UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ESTUDIO DEL MECANISMO DE ASIGNACIÓN PROPORCIONAL APLICADO A REDES DE CONGESTIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

EDUARDO ISRAEL ZÚÑIGA LEYTON

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ CORREA HAEUSSLER

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ALEJANDRO JOFRÉ CÁCERES
JORGE AMAYA ARRIAGADA

SANTIAGO DE CHILE
2015

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL
TÍTULO DE: INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: EDUARDO ISRAEL ZUÑIGA LEYTON
FECHA: 2 de noviembre de 2015
PROF. GUÍA: JOSÉ CORREA HAEUSSLER

ESTUDIO DEL MECANISMO DE ASIGNACIÓN PROPORCIONAL APLICADO A REDES DE CONGESTIÓN

El objetivo principal de este trabajo de memoria de título es estudiar la unicidad del Equilibrio de Nash para el mecanismo de asignación proporcional aplicado a Redes de Congestión, descrito por Johari y Tsitsiklis [6], donde lo que se busca repartir es la capacidad de los arcos de la red entre varios agentes interesados, cada uno de los cuales cuenta con un conjunto de caminos en la red a través de los que pretende enviar flujo. En dicho trabajo, se muestra que el equilibrio es único para el caso en que la red es en realidad un solo arco, pero se deja como problema abierto la unicidad en una red general. Aportar al conocimiento sobre la unicidad del equilibrio en configuraciones más generales, es la principal motivación del trabajo desarrollado.

En esta memoria se aborda el problema estudiando la unicidad desde casos particulares a situaciones más generales, obteniendo como resultado principal que el equilibrio es único para el caso de una red con arcos de distintas capacidades, y donde los jugadores están interesados cada uno en un solo camino (esto último se denomina *Fixed Routing*). Para algunos casos particulares incluso fue posible explicitar las estrategias que definen el único equilibrio. El caso más general -donde cada jugador está interesado en varios caminos en la red- continúa como problema abierto, sin embargo se muestran aquí algunos contraejemplos a otras nociones de unicidad que se pierden en aquel caso.

Como objetivo secundario, el trabajo desarrollado en el marco de esta memoria busca dar una nueva demostración de que el Precio de la Anarquía del juego en una red general es 3/4, aplicando la técnica para el caso de un solo arco descrita por Correa et al.[3]. Dicho objetivo se logra, en primer lugar para el caso de *Fixed Routing* y una red con la misma capacidad en todos los arcos, y también para el caso en que los jugadores tienen todos el mismo camino de interés, y las capacidades de los arcos son distintas. Por la experiencia adquirida durante el desarrollo del trabajo, es posible intuir que este es el caso más general en que se puede aplicar la técnica sin modificarla.

Por último, se define para el caso de un solo arco, una versión secuencial del mecanismo de asignación proporcional, donde los jugadores no actúan simultáneamente sino que van llegando en orden. Para el caso de dos jugadores, se muestra explícitamente cuál es el único Equilibrio Perfecto en Subjuegos y se obtiene que el Precio de la Anarquía secuencial asociado es 0,875. Este resultado coincide -tanto en la asignación que entrega el equilibrio, como en la eficiencia del mismo- con el mecanismo *óptimo* para dos jugadores definido por Sanghavi y Hajek [12]. Para el caso de tres jugadores no es posible encontrar analíticamente equilibrios, pero sí se encuentran relaciones implícitas entre las estrategias de los jugadores que permiten hallar numéricamente dos candidatos a equilibrio.

"There's an old Earth saying, Captain. A phrase of great power and wisdom and consolation to the soul in times of need (...) Allons-y!"

-The Tenth Doctor

Agradecimientos

En primer lugar agradezco profundamente a mis padres. Tratar de confinar a un pequeño párrafo todos los aspectos por los cuales ustedes son importantes para mí, resulta sencillamente infactible. Sólo quiero mencionar que hubiese sido imposible llegar hasta aquí sin su apoyo constante y su amor incondicional. Mi principal motivación para seguir adelante es poder devolverle a ustedes, de alguna forma, todo lo que me han dado y la confianza que depositan en mí. Este logro es suyo.

Quiero agradecer a Katherine, mi compañera de vida desde que entramos a la Facultad. Juntos las hemos pasado absolutamente todas, y sólo tú me viste en los peores momentos. Fue precisamente en esos momentos, donde ni yo me tenía fe, que creíste sinceramente en mí, y me diste fuerza y confianza para seguir. Pero más allá del apoyo que siempre me has brindado, te agradezco por siempre tratar de entenderme a pesar de lo difícil (o muy difícil) que fuera. Eres un pilar fundamental de este logro, y de mucho más.

También quiero agradecer a Camila, mi gran amiga desde hace cuatro años. El paso por el DIM hubiese sido mucho más cuesta arriba sin esas largas jornadas de conversar, reírnos, arreglar el mundo, y también de estudiar. Has sido un gran apoyo para mí en muchos aspectos, gracias Cami.

A todos los amigos del DIM y de la Facultad con los que compartí, especialmente a Waldo, Giancarlo y Hugo. Gracias a todos por la buena onda y por hacer más ameno el tránsito por Beauchef.

A mi profesor guía José R. Correa, por confiar en mí para este trabajo y por ser un apoyo constante en todo el proceso relativo a la memoria, además por mostrarme más de cerca el mundo de la investigación. También agradezco a los profesores Alejandro Jofré y Jorge Amaya, por tener la disposición y voluntad para participar en esta comisión.

A mi muy querida Escuela “E-10 Cadete Arturo Prat” y mi Liceo “José V. Lastarria”, por darme las herramientas para entrar en la Facultad, pero sobretodo por darme herramientas para formarme como ser humano.

Finalmente agradezco a mis perros, Homero y Lisa, por levantarme el ánimo cada vez que llego a la casa, y por estar siempre ahí, dispuestos a jugar cuando estaba chato de la tesis.

Tabla de Contenido

Índice de tablas

Índice de Ilustraciones

Introducción

El trabajo realizado en esta memoria se enmarca dentro de la Teoría de Juegos, que surge naturalmente en situaciones de competencia estratégica entre agentes, y particularmente se desarrolla en el área de *Diseño de Mecanismos*. La intuición es sencilla: un mecanismo es una forma de repartir estratégicamente un conjunto de bienes entre una serie de agentes interesados, con el fin de lograr algún resultado. Por ejemplo, se podría tratar de maximizar el pago que recibe el vendedor de los bienes (rematador), maximizar el bienestar social, maximizar el bienestar de los compradores, etc.

En ese contexto, en el año 1997 Kelly [7] propone el *Mecanismo de Asignación Proporcional*, que consiste esencialmente en repartir un bien infinitamente divisible entre varios agentes, de forma proporcional a una valoración expresada por ellos. Este mecanismo ha sido ampliamente estudiado y aplicado a diversos ámbitos: Cachon y Lariviere [1] muestran que se puede aplicar a un modelo de *supply*, en que un proveedor debe repartir un bien limitado entre varios interesados; por otro lado, Sinha y Anastasopoulus [13] lo implementan en un modelo de transmisión de datos en internet. Y tal como estas, se pueden hallar múltiples aplicaciones del mecanismo.

El ámbito de aplicación que interesa particularmente para este trabajo, es el de las redes de congestión o comunicación, estudiado por Johari y Tsitsiklis[6]. Una red de comunicación es -a grandes rasgos- un grafo, en el cual las capacidades de los arcos (o también llamados *links* indistintamente) son el bien a repartir. Los jugadores tienen caminos de interés en la red, a través de los cuales pretenden enviar flujo, y compiten por las capacidades de los arcos. Cabe señalar que esta configuración de red y caminos tiene diversas aplicaciones, por ejemplo para modelar problemas de repartición de ancho de banda, como se puede ver en el trabajo de Dimakis et al.[5].

Johari y Tsitsiklis muestran en primer lugar, un modelo en que se reparte la capacidad de un solo *link* entre varios agentes, y prueban para ese caso, que el Equilibrio de Nash del juego no sólo existe, sino que es único y está bien caracterizado por una desigualdad variacional. Luego, generalizan naturalmente el modelo a una red con muchos arcos y agentes que tienen varios caminos de interés dentro de ella. Es precisamente ese modelo el que motiva mayormente el trabajo realizado en el contexto de esta memoria, ya que Johari y Tsitsiklis muestran que para ese caso el Equilibrio de Nash existe, pero dejan abierta la pregunta de si es único o no. El poder aumentar el conocimiento que se tiene sobre la unicidad, en casos más generales que el de un solo *link*, constituye el principal objetivo del trabajo realizado.

Cuando se trata de diseño de mecanismos, otra pregunta importante además de la existencia y unicidad de equilibrios, es la eficiencia de los mismos. El concepto de eficiencia, o más precisamente de pérdida de eficiencia, se rescata en la idea de *Precio de la Anarquía*, concepto introducido originalmente por Koutsoupias y Papadimitriou [8], que será definido formalmente en el capítulo 1. Sanghavi y Hajek [12] muestran un mecanismo que es *óptimo* para una clase razonable de mecanismos *válidos*, el cual alcanza un Precio de la Anarquía de 7/8, es decir que el "peor" Equilibrio de Nash no es peor que 7/8 del óptimo social para alguna medida de eficiencia. Y además, muestran que esta cota no puede ser mejorada por otro mecanismo *válido*.

En el trabajo de Johari y Tsitsiklis [6] se prueba que, tanto en el caso de una red con un sólo *link*, como en el de la red general, el Precio de la Anarquía es 3/4. Si bien la demostración para el caso de un arco tiene la ventaja de ser constructiva, en el sentido de entregar explícitamente el equilibrio que alcanza el Precio de la Anarquía, ambas demostraciones -para el caso de un arco y la red general- son bastante densas. En un trabajo de Correa et al. [3] se da una demostración mucho más limpia para el caso de un *link*. El poder aplicar esta técnica a casos más generales, también constituye un objetivo del trabajo desarrollado.

En el último capítulo de esta memoria se define un mecanismo de asignación proporcional secuencial, donde los jugadores no realizan sus apuestas o *bids* simultáneamente, sino que van llegando en instantes distintos. Este tipo de mecanismos se ha vuelto de particular interés últimamente puesto que modelan mejor la realidad, ya que muchas veces es imposible que todos los jugadores apuesten exactamente al mismo tiempo. Paes Leme, Syrgkanis y Tardos [9] definen el concepto de *Precio de la Anarquía Secuencial* para este tipo de juegos, y muestran que muchas veces la eficiencia mejora sustantivamente, ya que por la racionalidad secuencial se eliminan algunos casos patológicos de equilibrios, que llevan a tener Precios de la Anarquía elevados en las versiones simultáneas. Sin embargo, el desarrollar una versión secuencial de un juego no siempre garantiza mejoras en la eficiencia, tal como se puede ver en el trabajo de Correa et al. [2], donde se muestra que la pérdida de eficiencia de la versión secuencial de los juegos de ruteo es no acotada, incluso en el caso lineal.

Con respecto a este mecanismo secuencial, el objetivo es estudiar la unicidad y forma de los equilibrios, además de comparar la eficiencia -en términos de Precio de la Anarquía- de esta versión secuencial versus la simultánea.

Finalmente, en las conclusiones se plantearán algunas líneas a seguir en un trabajo futuro, a partir de lo desarrollado aquí; principalmente relacionado a la unicidad para el caso más general de una red de congestión, y a la estructura del juego secuencial.

Capítulo 1

Nociones básicas y definición del Modelo

En la primera sección de este capítulo se introducen las definiciones básicas de Teoría de Juegos para poder definir un Juego con propiedad. Las definiciones aquí entregadas son consistentes con las que se pueden encontrar en [11]. Más adelante, en las siguientes secciones, se presenta el modelo descrito por Johari y Tsitsiklis [6], que da el contexto para el trabajo desarrollado en el marco de esta memoria.

1.1. Definición de Juegos y Precio de la Anarquía

Definición 1.1 *Juego en forma normal*

Un juego está caracterizado por una tripleta (N, S, U), donde:

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *son los jugadores.*
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ *es el espacio de estrategias, donde cada S_i corresponde al espacio de estrategias del jugador i, que no es otra cosa que el conjunto de acciones que puede tomar el jugador i.*
- $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *es una familia de funciones de pago, donde u_i es el pago del i-ésimo jugador.*

La dinámica es que cada jugador elige una estrategia $s_i \in S_i$, y debido a ella recibe un pago $u_i(s) = u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ que depende no sólo de su propia elección de estrategia, sino que de las estrategias elegidas por todos los jugadores.

La idea de *solución* del juego la entrega el concepto de Equilibrio de Nash, que intuitivamente se refiere a un estado en que todos los jugadores están conformes, en el sentido de que no tienen incentivos a desviar su estrategia unilateralmente.

Definición 1.2 *Equilibrio de Nash*

Un perfil de estrategias $\bar{s} \in S$ se dice Equilibrio de Nash si:

$$\forall\, i \in N \quad u_i(\bar{s}) \geq u_i(s_i, \bar{s}_{-i}) \; \forall s_i \in S_i$$

donde $s_{-i} \doteq (s_j)_{j \neq i}$ *son las estrategias de todos los jugadores distintos a i.*

Las definiciones son naturales si en lugar de buscar maximizar una función de pago, lo que hacen los jugadores es minimizar un costo. A partir de un Equilibrio de Nash, uno puede cuestionarse si esa situación -donde cada jugador está conforme con su resultado- es óptima para el colectivo de jugadores. Esa pérdida de bienestar, debido a competir versus una situación donde hubiese un planificador central, que coordina una solución óptima pensando en el colectivo, es lo que trata de recoger el concepto de *Precio de la Anarquía*, definido originalmente por Papadimitriou y Koutsopias [8].

Definición 1.3 *Precio de la Anarquía*

Consideremos un juego en que se busca minimizar costos $u_i : S \to \mathbb{R}$*, y donde además existe una función de costo social* $C : S \to [0, \infty)$*, cuyo valor mínimo es* $\underline{C}$*. Se dice que el juego tiene Precio de la Anarquía (PoA)* α *si para todo Equilibrio de Nash s, se tiene que:*

$$C(s) \leq \alpha \underline{C}.$$

Observación: Intuitivamente, el PoA nos dice *qué tan mal* lo hace el peor Equilibrio de Nash. La definición aquí entregada es muy conveniente por su flexibilidad, en el sentido de que no explicita cuál es la función de costo social a considerar. Típicamente se usa como costo o beneficio total la utilidad agregada, esto es sumar las utilidades de los jugadores evaluadas en alguna asignación; pero podría haber casos en que el beneficio social que se persigue sea distinto, y por eso la flexibilidad de esta definición es importante. Existen formas alternativas de definir el mismo concepto, pero que son equivalentes: para una muestra ver el trabajo de Sanghavi y Hajek [12].

El último concepto previo importante es el de *Mecanismo*, que intuitivamente se refiere a un método para asignar uno o más bienes entre jugadores interesados, y que tienen distintas valoraciones por dichos bienes.

Supongamos que todo jugador $i \in N$ posee una valoración v_i por un recurso. A priori uno quisiera repartir el recurso de manera de optimizar según las valoraciones, pero en general las valoraciones son información privada. Luego, lo que se hace es que cada jugador entrega una declaración estratégica de su valoración, con lo que se construye un perfil de declaraciones $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

Definición 1.4 *Mecanismo Directo*

Un mecanismo directo queda definido por un par de funciones (f, p)*, de asignación y pago respectivamente, tales que la asignación* x_i *del jugador i es* $x_i = f_i(w)$*, y lo que debe pagar es* $p_i(w)$*. Donde* $w = (w_1, \ldots, w_n)$ *son las declaraciones de los jugadores mencionadas anteriormente.*

A continuación podemos comenzar a establecer con propiedad el modelo en el cual se desarrolla el juego de interés para este trabajo.

1.2. Modelo básico de una red con un sólo *link*

Supongamos que existe un conjunto R de jugadores interesados en utilizar un arco con capacidad $C > 0$. Se supone además, que cada agente o jugador está representado por su función de utilidad $U_r : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ que es cóncava, estrictamente creciente y continuamente diferenciable. Cada jugador $r \in R$, recibe una utilidad $U_r(d_r)$ si se le asigna una porción d_r de la capacidad C.

El mecanismo de asignación funciona de la siguiente forma:

- Cada jugador $r \in R$, hace una oferta o apuesta (*bid*) $w_r \geq 0$ por la capacidad del arco. Este será el costo que pagará cada jugador por su asignación.
- Dado el vector de ofertas $w \doteq (w_r : \ r \in R)$, el arco decide cobrar un precio $\mu = \frac{\sum_{r\in R} w_r}{C}$, uniforme para todos los jugadores.
- Finalmente, se le asigna a cada jugador su apuesta dividida por el precio μ del bien, es decir una cantidad proporcional a su apuesta:
$$d_r = \frac{w_r}{\mu} = \frac{w_r C}{\displaystyle\sum_{r\in R} w_r} .$$

Cabe señalar que claramente el mecanismo asigna toda la capacidad del arco, lo que se aprecia inmediatamente pues $\displaystyle\sum_{r\in R} d_r = C$.

Observación: Este mecanismo no hace discriminación por precio entre jugadores, es decir, "cobra" el mismo μ a todos. Existen otros mecanismos que discriminan en precio según el tipo de jugador interesado, por ejemplo cobrando más al de mayor valoración, o menos al que vaya a comprar más volumen. Un ejemplo de un mecanismo que discrimina en precio y es óptimo en términos de eficiencia, se puede hallar en [12].

Establecidas ya las estrategias de los jugadores, que corresponden a las apuestas ($w_r \geq 0$), y también el mecanismo de asignación, sólo resta definir formalmente los pagos para que el juego esté completo.

Definición 1.5 *Pagos del Juego*

Al igual que antes, se usa la notación w_{-r} para referirse a todas las ofertas de los jugadores que no son r. Dicho lo anterior, el pago de un jugador r está dado por:

$$Q_r(w_r; w_{-r}) = \begin{cases} U_r\left(\dfrac{w_r C}{\sum_{s\in R} w_s}\right) - w_r & si\ w_r > 0 \\ U_r(0) & si\ w_r = 0. \end{cases}$$

Una vez definidos los pagos del juego, el Equilibrio de Nash se define a partir de ellos naturalmente como sigue:

Definición 1.6 *Equilibrio de Nash*

Un Equilibrio de Nash -en adelante NE- del juego definido por los pagos $\{Q_r\}_{r\in R}$, es un vector $\bar{w} \geq 0$ tal que para todo r:

$$Q_r(\bar{w}_r; \bar{w}_{-r}) \geq Q_r(w_r; \bar{w}_{-r}) \ \ \forall \ w_r \geq 0.$$

Observación: El pago definido anteriormente presenta una discontinuidad en $w_r = 0$ cuando $\displaystyle\sum_{s\in R:\ s\neq r} w_s = 0$. Este hecho es particularmente importante, ya que puede hacer que no exista NE en el juego; un ejemplo de aquello es mostrado por Johari y Tsitsiklis [6]. Afortunadamente, los autores también muestran que dicha dificultad se soluciona agregando suficiente competencia, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1.7 ***Existencia y Unicidad de NE***

Si $R > 1$, entonces existe un único NE $w \geq 0$ del juego definido por $\{Q_r\}_{r\in R}$, el cual satisface que $\sum_{r\in R} w_r > 0$. Además, en este caso, el vector d definido por componentes como $d_r = \dfrac{w_r C}{\sum_{s\in R} w_s}$, es la única solución del problema de optimización:

$$\begin{aligned} (GAME) \quad \max \sum_{r\in R} \hat{U}_r(d_r) \\ \sum_{r\in R} d_r \leq C \\ d_r \geq 0 \ \ \forall \ r \in R. \end{aligned}$$

Con $\hat{U}_r = \left(1 - \dfrac{d_r}{C}\right) U_r(d_r) + \dfrac{d_r}{C}\left(\dfrac{1}{d_r}\displaystyle\int_0^{d_r} U_r(z)dz\right)$.

En la demostración del Teorema se obtiene -en un paso intermedio- una caracterización variacional del equilibrio, que se enuncia a continuación como Corolario.

Corolario 1.8 *El vector w es un NE ssi al menos dos componentes del vector w son positivas, y para todo r se tiene la siguiente condición:*

$$U_r'\left(\frac{w_r}{\sum_{s\in R} w_s} C\right)\left(1 - \frac{w_r}{\sum_{s\in R} w_s}\right) = \frac{\sum_{s\in R} w_s}{C} \quad si \ w_r > 0$$

$$U_r'(0) \leq \frac{\sum_{s\in R} w_s}{C} \quad si \ w_r = 0.$$

Johari y Tsitsiklis también muestran un resultado para el Precio de la Anarquía del mecanismo en este caso, pero para eso antes hay que definir lo que se considerará un óptimo social en este juego.

Definición 1.9 *Un óptimo social del juego es una solución al problema de maximización de* *la utilidad agregada, o sea un vector d_r^S solución de:*

$$
\begin{aligned}
(SYSTEM) \quad \max \sum_{r\in R} U_r(d_r) \\
\sum_{r\in R} d_r \le C \\
d_r \ge 0 \ \ \forall\ r \in R.
\end{aligned}
$$

Observación: Notemos que este problema tiene solución porque la función objetivo es continua y la región factible es compacta. Además, como la región factible es convexa, si las funciones U_r son estrictamente cóncavas, el óptimo social no sólo existe, sino que es único.

Teorema 1.10 ***Precio de la Anarquía 3/4***

Supongamos que $U_r(0) \ge 0$ para todo r y denotemos d^S a un óptimo social. Sea además d^G la única solución de (GAME), entonces se cumple:

$$\sum_{r\in R} U_r(d_r^G) \ge \frac{3}{4}\sum_{r\in R} U_r(d_r^S).$$

Observación: Como se mencionó antes, la demostración original de este teorema fue hecha por Johari y Tsitsiklis [6], sin embargo una demostración alternativa puede encontrarse en el trabajo de Correa et al. [3]. Lo positivo de la demostración que aparece en el trabajo de Johari y Tsitsiklis es que es constructiva, en el sentido de que entrega explícitamente el caso que alcanza el PoA. Dicho caso se muestra como Corolario a continuación.

Corolario 1.11 *Dados $R > 1$ jugadores, el peor NE (es decir aquel que entrega el valor del PoA) ocurre cuando todos tienen utilidades lineales $U_r(d_r) = \alpha_r d_r$, tales que $\max \alpha_r = 1$ -que sin perder generalidad se asume que es α_1- y:*

$$
\begin{gathered}
d_1 = 1/2 \\
d_r = \frac{1-d_1}{R-1} \quad y \quad \alpha_r = \frac{1-d_1}{1-d_r} \ \forall r \neq 1.
\end{gathered}
$$

1.3. Red General

Una vez estudiado el caso de sólo un arco a repartir, la generalización natural es estudiar una red con numerosos arcos. El modelo se generaliza como sigue:

Consideremos un conjunto R de jugadores y una red con un conjunto J de arcos, cada uno con capacidad $C_j > 0$. Además, se asume que existe un conjunto P de caminos en la red que son de interés para los jugadores. Cada camino $p \in P$ usa una serie de arcos j, si un arco j sirve al camino p se denota $j \in p$. Cada jugador r tiene una colección de caminos disponibles a través de la red, si el camino p es de interés para r se denota $p \in r$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que para un camino p existe un único r tal que $p \in r$. No se pierde generalidad pues, si dos jugadores están interesados en el mismo camino, simplemente los numeramos dos veces en el conjunto P de caminos.

Definición 1.12 *En este modelo generalizado, el óptimo social es una asignación que resuelve el siguiente problema:*

$$(SYSTEM) \quad \max \sum_{r \in R} U_r(d_r)$$

$$\sum_{p \in P:\ j \in p} y_p \leq C_j \ \forall\ j \in J$$

$$d_r = \sum_{p \in r} y_p \quad \forall\ r \in R$$

$$y_p \geq 0 \ \forall\ p \in P.$$

El mecanismo en este caso funciona de la siguiente forma:

- Cada jugador r hace una oferta $w_{jr} \geq 0$ por cada arco j en la red. El vector con las estrategias de r se denota $w_r = (w_{jr} :\ j \in J)$.
- Dado el vector de estrategias $w = (w_r :\ r \in R)$, en cada arco j se asigna a cada jugador r, una cantidad x_{jr} proporcional a la oferta, es decir:

$$x_{jr} = \begin{cases} \dfrac{w_{jr} C_j}{\displaystyle\sum_{s \in R} w_{js}} & \text{si } w_{jr} > 0 \\ 0 & \text{si } w_{jr} = 0. \end{cases}$$

  Observación: En rigor lo que se hace es definir un precio uniforme en cada arco y luego asignar la apuesta dividida por el precio, al igual que en el caso del juego con un arco.

- Para r, se define su vector de asignaciones como $x_r(w) = (x_{jr}(w),\ j \in J)$, y su asignación total $d_r(x_r(w))$ se define como la solución del siguiente problema de flujo máximo:

$$(FM) \quad \max \sum_{p \in r} y_p$$

$$\sum_{p \in r:\ j \in p} y_p \leq x_{jr} \ \forall\ j \in J$$

$$y_p \geq 0 \ \forall\ p \in P.$$

Definición 1.13 *Pagos y NE*

A partir de $d_r(x_r(w))$ se define el pago del jugador r como:

$$Q_r(w_r, w_{-r}) = U_r(d_r(x_r(w))) - \sum_{j \in J} w_{jr}.$$

Donde en realidad la suma $\sum_{j \in J} w_{jr}$ *será sólo sobre los arcos* j *de interés para el jugador, puesto que en los arcos que no usa naturalmente apostará* 0. *En consecuencia un NE es un vector* $\bar{w} \geq 0$ *tal que* $\forall\ r$

$$Q_r(\bar{w}_r; \bar{w}_{-r}) \geq Q_r(w_r; \bar{w}_{-r})\ \forall\ w_r \geq 0.$$

Observación: Un comentario sobre la notación que se utilizará en el resto de esta memoria. Para todas las cantidades que dependan tanto de jugadores como de arcos (por ejemplo x o w) se utilizarán los sub ínidices jr, es decir el primer sub índice se refiere al arco, y el segundo al jugador. Esto será válido para cualquier cantidad que dependa de arcos y jugadores que se defina en esta memoria.

Un problema que tiene esta forma de generalizar el caso de una red con un sólo *link*, es que no necesariamente existe NE para esta configuración. De hecho, ni siquiera existe para grandes cantidades de jugadores, ya que por la diferencia de capacidades pueden ocurrir cuellos de botella donde haya jugadores pagando más de lo necesario por algún arco, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo de Johari y Tsitsiklis [6].

Ejemplo 1 Supongamos que existen $R > 1$ jugadores que quieren usar el mismo camino consistente en dos arcos, de capacidades C_1 y C_2, donde $C_2 >> C_1$. Los jugadores tienen utilidades U_r estrictamente crecientes, cóncavas y continuas.

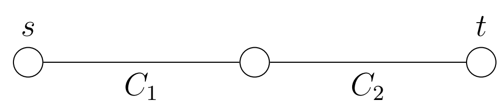

Figura 1.1: No existe equilibrio a pesar de haber suficiente competencia.

En primer lugar notemos que el flujo que enviará cada jugador por la red, es decir la solución al problema (FM) definido antes, será $d_r = \text{mín}\{x_{1r}(w), x_{2r}(w)\}$. Esto se probará formalmente en el Lema 2.2 del capítulo 2, por ahora lo consideramos cierto sin demostrar. Ahora bien, razonemos por contradicción suponiendo que existe NE w del juego.

- En primer lugar notemos que se apuesta positivamente en ambos arcos, es decir: $\sum_{r \in R} w_{jr} > 0\ \forall j = 1, 2$. Para ver esto primero supongamos que nadie apuesta en ningún arco, i.e. $\sum_{r \in R} w_{1r} = \sum_{r \in R} w_{2r} = 0$. En este caso, cualquier jugador r apostando ε en cada arco se lleva $d_r = \text{mín}\{C_1, C_2\} = C_1$, y como la utilidad es estrictamente creciente entonces para ε suficientemente chico sí le conviene desviarse. Luego esta situación no es NE.

  Supongamos ahora que $\sum_{r \in R} w_{1r} = 0$ y $\sum_{r \in R} w_{2r} > 0$, y consideremos un jugador r que está apostando positivamente en el segundo arco, es decir $w_{2r} > 0$. Ese jugador está obteniendo $d_r = \text{mín}\{0, x_{2r}(w)\} = 0$. Luego, claramente tiene intenciones a desviarse bajando su pago w_{2r} a cero, pues se seguirá llevando lo mismo pero pagando menos, en consecuencia esta situación tampoco puede ser equilibrio. Análogamente se prueba que $\sum_{r \in R} w_{1r} > 0$ y $\sum_{r \in R} w_{2r} = 0$ tampoco es equilibrio. Por lo tanto, si w es NE se debe cumplir que $\sum_{r \in R} w_{jr} > 0\ \forall j = 1, 2.$.

- Ahora bien, como hicimos notar en la definición del mecanismo, éste reparte completamente la capacidad de los arcos, luego tenemos las siguientes relaciones:
$$\sum_{r\in R}\frac{w_{1r}C_1}{\sum_{r\in R}w_{1r}}=C_1$$
$$\sum_{r\in R}\frac{w_{2r}C_2}{\sum_{r\in R}w_{2r}}=C_2.$$
Como $C_1 << C_2$, necesariamente existe r tal que $\frac{w_{1r}C_1}{\sum_{r\in R}w_{1r}} < \frac{w_{2r}C_2}{\sum_{r\in R}w_{2r}}$, y en consecuencia $d_r = \frac{w_{1r}C_1}{\sum_{r\in R}w_{1r}}$. Por lo tanto, ese jugador tiene motivación a bajar su pago w_{2r} ya que se seguirá llevando el mismo d_r, pero pagando menos. Luego w no puede ser NE.

Resumiendo, un NE w debe cumplir que se apueste positivamente en ambos arcos, pero a la vez esto provoca una contradicción en las estrategias de los jugadores. En conclusión no existe NE para esta configuración.

1.4. Juego Extendido

Es por lo anterior que los autores consideran extender el espacio de acción de los jugadores, en el sentido de permitirles no sólo apostar para llevarse capacidad en un arco, sino que también "pedir" capacidad cuando las apuestas totales por ese arco sean 0, para así no incurrir en el problema de "cuello de botella" que presenta la red del Ejemplo 1 . Esta idea se formaliza en la presente sección.

Ahora las estrategias de los jugadores no sólo son ofertas, sino que además pueden hacer *peticiones* de capacidad por cada arco, que tomarán efecto cuando nadie oferte por dicho arco. Más formalmente, para un jugador r la estrategia ahora es un vector $\sigma_r = (\phi_r, w_r)$, donde $\phi_r = (\phi_{jr} :\ j \in J)$ representa las *peticiones* hechas por el jugador en cada arco de la red, y w_r es el mismo de antes.

A partir de las estrategias de todos los jugadores, el mecanismo opera ahora, para cada jugador r, de la siguiente forma en la cada arco j:

- Si $\displaystyle\sum_{s\in R} w_{js} > 0$, entonces: $x_{jr}(\sigma) = \dfrac{w_{jr}C}{\sum_{s\in R}w_{js}}$.
- Si $\displaystyle\sum_{s\in R} w_{js} = 0$ y $\displaystyle\sum_{s\in R}\phi_{js} \leq C_j$, entonces: $x_{jr}(\sigma) = \phi_{jr}$.
- En otro caso se asigna 0.

Luego, la asignación que recibe un jugador en cada arco queda definida en términos del perfil de estrategias σ:

$$x_r(\sigma) = (x_{jr}(\sigma),\ j \in J).$$

Así, su asignación total es $d_r(x_r(\sigma))$, con d_r el óptimo del problema de flujo máximo (FM) con capacidades $x_{jr}(\sigma)$. Análogamente al caso no extendido, el pago del jugador r es:

$$T_r(\sigma_r;\sigma_{-r}) = U_r(d_r(x_r(\sigma))) - \sum_{j\in J} w_{jr}.$$

En consecuencia, un NE se define naturalmente como un perfil σ que verifica lo mismo que en la Definición 1.13.

Efectivamente esto se trata de una extensión del juego original ya que, como se prueba en el siguiente teorema de Johari y Tsitsiklis [6], los NE del juego original siguen siéndolo al extender el espacio de estrategias.

Teorema 1.14 *Asumamos que para todo r la función de utilidad U_r es cóncava, no decreciente y continua. Supongamos además, que w es una estrategia para el juego no extendido definido por $\{Q_r\}_{r\in R}$. Para cada r, definamos su petición en cada arco j como:*

$$\phi_{jr} = \begin{cases} \dfrac{w_{jr}C_j}{\sum_{s\in R} w_{js}} & si\ w_{jr} > 0 \\ 0 & si\ w_{jr} = 0. \end{cases}$$

Y dado ϕ, definamos para todo r, $\sigma_r \doteq (\phi_r, w_r)$. Entonces cada usuario recibe exactamente el mismo pago en el juego extendido y en el normal, i.e.,

$$T_r(\sigma_r;\sigma_{-r}) = Q_r(w_r, w_{-r}).$$

Luego, si w es un NE del juego definido por $\{Q_r\}_{r\in R}$, entonces σ es un NE del juego definido por $\{T_r\}_{r\in R}$.

Teorema 1.15 ***Existencia de NE y Precio de la Anarquía.***

Asumiendo que para cada r la función de utilidad es cóncava, no decreciente y continua, entonces siempre existe NE del juego extendido. Además, el Precio de la Anarquía con este mecanismo extendido sigue siendo $3/4$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [6].

□

Observación: (i) Es justamente a partir de este teorema que nace la pregunta que motiva principalmente el trabajo realizado en el contexto de esta memoria, ya que los autores sólo prueban existencia y dejan abierta la pregunta sobre la unicidad. **Lo que se buscará probar en el siguiente capítulo es la unicidad del NE, en términos de flujo**. Este es el concepto de unicidad más interesante, ya que en el caso de las estrategias basta ponderarlas todas por alguna constante y la asignación seguiría siendo equilibrio.

(ii) Es importante señalar, que en este juego extendido las hipótesis para existencia del NE -y en consecuencia, para el teorema del PoA- son más débiles que en el caso de una red con un sólo arco, eso le agrega una dificultad extra al juego general.

Capítulo 2

Estudio del Problema de Unicidad

2.1. Caracterización de la solución para un *link*

Antes de comenzar con el estudio del problema de unicidad propiamente tal, se presenta un lema que explicíta la forma de la solución en el caso del juego en una red con un sólo arco, para el caso particular de funciones de utilidad lineales. Esto será útil más adelante, ya que permitirá resolver un par de ejemplos para ganar intuición sobre la unicidad del NE.

Lema 2.1 *Dados R jugadores con funciones de utilidad lineales $U_i(d_i) = \alpha_i d_i$, la solución al sistema del Corolario 1.8, con un arco de capacidad C, es para todo $i \in R$:*

$$w_i = \frac{(R-1)C \prod_{j=1}^{R} \alpha_j \left[\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_j} - (R-2) \prod_{j \neq i} \alpha_j \right]}{\left(\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R} \frac{1}{\alpha_j} \right)^2}$$

Y en consecuencia la asignación, para todo i, es:

$$x_i = \frac{C \left[\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_j} - (R-2) \prod_{j \neq i} \alpha_j \right]}{\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R} \frac{1}{\alpha_j}}$$

Esto se tiene para todo i por la simetría del problema.

Demostración. Se sabe por [6] que la solución al sistema del Corolario 1.8 es única, así que para probar el lema basta ver que los w_i satisfacen el sistema. Sólo para ilustrar se separa la demostración en el caso $R = 2$ y $R > 2$.

- Si $R = 2$: Entonces la forma que deberían tener los w_i es:

$$w_1 = \frac{C\alpha_1\alpha_2 \cdot \alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \qquad w_2 = \frac{C\alpha_1\alpha_2 \cdot \alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}$$

Primero, verifiquemos que a partir de estos w_i se obtendrían los x_i:

$$x_1 = \frac{w_1 C}{w_1+w_2} = \frac{C^2\alpha_1^2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \cdot \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{C\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{\alpha_1 C}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Donde la primera igualdad es por definición del mecanismo y la segunda por la forma de los w_i. Análogamente,

$$x_2 = \frac{w_2 C}{w_1+w_2} = \frac{\alpha_2 C}{\alpha_1+\alpha_2}$$

Luego sí se obtienen las asignaciones a partir de las apuestas. Ahora bien, falta ver que los w_i efectivamente satisfacen el sistema:

$$\alpha_1\left(1 - \frac{w_1}{w_1+w_2}\right) = \frac{w_1+w_2}{C} \tag{2.1}$$

$$\alpha_2\left(1 - \frac{w_2}{w_1+w_2}\right) = \frac{w_1+w_2}{C} \tag{2.2}$$

Por simetría basta estudiar sólo (2.1), se comienza con el lado izquierdo de la ecuación:

$$\alpha_1\left(1 - \frac{C\alpha_1^2\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \cdot \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{C\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}\right) = \alpha_1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$$

Por otro lado, el lado derecho de (2.1) es:

$$\frac{w_1+w_2}{C} = \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$$

Luego, para el caso $R = 2$ se tiene la igualdad.

- Si $R > 2$: Entonces se busca la forma general que se da en el enunciado del lema. Estudiemos en primer lugar si es que a partir de los w_i se obtienen los x_i. Para ello, en principio veamos cómo luce la suma de los w_i:

$$\sum w_i = \sum_{i=1}^{R} \frac{(R-1)C\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\left[\prod_{j=1}^{R}\alpha_j \cdot \sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j} - (R-2)\prod_{j\neq i}\alpha_j\right]}{\left(\prod_{j=1}^{R}\alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}\right)^2}$$

$$= \frac{(R-1)C\prod_{j=1}^{R}\alpha_j}{\left(\prod_{j=1}^{R}\alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}\right)^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{R}\left[\prod_{j=1}^{R}\alpha_j \cdot \sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j} - (R-2)\prod_{j\neq i}\alpha_j\right]}_{\doteq A}$$

Estudiemos el término A:

$$\text{A} = \prod_{j=1}^{R}\alpha_j \cdot \sum_{i=1}^{R}\sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j} - (R-2)\sum_{i=1}^{R}\prod_{j\neq i}\alpha_j =$$

$$\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\left[\underbrace{\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_R}}_{\sum_{j\neq 1}\frac{1}{\alpha_j}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{R-1}}}_{\sum_{j\neq R}\frac{1}{\alpha_j}}\right]-(R-2)[\underbrace{\alpha_2\cdots\alpha_R}_{\prod_{j\neq 1}\alpha_j}+\ldots+\underbrace{\alpha_1\cdots\alpha_{R-1}}_{\prod_{j\neq R}\alpha_j}]$$

Notando que en la primera parte de la expresión anterior cada $1/\alpha_i$ aparece $(R-1)$ veces, se tiene:

$$\begin{aligned}A=(R-1)\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}-(R-2)[\alpha_2\cdots\alpha_R+\ldots+\alpha_1\cdots\alpha_{R-1}]\\ =(R-1)[\alpha_2\cdots\alpha_R+\ldots+\alpha_1\cdots\alpha_{R-1}]-(R-2)[\alpha_2\cdots\alpha_R+\ldots+\alpha_1\cdots\alpha_{R-1}]\\ =\alpha_2\cdots\alpha_R+\ldots+\alpha_1\cdots\alpha_{R-1}=\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\sum w_i=\frac{(R-1)C\prod_{j=1}^{R}\alpha_j}{(\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j})^2}\cdot\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}=\frac{(R-1)C\prod_{j=1}^{R}\alpha_j}{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}}$$

Luego se tiene lo buscado,

$$x_i=\frac{w_iC}{\sum_{j=1}^{R}w_j}=\frac{C\left[\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j\neq i}\frac{1}{\alpha_j}-(R-2)\prod_{j\neq i}\alpha_j\right]}{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}}$$

Ahora resta ver que los w_i satisfacen el sistema de ecuaciones del Corolario 1.8. Dada la simetría del problema, basta verificar que se tiene para w_1 la siguiente igualdad:

$$\alpha_1\left(1-\frac{w_1}{\sum_{i=1}^{R}w_i}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{R}w_i}{C}\tag{2.3}$$

Estudiemos primero el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\alpha_1\left(1-\frac{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j\neq 1}\frac{1}{\alpha_j}-(R-2)\prod_{j\neq 1}\alpha_j}{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}}\right)\\ =\alpha_1\left[\frac{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\frac{1}{\alpha_1}+(R-2)\prod_{j\neq 1}\alpha_j}{\prod_{j=1}^{R}\alpha_j\cdot\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{\alpha_j}}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{R} \alpha_j - (R-2) \prod_{j=1}^{R} \alpha_j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R} \frac{1}{\alpha_j}}$$

$$= \frac{(R-1) \displaystyle\prod_{j=1}^{R} \alpha_j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{R} \alpha_j \cdot \sum_{j=1}^{R} \frac{1}{\alpha_j}}$$

Que es exactamente lo mismo que el lado derecho, con lo que queda probado el lema.

□

2.2. Capacidades iguales y *Fixed Routing*

En esta sección se analiza el caso en que hay capacidades iguales en todos los arcos, y además cada jugador está interesado únicamente en un camino en la red, esto último es lo que se denomina *Fixed Routing*. Antes de comenzar con el análisis propiamente tal, un comentario sobre la notación: como en este caso los jugadores tienen sólo un camino, entonces se alivianará la notación eliminando la referencia de p como camino, es decir se denotará simplemente $j \in r$ cuando el arco j esté en el camino del jugador r.

Ahora bien, en primer lugar demostraremos un lema que será útil en general para el caso de *Fixed Routing*, tanto para capacidades iguales como distintas.

Lema 2.2 *En el caso de Fixed Routing, el flujo que obtiene cada jugador r como solución del problema (FM) es,*

$$d_r = \text{mín}\{x_{jr}(\sigma) : \ j \in r\},$$

donde los $x_{jr}(\sigma)$ son las asignaciones que obtiene en cada arco j.

Demostración. Reescribamos el problema de flujo máximo (FM) para el caso de *Fixed Routing*:

$$\begin{array}{ll} \text{(FM)} & \text{máx}\, d_r \\ & d_r \leq x_{jr} \ \forall \ j \in r \\ & d_r \geq 0 \ . \end{array}$$

Supongamos por contradicción que existe r para el cual d_r, valor óptimo del problema (FM), verifica que $d_r \neq \text{mín}\{x_{jr}(\sigma) : \ j \in r\}$. Eso nos da dos casos para analizar:

- Si $d_r > \text{mín}\{x_{jr}(\sigma) : \; j \in r\}$, entonces $\exists \; j \in r, \; d_r > x_{jr}$, lo que viola la restricción de capacidad del problema (FM). Esto claramente es una contradicción pues d_r es en particular factible.
- Si $d_r < \text{mín}\{x_{jr}(\sigma) : \; j \in r\}$, entonces para todo $j \in r$ la restricción de capacidad es inactiva, por lo que quedaría holgura para ampliar el valor de d_r, y en consecuencia no podría ser óptimo.

Luego, la única opción posible es $d_r = \text{mín}\{x_{jr}(\sigma) : \; j \in r\}$, lo que prueba el Lema.

□

Cabe señalar que, en adelante en este trabajo, de no explicitarse lo contrario, siempre se estará asumiendo que los jugadores tienen funciones de utilidad cóncavas, no decrecientes y continuas.

Ahora bien, en el paper de Johari y Tsitsiklis [6], una vez que se demuestra la existencia de NE en el juego extendido, se menciona -pero no se prueba- que se puede demostrar unicidad en el caso que se estudia en esta sección, es decir en que $C_j = C > 0 \; \forall \; j$, y cada jugador está interesado únicamente en un camino de la red. Este caso constituye el primer paso del trabajo realizado en el contexto de esta memoria en pos de la unicidad. Antes de proceder con dicho resultado, se presenta una proposición que explicíta el único NE en términos de flujo, para el caso particular en que todos los jugadores comparten un arco.

Observación: Notemos previamente que una situación donde no se apuesta positivamente y sólo se pide en los arcos, no será considerada como un NE ya que esto sólo se daría en el caso particular de que los jugadores tengan utilidades constantes a partir de cierto punto. Esta consideración es válida para todo lo que resta de esta memoria, a no ser que se explicite lo contrario.

Proposición 2.3 *En el contexto de Fixed Routing y capacidades iguales a C>0 en todos los arcos, si en la red existe un arco en común para todos los jugadores entonces el NE es único en términos de flujo. Más aún, dicho flujo es igual a la asignación que obtienen en ese arco común.*

Demostración. En efecto, en primer lugar asumamos s.p.g. que sólo existe un arco en común, al final de la demostración veremos por qué no se pierde generalidad. Sea ahora $\sigma = (w, \phi)$ un NE, y d el vector de flujo debido a él. La demostración procede en dos etapas:

- Primero veamos que todos los jugadores deben obtener la misma asignación en los arcos donde apuestan positivo, cuando se está jugando un NE. Supongamos que existe r que apuesta positivamente en dos arcos, digamos i y j, tal que $x_{ir}(\sigma) \neq x_{jr}(\sigma)$. Sin perder generalidad asumimos que $x_{ir}(\sigma) < x_{jr}(\sigma)$, luego del Lema 2.2 tenemos que:

  $$d_r \leq x_{ir}(\sigma) < x_{jr}(\sigma).$$

  Por lo tanto, el jugador r tiene incentivos a bajar su pago en el arco j, manteniendo su nivel de flujo. Esto contradice el hecho que σ sea NE, lo que prueba lo deseado.

- Ahora veamos que necesariamente se debe apostar positivamente en el arco en común. Sea k el arco común, y supongamos por contradicción que allí no se apuesta positivamente y sólo se pide. En consecuencia deben existir al menos dos arcos, digamos i y j, donde sí se apuesta, ya que cada jugador debe apostar en algún arco (por la observación anterior) y estamos suponiendo que no hay más arcos comúnes salvo k.

  Ahora bien, en los arcos donde se apuesta se satura la capacidad, luego se tiene que:

$$\sum_{r \in R_i} x_{ir}(\sigma) = C = \sum_{r \in R_j} x_{jr}(\sigma).$$

  Donde R_i y R_j son los conjuntos de jugadores que usan el arco i y j respectivamente. Por otro lado, para que sólo pedir en el arco k tenga sentido se debe verificar lo siguiente:

$$\sum_{r \in R_k} \phi_{rk} \leq C.$$

  Como el arco k es común a todos los jugadores entonces se tiene que:

$$|R_i| < |R_k| \text{ y } |R_j| < |R_k|$$

  En consecuencia, debe existir un jugador $\bar{r} \in R_i \cup R_j$ (asumimos s.p.g. que $\bar{r} \in R_i \cap R_j^c$) tal que $x_{i\bar{r}}(\sigma) > \phi_{k\bar{r}}$, lo que implica que $\bar{r}$ tiene intenciones a desviarse apostando $\varepsilon > 0$ en k y llevándose toda la capacidad.

Uniendo los dos puntos aquí demostrados tenemos que, de existir un arco en común se apuesta allí, y además se obtiene la misma asignación en todos los arcos donde se apuesta positivo, lo que prueba lo deseado.

Finalmente una justificación para el hecho de que no se pierde generalidad al considerar un único arco en común. De haber más de un arco en común, se puede apostar en todos ellos o sólo en algunos y en el resto pedir; dichas situaciones corresponderían a equilibrios "distintos", pero el flujo en todas ellas seguiría siendo el mismo, luego no se perdería la unicidad que interesa a este trabajo.

□

Observación: Lo anterior sugiere que el único NE del juego en términos de flujo, es apostar en el arco en común y en el resto pedir solamente.

A continuación, se enuncia y demuestra el Teorema más general de esta sección, correspondiente a *Fixed Routing* y capacidades iguales.

Teorema 2.4 ***Unicidad del NE***

En el caso en que todas las capacidades son iguales a C y cada jugador está interesado únicamente en un camino de la red, el NE del juego es único. Además, el flujo en este caso está caracterizado como la solución de un problema de optimización.

Demostración. Notemos en primer lugar, que podríamos suponer que todas las capacidades son iguales a 1 para alivianar la notación, pero mantendremos C en los desarrollos para -de ser necesario- poder comparar más fácilmente los resultados con el trabajo futuro cuando las capacidades no sean iguales. Por otro lado, como cada jugador cuenta con un sólo camino en la red, del Lema 2.2 sabemos que su asignación es: $d_r = \min_{j \in J} x_{jr}$.

Procedamos ahora con la demostración en varios pasos:

- En primer lugar se define el siguiente problema (GAME) para redes, cuyo óptimo será equivalente al NE del juego:

$$
\begin{aligned}
(GAME) \quad & \max \sum_{r \in R} \hat{U}_r(d_r) \\
\sum_{r \in R_j} & d_r \leq C \quad \forall\, j \in J \\
& d_r \geq 0 \quad \forall\, r \in R.
\end{aligned}
$$

  Donde $R_j = \{r \in R : \ j \in r\}$ y $\hat{U}_r = \left(1 - \dfrac{d_r}{C}\right) U_r(d_r) + \dfrac{d_r}{C}\left(\dfrac{1}{d_r}\displaystyle\int_0^{d_r} U_r(z)dz\right)$. La función objetivo del problema es estrictamente cóncava y la región factible es convexa, luego el óptimo es único y queda completamente caracterizado por las condiciones estacionarias que da KKT:

$$
\begin{aligned}
U_r'(d_r)\left(1 - \tfrac{d_r}{C}\right) &= \sum_{j \in r} \lambda_j \\
U_r'(0) &\leq \sum_{j \in r} \lambda_j.
\end{aligned}
$$

- Ahora entregamos una condición necesaria para ser NE en este juego:

  Lema 2.5 *Un NE del juego con capacidades iguales y Fixed Routing, no depende de las peticiones ϕ_{jr} de los jugadores.*

  Demostración. Lo que se desea probar en este Lema es que en una condición de equilibrio, el flujo obtenido no puede venir determinado únicamente de arcos donde no se esté apostando y sólo se esté pidiendo.

  Supongamos que existe NE $\sigma = (\phi, w)$, tal que existe un jugador $\bar{r}$ para el cual su asignación $d_{\bar{r}}$ está determinada por un arco k, donde se está apostando 0 y sólo se está pidiendo. Luego, $d_{\bar{r}} = \min\limits_{j \in \bar{r}} x_{\bar{r}j}(\sigma) = \phi_{k\bar{r}}$.

  Esto claramente contradice el hecho que sea NE ya que podría apostar $\varepsilon > 0$ en ese arco y aumentar estrictamente su asignación, y en consecuencia su utilidad.

  $\square$

  Observación: Si existiera el caso en que el mínimo d_r se alcanza en arcos donde se apuesta, y también donde sólo se pide, se entenderá que el NE no está dependiendo de las peticiones. Por lo tanto, el Lema es consistente.

- Caracterización del NE

Proposición 2.6 *σ es NE del juego ssi la asignación no depende de las peticiones ϕ_{jr}, y además para todo r se tiene la siguiente condición en los arcos donde se alcanza el mínimo:*

$$\forall r \quad U'_r\left(\frac{w_{jr}C}{\sum_{s\in R} w_{js}}\right)\left(1-\frac{w_{jr}}{\sum_{s\in R} w_{js}}\right) \leq \min_{j\in r} \frac{\sum_{s\in R} w_{js}}{C}$$
$$U'_r(0) \leq \min_{j\in r} \frac{\sum_r w_{jr}}{C}.$$

Demostración. En efecto, probemos la doble implicancia:

Sea σ un NE del juego. Del lema anterior se sabe que no depende de ϕ_r para ningún r. Luego, el pago $Q_r(w_r, w_{-r})$ es estrictamente cóncavo y diferenciable como función de w_{jr}, por lo que se optimiza en el NE y verifica la condición de optimalidad:

$$\bigtriangledown Q_r(w_r, w_{-r}) \leq 0.$$

Esta condición sólo se vuelve interesante en los arcos donde se alcanza el mínimo de la asignación (en los otros casos se obtiene $0 \leq 1$), y de la demostración de la Proposición 2.3, sabemos que estos arcos no son otros que los mismos donde $w_{jr} > 0$, ya que vimos que donde se apuesta positivo se debe obtener la misma asignación. En estos arcos j, donde se alcanza el mínimo, queda:

$$U'_r\left(\frac{w_{jr}C}{\sum_r w_{jr}}\right)\left(1-\frac{w_{jr}}{\sum_r w_{jr}}\right) \leq \frac{\sum_r w_{jr}}{C} \Rightarrow U'_r\left(\frac{w_{jr}C}{\sum_r w_{jr}}\right)\left(1-\frac{w_{jr}}{\sum_r w_{jr}}\right) \leq \min_{j\in r} \frac{\sum_r w_{jr}}{C}$$

En consecuencia, la primera implicancia queda demostrada.

Supongamos ahora que tenemos σ que cumple la condición y que no depende de ϕ. Como el pago es estrictamente cóncavo basta revertir el argumento pues la condición $\bigtriangledown Q_r(w_r, w_{-r}) \leq 0$ caracteriza al óptimo.

La segunda desigualdad se obtiene como condición de borde.

□

- Identificación: Finalmente, para concluir, basta identificar
$$d_r = \frac{w_{jr}C}{\sum_{r\in R} w_{jr}} \text{ y } \sum_{j\in r} \lambda_j = \min_{j\in r} \frac{\sum_r w_{jr}}{C}.$$

Con esto concluye la demostracion del teorema

□

A partir de la caracterización variacional obtenida para este Teorema en la proposición 2.6, se puede hacer una nueva demostración de que el Precio de la Anarquía es 3/4 en este caso particular de capacidades iguales y *Fixed Routing*, utilizando la técnica de Correa et al. [3].

Teorema 2.7 ***El precio de la anarquía del mecanismo es*** $3/4$***.***

Demostración. La idea es aplicar la técnica que se presenta en [3]. Se define la siguiente cantidad:

$$\beta(\mathbf{U}) \doteq \sup_{u\in\mathbf{U}} \sup_{0\leq x\leq y\leq 1} \frac{x(u(y)-u(x))}{yu(y)}.$$

Donde $\mathbf{U}$ es la familia de funciones de utilidad que cumplen las hipótesis.
Dos consideraciones importantes: en dicho paper se muestra que $\beta \leq 1/4$, y por otro lado, en este caso sin perder generalidad tomaremos las capacidades todas iguales a 1. Luego la proposición 2.6 queda:

$$U_r'\left(\frac{w_{jr}}{\sum_r w_{jr}}\right)\left(1-\frac{w_{jr}}{\sum_r w_{jr}}\right) \leq \min_{j\in r} \sum_r w_{jr}$$

$$U_r'(0) \leq \min_{j\in r} \sum_r w_{jr}.$$

Por otro lado, consideremos el siguiente problema de optimización cóncavo:

$$\begin{aligned} \max \sum_{r\in R} (1-d_r^{NE}) U_r(d_r) \\ \sum_{r:\ j\in r} d_r \leq 1 \quad \forall\, j\in J \\ d_r \geq 0 \quad \forall\, r. \end{aligned}$$

Donde d_r^{NE} es el NE del juego. Las condiciones de optimalidad están dadas por:

$$(1-d_r^{NE})U_r'(d_r) = \lambda + \mu_r$$

$$\mu_r d_r = 0$$

$$\mu_r \leq 0,\ \lambda \geq 0,\ d_r \geq 0 \text{ y } \textstyle\sum_{r\in R} d_r \leq 1.$$

Luego, haciendo la identificación $\lambda = \min_{j\in r} w_{jr}$ y $\mu_r = U_r'(0) - \min_{j\in r} w_{jr}$, se ve que d_r^{NE}

es óptimo de este problema. En consecuencia, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in R} U_r(d_r^{NE}) &= \sum_{r\in R}(d_r^{NE}U_r(d_r^{NE}) + (1-d_r^{NE})U_r(d_r^{NE})) \\
&\geq \sum_{r\in R}(d_r^{NE}U_r(d_r^{NE}) + (1-d_r^{NE})U_r(d_r)), \text{ con } d_r \text{ factible} \\
&\geq \sum_{r\in R} U_r(d_r) - \sum_{r\in R:\ d_r > d_r^{NE}} d_r^{NE}(U_r(d_r) - U_r(d_r^{NE})) \\
&\geq \sum_{r\in R} U_r(d_r) - \sum_{r\in R:\ d_r > d_r^{NE}} \beta(\mathbf{U}) d_r U_r(d_r) \\
&\geq (1-\beta(\mathbf{U}))\sum_{r\in R} U_r(d_r).
\end{aligned}$$

Tomando d_r óptimo social, se concluye.

□

2.3. Capacidades distintas y *Fixed Routing*

El paso natural a partir de lo desarrollado en la sección anterior, es generalizar hacia una red con capacidades distintas en sus arcos, manteniendo un sólo camino por jugador. En la presente sección se estudia la unicidad del NE para el juego en estas condiciones, comenzando con el estudio de un mismo camino para todos y luego generalizando.

2.3.1. Un camino para todos

El primer paso es estudiar el caso particular en que no solo hay un camino por jugador, sino que es el mismo para todos, o sea la red tiene el siguiente aspecto:

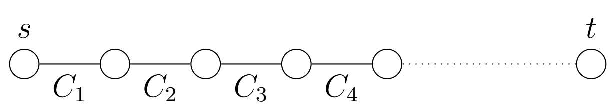

Figura 2.1: Un sólo camino, igual para todos.

Para este caso no solo se logra probar que el NE es único, sino que además es posible caracterizarlo explícitamente. Como muestra el siguiente Teorema, el único NE resulta de apostar positivamente en el arco de menor capacidad, y en el resto solamente pedir.

Proposición 2.8 *Suponiendo, sin perder generalidad, que los arcos están ordenados por capacidad de forma $C_1 < C_2 \ldots < C_n$, el único NE del juego extendido es: $\forall r$, $w_{1r} > 0$*

y $\phi_{jr} = x_{1r}$ $\forall j \neq 1$, *donde* x_{1r} *es lo que obtienen como asignación en el arco* 1, *según el Teorema 1.7.*

Demostración. En primer lugar, es trivial notar que, por lo comentado anteriormente en este trabajo, $w_{jr} = 0$ $\forall j$ no es NE, por lo que los jugadores deben apostar positivamente en algún arco. Dicho eso, se procede a demostrar el teorema probando dos afirmaciones:

- *En un NE no pueden haber apuestas positivas en más de un arco*: Razonando por contradicción, supogamos que existe NE (w, ϕ) tal que se apuesta en i y j, y sin perder generalidad se asume que $C_i < C_j$. Como al jugar en un *link* se completa la capacidad del arco, se debe tener:

$$\sum_{r \in R} x_{ir} = C_i < \sum_{r \in R} x_{jr} = C_j.$$

  Luego, debe existir un jugador $\bar{r}$ para el cual $x_{i\bar{r}} < x_{j\bar{r}}$, y en consecuencia ese jugador tiene motivaciones a desviarse bajando su pago $w_{j\bar{r}}$, pues el nivel de flujo $d_{\bar{r}} = \min_j x_{j\bar{r}}$ se mantiene. Con esto queda probada la primera afirmación.

  Por lo tanto, en cualquier NE se debe apostar en un sólo arco, y pedir en el resto.

- *Si se apuesta en* j, $j > 1$ *entonces no puede ser un NE*: Nuevamente razonando por contradicción, supongamos que existe un NE donde se apuesta en algún $j > 1$, y en el resto de los arcos se pide (en consecuencia con lo probado en la afirmación anterior). Sea $i < j$ un arco de menor capacidad, i.e. $C_i < C_j$.

  - Si las peticiones en dicho arco son tales que $\sum_{r \in R} \phi_{ir} = C_j > C_i$ entonces todos los jugadores se llevan 0 en el arco i, y en consecuencia esta configuración claramente no es NE pues el flujo total sería 0 para todos.
  - Luego, se debe tener $\sum_{r \in R} \phi_{ir} \leq C_i < C_j$, y así en el arco i reciben $x_{ir} = \phi_{ir}$. Entonces existe $\bar{r}$ tal que $x_{i\bar{r}} < x_{j\bar{r}}$, y razonando similar a la afirmación anterior, ese jugador tiene incentivos a desviarse bajando su apuesta. Luego se tiene lo deseado.

    Por lo tanto, el único equilibrio de Nash se obtiene de apostar en el primer arco y pedir en el resto, lo que prueba el teorema.

□

Observación: Aquí se supuso que no había arcos con capacidades iguales, pero de haberlos no se modifica el razonamiento pues, en ese caso pueden competir o solo pedir, cambiando las estrategias pero no el flujo, que sigue siendo único.

En este caso también se puede aplicar la técnica de [3] para probar que el Precio de la Anarquía es 3/4. Para ello una proposición previa.

Proposición 2.9 *Sea* $\sigma = (w, \phi)$ *el único NE descrito antes. Entonces se tiene lo siguiente para el arco donde se apuesta, que se supone s.p.g. que es el primero:*

$$\forall r \quad U_r'\left(\frac{w_{1r}C_1}{\sum_{r\in R} w_{1r}}\right)\left(1-\frac{w_{1r}}{\sum_{r\in R} w_{1r}}\right) \le \frac{\sum_{r\in R} w_{1r}}{C_1}$$

$$U_r'(0) \le \frac{\sum_r w_{1r}}{C_1}$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 2.6. □

Teorema 2.10 *El Precio de la Anarquía es 3/4.*

Demostración. Considerando que, sin perder generalidad se puede normalizar y considerar $C_1 = 1$, entonces la proposición anterior queda:

$$\forall r \quad U_r'\left(\frac{w_{1r}}{\sum_{r\in R} w_{1r}}\right)\left(1-\frac{w_{1r}}{\sum_{r\in R} w_{1r}}\right) \le \sum_{r\in R} w_{1r}$$

$$U_r'(0) \le \sum_{r\in R} w_{1r}$$

Luego, como claramente el flujo d_r no depende de las peticiones que hacen los jugadores, y sólo depende de las apuestas en el primer arco (el de menor capacidad), la demostración es análoga a la del Teorema 2.7. □

2.3.2. Distintos caminos.

El siguiente paso es generalizar y estudiar una red en que el camino para cada jugador es único, pero no es necesariamente el mismo para todos. Una primera intuición sobre cómo se debería comportar un NE en este caso, es que los jugadores sólo competirán cuando haya apuestas positivas por un arco, dicha intuición se resume en el siguiente lema:

Lema 2.11 *Si $\sigma = (w, \phi)$ es un NE del juego, entonces $\forall j, r$ se tiene:*

(i) Si $W_{jr} = 0 \Rightarrow w_{jr} = 0$.
(ii) Si $W_{jr} > 0 \Rightarrow w_{jr} = 0$.

Donde $W_{jr} = \sum_{s\neq r} w_{js}$.

Demostración. Sea σ un NE del juego. Por contradicción, sea r y $j \in r$ un arco de su camino tal que:

- $W_{jr} = 0$ y $w_{jr} > 0$: Esto no puede ocurrir ya que $w_{jr} - \varepsilon < w_{jr}$ le da la misma utilidad pagando menos.

- $W_{jr} > 0$ y $w_{jr} = 0$: Le conviene subir su apuesta ya que en este caso se está llevando $d_r = 0$.

□

Además, se tiene una condición necesaria análoga a la del caso del mismo camino para todos, relativa a que las asignaciones que se obtienen a partir de un NE deben ser todas iguales, para los arcos donde se está apostando positivamente:

Lema 2.12 *Sea $\sigma = (w, \phi)$ un NE del juego, entonces para todo r se tiene: $\forall j \neq i$ tal que $w_{jr} > 0,\ w_{ir} > 0 \Rightarrow x_{jr}(\sigma) = x_{ir}(\sigma)$.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que existe r para el cual $\exists\ j, i$ tales que: $w_{jr},\ w_{ir} > 0$ y $x_{jr} \neq x_{ir}$.
Sin perder generalidad $x_{jr} > x_{ir} \Rightarrow d_r \leq x_{ir} < x_{jr}$. Luego existe $\delta > 0$, tal que r puede reducir su apuesta en el arco j a $w_{jr} - \delta$, de forma que:

$$\hat{x_{jr}} = \frac{(w_{jr} - \delta)C_j}{\sum_s w_{js}} = d_r.$$

Lo que mejoraría su utilidad, luego se contradice el hecho que sea NE. □

Como dijimos antes, para generalizar lo obtenido en la sección anterior, el primer paso para estudiar el caso en que no es el mismo camino para todos. Consideremos una red con forma de camino pero donde los nodos de origen y destino para cada jugador no son el mismo. Se asume que los nodos identificados con la letra s son de origen y aquellos con t son de destino. Una red de la siguiente forma:

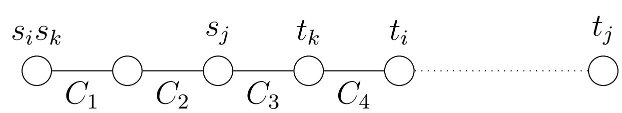

Figura 2.2: Red con forma de camino, distintos pares origen-destino.

Veamos primero un par de ejemplos, con jugadores cuyas funciones de utilidad son lineales, para ganar intuición sobre las condiciones necesarias para la unicidad o no unicidad del NE. En estos ejemplos se utilizará el Lema 2.1 presentado al comienzo de este capítulo.

Ejemplo 2 Consideremos tres jugadores con utilidades lineales $U_i(d_i) = \alpha_i d_i$, y una red con la siguiente forma:

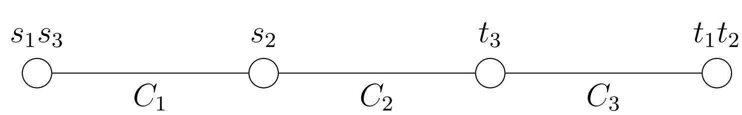

Figura 2.3: Ejemplo 2, distintos pares origen-destino con arco en común.

En principio, como no se tiene información extra sobre el juego, hay que estudiar todas las opciones posibles relativas a los arcos en los cuales se puede apostar. Se sabe que sólo pedir en todos los arcos y no apostar en ninguno no puede ser NE, a no ser que las utilidades involucradas en el juego se hagan constantes en algún momento. Dicho lo anterior, se debe tener que: el jugador 1 debe apostar en algún arco, el jugador 2 debe apostar en C_2 o C_3, y el jugador 3 debe apostar en C_1 o C_2.

Observación: Aquí estamos incurriendo en un abuso de notación al llamar C_i tanto al arco i, como a su capacidad. Se incurre en este abuso para evitar caer en notación confusa.

Por lo tanto, existen cuatro opciones para jugar en esta configuración, que se estudian a continuación para conocer algunas condiciones necesarias para la unicidad. Cabe recordar en este punto que la notación x_{jr} es la asignación que recibe el jugador r en el arco j.

(i) Apostar sólo en C_2. Por el Lema 2.1 lo que obtiene cada jugador es:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{C_2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} \\ x_2 &= \frac{C_2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} \\ x_3 &= \frac{C_2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}. \end{aligned}$$

Luego, además de las condiciones necesarias para la positividad de los x_i, se debe cumplir que con esta asignación sea posible sólo pedir en los otros arcos, o sea:

- $x_1 + x_3 \leq C_1 \Rightarrow \dfrac{2C_2\alpha_1\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} \leq C_1.$
- $x_1 + x_2 \leq C_3 \Rightarrow \dfrac{2C_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3} \leq C_3.$

(ii) Apostar sólo en C_1 y C_2. Si se apuesta en C_1, los jugadores involucrados son el 1 y el 3, que obtienen respectivamente:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{C_1\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3} \\ x_{13} &= \frac{C_1\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}. \end{aligned}$$

Al apostar en C_2 participan los tres jugadores, obteniendo lo indicado en el punto anterior, que por notación en este caso los llamamos $x_{21},\ x_{22}$ y x_{23} respectivamente. En este caso las condiciones necesarias que se deben tener son:

- $x_{11} = x_{21}$.
- $x_{13} = x_{23}$.
- $C_3 \geq x_{11} + x_{22} = x_{21} + x_{22}$.

Las dos primeras condiciones vienen dadas por el resultado del Lema 2.12. Juntando la segunda y tercera condición se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{C_2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3)}{C_1\alpha_1} &= \frac{C_2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)}{C_1\alpha_3} \\ C_1C_2\alpha_3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) &= C_1C_2\alpha_1(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2) \\ \cancel{C_1C_2}(\cancel{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \alpha_1\alpha_3^2 - \alpha_2\alpha_3^2) &= \cancel{C_1C_2}(\alpha_1^2\alpha_3 + \cancel{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - \alpha_1^2\alpha_2) \\ \alpha_3^2(\alpha_1 - \alpha_2) &= \alpha_1^2(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Además de la última condición se tiene que:

$$C_3 \geq \frac{2C_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3}.$$

(iii) Apostar sólo en C_2 y C_3. Este caso es simétrico al caso anterios pero cambiando el rol de los jugadores 2 y 3.

(iv) Apostar en C_1, C_2 y C_3. Finalmente está el caso en que se compite en todos los arcos. Llamemos como siempre x_{jr} a la asignación que recibe el jugador r en el arco j. En este caso, no se deben satisfacer restricciones de capacidades para poder pedir en otros arcos, dado que se está compitiendo en todos, luego las únicas condiciones son las de igualdad de asignación:

(1) $\dfrac{C_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_3} = \dfrac{C_3\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$.

(2) $\dfrac{C_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_3} = \dfrac{C_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}$.

(3) $\dfrac{C_1\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_3} = \dfrac{C_2(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}$.

(4) $\dfrac{C_3\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \dfrac{C_2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}$.

De (2) y (3) se obtiene, haciendo un análisis similar al de los puntos anteriores, lo siguiente:

$$\alpha_3^2(\alpha_1-\alpha_2) = \alpha_1^2(\alpha_3-\alpha_2).$$

Análogamente, de (1), (2) y (4):

$$\alpha_2^2(\alpha_1-\alpha_3) = \alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_3).$$

Y juntando las dos se obtiene la última condición sobre las pendientes de los jugadores 2 y 3:

$$\alpha_3^2(\alpha_1-\alpha_2) = \alpha_2^2(\alpha_3-\alpha_1).$$

Observación: Lo importante para la intuición es que, a priori, los casos estudiados en el ejemplo no son contradictorios, por lo que se podría dar más de uno, pero siempre con la condición de que el flujo sea el mismo para todos los arcos donde se apuesta positivo. Esto le agrega una dificultad al razonamiento sobre la unicidad de equilibrios, ya que en este caso se podría dar una multiplicidad de estrategias posibles pero que en términos de flujo son iguales.

La clave es que en el ejemplo existe un arco en común a todos los jugadores, a continuación formalizamos esta intuición en un lema.

Lema 2.13 *Cuando en un camino cualquiera, con distintos pares origen-destino para los jugadores, existe un arco que es común a todos ellos, entonces el NE es único.*

Demostración. Llamemos j al arco común, y sean s y t sus nodos incidentes, sin perder generalidad s está al comienzo del arco y t al final. Todos los caminos de los jugadores deben comenzar a lo más en s, ya que si existe alguno que comienza después, entonces el arco j no sería común. Análogamente, todos los caminos deben terminar de t hacia adelante. Luego no se puede apostar antes de j ni después, en consecuencia se debe apostar allí, y por el Lema 2.12 de igualdad de asignaciones, se tiene que el flujo es igual al obtenido en ese arco. $\square$

A partir de lo anterior, es claro que los problemas para la unicidad podrían existir sólo en casos donde no hay arcos comunes a todos los jugadores. Estudiemos un ejemplo donde eso ocurre, para tener intuición sobre las condiciones que se deberían dar para que exista multiplicidad de equilibrios.

Ejemplo 3 Consideremos tres jugadores con utilidades lineales $U_i(d_i) = \alpha_i d_i$, y una red con la siguiente forma:

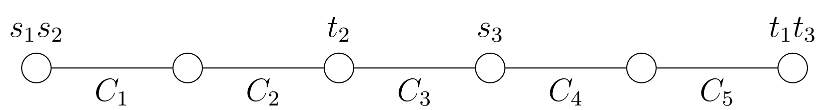

Figura 2.4: Ejemplo 3, distintos pares origen-destino con arco no común.

Se aprecia que el arco C_3 no es común a todos los jugadores de la red. Por la misma observación que se ha entregado antes, el sólo pedir y no apostar no es NE, luego las opciones son: apostar en C_1 *y* C_4, en C_1 *y* C_5, en C_2 *y* C_4, o bien en C_2 *y* C_5.

Una opción para que haya equilibrios distintos es, por ejemplo, que en un NE se juegue en C_1 y C_4, y en el otro en C_1 y C_5. Analicemos ese caso:

(i) Si se apuesta en C_1 y C_4 entonces se tiene:

(i.1) En C_1 obtienen:

$$x_{11} = \frac{C_1\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \text{ y } x_{12} = \frac{C_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Además, se debe dar la condición para pedir en el segundo arco, i.e.: $C_2 \geq x_{11} + x_{12} = C_1$.

(i.2) En C_4 reciben:

$$x_{41} = \frac{C_4\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_3} \text{ y } x_{43} = \frac{C_4\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_3}.$$

Y análogamente la condición de capacidad: $C_5 \geq C_4$. Y la condición $x_{11} = x_{41} \Rightarrow \dfrac{C_1}{C_4} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_3}$.

(ii) Si se apuesta en C_1 y C_5, entonces en C_1 obtienen lo mismo que antes y en C_5:

$$x_{51} = \frac{C_5\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_3} \text{ y}$$
$$x_{53} = \frac{C_5\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_3}.$$

Y se requiere la condición sobre las capacidades: $C_5 \leq C_4$, además de la restricción de consistencia de flujo: $x_{11} = x_{51} \Rightarrow \dfrac{C_1}{C_5} = \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_3}$.

Luego, como condición necesaria para la existencia de dos equilibrios de esta forma, se debe tener que $C_5 = C_4$, y por otro lado, para que el flujo de 1 sea distinto en los dos NE se debe tener:

$$x_{41} \neq x_{51} \Rightarrow \frac{C_4\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_3} \neq \frac{C_5\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_3} \Rightarrow C_4 \neq C_5.$$

Lo que es una contradicción, por lo que no se podría dar la condición necesaria para que existan dos flujos.

El análisis para la otra situación es análogo, luego en una red como esta no habría opción de tener múltiples equilibrios.

Observación: La intuición que entrega este ejemplo es que, de existir múltiples equilibrios, habría inconsistencias con las capacidades necesarias para satisfacer a los jugadores. Esa intuición es la que guía la demostración de unicidad del NE a continuación.

Teorema 2.14 *En un camino en general, con distintos pares origen-destino para los jugadores, el NE es único en términos de flujo.*

Demostración. En efecto, supongamos por contradicción que existen dos flujos distintos, digamos d^1 y d^2. Luego, la siguiente situación debe darse en algún lugar del camino:

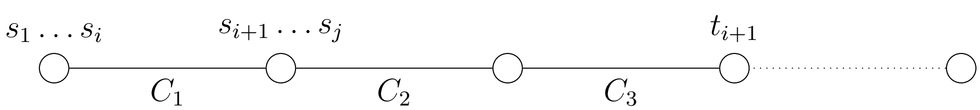

Figura 2.5: Camino en general.

- En el nodo 1 nacen algunos caminos, ya que de lo contrario se podría remover y el juego sería el mismo.
- En el nodo 2 pueden terminar algunos caminos, y nacer otros.
- En el nodo 3 pueden terminar caminos que hayan comenzado en el nodo 1, pero no en el nodo 2, ya que de ser así, en ambos flujos se estaría obligado a competir en el arco 2.
- En el cuarto nodo termina por primera vez algún camino comenzado en el segundo.

Al final de la demostración se explicará por qué una situación así no representa una pérdida de generalidad. Realicemos algunas observaciones previas:

- Ambos flujos no pueden tener arcos de apuesta positiva en común, ya que en virtud del Lema 2.12 el flujo sería igual.
- Tanto en d^1 como en d^2, se debe competir en algún arco, ya que solamente pedir en todos no es NE. Luego, necesariamente se debe competir en el arco 2 o 3, y pedir en el otro. Así, en un NE se compite en 2 y sólo se pide en 3, y en el otro NE es lo opuesto.
- Supongamos, sin perder generalidad, que bajo el NE d^1 se compite en el arco 3 y se pide en 2, y bajo el NE d^2 la situación opuesta. Es decir, se tienen las siguientes relaciones:

$$C_2 = \sum_{r\in R_2} d_r^2 \geq \sum_{r\in R_2} d_r^1.$$

$$C_3 = \sum_{r\in R_3} d_r^1 \geq \sum_{r\in R_3} d_r^2.$$

El primer paso es notar que, en el caso que sólo se pide y no se apuesta, la desigualdad para el flujo es estricta.

Lema 2.15 *En este contexto, donde supusimos la existencia de dos NE distintos, supongamos que en un arco de capacidad C en el flujo d^1 se compite y en d^2 sólo se pide. Entonces necesariamente debe darse que:*

$$C = \sum_r d_r^1 > \sum_r d_r^2.$$

Demostración. Para ver esto razonemos por contradicción, supongamos que se puede dar el caso que hay dos NE distintos en el camino tales que $\sum_r d_r^1 = \sum_r d_r^2 = C$ para este arco de capacidad C. Luego, $\exists\ \bar{r}$ tal que $d_{\bar{r}}^1 \neq d_{\bar{r}}^2$. Notemos que cuando en un NE sólo se pide en un arco, el flujo que se logra enviar a través de él es justamente el flujo que se trae desde "afuera" del arco.

Por lo tanto, se debe dar que para el jugador $\bar{r}$ - y los jugadores que son comúnes a él en algún camino - que existan dos posibles NE para el caso de un camino con arcos en común, lo que claramente constituye una contradicción con el Lema 2.13.

□

En consecuencia, en nuestra situación tenemos que:

$$C_2 = \sum_{r\in R_2} d_r^2 > \sum_{r\in R_2} d_r^1$$
$$C_3 = \sum_{r\in R_3} d_r^1 > \sum_{r\in R_3} d_r^2.$$

Para concluir hace falta tener una cierta noción de continuidad con respecto a las peticiones que se realizan en este contexto.

Lema 2.16 *En la sección de camino que se trata en esta demostración, las peticiones en un NE son "continuas". Formalmente, dado un NE d, para cualquier arco de capacidad C donde sólo se pide y no se apuesta, se verifica lo siguiente:*

Si $\sum_r d_r = K \leq C$, entonces el flujo d_r que recibe cada jugador es una fracción proporcional de K, tal como si se hubiese competido bajo el mecanismo de asignación proporcional por dicha capacidad.

Demostración. En efecto, como se ha mencionado antes, sabemos que en un arco donde sólo se pide se debe verificar que $\sum_r \phi_r \leq C$, y como $d_r = \text{mín}\{x_{jr} :\ j \in r\}$ entonces se debe dar que $\sum_r d_r \leq \sum_r \phi_r \leq C$.

Por lo tanto, en un arco donde sólo se pide no se puede hacer pasar más flujo que el que ya se trae desde “afuera” de ese arco, en particular el flujo obtenido en alguno de los arcos donde compitieron (que por el Lema 2.12 es igual en todos los arcos donde se apuesta). De hecho, se hace pasar justamente el flujo que se trae desde los otros arcos, y en esos arcos donde se compite la repartición es proporcional debido al mecanismo. Luego necesariamente se tiene lo buscado.

□

Utilizando este último Lema, estudiaremos el flujo que obtiene el jugador $i+1$. Cabe señalar que el análisis es válido para cualquiera de los jugadores que pudiesen terminar junto con el jugador $i+1$, y que definen la sección de camino común de la Figura 2.5.

En el arco 2 el jugador $i+1$ obtiene $d^1_{i+1} = \beta_{C_2} \cdot C_2$ en el primer NE, y $d^2_{i+1} = \gamma_{C_2} \cdot C_2$ en el segundo, donde β_{C_j} y γ_{C_j} son la fracción de capacidad que respectivamente reciben por pedir y apostar, en el arco j. Luego, en este caso dado el último Lema, se tiene que: $d^1_{i+1} < d^2_{i+1}$. Siguiendo el mismo razonamiento en el arco 3, se tiene que $d^1_{i+1} > d^2_{i+1}$. Resumiendo, tenemos que:

$$\text{En el arco 2: } \beta_{C_2} \cdot C_2 < \gamma_{C_2} \cdot C_2. \tag{2.4}$$
$$\text{En el arco 3: } \beta_{C_3} \cdot C_3 < \gamma_{C_3} \cdot C_3. \tag{2.5}$$

Por otro lado, se sabe que al pedir en un arco se obtiene al menos lo que ya se tiene como flujo, eso implica las siguientes relaciones:

$$\text{Para el equilibrio } d^1\text{: } \beta_{C_2} \cdot C_2 \geq \gamma_{C_3} \cdot C_3. \tag{2.6}$$
$$\text{Para el equilibrio } d^2\text{: } \beta_{C_3} \cdot C_3 \geq \gamma_{C_2} \cdot C_2. \tag{2.7}$$

Uniendo las ecuaciones $(2{,}4) - (2{,}7)$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$\gamma_{C_3} \cdot C_3 \leq \beta_{C_2} \cdot C_2 < \gamma_{C_2} \cdot C_2 \leq \beta_{C_3} \cdot C_3 < \gamma_{C_3} \cdot C_3.$$

Lo que claramente es una contradicción, y en consecuencia el NE debe ser único.

Finalmente un comentario sobre el por qué no se pierde generalidad al considerar una sección de camino como la descrita en la Figura 2.5. Por todo lo explicado anteriormente, se debe dar la situación de que, para coexistir dos NE éstos no pueden tener arcos de apuesta positiva comunes, y además en ambos se debe apostar en algún arco. Luego, la única potencial pérdida de generalidad ocurriría al no considerar que entre los arcos donde se apuesta positivamente (arco 2 y arco 3 en este caso) pueden haber más arcos. De existir estos arcos entre medio, donde pueden nacer caminos de jugadores y también terminar caminos de jugadores nacidos en el nodo 1, en ninguno de ellos puede ser obligatorio apostar, ya que en ese caso el NE quedaría determinado completamente. Esto conlleva a que los Lemas 2.15 y 2.16 permanezcan inalterados, y en consecuencia la demostración sigue siendo válida.

□

Esto permite probar directamente el Teorema deseado para cualquier red, que constituye el resultado más relevante de este trabajo.

Teorema 2.17 *En cualquier red, si los jugadores tienen un sólo camino, el NE es único.*

Demostración. Supongamos por contradicción que no. O sea, existe un jugador para el cual hay dos flujos posibles en su camino, pero esto claramente contradice el teorema anterior.

□

Observación: Se podría rehacer un argumento análogo al del teorema anterior para probarlo.

2.4. Capacidades distintas y múltiples caminos

El caso de estudio más general posible lo constituye aquel en que los jugadores pueden enviar flujo a través de varios caminos, y las capacidades de los arcos son distintas. Lamentablemente al término de esta memoria no ha sido posible determinar la unicidad en este caso, por lo que esto continúa como problema abierto. Los principales esfuerzos se centraron en contra ejemplificar dicha afirmación, es decir mostrar que en realidad no se mantiene la unicidad para este caso general, pero no fue posible construir un contraejemplo sólido. La intuición para buscar un contra ejemplo en lugar de tratar de probar la unicidad es que -en este caso general- hay otras nociones menos fuertes de unicidad que se pierden. Particularmente, la unicidad sobre la cantidad de flujo que atraviesa por los arcos, y que es parte esencial de la demostración de unicidad en el caso de *Fixed Routing*. Dicha pérdida de unicidad, así como también la que ocurre cuando las funciones de utilidad tienen una forma bastante particular, se estudia a continuación con dos ejemplos.

Ejemplo 4 Consideremos dos jugadores con la misma función de utilidad $U(d_r)$. Además una red como la de la Figura 2.6 donde las capacidades de los arcos cumplen que: $C_1 << C_2 = C_3$.

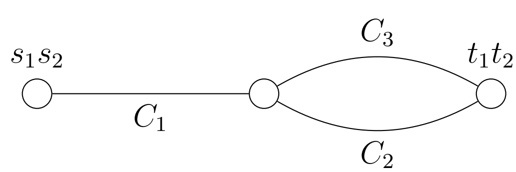

Figura 2.6: Ejemplo de pérdida de unicidad por arcos.

En este caso, al tener la misma función de utilidad, reciben $C_1/2$ en el primer arco compitiendo. Luego, como la capacidad de los arcos 2 y 3 es suficientemente grande los jugadores piden.

Deben pedir tal que la suma de lo que mandan en ambos arcos sea $C_1/2$, y eso da una infinidad de combinaciones posibles para el flujo que pasa a través de los arcos 2 y 3, luego claramente el NE no será único. Más formalmente, una infinidad de Equilibrios de Nash está dada por las siguientes estrategias: en el primer arco compiten y, naturalmente al tener la misma función de utilidad, cada uno recibe $C_1/2$. En los otros arcos piden ϕ_{1r} y $\phi_{2r},\ r = 1, 2$, tal que:

$$\begin{gathered}
\phi_{1r} + \phi_{2r} \geq C_1/2,\ r = 1, 2 \\
\phi_{21} + \phi_{22} \leq C_2 \\
\phi_{31} + \phi_{32} \leq C_3.
\end{gathered}$$

Claramente existe una infinidad de combinaciones posibles para el flujo que atraviesa los arcos 2 y 3. En consecuencia el NE no es único.

En otro caso donde se pierde unicidad trivialmente es cuando las utilidades son constantes a partir de un punto conveniente, para ilustrar tal caso estudiemos el siguiente Ejemplo.

Ejemplo 5 Consideremos la misma red donde $C_1 << C_2 = C_3$

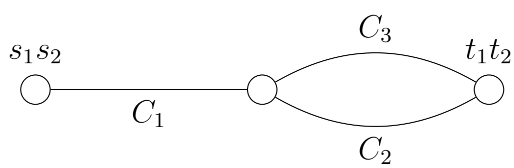

Figura 2.7: Ejemplo de pérdida de unicidad para utilidades particulares.

Y además consideremos dos jugadores con utilidades:

$$U_1(d_1) = \begin{cases} \alpha d_1 & \text{si } d_1 \leq C_2/2 \\ K & \text{si } d_1 > C_2/2 \end{cases}$$

$$U_2(d_2) = \begin{cases} \beta d_2 & \text{si } d_2 \leq C_2/2 \\ K & \text{si } d_2 > C_2/2. \end{cases}$$

Con $\alpha,\ \beta,\ K$ constantes positivas tales que $\alpha > \beta$.

La idea es que los jugadores estarán igual de felices a partir de cualquier punto sobre $C_2/2$, por lo que no tendrán incentivos a competir en ciertas situaciones. Mostremos dos NE distintos para esta configuración:

(i) Primero consideremos una situación donde se compite en todos los arcos, luego como $\alpha > \beta$ entonces: $x_{11} > x_{12}$ y $x_{21} = x_{31} > x_{22} = x_{32}$. Y en todos los arcos se satura la capacidad.

(ii) Ahora consideremos que en el primer arco se compite, allí se llevan x_{11} y x_{12} respectivamente. Pero en C_2 y C_3 cada uno pide la mitad de la capacidad, luego: $x_{21} = x_{31} = x_{22} = x_{32} = C_2/2$.

Las dos situaciones descritas corresponden claramente a NE ya que ninguno de los jugadores tienen motivaciones a desviarse unilateralmente, y los flujos enviados por cada uno son distintos en cada caso.

Capítulo 3

Mecanismo Proporcional Secuencial

El trabajo presentado en este capítulo constituye una extensión al mecanismo de asignación proporcional estándar, que ha sido estudiado hasta ahora en este trabajo. La diferencia consiste en que ahora los jugadores no juegan simultáneamente, sino que van llegando de forma secuencial. El análisis se realiza en el caso particular de jugadores con funciones de utilidad lineal, y con un sólo arco de capacidad $C = 1$ en disputa.

3.1. Definiciones Básicas

En esta sección se define brevemente lo que es un juego secuencial, y los conceptos de Equilibrio y Precio de la Anarquía utilizados. Las definiciones aquí entregadas son consistentes con las que se entregan en el trabajo de Paes Leme et al. [9]. En cada ronda de un juego secuencial, el jugador i observa lo hecho por los $i-1$ anteriores y elige una acción $a_i \in A_i$. Luego, su estrategia es una función $s_i : \prod_{j \leq i-1} A_j \to A_i$.

Definición 3.1 *Juego Secuencial*

Un juego secuencial ocurre en rondas donde un sólo jugador realiza una acción. Consideremos n jugadores con conjuntos de acciones posibles $A_1, \ldots, A_n$, y funciones de utilidad $u_i : \prod A_i \to \mathbb{R}$. Además, se asume que están ordenados de alguna forma para jugar, digamos s.p.g. de 1 a n.

Notemos que, dado un conjunto de acciones para los primeros $k < n$ jugadores, esto induce naturalmente un subjuego para los $k+1, \ldots, n$ jugadores restantes, que toman esta información como dada y hacen un juego secuencial con menos jugadores. El concepto de solución en un juego secuencial lo recoge la idea de *Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS)*, que se define a continuación.

Definición 3.2 *Equilibrio Perfecto en Subjuegos*

Un conjunto de estrategias $(s_1, \ldots, s_n)$ es un EPS si es simultáneamente un equilibrio de todos los subjuegos definidos a partir de él.

Teorema 3.3 *EL EPS siempre existe.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [9] □

La definición usual del PoA se extiende naturalmente para el caso de juegos secuenciales en el trabajo de Paes Leme et a.l.: [9].

Definición 3.4 *Precio de la Anarquía Secuencial (SPoA)*

Dada una función de bienestar $W : \prod_i A_i \to \mathbb{R}^+$, el SPoA se define como el cociente entre la solución socialmente óptima (en términos de W) y el peor EPS.

3.2. Caso dos jugadores

Se consideran dos jugadores caracterizados por sus funciones de utilidad:

$$U_1(d_1) = \alpha_1 d_1 \quad U_2(d_2) = \alpha_2 d_2.$$

Con $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. En principio no se asume nada más que positividad con respecto a las pendientes de las funciones. El jugador 1 juega primero y 2 después.

3.2.1. Equilibrio

Al tratarse de un mecanismo secuencial, los jugadores van anticipando lo que harán sus rivales y así, el o los equilibrios, se obtienen calculando las mejores respuestas de cada jugador a las acciones de sus oponentes. En este caso, el NE resulta ser único para un par de jugadores dados, y queda completamente caracterizado en términos de flujo como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.5 *El único EPS con apuestas no nulas ocurre cuando $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 2$, y en tal caso el flujo corresponde a:*

$$d_1 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \text{ y } d_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración resulta de analizar el juego por etapas y calculando las mejores respuestas de los jugadores.

- En primer lugar el jugador 1 debe realizar su apuesta w_1.

- Luego el jugador 2 anticipando eso, debe calcular su mejor respuesta a w_1. Por lo tanto, 2 resuelve:
$$\max_{x\geq 0} \alpha_2 \left(\frac{x}{w_1 + x}\right) - x.$$
Lo que da como resultado $w_2 = \max\{\sqrt{\alpha_2 w_1} - w_1, 0\}$. Para que w_2 sea positiva se requiere que $w_1 \leq \alpha_2$. Y se asumirá que esto se tiene, puesto que si hay jugadores apostando 0, sin perder generalidad se puede considerar un juego reducido sacándolos.
- Anticipando que 2 anticipará su jugada, el jugador 1 puede calcular su apuesta óptima resolviendo:
$$\max_{w_1 \leq \alpha_2} \alpha_1 \left(\frac{x}{x + w_2}\right) - x \Leftrightarrow \max_{w_1 \leq \alpha_2} \alpha_1 \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_2 x}}\right) - x.$$
Por lo tanto su apuesta óptima es $w_1 = \min\{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}, \alpha_2\}$.
  (i) Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 2$ entonces $w_1 = \alpha_2$, y en particular $w_2 = 0$. Luego, este caso no es de interés por lo mencionado antes.
  (ii) Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 2$ entonces $w_1 = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}$ y $w_2 = \frac{\alpha_1}{2}$, y el NE queda:
$$d_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2} = \frac{\alpha_1^2/4\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2 \alpha_1^2/4\alpha_2}} = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} \cdot \frac{2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}.$$
$$d_2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2}\right)\frac{2}{\alpha_1} = 1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}.$$

Finalmente, notar que el EPS es único ya que, debido a la concavidad de los pagos del juego, la mejor respuesta de ambos jugadores es única. □

3.2.2. Precio de la Anarquía

Se vio en la sección anterior que si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \leq 2$, entonces $d_1 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$ y $d_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$, luego las utilidades evaluadas en el EPS quedan respectivamente:

$$U_1(d_1) = \frac{\alpha_1^2}{2\alpha_2} \quad U_2(d_2) = \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2}.$$

Al igual que en el caso del mecanismo secuencial simultáneo, se utilizará como medida de bienestar para calcular el SPoA la utilidad agregada de los jugadores, o sea la suma de sus utilidades. Dicho lo anterior, el óptimo social en este caso se obtiene de resolver:

$$\max_{d_1, d_2 \in [0,1],\ d_1 + d_2 = 1} \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2.$$

Claramente el óptimo de ese problema es $d_i = 1$ para el i correspondiente al α_i más grande, o sea el óptimo social ocurre cuando se le entrega toda la capacidad al jugador con mayor pendiente. Además en tal caso, el valor del óptimo es justamente α_i, por lo tanto el óptimo social queda definido como: OPTSOC $\doteq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Teorema 3.6 *El SPoA del juego tiene dos valores posibles según las pendientes de los jugadores:*

$$\text{Si } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 1 \text{ es } 0{,}914.$$
$$\text{Si } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1 \text{ es } 0{,}875.$$

Observación: En rigor, el SPoA corresponde a un análisis de peor caso, luego para este juego se debería establecer 0,875 como su SPoA.

Demostración.

$$\frac{U_1(d_1) + U_2(d_2)}{OPTSOC} = \frac{\frac{\alpha_1^2}{2\alpha_2} + \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{2}}{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \tag{3.1}$$
$$= \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_2 \max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \tag{3.2}$$
$$= \frac{y^2 + 2 - y}{2\max\{y, 1\}}. \tag{3.3}$$

Lo último se obtiene definiendo $y = \alpha_1/\alpha_2$, y asumiendo s.p.g. que $\alpha_2 = 1$. Luego el SPoA se obtiene minimizando esa expresión sujeto a que $y < 2$. El estudio se completa analizando por casos:

(ii.a) Si $y > 1$ entonces (3.2) queda:

$\frac{y}{2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ al minimizar sujeto a $1 < y < 2$, se obtiene $y = \sqrt{2}$.

Por lo tanto, en este caso, el Precio de la Anarquía es: 0,914.

(ii.b) Si $y < 1$ entonces (3.2) queda:

$\frac{y^2+2-y}{2} \Rightarrow$ al minimizar sujeto a $y < 1$, se obtiene $y = \frac{1}{2}$.

En esto caso, el Precio de la Anarquía es: 0,875.

□

Observación: En primer lugar, es importante señalar que el mecanismo secuencial efectivamente mejora la eficiencia, ya que alcanza un mejor PoA que los 3/4 de la versión simultánea. Otro hecho interesante, es que la asignación que da el EPS para el caso de dos jugadores, coincide con la asignación que entrega el mecanismo *óptimo* que proponen Sanghavi y Hajek [12]. Más aún, en dicho trabajo los autores prueban que ningún mecanismo *válido* alcanza mejor eficiencia que 7/8, que es justamente la eficiencia que alcanza el mecanismo secuencial para dos jugadores aquí presentado, ya que $7/8 = 0{,}875$.

3.3. Caso tres jugadores

La generalización natural es considerar el caso de N jugadores, pero el cálculo de EPS, y en consecuencia el estudio del SPoA, se vuelve extremadamente engorroso por el álgebra involucrada, incluso para el caso de funciones de utilidad lineales. En esta sección se analiza el caso de 3 jugadores solamente, para así alivianar la notación y poder entregar mayor intuición sobre el desarrollo del juego.

3.3.1. Análisis del Juego

Consideremos 3 jugadores caracterizados por sus funciones de utilidad $U_i = \alpha_i d_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$. En consecuencia, los pagos que reciben son de la forma $\alpha_i d_i - w_i$. Analicemos lo que debe hacer cada jugador, para encontrar un EPS $w = (w_1, w_2, w_3)$:

- En primer lugar el jugador 3 debe anticipar lo que harán sus rivales, y calcular su función de mejor respuesta. O sea, debe encontrar w_3 que resuelva:

  $$\max_{x \geq 0} \alpha_3 \left(\frac{x}{w_1 + w_2 + x} \right) - x.$$

  Luego,

  $$w_3(w_1, w_2) = \sqrt{\alpha_3(w_1 + w_2)} - (w_1 + w_2). \tag{3.4}$$

  Observación: Se descarta la solución $w_3 = 0$ por el mismo argumento entregado en la demostración del Teorema 3.5. Además, se omite en lo que sigue la dependencia de w_3 en w_1 y w_2, para alivianar notación.

- Ahora el jugador 2, anticipándose a que 3 calculará su mejor respuesta, debe calcular su propia mejor respuesta a la acción que tome el jugador 1. Para esto, debe encontrar w_2 que resuelva:

  $$\max_{x \geq 0} \alpha_2 \left(\frac{x}{w_1 + x + w_3} \right) - x, \text{ que por la Ecuación 3.4 es:}$$
  $$\max_{x \geq 0} \alpha_2 \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_3(w_1 + x)}} \right) - x.$$

  Imponiendo la condición de primer orden (derivada igual a cero) obtenemos lo siguiente:

  $$\begin{aligned} \alpha_2 \left[\sqrt{\alpha_3(w_1 + x)} - \frac{\alpha_3 x}{2\sqrt{(\alpha_3(w_1 + x))}} \right] &= \alpha_3(w_1 + x) \\ \Rightarrow \alpha_2 \alpha_3 (2w_1 + x) &= 2(\alpha_3(w_1 + x))^{3/2} \\ \Rightarrow \alpha_2^2 \cancel{\alpha_3^2} (2w_1 + x)^2 &= 4\alpha_3^{\cancel{3}}(w_1 + x)^3. \end{aligned}$$

  Luego, la mejor respuesta del jugador 2 es $w_2(w_1)$ tal que verifica:

  $$4\alpha_3(w_1 + w_2)^3 - \alpha_2^2(2w_1 + w_2)^2 = 0. \tag{3.5}$$

  Se omite nuevamente la dependencia para ahorrar notación.

- Finalmente, el jugador 1 anticipando que 2 y 3 calcularán sus mejores respuestas, debe optimizar su elección. O sea, elige w_1 que resuelve:

  $$\max_{x \geq 0} \alpha_1 \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_3(x + w_2)}} \right) - x$$

Con w_2 de la Ecuación 3.5.

Imponiendo la condición de primer orden queda:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \left[\sqrt{\alpha_3(x+w2)} - \frac{\alpha_3 x(1+w_2')}{2\sqrt{\alpha_3(x+w_2)}} \right] &= \alpha_3(x+w_2) \\
\Rightarrow \alpha_1(2\alpha_3(x+w_2) - (\alpha_3 x + \alpha_3 x w_2')) &= 2(\alpha_3(x+w_2))^{3/2} \\
\Rightarrow \alpha_1^2 \cancel{\alpha_3^2}(x(1-w_2')+2w_2)^2 &= 4\alpha_3^{\cancel{3}}(x+w_2)^3.
\end{aligned}$$

Luego, w_1 es aquel que resulva la siguiente ecuación:

$$0 = 4\alpha_3(w_1+w_2)^3 - \alpha_1^2(2w_2 + w_1(1-w_2'))^2. \tag{3.6}$$

Donde w_2' representa la derivada de w_2 vista como función de w_1.

Resumamos la caracterización anterior en una proposición.

Proposición 3.7 *Un perfil de estrategias $w = (w_1, w_2, w_3)$ será EPS para el caso de tres jugadores ssi verifica las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{gathered}
w_3(w_1, w_2) = \sqrt{\alpha_3(w_1+w_2)} - (w_1+w_2) \\
4\alpha_3(w_1 + w_2(w_1))^3 - \alpha_2^2(2w_1 + w_2(w_1))^2 = 0 \\
4\alpha_3(w_1 + w_2(w_1))^3 - \alpha_1^2(2w_2(w_1) + w_1(1 - w_2'(w_1)))^2 = 0.
\end{gathered}$$

A pesar de tener esta caracterización de los EPS, no es posible en el caso más general, despejar analíticamente valores de w_1, w_2, w_3, incluso mediante la ayuda de *softwares* de cálculo simbólico como *Maple*, *Sage* o la herramienta de cálculo simbólico de *Matlab*. En rigor, para el caso de $w_2(w_1)$ sí existe una solución no compleja, pero al momento de calcular w_1 es cuando se vuelve demasiado complicado de resolver incluso computacionalmente.

3.3.2. Búsqueda de Equilibrio utilizando derivación implícita

Como no es posible trabajar con la forma explícita de los EPS, en lugar de despejar w_2 como función de w_1 de la Ecuación 3.5, se optó por buscar una relación implícita entre ambas variables. Esto constituye una condición necesaria para ser EPS, por lo que en realidad estamos buscando candidatos a equilibrio. Consideremos la Ecuación 3.5 :

$$4\alpha_3(w_1+w_2)^3 - \alpha_2^2(2w_1+w_2)^2 = 0.$$

Derivando a ambos lados con respecto a w_1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
& 4\alpha_3[3(w_1+w_2)^2(1+w_2')] - \alpha^2[2(2w_1+w_2)(2+w_2')] \\
\Rightarrow\ & 12\alpha_3(w_1+w_2)^2 + 12\alpha_3 w_2'(w_1+w_2)^2 - 4\alpha_2^2(2w_1+w_2) - 2\alpha_2^2 w_2'(2w_1+w_2) = 0 \\
\Rightarrow\ & 12\alpha_3(w_1+w_2)^2 - 4\alpha_2^2(2w_1+w_2) = w_2'[2\alpha_2^2(2w_1+w_2) - 12\alpha_3(w_1+w_2)^2].
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que:

$$w_2' = \frac{6\alpha_3(w_1+w_2)^2 - 2\alpha_2^2(2w_1+w_2)}{\alpha_2^2(2w_1+w_2) - 6\alpha_3(w_1+w_2)^2}. \tag{3.7}$$

La idea ahora será utilizar esta igualdad, en la Ecuación 3.6 de mejor respuesta del jugador 1, y desde ahí tratar de despejar una relación entre ambas variables. Reemplazando allí queda:

$$0 = 4\alpha_3(w_1+w_2)^3 - \alpha_1^2\left[2w_2 + w_1\left(1 - \frac{6\alpha_3(w_1+w_2)^2 - 2\alpha_2^2(2w_1+w_2)}{\alpha_2^2(2w_1+w_2) - 6\alpha_3(w_1+w_2)^2}\right)\right]^2. \tag{3.8}$$

Uniendo esta ecuación con la 3.5- obtenida como mejor respuesta del jugador 2- se puede construir un sistema de ecuaciones para las variables w_1 y w_2. Resolviendo ese sistema con la ayuda de *MAPLE* se obtienen cuatro candidatos a EPS en términos de w_1 y w_2. Cabe recordar que a partir de w_1 y w_2, el valor de w_3 queda completamente determinado por la Ecuación 3.4. Los cuatro equilibrios se pueden hallar en la Sección A de Anexos.

Por la compleja forma que presentan los candidatos a equilibrio encontrados, no es posible descartar a priori alguno por ser negativo o complejo. En ese sentido, es claro que las pendientes de las funciones de utilidad deben cumplir ciertas condiciones para que existan estrategias w_1, w_2 y w_3 positivas, pero no es obvio cuáles son esas condiciones. Lo que sí permiten estos equilibrios, es realizar pruebas numéricas para distintas pendientes, y así encontrar asignaciones que verifiquen las ecuaciones y además sean válidas, en el sentido de ser estrategias positivas.

En el capítulo de Anexos, Sección B, se presentan algunas tablas con pruebas numéricas realizadas, casi todas no corresponden a asignaciones válidas, salvo dos que se presentan a continuación.

	α_1	α_2	α_3	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_2 d_2$	$\alpha_3 d_3$
Equilibrio 1	5	6	7	1,09	2,21	2,88
Equilibrio 2	10	10	10	4,55	3,33	2,11

Tabla 3.1: Candidatos a equilibrio encontrados numéricamente.

La eficiencia para estos potenciales equilibrios se cálcula tomando el cuociente entre la utilidad agregada que se obtiene en cada uno, y el máximo valor de las pendientes, tal como se hizo en la sección de dos jugadores. Luego en este caso:

	Eficiencia
Equilibrio 1	0,88
Equilibrio 2	0,99

Tabla 3.2: Eficiencia de los candidatos a equilibrio.

Como se puede apreciar, el segundo candidato a equilibrio presenta una alta eficiencia, pero esto en ningún caso debe hacer pensar que el SPoA en este caso es así de bueno, ya que como sabemos, corresponde a un análisis de peor caso. Además, el análisis realizado en esta sección se basa en una relación implícita entre estrategias, que corresponde a una condición necesaria para ser EPS, por lo que no hay suficiente información para afirmar que los candidatos son en realidad equilibrios.

Conclusiones y Trabajo Futuro

En términos generales, la conclusión global es que se cumple el principal objetivo planteado en el desarrollo de esta memoria, referido a aumentar el conocimiento que se tiene sobre la unicidad del Equilibrio de Nash para el juego descrito por Johari y Tsitsiklis[6]. Más concretamente, analicemos a continuación los principales resultados que llevan a dicha conclusión.

Para el caso de Capacidades iguales y *Fixed Routing*, el principal resultado lo constituye el Teorema 2.4, en que se prueba que el NE es único en términos de flujo, pero más aún, es equivalente al óptimo de un problema de optimización asociado. Además por otro lado, es posible caracterizarlo variacionalmente vía la Proposición 2.6, que establece que en un NE, para todo jugador, en todos los arcos donde se alcance el mínimo de su asignación, se debe cumplir lo siguiente:

$$U'_r\left(\frac{w_{jr}C}{\sum_{s\in R} w_{js}}\right)\left(1-\frac{w_{jr}}{\sum_{s\in R} w_{js}}\right) \leq \min_{j\in r} \frac{\sum_{s\in R} w_{js}}{C}. \tag{3.9}$$

En este mismo contexto, pero para el caso particular en que la red tiene un arco que es común a todos los jugadores, se logra comprender aún mejor cuál es el único NE. Se prueba en la Proposición 2.3 , que el único NE en términos de flujo es justamente la asignación que obtienen por competir en el arco en común.

Para el caso de Capacidades distintas y *Fixed Routing*, se obtiene el principal resultado del trabajo desarrollado en el marco de esta memoria, que corresponde al Teorema 2.17. En dicho resultado, se establece la unicidad del NE para el caso de una red cualquiera, y jugadores con un sólo camino de interés. Pero además, en el estudio previo a dicho Teorema, fue posible obtener resultados que caracterizan el único equilibrio en casos más particulares. Por ejemplo, en el caso de una red con forma de camino -común a todos los jugadores- se prueba en la Proposición 2.8, que el único NE corresponde a apostar positivamente en el arco de menor capacidad, y sólo pedir en el resto de los arcos. A partir de dicho resultado, se puede demostrar una caracterización variacional análoga a la presentada aquí en la Ecuación 3.9, que se resume en la Proposición 2.9.

Sin perjuicio de todo lo anterior, el caso más general posible que consiste en una red con arcos de distintas capacidades, y jugadores con muchos caminos de interés, continúa siendo un problema abierto interesante. Esto da pie a la siguiente conjetura:

Conjetura 1 No unicidad del NE

Para una red general y jugadores con múltiples caminos de interés, con funciones de utilidad crecientes, cóncavas y continuamente diferenciables, el NE no es único.

La idea para probar dicha conjetura sería buscar un contra ejemplo tratando de explotar el hecho de que en una red general, cuando no hay *Fixed Routing*, el flujo que corre por los arcos no es necesariamente igual para todo NE, como se muestra en el Ejemplo 4. Esta propiedad del caso en que cada jugador tiene un sólo camino era particularmente importante en la demostración de unicidad, y dado que en el caso más general se pierde, podría ser la característica relevante para afrontar el problema.

Sobre el objetivo secundario de aplicar la técnica de cálculo del PoA descrita en [3], es posible afirmar que se cumplió parcialmente. Tanto para el caso de *Fixed Routing* y capacidades iguales, -vía la caracterización que da la Ecuación 3.9- como para el caso de una red con forma de camino común a todos, y capacidades distintas -vía la Proposición 2.9-, se pudo aplicar la técnica con propiedad. Para los casos más generales, la intuición sugiere que no existiría una caracterización variacional del equilibrio, por lo que no se podría aplicar la técnica sin modificarla. En virtud de esto último, un camino para avanzar en este sentido sería modificar la definición de β entregada en la demostración del Teorema 2.7, para poder aplicarla a casos más generales.

Finalmente, sobre el mecanismo secuencial descrito en el último capítulo, se tiene lo siguiente. Para el caso de dos jugadores con funciones de utilidad lineales, fue posible mostrar en el Teorema 3.5 que existe un único EPS, cuyas asignaciones corresponden a:

$$d_1 = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \text{ y } d_2 = 1 - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2},$$

y el SPoA asociado es 0,875. Un hecho interesante es que, tanto la estructura de este EPS como su eficiencia, son análogos al mecanismo *óptimo* para dos jugadores descrito por Sanghavi y Hajek [12], que corresponde a un mecanismo que sí discrimina en precio. Una posible interpretación a este hecho sería que, de cierta forma, la secuencialidad juega un rol de discriminación eliminando casos que no son demasiado eficientes.

Para el caso de tres jugadores, fue posible caracterizar las estrategias óptimas que definen un EPS en la Proposición 3.7, pero lamentablemente resolver explícitamente dichas ecuaciones se vuelve en extremo complejo por el álgebra involucrada, incluso con el apoyo de *softwares* como *Maple*. Sí fue posible establecer una relación implícita entre las estrategias de los jugadores, lo que derivó en un sistema de ecuaciones que permitió realizar algunas pruebas numéricas, hallando dos candidatos a equilibrio que se presentan en la Tabla 3.3.2. En ese sentido, hay bastante terreno fértil para trabajar en el mecanismo secuencial: se podría buscar una caracterización más manejable de los EPS, también algún algoritmo que permita calcular los EPS de manera eficiente, acotar el SPoA usando la estructura del problema, etc.

Para finalizar, establezcamos una conjetura sobre la unicidad del EPS para más de tres jugadores, y luego una sobre la relación entre el orden de los jugadores y la eficiencia alcanzada:

Conjetura 2 No unicidad del EPS

Para el caso de $N \geq 3$ jugadores, con funciones de utilidad lineales $U_i = \alpha_i d_i$, el EPS no es único.

La principal idea que lleva a plantear esta conjetura es que, a medida que se agregan jugadores, el grado de los polinomios que determinan las soluciones aumenta, por lo que en general no habría razón para pensar en una sola solución válida. Un camino para trabajar en este sentido, sería encontrar analíticamente una expresión para las funciones de mejor respuesta de los jugadores, que permita decir algo sobre los determinantes de los polinomios asociados, y así poder descartar -o no- algunas de las soluciones.

Para concluir, una conjetura que a priori resulta intuitiva, y es que la peor eficiencia se alcanza cuando los jugadores que llegan primero son los más ineficientes.

Conjetura 3 *Consideremos N jugadores con funciones de utilidad lineales $U_i = \alpha_i d_i$. Entonces la peor eficiencia, aquella que da el SPoA, se alcanza cuando los jugadores juegan en orden de 1 a N, y además se tiene que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_N$.*

Esta conjetura está motivada por lo obtenido en el caso de dos jugadores en el Teorema 3.6, y además porque la inutición indica que si los jugadores menos eficientes llegan primero, entonces tendrán acceso a mayor capacidad de la que obtendrían en un óptimo social.

Bibliografía

[1] Gerard P Cachon and Martin A Lariviere. An equilibrium analysis of linear, proportional and uniform allocation of scarce capacity. *IIE Transactions*, 31(9):835–849, 1999.

[2] José Correa, Jasper De Jong, Bart De Keijzer, and Marc Uetz. The curse of sequentiality in routing games. In *Web and Internet Economics, 2015 11th Conference on*. WINE, To appear.

[3] José R Correa, Andreas S Schulz, and Nicolás E Stier-Moses. The price of anarchy of the proportional allocation mechanism revisited. In *Web and Internet Economics*, pages 109–120. Springer, 2013.

[4] Jasper de Jong and Marc Uetz. The sequential price of anarchy for atomic congestion games. In *Web and Internet Economics*, pages 429–434. Springer, 2014.

[5] Antonis Dimakis, Rahul Jain, and Jean Walrand. Mechanisms for efficient allocation in divisible capacity networks. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 1264–1269. IEEE, 2006.

[6] Ramesh Johari and John N Tsitsiklis. Efficiency loss in a network resource allocation game. *Mathematics of Operations Research*, 29(3):407–435, 2004.

[7] Frank Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *European transactions on Telecommunications*, 8(1):33–37, 1997.

[8] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *STACS 99*, pages 404–413. Springer, 1999.

[9] Renato Paes Leme, Vasilis Syrgkanis, and Éva Tardos. The curse of simultaneity. In *Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference*, pages 60–67. ACM, 2012.

[10] Rajiv Maheswaran and Tamer Başar. Efficient signal proportional allocation (espa) mechanisms: Decentralized social welfare maximization for divisible resources. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 24(5):1000–1009, 2006.

[11] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V Vazirani. *Algorithmic game theory*, volume 1. Cambridge University Press Cambridge, 2007.

[12] Sujay Sanghavi and Bruce Hajek. Optimal allocation of a divisible good to strategic buyers. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 3, pages 2748–2753. IEEE, 2004.

[13] Aloka Sinha and Achilleas Anastasopoulos. Generalized proportional allocation mechanism design for multi-rate multicast service on the internet. In *Communication, Control, and Computing (Allerton), 2013 51st Annual Allerton Conference on*, pages 146–153. IEEE, 2013.

Anexos

En este capítulo se presentan algunos de los resultados correspondientes al capítulo 3, que por comodidad no fueron incluídos directamente.

Anexo A: Equilibrios encontrados vía derivación implícita.

A continuación se presentan los cuatro candidatos a equilibrio mencionados en el capítulo 3, que se obtuvieron aplicando derivación implícita. Para alivianar un poco la notación llamemos:

$$
\begin{aligned}
A &\doteq 256a^6 - 576a^5b + 228a^4b^2 + 142a^3b^3 - 63a^2b^4 + 24ab^5 + 16b^6. \\
B &\doteq 256a^6 + 576a^5b + 228a^4b^2 - 142a^3b^3 - 63a^2b^4 - 24ab^5 + 16b^6.
\end{aligned}
$$

(i) El primer Equilibrio está dado por:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w_1} = \frac{1}{54}[-1873408a^{10}b^4 - \frac{262144}{27b}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}a^{12}) + (\frac{4096}{9}(16a^3 - \\
&18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^{11} + \\
&(\frac{2424832}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))a^{11} - (\frac{3166208}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \\
&\sqrt{A}))ba^{10} + (\frac{2236928}{3}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^2a^9 - (\frac{7985920}{9}(16a^3 - 18a^2b - \\
&3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^3a^8 + (\frac{1518688}{3}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^4a^7 + (\frac{250415}{9}(16a^3 - \\
&18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^5a^6 - (\frac{1825325}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^6a^5 + \\
&(85948(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^7a^4 + (\frac{3520}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \\
&\sqrt{A}))b^8a^3 - (\frac{58624}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^9a^2 - (\frac{7168}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - \\
&4b^3 + \sqrt{A}))b^{10}a + 12288a^2b^12 - 49152a^12b^2 + 464896a^11b^3 + 4124544a^9b^5 - 5195264a^8b^6 + \\
&3323891a^7b^7 - 190602a^6b^8 - 1160576a^5b^9 + 603488a^4b^10 - 39936a^3b^{11}] \\
&/[bc(\frac{-8192}{27b}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A})a^9 + (\frac{72704}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \\
&\sqrt{A}))a^8 - \\
&(9984(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))ba^7 + (\frac{527968}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^2a^6 - \\
&(\frac{550036}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^3a^5 + (\frac{72898}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 +
\end{aligned}
$$

$\sqrt{A}))b^4a^4 + (\frac{109042}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^5a^3 - (\frac{132760}{27}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^6a^2 + (\frac{3584}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^7a - (\frac{2048}{9}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A}))b^8 - 1536a^9b^2 + 13952a^8b^3 - 53312a^7b^4 + 108885a^6b^5 - 121394a^5b^6 + 71756a^4b^7 + 19968a^3b^8 - 52800a^2b^9)]$.

$\mathbf{w_2} = \frac{-1}{54bc}(16a^3 - 18a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{A})$.

(ii) El segundo Equilibrio está dado por:

$\mathbf{w_1} = \frac{1}{54}[-1873408a^{10}b^4 + \frac{262144}{27b}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}a^{12}) - (\frac{4096}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^{11} - (\frac{2424832}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))a^{11} + (\frac{3166208}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))ba^{10} - (\frac{2236928}{3}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^2a^9 + (\frac{7985920}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^3a^8 - (\frac{1518688}{3}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^4a^7 - (\frac{250415}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^5a^6 + (\frac{1825325}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^6a^5 - (85948(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^7a^4 - (\frac{3520}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^8a^3 + (\frac{58624}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^9a^2 + (\frac{7168}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^{10}a + 12288a^2b^12 - 49152a^12b^2 + 464896a^11b^3 + 4124544a^9b^5 - 5195264a^8b^6 + 3323891a^7b^7 - 190602a^6b^8 - 1160576a^5b^9 + 603488a^4b^10 - 39936a^3b^{11}]$
$/[bc(\frac{8192}{27b}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A})a^9 - (\frac{72704}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))a^8 + (9984(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))ba^7 - (\frac{527968}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^2a^6 + (\frac{550036}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^3a^5 - (\frac{72898}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^4a^4 - (\frac{109042}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^5a^3 + (\frac{132760}{27}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^6a^2 - (\frac{3584}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^7a + (\frac{2048}{9}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A}))b^8 - 1536a^9b^2 + 13952a^8b^3 - 53312a^7b^4 + 108885a^6b^5 - 121394a^5b^6 + 71756a^4b^7 + 19968a^3b^8 - 52800a^2b^9)]$.

$\mathbf{w_2} = \frac{-1}{54bc}(-16a^3 + 18a^2b + 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{A})$.

(iii) El tercer Equilibrio está dado por:

$\mathbf{w_1} = \frac{-1}{54}[-1873408a^{10}b^4 + 12288a^2b^{12} - \frac{2424832}{27}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}a^{11} - (\frac{3166208}{9}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}))ba^{10} - (\frac{2236928}{3}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}))b^2a^9 - (\frac{7985920}{9}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}))b^3a^8 - (\frac{1518688}{3}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}))b^4a^7 + (\frac{250415}{9}(-16a^3 - 18a^2b + 3ab^2 - 4b^3 + \sqrt{B}))b^5a^6 +$

$(\frac{1825325}{9}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^6a^5+(85948(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+$
$\sqrt{B}))b^7a^4-(\frac{3520}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^8a^3-(\frac{58624}{27}(-16a^3-18a^2b+$
$3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^9a^2+(\frac{7168}{9}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^{10}a-\frac{262144}{27b}(-16a^3-$
$18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}a^{12})+(\frac{4096}{9}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^{11}-49152a^12b^2-$
$464896a^{11}b^3-4124544a^9b^5-5195264a^8b^6-3323891a^7b^7-190602a^6b^8+1160576a^5b^9+$
$603488a^4b^10+39936a^3b^{11}]$
$/[bc(\frac{-8192}{27b}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B})a^9-(\frac{72704}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+$
$\sqrt{B}))a^8+(9984(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))ba^7-(\frac{527968}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-$
$4b^3+\sqrt{B}))b^2a^6-(\frac{550036}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^3a^5-(\frac{72898}{9}(-16a^3-$
$18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^4a^4+(\frac{109042}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^5a^3+$
$(\frac{132760}{27}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^6a^2+(\frac{3584}{9}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-$
$4b^3+\sqrt{B}))b^7a+(\frac{2048}{9}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}))b^8-1536a^9b^2-13952a^8b^3-$
$53312a^7b^4-108885a^6b^5-121394a^5b^6-71756a^4b^7+19968a^3b^8+52800a^2b^9)].$

$\mathbf{w_2}=\frac{-1}{54bc}(-16a^3-18a^2b+3ab^2-4b^3+\sqrt{B}).$

(iv) El cuarto Equilibrio está dado por:

$\mathbf{w_1}=\frac{-1}{54}[-1873408a^{10}b^4+12288a^2b^{12}+\frac{2424832}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}a^{11}+$
$(\frac{3166208}{9}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))ba^{10}+(\frac{2236928}{3}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+$
$\sqrt{B}))b^2a^9+(\frac{7985920}{9}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^3a^8+(\frac{1518688}{3}(16a^3+18a^2b-$
$3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^4a^7-(\frac{250415}{9}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^5a^6-(\frac{1825325}{9}(16a^3+$
$18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^6a^5-(85948(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^7a^4+(\frac{3520}{27}(16a^3+$
$18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^8a^3+(\frac{58624}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^9a^2-(\frac{7168}{9}(16a^3+$
$18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^{10}a+\frac{262144}{27b}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}a^{12})-(\frac{4096}{9}(16a^3+$
$18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^{11}-49152a^12b^2-464896a^{11}b^3-4124544a^9b^5-5195264a^8b^6-$
$3323891a^7b^7-190602a^6b^8+1160576a^5b^9+603488a^4b^10+39936a^3b^{11}]$
$/[bc(\frac{8192}{27b}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B})a^9+(\frac{72704}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+$
$\sqrt{B}))a^8+(9984(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))ba^7+(\frac{527968}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+$
$\sqrt{B}))b^2a^6+(\frac{550036}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^3a^5+(\frac{72898}{9}(16a^3+18a^2b-3ab^2+$
$4b^3+\sqrt{B}))b^4a^4-(\frac{109042}{27}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^5a^3-(\frac{132760}{27}(16a^3+18a^2b-$
$3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^6a^2-(\frac{3584}{9}(16a^3+18a^2b-3ab^2+4b^3+\sqrt{B}))b^7a-(\frac{2048}{9}(16a^3+18a^2b-$

$3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{B}))b^8 - 1536a^9b^2 - 13952a^8b^3 - 53312a^7b^4 - 108885a^6b^5 - 121394a^5b^6 - 71756a^4b^7 + 19968a^3b^8 + 52800a^2b^9)]$.

$$\mathbf{w_2} = \frac{1}{54bc}(16a^3 + 18a^2b - 3ab^2 + 4b^3 + \sqrt{B}).$$

Anexo B: Pruebas numéricas

En esta sección se presentan algunas tablas con las pruebas numéricas realizadas a partir de las relaciones encontradas en el capítulo 3, para el caso de tres jugadores. Los candidatos a equilibrio se numeran consistentemente con la sección anterior de Anexos.

(i) Eq. 1 Los resultados de las pruebas utilizando distintas pendientes son los siguientes:

α_1	α_2	α_3	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_2 d_2$	$\alpha_3 d_3$
1	5	10	$-0{,}04$	0,4	9,56
1	10	10	$-0{,}04$	0,9	9,53
1	10	5	$-0{,}08$	1,8	4,53
10	5	1	133,99	$-31{,}14$	$-6{,}17$
10	1	5	168,92	$-15{,}54$	$-1{,}75$
10	10	10	$-1{,}22$	3,33	7,89
100	50	10	1339,97	$-311{,}41$	$-61{,}71$
5	6	7	$-0{,}51$	1,66	5,78

Tabla 3.3: Resultados numéricos para el primer candidato a equilibrio.

(ii) Eq. 2 Los resultados de las pruebas utilizando distintas pendientes son los siguientes:

α_1	α_2	α_3	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_2 d_2$	$\alpha_3 d_3$
1	5	10	$-0{,}05$	1,18	8,11
1	10	10	$-0{,}1$	4,57	6,47
1	10	5	$-0{,}2$	9,13	1,47
10	5	1	$-6{,}22$	8,92	$-0{,}16$
10	1	5	2,39	$-0{,}02$	*complejo*
10	**10**	**10**	**4.55**	**3.33**	**2.11**
100	50	10	$-62{,}2$	89,2	$-1{,}62$
5	**6**	**7**	**1.09**	**2.21**	**2.88**

Tabla 3.4: Resultados numéricos para el segundo candidato a equilibrio, en negrita asignaciones válidas.

(iii) Eq. 3 Los resultados de las pruebas utilizando distintas pendientes son los siguientes:

α_1	α_2	α_3	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_2 d_2$	$\alpha_3 d_3$
1	5	10	$-0{,}07$	0,6	9,46
1	10	10	$-0{,}06$	1,09	9,48
1	10	5	$-0{,}11$	2,19	4,48
10	5	1	$-6{,}23$	9,71	$-0{,}32$
10	1	5	7,57	$-0{,}001$	*complejo*
10	10	10	$-1{,}24$	3,98	7,26
100	50	10	$-62{,}4$	97,1	$-3{,}2$
5	6	7	$-0{,}53$	2,06	5,33

Tabla 3.5: Resultados numéricos para el tercer candidato a equilibrio.

(iv) Eq. 4 Los resultados de las pruebas utilizando distintas pendientes son los siguientes:

α_1	α_2	α_3	$\alpha_1 d_1$	$\alpha_2 d_2$	$\alpha_3 d_3$
1	5	10	$-0{,}06$	1,07	8,46
1	10	10	$-0{,}11$	4,34	6,81
1	10	5	$-0{,}23$	8,69	1,81
10	5	1	$-222{,}9$	143,04	$-5{,}32$
10	1	5	$-189{,}7$	19,99	$-1{,}59$
10	10	10	$-13{,}46$	19,54	3,92
100	50	10	$-2228{,}9$	1430,4	$-53{,}1$
5	6	7	$-4{,}29$	7,71	3,99

Tabla 3.6: Resultados numéricos para el cuarto candidato a equilibrio.