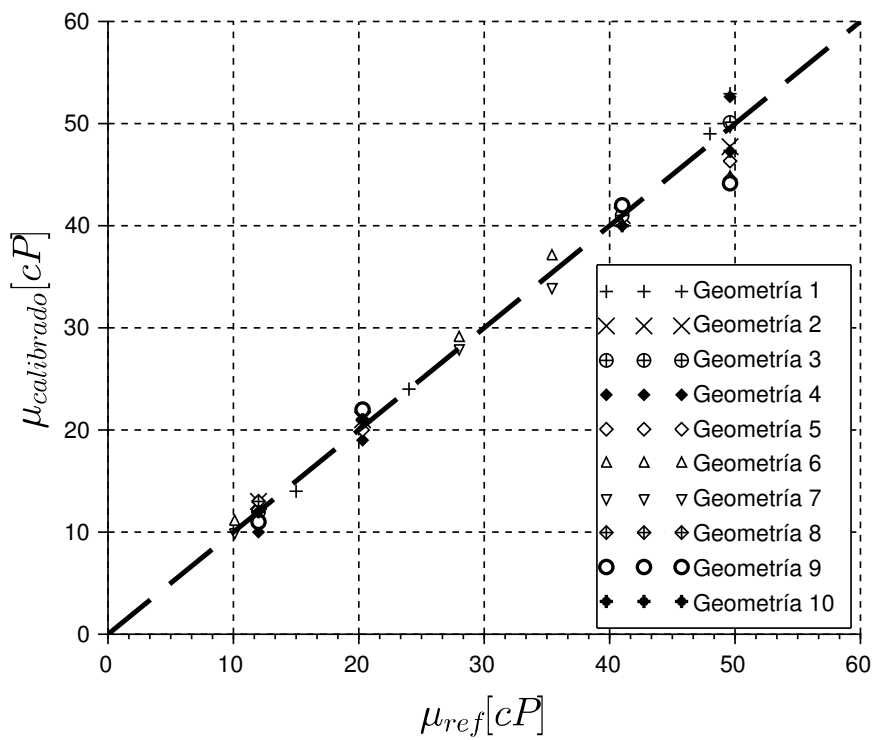


Figura 2.4: Calibración de experimentos. Viscosidades del líquido mediante la medición reométrica versus viscosidad medida en el experimento. Los coeficientes de calibración corresponden a los mostrados en la Tabla 2.2.



Parámetro	Valor
Densidad de las partículas $\rho_s$	1.188 g/cm <sup>3</sup>
Diámetro de las partículas	0.54 mm
Parte granos en el ámbito +/-0.05 mm (%)	>90

Tabla 2.3: Parámetros de la resina aniónica

principales de esta resina se encuentran descritas en la Tabla 2.3.

El fluido utilizado es una mezcla de glicerina bidestilada, agua común y sal. Las viscosidades a utilizar son variables, pero se conserva la densidad total de 1.188 g/cm<sup>3</sup>. Para igualar las densidades del fluido y las partículas, una vez preparadas las mezclas, éstas son sumergidas en el fluido en reposo por una hora verificando que su tasa de sedimentación sea menor a 0.3 mm/min, que corresponde a una alteración de un 1 % de la superficie del cilindro interior en un tiempo de diez minutos.

La concentración nominal de partículas de las mezclas ( $\phi$ ) es determinada midiendo, en un vaso precipitado, el volumen de la mezcla ( $Vol_f$ ) y el volumen de partículas empaquetadas cuando es agregado un fluido de menor densidad ( $Vol_p$ ). La concentración está dada por la siguiente expresión:

$$\phi = \frac{Vol_p}{Vol_f} \phi_m \quad (2.3)$$

La concentración de empaquetamiento usada fue  $\phi_m = 60.5\%$  (Ovarlez et al., 2006).

Las mezclas son depositadas en el cilindro acrílico con el cilindro interior en su posición final. La velocidad de llenado es suficientemente lenta para asegurar la existencia de un colchón de aire en la cavidad inferior del cilindro interior (Chow et al., 1994).

Por último, las mezclas son precargadas en una rampa de aceleración con una velocidad máxima menor a la velocidad crítica, con una duración de 5 minutos.

## 2.4. Metodología del ensayo reológico

Mediante el software ‘Rheoplus’, que controla el reómetro, se programó una serie de rampas de aceleración angular constante, desde el reposo hasta 90 1/min, en tiempos mayores a 5 minutos, minimizando los efectos de inercia de aceleración angular frente a los esfuerzos viscosos caracterizados por el número adimensional  $\Phi_2 = \partial\Omega/\partial t \cdot d^2(\Omega/\nu)$ , que representa la razón entre la aceleración del fluido y la disipación viscosa. En los casos que no se alcanzó la velocidad crítica, se programó la rampa a una velocidad mayor conservando la aceleración del cilindro interior.

Luego de terminado un ensayo, la mezcla es reutilizada para el siguiente ensayo con una configuración de cilindros distintas. Los protocolos de preparación de muestras se repiten desde la agitación de éstas.

Una vez finalizada la serie de mediciones con todas las configuraciones de cilindros, la mezcla es filtrada con el objetivo de obtener la viscosidad del fluido puro mediante un ensayo reológico

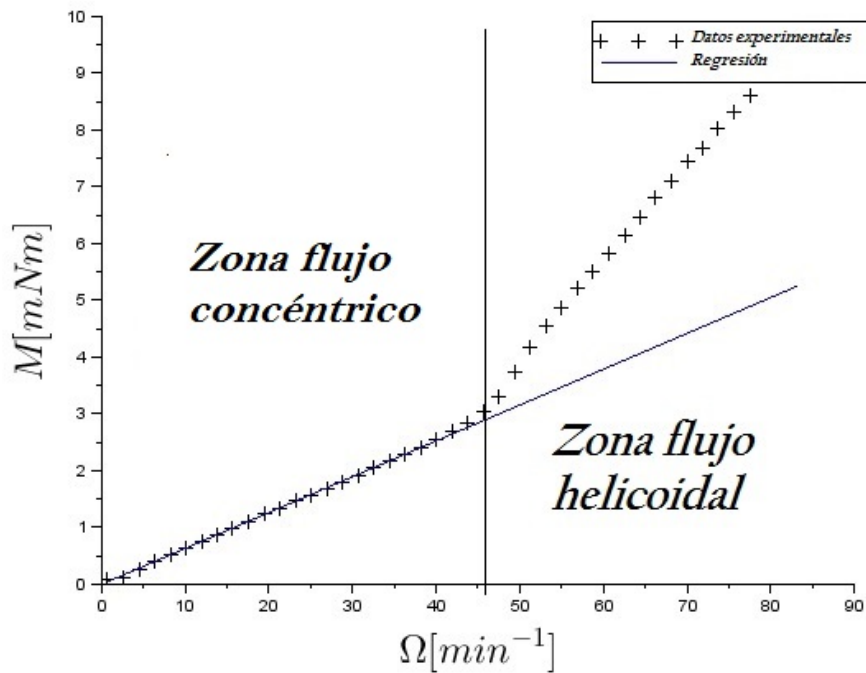


Figura 2.5: Ejemplo de ensayo reológico. La primera zona corresponde a un flujo concéntrico, la segunda zona corresponde a un flujo helicoidal. La velocidad crítica corresponde al punto que maximiza la diferencia entre las pendientes correspondientes a la del flujo concéntrico con el helicoidal.

con la geometría CC39, que corresponde a una geometría de cilindros concéntricos de radio interno de 38.72 mm, radio externo 20.5 mm y altura del cilindro interior 60.002 mm. Se registraron las medidas de torque, velocidad angular y viscosidad del líquido para mezclas con concentración nominal de partículas de 9, 19, 27, 31, 35, 38, 40, 43, 45, 48 y 50 %.

La velocidad crítica que determina la transición entre un flujo concéntrico a uno helicoidal, es definida como el punto que maximiza la diferencia entre las pendientes de la zona concéntrica y la zona helicoidal como muestra la Figura 2.5. Los resultados de estos experimentos se encuentran adjuntos en las tablas presentadas en Anexo A.

La relación entre el cambio de comportamiento en el reograma y el comienzo de inestabilidades fue corroborada con un ensayo utilizando un fluido newtoniano y tinta. Se observó que mientras existe un comportamiento lineal entre la velocidad angular y el torque del sistema, la tinta no es mezclada verticalmente con el fluido sin tinta. Al momento de perder la linealidad la tinta es inmediatamente difundida en todas direcciones, lo que indicaría que las líneas de corriente dejan de ser círculos concéntricos.

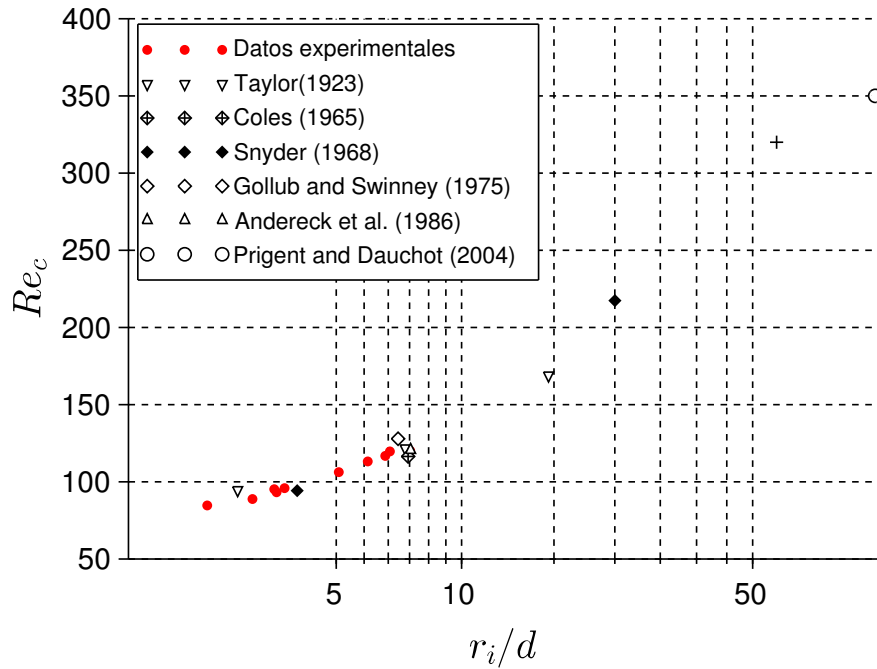


Figura 2.6: Número de Reynolds crítico en función de la relación de radios  $r_i/r_c$ . Comparación entre datos experimentales de un fluido newtoniano con datos experimentales reportados por otros autores.

## 2.5. Procesamiento de datos

Para caracterizar el valor crítico de estabilidad, se ha escogido el número de Reynolds definido como:

$$Re = \frac{\Omega r_i d}{\nu} \quad (2.4)$$

Donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática definida con una metodología coherente con el fluido que se esté utilizando. Esta viscosidad es obtenida a partir del análisis de los perfiles de velocidad y perfiles de viscosidad resultantes de los modelos de migración de partículas aplicados a una geometría de Taylor-Couette.

Las mediciones experimentales de torque del sistema, corresponden a la resistencia del fluido en la pared del cilindro interior. Esta resistencia está directamente relacionada con la viscosidad del fluido y la tasa de deformación en dicha zona. Para validar esta metodología, se han realizado pruebas con un fluido newtoniano, donde la viscosidad es obtenida siguiendo las expresiones detalladas en la Sección 2.2. La viscosidad se determinó como la regresión lineal entre las tasas de deformación inferiores al valor crítico y los esfuerzos de corte. Los resultados, presentados en la Figura 2.6, son comparados con resultados experimentales reportados por otros autores. En esta comparación se observa una clara tendencia con un coeficiente de correlación  $R^2 = 0,97$ , permitiendo validar esta metodología.

# Capítulo 3

## Análisis de estabilidad lineal

En el presente capítulo se presenta un análisis de estabilidad lineal aplicado a un problema de flujo de Taylor-Couette con una mezcla de partículas no coloidales.

### 3.1. Formulación del problema

La formulación clásica del problema de estabilidad lineal en una geometría de Taylor-Couette consiste en plantear las ecuaciones de movimiento y continuidad, en coordenadas cilíndricas (Taylor, 1923). En el caso en estudio, el flujo difusivo de partículas genera una distorsión en el campo de velocidades, generando perfiles de velocidad y viscosidad distintos a los planteados en el problema clásico de un flujo newtoniano. Para considerar este fenómeno dentro del análisis de estabilidad lineal, se plantea dentro del sistema la ecuación constitutiva que gobierna el comportamiento de las partículas.

Como ya se mencionó anteriormente, el modelo planteado por Phillips et al. (1992), y ajustado por Tetlow et al. (1998), describe el comportamiento de la concentración de partículas. Estas ecuaciones describen el comportamiento del flujo base (laminar y concéntrico) y sus resultados han sido validados por distintos métodos experimentales (Shapley et al., 2004; Ovarlez et al., 2006).

El sistema de ecuaciones (ecuaciones de momentum, continuidad y flujo de partículas) es evaluado y desarrollado según las variables que se presentan a continuación:

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \\ P \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_\theta(R) \\ 0 \\ \bar{P} \\ \bar{\phi}(R) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U'_r(R) \\ U'_\theta(R) \\ U'_z(R) \\ P'(R) \\ \phi'(R) \end{pmatrix} e^{iKz + \hat{\lambda}t} \quad (3.1)$$

Donde  $\bar{U}_\theta$  corresponde a la velocidad adimensional del flujo base,  $U'_i$  corresponden a las velocidades adimensionales de perturbación,  $P$  es la presión adimensional del flujo base,  $P'$  es

la presión adimensional de perturbación,  $K$  corresponde al número de onda y  $\beta$  corresponde al coeficiente de estabilidad.

En el desarrollo de este problema, se consideran los siguientes supuestos:

- El flujo base es conocido y resuelto numéricamente, según las ecuaciones de Phillips et al. (1992) (Ecuación 1.17).
- La ecuación de viscosidad de tipo Krieger Dougherty es linealizada como  $\mu(\bar{\phi} + \phi') \approx \mu(\bar{\phi}) + \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \phi'$ .
- Se consideran geometrías con relación de radio entre  $0.7 < r_i/r_e < 1$  y concentración de partículas entre  $10 \% < \bar{\phi} < 50 \%$ .
- Solo se preservan los términos de orden 0 y 1.
- De los modelos de difusión de partículas, se observa que para el rango en estudio, las variaciones de viscosidad son aproximadamente lineales, por lo que el producto de la segunda derivada de viscosidad con una variable de perturbación es considerada de segundo orden. Esto permite simplificar el problema manteniendo los términos dominantes del modelo de viscosidad.
- El modelo constitutivo de flujo de partículas perturbado es considerado sólo en la dirección radial. Esto se debe a que el estado base solo considera variaciones de viscosidad en la dirección radial y el desarrollo de un perfil distinto conlleva una escala de tiempo mayor a la del desarrollo de una transición de un flujo.

El desarrollo algebraico del problema de estabilidad lineal se encuentra adjunto en Anexo B.

Definiendo los operadores diferenciales  $D = \frac{\partial}{\partial R}$  y  $D_* = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R$ , el sistema resultante de análisis de estabilidad lineal, es el siguiente:

$$Ax = \beta Bx \quad (3.2)$$

$$A = \begin{bmatrix} F_2 (DD_* - K^2)^2 + F_3 (D + D_*) (DD_* - K^2) & -2ReK^2 F_1 \\ -F_4 Re - C_c F_5 F_6 (DD_* - K^2) & F_2 (DD_* - K^2) + F_3 \left(D - \frac{1}{R} D\right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} (DD_* - K^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$x = \begin{bmatrix} U'_r \\ U'_\theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde  $F_i$  corresponden a funciones del flujo base,  $C_c$  corresponde a un coeficiente de proporcionalidad entre la derivada de la perturbación de concentración y la derivada de segundo orden de la perturbación de velocidad definidos como:

$$C_c = \frac{F_8}{F_6(1 + F_7)} \quad (3.6)$$

$$F_1 = \frac{\bar{U}_\theta}{R} \quad (3.7)$$

$$F_2 = M = \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \quad (3.8)$$

$$F_3 = DM = \frac{b}{\phi_m} \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b-1}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (3.9)$$

$$F_4 = D_* \bar{U}_\partial = \frac{1}{R} \frac{\partial R \bar{U}_\partial}{\partial R} \quad (3.10)$$

$$F_5 = \frac{\partial M}{\partial \phi} = \frac{b}{\phi_m} \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b-1}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \quad (3.11)$$

$$F_6 = R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\bar{U}_\partial}{R} \right) \quad (3.12)$$

$$F_7 = \frac{k_\mu}{k_c} \frac{b}{\phi_m} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-1} \quad (3.13)$$

$$F_8 = \phi \quad (3.14)$$

Las condiciones de borde para las variables de perturbación de velocidad son de no deslizamiento y no penetración  $U'_r = U'_\partial = 0$  en  $R = r_i/d$  y  $R = r_e/d$ .

## 3.2. Esquema Numérico

Para resolver el problema de valores propios, se plantea un esquema numérico similar al planteado por Landry et al. (2006) en su análisis de estabilidad lineal de Taylor-Couette para un fluido con reología de Plástico de Bingham. Las derivadas de distinto orden son aproximadas como:

$$Du_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (3.15)$$

$$D^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (3.16)$$

$$D^3 u_i = \frac{1/2 u_{i+2} - u_{i+1} + u_{i-1} - 1/2 u_{i-2}}{h^3} \quad (3.17)$$

$$D^4 u_i = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^3} \quad (3.18)$$

Usando las condiciones de borde de no deslizamiento y no penetración, se construyen las siguientes matrices:

$$D = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$D^3 = \frac{1}{h^3} \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1/2 & \dots & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & -1/2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

El tamaño de la grilla " $L = 1/\Delta x$ " se considera convergente para una variación marginal del número de Reynolds crítico  $\Delta Re_c / \Delta L < 0.001$ . Para el caso más desfavorable en evaluación, de una razón de radio  $r_i/r_c = 0.72$ , el criterio escogido entrega un largo de grilla  $L = 450$ , valor escogido para la evaluación de todos los casos (ver figura 3.1). Adicionalmente, se comprobó que

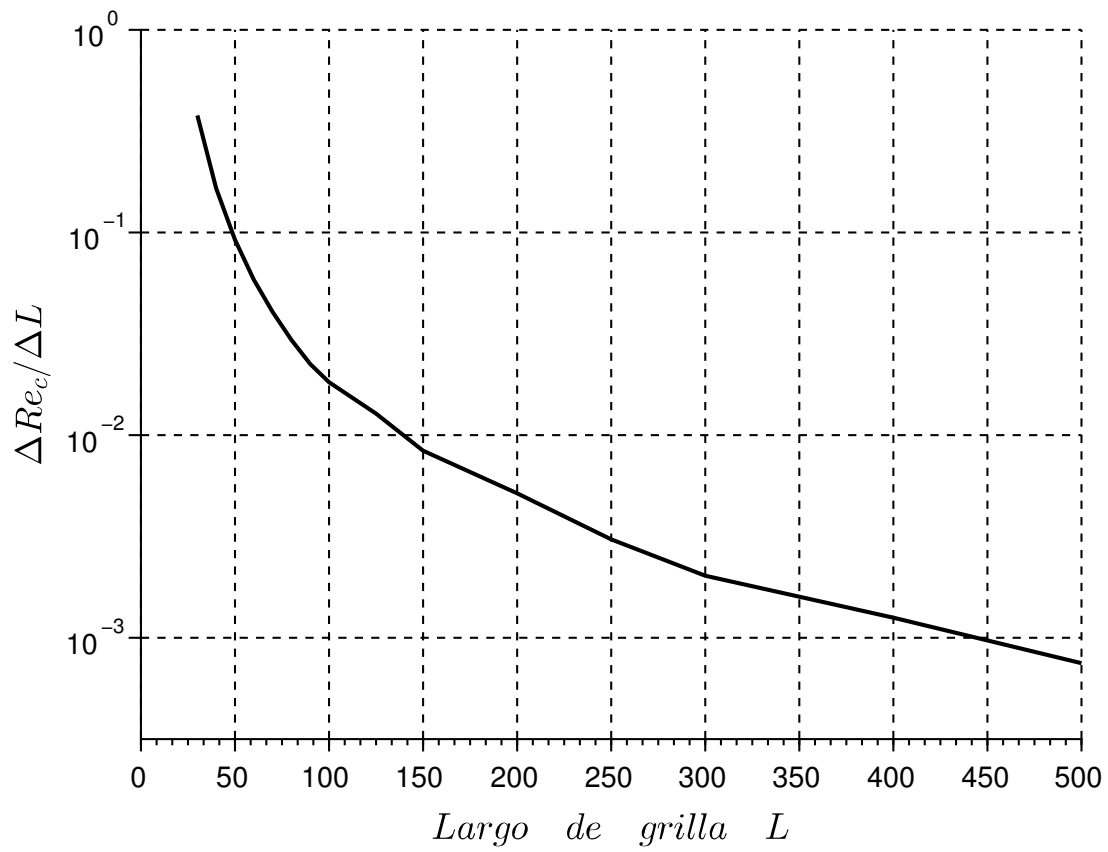


Figura 3.1: Variación marginal del número de Reynolds en función del largo de la grilla  $L$  del modelo numérico para una razón de radio  $r_i/r_e = 0.72$ .



los resultados para un fluido newtoniano son convergentes para un valor de  $L = 450$ , mostrando errores entre los resultados reportados menores al 1 %.

Para resolver el sistema para los valores críticos de  $Re_c$  y  $K_c$  se utiliza la siguiente metodología:

- Las funciones del flujo base  $F_i$  se resuelven y se construyen vectores de tamaño "L".
- Se resuelve el problema de valores propios obteniendo el valor propio ( $\hat{\lambda}$ ) para un valor fijo de número de Reynolds ( $Re_1$ ) y distintos valores de número de onda ( $K$ ). Los valores de  $K$  son evaluados entre 0 y 10, según lo reportado en experiencias anteriores (Landry et al., 2006; Ali et al., 2002). El valor propio máximo, se define como  $\hat{\lambda}_1 = \max(\hat{\lambda})_{k, Re_1}$ .
- Se realiza el punto anterior para un valor de número de Reynolds distinto al anterior  $Re_2$ . Se obtiene el valor propio máximo  $\hat{\lambda}_2$ .
- Se resuelve el problema con un número de Reynolds fijo definido como  $Re_3 = \frac{Re_1 \hat{\lambda}_2 - Re_2 \hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1}$ , que corresponde a una extrapolación lineal del valor óptimo donde  $\Lambda = 0$ .
- Se evalúan los resultados de esta última iteración bajo la condición  $|\max(\hat{\lambda}_3)_k| < 0.0001$ . Si es positiva, se obtiene que  $Re_c = Re_3$ , si es negativa, se vuelve al punto 1.
- En la siguiente iteración, los valores de número de Reynolds corresponden a  $Re_1 = Re_2$  y  $Re_2 = Re_3$ .

El procedimiento es representado esquemáticamente en la Figura 3.2.

Esta metodología entrega resultados equivalentes a los obtenidos mediante la búsqueda del número de Reynolds mínimo, para  $\hat{\lambda} = 0$  fijo, en función del número de onda, como muestra la Figura 3.3. Sin embargo, la metodología escogida presenta un número menor de iteraciones para converger al número de Reynolds crítico  $Re_c$ .

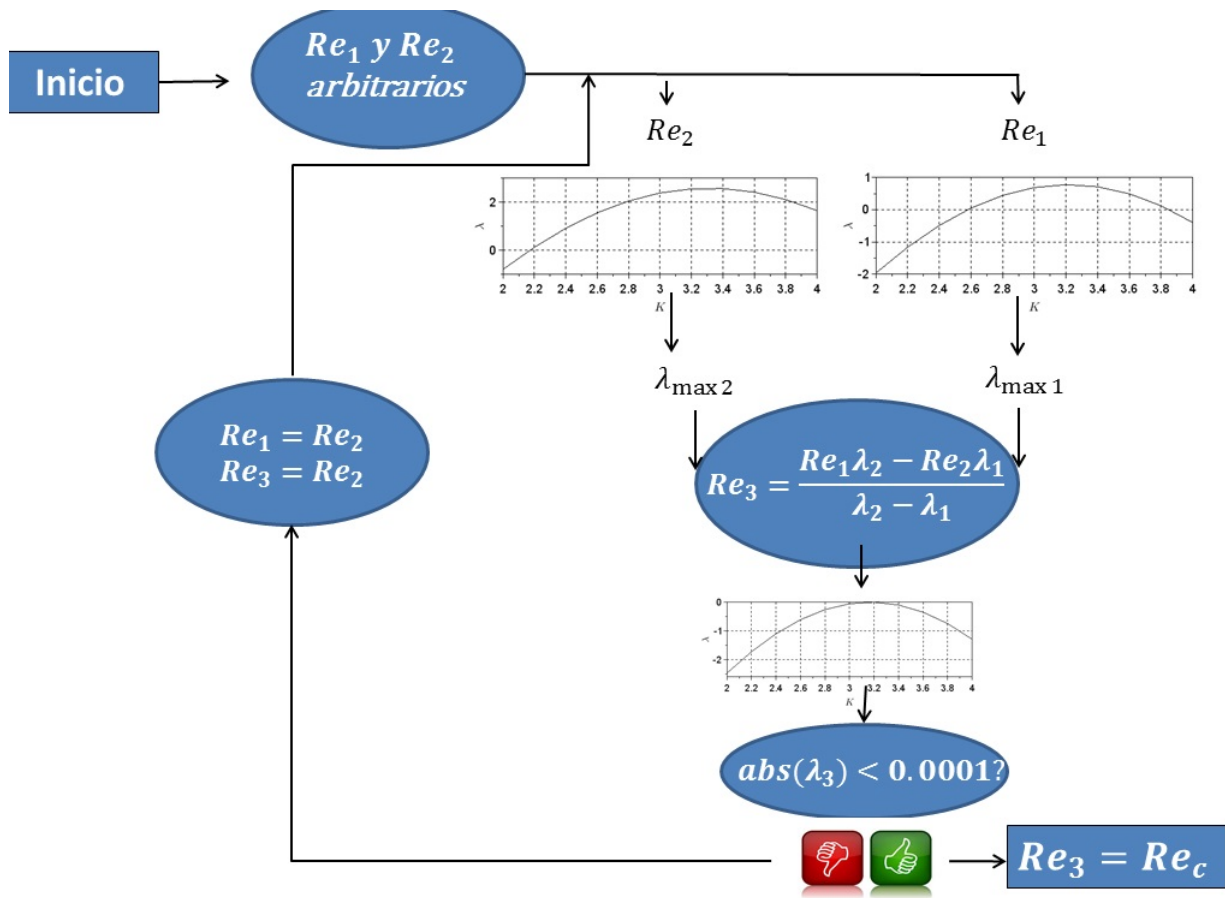


Figura 3.2: Esquema de la metodología para obtener el valor del número de Reynolds crítico en un problema de valores propios.

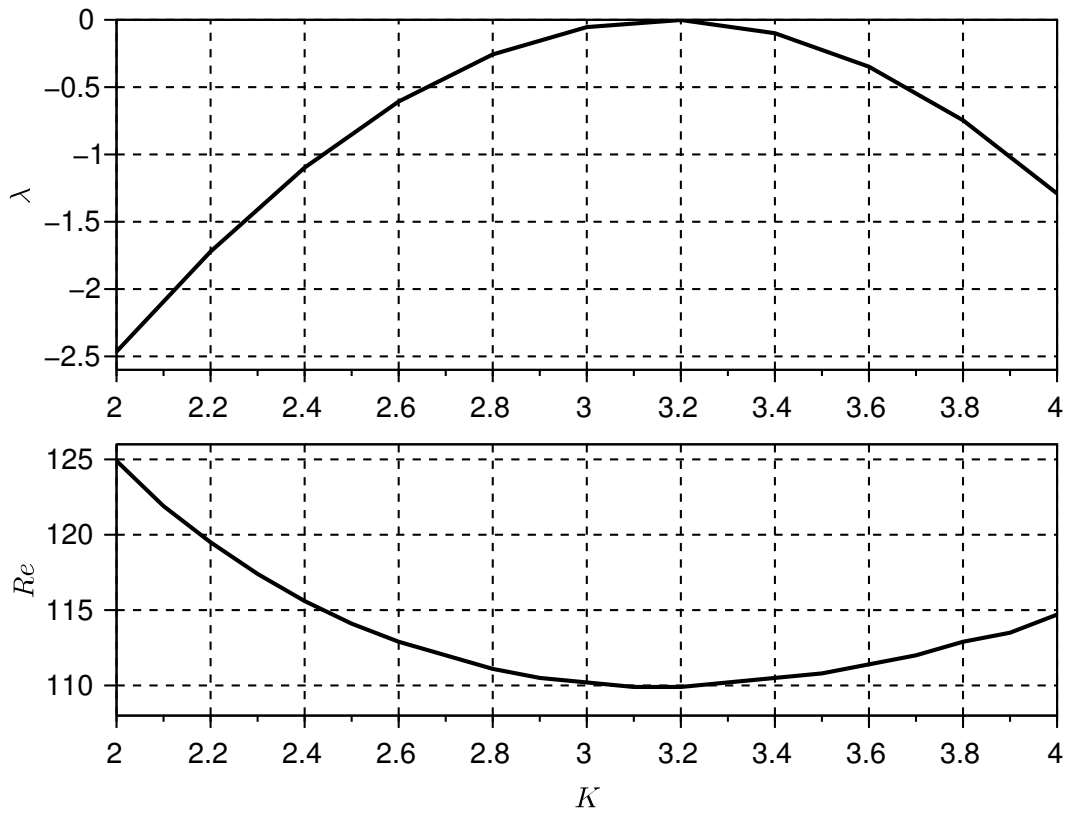


Figura 3.3: Comparación de metodologías para encontrar el número de Reynolds crítico. El gráfico superior, corresponde a la búsqueda del número de Reynolds mínimo en función del número de onda, para  $\beta = 0$ . El gráfico inferior consiste en la búsqueda del número de Reynolds tal que  $\max_k(\beta) = 0$ .

# Capítulo 4

## Análisis y presentación de resultados

En el presente capítulo se presentan los resultados experimentales según la metodología detallada en el Capítulo 2 y el modelo de estabilidad lineal presentado en el Capítulo 3.

### 4.1. Resultados experimentales

#### 4.1.1. Viscosidad de la mezcla

Para validar la metodología, se obtuvo la viscosidad de la mezcla considerando un perfil de concentración y velocidad, utilizando la metodología propuesta por Phillips et al. (1992) y los ajustes de coeficientes propuestos por Tetlow et al. (1998).

En la Figura 4.1 se presenta la viscosidad promedio de la mezcla medida en las 10 geometrías de cilindros disponibles, las barras de desviación estándar evidencian un notable aumento en la dispersión de los datos de viscosidad cuando la concentración se eleva por sobre el 40 %. Se observa que el modelo de viscosidad de Krieger, con los exponentes propuestos por Ovarlez et al. (2006) describen correctamente la función de viscosidad relativa con los coeficientes  $\phi_m = 0.605$  y  $b = 2$ .

#### 4.1.2. Número de Reynolds crítico

Los números críticos de Reynolds, según la definición de la ecuación 2.4, son presentados en gráficos separados en la Figura 4.2. Estos resultados muestran un comportamiento parabólico decreciente.

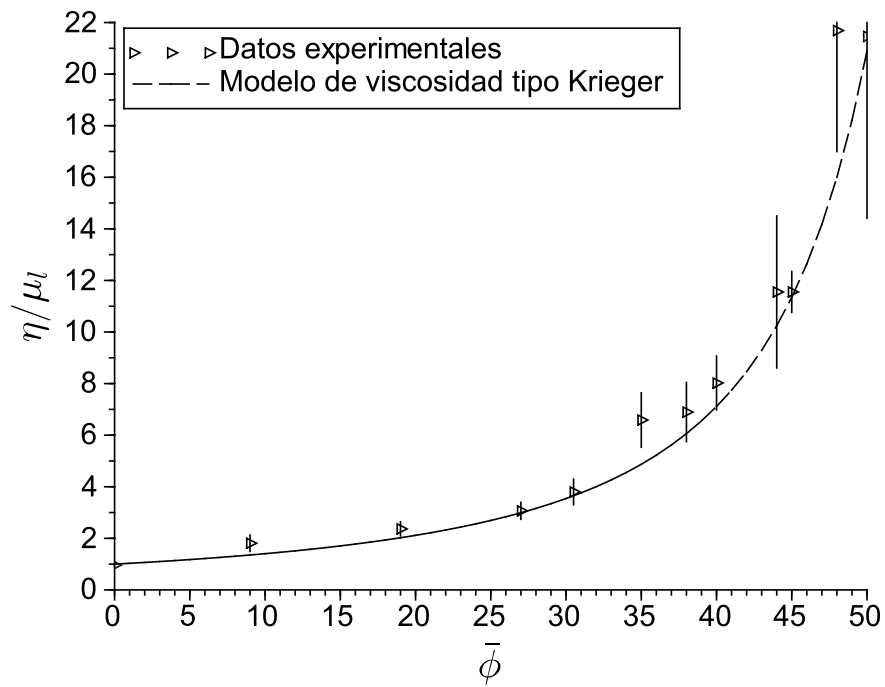


Figura 4.1: Resultados de las mediciones de viscosidad. Los puntos  $\triangleright$  corresponden a las mediciones promedio en las 10 geometrías experimentales, las barras corresponden a la desviación estándar de los datos y la línea segmentada (-) corresponde al resultado del modelo de viscosidad tipo Krieger con los coeficientes  $\phi_m = 60,5\%$  y  $b = -2$

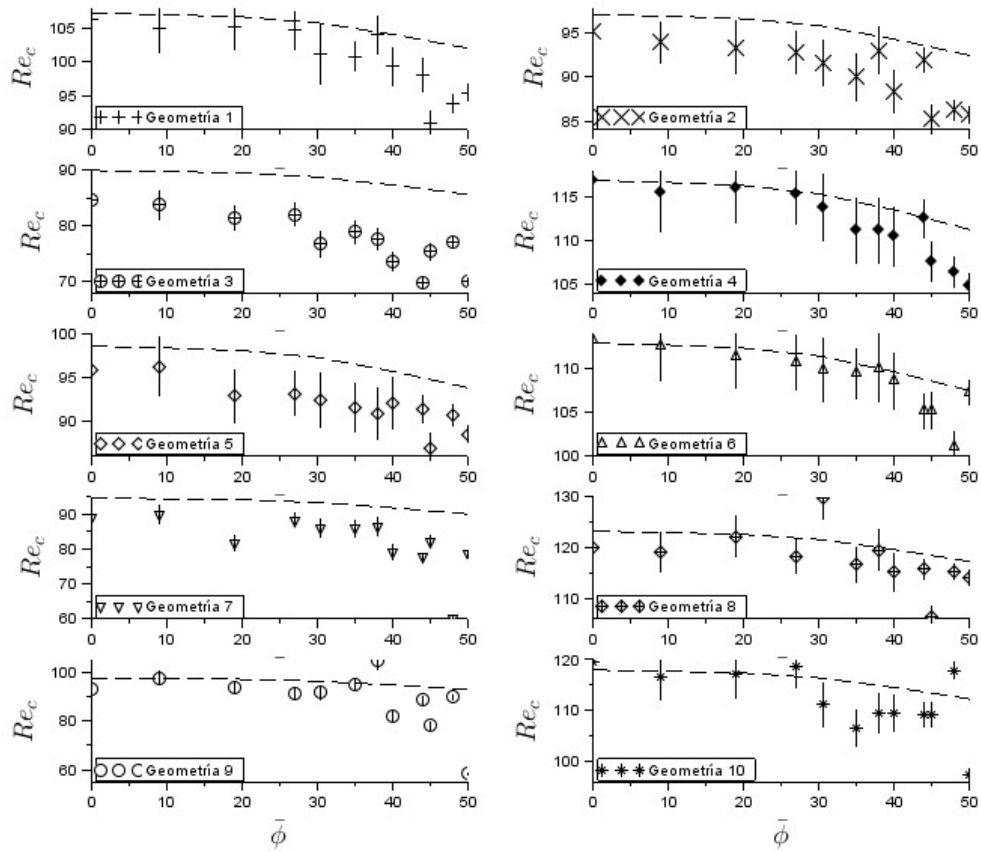


Figura 4.2: Resultados experimentales de todos los experimentos ordenados según la Tabla 2.1. Los puntos corresponden a los datos experimentales, con su barra de error correspondiente. Las líneas segmentadas corresponden a los resultados del análisis de estabilidad lineal.

## 4.2. Resultados del modelo de estabilidad lineal

### 4.2.1. Número de Reynolds crítico

El modelo de estabilidad lineal propuesto en el presente trabajo, describe un comportamiento decreciente en función de la concentración de partículas en todas las geometrías en estudio. Comparando los resultados experimentales con el modelo de estabilidad lineal, se observa que estos últimos representan una cota superior de comienzo de inestabilidades en la gran mayoría de los casos (Figura 4.2).

No se aprecia una relación entre el grado de decaimiento del número de Reynolds y la razón de radio  $r_i/r_e$  distinta a la observada en el caso del fluido newtoniano.

### 4.2.2. Número de onda y velocidad de perturbación críticos

Se observa un comportamiento decreciente del número de onda  $K$ , en función de la razón de radios  $r_i/r_e$  y una tendencia decreciente del valor máximo de las variables de perturbación de velocidad. Para comparar el efecto de la concentración de partículas en las distintas geometrías, los resultados son presentados como número de onda normalizado  $\hat{K}_c$ , definido como:

$$\hat{K}_c = \frac{k_c(\phi)}{k_c(\phi = 0)} \quad (4.1)$$

donde  $k_c(\phi)$  corresponde al número de onda crítico y  $k_c(\phi = 0)$  corresponde al número de onda crítico para un fluido sin partículas.

Por otro lado, se observa una tendencia creciente del número de onda crítico  $K_c$  en función de la concentración de partículas.

Las diferencias del número de onda, en función de la concentración de partículas, es menor en geometrías con relaciones de radio  $r_i/r_e$  cercanos a 1.

Los resultados de la posición del valor máximo de la velocidad de perturbación, se presentan como posición normalizada  $\hat{R}'_{max}$ , definida como:

$$\hat{R}'_{max} = \frac{R'_{max}(\phi)}{R'_{max}(\phi = 0)} \quad (4.2)$$

donde  $R'_{max}(\phi)$  es la posición tal que  $U'_r(R'_{max}) = \max(U'_r)$  y  $R'_{max}(\phi = 0)$  corresponde a esta posición para un fluido sin partículas. El comportamiento del máximo de las variables perturbadas  $U'_\theta$  y  $U'_z$  es similar al presentado de la variable  $U'_r$ .

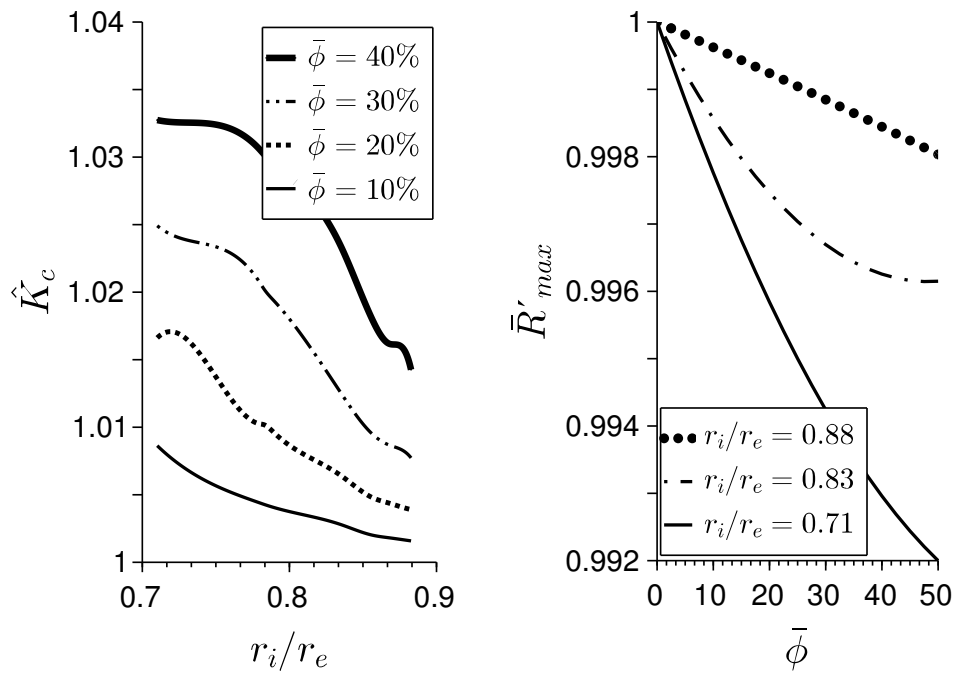


Figura 4.3: Resultados del modelo de estabilidad lineal. El gráfico de la izquierda muestra la tendencia del número de onda crítico en función de la relación de radio para distintas concentraciones de partículas. El gráfico de la derecha muestra la posición del valor máximo de la velocidad de la perturbación  $U'_r$ .



# Capítulo 5

## Discusión y Conclusiones

### 5.1. Discusión

#### 5.1.1. Estudio experimental

El diseño del montaje experimental consideró como parámetros críticos los rangos operacionales de velocidad y torque, teniendo en cuenta las limitaciones constructivas de la instalación. Considerando esto, se determinó que las dimensiones de cilindros y viscosidades estimadas de la mezcla eran adecuadas para minimizar los efectos inerciales, que impedirían la generación de un flujo viscométrico. El comportamiento lineal de la señal de torque durante los ensayos y la validación de los números de Reynolds críticos para el caso newtoniano, son indicadores de un buen diseño experimental.

Inicialmente se buscó corroborar la existencia de trayectorias no concéntricas durante la transición de regímenes de flujo mediante el registro visual del fluido. Esta visualización sería posible mediante la utilización de un acrílico transparente en el cilindro exterior. Si bien en las pruebas preliminares esto fue posible, la necesidad de generar una rugosidad, desgastando este material, impidió el registro visual de este fenómeno en las pruebas posteriores.

Durante la construcción del cilindro interior, se minimizó el número de montajes de las piezas de poliamida en el torno para asegurar un centrado adecuado. Dado que estos instrumentos no son de precisión, las dimensiones originalmente proyectadas, fueron ajustadas a las dimensiones reales obtenidas. El cilindro exterior en cambio, se construyó mediante la deformación al calor del acrílico sobre un molde cilíndrico. Esta metodología generó una junta de construcción y un error en la esfericidad que generó la incertidumbre del valor del radio externo. Esto generó que los errores asociados a las mediciones de velocidad y torque de los reómetros, fueron despreciables frente a la fuente de error de los cilindros exteriores. Uno de los puntos críticos que debe ser considerado para futuras experiencias, es la construcción de los cilindros con equipos de precisión.

Si bien durante el desarrollo de los experimentos no se pudo medir el perfil de concentración de partículas en la dirección radial, la considerable existencia de evidencia permite asegurar la

presencia del fenómeno (Gadala-Maria and Acrivos, 1980; Leighton and Acrivos, 1987; Abbott et al., 1991; Phillips et al., 1992; Chow et al., 1994; Morris and Brady, 1996; Tetlow et al., 1998).

La condición de borde de no deslizamiento tampoco pudo ser corroborada directamente. Sin embargo, las similitudes entre las mediciones de viscosidad con los modelos de viscosidad de mezclas (Krieger and Dougherty, 1959; Ovarlez et al., 2006) encontrada, permite asegurar que una rugosidad del orden del tamaño de las partículas es suficiente para eliminar el efecto del deslizamiento (Coussot and Ancey, 1999).

Las concentraciones de partículas utilizadas en el presente estudio, son menores a las necesarias para producir efectos de “Shear Banding”. Esto se verifica observando que el comportamiento reológico no tiene un comportamiento no lineal característico que este fenómeno (Ovarlez et al., 2009).

### **5.1.2. Modelo de estabilidad lineal**

La utilización del modelo de estabilidad lineal fue seleccionado por sobre otros modelos de estabilidad de flujos; como el método de energía (Conrad and Criminale Jr, 1965; Joseph, 1976; Di Prima and Swinney, 1985) y el método de gradiente de energía (Dou, 2006a,b; Dou et al., 2008) debido a que sus resultados han sido validados con resultados experimentales para el caso de fluidos newtonianos (Taylor, 1923). En el caso en estudio, se presume una buena aplicación del modelo de estabilidad lineal debido a que la mezcla presenta un comportamiento viscoso y las variaciones espaciales de viscosidad pueden ser linealizadas.

La utilización del modelo de Phillips et al. (1992), por sobre otros modelos de migración de partículas como el modelo de temperatura granular (Nott and Brady, 1994), se escogió debido a que sus resultados presentan un buen ajuste para concentraciones cercanas al 45 % (Shapley et al., 2004) y además sus parámetros están calibrados experimentalmente para concentraciones desde 10 % (Tetlow et al., 1998).

Los supuestos realizados en el desarrollo de las ecuaciones de perturbación de flujo de partículas, se basan en un análisis de órdenes de magnitud. Esto permitió obtener una relación simple que describe el comportamiento observado de la mezcla en la transición del flujo. Es importante destacar, que esta expresión carece de una rigurosidad que permita extender los resultados a geometrías con relaciones de radio  $r_i/r_e$  menores a 0.7.

El esquema numérico de solución del problema de valores propios, se basó en el realizado por Landry et al. (2006), en el desarrollo del modelo de estabilidad lineal para un fluido con reología de Plástico de Bingham. Sin embargo, se consideró que un esquema euleriano simple es suficiente para obtener resultados convergentes. Los tiempos de cómputo de cada uno de los casos en estudio, fueron de aproximadamente 30 minutos.

### 5.1.3. Comparación de resultados

A pesar de las fuentes de error ya mencionadas, los resultados experimentales muestran una clara tendencia decreciente del número de Reynolds crítico, definido en la ecuación 2.4, en función de la concentración de partículas. De la misma manera, los resultados del modelo de estabilidad lineal tienen el mismo comportamiento y representan una cota superior de estabilidad. Esto es debido a que el modelo se basa cuando el sistema es inestable, una perturbación, por más pequeña que sea, generará una transición global del flujo de manera exponencial e irreversible (Chandrasekhar, 1962). En la práctica, las impresiones de la construcción de la instalación experimental o la simple suma de perturbaciones, pueden acelerar el proceso de transición o generar transiciones cíclicas reversibles que serán registradas por la instalación experimental.

En el límite disuelto, Ali et al. (2002) demostró mediante un análisis de estabilidad lineal que el número de Reynolds crítico (Ecuación 2.4) en función de la concentración de partículas, es una función decreciente. Sus resultados son avalados con un estudio experimental que considera concentraciones de partículas hasta 2.5 %. Si bien la tendencia es similar a la reportada por este estudio, la magnitud del descenso del número de Reynolds es de un 20 % para concentraciones de partículas de 5 % y las reportadas por este estudio presentan un máximo menor a un 10 % para concentraciones de 50 %.

La explicación para esta diferencia, es que en el límite disuelto estudiado por Ali et al. (2002), los efectos de arrastre de las partículas juegan un rol mayor frente al efecto estabilizador del aumento de la viscosidad aparente del fluido. En el rango en estudio, la viscosidad aparente juega un rol estabilizador, que amortigua el efecto desestabilizador de las perturbaciones y de interacción entre partículas. El análisis dimensional de los resultados, presentado en el artículo del Anexo C, muestra que el número de Reynolds crítico, considerando la viscosidad media aparente de la mezcla, es proporcional al logaritmo del número adimensional definido como  $\Phi = (r_i/d)(\alpha/d)(\phi_m/\phi)^{1/3}$ . Esta relación muestra que la condición crítica de estabilidad es afectada tanto por las condiciones espaciales (al igual que un fluido newtoniano, representado por la relación  $r_i/d$ ) y el efecto desestabilizador de las partículas, representado por la concentración lineal de partículas  $(d/\alpha)(\phi/\phi_m)^{1/3}$ , el cual representa el espacio promedio de la fracción sólida en la dirección radial.

## 5.2. Conclusiones

La presente tesis se realizó con el objetivo de estudiar las condiciones críticas de transición entre un régimen de flujo concéntrico a uno helicoidal, en una geometría de Taylor-Couette, para mezclas no coloidales de partículas sólidas y un fluido newtoniano. Para lograr los objetivos planteados inicialmente, se desarrollaron dos trabajos complementarios: trabajo experimental y modelo numérico de estabilidad lineal de flujo.

El trabajo experimental consistió en el diseño y la operación de una instalación experimental de Taylor-Couette, que permite obtener parámetros relevantes de la mezcla y detectar la velocidad crítica de transición. Los parámetros relevantes del fluido, necesarios para caracterizar la condición crítica de estabilidad, son: la viscosidad de la mezcla, la concentración de partículas,

las dimensiones experimentales y la velocidad de rotación del cilindro. Esta instalación logró reproducir favorablemente las condiciones deseadas, controlando efectos no deseados como la inercia del fluido, el deslizamiento de partículas con las paredes de los cilindros, sedimentación de partículas y medidas fuera de rango. Si bien los errores asociados a la construcción no son despreciables, no invalidan las conclusiones generales de este trabajo.

La mezcla utilizada en este estudio, se comportó como un fluido viscoso y su condición crítica puede ser caracterizada por el número de Reynolds  $Re = \Omega r_i d / \nu$ , donde debe ser considerada la viscosidad aparente de la mezcla. Este número de Reynolds crítico presenta un comportamiento decreciente que disminuye hasta un 10 % a concentraciones de 50 %.

El modelo de estabilidad lineal resulta ser adecuado frente a este tipo de problemas. Se consideró una metodología similar a la usada en problemas de estabilidad lineal similares, la que concluyó en resultados convergentes en tiempos de cálculo accesibles para un computador de escritorio estándar. Los resultados del número de Reynolds crítico, mostraron un comportamiento consistente con los resultados experimentales, y tal como se plantea en su definición, representa una cota superior en el criterio de estabilidad.

En comparación con un fluido newtoniano equivalente, el análisis de estabilidad lineal se muestra que la condición de transición es generada por perturbaciones de velocidad desplazadas levemente hacia el cilindro interior (donde la viscosidad aparente es menor) y los números de onda críticos mayores. Se identificó que la interacción entre partículas juegan un rol de desestabilizar el flujo, sin embargo, el aumento de viscosidad aparente del fluido genera que este papel sea atenuado.

En el caso de un ensayo reológico de una mezcla no coloidal, en un reómetro rotacional convencional, los presentes resultados podrían ser de utilidad en el desarrollo de nuevos protocolos para la determinación de la velocidad máxima de giro que asegure contar con un flujo concéntrico durante la prueba.

Los datos experimentales de un fluido newtoniano muestran una proporcionalidad entre el número de Reynolds crítico y la razón entre el radio interno ( $r_i/d$ ). La publicación adjunta a este trabajo, muestra que la contribución de las partículas en el proceso de transición del flujo, es proporcional al logaritmo de la concentración lineal de partículas  $\Phi = (\alpha/d)(\phi_m/\phi)^{1/3}$ .

# Bibliografía

- Abbott, J., Tetlow, N., Graham, A., Altobelli, S., Fukushima, E., Mondy, L., and Stephens, T. (1991). Experimental observations of particle migration in concentrated suspensions: Couette flow. *Journal of Rheology*, 35(5):773–795.
- Acrivos, A., Fan, X., and Mauri, R. (1994). On the measurement of the relative viscosity of suspensions. *Journal of Rheology*, 38(5):1285–1296.
- Ali, M. E., Mitra, D., Schuille, J. A., and Lueptow, R. M. (2002). Hydrodynamic stability of a suspension in cylindrical couette flow. *Physics of Fluids*, 14(3):1236–1243.
- Alibenyahia, B., Lemaitre, C., Nouar, C., and Ait-Messaoudene, N. (2012). Revisiting the stability of circular couette flow of shear-thinning fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 183:37–51.
- Andereck, C. D., Liu, S., and Swinney, H. L. (1986). Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*, 164:155–183.
- Ballal, B. and Rivlin, R. (1976). Flow of a newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 62(3):237–294.
- Barnes, H. A. (2000). *A handbook of elementary rheology*. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics Aberystwyth, England.
- Barnes, H. A., Hutton, J. F., and Walters, K. (1989). *An introduction to rheology*. Elsevier.
- Batchelor, G. and Green, J. (1972). The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 56(03):401–427.
- Carey, C., Hinko, K., and Andereck, C. D. (2003). Transitions in the small-gap limit of taylor-couette flow. In *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, volume 1.
- Caton, F. (2006). Linear stability of circular couette flow of inelastic viscoplastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 134(1):148–154.
- Chandrasekhar, S. (1962). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New York.
- Chow, A. W., Sinton, S. W., Iwamiya, J. H., and Stephens, T. S. (1994). Shear-induced particle migration in couette and parallel-plate viscometers: Nmr imaging and stress measurements. *Physics of Fluids*, 6(8):2561–2576.

- Cole, J. (1976). Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *Journal of Fluid Mechanics*, 75(01):1–15.
- Coles, D. (1965). Transition in circular couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 21(03):385–425.
- Conrad, P. W. and Criminale Jr, W. O. (1965). The stability of time-dependent laminar flow: Flow with curved streamlines. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 16(5):569–582.
- Corbett, A. M., Phillips, R. J., Kauten, R. J., and McCarthy, K. L. (1995). Magnetic resonance imaging of concentration and velocity profiles of pure fluids and solid suspensions in rotating geometries. *Journal of Rheology*, 39(5):907–924.
- Coussot, P. and Ancey, C. (1999). Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. *Phys. Rev. E*, 59:4445–4457.
- Di Prima, R. and Swinney, H. L. (1985). Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, pages 139–180. Springer.
- Donnelly, R. J. (1991). Taylor-couette flow: the early days. *Phys. Today*, 44(11):32–39.
- Dou, H.-S. (2006a). Mechanism of flow instability and transition to turbulence. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(4):512–517.
- Dou, H.-s. (2006b). Physics of Flow Instability and Turbulent Transition in Shear Flows. *Technical Report, National University of Singapore*.
- Dou, H.-S., Khoo, B. C., and Yeo, K. S. (2008). Instability of taylor–couette flow between concentric rotating cylinders. *International Journal of Thermal Sciences*, 47(11):1422–1435.
- Drazin, P. and Reid, W. (1981). *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ Pr.
- Drazin, P. G. and Reid, W. H. (2004). *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press.
- Einstein, A. (1956). *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Dover Publications.
- Gadala-Maria, F. and Acrivos, A. (1980). Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *Journal of Rheology*, 24(6):799–814.
- Gollub, J. P. and Swinney, H. L. (1975). Onset of turbulence in a rotating fluid. *Physical Review Letters*, 35(14):927.
- Huang, N. and Bonn, D. (2007). Viscosity of a dense suspension in couette flow. *Journal of fluid mechanics*, 590:497–507.
- Huang, N., Ovarlez, G., Bertrand, F., Rodts, S., Coussot, P., and Bonn, D. (2005). Flow of wet granular materials. *Physical Review Letters*, 94(2):28301.

- Ihle, C. F., Tamburrino, A., and Vivero, P. (2013). Effect of sample manipulation on the couette rheometry of copper concentrates. *Powder Technology*, 239:78–85.
- Jana, S., Kapoor, B., and Acrivos, A. (1995). Apparent wall slip velocity coefficients in concentrated suspensions of noncolloidal particles. *Journal of Rheology*, 39(6):1123–1132.
- Joseph, D. D. (1976). Stability of fluid motions. i, ii. *NASA STI/Recon Technical Report A*, 77:12423.
- Kim, S. and Karrila, S. (1991). *Microhydrodynamics*. Heinemann, Boston.
- Krieger, I. M. and Dougherty, T. J. (1959). A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Transactions of The Society of Rheology*, 3(1):137–152.
- Landry, M., Frigaard, I., and Martinez, D. (2006). *Stability and instability of Taylor–Couette flows of a Bingham fluid*, volume 560. Cambridge Univ Press.
- Leighton, D. and Acrivos, A. (1987). The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 181:415–439.
- Minería-Chilena (2009). La importancia del análisis reológico.
- Morris, J. F. and Boulay, F. (1999). Curvilinear flows of noncolloidal suspensions: The role of normal stresses. *Journal of Rheology*, 43(5):1213–1237.
- Morris, J. F. and Brady, J. F. (1996). Self-diffusion in sheared suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 312:223–252.
- Nott, P. R. and Brady, J. F. (1994). Pressure-driven flow of suspensions: simulation and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 275(1):157–199.
- Ovarlez, G., Bertrand, F., and Rodts, S. (2006). Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology*, 50(3):259–292.
- Ovarlez, G., Rodts, S., Chateau, X., and Coussot, P. (2009). Phenomenology and physical origin of shear localization and shear banding in complex fluids. *Rheologica acta*, 48(8):831–844.
- Philippe, A., Baravian, C., Jenny, M., Meneau, F., and Michot, L. (2012). Taylor-couette instability in anisotropic clay suspensions measured using small-angle x-ray scattering. *Physical review letters*, 108(25):254501.
- Phillips, R. J., Armstrong, R. C., Brown, R. A., Graham, A. L., and Abbott, J. R. (1992). A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Physics of Fluids*, 4(1):30–40.
- Rayleigh, L. (1917). On the dynamics of revolving fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 93(648):148–154.
- Serrin, J. (1959). On the stability of viscous fluid motions. *Archive for Rational Mechanics and*

*Analysis*, 3(1):1–13.

Shapley, N. C., Brown, R. A., and Armstrong, R. C. (2004). Evaluation of particle migration models based on laser doppler velocimetry measurements in concentrated suspensions. *Journal of Rheology*, 48(2):255–279.

Snyder, H. (1968). Stability of rotating couette flow. i. asymmetric waveforms. *Physics of Fluids*, 11(4):728–734.

Stickel, J. J. and Powell, R. L. (2005). Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annual Reviews of Fluid Mechanics*, 37:129–149.

Taylor, G. I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, pages 289–343.

Tetlow, N., Graham, A. L., Ingber, M. S., Subia, S. R., Mondy, L. A., and Altobelli, S. A. (1998). Particle migration in a couette apparatus: experiment and modeling. *Journal of Rheology*, 42(2):307–327.



# **Anexos**

# **Anexo A**

## **Resultados**

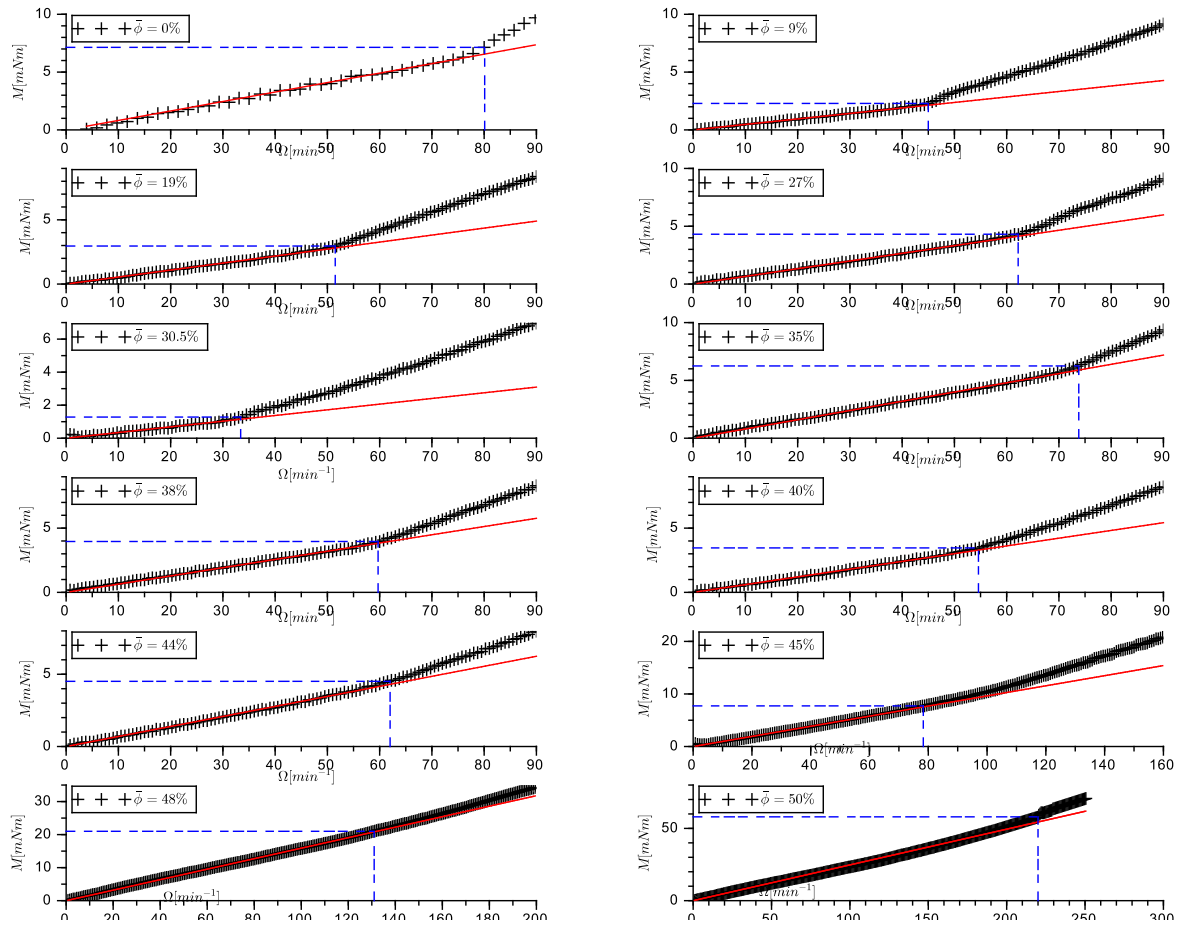


Figura A.1: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 1 de radio interno  $r_i = 5,35\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 6,41\text{cm}$

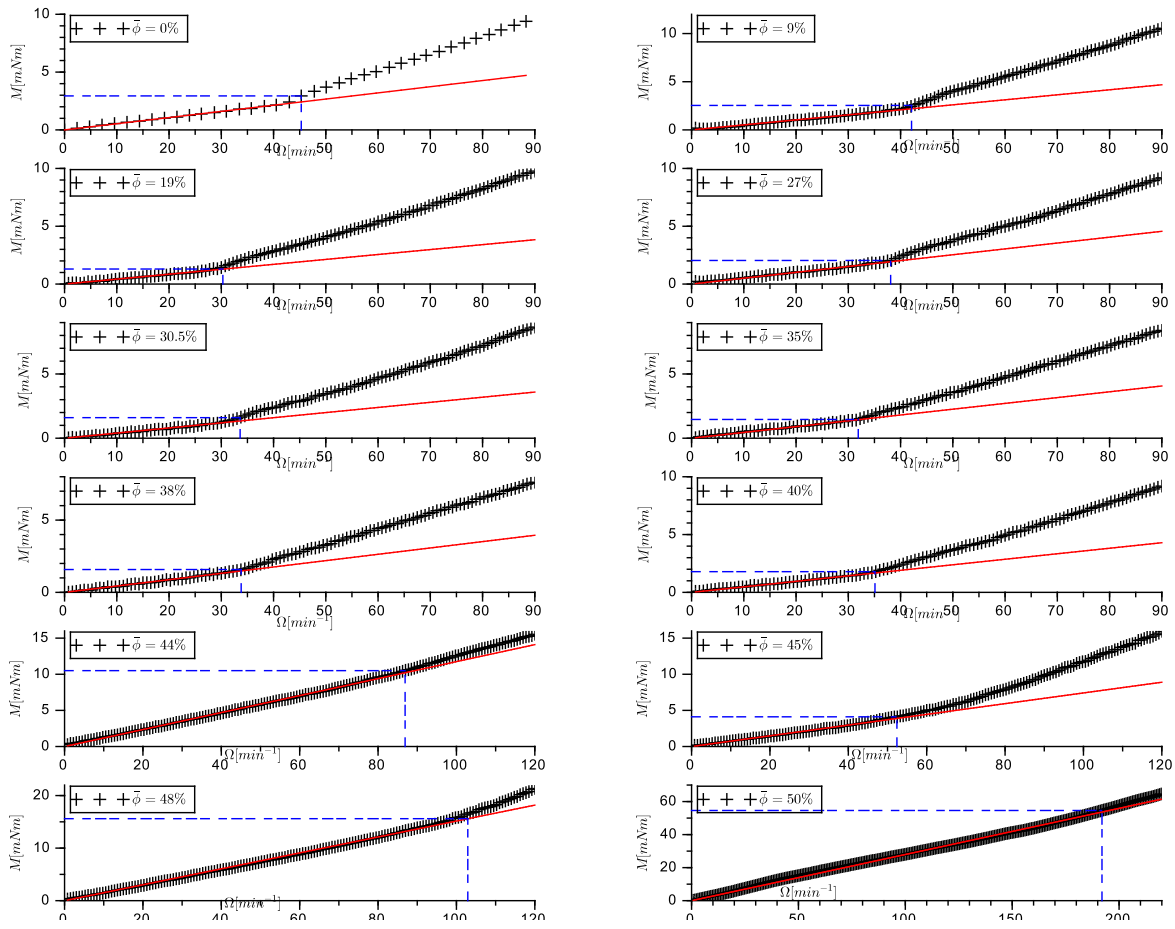


Figura A.2: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 2 de radio interno  $r_i = 5.35\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 6.86\text{cm}$

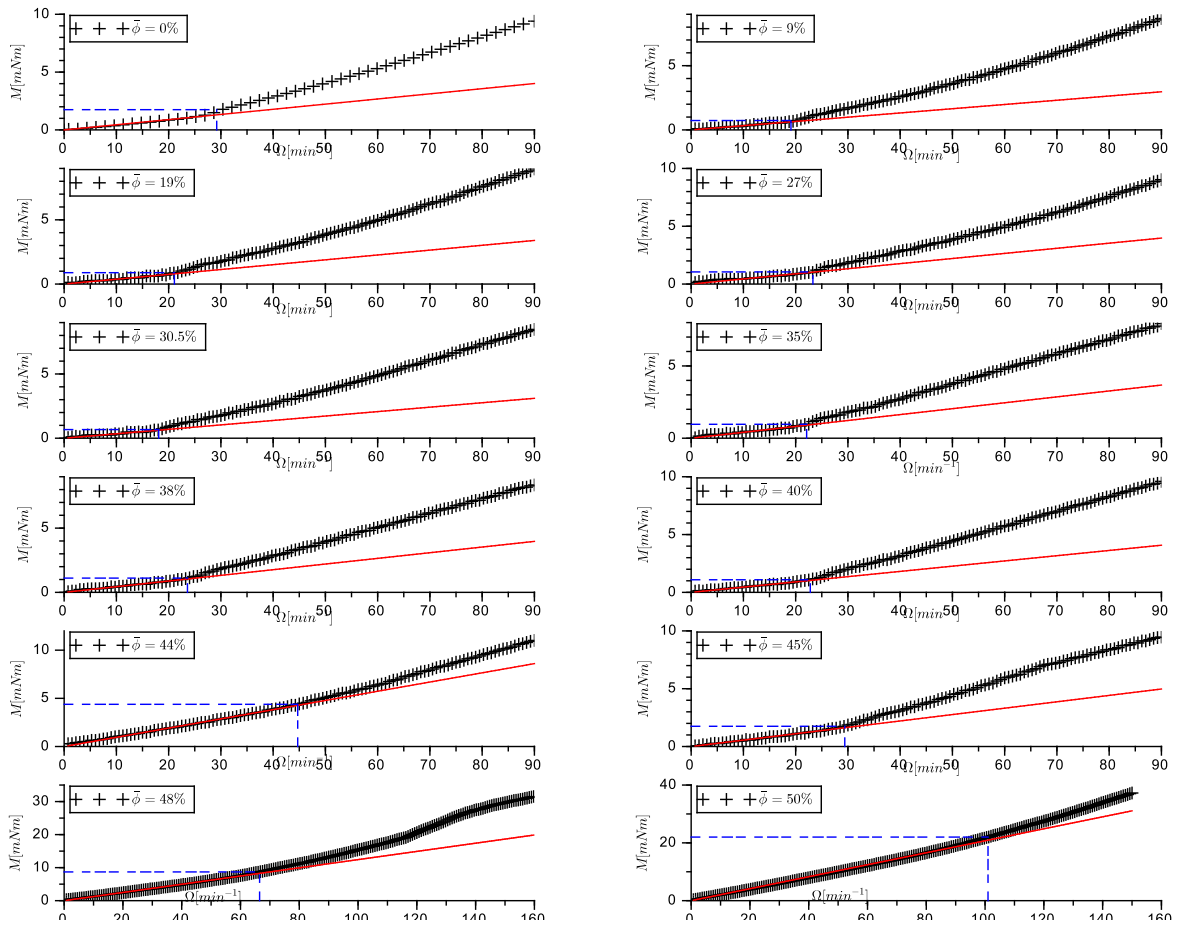


Figura A.3: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 3 de radio interno  $r_i = 5,35\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 7,53\text{cm}$

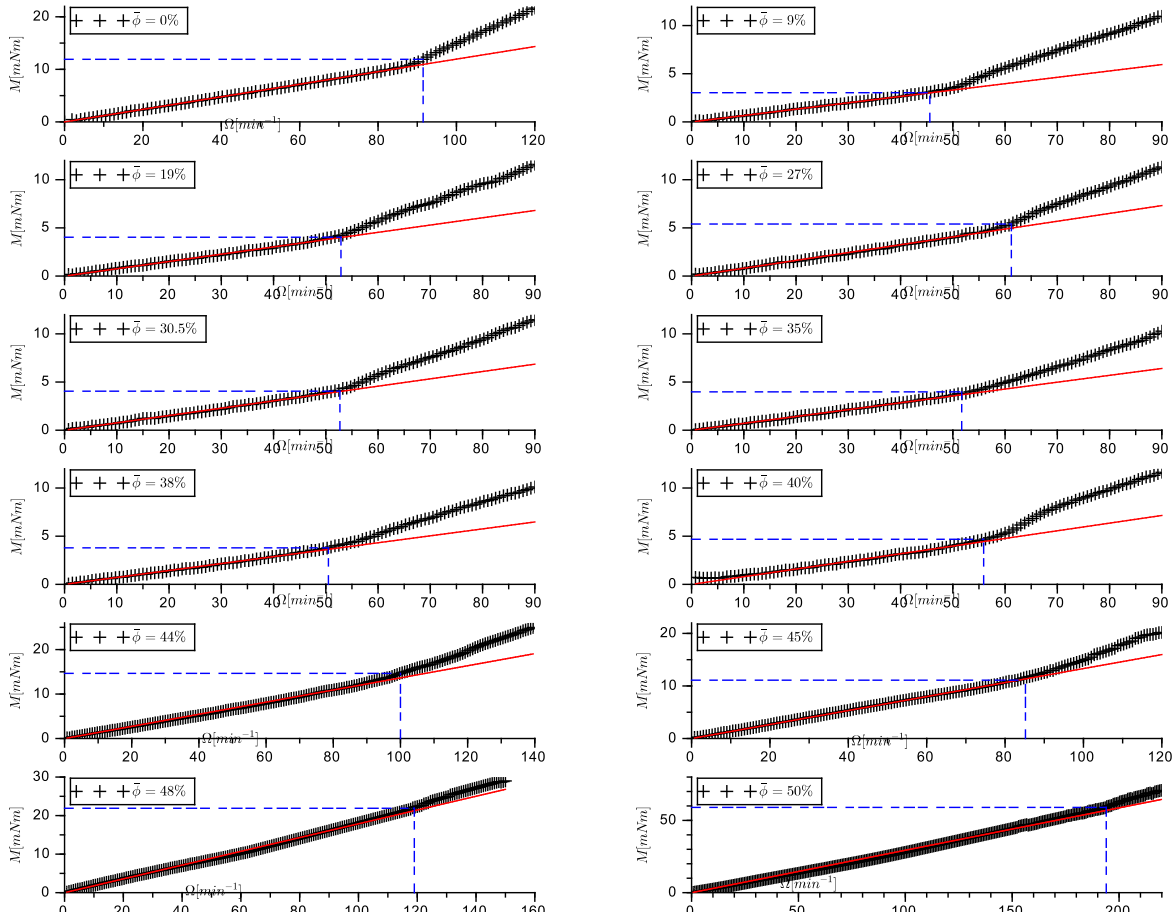


Figura A.4: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 4 de radio interno  $r_i = 5.95\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 6.86\text{cm}$

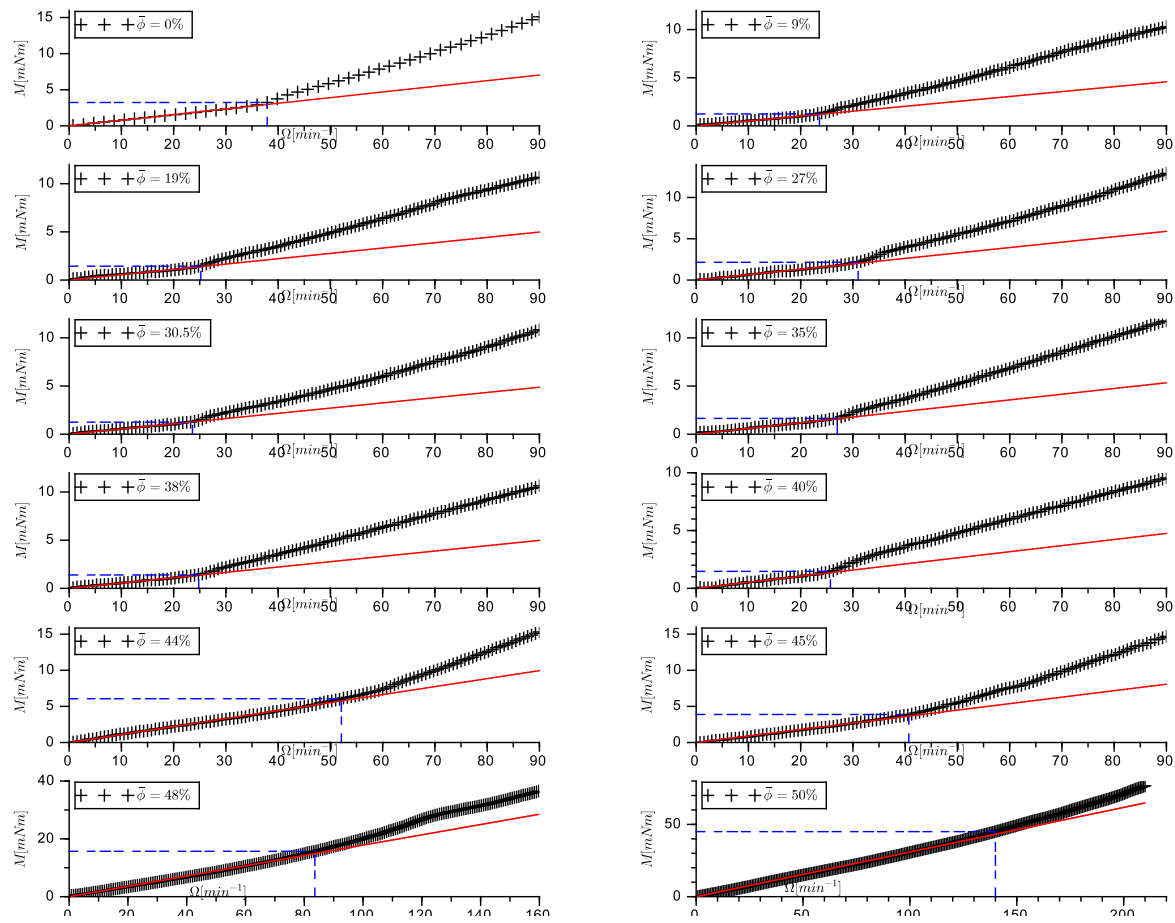


Figura A.5: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 5 de radio interno  $r_i = 5,95\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 7,53\text{cm}$

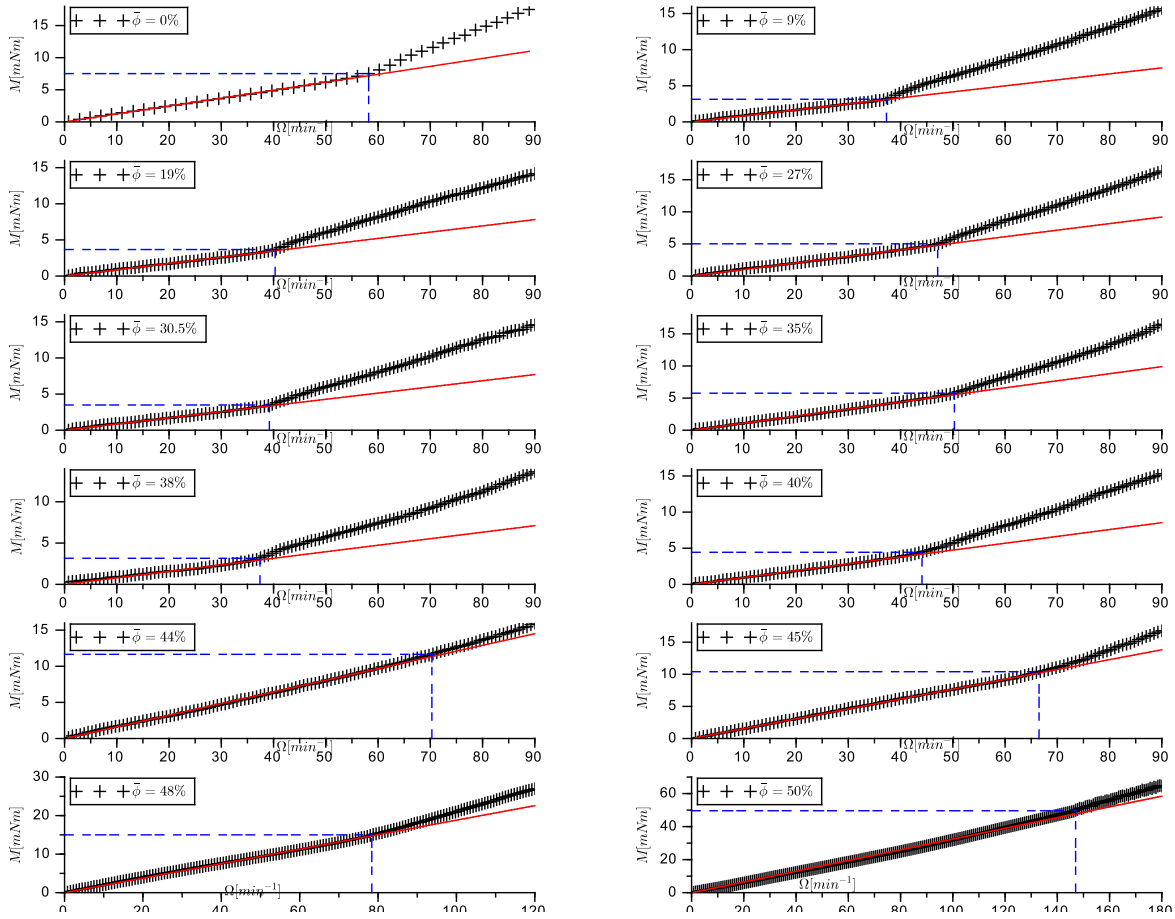


Figura A.6: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 6 de radio interno  $r_i = 6,45\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 7,53\text{cm}$



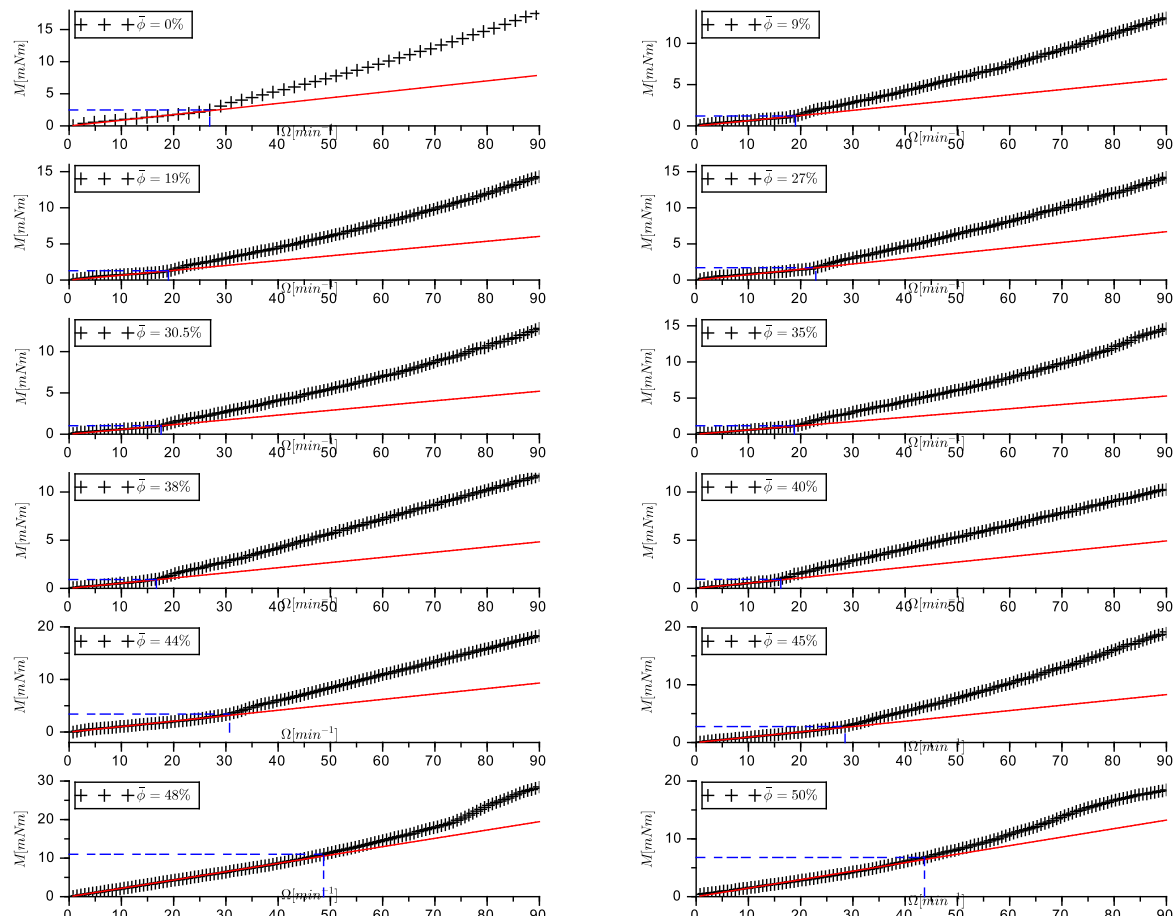


Figura A.7: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 7 de radio interno  $r_i = 6,45\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 8,5\text{cm}$

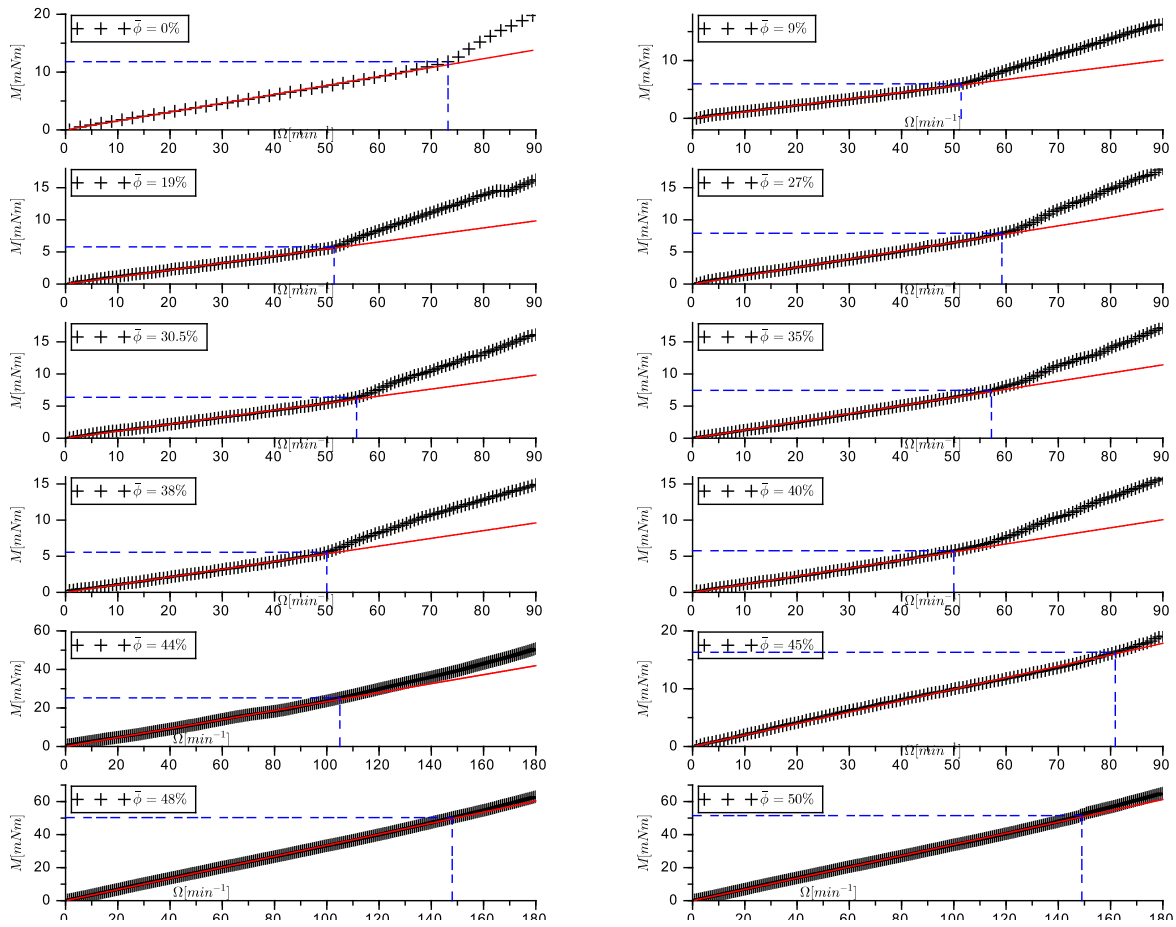


Figura A.8: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 8 de radio interno  $r_i = 6,65\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 7,53\text{cm}$

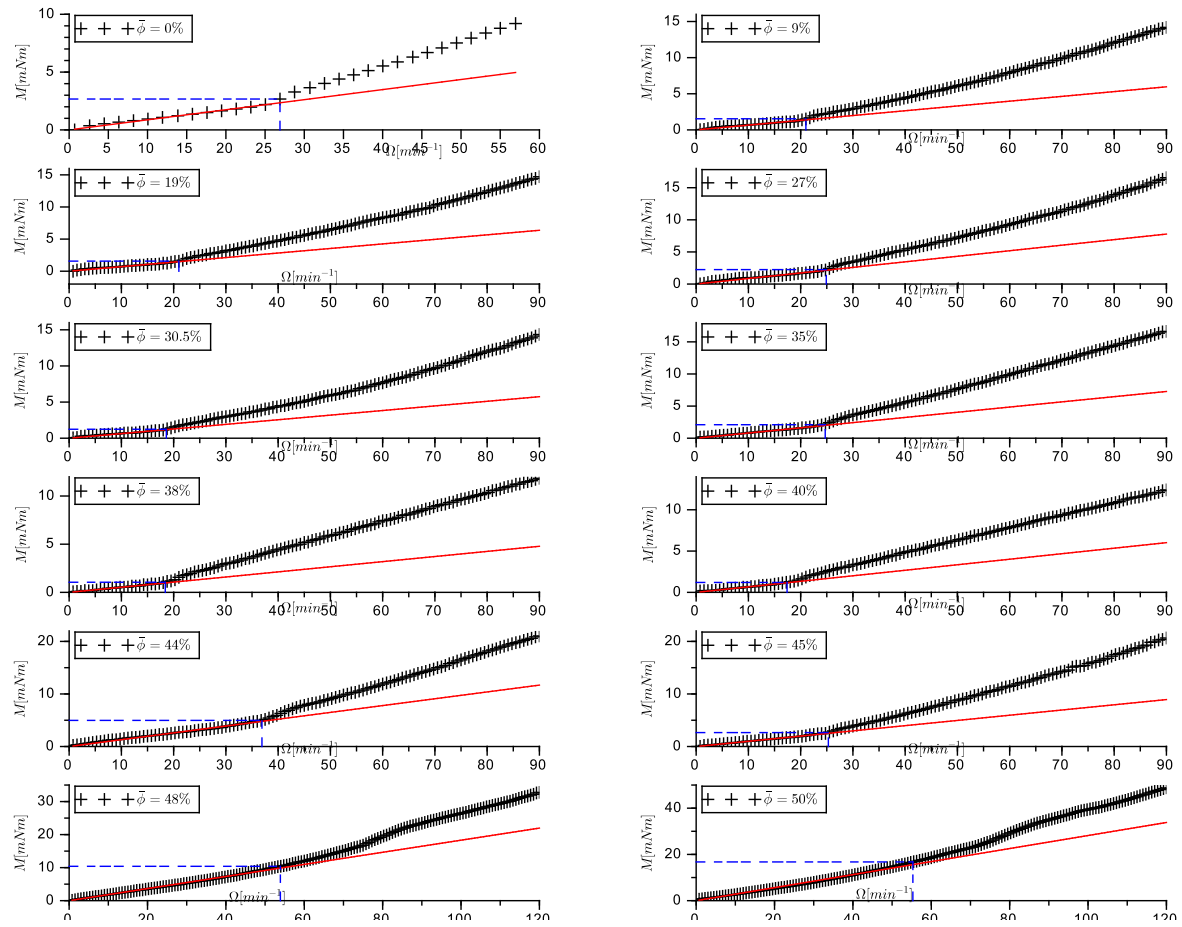


Figura A.9: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 9 de radio interno  $r_i = 6,65\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 8,5\text{cm}$

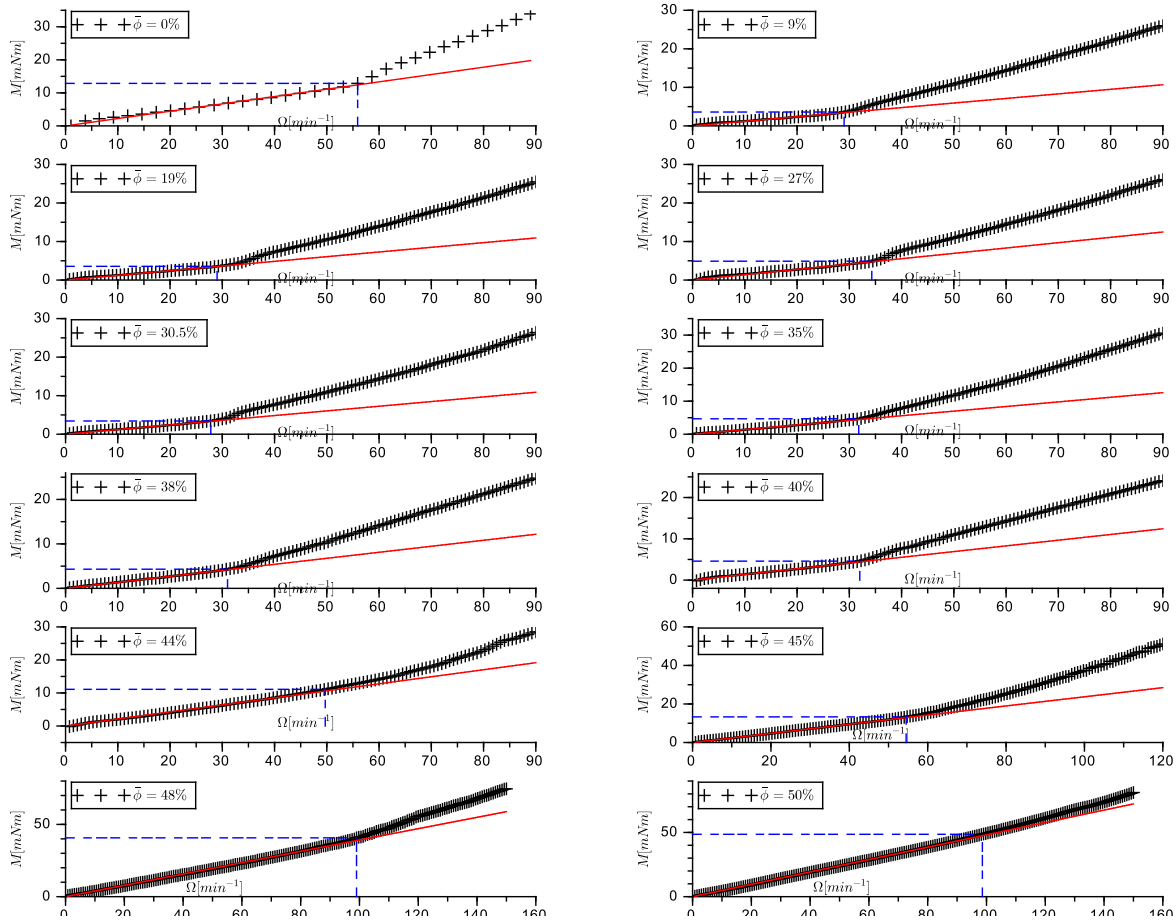


Figura A.10: Resultados de velocidad angular  $\Omega$  versus torque del sistema  $M$  para la geometría 10 de radio interno  $r_i = 7,4\text{cm}$  y radio externo  $r_e = 8,5\text{cm}$

## Anexo B

# Desarrollo algebraico de análisis de estabilidad lineal

La ecuación de continuidad y ecuaciones de Cauchy en coordenadas cilíndricas son respectivamente:

$$\frac{1}{r} \frac{dr u_r}{dr} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{d\theta} + \frac{du_z}{dz} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Dirección  $r$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right) \quad (\text{B.2})$$

Dirección  $\theta$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} \right) \quad (\text{B.3})$$

Dirección  $z$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} \right) \quad (\text{B.4})$$

Donde el esfuerzo de corte en un fluido viscoso se define como:

$$\mathbf{T}_{ij} = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

El estado base considerado en este problema corresponde a un flujo laminar, concéntrico y permanente de un fluido incompresible. Las variables de este estado base corresponden a la velocidad angular (variable en la dirección radial), un perfil de presiones (variable en la dirección

radial y azimutal) y un perfil de concentración de partículas (variable en la dirección radial).

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(\bar{r}) \\ 0 \\ \bar{p} \\ \phi(\bar{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Al evaluar las variables del estado base en las ecuaciones de Cauchy y reemplazando la definición del tensor de corte de un fluido viscoso, las ecuaciones B.2, B.3 y B.4 se reducen a:

$$-\frac{\bar{u}_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \quad (\text{B.7})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \right) \quad (\text{B.8})$$

$$0 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (\text{B.9})$$

Estas tres ecuaciones corresponden al problema para un fluido viscoso en general, donde el modelo de viscosidad deberá definir el comportamiento de la variable  $\mu$ . El modelo utilizado para describir este comportamiento viscoso de la mezcla corresponde al modelo de Phillips et al. (1992).

Por otro lado, considerando las variables del sistema, como la suma de un estado base y un sistema perturbado, las variables corresponden a:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \\ p \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(\bar{r}) \\ 0 \\ \bar{p} \\ \phi(\bar{r}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_r(r) \\ u'_\theta(r) \\ u'_z(r) \\ p'(r) \\ \phi'(r) \end{pmatrix} e^{ikz + \sigma t} \quad (\text{B.10})$$

Este estado, a diferencia del estado base, considera perturbaciones axisimétricas infinitesimales de todas las variables involucradas.

La metodología de resolución de los problemas de estabilidad lineal requieren la linealización de las funciones no lineales para poder construir un problema de valores propios. En este caso, la función de viscosidad tipo Krieger es linealizada en función de la concentración de partículas, como se presenta a continuación:

$$\mu(\bar{\phi} + \phi') \approx \mu(\bar{\phi}) + \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \phi' \quad (\text{B.11})$$

Evaluando las variables del sistema perturbado B.10 en las ecuaciones de continuidad y Cauchy B.1, B.2, B.3, B.4, despreciando los términos de segundo orden (esto es válido dado que el supuesto base es que las perturbaciones son infinitesimales) y los términos equivalentes al estado base, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma u'_r - 2 \frac{\bar{u}_\theta u'_\theta}{r} = -\frac{p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{\partial^2 u'_r}{\partial r^2} - k^2 u'_r + ik \frac{\partial u'_z}{\partial r} \right) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u'_r}{\partial r} \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma u'_\theta + u'_r \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{u}_\theta}{\partial r} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial r^2} - k^2 u'_\theta \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \phi' r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{u}_\theta}{r} \right) \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\sigma u'_z = -\frac{kp'}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \left( -2k^2 u'_z + ik \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( ik u'_r + \frac{\partial u'_z}{\partial r} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial r} + ik u'_z = 0 \quad (\text{B.15})$$

El sistema de ecuaciones es reescrito definiendo variables adimensionales de radio ( $R$ ), número de onda adimensional ( $K$ ), coeficiente de estabilidad adimensional ( $\hat{\eta}$ ), viscosidad adimensional ( $M$ ), presión adimensional ( $P$ ), número de Reynolds ( $Re$ ) y velocidades adimensionales ( $U_i$ ) como:

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{d} & K &= kd & \hat{\eta} &= \sigma \rho \frac{d^2}{\mu(\phi=\bar{\phi})} \\ M &= \frac{\mu}{\mu(\phi=\bar{\phi})} & P &= \frac{pd}{\bar{u}_\theta(r=r_i)\mu(\phi=\bar{\phi})} & Re &= \frac{\bar{u}_\theta(r=r_i)\rho d}{\mu(\phi=\bar{\phi})} \\ U_i &= \frac{u_i}{\bar{u}_\theta(r=r_i)} & & \text{para} & & i = r, \theta, z \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Donde "d" es el espaciamiento entre los cilindros,  $\mu(\phi = \bar{\phi})$  es la viscosidad equivalente de la mezcla a concentración media de partículas y  $\bar{u}_\theta(r = r_i)$  es la velocidad tangencial del cilindro interior.

Además se definen los operadores diferenciales de  $D = \frac{\partial}{\partial R}$  y  $D_* = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}$

El sistema de ecuaciones reescrito utilizando variables adimensionales y operadores diferenciales anteriormente definidos:

$$D_* U'_r = -iK U'_z \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{\eta} U'_r - 2 \frac{\bar{U}_\theta U'_\theta}{R} Re = -DP + M (DD_* - K^2) U'_r + 2DMDU'_r \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{\eta} U'_\theta + U'_r D_* \bar{U}_\theta Re = M (DD_* - K^2) U'_\theta + DM \left( D - \frac{1}{R} \right) U'_\theta + D \left( \frac{\partial M}{\partial \phi} \phi' RD \left( \frac{\bar{U}_\theta}{R} \right) \right) \quad (\text{B.19})$$

$$-\hat{\eta} U'_z iK = -K^2 P' + MiK (D_* D - K^2) U'_z + DM (K^2 + DD_*) U'_r \quad (\text{B.20})$$

Utilizando la ecuación B.17 y B.20, se obtiene una expresión para la presión adimensional  $P'$ , en función de las variables del estado base y la variable adimensional  $U'_r$ .

$$P' = -\frac{\hat{\eta} D_* U'_r}{K^2} + \frac{M}{K^2} (D_* D - K^2) D_* U'_r + \frac{DM}{K^2} (K^2 + DD_*) U'_r \quad (\text{B.21})$$

Derivando esta expresión en la dirección radial se obtiene:

$$DP' = -\frac{\hat{\eta} DD_* U'_r}{K^2} + \frac{M}{K^2} D (D_* D - K^2) D_* U'_r + \frac{DM}{K^2} D (K^2 + DD_*) U'_r + \frac{DM}{K^2} (D_* D - K^2) D_* U'_r + \frac{D^2 M}{K^2} (K^2 + DD_*) U'_r \quad (\text{B.22})$$

Por otro lado, el estado base para una relación de radio  $r_i/r_e > 0,7$  y concentraciones medias entre  $10\% < \bar{\phi} < 50\%$ , permite comprobar numéricamente que:

$$D^2 M \ll 1 \quad (\text{B.23})$$

Lo anterior es equivalente a decir que para el caso en estudio, la viscosidad es una función aproximadamente lineal en el radio. Esta afirmación no será tal cuando se trata de geometrías con

relaciones de radio mayores al límite ya mencionado. Usando esta aproximación, la ecuación B.22 se simplifica a:

$$DP' = -\frac{\hat{n}DD_*U'_r}{K^2} + \frac{M}{K^2}D(D_*D - K^2)D_*U'_r + \frac{DM}{K^2}D(K^2 + DD_*)U'_r + \frac{DM}{K^2}(D_*D - K^2)D_*U'_r \quad (\text{B.24})$$

Con esta última expresión, se sustituye el término de derivada de la perturbación de presiones en la ecuación B.18. Considerando la aproximaciones B.23, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\hat{n}(DD_* - K^2)U'_r + 2\text{Re}K^2\frac{\bar{U}_\partial U'_\partial}{R} = M(DD_* - K^2)^2U'_r + DM(D + D_*)(DD_* - K^2)U'_r \quad (\text{B.25})$$

$$\hat{n}U'_\partial + U'_r D_* \bar{U}_\partial \text{Re} = M(DD_* - K^2)U'_\partial + \left(D - \frac{1}{R}\right)U'_\partial DM + \left[\frac{\partial M}{\partial \phi}RD\left(\frac{\bar{U}_\partial}{R}\right)\right]D\phi'. \quad (\text{B.26})$$

El sistema presentado no puede ser resuelto, dado que dentro del análisis de estabilidad lineal es necesario incorporar el comportamiento de las perturbaciones de partículas. Para esta descripción, se aplica el mismo modelo utilizado para describir el estado base (Phillips et al., 1992) y dado que el sistema es no lineal, es necesario linealizar este modelo y realizar aproximaciones razonables. El flujo total de partículas esta dado por:

$$N = N_c + N_\mu \quad (\text{B.27})$$

Utilizando las definiciones de flujo por colisiones entre partículas y cambios en la viscosidad:

$$N = -\alpha^2 k_c \phi (\dot{\gamma} \nabla \phi + \phi \nabla \dot{\gamma}) + -\alpha^2 k_\mu \phi^2 \dot{\gamma} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \phi} \nabla \phi \quad (\text{B.28})$$

Considerando que el flujo total es nulo, se reemplaza la viscosidad por la relación propuesta por Krieger and Dougherty (1959), y se escribe la ecuación con las variables adimensionales:

$$F(\phi)\dot{\Gamma}\nabla\phi = \nabla\dot{\Gamma} \quad (\text{B.29})$$

Donde la función  $F$  se define como:

$$F(\phi) = -\left(\frac{1}{\phi} + \frac{k_\mu}{k_c} \frac{b}{\phi_m} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-1}\right) \quad (\text{B.30})$$

El estado base es escrito como:

$$F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}\nabla\bar{\phi} = \nabla\bar{\Gamma} \quad (\text{B.31})$$

Para analizar el estado perturbado, el campo de velocidad y concentración se expresa de la misma manera que en el desarrollo con las ecuaciones de momentum:  $\dot{\Gamma} = \dot{\bar{\Gamma}} + \dot{\Gamma}'$ ;  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ . Con estas variables se obtiene:

$$F(\bar{\phi} + \phi')(\bar{\Gamma} + \dot{\Gamma}')(\nabla\bar{\phi} + \nabla\phi') = (\nabla\dot{\bar{\Gamma}} + \nabla\dot{\Gamma}') \quad (\text{B.32})$$

El primer término es linealizado de la siguiente manera:

$$F(\bar{\phi} + \phi') \approx F(\bar{\phi}) + \frac{\partial F}{\partial \phi}(\bar{\phi})\phi' = F(\bar{\phi}) + F^*(\bar{\phi})\frac{\phi'}{\bar{\phi}} \quad (\text{B.33})$$



Donde:

$$F^*(\bar{\phi}) = -\left(\frac{1}{\bar{\phi}} + \frac{k_\mu b}{k_c \phi_m^2} \left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-2} \bar{\phi}\right) \quad (\text{B.34})$$

Al analizar numéricamente esta expresión, para concentraciones entre  $10\% < \bar{\phi} < 50\%$  y relaciones de radio  $r_i/r_e > 0,7$ , se observa que el orden de magnitud de las variables es  $F(\bar{\phi}) \sim O(10)$ ,  $F^*(\bar{\phi}) \sim O(10)$  y  $\frac{\phi'}{\bar{\phi}} \sim O(10^{-2})$ , por lo que  $F(\bar{\phi} + \phi') \approx F(\bar{\phi})$ . Esta simplificación permite reducir la expresión a:

$$F(\bar{\phi})(\bar{\Gamma} + \dot{\Gamma}')(\nabla\bar{\phi} + \nabla\phi') = \nabla\bar{\Gamma} + \nabla\dot{\Gamma}' \quad (\text{B.35})$$

Desarrollando la ecuación y eliminando los términos de segundo orden:

$$F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}\nabla\bar{\phi} + F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}\nabla\phi' + F(\bar{\phi})\nabla\bar{\phi}\dot{\Gamma}' = \nabla\bar{\Gamma} + \nabla\dot{\Gamma}' \quad (\text{B.36})$$

Los órdenes de magnitud de los términos de esta última ecuación son  $\bar{\Gamma} \sim O(10)$ ,  $\nabla\bar{\phi} \sim O(10^{-2})$ , y se considera que las variables de perturbación como del mismo orden de magnitud. Con esto, la expresión se simplifica a:

$$F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}\nabla\bar{\phi} + F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}\nabla\phi' + = \nabla\bar{\Gamma} + \nabla\dot{\Gamma}' \quad (\text{B.37})$$

Eliminando el estado base de la ecuación B.31, se obtiene:

$$F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}(\nabla\phi') = \nabla\dot{\Gamma}' \quad (\text{B.38})$$

El término que representa las perturbaciones de partículas, solo será considerado en la dirección radial. De esta manera, el gradiente de la tasa de deformación es desarrollado al igual que en la ecuación de movimiento en la dirección radial ( $\nabla\dot{\Gamma}' = (D_*D - K^2)U_r$ ). La expresión B.38 se reduce a:

$$D\phi' = \frac{(D_*D - K^2)U_r}{F(\bar{\phi})\bar{\Gamma}} \quad (\text{B.39})$$

Definiendo un coeficiente de proporcionalidad  $C_c$

$$D\phi' = -C_c(D_*D - K)U_r' \quad (\text{B.40})$$

Donde:

$$C_c = \frac{\phi}{R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\bar{U}_r}{R}\right) \left(1 + \frac{k_\mu b}{k_c \phi_m} \phi \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-1}\right)} \quad (\text{B.41})$$

Todas estas simplificaciones permiten obtener una expresión que, sin ser rigurosa en lo algebraico, relaciona en términos de órdenes de magnitud el comportamiento perturbado de la concentración de partículas.

Reemplazando esta expresión en la ecuación B.25 y B.26, el sistema de ecuaciones es:

$$(DD_* - K^2) \bar{\mathcal{H}}U_r' + 2\frac{\bar{U}_\partial U_\partial'}{R} \text{Re}K^2 = M(DD_* - K^2)^2 U_r' + DM(D + D_*)(DD_* - K^2) U_r' \quad (\text{B.42})$$

$$\bar{\mathcal{H}}U_\partial' + U_r' D_* \bar{U}_\partial \text{Re} = M(DD_* - K^2) U_\partial' + \left(D - \frac{1}{R} DM - \frac{\partial M}{\partial \phi} RD \left(\frac{\bar{U}_\partial}{R}\right)\right) C_c (D_*D - K) U_r' \quad (\text{B.43})$$

Definiendo las funciones  $F_i(R, \bar{\phi})$  como funciones del estado base:

$$\hat{\lambda}(DD_* - K^2)U'_r + 2F_1U'_\theta ReK^2 = \left(-F_2(DD_* - K^2)^2 - F_3(D + D_*)(DD_* - K^2)\right)U'_r \quad (B.44)$$

$$\hat{\lambda}U'_\theta + U'_r F_4 Re = F_2(DD_* - K^2)U'_\theta + F_3\left(D - \frac{1}{R}\right)U'_\theta + (F_5 F_6 C_c)(DD_* - K^2)U'_r \quad (B.45)$$

Donde:

$$C_c = \frac{F_8}{F_6(1 + F_7)} \quad (B.46)$$

Las variables  $F_i$  corresponden a las funciones del estado base. Estas se obtienen mediante la solución del perfil de partículas, viscosidad y velocidad del modelo de Phillips et al. (1992)

$$F_1 = \frac{\bar{U}_\theta}{R} \quad (B.47)$$

$$F_2 = M = \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \quad (B.48)$$

$$F_3 = DM = \frac{b}{\phi_m} \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b-1}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (B.49)$$

$$F_4 = D_* \bar{U}_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial R \bar{U}_\theta}{\partial R} \quad (B.50)$$

$$F_5 = \frac{\partial M}{\partial \phi} = \frac{b}{\phi_m} \frac{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-b-1}}{\left(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m}\right)^{-b}} \quad (B.51)$$

$$F_6 = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\bar{U}_\theta}{R}\right) \quad (B.52)$$

$$F_7 = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_c} \frac{b}{\phi_m} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-1} \quad (B.53)$$

$$F_8 = \phi \quad (B.54)$$

Además, las ecuaciones pueden ser reordenadas como un sistema lineal de la siguiente forma:

$$Ax = \hat{\lambda}Bx \quad (B.55)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} F_2 (DD_* - K^2)^2 + F_3 (D + D_*) (DD_* - K^2) & -2ReK^2 F_1 \\ -F_4 Re - C_c F_5 F_6 (DD_* - K^2) & F_2 (DD_* - K^2) + F_3 \left(D - \frac{1}{R} D\right) \end{bmatrix} \quad (B.56)$$

$$B = \begin{bmatrix} (DD_* - K^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.57)$$

$$x = \begin{bmatrix} U'_r \\ U'_\theta \end{bmatrix} \quad (B.58)$$

Las condiciones de borde para las variables de perturbación de velocidad son de no deslizamiento y no penetración  $U'_r = U'_\theta = 0$  en  $R = r_i/d$  y  $R = r_e/d$ .  
 Notar que si  $\phi = 0$ , el sistema de ecuaciones equivale al de un problema con un fluido homogéneo y Newtoniano.

# **Anexo C**

## **Publicación**

# Onset of Taylor-Couette instabilities in concentrated, non-colloidal suspensions

Jorge Casanova<sup>1</sup>†, Christian F. Ihle<sup>2</sup>,  
Aldo Tamburrino<sup>2</sup> and Colm-cille Caulfield<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Civil Engineering, University of Chile, Santiago, 8320000, Chile

<sup>2</sup>Department of Mining Engineering, University of Chile, Santiago, 8320000, Chile

<sup>3</sup>Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, CB3 0WA, UK

(Received ?; revised ?; accepted ?. - To be entered by editorial office)

The onset of helicoidal flow of neutrally buoyant non-colloidal concentrated suspensions in cylindrical geometry has been studied. A linear stability analysis has been made using a particle migration model to characterise the (concentric flow) base state, thus accounting for the particle interaction at volume fractions ranging from 0% to 50% by volume and inner/outer cylinder ratios between 0.7 and 0.88. The results, confirmed by experiments, show that defining a Reynolds number based on the mixture viscosity yields critical values that are monotonically decreasing with concentration, thereby exposing the destabilizing effect of particles compared to the particular case without particles. This behaviour, explained by the dissipative nature of the suspended spheres both through the viscosity and their interaction *via* their hydrodynamic migration, is interpreted in light of the particle-to-gap ratio and the mean path between them.

**Key words:** Authors should not enter keywords on the manuscript, as these must be chosen by the author during the online submission process and will then be added during the typesetting process (see <http://journals.cambridge.org/data/relatedlink/jfm-keywords.pdf> for the full list)

---

## 1. INTRODUCTION

A particularly interesting feature of Taylor-Couette flows is the transition from concentric to helicoidal flow (Donnelly 1991). This instability has been firstly predicted by Taylor (1923) in a Newtonian fluid and a steady state base velocity profile. The intrinsically appealing nature of this problem, along with the considerable number of industrial applications, has led several authors to propose various different approaches to predict its stability and different flow transitions (Joseph 1976; Drazin & Reid 2004; Dou *et al.* 2008). For time-independent, non-Newtonian fluids, despite the transition from concentric to helicoidal flow has received comparatively less attention in the literature (e.g. Landry *et al.* (2006) for Bingham plastics, Caton (2006) and Alibenyahia *et al.* (2012) for power law and Carreau fluids), the knowledge of such transition is highly relevant to predict mixing and to correctly set rheological measurement procedures on such fluids (Barnes 2000). An alternative and ubiquitously found type of non-Newtonian fluid is that obtained from mixing a liquid and a solid phase. In this paper, we study the Taylor-Couette stability of a dense, neutrally buoyant suspension of non-colloidal monodisperse spheres. We thus extend the analysis for neutrally buoyant dilute suspensions proposed by Ali *et al.* (2002) to concentrations up to 50% by volume, where the collective effect of particles in the mixture may be interpreted in terms of an appropriate constitutive relation, not only including the increased equivalent viscosity, but

† Email address for correspondence: [jcasanov@ing.uchile.cl](mailto:jcasanov@ing.uchile.cl)

also the particle flow inhomogeneities that result from the flow. In particular, the discovery that particles tend to migrate from zones of high to low shear and high to low relative change of the local suspension viscosity (Gadala-Maria & Acrivos 1980; Leighton & Acrivos 1987; Phillips *et al.* 1992), has been exposed in Couette cells using MRI or NMR by several authors (Abbott *et al.* 1991; Chow *et al.* 1994; Corbett *et al.* 1995; Ovarlez *et al.* 2006; Huang & Bonn 2007), and there have been several different approaches to describe it (Shapley *et al.* 2004). The main objective of the present work is to provide, for the first time, an adequate description of the concentric-helicoidal flow transition for moderate and high volume fractions, by means of a linear stability analysis and a set of experiments, as often appear in industrial processes involving slurry conditioning and transport.

## 2. BASE FLOW

We consider the concentric flow between two cylinders of infinite length, of radii  $r_i$  and  $r_o$  ( $r_i < r_o$ ), respectively. The inner cylinder rotates at an angular velocity  $\Omega$ , while the outer cylinder is at rest. Confined between the cylinders, a flow of a mixture of a Newtonian liquid and an ensemble of neutrally buoyant spheres is induced by the inner cylinder rotation. The fluid has a density  $\rho$  and the spheres are monodisperse, with radius  $a$ . The overall mass conservation and force balance within the flow is described by the continuity and momentum equations:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (2.2)$$

where  $u$ ,  $p$  and  $\tau$  denote the velocity pressure and deviatoric stress respectively. The latter is linearly related with the strain rate, in one dimension as (Phillips *et al.* 1992; Shapley *et al.* 2004):

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (2.3)$$

where  $\dot{\gamma}$  is the strain rate tensor. For large Péclet and low Reynolds numbers, where colloidal forces are negligible (Stickel & Powell 2005), the suspension viscosity,  $\eta$ , is expressed in terms of the solids volume fraction ( $\phi$ ), the maximum volume fraction ( $\phi_m$ ) and the liquid phase viscosity ( $\mu$ ) as a Krieger-type expression (Krieger & Dougherty 1959):

$$\eta = \mu \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-b} \quad (2.4)$$

Here, the exponent  $b$  and the packing concentration  $\phi_m$  are free parameters. Following Ovarlez *et al.* (2006), the values 2 and 0.605, respectively, give a good description of the suspension characteristics and in particular with present experimental results.

To describe the evolution of particles in the present dense system, the empirical model proposed by Phillips *et al.* (1992), is considered. In this inertialess base state model, the total particle flux,  $N$ , is interpreted as the sum of a component corresponding to particle short distance interactions through the fluid,  $N_c$ , and a second particle flow component,  $N_\mu$ , that favours the flow towards zones where the mixture viscosity is lower:

$$N_c = -\alpha^2 \phi k_c \nabla(\dot{\gamma} \phi); \quad N_\mu = -\alpha^2 \phi^2 \dot{\gamma} k_\eta \nabla(\ln \eta), \quad (2.5)$$

where  $k_c$  and  $k_\mu$  are empirical constants of the model, originally adjusted for volume fractions greater than 45%. The conservation equation for the solid particle in a Taylor-Couette device can

be written as:

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\nabla \cdot N. \quad (2.6)$$

The steady state solution of the one-dimensional mass transport problem is given by the analytical expression (Phillips *et al.* 1992):

$$\frac{\phi}{\phi_i} = \left(\frac{r}{r_i}\right)^2 \left(\frac{1 - \phi_i/\phi_m}{1 - \phi/\phi_m}\right)^{b(1 - k_\eta/k_c)}, \quad (2.7)$$

where  $N = N_c + N_\mu$ ,  $\phi_i$  is the particle concentration in the inner cylinder wall. Neglecting the inertial term and given that the flow occurs at the steady state, it is possible to condense  $k_c$  and  $k_\eta$  into one single parameter,  $k_\eta/k_c$ . Tetlow *et al.* (1998) have shown that the latter ratio is well described in terms of a linear function of the average concentration,  $\bar{\phi}$ :

$$(k_c/k_\eta)_{opt} = 0.01042\bar{\phi} + 0.1142, \quad (2.8)$$

where  $0.1 \leq \bar{\phi} \leq 0.5$ . Using (2.7) to solve for the concentration, it is straightforward to obtain the velocity profile. This formulation shows that the particle concentration is an increasing function of the radio, making the shear rate higher and the viscosity lower in areas near the inner cylinder, compared with the case of a homogeneous fluid of the same viscosity at the average volume fraction. The base flow problem suggests to consider the inner cylinder velocity,  $u_\theta(r = r_i)$ , the gap between cylinders,  $d$ , and the average viscosity,  $\eta(\bar{\phi})$ , as velocity, length and viscosity scales of the problem, respectively. Hence the following dimensionless variables are obtained:

$$R = \frac{r}{d}; \quad \bar{U}_\theta(R) = \frac{u_\theta(r)}{u_\theta(r_i)}; \quad M(R) = \frac{(1 - \frac{\phi(r)}{\phi_m})^{-b}}{(1 - \frac{\bar{\phi}}{\phi_m})^{-b}}; \quad Re = \frac{u_\theta(r_i)\rho d}{\eta(\bar{\phi})}, \quad (2.9)$$

where  $Re$  is an *ad-hoc* Reynolds number. It is noted from (2.7) that the viscosity  $\eta(\bar{\phi})$  may be readily expressed in terms of that of the flowing suspension near the inner cylinder wall ( $\mu_i = \mu(r = r_i)$ ) as  $(\phi_m - \bar{\phi})^b \mu(\bar{\phi}) = (\phi_m - \phi_i)^b \mu_i$ , with  $\phi_i = \phi(r = r_i)$ . The shear rate and concentration obtained with the model proposed by Phillips *et al.* (1992) compared to other formulations (e.g. Morris & Brady 1996; Morris & Boulay 1999) show differences in the particle volume fraction profile but are, however, small for average particle fractions below 0.5 (Shapley *et al.* 2004). The adjustment of the experimental coefficients ( $k_c$  and  $k_\mu$ ) proposed by Tetlow *et al.* (1998) gives a very good description of the experimental data for middle and high particle concentrations. However, when assessing the suspension granular temperature, corresponding to the square of the scale of the particle velocity fluctuations, most of the proposed models fail to predict the experimental behaviour Shapley *et al.* (2004), a drawback that will be found *a posteriori*, in light of the experimental results, to be of second order importance in the prediction of the instability of the system using linear analysis.

### 3. LINEAR PERTURBATION EQUATIONS

To determine the critical value of Reynolds number to find the transition between concentric and helicoidal flow, following the methodology described by Chandrasekhar (1962), we consider a first order expansion for the perturbations of the dimensionless velocity, in the directions  $r$ ,  $\theta$  and  $z$  respectively, along with the pressure and particle concentration fields as:

$$\begin{bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_z \\ P \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{U}_\theta(r) \\ 0 \\ \bar{P} \\ \bar{\phi}(R) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U'_r(R) \\ U'_\theta(R) \\ U'_z(R) \\ P'(R) \\ \phi'(R) \end{bmatrix} e^{iKz + \hat{n}t}, \quad (3.1)$$

where the disturbance dimensionless variables are  $U'_r(R)$ ,  $U'_\theta(R)$ ,  $U'_z(R)$ ,  $P'(R)$ ,  $\phi'(R) \ll 1$ . On the other hand,  $K$  is the dimensionless wave number in the  $z$  direction,  $\hat{\lambda}$  is the disturbance growth rate and  $i = \sqrt{-1}$ . Keeping up to the first order terms and making a linear expansion of the suspension viscosity yields  $M(\bar{\phi} + \phi') \approx M(\bar{\phi}) + \frac{\partial M}{\partial \phi} \phi'$ , where the corresponding momentum flux and mass conservation equations read:

$$\hat{\lambda}U'_r - 2Re\frac{\bar{U}_\theta U'_\theta}{R} = -DP' + M(DD_* - K^2)U'_r + 2DMU'_r \quad (3.2)$$

$$\hat{\lambda}U'_\theta + U'_r D_* \bar{U}_\theta Re = M(DD_* - K^2)U'_\theta + \left(D - \frac{1}{R}\right)U'_\theta DM + D\left[\frac{\partial M}{\partial \phi} \phi' RD\left(\frac{\bar{U}_\theta}{R}\right)\right] \quad (3.3)$$

$$\hat{\lambda}D_* U'_r = -K^2 P' + M(D_* D - K^2)D_* U'_r + DM(K^2 + DD_*)U'_r \quad (3.4)$$

$$D_* U'_r + iKU'_z = 0, \quad (3.5)$$

where  $D \equiv \partial/\partial R$  and  $D_* \equiv D + 1/R$ . Using (3.4) to eliminate the pressure in (3.2) and also using (3.5) to eliminate  $U'_z$ , equations (3.2)–(3.5) reduce to:

$$\hat{\lambda}(DD_* - K^2)U'_r + 2ReK^2\frac{\bar{U}_\theta U'_\theta}{R} = M(DD_* - K^2)^2 U'_r + DM(D + D_*)(DD_* - K^2)U'_r \quad (3.6)$$

$$\hat{\lambda}U'_\theta + U'_r D_* \bar{U}_\theta Re = M(DD_* - K^2)U'_\theta + \left(D - \frac{1}{R}\right)U'_\theta DM + \left[\frac{\partial M}{\partial \phi} RD\left(\frac{\bar{U}_\theta}{R}\right)\right] D\phi'. \quad (3.7)$$

The constitutive formulation of the particle concentration is a strongly non-linear relationship of the velocity perturbation and the particle concentration perturbation. Instead of linearising (2.6), whose structure is purely empirical, the model is preserved to zeroth order and only the gradient term is evaluated with the perturbation variable. The results using Phillips *et al.* (1992) and Tetlow *et al.* (1998) models show that the particle concentration gradient is proportional to the gradient of the shear rate. This can be also seen from the steady state solution and, in particular, from (2.5). Therefore:

$$D\phi' = C_c(DD_* - K^2)U'_r, \quad (3.8)$$

where the proportionality constant  $C_c$  may be obtained from the steady state particle diffusion equation (2.7).

$$C_c = -\frac{\phi}{RD\frac{\bar{U}_\theta}{R}\left[1 + \frac{k_n}{k_c}\frac{b}{\phi_m}\phi\left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-1}\right]}. \quad (3.9)$$

With this assumption, the stability equations may be thus re-written as the eigenvalue problem:

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} U'_r \\ U'_\theta \end{bmatrix} = \hat{\lambda}\mathcal{B}\begin{bmatrix} U'_r \\ U'_\theta \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

where

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} M(DD_* - K^2)^2 + DM(D + D_*)(DD_* - K^2) & -2ReK^2\frac{\bar{U}_\theta}{R} \\ -D_*\bar{U}_\theta Re + C_c\frac{\partial M}{\partial \phi}RD\frac{\bar{U}_\theta}{R}(DD_* - K^2) & M(DD_* - K^2) + DM\left(D - \frac{1}{R}\right) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} (DD_* - K^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

and the boundary conditions for the velocity disturbances are no slip and no penetration at the boundaries:

$$U_r = DU_r = U_\theta = 0 \quad \text{at} \quad R = R_i, R_e. \quad (3.13)$$



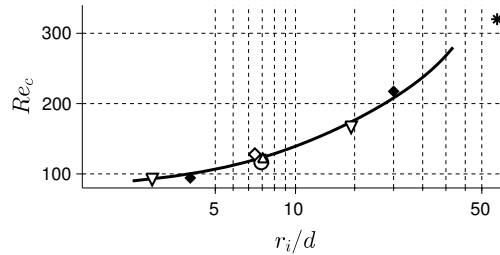


FIGURE 1. Critical Reynolds number in function of the ratio ratio for  $\bar{\phi} = 0$ . The solid line corresponds to the result of the linear stability analysis. The symbols are the experimental data reported by: Taylor (1923) ( $\nabla$ ), Coles (1965) ( $\circ$ ), Snyder (1968) ( $\blacklozenge$ ), Gollub & Swinney (1975) ( $\circ$ ), Andereck *et al.* (1986) ( $\triangle$ ) and Hinko & Andereck (2003) (\*).

Here, the numerical solution of the steady state equation of the particle concentration (2.7) allows to identify the disturbance eigenfunctions of the velocity, particle concentration, and the viscosity profile. The eigenvalue system has been solved using a finite difference scheme, looking at feasible combinations of the Reynolds and wave numbers satisfying marginal (and maximum) growth rate,  $\hat{\gamma} = 0$ , where the principle of exchange of stabilities is used to obtain the marginal growth condition (Di Prima & Swinney 1985). In the present discretization, for a number of grid points greater than 450, the solutions of the eigenvalue problem have relative differences with  $N$  below 1%. This iterative process was repeated for several fixed values of the Reynolds numbers, average concentrations and ratio ratios. The accuracy of the algorithm implementation has been tested comparing the results for  $\phi = 0$ , corresponding to the classical Taylor-Couette problem, with previously reported ones in the literature. This is shown in figure 1.

#### 4. EXPERIMENTAL

The transition from concentric to helicoidal flow has been exposed using a 150 mm height ( $h_i$ ) vertical Couette cell, with the inner cylinder rotating and the outer one static. Suspensions of resin spheres, with a diameter of  $0.5 \pm 0.05$  mm and a density of  $1.188$  gr/cm<sup>3</sup>, at average volume fractions between 0.1 and 0.5 have been considered. They have been made neutrally buoyant using a mixture of glycerin and salt, which also served as a means of adjusting the system Reynolds numbers. The density contrast between the fluid and the particles was set to be lower than  $0.005$  gr/cm<sup>3</sup> to ensure that the sedimentation effect in the torque signal was lower than 1% in 10 minutes for all the experiments. To expose the critical conditions for the onset of the Taylor-Couette instability, a set of polyamide cylinders has been built to reproduce cylinder inner/outer ratios,  $r_i/r_e$  between 0.71 and 0.88 with inner cylinder radius between 53.5 mm and 74 mm. The inner cylinder rotation has been imposed between  $\Omega = 0.01$  rad/s and 125.6 rad/s using an Anton Paar RheolabQC viscometer, which was also used to measure the torque, in the range  $T = 0.25$  mNm to 75 mNm. Prior the start of the experiments the particle concentration was measured in a beaker, comparing the mixture volume and the particle volume. To eliminate the transient flow occurring at the beginning of each experiment —this effect being especially relevant for high volume fractions—, the mixtures have been pre-sheared for 5 minutes prior measurements. The filling was done with the cylinders fitted in their final position and was made gently enough to ensure the presence of an air pocket in the concave zone below the inner cylinder, thus minimising the shear stress at the bottom during rotation (e.g., Chow *et al.* 1994). The inner cylinder velocity was programmed with a constant angular acceleration between  $0.016$  and  $0.031$  rad/s<sup>2</sup>. To assess the impact of the angular velocity ramp on the flow as per its inertial effect, the dimensionless

number parameter  $\sqrt{\frac{\Omega}{\rho\eta(\bar{\phi})/a^2}}$ , representing a viscous flow/cylinder acceleration time scale ratio, was kept below 1 for all the experiments. For each experiment, the torque signal was recorded out of an imposed angular velocity using the viscometer software. The shear stress at the inner cylinder wall ( $\tau_i$ ) has been computed out of the torque considering the solution of the infinite length cylinder problem as  $\tau_i = \frac{T}{2r_i^2 \pi h_i C}$ , where  $C$  is a constant accounting for the end effects of the inner cylinder. To adjust the value of  $C$ , a set of alternative viscosity measurements using pure glycerin samples and an ISO 3219-compliant cup and bob (Anton Paar, model CC39) was made. For each geometry, values of  $C$  —between 0.8 and 0.95— were chosen as those who gave the best match between the ISO-compliant cylinder viscosity measurements and those using the polyamide rotors. For all these calibration instances, the viscosity measurements between the standard and non-standard rotors differed by no more than 5%. The shear rate at the wall, corresponding to  $\dot{\gamma} = r d\Omega/dr$  at  $r = r_i$ , has been computed using the expression for the solution of the base state (2.7).

The detection of the transition from concentric to helicoidal flow has been made by means of the record of the slope of the flow curves; for a sufficiently high shear rate, a sharp increment of the slope has been found. This lost of linearity between angular velocity and torque is interpreted as the start of the transition to helicoidal flow. Below such critical angular velocity, the flow is assumed concentric. The apparent viscosity at the rotating bob is obtained using a least square algorithm to the  $\dot{\gamma} - \tau$  curve for angular velocities below the critical value. To ensure that this change effectively corresponded to a concentric-helicoidal transitional flow, a visual inspection of the condition was made to some experiments, where the top half of the flow volume was dyed with potassium permanganate. It has been verified that the transition points measured using the viscometer following the procedure described above coincide with a vertical displacement of the dyed volume. This is interpreted as the appearance of an axial component of velocity. The similarity of results between torque and visual measurements has been also found in previous works Cole (1976). The relatively high sensitivity of the torque sensor has thus been adopted to assess the flow transition. On the other hand, the whole gap was been observed to be sheared during steady state, and in all the cases the torque was found to be proportional to the angular velocity, thus confirming the validity of the shape of (2.4) for this suspension.

## 5. RESULTS AND DISCUSSION

The result of the solution of the eigenvalue problem referred in §3, normalized with that for  $\bar{\phi} = 0$  are compared to the experiments described in §4 in figure 2. The grey, narrow band shown in figure 2(a) and (b) represents the range of marginal stability curves for the different radio ratios used in the linear stability analysis. For a fixed value of  $\bar{\phi}$ , including  $\bar{\phi} = 0$  the critical Reynolds number, defined in (2.9), is a monotonically increasing function of  $r_i/d$ , as in figure 1. From the perspective of the concentration, the present definition of the Reynolds numbers, based on the definition of a mixture viscosity rather than that of the liquid phase, is a monotonically decreasing function of the particle concentration. This trend also appears in concentrations near the dilute limit (Ali *et al.* 2002). It is interesting that differently from Ali *et al.* (2002), not only the marginal stability curves are decreasing, but also their slopes. Increasing the particle concentration thus induces a nonlinear de-stabilisation mechanism that is not entirely compensated by the suspension viscosity only. The somewhat counterintuitive fact that increasing the concentration would induce a de-stabilization in the system is explained by the energy transfer mechanism induced by the particle stresslet, causing additional energy dissipation compared to  $\bar{\phi} = 0$ , due to the presence of particles in a shear flow (Kim & Karrila 1991).

From the perspective of the linear stability equations, the decreasing behaviour is caused by

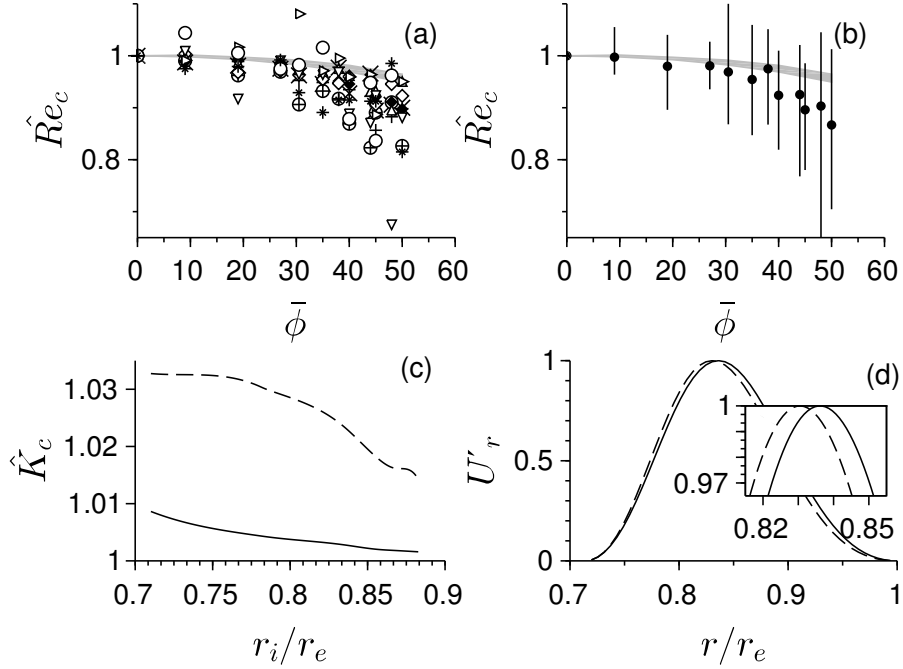


FIGURE 2. The panel (a) shows the Critical Reynolds Number normalized for geometries  $r_i/r_e = 0.88$ ( $\triangleright$ ),  $0.87$ (\* and  $\blacklozenge$ ),  $0.86$ ( $\triangle$ ),  $0.84$ ( $+$ ),  $0.79$ ( $\diamond$ ),  $0.78$ ( $\times$  and  $\circ$ ),  $0.76$ ( $\nabla$ ) and  $0.71$ ( $\oplus$ ), as a function of the mean particle concentration. The panel (b) shows the mean value of the critical Reynolds number normalized and typical error bars of the experiments. The grey band in the panels (a) and (b) are the result of the linear stability model for ratio  $r_i/r_e$  between  $0.71$  and  $0.87$ . The panel (c) shows the results of the critical wave number normalized by the wave number of the Newtonian and homogeneous problem and the panel (d) is the solution of the eigenvectors for ratio  $r_i/r_e = 0.72$ , for particle concentration  $\bar{\phi} = 10\%$ ( $-$ ) and  $\bar{\phi} = 40\%$ ( $--$ ).

(3.8). This sole term complements the base state, both of them causing a decrease of the marginal stability curve with particle concentration as shown in figure 2(a) and (b). The same figure shows this is reasonably supported by the experimental results up to  $\bar{\phi} = 0.5$ — the estimated uncertainties of the results at  $\bar{\phi} = 0.5$  are too large to sustain this assertion, as shown in in figure 2(b).

The concentration-critical Reynolds number curves in Ali *et al.* (2002) are considerably steeper than in the present case. Such differences may be inherent to the model considered in the stability analysis. Unlike Ali *et al.* (2002), based on the dilute limit assumption, the present model is based on scaling arguments that are best suited for high concentrations.

The dimensionless wave numbers resulting from the solution of the eigenvalue problem, normalized by the solution of zero concentration are monotonically decreasing functions of the ratio ratio but tend to increase with  $\bar{\phi}$  for constant values of  $r_i/r_e$ . In particular, their differences for  $r_i/r_e$  between  $0.7$  and  $0.88$  are close to 3%. An implication of this is the slight tendency of the eigenfunctions to offset their peak value nearer the inner cylinder for increasing the solids volume fraction (figure 2 (c))

Nothing that fixing the solids concentration would allow to collapse the family of velocities that are expressed in terms of  $R_i$  dimensional analysis suggests that the critical Reynolds number

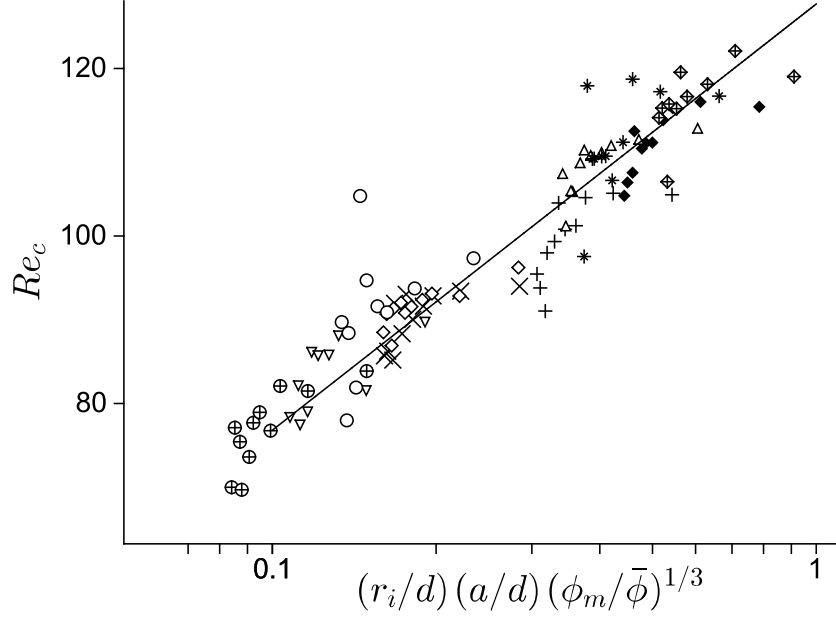


FIGURE 3. Critical Reynolds number normalized in function of dimensionless number that represent the inverse of the linear particle concentration and the gap effect. The continuous line is the best logarithmic fit  $22\log(\Phi) + 127$

may have the form  $Re_c = F(R_i)G(\phi, \phi_m, \dots)$ . On the other hand, at high particle concentrations the energy dissipation mechanism resulting from their direct interactions, and not only *via* the fluid disturbance caused by the presence of particles in the dilute limit, cause an additional effect on the onset of non-axisymmetric flow. This feature is not directly captured by the mixture viscosity model, which expresses only a property in terms of the initial (or average) concentration. A simple interpretation may be given in terms of the ratio between the particle size and the mean length occupied by the particles in an arbitrary line within the fluid domain. In particular, this may be expressed in terms of the linear concentration, defined here as the equivalent length of particles per unit length,  $(\phi/\phi_m)^{1/3}$ . A related dimensionless number  $\Pi = (\alpha/d)(\phi_m/\phi)^{1/3}$  is defined. Figure 3 shows a good correspondence between the observed critical Reynolds numbers and the proposed dimensionless number.

## 6. CONCLUSION

The present set of experiments suggests that the Taylor-Couette flow of a particle suspension is less stable than one featuring the same flow conditions but a Newtonian fluid of the same equivalent viscosity, i.e., with no local variations. While this decrease has been identified by Ali *et al.* (2002) in the dilute limit, without being conclusive about the difference observed with their own experiments, it has been found here that the existence of higher concentrations enhances this effect non-linearly. The importance of an accurate description of the flow is therefore capital to understand both the onset conditions and the subsequent regime transitions in this system.

The linear stability analysis presented in §3, using a constitutive formulation for the particle flux, shows a similar behavior with the experimental results. An interesting feature of this analysis is that the decreasing characteristic of the Reynolds numbers with the concentration function is not explained solely by the base particle concentration profile, but is also given by the contribution of the particle disturbance in the system.

The present results suggest that the inter-particle interaction has a major influence on the flow transition. The interpretation in terms of the mean free path proposed here may shed light to a more detailed explanation.

## 7. ACKNOWLEDGEMENTS

I gratefully acknowledge the support and generosity of The e Department of Civil Engineering of the University of Chile and Departament of Applied Mathematics and Theoretical Physic of the Cambridge University. The research for this paper was financially supported by the Chilean National Commission for Scientific and Technological Research, CONICYT (through Fondecyt Project No. 11110201 and 113091) and the internal scholarship of the University of Chile.

## REFERENCES

- ABBOTT, JR, TETLOW, N, GRAHAM, AL, ALTABELLI, SA, FUKUSHIMA, EIICHI, MONDY, LA & STEPHENS, TS 1991 Experimental observations of particle migration in concentrated suspensions: Couette flow. *Journal of Rheology* **35** (5), 773–795.
- ALI, MOHAMED E, MITRA, DEEPANJAN, SCHWILLE, JOHN A & LUEPTOW, RICHARD M 2002 Hydrodynamic stability of a suspension in cylindrical couette flow. *Physics of Fluids* **14** (3), 1236–1243.
- ALIBENYAHIA, BRAHIM, LEMAITRE, CÉCILE, NOUAR, CHÉRIF & AIT-MESSAOUDENE, NOUREDDINE 2012 Revisiting the stability of circular couette flow of shear-thinning fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **183**, 37–51.
- ANDERECK, C DAVID, LIU, SS & SWINNEY, HARRY L 1986 Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **164**, 155–183.
- BARNES, HOWARD A 2000 *A handbook of elementary rheology*. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics Aberystwyth., England.
- CATON, FRANÇOIS 2006 Linear stability of circular couette flow of inelastic viscoplastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **134** (1), 148–154.
- CHANDRASEKHAR, S. 1962 *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New York.
- CHOW, ANDREA W, SINTON, STEVEN W, IWAMIYA, JOSEPH H & STEPHENS, THOMAS S 1994 Shear-induced particle migration in couette and parallel-plate viscometers: Nmr imaging and stress measurements. *Physics of Fluids* **6** (8), 2561–2576.
- COLE, JA 1976 Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *Journal of Fluid Mechanics* **75** (01), 1–15.
- COLES, DONALD 1965 Transition in circular couette flow. *Journal of Fluid Mechanics* **21** (03), 385–425.
- CORBETT, ALANA M, PHILLIPS, RONALD J, KAUTEN, ROBERT J & MCCARTHY, KATHRYN L 1995 Magnetic resonance imaging of concentration and velocity profiles of pure fluids and solid suspensions in rotating geometries. *Journal of Rheology* **39** (5), 907–924.
- DI PRIMA, RC & SWINNEY, HARRY L 1985 Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, pp. 139–180. Springer.
- DONNELLY, RUSSELL J 1991 Taylor-couette flow: the early days. *Phys. Today* **44** (11), 32–39.
- DOU, HUA-SHU, KHOO, BOO CHEONG & YEO, KHOON SENG 2008 Instability of taylor–couette flow between concentric rotating cylinders. *International Journal of Thermal Sciences* **47** (11), 1422–1435.
- DRAZIN, PHILIP G & REID, WILLIAM HILL 2004 *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press.
- GADALA-MARIA, F & ACRIVOS, ANDREAS 1980 Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *Journal of Rheology* **24** (6), 799–814.
- GOLLUB, JERRY P & SWINNEY, HARRY L 1975 Onset of turbulence in a rotating fluid. *Physical Review Letters* **35** (14), 927.

- HINKO, KA & ANDERECK, CD 2003 Transitions in the small gap limit of taylor-couette flow. *The Ohio State University*.
- HUANG, NICOLAS & BONN, DANIEL 2007 Viscosity of a dense suspension in couette flow. *Journal of fluid mechanics* **590**, 497–507.
- JOSEPH, DANIEL D 1976 Stability of fluid motions. i, ii. *NASA STI/Recon Technical Report A* **77**, 12423.
- KIM, S & KARRILA, SJ 1991 *Microhydrodynamics*. Heinemann, Boston.
- KRIEGER, IRVIN M & DOUGHERTY, THOMAS J 1959 A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Transactions of The Society of Rheology* **3** (1), 137–152.
- LANDRY, MP, FRIGAARD, IA & MARTINEZ, DM 2006 *Stability and instability of Taylor–Couette flows of a Bingham fluid*, , vol. 560. Cambridge Univ Press.
- LEIGHTON, DAVID & ACRIVOS, ANDREAS 1987 The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *Journal of Fluid Mechanics* **181**, 415–439.
- MORRIS, JEFFREY F & BOULAY, FABIENNE 1999 Curvilinear flows of noncolloidal suspensions: The role of normal stresses. *Journal of Rheology* **43** (5), 1213–1237.
- MORRIS, JEFFREY F & BRADY, JOHN F 1996 Self-diffusion in sheared suspensions. *Journal of Fluid Mechanics* **312**, 223–252.
- OVARLEZ, GUILLAUME, BERTRAND, FRANÇOIS & RODTS, STÉPHANE 2006 Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology* **50** (3), 259–292.
- PHILLIPS, RONALD J, ARMSTRONG, ROBERT C, BROWN, ROBERT A, GRAHAM, ALAN L & ABBOTT, JAMES R 1992 A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Physics of Fluids* **4** (1), 30–40.
- SHAPLEY, NINA C, BROWN, ROBERT A & ARMSTRONG, ROBERT C 2004 Evaluation of particle migration models based on laser doppler velocimetry measurements in concentrated suspensions. *Journal of Rheology* **48** (2), 255–279.
- SNYDER, HA 1968 Stability of rotating couette flow. i. asymmetric waveforms. *Physics of Fluids* **11** (4), 728–734.
- STICKEL, JONATHAN J & POWELL, ROBERT L 2005 Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 129–149.
- TAYLOR, GEOFFREY I 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* pp. 289–343.
- TETLOW, NICHOLAS, GRAHAM, ALAN L, INGBER, MARC S, SUBIA, SAMUEL R, MONDY, LISA A & ALTABELLI, STEVE A 1998 Particle migration in a couette apparatus: experiment and modeling. *Journal of Rheology* **42** (2), 307–327.

## **Anexo D**

# **XX Congreso latinoamericano de hidráulica**

## XXV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA SANTAGO, CHILE, AGOSTO 2014

### Estudio experimental de comienzo de inestabilidades de Taylor-Couette en suspensiones no coloidales

*Jorge Casanova, Christian Ihle y Aldo Tamburrino*

Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Chile,  
[jcasanov@ing.uchile.cl](mailto:jcasanov@ing.uchile.cl), [cihle@ing.uchile.cl](mailto:cihle@ing.uchile.cl), [atamburr@ing.uchile.cl](mailto:atamburr@ing.uchile.cl)

#### RESUMEN:

Los ensayos realizados en un reómetro rotacional tienen como límite superior de medición la velocidad angular crítica para asegurar un flujo axisimétrico. Para velocidades mayores a esta, el flujo deja de ser concéntrico y comienza la transición hacia un flujo helicoidal en régimen laminar. Este fenómeno fue estudiado para fluidos Newtonianos por Taylor, mediante un análisis de estabilidad lineal, pero sus supuestos no permiten extender sus resultados a mezclas de fluidos con partículas sólidas. En el presente artículo, utilizando modelos existentes para la migración de partículas se utilizaron las ecuaciones de momentum y continuidad, acoplado a un método semiempírico de estabilidad de flujo para obtener la velocidad crítica de transición de un fluido concéntrico a uno helicoidal. Con el objeto de validar el modelo, se desarrolló un trabajo experimental para predecir la velocidad crítica que genera la inestabilidad. Finalmente, se comparan los resultados experimentales de fluidos con y sin partículas, determinando así el efecto de las partículas sobre la estabilidad de flujo.

#### ABSTRACT:

Taylor determined the critical condition under which a rotating axisymmetric laminar flow becomes unstable and the concentric streamlines grows into a helical pattern, within the laminar regime. Taylor's criterion is obtained from a linear stability analysis with some assumptions that does not allow to extend the result to solid-fluid mixtures. In this article, some models developed to characterize particle migration are used in conjunction with the momentum and continuity equations and a semi-empirical flow stability method to predict the critical angular velocity that indicates the change from a concentric to helical flow. An experimental study is carried out to validate the model. Experimental results of fluid with and without particles are compared in order to determine the effect of the presence of solid particles in the flow stability.

**PALABRAS CLAVES:** Taylor-Couette; Migración de partículas; Estabilidad.



## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo trata sobre la estabilidad de una mezcla de un fluido newtoniano y partículas sólidas esféricas en un flujo de Couette. La geometría de Taylor-Couette consiste en dos cilindros concéntricos donde al menos uno se encuentra rotando, generando un flujo forzado por las condiciones de borde. Para velocidades bajas, el fluido puede ser descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes donde se obtiene una solución de un fluido concéntrico.

A velocidades mayores, el flujo comienza una transición hacia un flujo helicoidal en régimen laminar en donde aparecen velocidades en la dirección radial y vertical. En un fluido newtoniano, esta transición fue estudiada inicialmente por Taylor (1923), quien aplicó la teoría de estabilidad lineal para encontrar la velocidad angular crítica en la cual cualquier perturbación vuelve inestable el sistema.

Este estudio es válido para un flujo newtoniano homogéneo y una geometría donde el espaciado entre ambos cilindros es mucho menor que el radio de los cilindros.

Otro enfoque para estudiar la estabilidad de en este tipo de flujos es el criterio semiempírico del gradiente de energía (Dou 2004), el cual establece que, para una geometría dada, la transición desde un flujo concéntrico hacia uno helicoidal comienza cuando la razón entre el gradiente de energía en la dirección perpendicular al flujo y el gradiente de energía en la dirección del flujo alcanzan un valor máximo. Este valor máximo se obtiene experimentalmente y solo depende de la geometría del sistema.

Por otro lado, los estudios de mezclas entre un fluido newtoniano y partículas sólidas en este tipo de geometrías han revelado la existencia del fenómeno de migración de partículas hacia zonas de menor esfuerzo de corte, generando así un perfil de concentración de partículas, lo que se traduce en un perfil de viscosidad aparente del fluido y un perfil de velocidad distinto al de un fluido newtoniano homogéneo.

Las diferencias entre los perfiles de velocidad de un fluido homogéneo y una mezcla, además de la dinámica que existe entre los flujos de momentum y partículas son las razones que no permiten extender los resultados de un fluido homogéneo hacia este tipo de mezclas.

El presente trabajo muestra el estudio de inestabilidades de Taylor-Couette en mezclas de fluidos newtonianos con partículas sólidas, desde el punto de vista experimental, y posteriormente la utilización del criterio semiempírico de gradiente de energía para describir estos resultados

## DISEÑO EXPERIMENTAL

Con el objetivo de estudiar la transición desde un flujo concéntrico hacia uno helicoidal, se ha diseñado una geometría de Taylor-Couette que es capaz de reproducir los efectos de migración de partículas en un flujo concéntrico y lograr velocidades que permitan estudiar las condiciones críticas de estabilidad.

Se ha escogido una geometría vertical, de dimensiones  $h_i = 150\text{mm}$ ,  $r_i = 595\text{mm}$  y  $r_e = 686\text{mm}$  según muestra la Figura 1. La relevancia de los efectos inerciales frente a los esfuerzos viscosos, caracterizadas por el número adimensional  $\Pi_1 = \Omega d^2/\nu$ , ha sido minimizada fijando la velocidad angular máxima en  $\Omega_{\text{max}} = 120 [1/\text{min}]$  y la viscosidad cinemática aparente mínima en  $\nu_{\text{min}} = 20 \text{ cP}$ .

El cilindro exterior permanece fijo mientras que el cilindro interior es impulsado por un reómetro rotacional “Anton Paar”, modelo “RheolabQC”, el cual tiene un rango de registro de velocidad angular y torque de  $0.01\text{-}1200 [1/\text{min}]$  y  $0.25\text{-}75[\text{mNm}]$  respectivamente.

Para evitar efectos de deslizamiento de partículas con las paredes de ambos cilindros, en el cilindro interior se han incrustado partículas y en el cilindro exterior se ha dispuesto una rugosidad del mismo orden que el tamaño de partículas.

Los criterios de viscosidad mínima experimental y no superar los registros máximos de torques del reómetro rotacional.

## PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Mediante el software “Reoplus” se programó rampas de aceleración constante, desde el reposo hasta 120[1/min], en tiempos mayores a 5 min, minimizando los efectos de inercia de aceleración angular frente a los esfuerzos viscosos caracterizados por el numero adimensional  $\Pi_2 = d\Omega/dt \cdot d^2/\Omega/\nu$ .

Las muestras fueron preparadas asegurando una velocidad de sedimentación menor a 1[mm/min]. La concentración de partículas de las mezclas fue calculada midiendo el volumen total de mezcla y el volumen de partículas en un estado de sedimentación final sin vibración suponiendo una concentración de empaquetamiento  $\phi_m = 61\%$  (Barnes et al., 1986). Las muestras son mezcladas durante 5 minutos y vertidas y reposadas durante 30 antes de comenzar cada ensayo.

Luego de terminado la rampa de aceleración constante, la muestra fue filtrada y se realizó un ensayo reológico para obtener la viscosidad del fluido puro.

Se registraron las medidas de torque, velocidad angular y viscosidad del líquido para mezclas con concentración de partículas de 0, 9, 19, 27, 31, 35, 38, 40, 43, 45, 48 y 50%.

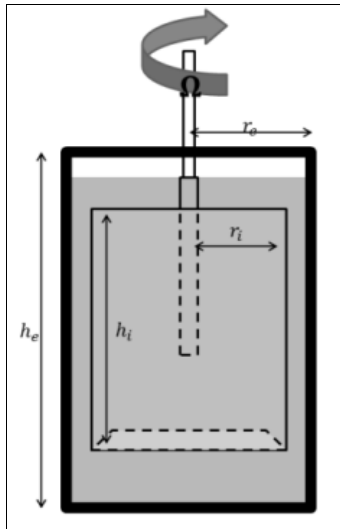
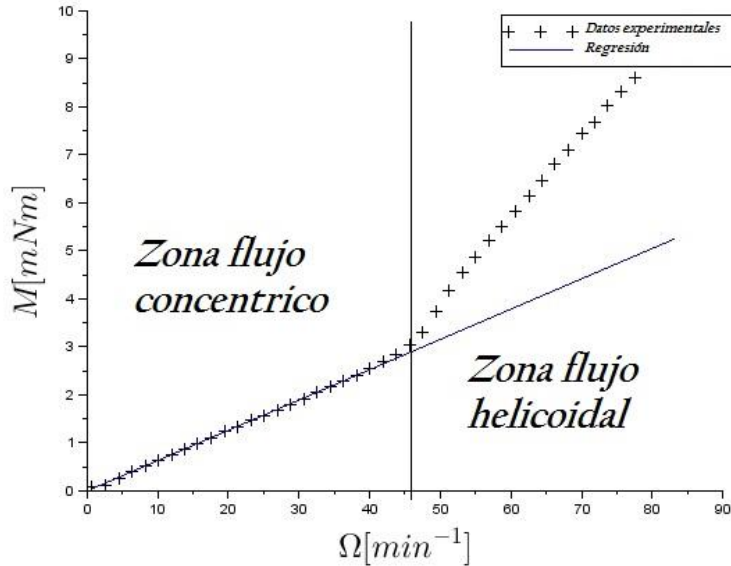


Figura 1.- Instalación experimental

## PROCESAMIENTO DE LOS DATOS

Los datos experimentales de velocidad angular ( $\Omega$ ) y el torque del cilindro interior ( $M$ ) muestran dos comportamientos totalmente distintos: primero un comportamiento lineal y luego un comportamiento de torque creciente como lo muestra la Figura 2.

El primer comportamiento lineal es interpretado como un régimen de flujo concéntrico con un perfil de velocidad dependiente de la distribución espacial de las partículas y el segundo comportamiento se interpreta como un flujo helicoidal en régimen laminar (Wasp 1977). El punto que delimita el primer régimen se definió como aquel dato que maximiza la diferencia entre las pendientes de las regresiones lineales de cada zona. Para efectos de este estudio, solo es importante delimitar la zona de flujo concéntrico y no la existencia de una zona de transición entre ambos comportamientos.



**Figura 2.-** Curva de velocidad angular versus torque del cilindro interior. Se han delimitado dos zonas interpretadas como zona de flujo concéntrico y zona de flujo helicoidal.

En la zona de flujo concéntrico se puede definir una viscosidad aparente de la mezcla en la pared del cilindro interior ( $\mu_w$ ) como la razón entre el esfuerzo de corte en la pared interior ( $\tau_w$ ) y la tasa de deformación en la pared del cilindro interior ( $\dot{\gamma}_w$ ). El esfuerzo de corte se obtiene por una relación geométrica definida como

$$\tau_w = \frac{M}{2r_i^2 \pi h_i C} \quad [1]$$

Donde  $C$  es un coeficiente de calibración obtenido con pruebas con fluidos newtonianos de viscosidad conocida.

La tasa de deformación en la pared del cilindro interior se obtiene mediante la solución del perfil de velocidad de una mezcla de partículas en una geometría de Taylor-Couette. Distintos estudios han demostrado que para este tipos de mezclas, en un flujo laminar, las partículas tienden a reordenarse agrupándose en zonas de menor tasa de deformación. Phillips et al. (1992) propusieron un modelo de migración de partículas basado en argumentos de escala, donde los flujos de partículas ( $N$ ) son producidos por colisiones y cambios en la viscosidad.

$$N = -aK_c \phi^2 \dot{\gamma} \nabla \left[ \ln \left( \dot{\gamma} \phi \mu^{\frac{K_\mu}{K_c}} \right) \right] \quad [2]$$

Donde  $\dot{\gamma}$  es la tasa de deformación,  $\mu$  la viscosidad,  $K_c$  y  $K_\mu$  son coeficientes que representan la importancia de los flujos por colisiones y cambios en la viscosidad.

Este modelo es extendido por Tetlow et al. (1997) para un rango de concentraciones medias de partículas ( $\bar{\Phi}$ ) desde 0 hasta 50%, en donde ajusta los coeficientes experimentales en función de la concentración media de partículas

$$\frac{K_c}{K_\mu} = 0.01042 \bar{\Phi} + 0.1142 \quad [3]$$

La viscosidad aparente de la mezcla puede ser descrita en función de la concentración de partículas mediante la siguiente relación empírica Propuesta por Krieger (1959).

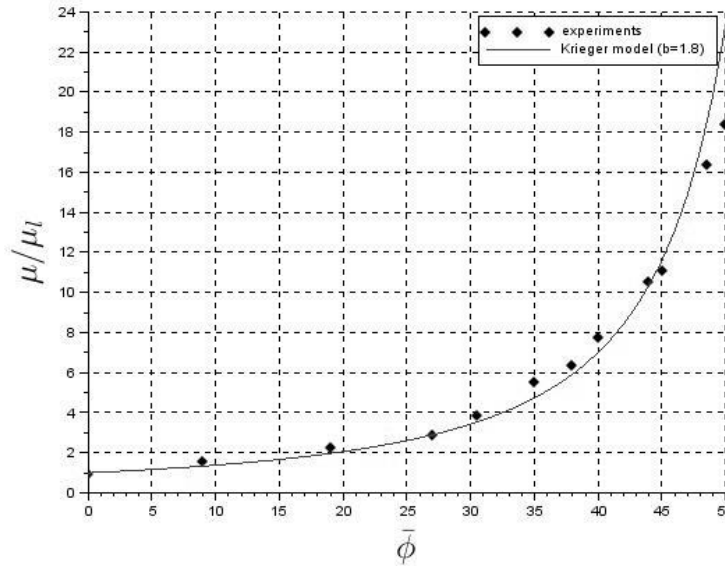
$$\frac{\mu_a}{\mu_l} = \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-b} \quad [4]$$

Donde  $\mu_l$  es la viscosidad del líquido,  $\mu_a$  es la viscosidad aparente de la mezcla y  $b$  es un coeficiente de ajuste experimental.

La viscosidad aparente en la zona del cilindro interior es ajustada para obtener una viscosidad aparente de la mezcla  $\mu_a(\bar{\Phi})$  mediante la siguiente relación

$$\mu_a(\bar{\Phi}) = \mu_a(\Phi_w) \cdot \frac{\left(1 - \frac{\bar{\Phi}}{\Phi_m}\right)^{-b}}{\left(1 - \frac{\Phi_w}{\Phi_m}\right)^{-b}} \quad [5]$$

Donde  $\phi_w$  es la concentración en la pared interior y  $\bar{\phi}$  es la concentración media de partículas. La obtención del valor experimental b es un proceso iterativo puesto que la viscosidad aparente se obtiene del modelo de migración de partículas.

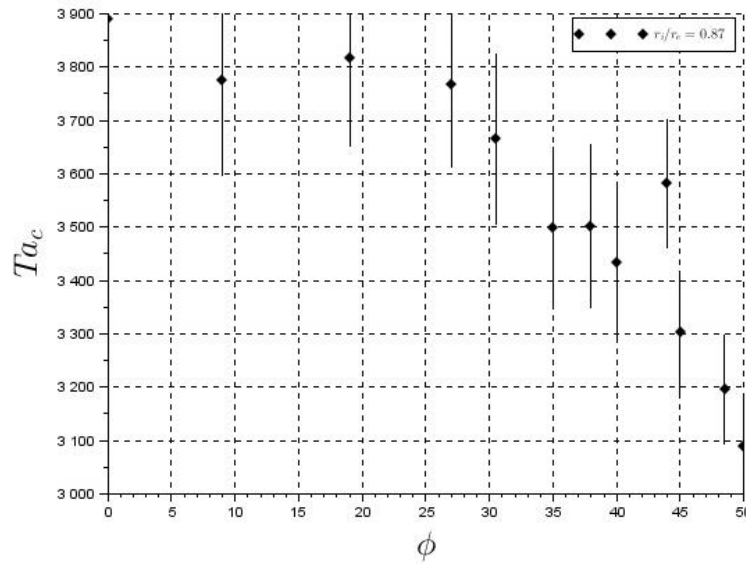


**Figura 3.-** Razón entre la viscosidad aparente y la viscosidad del fluido versus la concentración media de partículas. Los puntos corresponden a los datos experimental y la línea continua corresponde a el ajuste de la ecuación [4], con exponente b=1.8.

La velocidad angular en cambio de régimen ( $\Omega_c$ ) es interpretada como la velocidad crítica de estabilidad de flujo concéntrico. En la práctica, para la velocidad que se ha definido como crítica no es posible asegurar que el flujo es estable, por lo que es un punto donde el flujo ya no es concéntrico. El punto crítico de estabilidad de flujo puede ser descrito como un valor máximo del número adimensional de Taylor escrito como:

$$Ta_c = 4 \frac{\Omega_c^2 r_i^2 (r_e - r_i)^4}{(\mu/\rho)^2 r_e^2 - r_i^2} \quad [6]$$

Para poder comparar con el caso de un fluido homogéneo y newtoniano, la viscosidad representativa es la viscosidad correspondiente a la concentración media  $\mu_a(\bar{\Phi})$ . Así, los resultados de número de Taylor crítico, versus la concentración media de partículas se muestran en la Figura 4.



**Figura 4.-** Resultados experimentales del número de Taylor Crítico en función de la concentración media de partículas.

### CRITERIO DE ESTABILIDAD MEDIANTE MÉTODO DE GRADIENTE DE ENERGÍA

El problema de estabilidad de un flujo concéntrico puede ser abordado con el método semiempírico de gradiente de energía, el cual establece que, para una geometría dada, la estabilidad de un flujo viscoso depende de la magnitud relativa entre los gradientes de energía en la dirección transversal ( $\partial E/\partial r$ ) y pérdida de energía en la dirección del flujo ( $\partial H/\partial s$ ) (Dou 2004). La razón entre ambas expresiones (K) representa la capacidad de que cualquier perturbación pueda desarrollar una perturbación global en el sistema, por lo que existe un valor crítico ( $K_c$ ) el cual determina el comienzo de una transición. Según esta definición, un flujo será estable mientras se cumpla la siguiente condición.

$$K = \frac{\partial E/\partial r}{\partial H/\partial s} < K_c \quad [7]$$

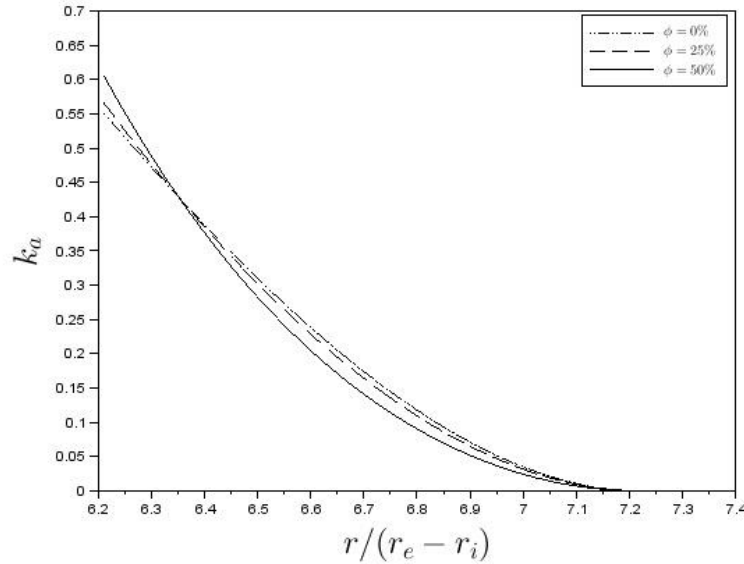
En un flujo de Taylor-Couette, ambos gradientes se pueden escribir como (Dou et al. 2007)

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \rho \frac{v}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \quad [8]$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \tau \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \quad [9]$$

Adimensionalizando estas ecuaciones con las constantes de velocidad del cilindro interior  $v_0$ , espaciado entre los cilindros  $d$  y viscosidad media del fluido  $\mu(\Phi)$ , obtenemos las variables adimensionales de velocidad (V), radio (R) y viscosidad ( $M_\mu$ )

$$K = \frac{\rho v_0 d}{\mu} \frac{\frac{v^2 \partial(RV)}{R \partial R}}{\left( R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{V}{R} \right) \right)^2} = Re \cdot k_a \quad [10]$$



**Figura 5.-** Valor de la variable  $k_a$  versus el radio adimensional  $r/(r_e - r_i)$  para concentraciones de partículas sólidas de 0, 25 y 50%.

Utilizando los modelos de migración de partículas descritos en la sección anterior, se obtiene que, para una geometría dada, el valor de  $k_a$  es una función de la concentración de partículas y el radio, por lo que la condición crítica de estabilidad puede reescribirse como:

$$Re_c \text{Max}_R(k_a) < K_c \quad [11]$$

Analizando el valor de  $k_a$ , observamos que existe una distribución espacial diferente entre los casos con y sin partículas, observado especialmente que el máximo valor de  $k_a$  es proporcional a la concentración de partículas.

Para poder comparar este resultado, con los resultados experimentales, se puede reconstruir el número de Taylor crítico en función de la concentración media de partículas ( $\bar{\phi}$ ) a partir del caso base de un fluido newtoniano sin partículas

$$\frac{Ta_c(\phi)}{Ta_c(\phi=0)} = \frac{\text{Max}(k_a(\phi=0))^2}{\text{Max}(k_a(\phi))^2} \quad [12]$$

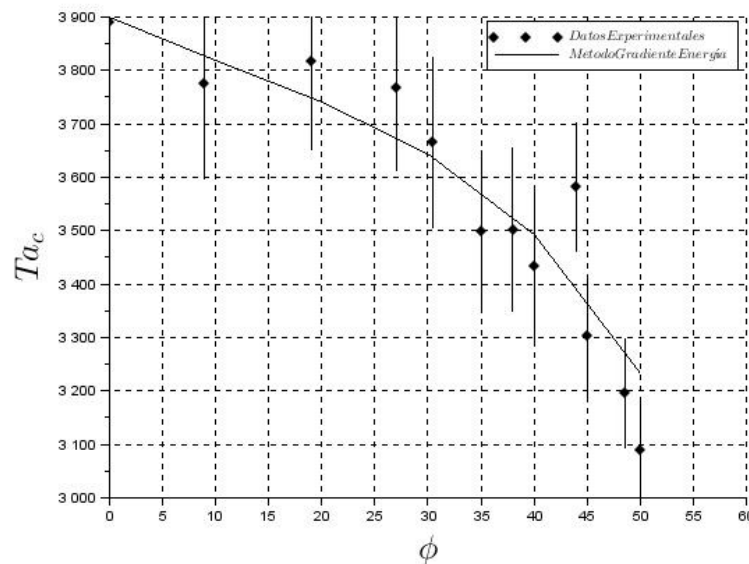
Donde  $Ta_c(\phi = 0)$  es el número de Taylor crítico para el caso sin concentración de partículas. Este valor del número de Taylor para el caso newtoniano homogéneo es utilizado para calibrar el modelo semiempírico de gradiente de energía. De los resultados experimentales mostrados en la figura 4 se observa que el valor crítico del número de Taylor para el caso newtoniano homogéneo es de aproximadamente  $Ta_c \approx 3900$ , por lo que utilizando la ecuación [12] se construye la función de valores críticos de Taylor para distintas concentraciones, como se muestra en la Figura 6.

## CONCLUSIONES

Para obtener una viscosidad representativa de un fluido con viscosidad variable se ha utilizado modelos de migración de partículas para conocer las condiciones locales de tasa de deformación en la zona de medición de esfuerzo de corte. Las viscosidades obtenidas a distintas concentraciones de partículas han calibrado un modelo de viscosidad aparente dentro de los valores reportados (Krieger & Dougherty 1959; Phillips et al. 1992). Esta metodología permite obtener

valores de viscosidad de la concentración media de partículas aislando los efectos de migración de partículas y de concentración de la tasa de deformación en el cilindro interior.

La teoría del estabilidad de flujo mediante el criterio de gradiente de energía establece que, para una geometría dada, existe un valor máximo entre la razón de los gradientes de energía transversal y gradientes de energía en la dirección al flujo. Esto es equivalente a establecer un número de Taylor fijo para una geometría dada y un flujo newtoniano homogéneo. Al extender estas relaciones hacia un flujo con migración de partículas y una geometría dada, se observa que el número de Taylor es una función decreciente de la concentración de partículas. La tendencia decreciente del número de Taylor es explicada por las condiciones locales de la zona de mayor energía; en las cercanías al cilindro interior, la migración de partículas provoca gradientes de velocidad mayores y viscosidad menor que favorece la propagación de perturbaciones. Al comparar estas condiciones con el caso homogéneo, se concluye que, para el caso con partículas, es necesario un menor número de Taylor para alcanzar las mismas condiciones críticas de estabilidad que en un fluido sin partículas.



**Figura 6.-** Número de Taylor Crítico en función de la concentración de partículas. La línea continua representa el valor crítico según el criterio de gradiente de energía calibrado para el caso newtoniano y homogéneo y extendido según la ecuación [12].

### AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la vicerrectoría de la Universidad de Chile, que a través de su beca de “ayuda para estancias cortas de investigación” permitió que la presente investigación fuera complementada también en la Universidad de Cambridge. Fondecyt a través de los proyectos 11110201 y 1130910.

### REFERENCIAS

Barnes, H.A., 2000. *A Handbook of Elementary Rheology*, England: University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics Aberystwyth.

Dou, H., 2004. Energy Gradient Theory of Hydrodynamic Instability arXiv : nlin / 0501049v2 [ nlin . CD ] 29 Jan 2005. *Third International Conference on nonlinear Science*.

Dou, H., Khoo, B.C. & Yeo, K.S., 2007. Energy Loss Distribution in the Plane Couette Flow and the Taylor-Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders. *Inter. J. of Thermal Science*, 46, pp.262–275.

Krieger, I.M. & Dougherty, T.J., 1959. A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspension of Rigid Spheres. *J. Rheol*, 3(1), pp.137–153.

Phillips, R.J. et al., 1992. A constitutive equation for concentrated for shear-induced particle migration suspensions that accounts. *J. Physics Fluids*, 4(1), pp.30–41.

Taylor, G.I., 1923. Stability of a viscous Liquid contained between Two Rotating Cylinders. *The Royal Society*, 223(1923), pp.289–343.

Wasp, E.J., 1977. *Solid-Liquid Flow Slurry Pipeline Transportation*, San Francisco, California.